Прикладная математика & Физика, 2025, том 57, № 3. С. 193–207
Applied Mathematics & Physics, 2025, Volume 57, No 3. P. 193–207

УДК 517.926.4
MSC 34A30, 34E05
Оригинальное исследование

DOI 10.52575/2687-0959-2025-57-3-193-207
EDN QQZPAV

О разрешимости начальной задачи для факторизованного вырождающегося дифференциального уравнения второго порядка

Архипов В. П.[1], **Глушак А. В.**[2]
[1] Орловский государственный университет им. И. С. Тургенева,
Россия, 302026, г. Орел, ул. Комсомольская, 95
varhipov@inbox.ru
[2] Белгородский государственный национальный исследовательский университет,
Россия, 308015, г. Белгород, ул. Победы, 85
Glushak@bsuedu.ru

Аннотация. Для распадающегося на линейные множители вырождающегося дифференциального уравнения второго порядка найдено общее решение, вид которого зависит от знака коэффициентов при первой производной. Установлена разрешимость задачи Коши с начальным условием в точке вырождения. Определены асимптотики построенных решений. Приводятся примеры.

Ключевые слова: вырождающееся дифференциальное уравнение, начальная задача, степенные асимптотики решений

Для цитирования: Архипов В.П., Глушак А.В. О разрешимости начальной задачи для факторизованного вырождающегося дифференциального уравнения второго порядка. *Прикладная математика & Физика.* 2025;57(3):193–207. DOI 10.52575/2687-0959-2025-57-3-193-207 EDN QQZPAV

Original Research

On the Solvability of the Initial Value Problem for a Factorized Degenerate Second-Order Differential Equation

Viktor P. Arkhipov[1], **Alexander V. Glushak**[2]
[1] Orel State University named after I.S. Turgenev,
95 Komsomolskaya St., Orel 302026, Russia
varhipov@inbox.ru
[2] Belgorod National Research University,
85 Pobedy St., Belgorod 308015, Russia
Glushak@bsuedu.ru

Abstract. For a degenerate differential equation of the second order that splits into linear factors, a general solution is found whose form depends on the sign of the coefficients at the first derivative. The solvability of the Cauchy problem with an initial condition at the degeneracy point is established. The asymptotics of the constructed solutions are determined. Examples are given.

Keywords: Degenerate Differential Equation, Initial Value Problem, Power Asymptotics of Solutions

For citation: Arkhipov VP., Glushak AV. On the Solvability of the Initial Value Problem for a Factorized Degenerate Second-Order Differential Equation. *Applied Mathematics & Physics.* 2025;57(3):193–207 (In Russ.).
DOI 10.52575/2687-0959-2025-57-3-193-207 EDN QQZPAV

1. Введение. Исследование вырождающихся дифференциальных уравнений, допускающих обращение в ноль коэффициентов при старшей производной, заключается в построении решений и изучении их гладкости и асимптотики в окрестности точки вырождения. В настоящей работе мы приводим явные формулы для решений и исследование гладкости решений дифференциальных уравнений, порождённых произведением операторов вида

$$p(t)\frac{d}{dt} + q(t), \quad p(0) = 0, \;\; p(t) > 0 \text{ при } t > 0.$$

Полученные в статье результаты являются продолжением исследований по разрешимости вырождающихся дифференциальных уравнений второго порядка, проведённых ранее в работах [1, 2, 3, 4, 5]. Основной особенностью рассматриваемых нами вырождающихся дифференциальных уравнений второго порядка является не только вырождение коэффициента при второй производной, но также и вырождение коэффициента при первой производной. Возможность такого исследования обусловлена представлением рассматриваемого уравнения в виде композиции. Именно этот факт отличает её от исследования в монографии [6, с. 137], в которой требовалась определённая пропорциональность убывания коэффициента при первой производной, когда $t \to 0$.

2. Асимптотика решений вырождающегося дифференциального уравнения первого порядка. На промежутке $[0, d]$, $d > 0$ рассмотрим вырождающееся дифференциальное уравнение первого порядка

$$p(t)u'(t) + q(t)u(t) = g(t). \tag{1}$$

Условие 1. Коэффициенты и правая часть $g(t)$ уравнения (1) — действительные функции, причём $p(t), q(t) \in C^\infty[0,d]$, $p(0) = 0$, $p(t) > 0$ при $t > 0$, $q(0) \neq 0$, $g(t) \in C^m[0,d]$ при некотором $m \in \mathbb{N}_0$.

Уравнение (1) ранее было предметом исследования в статьях [6, 7, 8, 9]. Приведём далее необходимые нам результаты об асимптотике решений уравнения (1), которые не вошли в вышеуказанные работы [6, 7, 8, 9].

Решение уравнения (1) при $g(t) = 0$ имеет вид

$$u_0(t) = \exp\left(\int\limits_t^d \frac{q(\xi)\,d\xi}{p(\xi)}\right), \quad t > 0. \tag{2}$$

Лемма 1. *Пусть для коэффициентов уравнения (1) выполнено условие 1. Тогда для определяемой равенством (2) функции $u_0(t)$ справедливы следующие утверждения.*

1°. *При $q(0) > 0$ для любого $k \in \mathbb{N}_0$*

$$\lim_{t\to0+} u_0^{(k)}(t) = \infty, \quad u_0(t) \in C^\infty(0,d], \quad u_0(t) \notin C[0,d]. \tag{3}$$

2°. *При $q(0) < 0$ и $p'(0) = 0$ для $\varphi_k(t) \in C^\infty[0,d]$ и любых $k \in \mathbb{N}_0$*

$$\lim_{t\to0+} u_0^{(k)}(t) = \lim_{t\to0+} \varphi_k(t)\exp\left(\int\limits_t^d \frac{q_k(\xi)\,d\xi}{p(\xi)}\right) = 0, \quad где \;\; q_k(t) = q(t) + kp'(t),$$

$$u_0(t) \in C^\infty[0,d], \; u_0(t) = o\left(t^k\right) \;\; при\; t \to 0+. \tag{4}$$

3°. *При $q(0) = q_0 < 0$ и $p(t) = p_1 t + t^2 O(1)$, $p_1 > 0$, $q(t) = q_0 + tO(1)$ справедливо*

$$u_0(t) \in C^{[-q_0/p_1]}[0,d], \; \lim_{t\to0+} u_0^{(k)}(t) = 0 \;\; для\; любого\; k < \left[-\frac{q_0}{p_1}\right], \tag{5}$$

наконец, $u_0(t) \in C^\infty[0,d]$, если $-\dfrac{q_0}{p_1} \in \mathbb{N}$.

Доказательство. 1°. При $t > 0$, продифференцировав равенство (2), будем иметь

$$u_0^{(k)}(t) = \frac{\phi_k(t)}{p^k(t)}\exp\left(\int\limits_t^d \frac{q(\xi)\,d\xi}{p(\xi)}\right) = \varphi_k(t)\exp\left(\int\limits_t^d \frac{q(\xi) + kp'(\xi)}{p(\xi)}d\xi\right),$$

с некоторыми $\phi_k(t)$, $\varphi_k(t) \in C^\infty[0,d]$, и, переходя к пределу при $t \to 0+$, получим утверждение (3).

2°. Аналогично п. 1°, при $t > 0$ и $q(0) < 0$ справедливо предельное равенство

$$\lim_{t\to0+} u_0^{(k)}(t) = \lim_{t\to0+} \varphi_k(t)\exp\left(\int\limits_t^d \frac{q(\xi) + kp'(\xi)}{p(\xi)}d\xi\right) = 0,$$

и, доопределив $u_0(0) = 0$, получим утверждение (4).

3°. Учитывая асимптотику коэффициентов уравнения (1), при $q(0) = q_0 < 0$ и $Q_k(t) = O(1) \in C^\infty[0,d]$, $k \in \mathbb{N}_0$, после несложных преобразований будем иметь

$$\lim_{t\to0+} u_0^{(k)}(t) = \lim_{t\to0+} \varphi_k(t)\exp\left(\int\limits_t^d \frac{q_0 + \xi O(1) + k(p_1 + 2\xi O(1))}{p_1\xi(1 + \xi O(1)}d\xi\right) =$$

$$= \lim_{t\to0+} \varphi_k(t)\exp\left(\int\limits_t^d \frac{(q_0 + kp_1)(1 + \xi O(1))d\xi}{p_1\xi}\right) = \lim_{t\to0+} \varphi_k(t)\exp\left(\frac{q_0 + kp_1}{p_1}\int\limits_t^d \frac{d\xi}{\xi}\right)\exp(O(1)) =$$

$$= \lim_{t\to 0+} Q_k(t)t^{-q_0/p_1-k} = \begin{cases} 0. & \text{если } k < -\dfrac{q_0}{p_1}, \\ Q_k(0), & \text{если } k = -\dfrac{q_0}{p_1}, \\ \infty, & \text{если } k > -\dfrac{q_0}{p_1}. \end{cases}$$

Доопределив функцию $u_0(t)$ нулём $u_0(0) = 0$, получим утверждение (5). Лемма 1 доказана.

Укажем далее асимптотические свойства при $t \to 0+$ частных решений уравнения (1) для различных значений $q(0)$.

Лемма 2. *Пусть для коэффициентов и правой части уравнения (1) выполнено условие 1 и $q(0) > 0$. Тогда при любой функции $g(t)$ существует единственное ограниченное на $[0, d]$ решение $u_+(t; g)$ этого уравнения, определённое несобственным интегралом*

$$u_+(t; g) = \int_0^t \frac{g(\tau)}{p(\tau)} \exp\left(-\int_\tau^t \frac{q(\xi)\,d\xi}{p(\xi)}\right) d\tau \in C^m[0, d] \bigcap C^{m+1}(0, d], \tag{6}$$

и при этом

$$u_+(0; g) = \frac{g(0)}{q(0)}, \ \ u_+^{(k)}(0; g) = \frac{g_k(0)}{q_k(0)} = \frac{g'_{k-1}(0) - q'_{k-1}(0)u_+^{(k-1)}(0; g)}{kp'(0) + q(0)}, \ \ 1 \le k \le m, \tag{7}$$

$$g_k(t) = g'_{k-1}(t) - q'_{k-1}(t)u_+^{(k)}(t; g) \in C[0, d], \ \ g_0(t) = g(t),$$

$$q_k(t) = p'(t) + q_{k-1}(t) = kp'(t) + q(t), \ \ q_k(0) > 0, \ \ q_0(t) = q(t).$$

Доказательство. Нетрудно проверить, что определяемая равенством (6) функция $u_+(t; g)$ при $t > 0$ удовлетворяет уравнению (1) и $u_+(t; g) \in C^{m+1}(0, d]$. Используя правило Лопиталя, вычислим предел

$$\lim_{t\to 0+} u_+(t; g) = \lim_{t\to 0+} \frac{\displaystyle\int_0^t \frac{g(\tau)}{p(\tau)} \exp\left(-\int_\tau^d \frac{g(\xi)}{p(\xi)}\,d\xi\right) d\tau}{\exp\left(-\displaystyle\int_t^d \frac{g(\xi)}{p(\xi)}\,d\xi\right)} = \frac{g(0)}{q(0)}, \tag{8}$$

и, доопределив $u_+(0; g) = \dfrac{g(0)}{q(0)}$, получим $u_+(t; g) \in C[0, d] \bigcap C^{m+1}(0, d]$.

Далее проведём процесс повышения гладкости функции $u_+(t; g)$ в точке $t = 0$. Если функция $u_+(t; g) \in C[0, d] \bigcap C^{m+1}(0, d]$ — решение уравнения (1), то функция $u_1(t; g_1) = u'_+(t; g)$ при $t > 0$, $m \ge 1$ удовлетворяет уравнению $p(t)u'_1(t; g_1) + q_1(t)u_1(t; g_1) = g_1(t)$, где $q_1(t) = p'(t) + q(t)$, $q_1(0) > 0$, $g_1(t) = g'(t) - q'(t)u_+(t; g)$.

Аналогично вычислениям, проведённым ранее в (8), получим

$$\lim_{t\to 0+} u_1(t; g_1) = \frac{g_1(0)}{q_1(0)},$$

следовательно, $u_1(t; g_1) \in C[0, d]$ и $u_+(t; g) \in C^1[0, d]$.

Повторим этот процесс далее для любого $k \le m$. Тогда функция $u_k(t; g_k) = u_+^{(k)}(t; g)$ удовлетворяет уравнению $p(t)u'_k(t) + q_k(t)u_k(t; g_k) = g_k(t)$, где $g_k(t) = g'_{k-1}(t) - q'_{k-1}(t)u_{k-1}(t; g_k)$, и при этом справедливо (7)

$$\lim_{t\to 0+} u_+^{(k)}(t; g) = \frac{g_k(0)}{q_k(0)} = u_+^{(k)}(0; g), \ \ u_+(t; g) \in C^m[0, d].$$

Следовательно, $u_+(t; g) \in C^m[0, d] \bigcap C^{m+1}(0, d]$.

Единственность ограниченного решения следует из утверждения 1° леммы 1. Лемма 2 доказана.

Таким образом, при $t > 0$ общее решение уравнения (1) для случая $q(0) > 0$ имеет вид

$$u(t) = Cu_0(t) + u_+(t; g) = C \exp\left(\int_t^d \frac{q(\xi)\,d\xi}{p(\xi)}\right) + \int_0^t \frac{g(\tau)}{p(\tau)} \exp\left(-\int_\tau^t \frac{q(\xi)\,d\xi}{p(\xi)}\right) d\tau \tag{9}$$

с произвольной постоянной C.

В отличие от случая $q(0) > 0$, при $q(0) < 0$ частное решение уравнения (1) следует выбирать в виде

$$u_-(t;g) = -\int_t^d \frac{g(\tau)}{p(\tau)} \exp\left(\int_t^\tau \frac{q(\xi)\,d\xi}{p(\xi)}\right) d\tau. \tag{10}$$

Лемма 3. *Пусть для коэффициентов и правой части уравнения (1) выполнено условие 1 и $q(0) < 0$. Тогда определямая равенством (10) функции $u_-(t;g)$ является решением уравнения (1) и справедливы утверждения.* 1°. *В случае сильного вырождения, когда $p(0) = p'(0) = 0$, для любых $k \in \mathbb{N}_0$, $k \le m$ выполнено*

$$u_-(t;g) \in C^m[0,d] \bigcap C^{m+1}(0,d], \;\; u_-^{(k)}(0;g) = \frac{g_k(0)}{q_k(0)}, \tag{11}$$

где $q_0(t) = q(t)$, $g_0(t) = g(t)$, $q_k(t) = kp'(t) + q(t)$, $q_k(0) < 0$, $g_k(t) = g'_{k-1}(t) - q'_{k-1}(t)u_-^{(k-1)}(t;g)$. 2°. *В случае слабого вырождения, если $p(0) = 0$, $p(t) = p_1 t + t^2 O(1)$, $p_1 > 0$, $q(t) = q_0 + tO(1)$, $q_0 > 0$ и $g(t) = g_0 + \sum_{j=1}^m g_j t^j + t^m o(1)$ при $t \to 0+$, то справедливы включения*

$$u_-(t;g) \in \begin{cases} C^m[0,d], & \text{если } m < -\dfrac{q_0}{p_1}, \\ C^{[-q_0/p_1]}[0,d], & \text{если } m \ge -\dfrac{q_0}{p_1},\ -\dfrac{q_0}{p_1} \notin \mathbb{N}, \\ C^{k_0-1}[0,d], & \text{если } k_0 = -\dfrac{q_0}{p_1} \in \mathbb{N},\ k_0 \le m,\ g^{(k_0)}(0) \ne 0, \\ C^m[0,d], & \text{если } k_0 = -\dfrac{q_0}{p_1} \in \mathbb{N},\ k_0 \le m,\ g^{(k_0)}(0) = 0. \end{cases} \tag{12}$$

3°. Асимптотика функции $u_-(t;g)$ при $t \to 0+$ определяется равенствами (11), (12).

Доказательство. Непосредственной подстановкой проверяется тот факт, что функции $u_-(t;g)$ удовлетворят уравнению (1) и, очевидно, что при этом

$$u_-(t;g) \in C^m[0,d] \bigcap C^{m+1}(0,d],$$

а гладкость и асимптотика решения $u_-(t;g)$ в точке вырождения далее устанавливается, во многом, аналогично лемме 2.

Используя правило Лопиталя, вычислим предел

$$\lim_{t\to 0+} u_-(t;g) = \lim_{t\to 0+} \frac{-\int_t^d \frac{g(\tau)}{p(\tau)} \exp\left(-\int_\tau^d \frac{g(\xi)\,d\xi}{p(\xi)}\right) d\tau}{\exp\left(-\int_t^d \frac{g(\xi)\,d\xi}{p(\xi)}\right)} = \frac{g(0)}{q(0)}, \tag{13}$$

и, доопределив $u_-(0;g) = \dfrac{g(0)}{q(0)}$, получим $u_-(t;g) \in C[0,d] \bigcap C^{m+1}(0,d]$.

Как и в лемме 2, повторяя процесс повышения гладкости, при $q_k(0) = kp'(0) + q(0) < 0$, установим $u_-(t;g) \in C^k[0,d]$.

В случае 1° неравенство $q_k(0) < 0$ выполняется для любого $1 \le k \le m$, что и приводит к соотношениям (11). В случае 2° проведём более точные рассуждения, используя асимптотику коэффициентов.

Если $1 \le m < -\dfrac{q_0}{p_1}$, то при $t \to 0+$ для определяемой равенством (10) функции $u_-(t;g)$ справедлива асимптотика

$$u_-(t;g) = -\int_t^d \frac{g(\tau)}{p(d)} \exp\left(-\int_\tau^d \frac{(q(\xi) - p'(\xi))\,d\xi}{p(\xi)}\right) d\tau \times \exp\left(\int_t^d \frac{q(\xi)\,d\xi}{p(\xi)}\right) =$$

$$= -\int_t^d \frac{g(\tau)}{p(d)} \exp\left(-\int_\tau^d \frac{(q(\xi) - p'(\xi))\,d\xi}{p(\xi)}\right) d\tau \times \exp\left(\frac{q_0}{p_1}\int_t^d \frac{(1 + \xi O(1))\,d\xi}{\xi(1 + \xi O(1))}\right) =$$

$$= t^{-q_0/p_1} \exp(O(1)) \left(-\frac{1}{p(d)} \int_t^d \tau^{(q_0 - p_1)/p_1} \left(g_0 + \sum_{j=1}^m g_j \tau^j + \tau^m o(1)\right) \exp(O(1))\, d\tau\right) =$$

$$= t^{-q_0/p_1}\left(-\frac{1}{p(d)}\int\limits_t^d \tau^{(q_0-p_1)/p_1}\left(g_0+\sum_{j=1}^m g_j\tau^j+\tau^m o(1)\right)d\tau\right)\exp(O(1)) =$$

$$= \left(h_0 t^{-q_0/p_1}+\sum_{j=1}^m h_j t^j + t^m O(1)\right)\exp(O(1))$$

с некоторыми постоянными $h_0,\ h_j$. Следовательно, $u_-(t;g)\in C^m[0,d]$, если $m < -\dfrac{q_0}{p_1}$.

Если $m > -\dfrac{q_0}{p_1} \in \mathbb{N}$, то последние преобразования выглядят иначе. При некотором $k_0 = -\dfrac{q_0}{p_1}\in\mathbb{N},\ k_0\le m$ и $g^{(k_0)}(0)\ne 0$ будем иметь

$$u_-(t;g) = -\int\limits_t^d \frac{g(\tau)}{p(d)}\exp\left(-\int\limits_\tau^d \frac{(q(\xi)-p'(\xi))\,d\xi}{p(\xi)}\right)d\tau\ \times\ \exp\left(\int\limits_t^d \frac{q(\xi)\,d\xi}{p(\xi)}\right) =$$

$$= t^{-q_0/p_1}\left(\frac{-1}{p(d)}\int\limits_t^d \tau^{(q_0-p_1)/p_1}\left(g_0+\sum_{j=1}^{k_0-1} g_j\tau^j + g_{k_0}\tau^{k_0}+\sum_{j=k_0+1}^m g_j\tau^j+\tau^m O(1)\right)d\tau\right)\exp(O(1)) =$$

$$= \left(h_0 t^{-q_0/p_1}+\sum_{j=1}^{k_0-1} h_j t^j + g_{k_0}t^{k_0}\ln t+\sum_{j=k_0+1}^m h_j t^j + t^m O(1)\right)\exp(O(1)) \in C^{k_0-1}[0,d].$$

Наконец, в случае $-\dfrac{q_0}{p_1}\notin\mathbb{N},\ m\ge -\dfrac{q_0}{p_1}$ и $g^{(k_0)}(0)=0$, очевидно, $u_-(t;g)\in C^{[-q_0/p_1]}[0,d]$, что и завершает доказательство леммы.

Таким образом, при $t>0$ общее решение уравнения (1) для случая $q(0)<0$ имеет вид

$$u(t) = Cu_0(t)+u_-(t;g) = C\exp\left(\int\limits_t^d \frac{q(\xi)\,d\xi}{p(\xi)}\right) - \int\limits_t^d \frac{g(\tau)}{p(\tau)}\exp\left(\int\limits_t^\tau \frac{q(\xi)\,d\xi}{p(\xi)}\right)d\tau \tag{14}$$

с произвольной постоянной C.

В заключение пункта отметим, что из равенств (8), (9), (13), (14) вытекает, что для любого ограниченного решения $u(t)$ уравнения (1) имеет место предельное соотношение

$$\lim_{t\to 0+} p(t)u'(t) = 0.$$

3. Факторизованное вырождающееся дифференциальное уравнение второго порядка. Введём в рассмотрение дифференциальные операторы

$$L_1u(t) = a_1(t)u'(t)+b_1(t)u(t),\quad L_2v(t) = a_2(t)v'(t)+b_2(t)v(t),\quad Lv(t) = L_1L_2v(t),$$

и, таким образом, оператор L задаётся дифференциальным выражением второго порядка

$$Lv(t) = a_1(t)a_2(t)v''(t)+\big(a_1(t)a_2'(t)+a_1(t)b_2(t)+b_1(t)a_2(t)\big)\,v'(t)+\big(a_1(t)b_2'(t)+b_1(t)b_2(t)\big)\,v(t). \tag{15}$$

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$Lv(t) = f(t) \tag{16}$$

и, используя результаты п. 2, построим решения этого уравнения. В дальнейшем будем предполагать, что коэффициенты оператора L в представлении (15) и в уравнении (16) удовлетворяют следующему условию.

Условие 2. Для $i=1,2$ функции $a_i(t),\ b_i(t)\in C^\infty[0,d]$, $a_i(0)=0$, $a_i(t)>0$ при $t>0$, $b_i(0)\ne 0$, а функция $f(t)\in C^m[0,d],\ m\in\mathbb{N}_0$.

При нахождении решений уравнения (16) нам придётся рассмотреть несколько существенно различных случаев в зависимости от знаков коэффициентов $b_i(0)$.

Теорема 1. *Пусть выполнено условие 2 и $b_1(0)>0,\ b_2(0)>0$. Тогда существует единственное ограниченное решение $v_1(t;f)\in C^m[0,d]$ уравнения (16), определяемое равенством*

$$v_1(t;f) = \frac{1}{a_2(t)}\int\limits_0^t \exp\left(\int\limits_\tau^t \frac{a_2'(\xi)-b_2(\xi)}{a_2(\xi)}\,d\xi\right)\times\left(\int\limits_0^\tau \exp\left(\int\limits_\eta^\tau \frac{a_1'(\xi)-b_1(\xi)}{a_1(\xi)}\,d\xi\right)\frac{f(\eta)\,d\eta}{a_1(\tau)}\right)d\tau, \tag{17}$$

и при $t \to 0+$ справедлива асимптотика

$$v_1(t;f) = \sum_{k=0}^{m} \frac{v_1^{(k)}(0;f)}{k!} t^k + t^m o(1), \tag{18}$$

где $v_1(0;f) = \dfrac{u_+(0;f)}{b_2(0)}$, $v_1^{(k)}(0;f) = \dfrac{\tilde{f}_k(0)}{\tilde{q}_k(0)}$, $\tilde{f}_k(t) = \tilde{f}'_{k-1}(t) - \tilde{q}'_{k-1}(t) v_1^{(k)}(t;f)$, $\tilde{f}_0(t) = u_+(t;f)$, $\tilde{q}_0(t) = b_2(t)$, $\tilde{q}_k(t) = k a'_2(t) + b_2(t)$, $\tilde{q}_k(0) > 0$ *для* $1 \le k \le m$,

$$u_+(t;f) = \int_0^t \frac{f(\tau)}{a_1(\tau)} \exp\left(-\int_\tau^t \frac{b_1(\xi)\, d\xi}{a_1(\xi)} \right) d\tau, \; u_+(0;f) = \frac{f(0)}{b_1(0)}, \; u_+^{(k)}(0;f) = \frac{f_k(0)}{q_k(0)},$$

$$q_0(t) = b_1(t), \; f_0(t) = f(t), \; f_k(t) = f'_{k-1}(t) - q'_{k-1}(t) u_+^{(k)}(t;f),$$

$$q_k(t) = k a'_1(t) + b_1(t), \; q_k(0) > 0 \;\; \text{для } 1 \le k \le m.$$

Фундаментальную систему решений однородного уравнения (16) образуют функции

$$v_{02}(t) = \exp\left(\int_t^d \frac{b_2(\xi)\, d\xi}{a_2(\xi)} \right), \; v_{12}(t) = \int_t^d \exp\left(\int_\tau^d \frac{b_1(\eta)\, d\eta}{a_1(\eta)} \right) \exp\left(\int_t^\tau \frac{b_2(\xi)\, d\xi}{a_2(\xi)} \right) \frac{d\tau}{a_2(\tau)}, \tag{19}$$

причём

$$\lim_{t \to 0+} v_{02}(t) = \lim_{t \to 0+} v_{12}(t) = \infty. \tag{20}$$

Доказательство. Решение $v(t)$ уравнения (16) будем строить в два этапа. Запишем это уравнение в виде системы двух уравнений $L_2 v(t) = u(t)$, $L_1 u(t) = f(t)$ и используя леммы 1 и 2, определим последовательно функции $u(t)$, $v(t)$ как решения соответствующих вырождающихся дифференциальных уравнений первого порядка.

Согласно представлению (9), общее решение уравнения $L_1 u(t) = f(t)$ имеет вид:

$$u(t) = C_1 u_{01}(t) + u_+(t;f) = C_1 \exp\left(\int_t^d \frac{b_1(\xi)\, d\xi}{a_1(\xi)} \right) + \int_0^t \frac{f(\tau)}{a_1(\tau)} \exp\left(-\int_\tau^t \frac{b_1(\xi)\, d\xi}{a_1(\xi)} \right) d\tau \tag{21}$$

с произвольной постоянной C_1. При этом для любого $k \in \mathbb{N}_0$

$$\lim_{t \to 0+} u_{01}^{(k)}(t) = \infty, \; u_+(t;f) \in C^m[0,d] \bigcap C^{m+1}(0,d], \; u_+(0;f) = \frac{f(0)}{b_1(0)},$$

$$u_+^{(k)}(0;f) = \frac{f_k(0)}{q_k(0)} = \frac{f'_{k-1}(0) - q'_{k-1}(0) u_+^{(k-1)}(0;f)}{k a'_1(0) + b_1(0)}, \quad 1 \le k \le m, \tag{22}$$

где $f_k(t) = f'_{k-1}(t) - q'_{k-1}(t) u_+^{(k)}(t;f) \in C[0,d]$, $q_k(t) = p'(t) + q_{k-1}(t) = k a'_1(t) + q(t)$, $q_k(0) > 0$, $q_0(t) = b_1(t)$, $f_0(t) = f(t)$.

Запишем теперь решение уравнения (16), как решение уравнения первого порядка $L_2 v(t) = u(t)$ с правой частью, определённой в (21).

Для этого вначале определим частное решение $v_1(t;f)$ в соответствии с представлением (9), в которое подставим $u_+(t)$ из (21). Будем иметь

$$v_1(t;f) = \int_0^t \frac{u_+(\tau)}{a_2(\tau)} \exp\left(\int_\tau^t \frac{-b_2(\xi)\, d\xi}{a_2(\xi)} \right) d\tau = \frac{1}{a_2(t)} \int_0^t u_+(\tau) \exp\left(\int_\tau^t \frac{(a'_2(\xi) - b_2(\xi))\, d\xi}{a_2(\xi)} \right) d\tau =$$

$$= \frac{1}{a_2(t)} \int_0^t \left(\exp\left(\int_\tau^t \frac{a'_2(\xi) - b_2(\xi)}{a_2(\xi)}\, d\xi \right) \int_0^\tau \exp\left(\int_\eta^\tau \frac{a'_1(\xi) - b_1(\xi)}{a_1(\xi)}\, d\xi \right) d\tau \right) \frac{f(\eta)\, d\eta}{a_1(\tau)},$$

что и приводит к (17), (18).

Линейно независимые решения однородного уравнения (16) $v_{02}(t)$ и $v_{12}(t)$ имеют вид (19) и образуют фундаментальную систему решений независимо от соотношения знаков $b_1(0)$ и $b_2(0)$. При этом для $b_1(0) > 0$ и $b_2(0) > 0$ после несложных преобразований получим

$$v_{02}(t) = \exp\left(\int_t^d \frac{b_2(\xi)\, d\xi}{a_2(\xi)} \right), \;\; v_{12}(t) = \int_t^d \exp\left(\int_\tau^d \frac{b_1(\eta)\, d\eta}{a_1(\eta)} \right) \exp\left(\int_t^\tau \frac{b_2(\xi)\, d\xi}{a_2(\xi)} \right) \frac{d\tau}{a_2(\tau)} =$$

$$= \frac{1}{a_2(d)} \exp\left(\int\limits_t^d \left(\frac{b_1(\xi)}{a_1(\xi)} + \frac{b_2(\xi)}{a_2(\xi)}\right) d\xi\right) \int\limits_t^d \exp\left(\int\limits_\tau^d \frac{\left(a_2'(\xi) - b_2(\xi)\right) d\xi}{a_2(\xi)}\right) \exp\left(\int\limits_t^\tau \frac{-b_1(\xi)\, d\xi}{a_1(\xi)}\right) d\tau \tag{23}$$

и $v_{12}(t) \to +\infty$ при $t \to 0+$, что подтверждает справедливость второго соотношения в (20).

Справедливость же первого соотношения в (20) очевидна. Следовательно, определяемая равенством (17) функция $v_1(t; f)$ является единственным ограниченным решением уравнения (16), что и завершает доказательство теоремы 1.

Теорема 2. *Пусть выполнено условие 2 и $b_1(0) > 0,\ b_2(0) < 0$. Тогда существует решение $v_2(t; f) \in C^{m+1}(0, d]$ уравнения (16), определяемое равенством*

$$v_2(t; f) = -\int\limits_t^d \left(\int\limits_0^\tau \exp\left(-\int\limits_\eta^\tau \frac{b_1(\xi)}{a_1(\xi)}\, d\xi\right) \frac{f(\eta)\, d\eta}{a_1(\eta)}\right) \exp\left(\int\limits_t^\tau \frac{b_2(\xi)}{a_2(\xi)}\, d\xi\right) \frac{d\tau}{a_2(\tau)}. \tag{24}$$

1°. *В случае сильного вырождения, когда $a_2(0) = a_2'(0) = 0$, функция $v_2(t; f) \in C^m[0, d]$ и при $t \to 0+$ справедлива асимптотика*

$$v_2(t; f) = \sum_{k=0}^{m} \frac{v_2^{(k)}(0; f)}{k!} t^k + t^m o(1), \tag{25}$$

где $v_2(0; f) = \dfrac{u_+(0; f)}{b_2(0)}$, $v_2^{(k)}(0; f) = \dfrac{\tilde{f}_k(0)}{\tilde{q}_k(0)}$, $\tilde{f}_k(t) = \tilde{f}_{k-1}'(t) - \tilde{q}_{k-1}'(t) v_2^{(k)}(t; f)$, а остальные обозначения введены в теореме 1. Фундаментальную систему решений однородного уравнения (16) образуют определяемые равенством (19) функции $v_{02}(t)$, $v_{12}(t)$, при этом $v_{02}(t) \in C^\infty[0, d]$, $v_{02}(t) = o(t^k)$ для любого $k \in \mathbb{N}$ при $t \to 0+$ и $\lim\limits_{t \to 0+} v_{12}(t) = \infty$.

2°. *В случае слабого вырождения, когда*

$$a_2'(0) \ne 0,\ a_2(t) = a_{21} t + t^2 O(1),\ a_{21} > 0,\ b_2(t) = b_{20} + t O(1),$$

функция $v_2(t; f)$ допускает асимптотическое представление (25) и

$$v_2(t; f) \in \begin{cases} C^m[0, d], & \text{если } m < -\dfrac{b_{20}}{a_{21}}, \\ C^{[-b_{20}/a_{21}]}[0, d], & \text{если } m \ge -\dfrac{b_{20}}{a_{21}},\ -\dfrac{b_{10}}{a_{11}} \notin \mathbb{N}, \\ C^{k_0 - 1}[0, d], & \text{если } k_0 = -\dfrac{b_{10}}{a_{11}},\ k_0 \le m,\ f^{(k_0)}(0) \ne 0, \\ C^m[0, d], & \text{если } k_0 = -\dfrac{b_{10}}{a_{11}} \in \mathbb{N},\ f^{(k_0)}(0) = 0, \end{cases}$$

Фундаментальную систему решений однородного уравнения (16) образуют определяемые равенством (19) функции $v_{02}(t)$, $v_{12}(t)$, при этом $v_{02}(t) \in C^{[-b_{20}/a_{21}]}[0, d] \bigcap C^\infty(0, d]$ для $-\dfrac{b_{20}}{a_{21}} \notin \mathbb{N}$, $v_{02}(t) \in C^\infty[0, d]$ для $-\dfrac{b_{20}}{a_{21}} \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{t \to 0+} v_{12}(t) = \infty$.

Доказательство. Как и в теореме 1 построение решения уравнения (16) проводим в два этапа. Вначале возьмём решение $u_+(t; f)$ уравнения $L_1 u(t) = f(t)$, определённое равенством (21) и с той же асимптотикой (22). Далее, воспользовавшись равенством (9), запишем частное решение $v_2(t; f)$ уравнения первого порядка $L_2(t) = u_+(t; f)$, которое имеет вид

$$v_2(t; f) = -\int\limits_t^d \exp\left(\int\limits_t^\tau \frac{b_2(\xi)\, d\xi}{a_2(\xi)}\right) \frac{u_+(\tau; f)\, d\tau}{a_2(\tau)} =$$

$$= -\int\limits_t^d \left(\int\limits_0^\tau \exp\left(-\int\limits_\eta^\tau \frac{b_1(\xi)}{a_1(\xi)}\, d\xi\right) \frac{f(\eta)\, d\eta}{a_1(\eta)}\right) \exp\left(\int\limits_t^\tau \frac{b_2(\xi)}{a_2(\xi)}\, d\xi\right) \frac{d\tau}{a_2(\tau)},$$

что и устанавливает представление (24).

Так же как в теореме 1, фундаментальную систему решений однородного уравнения (16) образуют определяемые равенством (19) функции $v_{02}(t)$, $v_{12}(t)$.

Поскольку $u_+(t; f) \in C^m[0, d]$, то в случае 1° сильного вырождения утверждение о гладкости функции $v_2(t; f)$ в точке $t = 0$ вытекает из леммы 3. Кроме того, функция $v_{02}(t) \in C^\infty[0, d]$ и $\lim\limits_{t \to 0+} v_{02}^{(k)}(t) = 0$ для $k \in \mathbb{N}_0$, что приводит к асимптотике (25).

В случае 2° слабого вырождения утверждение о гладкости функций $v_2(t;f)$ и $v_{02}(t)$ в точке $t=0$ также вытекает из лемм 1 и 3.

Рассмотрим, наконец, поведение $v_{12}(t)$ при $t\to 0+$. Учитывая равенство (23), для сильного и для слабого вырождения найдём предел, используя правило Лопиталя. Получим

$$\lim_{t\to 0+} v_{12}(t)=\lim_{t\to 0+}\exp\left(\int\limits_t^d \frac{b_2(\xi)\,d\xi}{a_2(\xi)}\right)\int\limits_t^d \exp\left(\int\limits_\tau^d \left(\frac{b_1(\eta)}{a_1(\eta)}-\frac{b_2(\eta)}{a_2(\eta)}\right)d\eta\right)\frac{d\tau}{a_2(\tau)}=$$

$$=\lim_{t\to 0+}\frac{-\exp\left(\int\limits_t^d \left(\frac{b_1(\eta)}{a_1(\eta)}-\frac{b_2(\eta)}{a_2(\eta)}\right)d\eta\right)}{b_2(t)\exp\left(-\int\limits_t^d \frac{b_2(\eta)\,d\eta}{a_2(\eta)}\right)}=-\lim_{t\to 0+}\frac{\exp\left(\int\limits_t^d \frac{b_1(\eta)\,d\eta}{a_1(\eta)}\right)}{b_2(t)}=+\infty,$$

что завершает доказательство теоремы.

Теорема 3. *Пусть выполнено условие 2 и $b_1(0)<0,\ b_2(0)>0$. Тогда существует решение $v_3(t;f)\in C^{m+1}(0,d]$ уравнения (16), определяемое равенством*

$$v_3(t;f)=-\int\limits_0^t\left(\int\limits_\tau^d \frac{f(\eta)}{a_1(\eta)}\exp\left(\int\limits_\tau^\eta \frac{b_1(\xi)}{a_1(\xi)}\,d\xi\right)d\eta\right)\exp\left(-\int\limits_\tau^t \frac{b_2(\xi)}{a_2(\xi)}\,d\xi\right)\frac{d\tau}{a_2(\tau)}. \tag{26}$$

1°. *В случае сильного вырождения, когда $a_1(0)=a_1'(0)=0$, функция $v_3(t;f)\in C^m[0,d]$ и при $t\to 0+$ справедлива асимптотика*

$$v_3(t;f)=\sum_{k=0}^m \frac{v_3^{(k)}(0;f)}{k!}t^k+t^m o(1), \tag{27}$$

где

$$v_3(0;f)=\frac{f(0)}{b_1(0)b_2(0)},$$

$$v_3^{(k)}(0;f)=\frac{\tilde f_k(0)}{\tilde q_k(0)},\ \tilde f_k(t)=\tilde f_{k-1}'(t)-\tilde q_{k-1}'(t)v_3^{(k)}(t;f),\tilde f_0(t)=u_-(t;f),$$

$$u_-(t;f)=-\int\limits_t^d \frac{f(\tau)}{a_1(\tau)}\exp\left(\int\limits_t^\tau \frac{b_1(\xi)\,d\xi}{a_1(\xi)}\right)d\tau, \tag{28}$$

а остальные обозначения введены в теореме 1. Фундаментальную систему решений однородного уравнения (16) образуют определяемая равенством (19) функция $v_{02}(t)$ и

$$\tilde v_{12}(t)=\int\limits_0^t \exp\left(\int\limits_\tau^d \frac{b_1(\eta)\,d\eta}{a_1(\eta)}\right)\exp\left(-\int\limits_\tau^t \frac{b_2(\xi)\,d\xi}{a_2(\xi)}\right)\frac{d\tau}{a_2(\tau)}, \tag{29}$$

при этом $\tilde v_{12}(t)\in C^\infty[0,d]$, $\tilde v_{12}(t)=o(t^k)$ для любого $k\in\mathbb{N}$ при $t\to 0+$ и $\lim\limits_{t\to 0+} v_{02}(t)=\infty$.

2°. *В случае слабого вырождения, когда*

$$a_1'(0)\neq 0,\ a_1(t)=a_{11}t+t^2O(1),\ a_{11}>0,\ b_1(t)=b_{10}+tO(1),\ b_{10}<0,$$

функция $v_3(t;f)$ допускает асимптотическое представление (25) и

$$v_3(t;f)\in\begin{cases} C^m[0,d], & \text{если } m<-\dfrac{b_{10}}{a_{11}},\\ C^{[-b_{10}/a_{11}]}[0,d], & \text{если } m\geq -\dfrac{b_{10}}{a_{11}},\ -\dfrac{b_{10}}{a_{11}}\notin\mathbb{N},\\ C^{k_0-1}[0,d], & \text{если } k_0=-\dfrac{b_{10}}{a_{11}},\ k_0\leq m,\ f^{(k_0)}(0)\neq 0,\\ C^m[0,d], & \text{если } k_0=-\dfrac{b_{10}}{a_{11}}\in\mathbb{N},\ f^{(k_0)}(0)=0.\end{cases}$$

Фундаментальную систему решений однородного уравнения (16) образуют функции $v_{02}(t)$, $\tilde v_{12}(t)$, при этом

$$\lim_{t\to 0+} v_{02}(t)=\infty,\ \tilde v_{12}(t)\in C^{[-b_{10}/a_{11}]}[0,d],\ \lim_{t\to 0+}\tilde v_{12}(t)=0,\ \tilde v_{12}(t)\in C^\infty[0,d]\ \text{при}\ -\frac{b_{20}}{a_{21}}\in\mathbb{N}.$$

Доказательство. Как и в предыдущих теоремах построение решения проводим в два этапа. Учитывая условие $b_1(0) < 0$ и лемму 3, вначале построим частное решение $u_-(t;f)$ уравнения $L_1u(t) = f(t)$, которое имеет вид (28).

В случае 1° $u_-(t;f) \in C^m[0,d]$ и для любого $k \in \mathbb{N}_0,\ k \le m\ u_-^{(k)}(0;f) = \dfrac{f_k(0)}{q_k(0)}$, где

$$f_0(t) = b_1(t),\ q_0(t) = b_1(t),\ q_k(t) = ka_1'(t) + b_1(t),\ q_k(0) < 0,\ f_k(t) = f_{k-1}'(t) - q_{k-1}'(t)u_-^{(k)}(0;f).$$

Далее, в соответствии с представлением (16), запишем решение $v_3(t;f)$ уравнения $L_2v(t) = u_-(t;f)$, которое имеет вид

$$v_3(t;f) = \int\limits_0^t \frac{u_-(\tau;f)}{a_2(\tau)} \exp\left(-\int\limits_\tau^t \frac{b_2(\xi)\,d\xi}{a_2(\xi)}\right) d\tau =$$

$$= -\int\limits_0^t \left(\int\limits_\tau^d \frac{f(\eta)}{a_1(\eta)} \exp\left(\int\limits_\tau^\eta \frac{b_1(\xi)}{a_1(\xi)}\,d\xi\right) d\eta\right) \exp\left(-\int\limits_\tau^t \frac{b_2(\xi)}{a_2(\xi)}\,d\xi\right) \frac{d\tau}{a_2(\tau)},$$

что и устанавливает представления (26), (27) в случае сильного вырождения.

В условиях теоремы 3 фундаментальную систему решений однородного уравнения (16) образуют введённые ранее функции $v_{02}(t),\ \tilde{v}_{12}(t) \in C^\infty[0,d]$, при этом

$$\lim_{t\to 0+} v_{02}(t) = \infty,\ \tilde{v}_{12}(t) = o(t^k) \text{ для любого } k \in \mathbb{N}.$$

В случае 2° из лемм 2 и 3 также выводим включения для функции $u_-(t;f)$

$$u_-(t;f) \in \begin{cases} C^m[0,d], & \text{если } m < -\dfrac{b_{10}}{a_{11}}, \\ C^{[-b_{10}/a_{11}]}[0,d], & \text{если } m \ge -\dfrac{b_{10}}{a_{11}},\ -\dfrac{b_{10}}{a_{11}} \notin \mathbb{N}, \\ C^{k_0-1}[0,d], & \text{если } k_0 = -\dfrac{b_{10}}{a_{11}},\ k_0 \le m,\ f^{(k_0)}(0) \ne 0, \\ C^m[0,d], & \text{если } k_0 = -\dfrac{b_{10}}{a_{11}} \in \mathbb{N},\ f^{(k_0)}(0) = 0, \end{cases}$$

а функция $v_3(t;f)$ сохраняет гладкость функции $u_-(t;f)$.

В силу леммы 1 имеем

$$\lim_{t\to 0+} v_{02}(t) = \infty,\ v_{01}(t) = \exp\left(\int\limits_t^d \frac{b_1(\xi)\,d\xi}{a_1(\xi)}\right) \in C^{[-b_1(0)/a_{11}]}[0,d],$$

а, следовательно, и

$$\lim_{t\to 0+} v_{01}(t) = \lim_{t\to 0+} \tilde{v}_{12}(t) = 0,\ \tilde{v}_{12}(t) \in C^{[-b_1(0)/a_{11}]}[0,d],\ \tilde{v}_{12}(t) \in C^\infty[0,d] \text{ при } -\frac{b_1(0)}{a_{11}} \in \mathbb{N}.$$

Теорема доказана.

Теорема 4. *Пусть выполнено условие 2 и* $b_1(0) < 0,\ b_2(0) < 0,\ a_1'(0) = 0$. *Тогда существует решение* $v_4(t;f) \in C^{m+1}(0,d]$ *уравнения (16), определяемое равенством*

$$v_4(t;f) = \int\limits_t^d \left(\int\limits_\tau^d \frac{f(\eta)}{a_1(\eta)} \exp\left(\int\limits_\tau^\eta \frac{b_1(\xi)}{a_1(\xi)}\,d\xi\right) d\eta\right) \exp\left(\int\limits_t^\tau \frac{b_2(\xi)}{a_2(\xi)}\,d\xi\right) \frac{d\tau}{a_2(\tau)}. \tag{30}$$

1°. *В случае сильного вырождения, когда* $a_2(0) = a_2'(0) = 0$, *функция* $v_4(t;f) \in C^m[0,d]$ *и при* $t \to 0+$ *справедлива асимптотика*

$$v_4(t;f) = \sum_{k=0}^m \frac{v_4^{(k)}(0;f)}{k!} t^k + t^m o(1), \tag{31}$$

где $v_4(0;f) = \dfrac{u_-(0;f)}{b_2(0)}$, $v_4^{(k)}(0;f) = \dfrac{\tilde{f}_k(0)}{\tilde{q}_k(0)}$, $\tilde{f}_k(t) = \tilde{f}_{k-1}'(t) - \tilde{q}_{k-1}'(t)v_4^{(k)}(t;f)$, $\tilde{f}_k(t) = u_-(t;f)$, *а остальные обозначения введены в теореме 3. Фундаментальную систему решений однородного уравнения (16) образуют определяемые равенством (19) функции* $v_{02}(t)$ *и* $v_{12}(t)$, *при этом* $v_{02}(t),\ v_{12}(t) \in C^\infty[0,d]$, *для функции* $v_{12}(t)$

при $t \to 0+$ *справедлива асимптотика* $v_{12}(t) = o(t^k)$ *для любого* $k \in \mathbb{N}$ *и* $\lim\limits_{t\to 0+} v_{02}^{(k)}(t) = 0$, $k \in \mathbb{N}_0$.
2°. *В случае слабого вырождения, когда*

$$a_2'(0) \neq 0,\ a_2(t) = a_{21}t + t^2 O(1),\ a_{21} > 0,\ b_2(t) = b_{20} + tO(1),\ b_{20} < 0,$$

функция $v_4(t;f)$ *допускает асимптотическое представление вида (31) и*

$$v_4(t;f) \in \begin{cases} C^m[0,d], & \text{если } m < -\dfrac{b_{20}}{a_{21}}, \\ C^{[-b_{20}/a_{21}]}[0,d], & \text{если } m \geq -\dfrac{b_{20}}{a_1},\ -\dfrac{b_{20}}{a_{21}} \notin \mathbb{N}, \\ C^{k_0-1}[0,d], & \text{если } k_0 = -\dfrac{b_{20}}{a_{21}} \in N,\ f^{(k_0)}(0) \neq 0, \\ C^m[0,d], & \text{если } k_0 = -\dfrac{b_{20}}{a_{21}} \in \mathbb{N},\ f^{(k_0)}(0) = 0. \end{cases}$$

Фундаментальную систему решений однородного уравнения (16) образуют функции $v_{02}(t)$, $v_{12}(t)$, *при этом*

$$v_{02}(t) \in C^{[-b_{20}/a_{21}]}[0,d],\ \lim_{t\to 0+} v_{02}^{(k)}(t) = 0 \text{ при } k < \left[-\frac{b_{20}}{a_{21}}\right],$$

$$v_{12}(t) \in C^{[-b_{20}/a_{21}]}[0,d] \text{ при } -\frac{b_{20}}{a_{21}} \notin \mathbb{N},\ v_{12}(t) \in C^{-b_{20}/a_{21}-1}[0,d] \text{ при } -\frac{b_{20}}{a_{21}} \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. Так же как и в теореме 3, построим частное решение $u_-(t;f)$ уравнения $L_1 u(t) = f(t)$. Далее, в соответствии с представлением (9), запишем частное решение $v_4(t;f)$ уравнения $L_2 v(t) = u_-(t;f)$. Будем иметь

$$v_4(t;f) = -\int_t^d \frac{u_-(\tau;f)}{a_2(\tau)} \exp\left(\int_t^\tau \frac{b_2(\xi)\,d\xi}{a_2(\xi)}\right) d\tau =$$

$$= \int_t^d \left(\int_\tau^d \frac{f(\eta)}{a_1(\eta)} \exp\left(\int_\tau^\eta \frac{b_1(\xi)}{a_1(\xi)}\,d\xi\right) d\eta\right) \exp\left(\int_t^\tau \frac{b_2(\xi)}{a_2(\xi)}\,d\xi\right) \frac{d\tau}{a_2(\tau)}.$$

Фундаментальную систему решений однородного уравнения (16) образуют введённые в теореме 1 функции $v_{02}(t)$, $v_{12}(t)$.

Асимптотика (31) функции $v_4(t;f)$ в точке $t = 0$ следует из леммы 3 с учётом гладкости решения $u_-(\tau;f)$. В случае сильного вырождения 1° из леммы 1 следует $u_-(\tau;f) \in C^m[0,d]$ с асимптотикой (11) и в силу леммы 3 получим (31).

Асимптотика функции $v_{02}(t)$ в точке $t = 0$ установлена в теореме 2, а по лемме 3 функция $v_{12}(t) \in C^\infty[0,d]$ и для неё справедлива асимптотика вида (11), что завершает доказательство 1°.

В случае слабого вырождения 2° имеем $a_2(t) = a_{21}t + t^2 O(1)$, a_{21}, $b_2(t) = b_{20} + tO(1)$, и утверждения теоремы относительно гладкости и асимптотики (31) функции $v_4(t;f)$ справедливы в силу леммы 3. Требуемые утверждения относительно фундаментальной системы решений $v_{02}(t)$, $v_{12}(t)$ однородного уравнения (16) устанавливаются как и в лемме 1, что и завершает доказательство теоремы.

4. Начальная задача для факторизованного вырождающегося дифференциального уравнения второго порядка. Назовём начальной задачей в точке $t = 0$ задачу нахождения решения уравнения (16), удовлетворяющего условию

$$\lim_{t\to 0+} v(t) = v_0. \tag{32}$$

Утверждения теорем 1—4 позволяют установить разрешимость задачи (16), (32).

Теорема 5. *Пусть выполнено условие 2. Тогда лишь при единственном значении* $v_0 = \dfrac{f(0)}{b_1(0)b_2(0)}$ *задача (16), (32) имеет решение* $v(t)$ *и для него справедливы следующие утверждения.*
1°. *Если* $b_1(0) > 0,\ b_2(0) > 0$, *то существует единственное решение* $v(t) = v_1(t;f)$ *задачи (16), (32), которое определяется формулой (17), и для этого решения справедлива асимптотика (18).*
2°. *Если* $b_1(0) > 0,\ b_2(0) < 0$ *и* $a_2'(0) = 0$, *то существует однопараметрическое семейство функций* $v(t, C_1) = C_1 v_{02}(t) + v_2(t;f)$, *где* C_1 *— произвольная постоянная,* $v_{02}(t)$, $v_2(t;f)$ *определены соответственно в (19), (24), каждая функция которого является решением задачи (16), (32). При этом для* $v_2(t;f)$ *справедлива асимптотика (25) и*

$$v_{02}(t) \in C^\infty[0,d],\ v_{02}(t) = o(t^k) \text{ при } t \to 0+,\ k \in \mathbb{N}.$$

3°. *Если* $b_1(0) < 0,\ b_2(0) > 0,\ a_1'(0) = 0$, *то существует однопараметрическое семейство функций* $v(t, C_2) = C_2 \tilde{v}_{12}(t) + v_3(t;f)$, *где* C_2 *— произвольная постоянная,* $\tilde{v}_{12}(t)$, $v_3(t;f)$ *определены соответственно в*

(29), (26), каждая функция которого является решением задачи (16), (32). При этом для $v_3(t;f)$ *справедлива асимптотика (27) и*

$$\tilde{v}_{12}(t)\in C^\infty[0,d],\ \tilde{v}_{12}(t)=o(t^k)\ \text{при}\ t\to 0+,\ k\in\mathbb{N}.$$

4°. *Если* $b_1(0)<0,\ b_2(0)<0$ *и* $a_1'(0)=a_2'(0)=0$*, то существует двухпараметрическое семейство функций* $v(t,C_1,C_2)=C_1v_{02}(t)+C_2v_{12}(t)+v_4(t;f)$*, где* $C_1,\ C_2$ *— произвольные постоянные,* $v_{02}(t),\ v_{12}(t),\ v_4(t;f)$ *определены соответственно в (19), (30), каждая функция которого является решением задачи (16), (32). При этом для* $v_4(t;f)$ *справедлива асимптотика (31) и* $v_{02}(t)\in C^\infty[0,d],\ v_{12}(t)\in C^\infty[0,d],\ v_{02}(t)=o(t^k),\ v_{12}(t)=o(t^k)$ *при* $t\to 0+,\ k\in\mathbb{N}$.

Доказательство. Справедливость утверждений во всех случаях 1°–4° вытекает соответственно из теорем 1–4 и того факта, что

$$\lim_{t\to 0+} v_i(t;f)=\frac{f(0)}{b_1(0)b_2(0)},\ i=1,2,3,4.$$

В случае неограниченности при $t\to 0+$ функций $v_{02}(t)$ и $v_{12}(t)$ из фундаментальной системы решений однородного уравнения (16), в общем решении постоянные перед этими функциями следует положить равными нулю. Теорема доказана.

Замечание 1. Устранение условия $a_1'(0)=0$ или $a_2'(0)=0$ в случае теоремы 5 приводит лишь к изменению гладкости функций $v_{02}(t),\ v_{12}(t),\ \tilde{v}_{12}(t)$ в точке $t=0$ и некоторому усложнению доказательства.

5. Примеры. В этом пункте приведём примеры, иллюстрирующие утверждения теорем 1—5. Отметим, что решения в примерах 1—4 получены с помощью системы Wolfram Mathematica.

Пример 1. Пусть коэффициенты и правая часть уравнения (16) имеют вид

$$a_1(t)=t^2,\ a_2(t)=t^2, b_1=1,\ b_2=t+1, f(t)=1,$$

а начальное значение $v_0=1$. Тогда общее решение $v(t,C_1,C_2)$ уравнения (16) и решение $v(t)$ начальной задачи (16), (32) представимы соответственно в виде

$$v(t,C_1,C_2)=\frac{1}{t}\exp\left(\frac{1}{t}\right)\left(C_1+C_2\ln t-\mathrm{Ei}\left(-\frac{1}{t}\right)\right),$$

$$v(t)=v_1(t;f)=-\frac{1}{t}\exp\left(\frac{1}{t}\right)\mathrm{Ei}\left(-\frac{1}{t}\right),\quad \lim_{t\to 0+}v_1(t;f)=1,$$

где $\mathrm{Ei}\,(\cdot)$ — интегральная показательная функция. Пример является иллюстрацией к теореме 1 и пункту 1° теоремы 5.

Пример 2. Пусть коэффициенты и правая часть уравнения (16) имеют вид

$$a_1(t)=t^2,\ a_2(t)=t^2, b_1=1,\ b_2=t-1, f(t)=-1,$$

а начальное значение $v_0=1$. Тогда общее решение $v(t,C_1,C_2)$ уравнения (16) и однопараметрическое семейство решений $v(t,C_1)$ начальной задачи (16), (32) представимы соответственно в виде

$$v(t,C_1,C_2)=\frac{1}{t}\exp\left(-\frac{1}{t}\right)\left(C_1+C_2t\mathrm{Ei}_1\left(\frac{2}{t}\right)+\mathrm{Ei}_1\left(\frac{1}{t}\right)\right),$$

$$v(t,C_1)=C_1v_{02}(t)+v_2(t;f)=\frac{1}{t}\exp\left(-\frac{1}{t}\right)\left(C_1+\mathrm{Ei}_1\left(\frac{1}{t}\right)\right),\quad \lim_{t\to 0+}v_2(t;f)=1,$$

где $\mathrm{Ei}_1\,(\cdot)$ — модифицированная интегральная показательная функция, которая при действительных $x>0$ имеет вид

$$\mathrm{Ei}_1\,(x)=\gamma+\ln x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\,n!},$$

$\gamma=0,5772157\ldots$ — постоянная Эйлера. Пример является иллюстрацией к теореме 2 и пункту 2° теоремы 5.

Пример 3. Пусть коэффициенты и правая часть уравнения (16) имеют вид

$$a_1(t)=t^2,\ a_2(t)=t^2, b_1=-1,\ b_2=t+1, f(t)=-1,$$

а начальное значение $v_0=1$. Тогда общее решение $v(t,C_1,C_2)$ уравнения (16) и однопараметрическое семейство решений $v(t,C_2)$ начальной задачи (16), (32) представимы соответственно в виде

$$v(t,C_1,C_2)=\frac{1}{t}\exp\left(\frac{1}{t}\right)\left(C_1+C_2\mathrm{Ei}\left(-\frac{2}{t}\right)-\mathrm{Ei}\left(-\frac{1}{t}\right)\right),$$

$$v(t,C_2)=C_2\tilde{v}_{12}(t)+v_3(t;f)=\frac{1}{t}\exp\left(\frac{1}{t}\right)\left(C_2\mathrm{Ei}\left(-\frac{2}{t}\right)-\mathrm{Ei}\left(-\frac{1}{t}\right)\right),\quad \lim_{t\to0+}v_3(t;f)=1.$$

Пример является иллюстрацией к теореме 3 и пункту 3° теоремы 5.

Пример 4. Пусть коэффициенты и правая часть уравнения (16) имеют вид

$$a_1(t)=t^2,\ a_2(t)=t^2, b_1=-1,\ b_2=t-1, f(t)=1,$$

а начальное значение $v_0=1$. Тогда общее решение $v(t,C_1,C_2)$ уравнения (16) и двухпараметрическое семейство решений начальной задачи (16), (32) совпадают и имеют вид

$$v(t,C_1,C_2)=\frac{1}{t}\exp\left(-\frac{1}{t}\right)\left(C_1+C_2\ln t-\mathrm{Ei}\left(\frac{1}{t}\right)\right),\quad \lim_{t\to0+}v_4(t;f)=1.$$

Пример является иллюстрацией к теореме 4 и пункту 4° теоремы 5.

В следующем примере мы покажем, как находятся решения рассматриваемой задачи с помощью теорем 4 и 5(4°).

Пример 5. Пусть коэффициенты и правая часть уравнения (16) имеют вид

$$a_1(t)=t^3,\ a_2(t)=t^2, b_1=const<0,\ b_2=const<0,\ f(t)\in C^\infty[0,d].$$

Для рассматриваемого уравнения, следуя теореме 4, выпишем общее решение уравнения (16). Оно имеет вид $v(t)=v(t,C_1,C_2)=C_1v_{02}(t)+C_2v_{12}(t)+v_4(t;f)$, где

$$v_{02}(t)=\exp\left(\int_t^d\frac{b_2(\xi)\,d\xi}{a_2(\xi)}\right)=\exp\left(\int_t^d\frac{b_2\,d\xi}{\xi^2}\right)=\exp\left(\frac{b_2}{t}\right)\exp\left(\frac{-b_2}{d}\right),$$

$$v_{12}(t)=\int_t^d\exp\left(\int_\tau^d\frac{b_1(\eta)\,d\eta}{a_1(\eta)}\right)\exp\left(\int_t^\tau\frac{b_2(\xi)\,d\xi}{a_2(\xi)}\right)\frac{d\tau}{a_2(\tau)}=\int_t^d\exp\left(\int_\tau^d\frac{b_1\,d\eta}{\eta^3}\right)\exp\left(\int_t^\tau\frac{b_2\,d\xi}{\xi^2}\right)\frac{d\tau}{\tau^2}=$$

$$=\exp\left(\int_t^d\frac{b_2\,d\xi}{\xi^2}\right)\int_t^d\exp\left(\int_\tau^d\left(\frac{b_1}{\eta^3}-\frac{b_2}{\eta^2}\right)d\eta\right)\frac{d\tau}{\tau^2}=\exp\left(\frac{-b_1}{2d^2}\right)\exp\left(\frac{b_2}{t}\right)\int_t^d\exp\left(\frac{b_1}{2\tau^2}-\frac{b_2}{\tau}\right)\frac{d\tau}{\tau^2},$$

$$v_4(t;f)=\int_t^d\left(\int_\tau^d\frac{f(\eta)}{a_1(\eta)}\exp\left(\int_\tau^\eta\frac{b_1(\xi)}{a_1(\xi)}\,d\xi\right)d\eta\right)\exp\left(\int_t^\tau\frac{b_2(\xi)}{a_2(\xi)}\,d\xi\right)\frac{d\tau}{a_2(\tau)}=$$

$$=\int_t^d\exp\left(\frac{b_2}{t}-\frac{b_2}{\tau}\right)\left(\int_\tau^d\frac{f(\eta)}{\eta^3}\exp\left(\frac{b_1}{2\tau^2}-\frac{b_1}{2\eta^2}\right)d\eta\right)\frac{d\tau}{\tau^2},$$

причём нетрудно убедиться, что

$$\lim_{t\to0+}v_{02}(t)=\lim_{t\to0+}v_{12}(t)=0,$$

и при $t\to0+$ справедлива асимптотика $v_{02}(t)=v_{12}(t)=o(t^k)$ для любого $k\in\mathbb{N}$.

Далее, используя правило Лопиталя, вычислим предел

$$\lim_{t\to0+}v_4(t;f)=\lim_{t\to0+}\frac{\int_t^d\exp\left(-\frac{b_2}{\tau}\right)\left(\int_\tau^d\frac{f(\eta)}{\eta^3}\exp\left(\frac{b_1}{2\tau^2}-\frac{b_1}{2\eta^2}\right)d\eta\right)\frac{d\tau}{\tau^2}}{\exp\left(-\frac{b_2}{t}\right)}=$$

$$=\lim_{t\to0+}\frac{-\int_t^d f(\eta)\exp\left(-\frac{b_1}{2\eta^2}\right)\frac{d\eta}{\eta^3}}{b_2\exp\left(-\frac{b_1}{2t^2}\right)}=\frac{f(0)}{b_1b_2}.$$

Таким образом, условие (32) будет выполняться для всех функций двухпараметрического семейства $v(t)=v(t,C_1,C_2)=C_1v_{02}(t)+C_2v_{12}(t)+v_4(t;f)$ лишь при единственном значении $v(0)=\dfrac{f(0)}{b_1b_2}$.

Замечание 2. Требование $a_1'(0) = 0$ в условии теоремы 4 исключает из рассмотрения двойное слабое вырождение $a_1'(0) \neq 0$, $a_2'(0) \neq 0$. Отметим, что в этом случае гладкость решения уравнения (16) проще исследовать непосредственно. Процесс исследования покажем на следующем примере.

Пример 6. Пусть коэффициенты и правая часть уравнения (16) имеют вид

$$a_1(t) = t,\ a_2(t) = t,\ b_1 = const < 0,\ b_2 = const < 0,\ f = const.$$

Выбрав некоторое $d > 0$ и следуя рассуждениям теоремы 4, построим решения полученного уравнения. Общее решение уравнения (16) имеет вид (30)

$$v(t) = v(t, C_1, C_2) = C_1 v_{02}(t) + C_2 v_{12}(t) + v_4(t; f).$$

При $b_2 - b_1 \neq 0$ получим

$$v_4(t;f) = \int\limits_t^d \left(\int\limits_\tau^d \frac{f}{\eta} \exp\left(\int\limits_\tau^\eta \frac{b_1 d\xi}{\xi} \right) d\eta \right) \exp\left(\int\limits_t^\tau \frac{b_2 d\xi}{\xi} \right) \frac{d\tau}{\tau} = \frac{f t^{-b_2}}{b_1} \int\limits_t^d \tau^{b_2 - b_1 - 1} \left(d^{b_1} - \tau^{b_1} \right) d\tau =$$

$$= \frac{f d^{b_2}}{b_1(b_2 - b_1)} t^{-b_2} - \frac{f d^{b_1}}{b_1(b_2 - b_1)} t^{-b_1} - \frac{f d^{b_2}}{b_1 b_2} t^{-b_2} + \frac{f}{b_1 b_2},$$

а при $b_2 - b_1 = 0$ имеем

$$v_4(t;f) = \frac{f t^{-b_1}}{b_1} \int\limits_t^d \tau^{-1} \left(d^{b_1} - \tau^{b_1} \right) d\tau = \frac{f d^{b_1}}{b_1} t^{-b_1} \ln \frac{d}{t} - \frac{f d^{b_1}}{b_1^2} t^{-b_1} + \frac{f}{b_1^2}.$$

Таким образом, при $b_2 - b_1 \neq 0$

$$v_4(t;f) \in \begin{cases} C^\infty[0,d], & \text{если } -b_1 \in \mathbb{N},\ -b_2 \in \mathbb{N}, \\ C^{[-b_1]}[0,d], & \text{если } -b_1 \notin \mathbb{N},\ -b_2 \in \mathbb{N}, \\ C^{[-b_2]}[0,d], & \text{если } -b_1 \in \mathbb{N},\ -b_2 \notin \mathbb{N}, \\ C^{[-b_2]}[0,d], & \text{если } -b_1 \notin \mathbb{N},\ -b_2 \notin \mathbb{N},\ -b_2 < -b_1, \end{cases}$$

а при $b_2 - b_1 = 0$

$$v_4(t;f) \in \begin{cases} C^{[-b_1]}[0,d], & \text{если } -b_1 \notin \mathbb{N}, \\ C^{-b_1-1}[0,d], & \text{если } -b_1 \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Образующие фундаментальную систему решений функции $v_{02}(t)$, $v_{12}(t)$ имеют следующий вид:

$$v_{02}(t) = \exp\left(\int\limits_t^d \frac{b_2\, d\xi}{\xi} \right) = \left(\frac{d}{t} \right)^{b_2} \in \begin{cases} C^{[-b_2]}[0,d], & \text{если } -b_2 \notin \mathbb{N}, \\ C^\infty[0,d], & \text{если } -b_2 \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

при $b_2 - b_1 \neq 0$

$$v_{12}(t) = \int\limits_t^d \exp\left(\int\limits_\tau^d \frac{b_1\, d\eta}{\eta} \right) \exp\left(\int\limits_t^\tau \frac{b_2\, d\xi}{\xi} \right) \frac{d\tau}{\tau} = d^{b_1} t^{-b_2} \int\limits_t^d \tau^{b_2 - b_1 - 1}\, d\tau = \frac{d^{b_2} t^{-b_2} - d^{b_1} t^{-b_1}}{b_2 - b_1},$$

следовательно,

$$v_{12}(t) \in \begin{cases} C^\infty[0,d], & \text{если } -b_1 \in \mathbb{N},\ -b_2 \in \mathbb{N}, \\ C^{[-b_1]}[0,d], & \text{если } -b_1 \notin \mathbb{N},\ -b_2 \in \mathbb{N}, \\ C^{[-b_2]}[0,d], & \text{если } -b_1 \in \mathbb{N},\ -b_2 \notin \mathbb{N}, \\ C^{[-b_2]}[0,d], & \text{если } -b_1 \notin \mathbb{N},\ -b_2 \notin \mathbb{N},\ -b_2 < -b_1. \end{cases}$$

При $b_2 - b_1 = 0$

$$v_{12}(t) = d^{b_1} t^{-b_1} \int\limits_t^d \tau^{-1}\, d\tau = d^{b_1} t^{-b_1} \ln \frac{d}{t} \in \begin{cases} C^{[-b_1]}[0,d], & \text{если } -b_1 \notin \mathbb{N}, \\ C^{-b_1-1}[0,d], & \text{если } -b_1 \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Заметим, что в теорему 5 не вошёл случай слабого вырождения, когда в уравнении (16) $a_2(0) \neq 0$. Также на примере покажем процесс построения решения начальной задачи для этого уравнения.

Пример 7. Пусть коэффициенты и правая часть уравнения (16) имеют вид

$$a_1(t) = t^3,\ a_2(t) = t,\ b_1 = const < 0,\ b_2 = const < 0,\ f = 0.$$

При сделанных предположениях найдём функцию $v(t)$, удовлетворяющую однородному уравнению (16) и условию (32). Следуя теореме 5 (4°), запишем общее решение этого уравнения $v(t) = v(t, C_1, C_2) = C_1 v_{02}(t) + C_2 v_{12}(t)$, где

$$v_{02}(t) = \exp\left(\int\limits_t^d \frac{b_2\,d\xi}{\xi}\right) = \left(\frac{t}{d}\right)^{-b_2},$$

$$v_{12}(t) = \int\limits_t^d \exp\left(\int\limits_\tau^d \frac{b_1\,d\eta}{\eta^3}\right)\exp\left(\int\limits_t^\tau \frac{b_2\,d\xi}{\xi}\right)\frac{d\tau}{\tau} = t^{-b_2}\int\limits_t^d \exp\left(\frac{b_1}{2\tau^2} - \frac{b_1}{2d^2}\right)\frac{d\tau}{\tau^{1-b_2}},$$

$$\text{при этом для } k < -b_2\ \lim_{t\to 0+} v_{12}^{(k)}(t) = 0,$$

$$\lim_{t\to 0+} v_{02}^{(k)}(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } k < -b_2, \\ d^{b_2}(-b_2)!, & \text{если } k = -b_2 \in \mathbb{N}, \\ \infty, & \text{если } k > -b_2 \notin \mathbb{N}, \\ 0, & \text{если } k > -b_2 \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Таким образом, условие (32) выполняется для любого решения уравнения лишь при единственном значении $v_0 = 0$. Однако для любой произвольной постоянной v_0 можно найти решение однородного уравнения (16), удовлетворяющее условию

$$\lim_{t\to 0+} v_{02}^{(k)}(t) = v_0.$$

В следующем примере мы покажем, что дифференциальные операторы $L_1,\ L_2$ в уравнении (16) $Lv(t) \equiv L_1 L_2 v(t) = f(t)$ совсем не обязательно должны быть вырождающимися.

Пример 8. Пусть коэффициенты и правая часть уравнения (16) имеют вид

$$a_1(0) = 0,\ a_1(t) > 0 \text{ при } t > 0,\ a_1'(0) = 0,\ a_2(t) = 1,\ b_1 = const \neq 0,\ f(t) \in C^\infty[0, d].$$

Тогда уравнение (16) запишется в виде

$$(a_1(t)v'(t))' + \big(b_1(t) - a_1'(t) + b_2 a_1(t)\big)\,v'(t) + b_2 b_1(t) v(t) = f(t). \tag{33}$$

Если $b_1(0) \neq 0$ и $a_1'(0) = 0$, то для произвольной функции $f(t) \in C^\infty[0, d]$ ограниченное на $[0, d]$ решение уравнения (33) может быть построено, как и прежде, в два этапа.

Если $b_1(0) > 0$, то из уравнения $L_1 u(t) = f(t)$, учитывая представление (21), определим

$$u(t) = \int\limits_0^t \frac{f(s)}{a_1(s)}\exp\left(-\int\limits_s^t \frac{b_1(\xi)\,d\xi}{a_1(\xi)}\right)ds,$$

а затем из невырождающегося уравнения $L_2 v(t) = u(t)$ найдём $v(t)$. Получим

$$v(t) = C\exp(-b_2 t) + \exp(-b_2 t)\int\limits_0^t u(\tau)\exp(b_2\tau)\,d\tau =$$

$$= C\exp(-b_2 t) + \exp(-b_2 t)\int\limits_0^t \left(\int\limits_0^\tau \frac{f(s)}{a_1(s)}\exp\left(-\int\limits_s^\tau \frac{b_1(\xi)\,d\xi}{a_1(\xi)}\right)ds\right)\exp(b_2\tau)\,d\tau.$$

Функция $v(t)$ не зависит от d, т. е. определяет ограниченные решения на полуоси. Заметим, что при $t > 0$ существует неограниченное решение однородного уравнения (33), которое имеет вид

$$v_{12}(t) = \int\limits_t^d \exp(b_2(\tau - t))\exp\left(\int\limits_\tau^d \frac{b_1(\xi)\,d\xi}{a_1(\xi)}\right),\quad \lim_{t\to 0+} v_{12}(t) = \infty.$$

Полученные в рассматриваемом случае формулы для решений уравнения (33) согласуются с исследованиями авторов, проведёнными в [3].

Список литературы

1. Архипов В.П. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с вырождающимся коэффициентом при старшей производной. *Дифференциальные уравнения.* 2011;47(10):1383–1393.
2. Архипов В.П., Глушак А.В. Первые асимптотики решений вырождающихся дифференциальных уравнений второго порядка. *Прикладная математика & Физика.* 2023;55(3):197—206.
3. Архипов В.П., Глушак А.В. Задача Коши для вырождающихся дифференциальных уравнений второго порядка. *Прикладная математика & Физика.* 2024;56(2):87—96.
4. Архипов В.П., Глушак А.В. Двусторонняя задача Коши для вырождающихся дифференциальных уравнений второго порядка с условиями в точке вырождения. *Прикладная математика & Физика.* 2024;56(4):245—260.
5. Архипов В.П., Глушак А.В. Степенные асимптотики решений двусторонней задачи Коши для вырождающихся дифференциальных уравнений второго порядка. *Прикладная математика & Физика.* 2025;57(1):27—40.
6. Глушко В.П. Линейные вырождающиеся дифференциальные уравнения, Воронеж. 1972. 193.
7. Глушко В.П. Вырождающиеся линейные дифференциальные уравнения. I. *Дифференциальные уравнения.* 1968;4(9):1584—1597.
8. Глушко В.П. Вырождающиеся линейные дифференциальные уравнения. II. *Дифференциальные уравнения.* 1968;4(11):1956—1966.
9. Розов Н.Х., Сушко В.Г., Чудова Д.И. Дифференциальные уравнения с вырождающимся коэффициентом при старшей производной. *Фундаментальная и прикладная математика.* 1998.4(3):1063–1095.

References

1. Arkhipov VP. Linear second-order differential equations with degenerating coefficient of the second derivative. *Differential Equations.* 2011;47(10):1383–1393 (In Russ).
2. Arkhipov VP., Glushak AV. First asymptotics of solutions of degenerate differential equations of the second order. *Applied Mathematics & Physics.* 2023;55(3):197–206 (In Russ).
3. Arkhipov VP., Glushak AV. Cauchy Problem for Degenerate Second Order Differential Equations. *Applied Mathematics & Physics.* 2024;56(2):87—96 (In Russ).
4. Arkhipov VP., Glushak AV. Two-sided Cauchy problem for degenerate second-order differential equations with conditions at the degeneracy point. *Applied Mathematics & Physics.* 2024;56(4): 245–260 (In Russ).
5. Arkhipov VP., Glushak AV. Power asymptotics of solutions of the two-sided Cauchy problem for degenerate second-order differential equations *Applied Mathematics & Physics.* 2024;56(4):27—40 (In Russ).
6. Glushko VP. 1972. Linear Degenerating Differential Equations, Voronezh. 193 (In Russ).
7. Glushko VP. Degenerate linear differential equations. I. *Differential Equations.* 1968;4:9:1584—1597 (In Russ).
8. Glushko VP. Degenerate linear differential equations. II. *Differential Equations.* 1968;4:11:1956—1966 (In Russ).
9. Rosov NKh., Sushko VG., Chudova DI. Differential equations with a degenerate coefficient multiplying the highest derivative. *Fundamental and Applied Mathematics.* 1998:4(3):1063–1095 (In Russ).

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.
Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 20.06.2025
Поступила после рецензирования 11.08.2025
Принята к публикации 18.08.2025

Received June 20, 2025
Revised August 11, 2025
Accepted August 18, 2025

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Архипов Виктор Петрович – кандидат физико-математических наук, доцент, Орловский государственный университет им. И. С. Тургенева, г. Орел, Россия

Глушак Александр Васильевич – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры прикладной математики и компьютерного моделирования, Белгородский государственный национальный исследовательский университет, г. Белгород, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Viktor P. Arkhipov – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Assosiate Professor, Orel State University named after I.S. Turgenev, Orel, Russia

Alexander V. Glushak – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Professor of the Department of Applied Mathematics and Computer Modeling, Belgorod National Research University, Belgorod, Russia

К содержанию