Прикладная математика & Физика, 2025, том 57, № 2. С. 111–116.
Applied Mathematics & Physics, 2025, Volume 57, No 2. P. 111–116.

УДК 517.95
MSC 35J20
Оригинальное исследование

DOI 10.52575/2687-0959-2025-57-2-111-116
EDN KEEDOW

Задача с препятствием на стратифицированном множестве

Ощепкова С. Н.[1], **Пенкин О. М.**[2],
[1] Воронежский государственный университет инженерных технологий,
Россия, 394036, г. Воронеж, пр. Революции, 19
osonia@mail.ru
[2] Воронежский государственный университет,
Россия, 394018, г. Воронеж, Университетская пл., 1
o.m.penkin@gmail.com

Аннотация. В статье рассматривается аналог задачи с препятствием для системы, составленной из струн и мембран, а также для её обобщения на многомерный случай. Малые перемещения такой системы моделируются эллиптическим уравнением второго порядка (вне зоны контакта системы с препятствием) на стратифицированном множестве, оснащённым условием Дирихле на границе. Основной результат работы состоит в доказательстве разрешимости данной задачи в пространстве соболевского типа. Основным условием для этого является так называемая прочность стратифицированного множества.

Ключевые слова: стратифицированное множество, лапласиан, вариационная задача, задача с препятствием

Для цитирования: Ощепкова С. Н., Пенкин О. М. 2025. Задача с препятствием на стратифицированном множестве. *Прикладная математика & Физика*, 57(2): 111–116. DOI 10.52575/2687-0959-2025-57-2-111-116 EDN KEEDOW

Original Research

The Obstacle Problem on the Stratified Set

Sofia N. Oshchepkova[1], **Oleg M. Penkin**[2],
[1] Voronezh State University of Engineering Technologies,
19 Revolutsii Av., Voronezh 394036, Russia
osonia@mail.ru
[2] Samara National Research University,
1 Universitetskaya Sq., Voronezh 394018, Russia
o.m.penkin@gmail.com

Abstract. In this paper we consider an analog of the obstacle problem for a mechanical system composed of strings and membranes; as well as a generalization of this problem to multidimensional case. Small displacements of this system under external small loads may be modeled as an elliptic equation of second order (outside of a contact zone) on the stratified set, equipped with Dirichlet's condition on the boundary. The main result of this job is a proof of solvability of a corresponding boundary value problem in sobolev-type space. The main assumption is so-called firmness of the stratified set.

Keywords: Stratified Set, Laplacian, Variational Problem, Obstacle Problem

For citation: Oshchepkova S. N., Penkin O. M. 2025. The Obstacle Problem on the Stratified Set. *Applied Mathematics & Physics*, 57(2): 111–116. (in Russian) DOI 10.52575/2687-0959-2025-57-2-111-116 EDN KEEDOW

---

1. Описание основных понятий.

1.1. Стратифицированное множество. В определении понятия стратифицированного множества мы в целом следуем работе [1], но модифицируем первоначальное определение с учётом специфики рассматриваемых нами задач. Требуемую нами модификацию можно найти также в [2, 3, 4].

Множество $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ мы называем *стратифицированным*, если оно связно и является объединением конечного числа многообразий (страт) σ_{kj} (первый индекс означает размерность многообразия, а второй служит для автономной нумерации страт данной размерности), имеющих компактные замыкания и удовлетворяющих следующей паре условий.

i Пересечение замыканий $\overline{\sigma}_{kj}$, $\overline{\sigma}_{ml}$ любых страт σ_{kj}, σ_{ml}, если оно не пусто, является объединением страт.

ii Граница $\partial\sigma_{kj} = \overline{\sigma}_{kj} \setminus \sigma_{kj}$ также является объединением страт.

Всюду далее страты считаются подмногообразиями в $\mathbb{R}^n$. Одно и то же множество Ω можно стратифицировать многими способами. Во избежание недоразумений мы будем считать, что набор страт (обозначим его $\mathcal{S}$) фиксирован. Более того, следует ещё задать способ «сборки» Ω из элементов набора

$\mathcal{S}$ – отображение φ, отождествляющее некоторые граничные страты различных страт. Таким образом, под стратифицированным множеством следует понимать тройку $\{\Omega, \mathcal{S}, \varphi\}$. Тем не менее мы само Ω намерены называть стратифицированным, не упоминая остальных элементов тройки.

Условия i, ii встречаются при определении клеточного комплекса. Помимо них накладываются ещё требования на отображение φ. Мы сформулируем это условие в виде геометрического требования к результату сборки – множеству Ω, рассматриваемому как топологическое пространство с индуцированной из $\mathbb{R}^n$ топологией. А именно, мы потребуем, чтобы для любой точки $X \in \sigma_{kj} \subset \Omega$ существовал шар $B_r(X) \subset \mathbb{R}^n$ и диффеоморфизм $\Phi: B_r(X) \to B_r(X)$ такие, что образ $\Phi(B_r(X) \cap Z)$ части «кривой» звезды Z, состоящей из σ_{kj} и примыкающих к ней $(k+1)$-мерных страт, является объединением k-мерного шара (образа $\sigma_{kj} \cap B_r(X)$) и опирающихся на него, как на диаметральную плоскость, $(k+1)$-мерных полушарий – образов $\sigma_{k+1i} \cap B_r(X)$, соответствующих всем $(k+1)$-мерным стратам, примыкающим к σ_{kj}; мы говорим, что страта σ_{k+1i} примыкает к страте σ_{kj}, если последняя входит в границу первой. Следующий рисунок иллюстрирует процесс этого «выпрямления».

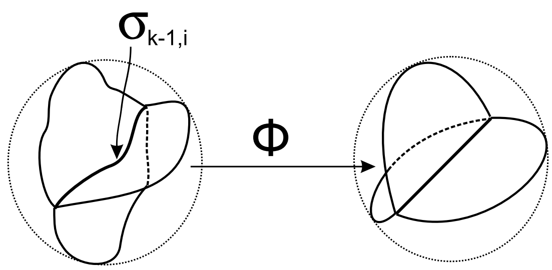

Рис. 1. Локальное выпрямление
Fig. 1. Local straightening

Всюду далее Ω предполагается представленным в виде объединения $\Omega = \Omega_0 \cup \partial\Omega_0$, в котором Ω_0 – связное открытое подмножество Ω (мы здесь пользуемся упомянутой выше индуцированной топологией), составленное из страт набора $\mathcal{S}$ и удовлетворяющее равенству $\overline{\Omega_0} = \Omega$. Множество Ω_0 является аналогом внутренности некоторой замкнутой области, а разность $\partial\Omega_0 = \Omega \setminus \Omega_0$ – аналог границы; в топологии Ω множество $\partial\Omega_0$ действительно является топологической границей множества Ω_0. Обсуждаемый далее стратифицированный лапласиан будет действовать на функции в пределах Ω_0. Формально определение множества Ω_0 не исключает случая $\Omega_0 = \Omega$ и, как следствие пустоты границы, но в настоящей работе мы будем предполагать, что $\partial\Omega_0 \neq \varnothing$.

1.2. Стратифицированная мера. Каждая страта σ_{kj}, как подмногообразие пространства $\mathbb{R}^n$, наследует риманову метрику, а с ней и меру Лебега μ_{kj}. Из этих мер мы сконструируем стратифицированную меру μ, определяя её на измеримых подмножествах $\omega \subset \Omega$ формулой

$$\mu(\omega) = \sum_{\sigma_{kj} \in \mathcal{S}} \mu_{kj}(\omega_{kj}),$$

где $\omega_{kj} = \omega \cap \sigma_{kj}$. При этом множество $\omega \subset \Omega$ назовём *μ-измеримым*, если каждое пересечение ω_{kj} измеримо в смысле k-мерной меры Лебега на σ_{kj}. Нетрудно заметить, что множество $\mathcal{M}$ всех μ-измеримых множеств является σ-алгеброй на Ω. Измеримость функции $f: \Omega \to \mathbb{R}$ определяется стандартно: f является μ-измеримой, если лебеговы множества $L_f(c) = \{X \in \Omega : f(X) \leq c\}$ принадлежат $\mathcal{M}$ при всех $c \in \mathbb{R}$. Нетрудно заметить, что интеграл Лебега μ-измеримой функции по μ-измеримому множеству ω сводится к сумме

$$\int\limits_{\omega} f\, d\mu = \sum_{\sigma_{kj} \in \mathcal{S}} \int\limits_{\omega_{kj}} f\, d\mu.$$

В правой части равенства вместо $d\mu$, строго говоря, следовало бы писать $d\mu_{kj}$; однако нам удобно опускать индексы, если только это не может вызвать недоразумений.

1.3. Дивергенция и лапласиан. Векторное поле $\vec{F}$ в пространстве $\mathbb{R}^n$ называется *касательным* к Ω_0, если для любой страты $\sigma_{kj} \subset \Omega_0$ и любой точки $X \in \sigma_{kj}$ вектор $\vec{F}(X)$ принадлежит касательному, в обычном дифференциально-геометрическом смысле, пространству $T_X\sigma_{kj}$.

Обозначение $\vec{C}^1(\Omega_0)$ применяется к пространству касательных векторных полей $\vec{F}$ на Ω_0, сужения $\vec{F}|_{\sigma_{ki}}$ которых на каждую внутреннюю страту $\sigma_{ki} \subset \Omega_0$ непрерывно дифференцируемы и имеют непрерывное продолжение в каждую точку любой примыкающей внутренней, т. е. лежащей в Ω_0, страты на единицу меньшей размерности. Непрерывность поля $\vec{F}$ в целом на Ω_0 не предполагается. Последнее означает, что касательное векторное поле из $\vec{C}^1(\Omega_0)$ являет собой набор независимых полей класса C^1 в количестве, равном количеству страт в Ω_0.

Дивергенция касательного векторного поля $\vec{F} \in \vec{C}^1(\Omega_0)$ в точке $X \in \sigma_{kj} \subset \Omega_0$ задаётся равенством

$$\nabla \cdot \vec{F}(X) = \nabla_k \cdot \vec{F}(X) + \sum_{\sigma_{k+1i} \succ \sigma_{kj}} \vec{F}(X + 0 \cdot \vec{\nu}_i) \cdot \vec{\nu}_i, \qquad (1)$$

где суммирование проводится по всем $(k+1)$-мерным стратам σ_{k+1i}, примыкающим к σ_{kj} (запись $\sigma_{k+1i} \succ \sigma_{kj}$ под знаком суммы выражает факт этого примыкания). Символ ∇_k в правой части обозначает оператор обычной k-мерной дивергенции, применённой к сужению $\vec{F}$ на страту σ_{kj}, $\vec{\nu}_i$ — единичная внутренняя нормаль к σ_{kj} в точке X, направленная внутрь σ_{k+1i} по касательной к σ_{k+1i} (см. следующий рисунок), а $\vec{F}(X + 0 \cdot \vec{\nu}_i)$ — предел $\vec{F}(Y)$ при $Y \in \sigma_{k+1i}$, стремящемся к X изнутри страты $\sigma_{k+1i} \succ \sigma_{kj}$ вдоль непрерывной кривой.

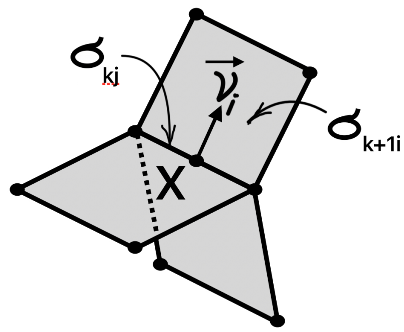

Рис. 2. К определению дивергенции
Fig. 2. Towards the definition of divergence

Существование таких пределов можно потребовать и в случае, когда σ_{kj} – граничная страта, а σ_{k+1i} – внутренняя; множество векторных полей из $\vec{C}^1(\Omega_0)$, обладающих таким свойством обозначается $\vec{C}^1(\Omega)$. Сразу не видно, что определённая нами дивергенция является точным аналогом классической, но можно показать, что $\nabla \cdot \vec{F}(X)$, как и в обычной ситуации, является плотностью потока векторного поля в точке X, отнесённой к стратифицированной мере μ, определённой в предыдущем пункте. Подробнее об этом см. [2].

Примером касательного векторного поля является градиент ∇u скалярной функции u, сужение которой на каждую внутреннюю страту непрерывно дифференцируемо. В этом случае ∇u представляет собой просто набор градиентов этих сужений. Если $\nabla u \in \vec{C}^1(\Omega_0)$ (множество таких функций обозначим через $C^2(\Omega_0)$), то оператор $\Delta u = \nabla \cdot (\nabla u)$ естественно назвать стратифицированным лапласианом. Так определённый лапласиан часто называют «жёстким». Можно также определить более общий аналог оператора Лапласа $\nabla \cdot (p \nabla u)$, где p – так называемая стратифицированная константа, то есть на каждой страте p принимает свое постоянное значение.

В этой работе мы будем иметь дело не с классическими, а слабыми производными, поэтому определим здесь аналог пространства Соболева $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$, а именно определим пространство $\overset{\circ}{H}{}^1_\mu(\Omega)$ как пополнение пространства непрерывных на Ω, обращающихся в нуль на $\partial\Omega_0$ и непрерывно дифференцируемых в каждой страте функций по норме, определяемой скалярным произведением

$$< u, v >= \int\limits_{\Omega_0} \nabla u \cdot \nabla v \, d\mu.$$

Здесь, конечно, нужно предполагать, что градиенты должны быть квадратично суммируемыми на каждой страте σ_{kj} по k-мерной мере Лебега.

1.4. Интегральные тождества. Здесь приводятся аналоги классических интегральных тождеств, играющих решающую роль в наших рассмотрениях. Следующее утверждение является аналогом теоремы Гаусса – Остроградского или, как часто говорят, теоремы о дивергенции.

Теорема 1 (о дивергенции). *Пусть $\vec{F} \in \vec{C}^1(\Omega_0)$, тогда*

$$\int\limits_{\partial\Omega_0} (\vec{F})_\nu \, d\mu = -\int\limits_{\Omega_0} \nabla \cdot \vec{F} \, d\mu. \qquad (2)$$

Здесь $(\vec{F})_\nu$ – сумма, аналогичная второму слагаемому в определении дивергенции:

$$(\vec{F})_\nu(X) = \sum_{\sigma_{k+1i} \succ \sigma_{kj}} \vec{F}(X + 0 \cdot \vec{\nu}_i) \cdot \vec{\nu}_i,$$

но суммирование теперь распространяется только на страты $\sigma_{k+1i} \subset \Omega_0$; подчеркнём, что сейчас σ_{kj} – граничная страта, поэтому некоторые из примыкающих к ней страт $\sigma_{k+1i} \succ \sigma_{kj}$ тоже могут оказаться граничными. Знак «минус» в формуле (2) *связан с тем, что всюду мы пользуемся внутренними нормалями.*

Доказательство этой теоремы имеется в книге [2]. Если мы положим в формуле (2) $\vec{F} = v\nabla u$, где $u \in C^2(\Omega)$ (так мы будем обозначать множество таких функций $u \in C^1_\sigma(\Omega_0) \cap C(\Omega)$, что $\nabla u \in \vec{C}^1(\Omega_0)$), а $v \in C^1_\sigma(\Omega_0) \cap C(\Omega)$, то получим стратифицированный аналог первой формулы Грина:

$$\int\limits_{\Omega_0} v\Delta u\, d\mu + \int\limits_{\Omega_0} \nabla v \cdot \nabla u\, d\mu = -\int\limits_{\partial\Omega_0} v(\nabla u)_\nu\, d\mu. \tag{3}$$

2. Задача с препятствием. Здесь мы обсудим обобщение известной задачи с препятствием (см. например, [5]) на случай стратифицированного множества. Следующий рисунок иллюстрирует постановку задачи в двумерном случае.

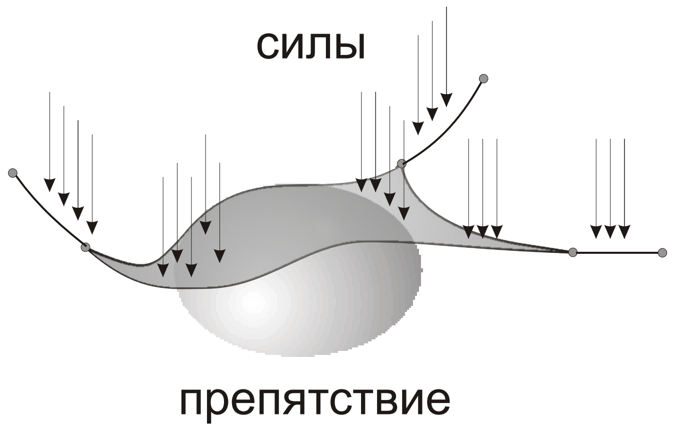

Рис. 3. Механическая система с препятствием
Fig. 3. Mechanical system with obstacle

Здесь показана система, состоящая из мембран (двумерные страны) и струн (одномерные страты). Предполагается, что сначала система была растянута в плоскости и закреплена на границе. Затем, под действием внешней нагрузки, приложенной ортогонально к плоскости, система испытывает перемещения. Помимо внешней нагрузки, эти перемещения обусловлены ещё и препятствием. Препятствие создаётся фиксированным абсолютно твёрдым телом, поверхность которого может быть представлена как график некоторой функции.

Мы будем рассматривать операторы вида $\nabla \cdot (p\nabla u) - qu$ в предположении, что коэффициенты удовлетворяют следующим требованиям: p — строго положительная функция такая, что $p\nabla u \in \vec{C}^1(\Omega_0)$, а $q \in C_\sigma(\Omega_0)$ – неотрицательная. Малая внешняя нагрузка задаётся как функция $f \in C_\sigma(\Omega_0)$. Поскольку мы здесь интересуемся слабыми решениями, можно было бы считать, что эти функции принадлежат $L^2_\mu(\Omega_0)$.

Относительно препятствия предполагается, что описывающая его функция ϕ принадлежит соболевскому пространству $H^1_\mu(\Omega)$.

Перемещения u определяются следующей вариационной задачей

$$\int\limits_{\Omega_0} (p|\nabla u|^2 + qu^2 - 2fu)d\mu = \min_{v\in K} \int\limits_{\Omega_0} (p|\nabla v|^2 + qv^2 - 2fv)d\mu, \tag{4}$$

где K – выпуклое замкнутое подмножество пространства $H^1_\mu(\Omega)$, определяемое следующим образом:

$$K = \{u \in H^1_\mu(\Omega) :\ u - g \in \overset{\circ}{H}{}^1_\mu(\Omega),\ u(x) \ge \phi(x) \text{ п.в.}\}, \tag{5}$$

где $g \in H^1(\Omega)$ – фиксированная функция.

Замечание 1. Мы ограничиваемся слабой формулировкой разрешимости задачи (4) в пространстве $H^1_\mu(\Omega)$, поскольку в рассматриваемых нами условиях она может не иметь классического решения даже в случае отсутствия контакта между системой и препятствием.

Стандартным образом (схема изложена, например, в [5]) задача (4) может быть сведена к вариационному неравенству, т. е. к решению задачи, в которой требуется найти такую функцию $u \in K$, что

$$a(u, v-u) - (f, v-u)_\mu \ge 0,\ \forall v \in K, \tag{6}$$

где $(f, v-u)_\mu = \int\limits_\Omega f(v-u)\,d\mu$, а форма $a(u,v)$ определяется соотношением

$$a(u,v) = \int\limits_{\Omega_0} (p\nabla u \cdot \nabla v + quv)d\mu. \tag{7}$$

Разрешимость описанной задачи зависит от геометрического устройства стратифицированного множества и представления его в виде пары $(\Omega_0,\ \partial\Omega_0)$. Нужные нам требования формализуются в виде прочности стратифицированного множества.

Определение. Назовём пару $(\Omega_0,\ \partial\Omega_0)$ прочной, если любую страту $\sigma_{kj} \subset \Omega_0$ можно соединить с какой-нибудь граничной стратой σ_{ml} цепочкой страт $\sigma_{k_1 j_1}, \sigma_{k_2 j_2} \dots, \sigma_{k_p j_p}$ – назовём её прочной цепочкой – со следующими свойствами:

- $\sigma_{k_1 j_1} = \sigma_{kj}$, $\sigma_{k_p j_p} = \sigma_{ml}$;
- для любого $1 \le q \le p-1$ либо $\sigma_{k_q j_q} \prec \sigma_{k_{q+1} j_{q+1}}$, либо $\sigma_{k_q j_q} \succ \sigma_{k_{q+1} j_{q+1}}$;
- $|k_{q+1} - k_q| = 1$ для любого $1 \le q \le p-1$;
- все $\sigma_{k_q j_q}$, кроме $\sigma_{k_p j_p}$, лежат в Ω_0.

Из условия прочности следует неравенство Пуанкаре – Стеклова (см. [6]):

$$\int\limits_\Omega u^2 d\mu \le C \int\limits_{\Omega_0} |\nabla u|^2 d\mu, \tag{8}$$

которое имеет место для любой функции $u \in \overset{\circ}{H}{}^1_\mu(\Omega)$ с независящей от u константой C.

Теорема 2. *Пусть Ω является прочным множеством. Тогда задача (6) имеет единственной решение в K.*

Доказательство. Ограниченная билинейная форма $a(u,v)$ является коэрцитивной (см. ниже), что легко следует из неравенства Пуанкаре – Стеклова. Таким образом, доказываемое нами утверждение является следствием хорошо известной теоремы о вариационных неравенствах в гильбертовом пространстве (см., например, [5]). ■

Мы называем форму $a(u,v)$ коэрцитивной, если $a(u,u) \ge C\|u\|_\mu^2$ $(C > 0)$, где норма $\|u\|_\mu$ определяется формулой

$$\|u\|_\mu^2 = \int\limits_\Omega u^2(x)\,d\mu.$$

Замечание 2. Множество $\mathcal{N} = \{x \in \Omega_0 : u(x) > \phi(x)\}$ называется множеством некоинцидентности решения u. Это множество, очевидно, открыто. Нетрудно показать, что обсуждаемое нами решение u вариационного неравенства (6) является слабым решением задачи

$$\int\limits_{\mathcal{N}} (p\nabla u \nabla\varphi + qu\varphi)d\mu = \int\limits_{\mathcal{N}} f\varphi d\mu, \forall\varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{N}),$$

где $\mathcal{D}(\mathcal{N})$ — пространство финитных функций с носителями в $\mathcal{N}$.

Если положить $K = \overset{\circ}{H}{}^1_\mu(\Omega)$, то вариационное неравенство (6) превращается в вариационное равенство

$$a(u,v) = (f,v)_\mu,\ \forall v \in \overset{\circ}{H}{}^1_\mu(\Omega),$$

где $(f,v)_\mu = \int\limits_\Omega fv\,d\mu$. В этом случае, используя формулу Грина, нетрудно убедиться, что u является слабым решением однородной задачи Дирихле (т. е. $u = 0$ на границе $\partial\Omega_0$) для дифференциального оператора, имеющего на каждой страте σ_{kj} следующий вид:

$$(-\Delta_p u_{kj} + qu_{kj})(X) - \sum_{\sigma_{kj} \prec \sigma_{k+1i}} p_{k+1i}\,\vec{\nu}_i \cdot \nabla u_{k+1i}(X + 0\cdot\vec{\nu}_i) = f_{kj}.$$

Полученный нами результат обобщает частные результаты работ [7, 8, 9].

Список литературы

1. Pham F. Introduction a l'étude topologique des singularités de Landau. Paris: Gauthier-Villars Éditeur; 1967. 142 p.
2. Покорный Ю.В., Пенкин О.М., Прядиев В.Л., Боровских А.В., Лазарев К.П., Шабров С.А. Дифференциальные уравнения на геометрических графах. М.: Физматлит; 2005. 272 с.
3. Даирбеков Н.С., Пенкин О.М., Сарыбекова Л.О. Аналог неравенства Соболева на стратифицированном множестве. *Алгебра и анализ.* 2018;30(5):149-158. DOI: https://doi.org/10.1090/spmj/1573
4. Даирбеков Н.С., Пенкин О.М., Сарыбекова Л.О. Неравенство Пуанкаре и p-связность стратифицированного множества. *Сибирский математический журнал.* 2018;59(6):1291-1302. DOI: https://doi.org/10.17377/smzh.2018.59.606
5. Фридман А. Вариационные принципы и задачи со свободными границами. М.: Наука; 1990. 536 с.
6. Gavrilov A., Nicaise S., Penkin O. Poincare's inequality on stratified sets and applications. *Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications.* 2003;55:195-213.
7. Ali Mehmeti F. Nonlinear waves in networks. Mathematical Research, 80, Academie Verlag, Berlin, 1994. 171 p.
8. Below J. von. A characteristic equation associated to an eigenvalue problem on c^2-networks. Linear algebra and appl. 1985, 71, 309-325.
9. Nicaise S. Polygonal interface problems. Peter Lang Verlag, 1993. 250 p.

References

1. Pham F. Introduction a l'étude topologique des singularités de Landau. Paris: Gauthier-Villars Éditeur; 1967. 142 p.
2. Pokornyi YV, Penkin OM, Pryadiev VL, Borovskikh AV, Lazarev KP, Shabrov SA. Differentsial'nye uravneniya na geometricheskikh grafakh [Differential equations on geometric graphes]. Moscow: Fizmatlit; 2005. 272 p. (In Russ.)
3. Dairbekov NS, Penkin OM, Sarybekova LO. An analog of the Sobolev inequality on a stratified set. *St. Petersburg Mathematical Journal*, 2019;30:869–875. DOI: https://doi.org/10.1090/spmj/1573
4. Dairbekov NS, Penkin OM, Sarybekova LO. The Poincaré inequality and p -connectedness of a stratified set *Siberian Mathematical Journal.* 2018;59(6):1024-1033. DOI: https://doi.org/10.1134/S003744661806006X
5. Friedman A. Variational principles and free-boundary problems. Wiley; 1982. 710 p. (Friedman A. Variational principles and free-boundary problems. Moscow: Nauka; 1990. 536 c.)
6. Gavrilov A, Nicaise S, Penkin O. Poincare's inequality on stratified sets and applications. *Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications.* 2003;55:195-213.
7. Ali Mehmeti F. Nonlinear waves in networks. Mathematical Research, 80, Academie Verlag, Berlin, 1994. 171 p.
8. Below J. von. A characteristic equation associated to an eigenvalue problem on c^2-networks. Linear algebra and appl. 1985, 71, 309-325.
9. Nicaise S. Polygonal interface problems. Peter Lang Verlag, 1993. 250 p.

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.
Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 07.04.2025
Поступила после рецензирования 24.05.2025
Принята к публикации 26.05.2025

Received April 7, 2025
Revised May 24, 2025
Accepted May 26, 2025

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Ощепкова Софья Николаевна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, Воронежский государственный университет инженерных технологий, г. Воронеж, Россия

Пенкин Олег Михайлович – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры математического моделирования, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Sofia N. Oshchepkova – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Assosiate Professor of the Department of Higher Mathematics, Voronezh State University of Engineering Technologies, Voronezh, Russia

Oleg M. Penkin – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Professor of the Department of Mathematical Modelling, Voronezh State University, Voronezh, Russia

К содержанию