

Абсолютно непрерывные, логарифмически вогнутые унимодальные распределения

Вирченко Ю. П.¹ , Теволде А. М.² 

¹ Белгородский государственный технологический университет им. В. Г. Шухова,
Россия, 308012, г. Белгород, ул. Костюкова, 46
virch@bsuedu.ru

² Белгородский государственный национальный исследовательский университет,
Россия, 308015, г. Белгород, ул. Победы, 85

Аннотация. В работе изучаются сильно одновершинные по И. А. Ибрагимову функции распределения на $\mathbb{R}$. Усовершенствуется доказательство достаточного признака сильной одновершинности, основанного на понятии логарифмической вогнутости плотности распределения.

Ключевые слова: выпуклые функции, композиция распределений, одномерные распределения вероятностей, одновершинные распределения, сильная одновершинность

Для цитирования: Вирченко Ю.П., Теволде А.М. Абсолютно непрерывные, логарифмически вогнутые унимодальные распределения. *Прикладная математика & Физика*. 2025;57(3):208–223.

DOI 10.52575/2687-0959-2025-57-3-208-223 EDN RSDTLN

Original Research

Absolutely Continuous, Log-Concave Unimodal Distributions

Yuri P. Virchenko¹ , Amanuel M. Tewolde² 

¹ Belgorod State Technological University named after V. G. Shukhov,
46 Kostyukova St., Belgorod 308012, Russia
virch@bsuedu.ru

² Belgorod National Research University,
85 Pobedy St., Belgorod 308015, Russia

Abstract. In this paper, we study strongly unimodal distribution functions on $\mathbb{R}$ according to I. A. Ibragimov. We improve the proof of a sufficient criterion for strongly unimodal distribution based on the concept of logarithmic concavity of the distribution density.

Keywords: Convex Functions, Composition of Distributions, Univariate Probability Distributions, Unimodal Distributions, Strong Unimodality

For citation: Virchenko YuP., Tewolde AM. Absolutely Continuous, Log-Concave Unimodal Distributions. *Applied Mathematics & Physics*. 2025;57(3):208–223 (In Russ.). DOI 10.52575/2687-0959-2025-57-3-208-223 EDN RSDTLN

1. Введение. Пусть $F(x)$, $x \in \mathbb{R}$ — функция распределения, определяющая нормированную на единицу положительную меру множеств $(-\infty, x) \subset \mathbb{R}$. Каждая из таких функций определена всюду на $\mathbb{R}$, неотрицательна и монотонно не убывает. Кроме того, каждая из них стремится к 1 при $x \rightarrow \infty$ и к 0 при $x \rightarrow -\infty$. Не ограничивая общности, в дальнейшем, предполагается, что все такие функции распределения непрерывны справа.

В приложениях особое значение имеют так называемые унимодальные (одновершинные) функции распределения. Это связано с тем, что нарушение свойства унимодальности у распределения связывается с наличием какого-то регулярного «физического» механизма, который приводит к появлению на гистограмме соответствующей случайной величины нескольких максимумов как, например, это имеет место в статистической физике при описании фазовых переходов [1].

С чисто математической точки зрения, при установлении наличия одновершинности функции распределения $F(x)$, удобно исходить из такого определения этого свойства, которое не связано с наличием у этого распределения плотности $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, а формулируется в терминах самой функции F .

Определение 1. Функция распределения $F(x)$, $x \in \mathbb{R}$ называется одновершинной, если существует такое число $x_* \in \mathbb{R}$, называемое вершинной точкой распределения, для которого она выпукла при $x \in (-\infty, x_*)$ и вогнута при $x \in (x_*, \infty)$.

Класс всех функций распределения, обладающих свойством одновершинности в указанном смысле, мы будем обозначать посредством $\mathcal{U}(\mathbb{R})$. В приведенной формулировке понятия одновершинности выбор вершинной точки x_* может оказаться не единственным ввиду наличия, например, интервалов

постоянства у плотности f распределения F . Поэтому мы, далее, будем оперировать понятием множества Δ вершинных точек x_* , обладающих свойством, которое указано в определении.

В этой работе нас будет интересовать сохранение свойства одновершинности распределения F при композиции его с другими одновершинными распределениями V . В этой связи И. А. Ибрагимовым [2] было введено понятие *сильной одновершинности*.

Определение 2. Функция распределения V называется *сильно одновершинной*, если она одновершинная и ее композиция

$$G(x) = (V * F)(x) \equiv \int_{\mathbb{R}} V(x - y) dF(y) \quad (1)$$

с любой одновершинной функцией распределения F снова является одновершинной.

Интеграл в (1) и, далее по тексту, все интегралы такого типа понимаются по Стильтесу (см., например, [3]) или, более общо, по Лебегу – Стильтесу (см., например, [4]). Интеграл Стильтеса заведомо существует в предположении о том, что распределения V и F непрерывны справа, так как они являются распределениями статистически независимых случайных величин, а G в этом случае представляет распределение вероятностей их суммы.

В работе [2] посредством довольно тонких построений доказан очень удобный и важный, с точки зрения приложений, достаточный признак сильной одновершинности функции распределения F на $\mathbb{R}$, который заключается в требовании логарифмической вогнутости ее плотности $f = dF/dx$. Там же утверждается, что это свойство функции распределения F является также необходимым для обладания ею свойством сильной одновершинности. Однако наше исследование показало, что это не так. В связи с этим в настоящей работе мы усовершенствовали доказательство достаточного признака сильной одновершинности, установленного в [2].

2. Свойства выпуклых функций. Прежде чем приступить к основному объекту исследования, приведем некоторые необходимые для дальнейшего изложения простые факты о свойствах выпуклых (вогнутых) функций.

Определение 3. Функция p , определенная на (a, b) , называется *выпуклой (вогнутой)*, если для каждой пары $\{x, y\} \subset (a, b)$ выполняется неравенство

$$p(\xi x + \eta y) \leq \xi p(x) + \eta p(y) \quad (p(\xi x + \eta y) \geq \xi p(x) + \eta p(y)) \quad (2)$$

для любых неотрицательных ξ и η таких, что $\xi + \eta = 1$.

Это определение допускает эквивалентную формулировку.

Определение 3'. Определенная на (a, b) функция называется *выпуклой (вогнутой)*, если для любой линейной функции l на (a, b) имеется такой интервал $(\alpha, \beta) \cap (a, b) \neq \emptyset$, для которого при любом $z \in (\alpha, \beta)$ имеют место неравенство $p(z) \leq l(z)$ ($p(z) \geq l(z)$), а при $z \notin (\alpha, \beta)$ выполняется $p(z) \geq l(z)$ ($p(z) \leq l(z)$).

□ Докажем эквивалентность Определений 3 и 3', например, в случае выпуклости функции p . Для вогнутой функции аналогичное утверждение следует из того, что для каждой вогнутой функции p функция $(-p)$ является выпуклой, и поэтому доказательство справедливости утверждения об эквивалентности будет следовать в результате замены p на $(-p)$ в доказательстве для выпуклой функции и обращения всех неравенств на противоположные.

Пусть функция p выпукла согласно Определению 2, то есть для каждой пары $\{x, y\} \subset (a, b)$ выполняется неравенство (2) для любой пары чисел ξ и η , обладающих указанными свойствами. На основе этой пары чисел построим линейную функцию $l(u) = k(u - x) + p(x)$ такую, что $l(x) = p(x)$ и $l(y) = k(y - x) + p(x) = p(y)$ с $k = (p(y) - p(x))/(y - x)$. Пусть $z \in (x, y)$. Тогда, положив $z = \xi x + \eta y \in (x, y)$, имеем для значений $l(z)$ следующее неравенство

$$l(z) = l(\xi x + \eta y) = \xi(kx + p(x)) + \eta(ky + p(x)) = \xi l(x) + \eta l(y) \geq \xi p(x) + \eta p(y) \geq p(z).$$

Пусть $z < x$. Докажем, что в этом случае $l(z) \leq p(z)$. Допустим противное, что $l(z) > p(z)$. Тогда найдутся ξ и η с указанными свойствами такие, что $x = \xi z + \eta y$, и для которых, вследствие выпуклости функции p , выполняется

$$p(x) \leq \xi p(z) + \eta p(y).$$

Следовательно, воспользовавшись предположением, и учитывая, что $l(y) = p(y)$, получаем противоречие

$$p(x) < \xi l(z) + \eta p(y) = l(z) + l(y) = l(x) = p(x).$$

Если положить, что $z > y$, то, допустив, что $l(z) > p(z)$, и рассуждая аналогичным образом, используя неравенство $p(y) \leq \xi p(x) + \eta p(z)$ с числами ξ и η такими, что $y = \xi x + \eta z$, снова получаем противоречие

$$p(y) < \xi p(x) + \eta l(z) = \xi l(x) + \eta l(z) = l(\xi x + \eta z) = l(y) = p(y)$$

и поэтому должно иметь место $p(z) \geq l(z)$. Таким образом, для функции p выполняются условия Определения 3'.

Докажем обратное утверждение. Пусть функция p обладает свойствами, сформулированными в Определении 3'. Тогда, выбрав пару $\{x, y\} \subset (a, b)$ и определив линейную функцию $l(u) = k(u - x) + p(x)$ с коэффициентом $k = (p(y) - p(x))/(y - x)$, получаем, вследствие условия $l(z) \geq p(z)$ для точки $z = \xi x + \eta y$,

$$p(z) \leq l(\xi x + \eta y) = \xi l(x) + \eta l(y) = \xi p(x) + \eta k(y - x) + \eta p(x) = \xi p(x) + \eta p(y),$$

то есть выполняется условие Определения 3. ■

Лемма 1. Если p определена и выпукла (вогнута) на (a, b) , то эта функция непрерывна на (a, b) .

□ Пусть p – выпуклая функция. Докажем сначала, что в каждой точке c интервала (a, b) выполняется неравенство $\limsup_{x \rightarrow c+0} p(x) \leq \liminf_{x \rightarrow c-0} p(x)$. Допустим противное, что для некоторой точки $c \in (a, b)$ имеет место $p_+ \equiv \limsup_{x \rightarrow c+0} p(x) > p_- = \liminf_{x \rightarrow c-0} p(x)$. Это означает, что существуют последовательность $\langle a_n \in (a, c); n \in \mathbb{N} \rangle$, сходящаяся к точке c слева, для которой $\lim_{n \rightarrow \infty} p(a_n) = p_-$, и – аналогичная последовательность $\langle b_n \in (c, b); n \in \mathbb{N} \rangle$, сходящаяся к этой точке справа, для которой $\lim_{n \rightarrow \infty} p(b_n) = p_+$. Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$, для последовательности $\langle a_n; n \in \mathbb{N} \rangle$ найдется номер L такой, что при $n > L$ имеет место $|p(a_n) - p_-| < \varepsilon$, и, точно так же, для последовательности $\langle b_n; n \in \mathbb{N} \rangle$ найдется номер M , для которого при $n > M$ выполняется $|p(b_n) - p_+| < \varepsilon$. Поэтому для $n > \max\{L, M\}$ имеют место неравенства

$$p(a_n) < p_- + \varepsilon, \quad p(b_n) > p_+ - \varepsilon.$$

Выберем число $\varepsilon < (p_+ - p_-)/2$. Затем определим число $\delta > 0$ и по нему увеличим числа L и M , если возникнет необходимость, так, чтобы $|a_n - c| < \delta$ при $n > L$ и $|b_n - c| < \delta$ при $n > M$.

Рассмотрим линейную функцию $l(x) = k(x - c) + \Delta$, $\Delta = (p_- + p_+)/2$ с коэффициентом $k < \delta^{-1}((p_+ - p_-)/2 - \varepsilon)$. Тогда, при таком выборе номера L , во всех точках a_n с $n > L$ выполняется $p(a_n) < l(a_n)$, так как $k\delta < (p_+ - p_-)/2 - \varepsilon$ и поэтому

$$l(a_n) = k(a_n - c) + \Delta > -k\delta + \Delta = \varepsilon + p_- > p(a_n).$$

Точно так же, во всех точках b_n с $n > M$ выполняется $l(b_n) < p(b_n)$, так как

$$l(b_n) = k(b_n - c) + \Delta < k\delta + \Delta = p_+ - \varepsilon < p(b_n).$$

Таким образом, существует линейная функция $l(u)$ такая, что $l(a_L) = p(a_L)$ и $l(b_M) = p(b_M)$, но на интервале (a_L, b_M) содержатся как точки b_n , в которых $p(b_n) > l(b_n)$, так и точки a_n , в которых $p(a_n) < l(a_n)$, что противоречит выпуклости функции p , согласно Определению 3'. Отсюда следует, что $p_+ = p_-$.

Таким образом, доказано, что $\limsup_{x \rightarrow c+0} p(x) = \liminf_{x \rightarrow c-0} p(x)$. Но, по этой же причине, имеет место $\limsup_{x \rightarrow c-0} p(x) = \liminf_{x \rightarrow c+0} p(x)$. Кроме того, непосредственно из определения верхнего и нижнего пределов следует, что $\limsup_{x \rightarrow c \pm 0} p(x) \geq \liminf_{x \rightarrow c \pm 0} p(x)$. Тогда, ввиду из получаемой таким образом цепочки отношений

$$\limsup_{x \rightarrow c+0} p(x) = \liminf_{x \rightarrow c-0} p(x) \leq \limsup_{x \rightarrow c-0} p(x) = \liminf_{x \rightarrow c+0} p(x)$$

следует совпадение верхнего и нижнего пределов в точке c , что доказывает утверждение леммы для выпуклой функции. Доказательство для вогнутой функции получается заменой вогнутой функции p на выпуклую $(-p)$. ■

Теорема 1. Определенная на (a, b) выпуклая (вогнутая) функция p имеет в каждой точке x интервала (a, b) конечные правую $(D_+p)(x)$ и левую $(D_-p)(x)$ производные (производные Дини).

□ Пусть $a < s < t < u < b$. Введем

$$\xi = \frac{u-t}{u-s} > 0, \quad \eta = \frac{t-s}{u-s} > 0, \quad \xi + \eta = 1.$$

Запишем неравенство выпуклости для функции p с коэффициентами ξ и η

$$p(\xi s) + p(\eta u) \geq p(\xi s + \eta u).$$

Так как

$$\xi s + \eta u = \frac{u-t}{u-s} s + \frac{t-s}{u-s} u = \frac{s(u-t) + u(t-s)}{u-s} = \frac{t(u-s)}{u-s} = t,$$

то

$$p(t) \leq p(s) \frac{u-t}{u-s} + p(u) \frac{t-s}{u-s}. \quad (3)$$

Отсюда следует

$$\frac{p(t) - p(s)}{t - s} \leq \frac{p(s)}{t - s} \left[\frac{u - t}{u - s} - 1 \right] + \frac{p(u)}{t - s} \frac{t - s}{u - s} = \frac{p(u) - p(s)}{u - s},$$

то есть

$$\frac{p(t) - p(s)}{t - s} \leq \frac{p(u) - p(s)}{u - s}. \quad (4)$$

Тогда у отношения $(p(t) - p(s))/(t - s)$ в точке s , ввиду его монотонного невозрастания при приближении точки t к s , имеется предел справа, равный по определению $(D_+p)(s)$.

С другой стороны, из неравенства (3) следует

$$p(t) \frac{u - s}{u - t} - p(u) \frac{t - s}{u - t} \leq p(s), \quad p(s) - p(u) \geq p(t) \frac{u - s}{u - t} - p(u) \left(1 + \frac{t - s}{u - t} \right),$$

$$\frac{p(s) - p(u)}{s - u} \leq \frac{p(t) - p(u)}{t - u}. \quad (5)$$

Тогда, ввиду монотонного неубывания отношения $(p(t) - p(u))/(t - u)$ при приближении точки t к u , у него существует предел слева в точке u , равный $(D_-p)(u)$.

Приведенное доказательство распространяется на вогнутые функции p ввиду замечания, что если определенная на (a, b) функция p вогнута, то функция $(-p)$ выпукла и, следовательно, она, так же как и выпуклая функция, имеет в каждой точке x интервала (a, b) правую $(D_+(-p))(x)$ и левую $(D_-(-p))(x)$ производные. ■

Следствие 1. Пусть функция p выпукла на (a, b) . Тогда для любой пары точек $\{s, u\}$, $a < s < u < b$ имеют место неравенства

$$(u - s)(D_+p)(s) \leq p(u) - p(s), \quad (u - s)D_-p(u) \geq p(u) - p(s). \quad (6)$$

Если же функция p вогнута на (a, b) , то для любой пары точек $\{s, u\}$, $a < s < u < b$ имеют место неравенства

$$(u - s)(D_+p)(s) \geq p(u) - p(s), \quad (u - s)D_-(u)p \leq p(u) - p(s). \quad (7)$$

□ Для выпуклой функции p первое из неравенств следует из неравенства (3), справедливого для p и любой тройки точек $\{s, t, u\} \subset (a, b)$, $s < t < u$. Оно получается переходом в нем к пределу $t \rightarrow s + 0$. Умножая обе части полученного неравенства на (-1) и пользуясь тем, что $(-p)$ — вогнутая функция, убеждаемся в выполнении первого из неравенств для вогнутой функции.

Далее, переходом к пределу $t \rightarrow u - 0$ в неравенстве (5) убеждаемся в справедливости второго неравенства для выпуклой функции в (6), а затем умножением полученного неравенства на (-1) получаем второе неравенство для вогнутой функции $(-p)$. ■

Интервал (α, β) будем называть *интервалом постоянства* определенной на (a, b) функции q , $(\alpha, \beta) \subset (a, b)$, если $q(x) = \text{const}$ при $x \in (\alpha, \beta)$. Интервал постоянства назовем *максимальным*, если он не является собственным подмножеством никакого другого интервала постоянства.

Лемма 2. Если q — выпуклая (вогнутая) на (a, b) функция, то она имеет на (a, b) не более одного интервала постоянства.

□ Пусть имеется два таких непересекающихся интервала $(\alpha_j, \beta_j) \subset (a, b)$, $j \in \{1, 2\}$ с $\beta_1 \leq \alpha_2$, для которых $q(x) = c_j$, $x \in (\alpha_j, \beta_j)$ $j \in \{1, 2\}$. Выберем две точки s_1, s_2 так, что $s_1 \in (\alpha_1, \beta_1)$, $s_2 \in (\alpha_2, \beta_2)$. Тогда точки $\langle s_1 + \delta, c_1 \rangle$ и $\langle s_2 - \delta, c_2 \rangle$ графика линейной функции q , при достаточно малом $\delta > 0$, расположены по разные стороны от прямой, проходящей через точки $\langle s_j, c_j \rangle$, $j \in \{1, 2\}$. В этом случае, согласно Определению 3', функция q не может быть ни выпуклой, ни вогнутой. ■

Число $x_* \in (a, b)$ является точкой локального минимума (максимума) функции p , определенной на (a, b) , если $p(x) \geq p(x_*)$ ($p(x) \leq p(x_*)$) при $|x - x_*| < \varepsilon$, $x \in (a, b)$ с достаточно малым $\varepsilon > 0$. В дальнейшем мы по отношению к таким числам используем более короткое выражение — точка минимальности (максимальности).

Лемма 3. Если p — выпуклая (вогнутая) на (a, b) функция, то все ее точки минимальности (максимальности) на (a, b) составляют множество $[\alpha, \beta] \cap (a, b)$ с $\alpha \geq a$ и $\beta \leq b$.

□ Допустим, что имеется пара $\{x_1, x_2\}$, $a < x_1 < x_2 < b$ точек минимума таких, что между ними обязательно имеется точка y , в которой $p(y) > p(x_1)$ или $p(y) > p(x_2)$. В противном случае, если такой точки нет, то в каждой точке $y \in (x_1, x_2)$ выполняется $p(y) = p(x_1)$ и $p(x_2) = p(y)$ и поэтому (x_1, x_2) — отрезок постоянства функции $p(y) = \text{const}$. Если $p(y) > p(x_j)$ при каком-то $j \in \{1, 2\}$, то в силу выпуклости функции p , в точке $y = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2$, $\xi_j \in (0, 1)$, $j \in \{1, 2\}$, $\xi_1 + \xi_2 = 1$ должно выполняться неравенство

$$p(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2) \leq \xi_1 p(x_1) + \xi_2 p(x_2).$$

Но это неравенство не может быть верным, так как

$$p(y) = (\xi_1 + \xi_2)p(y) > \xi_1 p(x_1) + \xi_2 p(x_2).$$

Найдем $\alpha = \inf x_1$ и $\sup x_2 = \beta$, соответственно, левых и правых крайних точек всех таких интервалов. Тогда интервал (α, β) является единственным, в силу Леммы 2, максимальным постоянства функции p . Если какая-либо из точек $\alpha \neq a$, $\beta \neq b$, то значения функции p в крайних точках определены по непрерывности функции p и они должны быть включены в состав множества постоянства функции p .

Утверждение леммы для вогнутой функции получается заменой p на $(-p)$. ■

Таким образом, если функция p определена на (a, b) и выпукла (вогнута), а концы ее интервала минимальности (максимальности) не совпадают с концами интервала (a, b) , то множество минимальности (максимальности) является замкнутым отрезком.

Теорема 2. *Определенная на (a, b) выпуклая (вогнутая) функция p удовлетворяет условию Липшица на любом отрезке $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$.*

□ Согласно утверждениям Лемм 2 и 3, интервал определения выпуклой на (a, b) функции разбивается на интервал убывания (возрастания), отрезок постоянства и интервал возрастания (убывания). Пусть, для определенности, функция p не убывает в окрестности точки t , $p(t) \geq p(s)$. Зафиксируем число $\delta > 0$. Ввиду непрерывности функции p , отношение $(p(u) - p(s))/(u - s)$ является непрерывной функцией на $[\alpha, \beta]^2 \setminus \{s, u\} : |s - u| < \delta\}$. Тогда, зафиксировав в (4) положительное значение отношения $(p(u) - p(s))/(u - s) \equiv A_+$, получим

$$p(t) - p(s) \leq A_+(t - s), \quad (8)$$

откуда следует, что для пар точек $\{s, t\} \subset [\alpha, \beta]$ из интервала возрастания функции p выполняется условие Липшица.

Рассмотрим функцию p на интервале убывания. Тогда $p(u) \leq p(s)$, рассуждая аналогичным образом, (4) следует

$$A_- \geq \frac{|p(s) - p(t)|}{t - s} \geq \frac{p(s) - p(u)}{u - s},$$

где зафиксировано значение отношения $A_- = |p(s) - p(t)|/(t - s)$. Следовательно,

$$|p(s) - p(u)| \leq A_-|s - u| \quad (9)$$

для любых точек u и s , $s < t < u$, что означает выполнение условия Липшица для p для пар точек $\{s, u\} \subset [\alpha, \beta]$, находящихся на интервале убывания.

На интервале постоянства функции p условие Липшица выполняется очевидным образом. Для граничных точек рассмотренных интервалов нужно применить оба неравенства, справедливые на соседних интервалах, для которых эта точка является граничной.

В частности, если точка t является единственной граничной точкой между интервалом неубывания и невозрастания (единственной точкой минимальности), то условие Липшица имеет место при выборе постоянной $A = \max\{A_+, A_-\}$.

Доказательство распространяется на вогнутые функции p при замене ее на $(-p)$. ■

Теорема 3. *Производные Дини определенной на (a, b) выпуклой (вогнутой) функции p удовлетворяют в каждой точке интервала неравенству $(D_+p)(x) \geq (D_-p)(x)$ ($(D_+p)(x) \leq (D_-p)(x)$).*

□ Рассмотрим три произвольные точки s, t, u такие, что $s < t < u$. На основе неравенств (4) и (5) получим

$$\frac{p(t) - p(s)}{t - s} \leq \frac{p(u) - p(s)}{u - s}.$$

Переходя к пределу $s \rightarrow t - 0$ в обоих неравенствах и воспользовавшись непрерывностью функции p , находим

$$(D_-p)(t) \leq \frac{p(u) - p(t)}{u - t}.$$

Далее переходим к пределу $u \rightarrow t + 0$ и получаем требуемое неравенство $(D_-p)(t) \leq (D_+p)(t)$ для производных Дини.

Доказательство распространяется на вогнутые функции p при замене вогнутой функции p на выпуклую функцию $(-p)$. ■

Лемма 4. *Ограниченная сверху монотонно неубывающая функция p , не равная тождественно постоянной, не может быть выпуклой на интервале (a, ∞) при любом $a \in \mathbb{R}$. И, точно так же, ограниченная снизу монотонно невозрастающая функция p , не равная тождественно постоянной, не может быть вогнутой на интервале $(-\infty, a)$.*

□ Если выпуклая функция p не равна постоянной и не убывает, то найдется такая точка a , в которой $(D_+p)(a) \geq \varepsilon > 0$. Тогда из первого неравенства в (6) при $s = a$ получаем $p(u) \geq p(a) + \varepsilon(u - a)$, где в правой части стоит неограниченно возрастающая функция.

Умножая полученные неравенства на (-1) , и учитывая, что для неубывающей выпуклой функции p , функция $(-p)$ вогнутая и невозрастающая, убеждаемся в справедливости второй части утверждения. ■

Лемма 5. Для того чтобы непрерывная функция $p(x)$ была выпуклой (вогнутой) на интервале (a, b) необходимо и достаточно, чтобы функция $p(x + \delta) - p(x)$ была неубывающей (невозрастающей) на интервале $(a, b - \delta)$.

□ Пусть p — выпуклая функция на (a, b) . Рассмотрим пару точек $\{x, y\} \subset (a, b)$, $x > y$. Определим числа

$$\xi = \frac{x - y}{x - y + \delta}, \quad \eta = \frac{\delta}{x - y + \delta}$$

и запишем следующие неравенства (2) выпуклости для функции p с крайними точками y и $x + \delta$, используя коэффициенты ξ и η ,

$$p(y + \delta) \leq \xi p(y) + \eta p(x + \delta), \quad p(x) \leq \eta p(y) + \xi p(x + \delta).$$

Складывая правые и левые части этих двух неравенств, получаем

$$p(y + \delta) + p(x) \leq \xi(p(y) + p(x + \delta)) + \eta(p(x + \delta) + p(y)) = p(x + \delta) + p(y),$$

откуда следует

$$p(y + \delta) - p(y) \leq p(x + \delta) - p(x). \quad (10)$$

Это означает, ввиду произвольности точек x и y на интервале $(a, b - \delta)$, что на этом интервале функция $p(x + \delta) - p(x)$ возрастает.

Пусть, наоборот, функция $p(x + \delta) - p(x)$ возрастает и допустим, что верно утверждение, противоположное тому, что утверждает лемма. Пусть существует интервал $(a', b') \subset (a, b)$, в котором $p(x + \delta) - p(x)$ вогнута. Запишем для произвольной пары точек из этого интервала неравенства вогнутости с крайними точками $y + \delta$ и x

$$p(y + \delta) \geq \xi p(y) + \eta p(x + \delta), \quad p(x) \geq \eta p(y) + \xi p(x + \delta).$$

Суммируя по отдельности правые и левые части этих неравенств получаем неравенство

$$p(y + \delta) + p(x) \geq p(x + \delta) + p(y),$$

которое противоречит возрастанию функции $p(x + \delta) - p(x)$. ■

Следствие 2. Если p — выпуклая (вогнутая) на (a, b) функция, то производные Дини $D_{\pm}p(x)$ — неубывающие (невозрастающие) функции на (a, b) .

□ Пусть функция p выпукла и имеется пара точек $\{x, y\} \subset (a, b)$ при $y > x$. Неравенство (10) для выпуклой функции в этом случае записывается в виде

$$p(y + \delta) - p(y) \geq p(x + \delta) - p(x). \quad (11)$$

Поделив на δ и перейдя к пределу $\delta \rightarrow +0$, получим неравенство $D_+p(y) \geq D_+p(x)$ для любой пары $\{x, y\} \subset (a, b)$ при $y > x$, которое означает неубывание правой производной. Заменяя в неравенстве (11) y на $y - \delta$ и x на $x - \delta$ и проделав точно такие же операции, получим в результате неравенство $D_-p(y) \geq D_-p(x)$, которое показывает неубывание левой производной. Неравенства для вогнутой функции получаются умножением полученных неравенств на (-1) . ■

Теорема 4. Если p выпуклая (вогнутая) монотонно неубывающая функция на (a, b) , то ее производная p' на этом интервале существует всюду за исключением не более чем счетного множества точек разрыва первого рода и ее производные Дини D_+p и D_-p являются, соответственно, непрерывными справа и непрерывными слева неубывающими (невозрастающими) функциями.

□ Из утверждения Следствия 3 получаем, что D_+p и D_-p монотонно не убывают (не возрастают). Следовательно, для этих функций применимо разложение Лебега, в котором дискретная составляющая имеет не более чем счетное множество точек роста. Из Теоремы 3 следует, что в этих точках функции D_+p и D_-p имеют положительные и отрицательные скачки. ■

3. Слабая сходимость распределений. Функции распределения F могут обладать интервалами постоянства. Обозначим посредством C_F подмножество из $\mathbb{R}$, которое является объединением всех интервалов постоянства фиксированной функции распределения F . Сопоставим, далее, каждой функции распределения F множество $\mathcal{G}(F)$ ее точек роста, определяемое как дополнение $\mathbb{R} \setminus C_F$. Это множество назовем носителем распределения F .

Заметим, что если последовательность $\langle F^{(n)}; n \in \mathbb{N} \rangle$ непрерывных распределений сходится поточечно к распределению F , то предельное распределение может быть разрывным. В связи с этим вводится следующее

Определение 4. Последовательность $\langle F^{(n)}; n \in \mathbb{N} \rangle$ функций распределений слабо сходится при $n \rightarrow \infty$ к распределению F , если она сходится поточечно к этому распределению во всех точках непрерывности этой функции.

Для слабой сходимости последовательности распределений $\langle F^{(n)}; n \in \mathbb{N} \rangle$ к распределению F необходимо и достаточно, чтобы поточечно сходилась последовательность

$$\langle Q^{(n)}(-is) = \int_{\mathbb{R}} e^{isx} dF^{(n)}(x); n \in \mathbb{N} \rangle$$

их характеристических функций к характеристической функции $Q(-is) = \int_{\mathbb{R}} e^{isx} dF(x)$ (см. [5]). Доказательство эквивалентности этих определений основано на следующих фактах.

Лемма 6. Если последовательность $\langle F^{(n)}; n \in \mathbb{N} \rangle$ функций распределения слабо сходится при $n \rightarrow \infty$ к распределению F и все функции — компоненты последовательности выпуклы (вогнуты) при $x \leq a$ (при $x \geq a$), то функция распределения F непрерывна при $x \leq a$ (при $x \geq a$) и последовательность сходится к F равномерно на $(-\infty, a]$ (на $[a, \infty)$).

□ Докажем, что имеет место равномерная сходимость на $(-\infty, a]$. Распределение F , которое является неубывающей функцией на $\mathbb{R}$, может иметь не более чем счетное множество точек разрыва. Поэтому, если на $(-\infty, a]$ имеется точка x_0 разрыва этого распределения, то при любом $\varepsilon > 0$ на интервале $(-\varepsilon + x_0, x_0 + \varepsilon)$ имеется плотное в этом интервале множество точек, в которых функция $F(x)$ непрерывна, и поэтому последовательность $\langle F^{(n)}; n \in \mathbb{N} \rangle$ сходится в каждой такой точке $x \in (-\varepsilon + x_0, x_0 + \varepsilon)$ к $F(x)$ при $n \rightarrow \infty$. Пусть $x_- \in (-\varepsilon + x_0, x_0)$ и $x_+ \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$ такие точки. Тогда, ввиду монотонного неубывания функций $F^{(n)}$, выполняются неравенства $F^{(n)}(x_+) \geq F^{(n)}(x_0)$ и $F^{(n)}(x_-) \leq F^{(n)}(x_0)$. Из числовой последовательности $\langle F^{(n)}(x_0); n \in \mathbb{N} \rangle$, ввиду ее ограниченности, можно выбрать подпоследовательность $\langle F^{(n_k)}(x_0); k \in \mathbb{N} \rangle$, сходящуюся к некоторому числу F_0 . Тогда, переходя к пределу $k \rightarrow \infty$ в вышеприведенных неравенствах, пользуясь непрерывностью функции F в точках $x_{\pm}$, имеем $F(x_-) \leq F_0 \leq F(x_+)$.

Ввиду произвольности $\varepsilon > 0$ и, как следствие, выбора точек $x_{\pm}$ среди всех точек непрерывности функции F при $x < a$, переходя к пределу $\varepsilon \rightarrow +0$, получаем $\liminf_{\varepsilon \rightarrow +0} F(x) \leq F_* \leq \limsup_{\varepsilon \rightarrow +0} F(x)$, причем, хотя бы одно из неравенств является строгим, так как, в противном случае, функция F является непрерывной в точке x_0 , вопреки предположению. Это означает, что существует линейная функция $l(x)$ такая, что для достаточно больших значений k и достаточно малых $\varepsilon > 0$ в интервале $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ имеются точки $x > x_0$, в которых $F^{(n_k)}(x) > l(x)$, и точки $x < x_0$, в которых $F^{(n_k)}(x) < l(x)$, что противоречит выпуклости этих функций $F^{(n_k)}$ при $x \leq a$, согласно Определению 3'. Таким образом, предположение о наличии точки разрыва x_0 при $x \leq a$ неверно. Точно так же устанавливается отсутствие точки разрыва у $F(x)$ при $x \geq a$ в случае, когда все функции $F^{(n)}$ вогнуты на $[a, \infty)$. Следовательно, в обоих случаях предельная функция F непрерывна на этих интервалах.

Для доказательства равномерности сходимости последовательности $\langle F^{(n)}; n \in \mathbb{N} \rangle$ зафиксируем число $\varepsilon > 0$. Найдется число $M > 0$ такое, что $F(-M) < \varepsilon$ и, следовательно, $F(x) \leq F(-M) < \varepsilon$ при $x < -M$, ввиду неубывания функции F . Так как числовая последовательность $\langle F^{(n)}(-M); n \in \mathbb{N} \rangle$ сходится к $F(-M)$, то можно выбрать такой номер K , что при $n > K$ имеет место $|F^{(n)}(-M) - F(-M)| < \varepsilon$. Тогда, ввиду монотонного неубывания всех функций $F^{(n)}(x)$ при $x < M$, справедливы оценки

$$|F^{(n)}(x) - F(x)| \leq F^{(n)}(x) + F(x) \leq F^{(n)}(-M) + F(-M) \leq |F^{(n)}(-M) - F(-M)| + 2F(-M) < 3\varepsilon.$$

Докажем, что последовательность $\langle F^{(n)}; n \in \mathbb{N} \rangle$ равномерно сходится на конечном отрезке $[-M, a]$. Допустим противное, что для выбранного числа $\varepsilon > 0$ имеет место

$$\limsup_{x \in [-M, a]} |F^{(n)}(x) - F(x)| \geq \varepsilon. \quad (12)$$

Это означает, что найдется последовательность номеров $\langle n_k; k \in \mathbb{N} \rangle$ и связанная с ней числовая последовательность $\langle c_k \in [-M, a]; k \in \mathbb{N} \rangle$, для которых, при всех достаточно больших k , имеет место неравенство $|F^{(n_k)}(c_k) - F(c_k)| \geq \varepsilon$. Ввиду того, что последовательность $\langle c_k \in [-M, a]; k \in \mathbb{N} \rangle$ является ограниченной, можно считать, что она является сходящейся к некоторому числу $c \in [-M, a]$. Более того, можно считать, что она возрастающая, если $c = a$ и убывающая, если $c = -M$. Наконец, можно считать, что она выбрана так, что последовательность $\langle F^{(n_k)}(c_k) \in [-M, a]; k \in \mathbb{N} \rangle$ также является сходящейся. Переходя к пределу $k \rightarrow \infty$ в указанном выше неравенстве и пользуясь непрерывностью функции $F(x)$ при $x \leq a$, находим

$$|\lim_{k \rightarrow \infty} F^{(n_k)}(c_k) - F(c)| \geq \varepsilon. \quad (13)$$

Пусть $c \in (-M, a)$ (обобщение на случаи $c = a$ и $c = -M$ осуществляется очевидным образом). Выберем число $\delta > 0$ так, что $(c - \delta, c + \delta) \subset (-M, a)$. Тогда, ввиду монотонного неубывания всех функций $F^{(n_k)}$, имеют место неравенства $F^{(n_k)}(c - \delta) \leq F^{(n_k)}(c_k) \leq F^{(n_k)}(c + \delta)$. Перейдем к пределу $k \rightarrow \infty$ в этих неравенствах. Пользуясь поточечной сходимостью функций $F^{(n_k)}$, в результате, получаем $F(c - \delta) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} F^{(n_k)}(c_k) \leq F(c + \delta)$. Ввиду произвольности числа $\delta > 0$, пользуясь непрерывностью функции F , перейдем в этих неравенствах к пределу $\delta \rightarrow +0$. Тогда получается, что $F(c) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} F^{(n_k)}(c_k) \leq F(c)$. Но эти неравенства противоречат (13). ■

Так как F – функция распределения, то она, согласно теореме Лебега (см., например, [6]), однозначным образом представима в виде суммы двух функций распределения $F = F_c + F_d$, где F_c – непрерывная монотонно неубывающая функция, а F_d – монотонно неубывающая функция скачков, у которой множество разрывов первого рода счетно. Следовательно, если последовательность $\langle F^{(n)}; n \in \mathbb{N} \rangle$ слабо сходится к F при $n \rightarrow \infty$, то она сходится поточечно всюду на $\mathbb{R}$ за исключением точек, составляющих не более чем счетное множество $\mathcal{E}$, которое может быть погружено в множество $\mathcal{E}_\delta \supset \mathcal{E}$ сколь угодно малой меры δ так, что множество $\mathbb{R} \setminus \mathcal{E}_\delta$ представляется в виде дизъюнктивного объединения отрезков непрерывности распределения F .

4. Одновершинные распределения. Используя свойства выпуклых и вогнутых функций, докажем ряд утверждений об одновершинных распределениях.

Теорема 5. *Множество Δ вершинных точек одновершинного распределения F состоит либо из одной точки, либо является отрезком $\Delta \subset \mathbb{R}$ конечной длины.*

□ Пусть Δ не является одноточечным множеством и пусть a и b – две точки, которые являются вершинными точками одновершинного распределения F и $a < b$. Тогда так как функция F выпукла в точках, меньших b , то выполняется

$$F(\xi a + \eta b) \leq \xi F(a) + \eta F(b)$$

при $\eta = 1 - \xi$, $0 \leq \xi \leq 1$. С другой стороны, функция F должна быть вогнута в точках, больших a , и поэтому для тех же пар $\langle \xi, \eta \rangle$ выполняется

$$F(\xi a + \eta b) \geq \xi F(a) + \eta F(b).$$

Отсюда следует, что

$$F(\xi a + \eta b) = \xi F(a) + \eta F(b). \quad (14)$$

Положим $z = \xi a + \eta b$. Тогда из (14) следует, что для каждого $z \in (a, b)$ имеет место

$$F(z) = (z - b) \frac{F(a) - F(b)}{a - b} + F(b),$$

то есть F является линейной функцией от $z \in (a, b)$. Следовательно, для любой точки $c \in (a, b)$ функция F выпукла при $z < c$ и вогнута при $z > c$. Поэтому каждая такая точка c является вершинной. Отсюда, максимально расширяя интервал (a, b) вершинных точек, получаем, что если вершинная точка распределения F не единственна, то все ее вершинные точки образуют интервал в $\mathbb{R}$.

Рассмотрим максимальный интервал (a, b) , составленный из вершинных точек. Тогда крайние точки a и b также являются вершинными. Докажем это, например, для точки a . Для любой точки $a - \varepsilon$ с достаточно малым $\varepsilon > 0$ функция F выпукла при $x < a - \varepsilon$ и, следовательно, она выпукла при $x < a$. С другой стороны, так как функция F вогнута при $x > a + \varepsilon$ при любом $\varepsilon > 0$, то она вогнута во всех точках $x > a$. Тогда точки в интервале $(a - \varepsilon, a)$ также являются вершинными для функции распределения F , что противоречит выбору точки a . Для правого конца интервала (a, b) доказательство аналогично. При этом вместе с заменой a на b , нужно рассмотреть интервал $(b - \varepsilon, b)$ и использовать тот факт, что функция F вогнута при $x > b$. ■

В дальнейшем отрезок Δ будем называть множеством вершинных точек.

Следствие 3. *Если a – вершинная точка распределения F , то функция F непрерывна на (a, ∞) и $(-\infty, a)$. Если же множество вершинных точек одновершинного распределения F состоит более чем из одной точки, то F – непрерывная функция.*

□ Первое утверждение следует непосредственно из Леммы 1, второе же является следствием первого при рассмотрении каких-либо двух различных вершинных точек a и b из Δ . ■

Следствие 4. *Одновершинная функция распределения F имеет в каждой точке x правую $D_+F(x)$ и левую $D_-F(x)$ производные, которые конечны за исключением, может быть, одной точки x_* , которая является единственной вершинной точкой функции F . Для производных Дини справедливы неравенства $D_+F(x) \geq D_-F(x)$ при $x < x_*$ и $D_+F(x) \leq D_-F(x)$ при $x > x_*$.*

□ Доказательство утверждения получается применением Теорем 1 и 3 отдельно к выпуклой и вогнутой частям функции F . ■

Следствие 5. *Множество $\mathcal{G}(F)$ одновершинного распределения F является замкнутым отрезком конечным или бесконечным.*

□ Пусть a – вершинная точка распределения F . Тогда вся действительная ось $\mathbb{R}$ представляется в виде $\{a\} \cup (-\infty, a) \cup (a, \infty)$ так, что распределение F выпукло на первом интервале и вогнуто на втором. Согласно Лемме 2, на каждом из них может находиться только один интервал постоянства функции F . Так как $F(x) \rightarrow 1$ при $x \rightarrow \infty$ и $F(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow -\infty$, то на первом интервале $(-\infty, a)$ такой интервал постоянства либо пуст, либо бесконечен и имеет вид $(-\infty, a_-)$. На этом интервале $F(x) = 0$ и,

следовательно, $(D_-F)(a_-) = 0$. То же самое справедливо относительно второго интервала (a, ∞) . Он либо пуст, либо бесконечен — (a_+, ∞) . В последнем случае на этом интервале $F(x) = 1$ и $(D_+F)(a_+) = 0$. ■

Замечание 1. Так как множество $\{x : D_+F(x) \cdot D_-F(x) \neq 0\}$ открыто, то для любого непрерывного одновершинного распределения это множество является интервалом (конечным или бесконечным), который представляет собой внутреннюю часть множества $\mathcal{G}(F)$ [2].

Замечание 2. Если множество Δ вершинных точек одновершинного распределения F одноточечно $\Delta = \{a\}$, то в точке a распределение F может иметь разрыв первого рода. При этом правая и левая производные распределения в этой точке могут быть как конечными, так и бесконечными.

На основании доказанных свойств одновершинных распределений и Определения 4, сформулируем

Определение 4'. Последовательность $\langle F^{(n)}; n \in \mathbb{N} \rangle$ одновершинных функций распределений слабо сходится к распределению F , если она сходится к функции F поточечно во всех точках за исключением, может быть, вершинной точки x_* распределения в том случае, если она единственна и является точкой разрыва 1-го рода функции F .

Нам понадобится далее

Лемма 7. Если $F(x)$, $x \in \mathbb{R}$ — одновершинное распределение, то $F(x-c)$, $x \in \mathbb{R}$ — также одновершинное распределение при любом $c \in \mathbb{R}$.

□ Если a — вершинная точка распределения $F(x)$, $x \in \mathbb{R}$, то $F(x)$ выпукла при $x < a$ и вогнута при $x > a$. Тогда функция $F(x-c)$ выпукла при $x < c+a$, и вогнута при $x > a+c$ и поэтому $(c+a)$ — вершинная точка распределения $F(x-c)$, $x \in \mathbb{R}$. ■

Из этой леммы следует следующее утверждение.

Теорема 6. Если $F(x)$, $x \in \mathbb{R}$ — одновершинное распределение, то $F(\lambda x - c)$, $x \in \mathbb{R}$ — также одновершинное распределение при любых $c \in \mathbb{R}$, $\lambda \in (0, \infty)$.

□ Достаточно доказать, что из одновершинности распределения $F(x)$ следует одновершинность функции распределения $F(\lambda x)$ при $\lambda > 0$. Пусть a — вершинная точка распределения F . Тогда F выпукла при $x < a$ и вогнута при $x > a$. Поэтому функция $F(\lambda x)$ выпукла при $\lambda x < a$, $x < a/\lambda$ и вогнута при $\lambda x > a$, $x > a/\lambda$. ■

Главным достоинством Определения 1 понятия одновершинности распределения оказывается то, что класс одновершинных распределений оказывается полным относительно применения операции предельного перехода в смысле слабой топологии. Это открывает возможность создания аналитического метода установления одновершинности распределений посредством построения последовательных приближений в виде одновершинных распределений для изучаемого распределения. Поэтому утверждение имеет исключительное значение для теории одновершинных распределений.

Теорема 7. Пусть $\langle F^{(n)}; n \in \mathbb{N} \rangle$ является последовательностью одновершинных распределений, которая слабо сходится к функции распределения F . Тогда предельное распределение F одновершинно. При этом последовательность $\langle F^{(n)}; n \in \mathbb{N} \rangle$ сходится к F поточечно во всех точках, за исключением, может быть, вершинной точки x_* распределения F в том случае, если она единственна и в ней предельная функция F имеет разрыв первого рода.

□ Так как последовательность $\langle F^{(n)}; n \in \mathbb{N} \rangle$ слабо сходится к распределению F , то есть сходится поточечно во всех точках его непрерывности, то любая подпоследовательность $\langle F^{(n_k)}; k \in \mathbb{N} \rangle$ сходится поточечно во всех точках множества непрерывности к этому распределению F , то есть любая подпоследовательность $\langle F^{(n_k)}; k \in \mathbb{N} \rangle$ слабо сходится к F .

Положим, что все функции $F^{(n)}$ в последовательности $\langle F^{(n)}; n \in \mathbb{N} \rangle$ одновершинны. Тогда каждая из этих функций имеет, по крайней мере, одну вершинную точку $a^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$ так, что каждая из функций $F^{(n)}$ выпукла при $x < a^{(n)}$ и вогнута при $x > a^{(n)}$. Рассмотрим последовательность $\langle a^{(n)}; n \in \mathbb{N} \rangle$. Эта числовая последовательность ограничена. В самом деле, допустим противное, что в ней имеется неограниченно монотонно возрастающая подпоследовательность $\langle a^{(n_k)}; k \in \mathbb{N} \rangle$. Тогда выберем соответствующую подпоследовательность $\langle F^{(n_k)}; k \in \mathbb{N} \rangle$ функций распределения, слабо сходящуюся к F , причем каждый из членов этой подпоследовательности является выпуклой функцией при $x < a^{(n_k)}$. Так как последовательность $\langle a^{(n_k)}; k \in \mathbb{N} \rangle$ превосходит при достаточно больших k любое наперед заданное число a , то предельная функция F , согласно Лемме 4, является непрерывной и выпуклой во всех точках $x \leq a$, а так как a может быть выбрано произвольным образом, то во всех точках $x \in \mathbb{R}$. Но это невозможно, так как в этом случае F является выпуклой и ограниченной сверху на всей оси, что невозможно в силу Леммы 5. Точно так же разбирается случай, когда имеется неограниченно монотонно убывающая подпоследовательность $\langle a^{(n_k)}; k \in \mathbb{N} \rangle$. В этом случае, согласно той же лемме, не может существовать предельная функция распределения F всюду вогнутая на $\mathbb{R}$ и ограниченная снизу.

Так как последовательность $\langle a^{(n)}; n \in \mathbb{N} \rangle$ ограничена, то в ней найдется сходящаяся к некоторой точке $a \in \mathbb{R}$ подпоследовательность $\langle a^{(n_k)}; k \in \mathbb{N} \rangle$. Согласно выбору этой подпоследовательности, построим соответствующую ей подпоследовательность $\langle F^{(n_k)}; k \in \mathbb{N} \rangle$ функций распределения. Тогда, согласно сказанному выше, эта подпоследовательность сходится в слабом смысле к распределению F . Следовательно, для заданного $\varepsilon > 0$ найдется такое K , что при $k > K$ выполняется неравенство $|a^{(n_k)} - a| < \varepsilon$. Следовательно, при всех $k > K$ функции $F^{(n_k)}(x)$ непрерывны и выпуклы при $x \leq a - \varepsilon$, и

поэтому, согласно Лемме 4, при таких значениях x предельная функция $F(x)$ непрерывна и выпукла. Ввиду произвольности числа $\varepsilon > 0$, можно сделать вывод о том, что предельная функция $F(x)$ непрерывна и выпукла при всех $x < a$. По этой же причине, при всех $k > K$ функции $F^{(n_k)}(x)$ непрерывны и вогнуты при $x \leq a + \varepsilon$. Поэтому предельная функция $F(x)$ непрерывна и вогнута во всех точках $x > a + \varepsilon$ и, ввиду произвольности ε , получаем, что она непрерывна и вогнута при $x > a$. Следовательно, во-первых, $F(x)$ непрерывна при $x \neq a$. Во-вторых, предельное распределение F одновершинно и точка $x = a$ является его вершинной точкой.

Если эта вершинная точка не единственна, то есть имеется, по крайней мере, еще одна такая вершинная точка $a' \neq a$, то в этой вершинной точке функция $F(x)$, наверняка, непрерывна. Тогда, например, если $a' > a$ (либо $a' < a$), то функция F выпукла при всех $x < a'$ (вогнута при всех $x > a'$), и поэтому, согласно Лемме 1, она непрерывна в точке a . Если вершинная точка a единственна, то она может быть точкой разрыва функции F , причем, так как в этой точке у функции F существуют и конечны пределы справа и слева, то в ней эта функция имеет разрыв первого рода. ■

Теорема 8. Пусть $\langle \Delta_n; n \in \mathbb{N} \rangle$ — последовательность отрезков вершинных точек, каждый из которых соответствует одновершинной функции распределения $F^{(n)}$, входящей в состав последовательности $\langle F^{(n)}; n \in \mathbb{N} \rangle$ функций, которая стремится в слабом смысле к функции распределения F . Тогда множество Δ_∞ предельных точек всех сходящихся при $n \rightarrow \infty$ последовательностей $\langle a^{(n)}; n \in \mathbb{N} \rangle$ вершинных точек $a^{(n)} \in \Delta_n$ функций распределения $F^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$ совпадает с множеством множества Δ вершинных точек распределения F .

□ Для каждого $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим правую крайнюю точку $a_+^{(n)} = \inf \Delta_n$ каждого из отрезков Δ_n вершинных точек, соответствующего функции $F^{(n)}$ из последовательности в условии теоремы. Для каждого фиксированного номера $n \in \mathbb{N}$ функция $F^{(n)}$ выпукла при $x < a_+^{(n)}$. Пусть, далее, $a_- = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_+^{(n)}$. Выберем $\delta > 0$ и пусть при всех $n > N$ имеет место $|a_- - a_+^{(n)}| < \delta$. Поэтому при всех таких n каждая из функций $F^{(n)}$ выпукла при $x < a_- - \delta$. Следовательно, предельная функция F выпукла при $x < a_- - \delta$. Тогда, ввиду произвольности δ , функция F выпукла при $x < a_-$.

С другой стороны, любая точка $a_+^{(n)}$ является вершинной для функции $F^{(n)}$, и поэтому функция $F^{(n)}$ вогнута при $x > a_+^{(n)}$. По этой причине для точек $x > a_+ + \delta$ при всех $n > N$ функции $F^{(n)}$ являются вогнутыми. Следовательно, предельная функция F также является вогнутой при $x > a_- + \delta$. Опять, в силу произвольности δ , функция F вогнута при $x > a_-$. Таким образом, a_- является вершинной точкой функции F .

Точно такими же рассуждениями доказывается, что верхний предел $a_+ = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_+^{(n)}$ последовательности левых крайних точек отрезков Δ_n является вершинной точкой для предельной функции F . Так как $a_+ < a_-$, то, согласно Теореме 5, отрезок $\Delta = [a_+, a_-]$ состоит из вершинных точек распределения F . Если, теперь, $\langle a_n \in \Delta_n; n \in \mathbb{N} \rangle$ — любая сходящаяся последовательность вершинных точек распределений $F^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$, предел которой равен a , то для любого $n \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство $a_-^{(n)} \leq a^{(n)} \leq a_+^{(n)}$. Переходя отдельно к нижнему и верхнему пределам при $n \rightarrow \infty$ в этих неравенствах, находим

$$a_- \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} a^{(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{(n)} = a, \quad a_+ \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} a^{(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{(n)} = a,$$

то есть предельная точка $a \in \Delta$ и, следовательно, она является вершинной точкой. Ввиду произвольности выбора предельной точки a и определения множества Δ_∞ , убеждаемся, что справедливо включение $\Delta_\infty \subset \Delta$. С другой стороны, выбирая в качестве последовательности $\langle a_n \in \Delta_n; n \in \mathbb{N} \rangle$ поочередно последовательности $\langle a_-^{(n)} \in \Delta_n; n \in \mathbb{N} \rangle$ и $\langle a_+^{(n)} \in \Delta_n; n \in \mathbb{N} \rangle$, получаем, что их предельные точки a_- и a_+ обязательно принадлежат Δ_∞ и поэтому имеет место включение $\Delta_\infty \supset \Delta$. Следовательно, $\Delta_\infty = \Delta$. ■

Множество Δ вершинных точек предельного распределения F может быть одноточечным $\Delta = \{x_*\}$. В этом случае любая последовательность $\langle a^{(n)} \in \Delta_n; n \in \mathbb{N} \rangle$ сходится к x_* . При этом распределение F в точке x_* может иметь разрыв 1-го рода.

Следствие 6. Если множество Δ вершинных точек F не является одноточечным, то в каждой точке a этого множества распределение F обязательно непрерывно, и поэтому последовательность $\langle F^{(n)}(a); n \in \mathbb{N} \rangle$ сходится к $F(a)$. Кроме того, сходимость последовательности $\langle F^{(n)}; n \in \mathbb{N} \rangle$ распределений равномерна.

□ Утверждение следует из Леммы 6 и Теоремы 7. ■

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 8 [7]. Пусть $F(x)$ — одновершинная функция распределения. Тогда существует последовательность $\langle F^{(n)}; n \in \mathbb{N} \rangle$ одновершинных функций распределения, которая слабо сходится к F и все ее компоненты имеют абсолютно непрерывные производные $dF^{(n)}/dx$, $n \in \mathbb{N}$.

□ Прежде всего заметим, что если имеется какое-то линейно упорядоченное множество $\langle F_\delta; \delta \in [0, 1] \rangle$ распределений, слабо сходящееся при $\delta \rightarrow +0$ к F , и для каждого распределения F_δ этого множества имеется линейно упорядоченное множество $\langle F_{\delta, \varepsilon}; \varepsilon \in [0, 1] \rangle$ распределений, слабо сходящееся при $\varepsilon \rightarrow +0$ к F_δ и, наконец, для каждого распределения $F_{\delta, \varepsilon}$ имеется линейно упорядоченное множество $\langle F_{\delta, \varepsilon, \varepsilon'}; \varepsilon' \in [0, 1] \rangle$ распределений, слабо сходящееся при $\varepsilon' \rightarrow +0$ к $F_{\delta, \varepsilon}$, то из этих множеств распределений,

применяя диагональный процесс, всегда можно выбрать такую последовательность $\langle F^{(n)} = F_{\delta_n, \varepsilon_n, \varepsilon'_n}; n \in \mathbb{N} \rangle$ с соответствующими стремящимися к нулю последовательностями $\langle \delta_n; n \in \mathbb{N} \rangle$, $\langle \varepsilon_n; n \in \mathbb{N} \rangle$, $\langle \varepsilon'_n; n \in \mathbb{N} \rangle$ при $n \rightarrow \infty$, которая слабо стремится к распределению F при $n \in \mathbb{N}$. Таким образом, для доказательства леммы нужно построить указанные семейства.

Если одновершинная функция распределения F имеет разрыв в точке x_* , то всегда имеется последовательность $\langle F_\delta; n \in \mathbb{N} \rangle$ непрерывных одновершинных распределений, слабо сходящаяся к ней при $\delta \rightarrow +0$. Каждая из функций F_δ совпадает с F при $x \in [x_* + \delta, \infty) \cup (-\infty, x_* - \delta]$, а на отрезке $[x_* - \delta, x_* + \delta]$ представляется отрезком прямой, соединяющей точки $\langle x_* - \delta, F(x_* - \delta) \rangle$ и $\langle x_* + \delta, F(x_* + \delta) \rangle$. Рассмотрим фиксированное непрерывное распределение F_δ и построим на его основе для каждого $\varepsilon \in (0, 1]$ функцию

$$F_{\delta, \varepsilon}(x) = \varepsilon^{-1} \int_{x-\varepsilon}^x F_\delta(y) dy.$$

Она монотонно не убывает, так как

$$\frac{dF_{\delta, \varepsilon}(x)}{dx} = \varepsilon^{-1} (F_\delta(x) - F_\delta(x - \varepsilon)) \geq 0, \quad \varepsilon \in (0, 1),$$

ввиду монотонного неубывания F_δ . Каждая такая функция стремится к 1 при $x \rightarrow \infty$, так как, согласно теореме о среднем значении интеграла, имеем

$$F_{\delta, \varepsilon}(x) = \varepsilon^{-1} \int_{x-\varepsilon}^x F_\delta(y) dy = F(y(x)),$$

где срединная точка $y(x)$ подчинена ограничениям $x - \varepsilon < y(x) < x$ и поэтому

$$F(x - \varepsilon) \leq F(y(x)) \leq F(x).$$

Переходя к пределу $x \rightarrow \infty$, получаем $1 \leq \lim_{x \rightarrow \infty} F(y(x)) \leq 1$. Точно так же устанавливается, что $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_{\delta, \varepsilon}(x) = 0$. Следовательно, все функции $F_{\delta, \varepsilon}$ являются функциями распределения. Каждая из них непрерывно дифференцируема, то есть имеет непрерывную плотность

$$f_{\delta, \varepsilon} = F'_{\delta, \varepsilon}(x) = \varepsilon^{-1} (F_\delta(x) - F_\delta(x - \varepsilon)) \geq 0.$$

Каждое из этих распределений $F_{\delta, \varepsilon}$ поточечно стремится к F_δ при $\varepsilon \rightarrow +0$.

Определим на основе каждой из плотностей $f_{\delta, \varepsilon}$ следующие семейства плотностей распределения

$$f_{\delta, \varepsilon, \varepsilon'}(x) = \varepsilon'^{-1} \int_{x-\varepsilon'}^x f_{\delta, \varepsilon}(y) dy \geq 0, \quad \varepsilon' \in (0, 1),$$

$$\int_{\mathbb{R}} f_{\delta, \varepsilon, \varepsilon'}(x) dx = \varepsilon^{-1} \int_{\mathbb{R}} dx \int_{x-\varepsilon}^x f_{\delta, \varepsilon}(y) dy = \varepsilon^{-1} \int_{\mathbb{R}} f_{\delta, \varepsilon}(y) dy \int_y^{y+\varepsilon} dx = \int_{\mathbb{R}} f_{\delta, \varepsilon}(y) dy.$$

Эти плотности непрерывно дифференцируемы,

$$\frac{d}{dx} f_{\delta, \varepsilon, \varepsilon'}(x) = \varepsilon'^{-1} (f_{\delta, \varepsilon}(x) - f_{\delta, \varepsilon}(x - \varepsilon'))$$

и для каждой пары $\langle \delta, \varepsilon \rangle$ плотность $f_{\delta, \varepsilon, \varepsilon'}(x)$ стремится поточечно к $f_{\delta, \varepsilon}(x)$ при $\varepsilon' \rightarrow +0$. На основе плотностей $f_{\delta, \varepsilon, \varepsilon'}(x)$ определим соответствующие каждой из них функции распределения

$$F_{\delta, \varepsilon, \varepsilon'}(x) = \int_{-\infty}^x f_{\delta, \varepsilon, \varepsilon'}(y) dy.$$

Для каждой пары $\langle \delta, \varepsilon \rangle$ эти функции поточечно сходятся к функции распределения $F_{\delta, \varepsilon}$ при $\varepsilon' \rightarrow +0$, так как сходимости интеграла на нижнем пределе равномерная относительно ε' .

Таким образом, мы построили требуемое семейство функций распределения $F_{\delta, \varepsilon, \varepsilon'}$, линейно упорядоченное по каждому из параметров $\delta, \varepsilon, \varepsilon'$. Применив утверждение, приведенное в начале доказательства леммы, мы убеждаемся в правильности ее утверждения. ■

5. Сильно одновершинные распределения. Согласно Определению 2, если распределение V абсолютно непрерывно, то есть обладает плотностью v , то его свойство сильной одновершинности состоит в том, что для любого одновершинного распределения F функция

$$g(x) = (v * f)(x) \equiv \int_{\mathbb{R}} v(x - y) dF(y) \quad (15)$$

представляет плотность одновершинного распределения $G, g = dG/dx$. В частности, если F абсолютно непрерывно с плотностью f , то для любой такой плотности g , определяемая композицией плотности v с плотностью f ,

$$g(x) = (v * f)(x) \equiv \int_{\mathbb{R}} v(x - y)f(y)dy,$$

соответствует одновершинному распределению G .

Для применения сильно одновершинных распределений, при установлении одновершинности конкретных распределений, являются важными следующие их свойства.

Теорема 9. Множество сильно одновершинных распределений замкнуто относительно операции композиции.

□ Пусть $V_j, j \in \{1, 2\}$ — два сильно одновершинных распределения. Это означает, что для них, наряду с их одновершинностью, одновершинными являются композиции $V_j * F$ с любым одновершинным распределением F . Тогда из одновершинности распределения $V_2 * F$ следует одновершинность распределения $V_1 * (V_2 * F) = (V_1 * V_2) * F$, что означает сильную одновершинность одновершинного распределения $V_1 * V_2$. ■

Теорема 10. Предел V в смысле слабой сходимости последовательности $\langle V^{(n)}; n \in \mathbb{N} \rangle$ сильно одновершинных функций распределения является сильно одновершинным распределением.

□ Так как компоненты $V^{(n)}$ последовательности $\langle V^{(n)}; n \in \mathbb{N} \rangle$ — сильно одновершинные распределения, то для любого одновершинного распределения F последовательность $\langle V^{(n)} * F; n \in \mathbb{N} \rangle$ состоит из одновершинных распределений. Так как последовательность $\langle V^{(n)}; n \in \mathbb{N} \rangle$ сходится в слабом смысле к распределению V , то последовательность $\langle V^{(n)} * F; n \in \mathbb{N} \rangle$ также стремится в слабом смысле к функции распределения $V * F$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} F(x - y)dV^{(n)}(y) = \int_{\mathbb{R}} F(x - y)dV(y),$$

где переход под знаком интеграла обоснован второй теоремой Хелли (см., например, [5]). Согласно Теореме 6, это предельное распределение одновершинно. ■

Установление наличия свойства сильной одновершинности у данного распределения представляет собой самостоятельную задачу, решению которой посвящена настоящая работа. Ее решение несколько упрощается, если учесть следующее утверждение.

Теорема 11. Для того чтобы одновершинное распределение V с вершинной точкой a было сильно одновершинным, необходимо и достаточно чтобы одновершинной была функция распределения G , определяемая композицией (1), для любого распределения F с той же самой вершинной точкой.

□ Необходимость обладания распределением V свойством, указанным в условии теоремы, следует из Определения 2. Докажем достаточность этого условия. Пусть V — одновершинное распределение, обладающее указанным свойством. Пусть, далее, F — произвольное одновершинное распределение с вершинной точкой b . Тогда распределение $F(x - a + b)$ является одновершинным, согласно Лемме 7, так как получается трансляцией одновершинного распределения и обладает вершинной точкой a . Согласно Определению 2, распределение, получаемое посредством (1) из распределения $F(x - a + b)$,

$$G(x) = \int_{\mathbb{R}} V(x - y)dF(y - a + b)$$

одновершинно. Следовательно, производя трансляцией замену переменной в интеграле $y - a + b \Rightarrow y$,

$$G(x) = \int_{\mathbb{R}} V(x - a + b - y)dF(y)$$

получаем одновершинное распределение. Отсюда, снова применяя Лемму 7 о трансляции, получаем, что распределение

$$G(x + a - b) = \int_{\mathbb{R}} V(x - y)dF(y)$$

одновершинно. Таким образом, композиция V с любым одновершинным распределением F является одновершинным распределением. ■

Замечание 3. В связи с доказанным утверждением, в дальнейшем, если это не будет оговорено особо, предполагается, что у рассматриваемых распределений имеется вершинная точка $x_* = 0$. Тогда для описания класса всех сильно одновершинных распределений достаточно описать класс распределений, у которых имеется такая вершинная точка и проверять выполнения условия, определяющего свойство сильной одновершинности, только привлекая одновершинные распределения с вершиной в $x_* = 0$.

Примером сильно одновершинного распределения служит нормальное распределение.

Теорема 12. Пусть $F(x)$ — одновершинная функция распределения и

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)dy \quad (16)$$

есть функция распределения Гаусса. Тогда функция распределения

$$G(x) = F(x) * \Phi(x\nu^{1/2}) \equiv \int_{\mathbb{R}} \Phi((x-t)\nu^{1/2})dF(t) \quad (17)$$

одновершинна.

□ Подставим в формулу (17) явное выражение для функции распределения Гаусса $\Phi(x\nu^{1/2})$ в форме (16) и, далее, будем понимать этот интеграл более общо – как интеграл Лебега–Стилтьеса по произведению мер $dydF(t)$. Ввиду измеримости подынтегральной функции $\exp\left(-\nu(y-t)^2/2\right)$ относительно такой меры, допустима перестановка порядка интегрирований с заменой переменных. В результате таких операций получим

$$\begin{aligned} G(x) &= \sqrt{\frac{\nu}{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} dy \left[\int_{-\infty}^{x-t} \exp\left(-\frac{\nu y^2}{2}\right) dF(t) = \right. \\ &= \left. \sqrt{\frac{\nu}{2\pi}} \int_{-\infty}^x dy \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{\nu(y-t)^2}{2}\right) dF(t) \right]. \end{aligned} \quad (18)$$

Сначала рассмотрим положение, когда одновершинная функция распределения F имеет абсолютно непрерывную производную плотности $f = F'$. В этом случае композиция (17) дается формулой

$$G(x) = \sqrt{\frac{\nu}{2\pi}} \int_{-\infty}^x dy \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{\nu(y-t)^2}{2}\right) f(t) dt.$$

Так как интеграл сходится равномерно относительно параметра x при изменении его в любом конечном интервале, то, дифференцируя, найдем выражение для плотности $g(x) = dG(x)/dx$,

$$g(x) = \sqrt{\frac{\nu}{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{\nu(x-t)^2}{2}\right) f(t) dt.$$

Снова, ввиду равномерной сходимости интеграла относительно параметра x , используя предположение об абсолютной непрерывности функции f , то есть о существовании почти всюду по мере Лебега dt производной f' , дифференцированием по x , а затем преобразованием получившегося интеграла по частям, находим

$$\begin{aligned} g'(x) &= \sqrt{\frac{\nu}{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \left[\exp\left\{-\frac{\nu(x-t)^2}{2}\right\} \right]' f(t) dt = \\ &= \sqrt{\frac{\nu}{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left\{-\frac{\nu(x-t)^2}{2}\right\} f'(t) dt, \end{aligned} \quad (19)$$

где последний интеграл, в общем случае, нужно понимать в смысле Лебега.

Ввиду утверждения Теоремы 8 и сделанного в связи с ней Замечания 3, достаточно доказать сильную одновершинность распределения Гаусса в случае, если распределение F имеет вершинную точку $x_* = 0$. В таком случае при $t > 0$ почти всюду выполняется $f'(t) \leq 0$ и $f'(-t) \geq 0$. При этом достаточно доказать, что из условия $g'(x_*) = 0$, следует $g'(x_* + \delta) \leq 0$, если только $\delta > 0$. В самом деле, в таком случае у распределения G отсутствует точка a , в которой $g'(a) < 0$, $a < x_*$ и для которой имеется точка $b \in (a, x_*)$, в которой $g'(b) > 0$. Это связано с тем, что при реализации указанного положения, ввиду непрерывности функции g' , на интервале (a, b) найдется точка x_{**} , в которой $g'(x_{**}) = 0$ и, следовательно, мы приходим к противоречию.

Положим x_* удовлетворяет указанному условию,

$$\begin{aligned} g'(x_*) &= \sqrt{\frac{\nu}{2\pi}} \left[\int_0^\infty f'(t) \exp\left(-\frac{\nu(x_*-t)^2}{2}\right) dt + \right. \\ &+ \left. \int_0^\infty f'(-t) \exp\left(-\frac{\nu(x_*+t)^2}{2}\right) dt \right] = 0, \\ g'(x_* + \delta) &= \sqrt{\frac{\nu}{2\pi}} \exp\left(-\nu\delta(x_* + \delta/2)\right) \times \\ &\times \left(\int_0^\infty f'(t) \exp\left(-\frac{\nu(x_*-t)^2}{2}\right) e^{\nu t \delta} dt + \int_0^\infty f'(-t) \exp\left(-\frac{\nu(x_*+t)^2}{2}\right) e^{-\nu t \delta} dt \right). \end{aligned} \quad (20)$$

Воспользовавшись знакопостоянством функций $f'(t)$ и $f'(-t)$ на $[0, \infty)$, применим теорему о средних значениях функций $e^{vt\delta}$ и $e^{-vt\delta}$ (см., например, [8]), определив для них, соответственно, точки t_+ и t_- на $[0, \infty)$, в которых эти средние значения реализуются. В результате, находим

$$g'(x_* + \delta) = \sqrt{\frac{v}{2\pi}} \exp\left(-v\delta(x_* + \delta/2)\right) \times \\ \times \left(e^{vt_+\delta} \int_0^\infty f'(t) \exp\left(-\frac{v}{2}(x_* - t)^2\right) dt + e^{-vt_-\delta} \int_0^\infty f'(-t) \exp\left(-\frac{v}{2}(x_* + t)^2\right) dt\right) \leq 0,$$

где неравенство возникает в связи с тем, что, с учетом (20), сумма интегралов в отсутствии множителей $e^{\pm vt_\pm\delta}$ равна нулю.

Перейдем к доказательству общего случая. Согласно утверждениям Теоремы 6 и Леммы 8, для любого одновершинного распределения F имеется слабо сходящаяся к нему последовательность $\langle F^{(n)}; n \in \mathbb{N} \rangle$ одновершинных распределений, которые имеют непрерывно дифференцируемые плотности $f^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$. Для каждой из этих функций, согласно доказательству, приведенному выше, композиция $\Phi(v^{1/2}x) * F^{(n)}(x)$ представляет собой одновершинное распределение при любом $v > 0$. Тогда предельное в слабом смысле распределение $\Phi(v^{1/2}x) * F$ последовательности $\langle \Phi(v^{1/2}x) * F^{(n)}(x); n \in \mathbb{N} \rangle$ распределений также является одновершинным, согласно Теореме 6. Ввиду произвольности функции распределения $F(x)$, согласно Определению 2, функция распределения $\Phi(v^{1/2}x)$ сильно одновершинна при любом $v > 0$. ■

6. Достаточный признак сильной одновершинности. Установим, следуя конструкции работы [8], достаточное условие сильной одновершинности данного распределения V . Докажем, что справедлива следующая

Теорема 13 [2]. *Для того, чтобы одновершинная функция распределения V была сильно одновершинной, достаточно, чтобы функция V была абсолютно непрерывной, а функция $\ln V'(x)$ была вогнутой функцией на множестве $\mathcal{G}(V)$.*

□ Пусть V удовлетворяет условиям теоремы и $\mathcal{G}(V) = \mathbb{R}$. Для доказательства утверждения теоремы выберем, в соответствии с Теоремой 11, произвольную одновершинную функцию распределения F с вершинной точкой $x_* = 0$. Будем считать функцию F двукратно непрерывно дифференцируемой так, что она обладает непрерывно дифференцируемой плотностью $f = F'$. Это не ограничивает общности рассуждений, так как в противном случае можно вместо F рассмотреть $F(x) * \Phi(v^{1/2}x)$, $v > 0$, и, после установления одновершинности композиции $V(x) * (F(x) * \Phi(v^{1/2}x))$, перейти к пределу $v \rightarrow \infty$. Так как предельной функцией при таком переходе является распределение $V * F$, то, воспользовавшись Теоремой 7, тем самым мы докажем, что $V * F$ — одновершинная функция распределения.

Обозначим $V * F = G$, где распределение G обладает непрерывно дифференцируемой плотностью $g = G'$. Точно так же, как и при доказательстве Теоремы 12, нам достаточно доказать, что если $g'(a) = 0$, то для $x > a$ имеет место $g'(x) \leq 0$. Пусть $g'(a) = 0$ и $\delta > 0$. Тогда, воспользовавшись теоремой о среднем значении рассматриваемых интегралов, что допустимо вследствие постоянства знаков их подынтегральных выражений, получим следующее выражение для $g'(a + \delta)$,

$$g'(a + \delta) = \int_0^\infty f'(t)V'(a - t) \frac{V'(a + \delta - t)}{V'(a - t)} dt + \int_0^\infty f'(-t)V'(a + t) \frac{V'(a + \delta + t)}{V'(a + t)} dt = \\ = \frac{V'(a + \delta - t_+)}{V'(a - t_+)} \int_0^\infty f'(t)V'(a - t) dt + \frac{V'(a + \delta + t_-)}{V'(a + t_-)} \int_0^\infty f'(-t)V'(a + t) dt,$$

где введены обозначения $t_\pm$ для точек, в которых реализуются средние значения функций $V'(a + \delta - t)/V'(a - t)$, $V'(a + \delta + t)/V'(a + t)$ от t и которые зависят от x .

Так как $f'(t) \leq 0$ при $t > 0$, то для выполнимости требуемого неравенства $g'(a + \delta) \leq 0$ достаточно доказать, что при любом значении числа a и при всех неотрицательных t_+ , t_- и $\delta > 0$ имеет место неравенство

$$\frac{V'(a + \delta - t_+)}{V'(a - t_+)} \geq \frac{V'(a + \delta + t_-)}{V'(a + t_-)}. \quad (21)$$

При его выполнимости требуемое неравенство $g'(a + \delta) \leq 0$ является следствием условия

$$g'(a) = \int_0^\infty f'(t)V'(a - t) dt + \int_0^\infty f'(-t)V'(a + t) dt = 0.$$

Положим, $a - t_+ = a_-$, $a + t_- = a_+$. Допустим, существуют такие $t_\pm \geq 0$ и $\delta > 0$, для которых имеет место неравенство

$$\frac{V'(a + \delta - t_+)}{V'(a - t_+)} < \frac{V'(a + \delta + t_-)}{V'(a + t_-)}.$$

Так как обе его части положительны, то, логарифмируя их, получим неравенство

$$H(a_- + \delta) - H(a_-) < H(a_+ + \delta) - H(a_+), \quad (22)$$

где функция $\ln V'(\cdot) = H(\cdot)$ вогнута. Для доказательства достаточности условия, сформулированного в теореме, положим, что (22) имеет место при произвольном выборе чисел $a_{\pm}$, которые подчинены только условию $a_+ > a_-$. Тогда из (22) следует, что функция H должна быть монотонно возрастающей. Однако это, согласно утверждению Леммы 5, противоречит ее вогнутости. Полученное противоречие доказывает справедливость неравенства (21) и, следовательно, справедливость утверждения теоремы в случае, когда $\mathcal{G}(V) = \mathbb{R}$.

Пусть теперь $\mathcal{G}(V) \neq \mathbb{R}$. Тогда $\mathcal{G}(V)$ представляет собой, согласно Следствию 5, отрезок на $\mathbb{R}$ конечный или бесконечный. Покажем, что всегда существует последовательность $\langle V^{(n)}; n \in \mathbb{N} \rangle$ сильно одновершинных функций, слабо сходящаяся к распределению V с носителем $\mathcal{G}(V) = \mathbb{R}$.

На основе вогнутой на отрезке $\mathcal{G}(V)$ функции $H = \ln V'$, для любого номера $m \in \mathbb{N}$ определим функции H_m , продолжив H на $\mathbb{R}$, дополняя ее график на $\mathcal{G}(V)$ прямолинейными лучами $\mp m(x - c_{\pm}) + d_{\pm}(m)$. Здесь c_+ и c_- — правая и левая точки отрезка $\mathcal{G}(V)$, соответственно, в том случае если они конечны, а числа $d_{\pm}(m)$ соответственно определяются из условия, что вершины лучей должны совпадать с точками $\langle c_{\pm}, 0 \rangle$ на оси переменной x . Причем, в случае, когда отрезок $\mathcal{G}(V)$ полубесконечный справа или слева, то соответствующий луч не используется. Функции H_m непрерывны на $\mathbb{R}$.

Рассмотрим последовательность $\langle H_m; m \geq M \rangle$, где число M определяется условием $M \geq \max\{|D_+H(c_+)|, |(D_-H)(c_-)|\}$. При таком ограничении чисел m эта последовательность состоит из вогнутых функций. На ее основе введем последовательность $\langle V_m(x) = \int_{-\infty}^x \exp[H_m(y)] dy; m \geq M \rangle$ непрерывно дифференцируемых функций, которая сходится в слабом смысле к распределению V при $m \rightarrow \infty$, так как в точках $y \in C(V)$ функции $H_m(y)$ стремятся к $-\infty$ при $m \rightarrow \infty$ равномерно по $|y| > A$ при фиксированном $A > 0$. Это следует из того, что при $y < c_-$, если носитель $\mathcal{G}(V)$ ограничен снизу, то выполняется $H_m(y) < m(y - c_-)$, а при $y > c_+$, если носитель $\mathcal{G}(V)$ ограничен сверху, то выполняется $H_m(y) < -m(y - c_+)$. Множество $\mathcal{G}(V_m)$ для каждой из этих функций распределения совпадает с $\mathbb{R}$, и поэтому каждая из них является сильно одновершинной, в силу проведенного выше доказательства. Ввиду сходимости последовательности $\langle V_m(x); m \geq M \rangle$ в слабом смысле при $m \rightarrow \infty$ к функции распределения V , согласно Теореме 11, предельное распределение V также сильно одновершинно. ■

7. Заключение. Теорема 13 представляет собой довольно сильный результат, полученный в [2]. Однако ввиду доказанного в разд. 7 утверждения, он представляет только лишь достаточное условие сильной одновершинности, которое не является необходимым, вопреки утверждению той же работы. В этой связи представляют интерес дальнейшие исследования класса сильно одновершинных распределений с целью ослабления достаточного признака, сформулированного в этой теореме.

Заметим также, что если ограничиться рассмотрением только распределений с носителем на полуоси $[0, \infty)$, отдельное изучение которых очень важно с точки зрения приложений, то возможна иная постановка задачи о сохранении одновершинности распределений в результате композиций с другими распределениями и, соответственно, несколько видоизмененное определение сильной одновершинности. А именно, одновершинное распределение V с носителем на полуоси $[0, \infty)$ назовем сильно одновершинным, если его композиция (1) с любым одновершинным распределением F на $[0, \infty)$ снова является одновершинным распределением. При таком подходе к понятию сильной одновершинности одновершинность композиции $V * F$ должна проверяться на более узком классе распределений F . Поэтому возникает задача о нахождении эффективно проверяемых достаточных (и необходимых) условий для того, чтобы распределение V обладало описанным выше свойством, которые в этом случае могут быть существенно ослаблены по сравнению с теми, которые представляются Теоремой 13.

Наконец, заметим, что изучаемое в настоящей работе понятие сильной одновершинности было введено для решения задачи об установлении одновершинности распределений, связанных тем или иным образом с суммами независимых случайных величин. Однако имеется класс распределений, который связан с классической теоретико-вероятностной проблемой — изучение распределений экстремумов выборок независимых случайных величин, для которых установление условий, при которых они являются одновершинными, также важно, и для решения этой задачи приходится привлекать совершенно иной математический подход (см., например, [5], [9]).

References

1. Кас М. Mathematical mechanisms of phase transitions / Statistical Physics Phase Transitions and Superfluidity ed. M.Chretliln at al, Vol 1, 2 / New York: Gordon and Beach Science Publishers, 1968.
2. Ibragimov I. A. On the Composition of Unimodal Distributions. – Theory of Probability and its Applications. – 1956. – 1;2. – P. 255–260.
3. Rudin W. Principles of Mathematical Analysis / New York: McGraw-Hill Book Company, 1964. – 320 p.

4. As Lebesgue-Stieljes Integral /Leizig: G. Teubner Verlagsgesellschaft, 1956. – 328 p.
5. Virchenko Yu. P., Novoseltsev A. D. Unimodality of probability distributions for sample maximums of the Erlang independent random values.– Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics & Physics. – 2019. – 51(3). – С. 366–373.
6. Kolmogorov A. N., Fomin S.V. Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis 2 / Albany, New York: Graylock Press, 1961. – 148 p.
7. Gnedenko B. V., Kolmogorov A. N. Limit Distributions For Sums Of Independent Random Variables / Cambridge: Addison-Wensley Publishing Company, Inc., 1954. – 284 p.
8. Zorich V. A. Mathematical Analysis I/ New York: Springer-Verlag, 2002. – 552 p.
9. Virchenko Yu. P., Novoseltsev A. D. Probability distributions unimodality of finite sample extremes of independent Erlang random variables. – Journal of Physics: Conf. Series. – 2020. – 1479. – 012104. doi:10.1088/1742-6596/1479/1/012104.

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 23.06.2025

Received June 23, 2025

Поступила после рецензирования 25.08.2025

Revised August 25, 2025

Принята к публикации 29.08.2025

Accepted August 29, 2025

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Вирченко Юрий Петрович – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры программного обеспечения вычислительной техники и автоматизированных систем, Белгородский государственный технологический университет им. В. Г. Шухова, г. Белгород, Россия

Теволде Амануэль Мехари – аспирант, Белгородский государственный национальный исследовательский университет, г. Белгород, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Yuri P. Virchenko – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Professor of the Department of Software for Computing Equipment and Automated Systems, Belgorod State Technological University named after V. G. Shukhov, Belgorod, Russia

Amanuel M. Tewolde – Graduate Student, Belgorod National Research University, Belgorod, Russia

[К содержанию](#)