Прикладная математика & Физика, 2026, том 58, № 1. С. 72–77.
Applied Mathematics & Physics, 2026, Volume 58, No 1. P. 72–77.

УДК 519.833.3
MSC 91A05
Оригинальное исследование

DOI 10.52575/2687-0959-2026-58-1-72-77
EDN OLZBVJ

Геометрический подход к описанию равновесных ситуаций в биматричной игре 2×2

Герасименко Е. С., **Родин В. А.**
(*Статья представлена членом редакционной коллегии Вирченко Ю. П.*)
Воронежский институт МВД России,
Россия, 394065, г. Воронеж, пр-т. Патриотов, 53
jenya35353@yandex.ru

Аннотация. В работе для описания равновесных ситуаций в биматричной игре применяются принципиально отличные от известных методы. Они основаны на геометрии гиперболического параболоида (ГП) – как графика среднего выигрыша. Мы применяем в допустимых случаях (полный график ГП) следующие геометрические методы; 1 метод – анализ частных производных функций средних выигрышей игроков; 2 метод – анализ параболических сечений графика ГП; 3 метод – анализ гиперболических сечений графика ГП. Первый метод был анонсирован в тезисах сообщений ВЗМШ 2025. Кроме того, в работе получены общие формулы для вычисления суммы выигрыша через определители игровых матриц. В известных авторам работах указанные подходы не найдены. Для компактности изложения все методы сведены в одном утверждении.

Ключевые слова: теория игр, биматричные игры, геометрический подход, равновесные ситуации

Для цитирования: Герасименко Е.С., Родин В.А. Геометрический подход к описанию равновесных ситуаций в биматричной игре 2×2. *Прикладная математика & Физика.* 2026;58(1):72–77. DOI 10.52575/2687-0959-2026-58-1-72-77 EDN OLZBVJ

Original Research

Geometric Approach to Describing Equilibrium Situations in a 2×2 Bimatrix Game

Evgeny S. Gerasimenko, **Vladimir A. Rodin**
(*Article submitted by a member of the editorial board Virchenko Yu. P.*)
Voronezh Institute of the Ministry of the Interior of Russia,
53 Patriots Avenue, Voronezh, 394065, Russia
jenya35353@yandex.ru

Abstract. The paper uses fundamentally different methods from the known ones to describe equilibrium situations in a bimatrical game. They are based on the geometry of the hyperbolic paraboloid (GP), as a graph of the average gain. In acceptable cases (the full GP graph), we use the following geometric methods; 1 method is the analysis of partial derivatives of the functions of the average winnings of the players; 2 method is the analysis of parabolic sections of the GP graph; 3 method is the analysis of hyperbolic sections of the GP graph; The first method was announced in the abstracts of the WSMSH 2025. In addition, the paper presents general formulas for calculating the amount of winnings using the determinants of game matrices. These approaches have not been found in any other published work. For the sake of brevity, all the methods are summarized in a single statement.

Keywords: Game Theory, Bimatrix Games, Geometric Approach, Equilibrium Situations

For citation: Gerasimenko ES., Rodin VA. Geometric Approach to Describing Equilibrium Situations in a 2×2 Bimatrix Game. *Applied Mathematics & Physics.* 2026;58(1):72–77. (In Russ.). DOI 10.52575/2687-0959-2026-58-1-72-77 EDN OLZBVJ

---

1. Введение. Для описания равновесных ситуаций в биматричной игре применяются различные методы: первый метод – анализ частных производных функций средних выигрышей игроков; второй метод - анализ параболических сечений графика ГП; третий метод - анализ гиперболических сечений графика ГП. Первый метод был анонсирован в тезисах сообщений ВЗМШ 2025 [1] и работе [2]. Описание равновесных ситуаций биматричной игры 2 х 2 хорошо исследованы (Дж. Нэш), например в [3] для каждой игры (пары матриц) применяется исследование несложных неравенств. Эти неравенства содержат 4 параметра, связанных с матрицами. Еще решение в смешанных стратегиях можно сводить к решению системы линейных уравнений для точки внутри квадрата $[0, 1]^2$, или получению чистого решения на границе этого квадрата. Известны и развиваются, например, в работах [4, 5, 6], подходы к применению теории игр к задачам для силовых структур.

2. Определения, обозначения и описание равновесных ситуаций в биматричной игре 2×2. Рассмотрим игру 2x2, заданную платежными матрицами игроков A и B.

$$\begin{pmatrix}(a_1;b_1) & (a_1;b_2)\\(a_2;b_1) & (a_2;b_2)\end{pmatrix} \Leftrightarrow A = \begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{pmatrix} B = \begin{pmatrix}b_{11} & b_{12}\\b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}.$$

Средние выигрыши каждого игрока

$$H_A\,(x,\ y) = a_{11}xy + a_{12}x(1-y) + a_{21}(1-x)y + a_{22}(1-x)(1-y),$$

$$H_B\,(x,\ y) = b_{11}xy + b_{12}x(1-y) + b_{21}(1-x)y + b_{22}(1-x)(1-y).$$

Определение 1.1. *[7] Пара чисел $0 \le x_0 \le 1$, $0 \le y_0 \le 1$ определяет равновесную ситуацию, если для любых $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$ одновременно выполняются следующие неравенства:*

$$H_A\,(x,\ y_0) \le H_A\,(x_0,\ y_0)\,, H_B\,(x_0,\ y) \le H_B\,(x_0,\ y_0)\,. \tag{1}$$

Для описания равновесных ситуаций мы воспользуемся структурой поверхности гиперболического параболоида.

Средние выигрыши каждого игрока преобразуем к виду

$$\begin{aligned} H_A\,(x,\ y) &= (a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22})\,xy + (a_{12} - a_{22})\,x + (a_{21} - a_{22})\,y + a_{22},\\ H_B\,(x,\ y) &= (b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22})\,xy + (b_{12} - b_{22})\,x + (b_{21} - b_{22})\,y + b_{22}. \end{aligned} \tag{2}$$

Введем обозначения:

$$C = a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}, \alpha = a_{22} - a_{12};$$

$$D = b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22}, \beta = b_{22} - b_{21}.$$

3. Получение координат точки равновесия разными способами. Теорема 1.1. *Если $CD \neq 0$ (Полный график ГП), то точка равновесия $(x_0,\ y_0)$ определяется из решения системы*

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}H_A(x,y) = 0;\\ \dfrac{d}{dy}H_B(x,y) = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Также координаты точки равновесия можно определить как решение системы

$$\begin{cases} H_A(y,y) = H_A(-y,y);\\ H_B(x,x) = H_B(x,-x). \end{cases} \tag{4}$$

Или решая систему

$$\begin{cases} H_A(x,y) + H_A(-x,y) = 2\dfrac{\det A}{C};\\ H_B(x,y) + H_B(x,-y) = 2\dfrac{\det B}{D}. \end{cases} \tag{5}$$

При этом:

1. Если $0 \le x_0 \le 1$ и $0 \le y_0 \le 1$ (рис. 1), то игра имеет три точки равновесия $(0,\ 0)$, $(1,\ 1)$ и $(x_0,\ y_0)$ для $x_0 = \frac{\beta}{D}$, $y_0 = \frac{\alpha}{C}$. Средние выигрыши вычисляются по формулам:

$$\begin{gathered} H_A\,(0,\ 0) = a_{22}, H_B\,(0,\ 0) = b_{22};\\ H_A\,(1,\ 1) = a_{11}, H_B\,(1,\ 1) = b_{11};\\ H_A\,(x_0,\ y_0) = \tfrac{\det(A)}{C}, H_B\,(x_0,\ y_0) = \tfrac{\det(B)}{D}. \end{gathered} \tag{6}$$

2. Если $x_0 > 1$ и $y_0 > 1$, то координаты «седловой точки» поверхности гиперболического параболоида не принадлежат квадрату $[0,1]^2$. В этом случае есть только одна точка равновесия $(0,\ 0)$. Это – «дилемма узников» в общем виде.

4. Доказательство.

4.1. Формулы (3).

Пусть $0 \le x_0 \le 1$, $0 \le y_0 \le 1$. Запишем первую строчку (2) в виде

$$H_A\,(x,\ y) = x(Cy - \alpha) + (a_{21} - a_{22})\,y + a_{22}. \tag{7}$$

При фиксированном y — формула (7), это уравнение прямой линии (прямая в сечении ГП, (рис. 2)).

Изменения в уравнении прямой линии зависят от коэффициента. Чтобы уменьшить влияние игрока A с помощью параметра x приравняем частную производную по этому параметру к нулю.

Получаем $\frac{d}{dx}H_A\,(x,\ y) = Cy - \alpha = 0$ или $y_0 = \frac{\alpha}{C}$.

Аналогично для игрока B . Запишем вторую строчку (2) в виде.

$$H_B\,(x,\ y) = y(Dx - \beta) + (b_{12} - b_{22})\,x + b_{22}. \tag{8}$$

При фиксированном x — это уравнение прямой линии в сечении ГП (рис. 2). Изменения в прямой линии зависят от коэффициента. Чтобы уменьшить влияние игрока B с помощью параметра y, приравняем частную производную по этому параметру к нулю.

Получаем $\frac{d}{dy}H_B\,(x,\ y) = Dx - \beta = 0$ или $x_0 = \frac{\beta}{D}$.

Нижние формулы в (6) получаются подстановкой значений (x_0, y_0) в формулы (7) и (8).

4.2. Формулы (4)**.** Сечения ГП, для которых $x - y = 0$ или $x + y = 0$, будем называть параболическими сечениями N_1 и N_2.

Согласно (рис. 2) параболы в этих сечениях в качестве общей точки имеют «седловую точку» как общую точку двух парабол в указанных сечениях.

Пусть $0 \le x_0 \le 1$, $0 \le y_0 \le 1$. Первый игрок пользуется матрицей A и выбирает смешанное решение путем изменения переменной x. Выберем два сечения в ГП, в которых мы имеем параболы с вершинами в седловой точке. Это сечения: $x = y$ и $x = -y$ (рис. 2). Применяя формулу (7) для этих сечений, получаем

$$H_A\,(y,\ y) = y(Cy - \alpha) + (a_{21} - a_{22})\,y + a_{22},$$

$$H_A\,(-y,\ y) = -y(Cy - \alpha) + (a_{21} - a_{22})\,y + a_{22}.$$

Из первого равенства в (4) получаем $2y(Cy - \alpha) - 0$ и два корня $y = 0$ и $y_0 = \frac{\alpha}{C}$.

Учитывая, что второй игрок пользуется матрицей B и выбирает смешанное решение путем изменения переменной y, получаем

$$H_B\,(x,\ x) = x(Dx - \beta) + (b_{12} - b_{22})\,x + b_{22}$$

$$H_B\,(x,\ -x) = -x(Dx - \beta) + (b_{12} - b_{22})\,x + b_{22}.$$

Из второго равенства в (4) получаем $2x(Dx - \beta) - 0$ и два корня $x = 0$, $x_0 = \frac{\beta}{D}$. Нижние формулы в (5) получаются подстановкой значений $(x_0,\ y_0)$ в формулы (6) и (7). Точки $(0,\ 0)$, $(1,\ 1)$ относятся к частым стратегиям.

4.3. Формулы (5)**.** Сечение ГП построенного для функции выигрыша каждого игрока, параллельное плоскости XOY, будем называть "гиперболическим сечением". Заметим, что гиперболы в сечениях ГП параллельно плоскости XOY, проведенных ниже седловой точки и выше седловой точки, определяют гиперболы, повернутые относительно друг друга на $\pi/2$.

Пусть $0 \le x_0 \le 1$, $0 \le y_0 \le 1$. Рассмотрим первое равенство в (5). Сечения выше и ниже седловой точки, учитывая поворот, имеют вид:

$$H_A\,(x,\ y) = H_A(x_0, y_0) + \Omega,$$

$$H_A\,(-x,\ y) = H_A(x_0, y_0) - \Omega,$$

для некоторой константы Ω.

Сложение дает первое равенство в (5). Воспользуемся формулой

$$H_A\,(x,\ y) = x(Cy - \alpha) + (a_{21} - a_{22})\,y + a_{22}.$$

Первый игрок может менять первую переменную. После сложения получаем

$$\begin{gathered} 2\,(a_{22} - a_{21})\,y + 2a_{22} = 2\frac{\det A}{C};\\ (a_{22} - a_{21})\,y = \frac{(a_{22}-a_{21})\,(a_{22}-a_{12})}{C}.\\ y = \frac{a_{22}-a_{12}}{C} = \frac{\alpha}{C}. \end{gathered}$$

Для второго равенства в (5) воспользуемся формулой

$$H_B\,(x,\ y) = y(Dx - \beta) + (b_{12} - b_{22})\,x + b_{22}.$$

Второй игрок может менять вторую переменную. После сложения получаем

$$\begin{gathered} 2\,(b_{22} - b_{21})\,y + 2b_{22} = 2\frac{\det B}{D};\\ y = \frac{(a_{22}-a_{21})}{D} = \frac{\beta}{D}. \end{gathered}$$

Для случая $x_0 > 1$, $y_0 > 1$ координаты «седловой точки» поверхности гиперболического параболоида не принадлежат квадрату $[0, 1]^2$. В этом случае есть только одна точка равновесия $(0,\ 0)$.

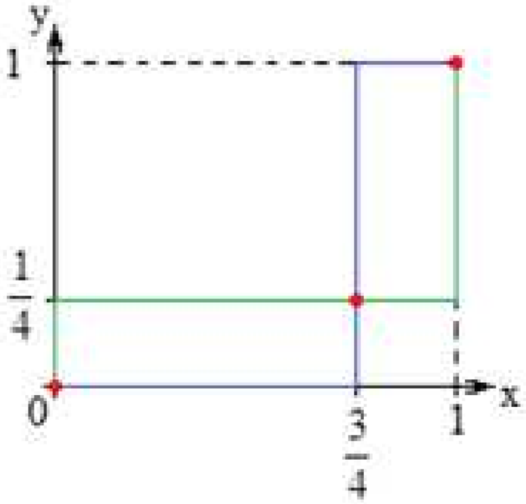
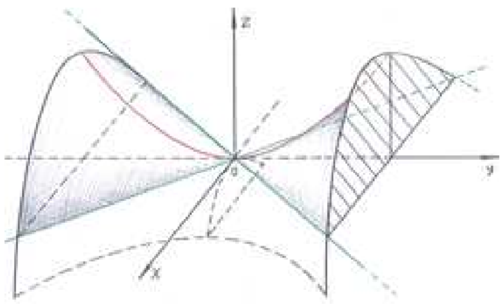


Рис. 1. $(x_0,\ y_0) \in (0,\ 1) \times (0,\ 1)$
Fig. 1. $(x_0,\ y_0) \in (0,\ 1) \times (0,\ 1)$



is2
is2

Рис. 2. Гиперболический параболоид
Fig. 2. Hyperbolic paraboloid

Если $CD \neq 0$, то получаем формулы

$$H_A\left(x_0,\ y_0\right) = \frac{\det(A)}{C}, H_B\left(x_0,\ y_0\right) = \frac{\det(B)}{D},$$

определяющие выигрыш игроков.

Рассмотрим специальные случаи: $CD = 0$.

Условие $CD = 0$ распадается на три варианта: $C = 0,\ \ D \neq 0$, $D = 0,\ \ C \neq 0$, $C = 0,\ \ D = 0$. В каждом варианте поверхность ГП превращается в плоскость. Данная ситуация описана в литературе, не является целью работы и намечена фрагментарно.

Дадим фрагменты описания функция среднего выигрыша игроков и графические иллюстрации множества точек равновесия.

1) $C = 0,\ \ D \neq 0$. В этом случае уравнение $H_A\left(x,\ y\right) = \left(a_{12} - a_{22}\right) x + \left(a_{21} - a_{22}\right) y + a_{22}$ представляет собой плоскость и с учетом равенства $C = 0$ справедливо равенство

$$\max\left(H_A(0, 0), H_A(0, 1), H_A(1, 0), H_A(1, 1)\right) = \max\left(a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}\right).$$

С учетом анализа второй системы неравенств (7) получаем рис. 3.

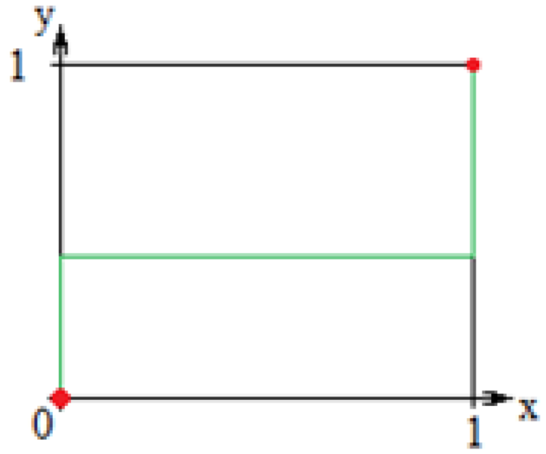


Рис. 3. $C = 0, D \neq 0$
Fig. 3. $C = 0, D \neq 0$

2) $D = 0, C \neq 0$

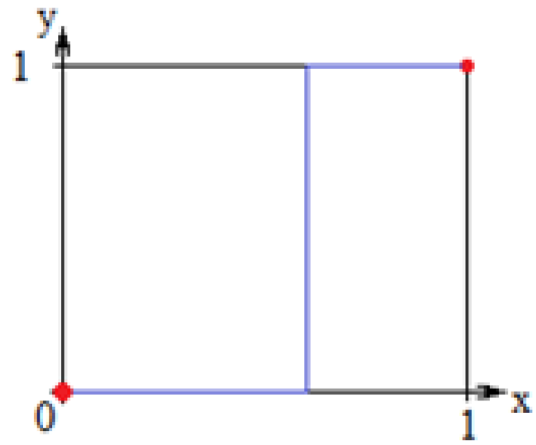


Рис. 4. $D = 0, C \neq 0$
Fig. 4. $D = 0, C \neq 0$

3) $D = 0, C = 0$

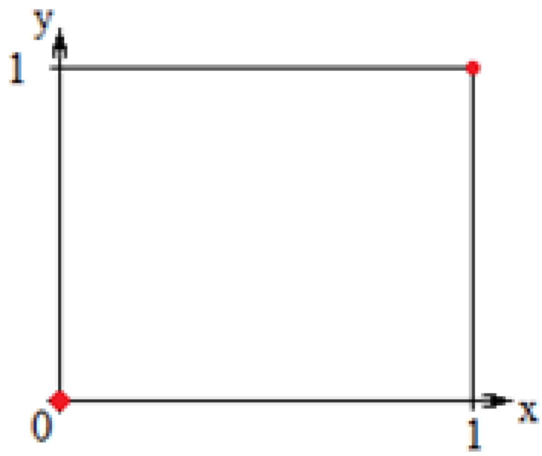


Рис. 5. $D = 0, C = 0$
Fig. 5. $D = 0, C = 0$

4. Заключение. В качестве простого следствия получим утверждение для игроков с одной матрицей (модель Дж. Неймана). Для этого случая $A = B$ определены новые способы получения точек для игры с нулевой суммой. В отличие от многочисленных работ по теории матричных игр в работе описание неподвижных точек проведено с помощью анализа геометрии ГП. Авторам не удалось найти подобного подхода в известных им работах.

Список литературы

1. Думачев В.Н., Родин В.А.,Синегубов С.В. О точках равновесия в биматричной игре 2×2 . *Материалы международной конференции Воронежская зимняя математическая школа (30 января – 4 февраля 2025 г.)* 2025; 125–127.
2. Родин В.А.,Синегубов С.В. Аналитический подход к описанию равновесных ситуаций в биматричной игре 2×2. *Вестник Воронежского и института МВД России* 2024;4:32–42.
3. Гладких Т.В. Теория игр – метод разработки управленческих решений. *Уральский научный вестник.* 2023; 6(4):231–236.
4. Корепанов В.О., Шумов В.В. Моделирование военных, боевых и специальных действий. *Военная мысль.* 2023;1:28-41.
5. Сергеев Н.П., Степанов Л.В. Аспекты применения теории игр к оценке безопасности системы. *Вестник Воронежского института ФСИН России.* 2024;2:109-117.
6. Яблонская К.О., Наумова О.Н. Теория игр и ее применение на практике. *Фундаментальные и прикладные исследования в области управления, экономики и торговли : сборник трудов всероссийской научно-практической и учебно-методической конференции, Санкт-Петербург, 30 мая – 02 июня 2022 года* 2022;123-126.
7. Шикин Е.В., Чхартишвили А.Г. Математические методы и модели в управлении (Сер. «Класический университетский учебник»). М.:Дело; 2004. 439 с.

References

1. Dumachev VN., Rodin VA.,Sinegubov SV. O tochkax ravnovesiya v bimatrichnoj igre 2×2 . *Materialy mezhdunarodnoj konferencii Voronezhskaya zimnyaya matematicheskaya shkola (30 yanvarya – 4 fevralya 2025 g.)* 2025; 125–127. (In Russ.)
2. Rodin VA.,Sinegubov SV. Analiticheskij podxod k opisaniyu ravnovesnyx situacij v bimatrichnoj igre 2×2 . *Vestnik Voronezhskogo i instituta MVD Rossii* 2024;4:32–42. (In Russ.)
3. Gladkix TV. Teoriya igr – metod razrabotki upravlencheskix reshenij . *Uralskij Nauchnyj Vestnik* 2023; 6(4):231–236. (In Russ.)
4. Korepanov VO., Shumov VV. Modelirovanie voennyx, boevyx i specialnyx dejstvij. *Voennaya Mysl.* 2023;1:28–41. (In Russ.)
5. Sergeev NP., Stepanov LV. Aspekty primeneniya teorii igr k ocenke bezopasnosti sistemy. *Vestnik Voronezhskogo instituta FSIN Rossii* 2024;2:109–117. (In Russ.)
6. Yablonskaya KO., Naumova ON. Teoriya igr i ee primenenie na praktike. *Fundamentalnye i prikladnye issledovaniya v oblasti upravleniya, ekonomiki i torgovli : sbornik trudov vserossijskoj nauchno-prakticheskoj i uchebno-metodicheskoj konferencii, Sankt-Peterburg, 30 maya – 02 iyunya 2022 goda* 2022; 123–126. (In Russ.)
7. Shikin EV., Chxartishvili AG. Matematicheskie metody i modeli v upravlenii (Ser. "Klasicheskij universitetskij uchebnik"). M.:Delo; 2004; 439 c. (In Russ.)

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.
Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 08.12.2025
Поступила после рецензирования 22.01.2026
Принята к публикации 07.02.2026

Received December 8, 2025
Revised January 22, 2026
Accepted February 7, 2026

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Герасименко Евгений Сергеевич – кандидат технических наук, старший преподаватель кафедры математики и моделирования систем, Воронежский институт МВД России, г. Воронеж, Россия

Родин Владимир Александрович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры математики и моделирования систем, Воронежский институт МВД России, г. Воронеж, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Evgeny S. Gerasimenko – Candidate of Technical Sciences, Senior Lecturer of the Department of Mathematics and System Modeling, Voronezh Institute of the Ministry of the Interior of Russia, Voronezh, Russia

Vladimir A. Rodin – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Department of Mathematics and System Modeling, Voronezh Institute of the Ministry of the Interior of Russia, Voronezh, Russia

К содержанию