Прикладная математика & Физика, 2025, том 57, № 3. С. 224–234
Applied Mathematics & Physics, 2025, Volume 57, No 3. P. 224–234

УДК 517.95
MSC 35R45, 35J60, 35J70
Оригинальное исследование

DOI 10.52575/2687-0959-2025-57-3-224-234
EDN RUUQMD

Существование решений анизотропных эллиптических неравенств с переменными нелинейностями в неограниченных областях

Кожевникова Л. М., **Гилемьянова А. А.**
(*Статья представлена членом редакционной коллегии Васильевым В. Б.*)
Уфимский университет науки и технологий,
Россия, 450076, г. Уфа, ул. Заки Валиди, 32
kosul@mail.ru, aliya.gilemyanova@mail.ru

Аннотация. Исследование посвящено задаче существования обобщенных решений анизотропных эллиптических вариационных неравенств с переменными показателями нелинейностей в неограниченных областях. Основная цель – установить условия разрешимости для класса неравенств, содержащих младшие члены с нестепенным ростом, что расширяет известные результаты, ограниченные изотропными случаями или полиномиальным ростом. Методология основана на применении теории псевдомонотонных операторов, функционального анализа и свойств анизотропных пространств Лебега и Соболева – Орлича с переменными показателями. Доказана теорема существования решений анизотропных вариационных неравенств второго порядка для операторов, включающих старшие члены со степенным ростом переменного порядка и младшие члены с неполиномиальным ростом. Результаты применимы в качественной теории краевых задач для квазилинейных эллиптических уравнений и могут быть использованы для дальнейшего развития теории неравенств в неограниченных областях.

Ключевые слова: анизотропное эллиптическое неравенство, переменные показатели нелинейностей, пространства Соболева – Орлича с переменными показателями, теорема существования, неограниченная область

Для цитирования: Кожевникова Л.М., Гилемьянова А.А. Существование решений анизотропных эллиптических неравенств с переменными нелинейностями в неограниченных областях. *Прикладная математика & Физика.* 2025;57(3):224–234. DOI 10.52575/2687-0959-2025-57-3-224-234 EDN RUUQMD

Original Research

Existence of Solutions to Anisotropic Elliptic Inequalities with Variable Exponents in Unbounded Domains

Larisa M. Kozhevnikova, **Aliya A. Gilemyanova**
(*Article submitted by a member of the editorial board Vasilyev V. B.)*
Ufa University of Science and Technology,
32 Zaki Validi St., Ufa 450076, Russia
kosul@mail.ru, aliya.gilemyanova@mail.ru

Abstract. The study addresses the problem of the existence of generalized solutions to anisotropic elliptic variational inequalities with variable nonlinearity exponents in unbounded domains. The primary objective is to establish solvability conditions for a class of inequalities containing lower-order terms with non-polynomial growth, thereby extending known results limited to isotropic cases or polynomial growth. The methodology is based on the application of the theory of pseudomonotone operators, functional analysis, and properties of anisotropic Lebesgue and Sobolev-Orlicz spaces with variable exponents. An existence theorem is proven for solutions to second-order anisotropic variational inequalities for operators that include higher-order terms with variable exponent power growth and lower-order terms with non-polynomial growth. The results are applicable to the qualitative theory of boundary value problems for quasilinear elliptic equations and can be used for the further development of the theory of inequalities in unbounded domains.

Keywords: Anisotropic Elliptic Inequality, Variable Nonlinearity Exponents, Sobolev – Orlicz Spaces with Variable Exponents, Existence Theorem, Unbounded Domain

For citation: Kozhevnikova LM., Gilemyanova AA. Existence of Solutions to Anisotropic Elliptic Inequalities with Variable Exponents in Unbounded Domains. *Applied Mathematics & Physics.* 2025;57(3):224–234 (In Russ.).
DOI 10.52575/2687-0959-2025-57-3-224-234 EDN RUUQMD

---

1. Введение. Пусть Ω — произвольная область пространства $\mathbb{R}^n = \{\mathrm{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)\}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. В статье рассматривается вариационное неравенство, соответствующее оператору

$$Au(\mathrm{x}) + Bu(\mathrm{x}) + Cu(\mathrm{x}), \quad \mathrm{x} \in \Omega; \tag{1}$$

где

$$Au(\mathrm{x}) = -\sum_{i=1}^{n} (a_i(\mathrm{x}, u, \nabla u))_{x_i} - a_0(\mathrm{x}, u, \nabla u),$$

© Кожевникова Л. М., Гилемьянова А. А., 2025

$$Bu(\mathrm{x}) = b(\mathrm{x}, u),$$

$$Cu(\mathrm{x}) = -\sum_{i=1}^{n}(c_i(\mathrm{x}, u_{x_i}))_{x_i}.$$

Предполагается, что функции $a_i(\mathrm{x}, s_0, s_1, \ldots, s_n)$ имеют степенной рост по переменным s_i с показателями $p_i(\mathrm{x}) \in (1, \infty)$, $i = 0, 1, \ldots, n$, и удовлетворяют обобщенным условиям теории псевдомонотонных операторов. Функции $b(\mathrm{x}, s_0)$ и $c_i(\mathrm{x}, s_i)$, $i = 1, \ldots, n$ являются сильно нелинейными, т. е. не удовлетворяют условиям полиномиального роста по s_0 и s_i соответственно. Условия и примеры на эти функции будут сформулированы в разделе 3.

Для изотропного уравнения с полиномиальным ростом существование решения задачи Дирихле в произвольной области установлено Ф. Браудером [1]. В работах Л.М. Кожевниковой [2, 3, 4] для некоторого класса анизотропных эллиптических уравнений второго порядка с переменными показателями нелинейностей найдены условия разрешимости в неограниченных областях и, в частности, во всем пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. В работе [6] М.М. Бокало, О.В. Кушнир в неограниченных областях доказана однозначная разрешимость анизотропных вариационных неравенств с переменными нелинейностями, определяемыми монотонными операторами. Отметим, что в работах [3, 4, 6], существование решений доказано без ограничений на рост данных при $\mathrm{x} \to \infty$.

В работе [5] В. Мустонен установлено существование решений вариационных неравенств для операторов высокого порядка со старшими членами степенного роста и младшими членами, допускающими неполиномиальный рост. В настоящей работе этот результат распространен на анизотропные операторы второго порядка с переменными показателями нелинейностей.

2. Анизотропные пространства Лебега и Соболева с переменными показателями. Рассмотрим произвольную область $Q \subsetneq \mathbb{R}^n$. Введем множество непрерывных функций с ограниченными показателями:

$$C^+(\overline{Q}) = \{p \in C(\overline{Q}) \ : \ 1 < p^- \leq p^+ < +\infty\},$$

где $p^- = \inf\limits_{\mathrm{x}\in Q} p(\mathrm{x})$, $p^+ = \sup\limits_{\mathrm{x}\in Q} p(\mathrm{x})$.

Пусть $p(\mathrm{x}) \in C^+(\overline{Q})$. Справедливо неравенство Юнга:

$$|zy| \leq |y|^{p(\mathrm{x})} + |z|^{p'(\mathrm{x})}, \quad z, y \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{x} \in Q, \quad p'(\mathrm{x}) = p(\mathrm{x})/(p(\mathrm{x}) - 1),$$

кроме того, ввиду выпуклости имеет место неравенство:

$$|y + z|^{p(\mathrm{x})} \leq 2^{p^+-1}(|y|^{p(\mathrm{x})} + |z|^{p(\mathrm{x})}), \quad z, y \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{x} \in Q. \tag{2}$$

Пространство Лебега с переменным показателем $L_{p(\cdot)}(Q)$ состоит из измеримых функций $v : Q \to \mathbb{R}$ таких, что

$$\rho_{p(\cdot),Q}(v) = \int\limits_Q |v(\mathrm{x})|^{p(\mathrm{x})} d\mathrm{x} < \infty.$$

Норма Люксембурга в пространстве $L_{p(\cdot)}(Q)$ задается выражением:

$$\|v\|_{p(\cdot),Q} = \inf\left\{k > 0 \,\middle|\, \rho_{p(\cdot),Q}(v/k) \leq 1\right\}.$$

Ниже будут использоваться обозначения $\|v\|_{p(\cdot),\Omega} = \|v\|_{p(\cdot)}$, $\rho_{p(\cdot),\Omega}(v) = \rho_{p(\cdot)}(v)$. Норма пространства $L_p(Q)$, $p \in [1, \infty]$, будет обозначаться как $\|v\|_{p,Q}$, причем $\|v\|_{p,\Omega} = \|v\|_p$. Пространство $L_{p(\cdot)}(Q)$ является сепарабельным рефлексивным банаховым пространством [7].

Для любых $u \in L_{p'(\cdot)}(Q)$, $v \in L_{p(\cdot)}(Q)$ справедливо неравенство Гельдера

$$\left|\int\limits_Q u(\mathrm{x})v(\mathrm{x})d\mathrm{x}\right| \leq 2\|u\|_{p'(\cdot),Q}\|v\|_{p(\cdot),Q}. \tag{3}$$

В дальнейшем будут использоваться следующие соотношения [7]:

$$\min\{\|v\|^{p^-}_{p(\cdot),Q}, \|v\|^{p^+}_{p(\cdot),Q}\} \leq \rho_{p(\cdot),Q}(v) \leq \max\{\|v\|^{p^-}_{p(\cdot),Q}, \|v\|^{p^+}_{p(\cdot),Q}\},$$

$$\min\{\rho^{1/p^+}_{p(\cdot),Q}(v), \rho^{1/p^-}_{p(\cdot),Q}(v)\} \leq \|v\|_{p(\cdot),Q} \leq \max\{\rho^{1/p^+}_{p(\cdot),Q}(v), \rho^{1/p^-}_{p(\cdot),Q}(v)\}. \tag{4}$$

Пусть задан вектор функций $\overrightarrow{\mathrm{p}}(\cdot) = (p_1(\cdot), p_2(\cdot), \ldots, p_n(\cdot)) \in (C^+(\overline{Q}))^n$, определим

$$p_-(\mathrm{x}) = \min_{i=\overline{1,n}} p_i(\mathrm{x}), \quad p_+(\mathrm{x}) = \max_{i=\overline{1,n}} p_i(\mathrm{x}), \quad \mathrm{x} \in Q.$$

Определим анизотропное пространство Лебега $\mathrm{L}_{\overrightarrow{\mathrm{p}}(\cdot)}(Q) = L_{p_1(\cdot)}(Q) \times \ldots \times L_{p_n(\cdot)}(Q)$ с нормой:

$$\|\mathrm{v}\|_{\overrightarrow{\mathrm{p}}(\cdot),Q} = \sum_{i=1}^{n} \|v_i\|_{p_i(\cdot),Q}, \quad \mathrm{v} = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathrm{L}_{\overrightarrow{\mathrm{p}}(\cdot)}(Q).$$

Рассмотрим расширенный вектор

$$\overrightarrow{\mathbf{p}}(\cdot) = (p_0(\cdot), \overrightarrow{\mathrm{p}}(\cdot)) \in (C^+(\overline{Q}))^{n+1},$$

предполагая $p_+(\cdot) \le p_0(\cdot)$. Пространство Соболева с переменными показателями $\overset{\circ}{W}{}^1_{\overrightarrow{\mathrm{p}}(\cdot)}(Q)$ определим как пополнения пространства $C_0^\infty(Q)$ по норме

$$\|v\|^1_{\overrightarrow{\mathrm{p}}(\cdot),Q} = \|v\|_{p_0(\cdot),Q} + \|\nabla v\|_{\overrightarrow{\mathrm{p}}(\cdot),Q}.$$

Пусть

$$\overline{p}(\mathrm{x}) = n\left(\sum_{i=1}^{n} 1/p_i(\mathrm{x})\right)^{-1}, \quad \overline{p}_*(\mathrm{x}) = \begin{cases} \frac{n\overline{p}(\mathrm{x})}{n-\overline{p}(\mathrm{x})}, & \overline{p}(\mathrm{x}) < n, \\ +\infty, & \overline{p}(\mathrm{x}) \ge n, \end{cases}$$

$$p_\infty(\mathrm{x}) = \max\{\overline{p}_*(\mathrm{x}), p_+(\mathrm{x})\}, \quad \mathrm{x} \in Q.$$

Приведем теорему вложения для пространства $\overset{\circ}{W}{}^1_{\overrightarrow{\mathrm{p}}(\cdot)}(Q)$ [8, Теорема 2.5].

Лемма 2.1. *Пусть Q — ограниченная область. Если $q \in C^+(\overline{Q})$ и*

$$q(\mathrm{x}) < p_\infty(\mathrm{x}), \quad \mathrm{x} \in Q,$$

то имеет место непрерывное и компактное вложение $\overset{\circ}{W}{}^1_{\overrightarrow{\mathrm{p}}(\cdot)}(Q) \hookrightarrow L_{q(\cdot)}(Q)$.

Важной особенностью изотропного пространства Соболева с переменным показателем

$$\overset{\circ}{W}{}^1_{p(\cdot)}(Q) = \{v \in \overset{\circ}{W}{}^1_1(Q) : \rho_{p(\cdot),Q}(|\nabla v|) < \infty\}$$

является то, что гладкие функции могут не быть плотными в нем без дополнительных ограничений на показатель $p(\mathrm{x})$. Это было отмечено В.В. Жиковым [9] в связи с эффектом Лаврентьева. Однако, если модуль непрерывности $p(\mathrm{x})$ удовлетворяет логарифмическому условию:

$$|p(\mathrm{x}) - p(\mathrm{y})| \le -\frac{K}{\ln|\mathrm{x}-\mathrm{y}|}, \quad \mathrm{x}, \mathrm{y} \in Q, \quad |\mathrm{x}-\mathrm{y}| \le \frac{1}{2},$$

то гладкие функции плотны в пространстве $\overset{\circ}{W}{}^1_{p(\cdot)}(Q)$.

3. Формулировка полученных результатов. Пусть $\overrightarrow{\mathbf{p}}(\cdot) = (p_0(\cdot), p_1(\cdot), ..., p_n(\cdot)) \in (C^+(\overline{\Omega}))^{n+1}$. Будем считать, что

$$p_+(\mathrm{x}) \le p_0(\mathrm{x}) < \overline{p}_*(\mathrm{x}), \quad \mathrm{x} \in \Omega.$$

Предполагается, что функции $a_i(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s})$, $i = 0, \ldots, n$, измеримы по $\mathrm{x} \in \Omega$ для $\mathbf{s} = (s_0, \mathrm{s}) = (s_0, s_1, \ldots, s_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, непрерывны по $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^{n+1}$ для почти всех $\mathrm{x} \in \Omega$. Кроме того, существуют положительные константы $\widehat{a}$, $\overline{a}$ и неотрицательные измеримые функции $\Phi_i(\mathrm{x}) \in L_{p_i'(\cdot)}(\Omega)$ и $\phi(\mathrm{x}) \in L_1(\Omega)$, такие, что для п.в. $\mathrm{x} \in \Omega$ и любых $\mathbf{s}, \mathbf{t} \in \mathbb{R}^{n+1}$ справедливы неравенства

$$|a_i(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s})| \le \widehat{a}\mathbf{P}(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s})^{1/p_i'(\mathrm{x})} + \Phi_i(\mathrm{x}), \quad i = 0, 1, \ldots, n; \tag{5}$$

$$(\mathrm{a}(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s}) - \mathrm{a}(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{t})) \cdot (\mathrm{s} - \mathrm{t}) > 0, \quad \mathrm{s} \ne \mathrm{t}; \tag{6}$$

$$\mathbf{a}(\mathrm{x}, \mathbf{s}) \cdot \mathbf{s} = \mathrm{a}(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s}) \cdot \mathrm{s} + a_0(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s})s_0 \ge \overline{a}\mathbf{P}(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s}) - \phi(\mathrm{x}). \tag{7}$$

Здесь $\mathbf{P}(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s}) = |s_0|^{p_0(\mathrm{x})} + \mathrm{P}(\mathrm{x}, \mathrm{s})$, $\mathrm{P}(\mathrm{x}, \mathrm{s}) = \sum\limits_{i=1}^{n} |s_i|^{p_i(\mathrm{x})}$; $\mathrm{s} \cdot \mathrm{t} = \sum\limits_{i=1}^{n} s_i t_i$ и $\mathbf{a}(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s}) = (a_0(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s}), \mathrm{a}(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s})) = (a_0(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s}), a_1(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s}), \ldots, a_n(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s}))$. Кроме того, будем использовать обозначение $\mathrm{P}'(\mathrm{x}, \mathrm{s}) = \sum\limits_{i=1}^{n} |s_i|^{p_i'(\mathrm{x})}$.

Предполагается, что существует положительная константа $\widehat{b}$, непрерывная ограниченная функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ и неотрицательные функции $h_1(\mathrm{x})$ и $h_2(\mathrm{x}) \in L_1(\Omega)$ такие, что для п.в. $\mathrm{x} \in \Omega$ и любых $s_0, t_0 \in \mathbb{R}$ справедливы неравенства

$$|b(\mathrm{x}, s_0)| \le h_1(\mathrm{x}) f(s_0), \tag{8}$$

$$b(\mathrm{x}, s_0) s_0 \ge 0, \tag{9}$$

$$b(\mathrm{x}, t_0) s_0 \le b(\mathrm{x}, t_0) t_0 + \widehat{b} b(\mathrm{x}, s_0) s_0 + h_2(\mathrm{x}). \tag{10}$$

Кроме того, предполагается, что $c_i(\mathrm{x}, s_i) = q_i(\mathrm{x}) g_i(s_i), \quad i = 1, \dots, n$, с неотрицательными функциями $q_i(\mathrm{x}) \in L_1(\Omega)$ и непрерывными неубывающими функциями $g_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такими, что функции

$$G_i(s_i) = s_i \cdot g_i(s_i) \ge 0, \quad i = 1, \dots, n, \tag{11}$$

выпуклые.

Приведем примеры функций, удовлетворяющих условиям (5)–(11):

$$a_i(s_i, \mathrm{x}) = |s_i|^{p_i(\mathrm{x})-2} s_i + \Phi_i(\mathrm{x}), \quad i = 0, ..., n, \quad \Phi_i(\mathrm{x}) \in L_{p_i'(\cdot)}(\Omega);$$

$$g_i(s_i) = \frac{P_i(s_i)}{s_i}, \quad i = 1, ..., n,$$

где $P_i(s_i)$ – функции Орлича [10]. В качестве функции Орлича можно выбрать, например: $P(t_0) = e^{t_0^2} - 1$, $P(t_0) = \frac{|t_0|^\alpha}{\alpha}, \quad \alpha > 1$, $P(t_0) = e^{|t_0|} - |t_0| - 1$.

Положим

$$b(\mathrm{x}, t_0) = \begin{cases} \frac{1}{M(\mathrm{x},1)} \frac{M(\mathrm{x},t_0)}{t_0}, & |t_0| \le 1, \\ \operatorname{sign} t_0, & |t_0| > 1, \end{cases}$$

где $M(\mathrm{x}, t_0)$ — функция Муселяка – Орлича. Примерами функции Муселяка – Орлича являются: $M(\mathrm{x}, t_0) = |t_0|^{p(\mathrm{x})}$, $M(\mathrm{x}, t_0) = |t_0|^{p(\mathrm{x})} - 1$, $M(\mathrm{x}, t_0) = e^{|t_0|^{p(\mathrm{x})}} - 1$, где $p \in C^+(\overline{\Omega})$ [11].

Поскольку $t_0 b(\mathrm{x}, t_0) = \begin{cases} \frac{1}{M(\mathrm{x},1)} M(\mathrm{x}, t_0), & |t_0| \le 1, \\ |t_0|, & |t_0| > 1, \end{cases}$, то условие (9) выполнено.

Проверим условие (10):

1) пусть $0 < t_0, s_0 < 1$, тогда применяя неравенство Юнга для функций Муселяка – Орлича, выводим

$$s_0 b(\mathrm{x}, t_0) = \frac{M(\mathrm{x}, t_0)}{t_0 M(\mathrm{x}, 1)} s_0 \le \frac{1}{M(\mathrm{x}, 1)} \left(\overline{M}\left(\mathrm{x}, \frac{M(\mathrm{x}, t_0)}{t_0}\right) + M(\mathrm{x}, s_0) \right) \le$$
$$\le \frac{1}{M(\mathrm{x}, 1)} (M(\mathrm{x}, t_0) + M(\mathrm{x}, s_0)) = t_0 b(\mathrm{x}, t_0) + s_0 b(\mathrm{x}, s_0);$$

2) пусть $1 < t_0, s_0$, тогда

$$s_0 b(\mathrm{x}, t_0) = s_0 \cdot 1 < s_0 + t_0 = s_0 b(\mathrm{x}, s_0) + t_0 b(\mathrm{x}, t_0);$$

3) пусть $0 < t_0 < 1 < s_0$, тогда, пользуясь неубыванием функции $\frac{M(\mathrm{x},t_0)}{t_0}$ по t_0, выводим

$$s_0 b(\mathrm{x}, t_0) = s_0 \frac{M(\mathrm{x}, t_0)}{M(\mathrm{x}, 1) t_0} < s_0 \frac{M(\mathrm{x}, 1)}{M(\mathrm{x}, 1)} = s_0 = s_0 b(\mathrm{x}, s_0) < s_0 b(\mathrm{x}, s_0) + t_0 b(\mathrm{x}, t_0);$$

4) пусть $0 < s_0 < 1 < t_0$, тогда

$$s_0 b(\mathrm{x}, t_0) = s_0 < t_0 + \frac{M(\mathrm{x}, s_0)}{M(\mathrm{x}, 1)} = t_0 b(\mathrm{x}, t_0) + s_0 b(\mathrm{x}, s_0).$$

Определим пространство $W^{-1}_{\vec{\mathrm{p}}'(\cdot)}(\Omega)$ сопряженное к $\overset{\circ}{W}{}^1_{\vec{\mathrm{p}}(\cdot)}(\Omega)$:

$$W^{-1}_{\vec{\mathrm{p}}'(\cdot)}(\Omega) = \{f = f_0 - \operatorname{div} \mathrm{f} : \ f_0 \in L_{p_0'(\cdot)}(\Omega), \ \mathrm{f} = (f_1, f_2, ..., f_n) \in \mathrm{L}_{\mathrm{p}'(\cdot)}(\Omega)\}.$$

Здесь действие функционала $\langle f, w \rangle$ задается формулой

$$\langle f, w \rangle = \int_\Omega f_0 w \, d\mathrm{x} + \int_\Omega \nabla w \cdot \mathrm{f} \, d\mathrm{x} \quad \forall w \in \overset{\circ}{W}{}^1_{\vec{\mathrm{p}}(\cdot)}(\Omega).$$

Заметим, что для $\forall w \in \overset{\circ}{W}{}^1_{\vec{\mathrm{p}}(\cdot)}(\Omega)$ справедливы неравенства

$$|\langle f, w\rangle| \le \|f_0\|_{p_0'(\cdot)}\|w\|_{p_0(\cdot)} + \|\nabla w\|_{\vec{\mathrm{p}}(\cdot)}\|\mathrm{f}\|_{\vec{\mathrm{p}}'(\cdot)} \le \|\mathbf{f}\|_{\vec{\mathrm{p}}'(\cdot)}\|w\|^1_{\vec{\mathrm{p}}(\cdot)} = \|\mathbf{f}\|_{W^{-1}_{\vec{\mathrm{p}}'(\cdot)}(\Omega)} < \infty,$$

следовательно $f \in W^{-1}_{\vec{\mathrm{p}}'(\cdot)}(\Omega)$ вполне определен.

Применяя (2) из неравенств (5), выводим оценки:

$$|a_i(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s})|^{p_i'(\mathrm{x})} \le \widehat{A} \cdot \mathbf{P}(\mathrm{x}, s_0, \mathbf{s}) + \Psi_i(\mathrm{x}), \quad i = 0, 1, \ldots, n, \tag{5'}$$

с неотрицательными измеримыми функциями $\Psi_i(\mathrm{x}) \in L_1(\Omega)$, $i = 0, 1, \ldots, n$. Из неравенства (5′), пользуясь (4), для любого $u \in \overset{\circ}{W}{}^1_{\vec{\mathrm{p}}(\cdot)}(\Omega)$ выводим оценку

$$\|\mathbf{a}(\mathrm{x}, u, \nabla u)\|_{\vec{\mathrm{p}}'(\cdot)} = \sum_{i=0}^{n} \|a_i(\mathrm{x}, u, \nabla u)\|_{p_i'(\cdot)} \le \sum_{i=0}^{n} \left[\rho_{p_i'(\cdot)}(a_i(\mathrm{x}, u, \nabla u)) + 1\right]^{1/p_i'^-} \le \tag{12}$$
$$\le \sum_{i=0}^{n} \left[\widehat{A} \cdot \|\mathbf{P}(\mathrm{x}, u, \nabla u)\|_1 + \|\Psi_i\|_1 + 1\right]^{1/p_i'^-} < \infty.$$

Далее, по элементу $\mathbf{a}(\mathrm{x}, u, \nabla u) \in \mathbf{L}_{\vec{\mathrm{p}}'(\cdot)}(\Omega)$ для $v \in \overset{\circ}{W}{}^1_{\vec{\mathrm{p}}(\cdot)}(\Omega)$ определим функционал $\mathbf{A}(u)$ равенством:

$$\langle \mathbf{A}(u), v\rangle = \int_\Omega (\mathrm{a}(\mathrm{x}, u, \nabla u) \cdot \nabla v + a_0(\mathrm{x}, u, \nabla u) v)\, d\mathrm{x}. \tag{13}$$

Используя неравенство Гельдера (3), для функций $u, v \in \overset{\circ}{W}{}^1_{\vec{\mathrm{p}}(\cdot)}(\Omega)$ выводим неравенства:

$$|\langle \mathbf{A}(u), v\rangle| \le 2\sum_{i=0}^{n} \|a_i\|_{p_i'(\cdot)}\|v_{x_i}\|_{p_i(\cdot)} \le 2\|\mathbf{a}(\mathrm{x}, u, \nabla u)\|_{\vec{\mathrm{p}}'(\cdot)}\|v\|^1_{\vec{\mathrm{p}}(\cdot)}. \tag{14}$$

Из (12), (14) следует, что функционал $\mathbf{A}(u)$, $u(\mathrm{x}) \in \overset{\circ}{W}{}^1_{\vec{\mathrm{p}}(\cdot)}(\Omega)$, определяемый равенством (13) в пространстве $\overset{\circ}{W}{}^1_{\vec{\mathrm{p}}(\cdot)}(\Omega)$, является ограниченным. В анизотропном пространстве $\overset{\circ}{W}{}^1_{\vec{\mathrm{p}}(\cdot)}(\Omega)$ определим полулинейную форму

$$a(u, v) = \langle \mathbf{A}(u), v\rangle \quad \forall u, v \in \overset{\circ}{W}{}^1_{\vec{\mathrm{p}}(\cdot)}(\Omega). \tag{15}$$

Равенство (15) задает нелинейное отображение $\mathbf{A} : \overset{\circ}{W}{}^1_{\vec{\mathrm{p}}(\cdot)}(\Omega) \to W^{-1}_{\vec{\mathrm{p}}'(\cdot)}(\Omega)$.

Определим подпространство:

$$V_1 = \{u \in \overset{\circ}{W}{}^1_{\vec{\mathrm{p}}(\cdot)}(\Omega) : b(\mathrm{x}, u) \in L_1(\Omega),\ b(\mathrm{x}, u)u \in L_1(\Omega)\}.$$

Очевидно, что $C_0^\infty(\Omega) \subset V_1 \subset \overset{\circ}{W}{}^1_{\vec{\mathrm{p}}(\cdot)}(\Omega)$ и определена полулинейная форма

$$b(u, w) = \int_\Omega b(\mathrm{x}, u) w\, d\mathrm{x} \quad \forall u \in V_1, w \in C_0^\infty(\Omega). \tag{16}$$

Заметим, что каждому $u \in V_1$ сопоставляется элемент $\mathbf{B}(u) \in \mathcal{D}'(\Omega)$ по правилу

$$\langle \mathbf{B}(u), w\rangle = b(u, w), \quad \forall w \in C_0^\infty(\Omega), \tag{17}$$

которое задает нелинейное отображение $\mathbf{B} : V_1 \to \mathcal{D}'(\Omega)$.

Введем подпространство V_2 так, что

$$V_2 = \{u \in \overset{\circ}{W}{}^1_{\vec{\mathrm{p}}(\cdot)}(\Omega) : q_i g_i(u_{x_i}) \in L_1(\Omega), q_i g_i(u_{x_i}) u_{x_i} \in L_1(\Omega), \quad \forall i = 1, \ldots, n\}.$$

Легко видеть, что $C_0^\infty(\Omega) \subset V_2 \subset \overset{\circ}{W}{}^1_{\vec{\mathrm{p}}(\cdot)}(\Omega)$ и полулинейная форма

$$c(u, w) = \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} q_i(\mathrm{x}) g_i(u_{x_i}) w_{x_i}\, d\mathrm{x} \tag{18}$$

корректно определена для всех $u \in V_2$ и $w \in C_0^\infty(\Omega)$.

Заметим, что каждому $u \in V_2$ сопоставляется элемент $\mathbf{C}(u) \in \mathcal{D}'(\Omega)$ по правилу

$$\langle \mathbf{C}(u), w\rangle = c(u, w), \quad \forall w \in C_0^\infty(\Omega), \tag{19}$$

которое задает нелинейное отображение $\mathbf{C} : V_2 \to \mathcal{D}'(\Omega)$.

Пусть K — замкнутое выпуклое подмножество пространства $\overset{\circ}{W}{}^1_{\vec{\mathbf{p}}(\cdot)}(\Omega)$, содержащее нулевую функцию. Основным результатом настоящей работы является

Определение 3.1. *Решением вариационного неравенства, соответсвующего оператору вида* (1), *в области* Ω *называется функция* $u \in V_1 \cap V_2 \cap K$, *удовлетворяющая интегральному неравенству*

$$\langle \mathbf{A}(u), w - u\rangle + \langle \mathbf{B}(u), w - u\rangle + \langle \mathbf{C}(u), w - u\rangle \geq \langle f, w - u\rangle \quad \forall w \in K \cap C_0^\infty(\Omega). \tag{20}$$

Решением задачи Дирихле

$$Au(\mathrm{x}) + Bu(\mathrm{x}) + C(\mathrm{x}) = f(\mathrm{x}), \quad u|_{\partial\Omega} = 0 \tag{21}$$

называется элемент $u(\mathrm{x}) \in V_1 \cap V_2$ *такой, что справедливо равенство*

$$\langle \mathbf{A}(u), w\rangle + \langle \mathbf{B}(u), w\rangle + \langle \mathbf{C}(u), w\rangle = \langle f, w\rangle \quad \forall w \in C_0^\infty(\Omega).$$

Теорема 3.1. *Если выполнены условия* (5)–(11), *тогда для любого* $f \in W^{-1}_{\vec{\mathbf{p}}'(\cdot)}(\Omega)$ *существует решение вариационного неравенства* (20). *В частности, существует решение задачи Дирихле* (21).

4. Доказательство основных результатов. Доказательство теоремы 3.1 основано на утверждении о псевдомонотонности, коэрцитивности и свойствах абстрактных операторов $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$ [5].

Пусть $\mathcal{V}$ — рефлексивное банахово пространство и $\mathcal{W}$ — нормированное подпространство $\mathcal{W} \subset \mathcal{V}$, плотное в $\mathcal{V}$. Обозначим через $\langle f, v\rangle$ значение f из сопряженного пространства $\mathcal{V}^*$ на элементе $v \in \mathcal{V}$.

Определение 4.1. *Оператор* $\mathcal{A} : \mathcal{V} \to \mathcal{V}^*$ *называется псевдомонотонным, если*
(i) $\mathcal{A}$ *— ограниченный оператор;*
(ii) из условия $u^j \rightharpoonup u$ *слабо в* $\mathcal{V}$ *и* $\lim\limits_{j\to\infty} \sup\langle \mathcal{A}(u^j), u^j - u\rangle \leq 0$ *следует, что для любого* $v \in \mathcal{V}$

$$\lim_{j\to\infty} \inf\langle \mathcal{A}(u^j), u^j - v\rangle \geq \langle \mathcal{A}(u), u - v\rangle.$$

Определение 4.2. *Оператор* $\mathcal{A}$ *называется коэрцитивным, если*

$$\|u\|^{-1}\langle \mathcal{A}(u), u\rangle \to +\infty \text{ при } \|u\| \to +\infty,$$

то есть существует функция $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ *такая, что* $g(t) \to +\infty$ *при* $t \to +\infty$, *и для всех* $u \in \mathcal{V}$ *выполняется*

$$\langle \mathcal{A}(u), u\rangle \geq g(\|u\|)\|u\|.$$

Пусть $\mathcal{B} : \mathcal{V}_1 \to \mathcal{W}^*$, где $\mathcal{W} \subset \mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}$. Будем считать, что оператор $\mathcal{B}$ удовлетворяет следующим условиям:

($\mathcal{B}_1$) Для каждого $m \in \mathbb{N}$ существует ограниченное отображение $\mathcal{B}_m : \mathcal{V} \to \mathcal{V}^*$, удовлетворяющее условию $\langle \mathcal{B}_m(u), u\rangle \geq 0 \ \ \forall u \in \mathcal{V}$. Кроме того, если $u^j \rightharpoonup u$ в $\mathcal{V}$, то $\langle \mathcal{B}_m(u^j), u^j - u\rangle \to 0$ и $\langle \mathcal{B}_m(u^j), v\rangle \to \langle \mathcal{B}_m(u), v\rangle \quad \forall v \in \mathcal{V},\ j \to \infty$.

($\mathcal{B}_2$) Если $u^m \rightharpoonup u$ в $\mathcal{V}$ и $\langle \mathcal{B}_m(u^m), u^m\rangle \leq c \quad \forall m \in \mathbb{N}$, то $u \in \mathcal{V}_1$, $\lim\limits_{m\to\infty} \sup\langle \mathcal{B}_m(u^m), u - u^m\rangle \leq 0$ и $\langle \mathcal{B}_m(u^m), w\rangle \to \langle \mathcal{B}(u), w\rangle \quad \forall w \in \mathcal{W},\ m \to \infty$.

($\mathcal{B}_3$) Для любого $u \in \mathcal{V}_1$ существует вещественное число $\lambda(u)$ такое, что $\lambda(u) \leq \lim\limits_{m\to\infty} \inf\langle \mathcal{B}_m(u^m), u^m\rangle$ для любой последовательности $\{u^m\}$, удовлетворяющей ($\mathcal{B}_2$). Число $\lambda(u) \in \mathbb{R}$ вводится для замены $\langle \mathcal{B}(u), u\rangle$, которое может быть не определено для произвольного $u \in \mathcal{V}_1$, так как $\mathcal{B}(u) \in \mathcal{W}^*$.

Также рассмотрим отображение $\mathcal{C} : \mathcal{V}_2 \to \mathcal{W}^*$, $\mathcal{W} \subset \mathcal{V}_2 \subset \mathcal{V}$. Предполагаем, что оператор $\mathcal{C}$ удовлетворяет условиям:

($\mathcal{C}_1$) Для каждого $m \in \mathbb{N}$ существует ограниченное отображение $\mathcal{C}_m : \mathcal{V} \to \mathcal{V}^*$, которое является монотонным, полунепрерывным и $\mathcal{C}_m(0) = 0$. Кроме того, если $u^j \rightharpoonup u$ в $\mathcal{V}$, то $\lim\limits_{j\to\infty} \sup\langle \mathcal{C}_m(u^j), u - u^j\rangle \leq 0$.

($\mathcal{C}_2$) Если $u^m \rightharpoonup u$ в $\mathcal{V}$ и $\langle \mathcal{C}_m(u^m), u^m\rangle \leq c \quad \forall m \in \mathbb{N}$, то $u \in \mathcal{V}_2$ и $\lim\limits_{m\to\infty} \sup\langle \mathcal{C}_m(u^m), u - u^m\rangle \leq 0$.

($\mathcal{C}_3$) Если $u^m \rightharpoonup u$ в $\mathcal{V}$, $\langle \mathcal{C}_m(u^m), u^m\rangle \leq c \quad \forall m \in \mathbb{N}$ и $\lim\limits_{m\to\infty} \sup\langle \mathcal{A}(u^m), u^m - u\rangle \leq 0$, то $\langle \mathcal{C}_m(u^m), w\rangle \to \langle \mathcal{C}(u), w\rangle \quad \forall w \in \mathcal{W}$.

($\mathcal{C}_4$) Для любого $u \in \mathcal{V}_2$, существует вещественное число $\mu(u)$ такое, что $\mu(u) \leq \lim\limits_{m\to\infty} \inf\langle \mathcal{C}_m(u^m), u^m\rangle$ для любой последовательности $\{u^m\}$, удовлетворяющей ($\mathcal{C}_3$).

Теорема 4.1. [5, Теорема 1] *Пусть* K *— замкнутое выпуклое подмножество пространства* $\mathcal{V}$, *содержащее* 0, $\mathcal{A}$ *– коэрцитивное псевдомонотонное отображение из* $\mathcal{V}$ *в* $\mathcal{V}^*$, $\mathcal{B}$ *– отображение из* $\mathcal{V}_1$ *в*

$\mathcal{W}^*$, удовлетворяющие условиям $(\mathcal{B}_1)$–$(\mathcal{B}_3)$, а C – отображение из $\mathcal{V}_2$ в $\mathcal{W}^*$, удовлетворяющие условиям (C_1)–(C_4). Тогда для любых $f \in \mathcal{V}^*, w \in K \cap \mathcal{W}$ вариационное неравенство

$$\langle \mathcal{A}(u), w-u\rangle + \langle \mathcal{B}(u), w-u\rangle + \langle C(u), w-u\rangle - \lambda(u) - \mu(u) \geq \langle f, w-u\rangle$$

имеет решение $u \in \mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2 \cap K$.

Для доказательства основных результатов потребуется следующая лемма о слабой сходимости в пространствах Лебега с переменным показателем.

Лемма 4.1. *Пусть $\{v^j\}_{j\in\mathbb{N}}$, v — такие функции из $L_{p(\cdot)}(\Omega)$, что*

$$\|v^j\|_{p(\cdot)} \leq C, \quad j \in \mathbb{N},$$

$$v^j \to v, \quad j \to \infty, \quad \text{п.в. в} \quad \Omega,$$

тогда $v^j \rightharpoonup v$, $j \to \infty$, слабо в $L_{p(\cdot)}(\Omega)$.

Доказательство леммы 4.1 для ограниченной области Ω проведено в [12], для неограниченной области оно также справедливо.

В настоящей работе для операторов $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ доказаны утверждения 4.1–4.3.

Утверждение 4.1. **[2]** *Пусть выполнены условия* (5)–(7), *тогда оператор*

$$\mathbf{A} : \overset{\circ}{W}{}^1_{\vec{\mathrm{p}}(\cdot)}(\Omega) \to W^{-1}_{\vec{\mathrm{p}}'(\cdot)}(\Omega),$$

определяемый равенством (13), *является псевдомонотонным, непрерывным и коэрцитивным. Кроме того, если $u^j \rightharpoonup u$ в $\overset{\circ}{W}{}^1_{\vec{\mathrm{p}}(\cdot)}(\Omega)$ и $\limsup\limits_{j\to\infty}\langle \mathbf{A}(u^j), u^j - u\rangle \leq 0$, то $u^j \to u$, $\nabla u^j \to \nabla u$ п.в. в Ω, $j \to \infty$, для подпоследовательности.*

Введем усеченные функции

$$v^{(m)}(\mathrm{x}) = \begin{cases} m, v(\mathrm{x}) > m, \\ v(\mathrm{x}), |v^m| \leq m, \\ -m, v^m < -m \end{cases}.$$

Для любого $m \in \mathbb{N}$ определим отображение $\mathbf{B}_m : \overset{\circ}{W}{}^1_{\vec{\mathrm{p}}(\cdot)}(\Omega) \to W^{-1}_{\vec{\mathrm{p}}'(\cdot)}(\Omega)$:

$$\langle \mathbf{B}_m(u), v\rangle = \int_\Omega \chi_m b^{(m)}(\mathrm{x}, u) v \, d\mathrm{x}, \tag{22}$$

где

$$\chi_m(\mathrm{x}) = \begin{cases} 1, \mathrm{x} \in \Omega(m), \\ 0, \mathrm{x} \notin \Omega(m), \end{cases} \qquad \Omega(m) = \{\mathrm{x} \in \Omega : |\mathrm{x}| < m\}.$$

Утверждение 4.2. *Пусть выполнены условия* (8)–(10), *тогда отображение $\mathbf{B} : V_1 \to \mathcal{D}'(\Omega)$, определяемое равенствами* (16), (17), (22), *удовлетворяет условиям $(\mathcal{B}_1)$–$(\mathcal{B}_3)$ с $\lambda(u) = b(u, u)$.*

Доказательство. Из условия (9) следует, что $\langle \mathbf{B}_m(u), u\rangle \geq 0$ для всех $u \in \overset{\circ}{W}{}^1_{\vec{\mathrm{p}}(\cdot)}(\Omega)$ и любого $m \in \mathbb{N}$. Кроме того, из условия (8) следует

$$|b^{(m)}(\mathrm{x}, u)| \leq |b(\mathrm{x}, u)| \leq h_1(\mathrm{x}) f(u) \leq D h_1(\mathrm{x}), \quad \forall m \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{x} \in \Omega; \tag{23}$$

$$|b^{(m)}(\mathrm{x}, u)| \leq m \chi_m(\mathrm{x}), \quad \forall m \in \mathbb{N}, \ \mathrm{x} \in \Omega. \tag{24}$$

Применяя неравенства (24) и Гельдера для любого $v \in \overset{\circ}{W}{}^1_{\vec{\mathrm{p}}(\cdot)}(\Omega)$, выводим:

$$|\langle \mathbf{B}_m(u), v\rangle| \leq \int_{\Omega(m)} m|v| d\mathrm{x} \leq 2\, \|m\|_{p_0'(\cdot), \Omega(m)} \|v\|_{p_0(\cdot)} \leq D_1(m) \|v\|^1_{\vec{\mathrm{p}}(\cdot)}.$$

Последнее влечет ограниченность $\mathbf{B}_m$ в пространстве $\overset{\circ}{W}{}^1_{\vec{\mathrm{p}}(\cdot)}(\Omega)$.

Пусть u^j — последовательность в $\overset{\circ}{W}{}^1_{\vec{\mathrm{p}}(\cdot)}(\Omega)$ и $u^j \rightharpoonup u$ в $\overset{\circ}{W}{}^1_{\vec{\mathrm{p}}(\cdot)}(\Omega)$. Так как пространство $\overset{\circ}{W}{}^1_{\vec{\mathrm{p}}(\cdot)}(\Omega)$ рефлексивное, тогда последовательность u^j ограничена в $\overset{\circ}{W}{}^1_{\vec{\mathrm{p}}(\cdot)}(\Omega)$. По лемме 2.1 из ограниченности последовательности $\{u^j\}$ в $\overset{\circ}{W}{}^1_{\vec{\mathrm{p}}(\cdot)}(\Omega)$ следует сильная сходимость

$$u^j \to u \text{ в } L_{p_-(\cdot)}(\Omega(m)), \quad j \to \infty, \tag{25}$$

и сходимость

$$u^j \to u \quad \text{п.в. в} \quad \Omega. \tag{26}$$

Из (26) следует сходимость

$$b^{(m)}(\mathrm{x}, u^j) \to b^{(m)}(\mathrm{x}, u) \quad \text{п.в. в} \quad \Omega, \quad j \to \infty. \tag{27}$$

Применяя неравенство (24) и Гельдера, получаем:

$$|\langle \mathbf{B}_m(u^j), u^j - u\rangle| \le \int_\Omega \chi_m |b^{(m)}(\mathrm{x}, u^j)|\, |u^j - u|\, d\mathrm{x} \le$$
$$\le 2\|m\|_{p'_-(\cdot),\Omega(m)} \|u^j - u\|_{p_-(\cdot),\Omega(m)} = D_2(m)\|u^j - u\|_{p_-(\cdot),\Omega(m)}.$$

Тогда, благодаря (25), устанавливаем $\langle \mathbf{B}_m(u^j), u^j - u\rangle \to 0$, $j \to \infty$.

Ввиду (24), (27), по теореме Лебега о мажорируемой сходимости для $v \in \overset{\circ}{W}{}^1_{\vec{\mathrm{p}}(\cdot)}(\Omega)$ имеем:

$$\int_\Omega \chi_m b^{(m)}(\mathrm{x}, u^j) v\, d\mathrm{x} \to \int_\Omega \chi_m b^{(m)}(\mathrm{x}, u) v\, d\mathrm{x}, \quad j \to \infty.$$

Это эквивалентно $\langle \mathbf{B}_m(u^j), v\rangle \to \langle \mathbf{B}_m(u), v\rangle$ $\forall v \in \overset{\circ}{W}{}^1_{\vec{\mathrm{p}}(\cdot)}(\Omega)$, следовательно $(\mathcal{B}_1)$ доказано.

Для проверки условия $(\mathcal{B}_2)$ предположим, что $u^m \rightharpoonup u$ в $\overset{\circ}{W}{}^1_{\vec{\mathrm{p}}(\cdot)}(\Omega)$ и $\langle \mathbf{B}_m(u^m), u^m\rangle = \int_\Omega \chi_m b^{(m)}(\mathrm{x}, u^m) u^m\, d\mathrm{x} \le c$ для любого $m \in \mathbb{N}$. Из слабой сходимости $u^m \rightharpoonup u$ в $\overset{\circ}{W}{}^1_{\vec{\mathrm{p}}(\cdot)}(\Omega)$ и компактности вложения для некоторой подпоследовательности имеем:

$$u^m \to u \quad \text{п. в. в} \quad \Omega, \quad m \to \infty. \tag{28}$$

Пользуясь (9) и (28), по лемме Фату устанавливаем:

$$\int_\Omega b(\mathrm{x}, u) u d\mathrm{x} = \int_\Omega \liminf_{m\to\infty} \chi_m b^{(m)}(\mathrm{x}, u^m) u^m\, d\mathrm{x} \le \liminf_{m\to\infty} \int_\Omega \chi_m b^{(m)}(\mathrm{x}, u^m) u^m\, d\mathrm{x} \le c.$$

Принадлежность $b(\mathrm{x}, u)u \in L_1(\Omega)$ доказана. Применяя (23), выводим $b(\mathrm{x}, u) \in L_1(\Omega)$. Таким образом, $u \in V_1$.

Применяя (23), выводим

$$|\chi_m b^{(m)}(\mathrm{x}, u) w| \le \chi_m D h_1(\mathrm{x}) \|w\|_{C(\overline{\Omega})} \le D_3 h_1(\mathrm{x}), \quad w \in C_0^\infty(\Omega). \tag{29}$$

Для любого $\epsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что:

$$\int_E h_1(\mathrm{x}) d\mathrm{x} < \epsilon, \quad \text{для } |E| < \delta, \text{ где } E \subset \Omega.$$

Тогда, пользуясь (29), для любого $\epsilon > 0$ найдем $\delta > 0$:

$$\int_E |\chi_m b^{(m)}(\mathrm{x}, u^m) w| d\mathrm{x} \le \epsilon D_3, \quad \text{для } |E| < \delta.$$

Отсюда, так как $b^{(m)}(\mathrm{x}, u^m) \to b(\mathrm{x}, u)$ п.в. в Ω, применима теорема Витали, следовательно

$$\int_\Omega \chi_m b^{(m)}(\mathrm{x}, u^m) w d\mathrm{x} \to \int_\Omega b(\mathrm{x}, u) w d\mathrm{x}, \quad \forall w \in C_0^\infty(\Omega), \quad m \to \infty.$$

Это доказывает $\langle \mathbf{B}_m(u^m), w\rangle \to \langle \mathbf{B}(u), w\rangle$, $\forall w \in C_0^\infty(\Omega)$ при $m \to \infty$.

Применяя (10), выводим

$$\chi_m b^{(m)}(\mathrm{x}, u^m)(u - u^m) \le [\chi_m b^{(m)}(\mathrm{x}, u^m)(u - u^m)]^+ \le$$
$$\le [b^{(m)}(\mathrm{x}, u^m)(u - u^m)]^+ \le \widehat{b} b(\mathrm{x}, u) u + h_2(\mathrm{x}) \in L_1(\Omega).$$

С другой стороны, применяя (28), имеем

$$\chi_m b^{(m)}(\mathrm{x}, u^m)(u - u^m) \to 0 \quad \text{п.в. в} \quad \Omega, \quad m \to \infty.$$

По теореме Лебега заключаем

$$\limsup_{m\to\infty} \langle \mathbf{B}_m(u^m), u - u^m\rangle \le 0.$$

Таким образом, условие $(\mathcal{B}_2)$ выполнено.

Для доказательства условия $(\mathcal{B}_3)$ достаточно положить $\lambda(u) = b(u,u)$, пользуясь леммой Фату, имеем:

$$\lambda(u) \le \liminf_{m\to\infty} \int_\Omega \chi_m b^{(m)}(\mathrm{x}, u^m) u^m \, d\mathrm{x} = \liminf_{m\to\infty} \langle \mathbf{B}_m(u^m), u^m \rangle.$$

Для любого $m \in \mathbb{N}$ определим отображение $\mathbf{C}_m : \overset{\circ}{W}{}^1_{\vec{\mathrm{p}}(\cdot)}(\Omega) \to W^{-1}_{\vec{\mathrm{p}}'(\cdot)}(\Omega)$:

$$\langle \mathbf{C}_m(u), v \rangle = \int_\Omega \sum_{i=1}^m \chi_m q_i^{(m)}(\mathrm{x}) g_i^{(m)}(u^m_{x_i}) v_{x_i} \, d\mathrm{x} \quad \forall u, v \in \overset{\circ}{W}{}^1_{\vec{\mathrm{p}}(\cdot)}(\Omega), \tag{30}$$

где $g_i^{(m)}(s_i) := g_i(s_i^{(m)})$.

Утверждение 4.3. *Пусть выполнено условие* (11), *тогда отображение* $\mathbf{C} : V_2 \to \mathcal{D}'(\Omega)$, *определяемое равенствами* (18), (19), (30), *удовлетворяет условиям* (C_1)–(C_4) *с* $\mu(u) = c(u,u)$.

Доказательство. Докажем условие (C_1). Покажем, что отображение $\mathbf{C}_m : \overset{\circ}{W}{}^1_{\vec{\mathrm{p}}(\cdot)}(\Omega) \to W^{-1}_{\vec{\mathrm{p}}'(\cdot)}(\Omega)$ является ограниченным, монотонным, полунепрерывным и $\mathbf{C}_m(0) = 0$.

Применяя (11), выводим оценку

$$|\langle \mathbf{C}_m(u), v \rangle| = \Big| \int_\Omega \sum_{i=1}^n \chi_m q_i^{(m)}(\mathrm{x}) g_i^{(m)}(u_{x_i}) v_{x_i} d\mathrm{x} \Big| \le \sum_{i=1}^n \int_\Omega m \chi_m g_i(m) |v_{x_i}| d\mathrm{x} \le$$

$$\le 2 \sum_{i=1}^n m \|g_i(m)\|_{p_i'(\cdot),\Omega(m)} \|v_{x_i}\|_{p_i(\cdot)} \le D_4(m) \|v\|^1_{\vec{\mathrm{p}}(\cdot)}, \quad \forall v \in \overset{\circ}{W}{}^1_{\vec{\mathrm{p}}(\cdot)}(\Omega).$$

Из полученной оценки следует ограниченность $\mathbf{C}_m$ при фиксированном m.

Применяя монотонность функций $g_i^{(m)}(s_i)$, $i = \overline{1,n}$, выводим

$$\langle \mathbf{C}_m(u) - \mathbf{C}_m(v), u - v \rangle = \int_\Omega \sum_{i=1}^n \chi_m q_i^{(m)}(\mathrm{x}) \big(g_i^{(m)}(u_{x_i}) - g_i^{(m)}(v_{x_i}) \big) (u_{x_i} - v_{x_i}) d\mathrm{x} \ge 0.$$

Отсюда следует монотонность $\mathbf{C}_m$.

Из условия (11) следует $g_i(0) = 0$, $i = \overline{1,n}$, тогда $\mathbf{C}_m(0) = 0$.

Пусть $u^j \to u$ в $\overset{\circ}{W}{}^1_{\vec{\mathrm{p}}(\cdot)}(\Omega)$, тогда существует подпоследовательность такая, что

$$\nabla u^j \to \nabla u \quad \text{п.в. в} \quad \Omega, \quad j \to \infty,$$

следовательно

$$\chi_m q_i^{(m)}(\mathrm{x}) g_i^{(m)}(u^j_{x_i}) \to \chi_m q_i^{(m)}(\mathrm{x}) g_i^{(m)}(u_{x_i}) \quad \text{п. в. в} \quad \Omega, \quad j \to \infty.$$

Заметим, что для $v \in \overset{\circ}{W}{}^1_{\vec{\mathrm{p}}(\cdot)}(\Omega)$ справедлива оценка

$$\Big| \sum_{i=1}^n \chi_m q_i^{(m)}(\mathrm{x}) g_i^{(m)}(u^j_{x_i}) v_{x_i} \Big| \le \sum_{i=1}^n m \chi_m g_i(m) |v_{x_i}| \in L_1(\Omega).$$

Поэтому, применяя теорему Лебега о мажорируемой сходимости, устанавливаем:

$$\langle \mathbf{C}_m(u^j), v \rangle \to \langle \mathbf{C}_m(u), v \rangle, \quad \forall v \in \overset{\circ}{W}{}^1_{\vec{\mathrm{p}}(\cdot)}(\Omega).$$

Это доказывает полунепрерывность $\mathbf{C}_m$.

Пусть $u^j \rightharpoonup u$ в $\overset{\circ}{W}{}^1_{\vec{\mathrm{p}}(\cdot)}(\Omega)$, так как $\mathbf{C}_m$ монотонен, то справедливо неравенство $\langle \mathbf{C}_m(u^j) - \mathbf{C}_m(u), u - u^j \rangle \le 0$, следовательно $\langle \mathbf{C}_m(u^j), u - u^j \rangle \le \langle \mathbf{C}_m(u), u - u^j \rangle$. Отсюда следует

$$\lim_{j\to\infty} \sup \langle \mathbf{C}_m(u^j), u - u^j \rangle \le 0.$$

Следовательно, условие (C_1) доказано.

Условие (C_2) доказано в соответствии с леммами 7 и 8 из [13].

Для доказательства условия (C_3) пусть $u^m \rightharpoonup u$ в $\overset{\circ}{W}{}^1_{\vec{\mathrm{p}}(\cdot)}(\Omega)$ и $\lim\limits_{m\to\infty} \sup \langle \mathbf{A}(u^m), u^m - u \rangle \le 0$. Из утверждения 4.1 следует существование подпоследовательности $\{u^m\}$ такой, что

$$\nabla u^m \to \nabla u \quad \text{п. в. в} \quad \Omega, \quad m \to \infty.$$

Отсюда, ввиду ограниченности $\{u^m\}$ в $\overset{\circ}{W}{}^1_{\vec{p}(\cdot)}(\Omega)$ и непрерывности $g_i(s_i)$, следует сходимость

$$g_i^{(m)}(u^m_{x_i}) \to g_i(u_{x_i}) \quad \text{п. в. в} \quad \Omega, \quad m \to \infty, \quad i = 1, \dots, m.$$

Тогда из оценки

$$\langle \mathbf{C}_m(u^m), u^m \rangle = \int_\Omega \sum_{i=1}^n \chi_m q_i^{(m)}(\mathrm{x}) g_i^{(m)}(u^m_{x_i}) u^m_{x_i} d\mathrm{x} \le c,$$

согласно [13, лемма 3], имеем:

$$\chi_m q_i^{(m)}(\mathrm{x}) g_i^{(m)}(u^m_{x_i}) \to q_i(\mathrm{x}) g_i(u_{x_i}) \quad \text{в } L_1(\Omega), \quad m \to \infty. \tag{31}$$

Для любого $w \in C_0^\infty(\Omega)$ справедливы неравенства

$$\left|\langle \mathbf{C}_m(u^m), w\rangle - \langle \mathbf{C}(u), w\rangle\right| \le \int_\Omega \sum_{i=1}^n \left|\chi_m q_i^{(m)}(\mathrm{x}) g_i^{(m)}(u^m_{x_i}) - q_i(\mathrm{x}) g_i(u_{x_i})\right| |w_{x_i}| d\mathrm{x} \le$$

$$\le \|w\|_\infty \sum_{i=1}^n \|\chi_m q_i^{(m)}(\mathrm{x}) g_i^{(m)}(u^m_{x_i}) - q_i(\mathrm{x}) g_i(u_{x_i})\|_1.$$

Отсюда, ввиду (31), для любого $w \in C_0^\infty(\Omega)$ устанавливаем сходимость

$$\langle \mathbf{C}_m(u^m), w\rangle \to \langle \mathbf{C}(u), w\rangle, \quad m \to \infty,$$

которая завершает доказательство условия (C_3).

Докажем (C_4). Для любого $u \in V_2$ определим $\mu(u) = c(u, u)$. Из условия (11) $G_i(s_i) = s_i \cdot g_i(s_i)$ неотрицательны, тогда по лемме Фату:

$$\mu(u) = \int_\Omega \sum_{i=1}^n q_i(\mathrm{x}) g_i(u_{x_i}) u_{x_i} d\mathrm{x} \le \lim_{m\to\infty} \inf \sum_{i=1}^n \chi_m q_i^{(m)}(\mathrm{x}) g_i^{(m)}(u^m_{x_i}) u^m_{x_i} d\mathrm{x} = \lim_{m\to\infty} \inf \langle \mathbf{C}_m(u^m), u^m\rangle.$$

Из утверждений 4.1–4.3, согласно теореме 4.1, следует существование функции $u \in V_1 \cap V_2 \cap K$ такой, что справедливо неравенство (20).

Список литературы

1. Browder F.E. Pseudo-monotone operators and nonlinear elliptic boundary value problems on unbounded domains. *Proceedings of the National Academy of Sciences.* 1977;74(7):2659–2661. DOI: 10.1073/pnas.74.7.2659
2. Кожевникова Л.М., Камалетдинов А.Ш. Существование решений анизотропных эллиптических уравнений с переменными показателями нелинейностей в неограниченных областях. *Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1: Математика. Физика.* 2016;5(36):29–41. DOI: 10.15688/jvolsu1.2016.5.4
3. Кожевникова Л.М., Камалетдинов А.Ш. Существование решений анизотропных эллиптических уравнений с переменными показателями нелинейностей в $\mathbb{R}^n$. *Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры.* 2019;160:49–60. DOI: 10.1007/s10958-021-05469-1
4. Kozhevnikova L.M, Kamaletdinov A.Sh, Melnik L.Yu. Existence of Solutions of Anisotropic Elliptic Equations with Variable Exponents in Unbounded Domains. *Lobachevskii Journal of Mathematics.* 2018;39(2):224—235. DOI: 10.1134/S199508021802011X
5. Mustonen V. A Class of Strongly Nonlinear Variational Inequalities in Unbounded Domains. *Journal of the London Mathematical Society.* 1979;19(2):319–328.
6. Бокало М.М., Кушнір О.В. Варіаційні нелінійні еліптичні нерівності зі змінними показниками нелінійності. *Науковий вісник Чернівецького університету. Математика.* 2006;288:28–38.
7. Diening L, Harjulehto P, Hästö P, Růžička M. Lebesgue and Sobolev Spaces with Variable Exponents. Berlin: Springer; 2011. DOI: 10.1007/978-3-642-18363-8
8. Fan X. Anisotropic variable exponent Sobolev spaces and p(x)-Laplacian equations. *Complex Variables and Elliptic Equations.* 2011;56(7–9):623–642. DOI: 10.1080/17476933.2010.487211
9. Жиков В.В. О вариационных задачах и нелинейных эллиптических уравнениях с нестандартными условиями роста. *Проблемы математического анализа.* 2011;54:23–112.
10. Красносельский М.А., Рутицкий Я.Б. Выпуклые функции и пространства Орлича. Москва: Гос. изд-во физ.-мат. литературы; 1958. 271 с.
11. Musielak J. Orlicz Spaces and Modular Spaces. Berlin: Springer; 1983. 227 c.

12. Benboubker M.B, Azroul E, Barbara A. Quasilinear elliptic problems with nonstandard growths. *Electronic Journal of Differential Equations.* 2011;(62):1–16.
13. Simader C.G. Über schwache Lösungen des Dirichletproblems für streng nichtlineare elliptische differentialgleichungen. *Mathematische Zeitschrift.* 1976;150:1–26.

References

1. Browder FE. Pseudo-monotone operators and nonlinear elliptic boundary value problems on unbounded domains. *Proceedings of the National Academy of Sciences.* 1977;74(7):2659-2661. DOI: 10.1073/pnas.74.7.2659
2. Kozhevnikova LM, Kamaletdinov ASh. Existence of solutions of anisotropic elliptic equations with variable exponents of nonlinearities in unbounded domains. *Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya 1: Matematika. Fizika* [Volgograd State University Journal. Mathematics. Physics]. 2016;36(5):29-41. DOI: 10.15688/jvolsu1.2016.5.4
3. Kozhevnikova LM, Kamaletdinov ASh. Existence of solutions of anisotropic elliptic equations with variable indices of nonlinearity in $\mathbb{R}^n$. *Itogi nauki i tekhniki. Sovremennaya matematika i ee prilozheniya. Tematicheskie obzory* [Journal of Mathematical Sciences]. 2019;160:48-60. DOI: 10.1007/s10958-021-05469-1
4. Kozhevnikova LM, Kamaletdinov ASh, Melnik LYu. Existence of Solutions of Anisotropic Elliptic Equations with Variable Exponents in Unbounded Domains. *Lobachevskii Journal of Mathematics.* 2018;39(2):224-235. DOI: 10.1134/S199508021802011X
5. Mustonen V. A Class of Strongly Nonlinear Variational Inequalities in Unbounded Domains. *Journal of the London Mathematical Society.* 1979;19(2):319-328.
6. Bokalo MM, Kushnir OV. Variational nonlinear elliptic inequalities with variable exponents of nonlinearity. *Scientific Bulletin of Chernivtsi University. Mathematics.* 2006;288:28-38. (In Ukrainian)
7. Diening L, Harjulehto P, Hästö P, Růžička M. Lebesgue and Sobolev Spaces with Variable Exponents. Berlin: Springer; 2011. 485 p. DOI: 10.1007/978-3-642-18363-8
8. Fan X. Anisotropic variable exponent Sobolev spaces and p(x)-Laplacian equations. *Complex Variables and Elliptic Equations.* 2011;56(7-9):623-642. DOI: 10.1080/17476933.2010.487211
9. Zhikov VV. On variational problems and nonlinear elliptic equations with nonstandard growth conditions. *Problemy matematicheskogo analiza* [Journal of Mathematical Sciences]. 2011;54:23-112.
10. Krasnoselskii MA, Rutitskii YB. Convex functions and Orlicz spaces. Moscow: Fizmatgiz; 1958. 271 p (In Russ.).
11. Musielak J. Orlicz Spaces and Modular Spaces. Berlin: Springer; 1983. 227 p.
12. Benboubker MB, Azroul E, Barbara A. Quasilinear elliptic problems with nonstandard growths. *Electronic Journal of Differential Equations.* 2011;62:1-16.
13. Simader CG. On weak solutions of the Dirichlet problem for strongly nonlinear elliptic differential equations. *Mathematician Zeitschrift.* 1976;150:1-26. (In German)

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.
Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 21.07.2025
Поступила после рецензирования 26.08.2025
Принята к публикации 29.08.2025

Received July 21, 2025
Revised August 26, 2025
Accepted August 29, 2025

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Кожевникова Лариса Михайловна – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры искусственного интеллекта и перспективных математических исследований, Уфимский университет науки и технологий, г. Уфа, Россия

Гилемьянова Алия Алфитовна – студентка кафедры искусственного интеллекта и перспективных математических исследований, Уфимский университет науки и технологий, г. Уфа, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Larisa M. Kozhevnikova – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Professor of the Department of Artificial Intelligence and Advanced Mathematical Research, Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia

Aliya A. Gilemyanova – student of the Department of Artificial Intelligence and Advanced Mathematical Research, Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia

К содержанию