Прикладная математика & Физика, 2020, том 52, №4. С. 246–254.

УДК 517.95 DOI 10.18413/2687-0959-2020-52-4-246-254
MSC 35A01, 35A02

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ ЛАВРЕНТЬЕВА – БИЦАДЗЕ С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ГЕРАСИМОВА – КАПУТО

О. Х. Масаева

(*Статья представлена членом редакционной коллегии А. В. Глушаком*)

Институт прикладной математики и автоматизации Кабардино-Балкарского научного центра РАН,
г. Нальчик, 360000, Россия

E-mail: olesya.masaeva@yandex.ru

Аннотация. Исследована задача Дирихле для дифференциального уравнения в частных производных второго порядка с дробной производной по временной переменной в прямоугольной области. В случае если порядок дробного дифференцирования равен двум, рассматриваемое уравнение обращается в уравнение Лаврентьева – Бицадзе. Рассмотрены вопросы доказательства существования и единственности регулярного решения.

Ключевые слова: функция типа Миттаг – Леффлера, дробная производная Герасимова – Капуто, уравнение Лаврентьева – Бицадзе, критерий единственности решения.

Для цитирования: Масаева О. Х., 2020. Задача Дирихле для обобщенного уравнения Лаврентьева – Бицадзе с дробной производной Герасимова – Капуто. Прикладная математика & Физика. 52(4): 246–254.
DOI 10.18413/2687-0959-2020-52-4-246-254.

DIRICHLET PROBLEM FOR THE GENERALIZED LAVRENT'EV-BITSADZE EQUATION WITH THE GERASIMOV-CAPUTO DERIVATIVE

O. Kh. Masaeva

(*Article submitted by a member of the editorial board A. V. Glushak*)

Institute for Applied Mathematics and Automation of Kabardino-Balkar Scientific Center of RAS,
Nalchik, 360000, Russia
E-mail: olesya.masaeva@yandex.ru,
Received November 23, 2020

Abstract. Dirichlet problem for a second-order linear differential equation with a fractional derivative in a rectangular domain is investigated. If the order of fractional differentiation is equal to two, the considered equation turns into the Lavrent'ev-Bitsadze equation. The questions of a proof of an existence and uniqueness of a regular solution are considered.

Key words: Mittag-Leffler type function, Gerasimov-Caputo fractional derivative, Lavrent'ev-Bitsadze equation, solution uniqueness criterion

For citation: O. Kh. Masaeva. 2020. Dirichlet Problem for the Generalized Lavrent'ev-Bitsadze Equation with the Gerasimov-Caputo Derivative. Applied Mathematics & Physics. 52(4): 246–254 (in Russian).
DOI 10.18413/2687-0959-2020-52-4-246-254.

1. Введение. Рассмотрим в области $D = \{(x, y) : 0 < x < r, a < y < b\}$, $a < 0$, $b > 0$, уравнение

$$\mathrm{L}u(x,y) \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \operatorname{sign} y \, \frac{\partial^\alpha}{\partial y^\alpha}\right) u(x,y) = 0, \tag{1}$$

где $1 < \alpha < 2$, $\frac{\partial^\alpha}{\partial y^\alpha} = \partial^\alpha_{0y}$ означает операцию дифференцирования (в смысле Герасимова – Капуто) порядка α по переменной y; $\partial^\alpha_{0s} g(s) = D^{\alpha-2}_{0s} \frac{d^2}{ds^2} g(s)$, D^δ_{0s} – оператор дробного интегро-дифференцирования Римана-Лиувилля порядка δ с началом в точке 0 [5, с. 9].

Как вытекает из определения операторов дробного дифференцирования в случае если $\alpha = 2$, уравнение (1) совпадает с уравнением Лаврентьева – Бицадзе

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \operatorname{sign} y \, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Дифференциальные уравнения в частных производных дробного порядка лежат в основе математического моделирования различных физических процессов и явлений окружающей среды, имеющих фрактальную природу [5], [1].

Уравнения в частных производных дробного порядка, не превосходящего двух, исследовались в работах [15], [9], [14], [12] и др. В указанных работах в основном изучались диффузионно-волновые уравнения. Более подробную библиографию можно найти в работах [9] и [14].

В работах [16] и [17] исследовалось уравнение

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}u - \frac{\partial^\gamma}{\partial y^\gamma}u_y = 0, \quad 0 < \gamma < 1,$$

соответствующее в случае, когда $\gamma = 1$ уравнению смешанного типа в рассматриваемой области.

Задача Дирихле для модельного уравнения смешанного типа и более общего уравнения в ограниченных прямоугольных областях была исследована в работах [13] и [10].

Данная работа посвящена исследованию вопросов доказательства существования и единственности решения задачи Дирихле для уравнения (1) в области D.

2. Постановка задачи. Регулярным решением уравнения (1) в области D назовем функцию $u = u(x,y)$ такую, что $u \in C(\bar{D}) \cap C^1(D)$, $u_{xx}, \partial_{0y}^{\alpha}u \in C(D^- \cup D^+)$ и удовлетворяющую уравнению (1) во всех точках $(x,y) \in D^- \cup D^+$;

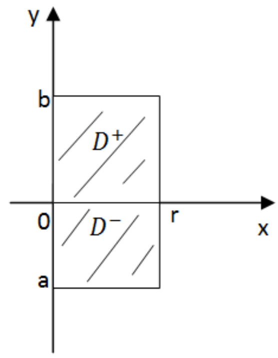

Рис. 1. $D^- = D \cap \{y < 0\}$, $D^+ = D \cap \{y > 0\}$
Fig. 1. $D^- = D \cap \{y < 0\}$, $D^+ = D \cap \{y > 0\}$

Задача. *Найти в области D регулярное решение уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям*

$$u(0,y) = 0, \quad u(r,y) = 0, \quad a < y < b, \tag{2}$$

$$u(x,a) = \varphi(x), \quad u(x,b) = \psi(x), \quad 0 < x < r, \tag{3}$$

где $\varphi(x)$, $\psi(x)$ – заданные непрерывные функции на отрезке $[0,r]$, $\varphi(0) = \varphi(r) = 0$, $\psi(0) = \psi(r) = 0$.

3. Функция типа Миттаг – Леффлера. Рассмотрим функцию типа Миттаг – Леффлера [2, с. 117]:

$$E_{\beta,\mu}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\beta k + \mu)}, \ \beta > 0, \mu \in \mathbb{C}. \tag{4}$$

Напомним [2, с. 142], что функция (4) на вещественной оси, если

$$0 < \beta < 2,$$

может иметь только конечное число нулей;

В частности, если

$$1 < \beta < 2, \quad \mu \geq \frac{3}{2}\beta,$$

функция (4) не имеет вещественных нулей [9]. В случае, когда

$$\frac{5}{3} \leq \beta < 2, \quad \mu = 2,$$

она имеет не менее двух нулей [7].

4. Функция $N_{\xi,\eta}(\lambda)$. Обозначим через

$$N_{\xi,\eta}(\lambda) = \xi E_{\alpha,2}(-\lambda\xi^\alpha)E_{\alpha,1}(\lambda\eta^\alpha) - \eta E_{\alpha,2}(\lambda\eta^\alpha)E_{\alpha,1}(-\lambda\xi^\alpha),$$

где $\xi, \eta, \lambda > 0$.

Лемма. *Пусть*

$$h = \max\{t : E_{\alpha,2}(-t)E_{\alpha,1}(-t) = 0, t > 0\}. \tag{5}$$

Если

$$\xi^\alpha \geq \frac{h}{\lambda}, \tag{6}$$

то

$$N_{\xi,\eta}(\lambda) > 0.$$

Доказательство. Поскольку

$$E_{\alpha,1}(\lambda\eta^\alpha) > 0, \; \eta E_{\alpha,2}(\lambda\eta^\alpha) > 0, \tag{7}$$

для всех $\lambda, \xi, \eta > 0$, то рассмотрим поведение функций $E_{\alpha,1}(-\lambda\xi^\alpha)$ и $\xi E_{\alpha,2}(-\lambda\xi^\alpha)$ для λ и ξ, удовлетворяющих условию (6). Воспользуемся асимптотическим разложением функции (4) для больших значений $|z|$: при $|\arg z| \leq \rho\pi$

$$E_{\beta,\mu}(z) = 1/\beta z^{(1-\mu)/\beta} e^{z^{1/\beta}} -$$
$$-\sum_{k=1}^{n} \frac{z^{-k}}{\Gamma(\mu-\beta k)} + O\left(\frac{1}{|z|^{n+1}}\right), \tag{8}$$

и при $\pi \geq |\arg z| \geq \rho\pi$

$$E_{\beta,\mu}(z) = -\sum_{k=1}^{n} \frac{z^{-k}}{\Gamma(\mu-\beta k)} + O\left(\frac{1}{|z|^{n+1}}\right), \tag{9}$$

где $\beta \in (0,2)$, $\rho \in (\beta/2, \min\{1,\beta\})$ [2, с. 134]. По формуле (9) при больших значениях $\lambda\xi^\alpha$:

$$\xi E_{\alpha,2}(-\lambda\xi^\alpha) = \frac{\lambda^{-1}\xi^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} + O(\lambda^{-2}).$$

Отсюда имеем $\lim\limits_{\lambda\to\infty} \xi E_{\alpha,2}(-\lambda\xi^\alpha) = 0+$. Значит, для всех $\lambda\xi^\alpha > \max\{t : E_{\alpha,2}(-t) = 0\}$, имеем $\xi E_{\alpha,2}(-\lambda\xi^\alpha) > 0$. Аналогично, из (9) заключаем

$$E_{\alpha,1}(-\lambda\xi^\alpha) = \frac{\lambda^{-1}\xi^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} + O(\lambda^{-2}),$$

и $\lim\limits_{\lambda\to\infty} E_{\alpha,1}(-\lambda\xi^\alpha) = 0-$. Тогда $E_{\alpha,1}(-\lambda\xi^\alpha) < 0$ для всех $\lambda\xi^\alpha > \max\{t : E_{\alpha,1}(-t) = 0\}$. Таким образом, имеем

$$\xi E_{\alpha,2}(-\lambda\xi^\alpha) \geq 0, \quad E_{\alpha,1}(-\lambda\xi^\alpha) \leq 0, \tag{10}$$

для λ и ξ, удовлетворяющих условию (6). Причем функции (10) одновременно в ноль не обращаются. Следовательно, из формул (7) и (10) имеем, $N_{\xi,\eta}(\lambda) > 0$, что и требовалось доказать.

5. Существование решения. Для сформулирования теоремы существования поставленной выше задачи, нам понадобится класс функций $f(x)$, удовлетворяющих условиям Дирихле в промежутке (c,d), т. е. функций, которые имеют конечное число разрывов первого рода в этом промежутке; и для которых, кроме того, промежуток (c,d) можно разбить на конечное число таких промежутков, в каждом из которых $f(x)$ изменяется монотонно [11, с. 440].

Теорема 1. *Если функции $\varphi(x) \in C^2[0,r], \psi(x) \in C[0,r]$ имеют производные $\varphi'''(x)$ и $\psi'(x)$ соответственно, удовлетворяющие условиям Дирихле в промежутке $(0,r)$, выполняются условия согласования $\varphi''(0) = \varphi''(r) = 0$, и*

$$N_{|a|,b}(\lambda_n) \neq 0, \quad \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{r}\right)^2, \tag{11}$$

то существует регулярное решение задачи (1)–(3).

Доказательство. Предположим, что мы знаем след решения $u(x,y)$ на линии $y = 0$ и

$$u(x,0) = \tau(x), \quad 0 < x < r. \tag{12}$$

$\tau(x)$ – некоторая непрерывная на отрезке $[0,r]$ функция. Тогда в области D^+ искомая функция удовлетворяет уравнению

$$u_{xx}(x,y) + \partial_{0y}^\alpha u(x,y) = 0, \tag{13}$$

и краевым условиям

$$u(0,y) = 0, \quad u(r,y) = 0, \quad 0 < y < b, \tag{14}$$

$$u(x,0) = \tau(x), \quad u(x,b) = \psi(x), \quad 0 < x < r. \tag{15}$$

Напомним [3], что решение этой задачи имеет вид:

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\Big[\psi_n\frac{yE_{\alpha,2}(\lambda_n y^\alpha)}{bE_{\alpha,2}(\lambda_n b^\alpha)}+$$

$$+\tau_n\frac{bE_{\alpha,2}(\lambda_n b^\alpha)E_{\alpha,1}(\lambda_n y^\alpha)-yE_{\alpha,2}(\lambda_n y^\alpha)E_{\alpha,1}(\lambda_n b^\alpha)}{bE_{\alpha,2}(\lambda_n b^\alpha)}\Big]\sin\sqrt{\lambda_n}x \tag{16}$$

где $\tau_n=\frac{2}{r}\int\limits_0^r\tau(x)\sin\sqrt{\lambda_n}x\,dx,\quad \psi_n=\frac{2}{r}\int\limits_0^r\psi(x)\sin\sqrt{\lambda_n}x\,dx.$

В области D^- функция $u(x,y)$ будет удовлетворять уравнению

$$u_{xx}(x,y)-\partial_{0y}^{\alpha}u(x,y)=0, \tag{17}$$

и условиям

$$u(0,y)=0,\quad u(r,y)=0,\quad a<y<0, \tag{18}$$

$$u(x,a)=\varphi(x),\quad u(x,0)=\tau(x),\quad 0<x<r. \tag{19}$$

Функция

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\varphi_n\frac{\sin_\alpha(\lambda_n^{1/\alpha}|y|)}{\sin_\alpha(\lambda_n^{1/\alpha}|a|)}+\tau_n\left(\cos_\alpha(\lambda_n^{1/\alpha}|y|)-\frac{\sin_\alpha(\lambda_n^{1/\alpha}|y|)}{\sin_\alpha(\lambda_n^{1/\alpha}|a|)}\cos_\alpha(\lambda_n^{1/\alpha}|a|)\right)\right]\sin\sqrt{\lambda_n}\,x, \tag{20}$$

есть искомое решение задачи (17)–(19) [4], φ_n – коэффициенты Фурье функции $\varphi(x)$ на отрезке $[0,r]$;

$$\sin_\gamma(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{\gamma k+1}}{\Gamma(\gamma k+2)},\quad \cos_\gamma(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{\gamma k}}{\Gamma(\gamma k+1)}$$

это обобщенные тригонометрические функции по терминалогии Нахушева А. М. [5, с. 238].

Примем во внимание, что по условию исследуемой задачи у нас должно быть

$$u_y(x,0+)=u_y(x,0-). \tag{21}$$

Из формулы (16), дифференцируя почленно по y, найдем

$$u_y(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\Big[\psi_n\frac{E_{\alpha,1}(\lambda_n y^\alpha)}{bE_{\alpha,2}(\lambda_n b^\alpha)}+$$

$$+\tau_n\frac{bE_{\alpha,2}(\lambda_n b^\alpha)\lambda_n y^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda_n y^\alpha)-E_{\alpha,1}(\lambda_n y^\alpha)E_{\alpha,1}(\lambda_n b^\alpha)}{bE_{\alpha,2}(\lambda_n b^\alpha)}\Big]\sin\sqrt{\lambda_n}x. \tag{22}$$

Отсюда при $y=0$ имеем

$$u_y(x,0+)=\sum_{n=1}^{\infty}\Big[\frac{\psi_n}{bE_{\alpha,2}(\lambda_n b^\alpha)}-\tau_n\frac{E_{\alpha,1}(\lambda_n b^\alpha)}{bE_{\alpha,2}(\lambda_n b^\alpha)}\Big]\sin\sqrt{\lambda_n}x. \tag{23}$$

Аналогично дифференцированием по y из (20) получим

$$u_y(x,0-)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\varphi_n}{|a|E_{\alpha,2}(-\lambda_n|a|^\alpha)}-\tau_n\frac{E_{\alpha,1}(-\lambda_n|a|^\alpha)}{|a|E_{\alpha,2}(-\lambda_n|a|^\alpha)}\right]\sin\sqrt{\lambda_n}x. \tag{24}$$

Из равенств (23) и (24) с учетом соотношения (21) и условия (11) получим

$$\tau_n=\psi_n\frac{|a|E_{\alpha,2}(-\lambda_n|a|^\alpha)}{N_{|a|,b}(\lambda_n)}-\varphi_n\frac{bE_{\alpha,2}(\lambda_n b^\alpha)}{N_{|a|,b}(\lambda_n)}. \tag{25}$$

Подставляя (25) в (16) и (20), получим искомое решение соответственно в области D^+ и D^-

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n^+(x,y), \tag{26}$$

$$u_n^+(x,y)=\psi_n\left(S_n(y)+\frac{|a|E_{\alpha,2}(-\lambda_n|a|^\alpha)}{N_{|a|,b}(\lambda_n)}C_n(y)\right)+$$

$$+\varphi_n \frac{bE_{\alpha,2}(\lambda_n b^\alpha)}{N_{|a|,b}(\lambda_n)} C_n(y)\Big] \sin\sqrt{\lambda_n} x, \tag{27}$$

$$S_n(y) = \frac{yE_{\alpha,2}(\lambda_n y^\alpha)}{bE_{\alpha,2}(\lambda_n b^\alpha)}, \quad C_n(y) = E_{\alpha,1}(\lambda_n y^\alpha) - \frac{yE_{\alpha,2}(\lambda_n y^\alpha)}{bE_{\alpha,2}(\lambda_n b^\alpha)} E_{\alpha,1}(\lambda_n b^\alpha),$$

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n^-(x,y), \tag{28}$$

$$u_n^-(x,y) = \left[\varphi_n \left(\frac{\sin_\alpha(\lambda_n^{1/\alpha}|y|)}{\sin_\alpha(\lambda_n^{1/\alpha}|a|)} - \frac{bE_{\alpha,2}(\lambda_n b^\alpha)}{N_{|a|,b}(\lambda_n)}\left(\cos_\alpha(\lambda_n^{1/\alpha}|y|) - \frac{\sin_\alpha(\lambda_n^{1/\alpha}|y|)}{\sin_\alpha(\lambda_n^{1/\alpha}|a|)}\cos_\alpha(\lambda_n^{1/\alpha}|a|)\right)\right) + \right.$$

$$\left. +\psi_n \frac{|a|E_{\alpha,2}(-\lambda_n |a|^\alpha)}{N_{|a|,b}(\lambda_n)}\left(\cos_\alpha(\lambda_n^{1/\alpha}|y|) - \frac{\sin_\alpha(\lambda_n^{1/\alpha}|y|)}{\sin_\alpha(\lambda_n^{1/\alpha}|a|)}\cos_\alpha(\lambda_n^{1/\alpha}|a|)\right)\right] \sin\sqrt{\lambda_n}\, x. \tag{29}$$

Далее покажем сходимость рядов (54) и (28). Напомним, что справедливы оценки

$$0 \le S_n(y) \le 1, \quad 0 \le C_n(y) \le 1. \tag{30}$$

Доказательство можно найти в работе [3]. Из асимптотических представлений (8), (9) функции типа Миттаг – Леффлера имеем

$$N_{|a|,b}(\lambda_n) = O(\lambda_n^{-1} e^{\lambda_n^{\frac{1}{\alpha}} b}), \quad n \to \infty, \tag{31}$$

$$\frac{|a|E_{\alpha,2}(-\lambda_n|a|^\alpha)}{N_{|a|,b}(\lambda_n)} = O(e^{-\lambda_n^{\frac{1}{\alpha}} b}), \quad \frac{bE_{\alpha,2}(\lambda_n b^\alpha)}{N_{|a|,b}(\lambda_n)} = O(\lambda_n^{1-\frac{1}{\alpha}}), \quad n \to \infty, \tag{32}$$

$$\lambda_n^{1-1/\alpha} \sin_\alpha(\lambda_n^{1/\alpha}|y|) = \lambda_n |y| E_{\alpha,2}(-\lambda_n |y|^\alpha) = |y|^{1-\alpha}/\Gamma(2-\alpha) + O(\lambda_n^{-1}|y|^{1-2\alpha}), \quad \lambda_n |y|^\alpha \to \infty, \tag{33}$$

$$|\cos_\alpha(\lambda_n^{1/\alpha}|y|)| \le M_1/(1+\lambda_n|y|^\alpha), \quad |\lambda_n^{-1/\alpha}\sin_\alpha(\lambda_n^{1/\alpha}|y|)| \le |y|M_2/(1+\lambda_n|y|^\alpha). \tag{34}$$

Из соотношения (33) при $y = a$ получаем, что $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n^{1-1/\alpha} \sin_\alpha(\lambda_n^{1/\alpha}|a|) = |a|^{1-\alpha}/\Gamma(2-\alpha) > 0$. Следовательно, в силу условия (11) выполняется неравенство

$$|a|^{-1}\lambda_n^{1-1/\alpha} \sin_\alpha(\lambda_n^{1/\alpha}|a|) > C,$$

в котором C– положительная постоянная. Таким образом, с учетом (34) имеем

$$\left|\frac{\sin_\alpha(\lambda_n^{1/\alpha}|y|)}{\sin_\alpha(\lambda_n^{1/\alpha}|a|)}\right| \le \frac{|y|M\lambda_n}{1+\lambda_n|y|^\alpha}, \quad \left|\cos_\alpha(\lambda_n^{1/\alpha}|y|) - \frac{\sin_\alpha(\lambda_n^{1/\alpha}|y|)}{\sin_\alpha(\lambda_n^{1/\alpha}|a|)}\cos_\alpha(\lambda_n^{1/\alpha}|a|)\right| \le C, \quad \lambda_n|y|^\alpha \ge 0. \tag{35}$$

Для коэффициентов Фурье φ_n, ψ_n имеем оценки [11, с. 460]

$$\varphi_n = O(n^{-4}),\ \psi_n = O(n^{-3}), \quad n \to \infty. \tag{36}$$

С помощью формул (30)–(32), (35), (36) заключаем, что ряды (27), (28) сходятся абсолютно и равномерно в области $\bar{D}$, а также, что ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n u_n^+(x,y)$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n u_n^-(x,y)$, полученные из них дифференцированием по x и y порядков 2 и α соответственно, – в областях D^+ и D^-.

6. Критерий единственности решения. Имеет место

Теорема 2. *Задача Дирихле (1)–(3) может иметь не более одного регулярного решения в классе функций $C^1(\bar{D})$ тогда и только тогда, когда*

$$N_{|a|,b}(\lambda_n) \ne 0, \tag{37}$$

$n = 1, 2, \ldots$ **Доказательство.** Покажем, что исследуемая задача при однородных краевых условиях и выполнении условия (37) имеет только тривиальное решение. Пусть $v(x,y) = \varphi_n(x)\omega_n(y)$, где

$$\varphi_n(x) = \sin\sqrt{\lambda} x,$$

$$\omega_n(y) = \begin{cases} (b-y)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left[\lambda(b-y)^\alpha\right], & 0 < y \le b, \\ (y-a)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left[-\lambda(y-a)^\alpha\right], & a \le y < 0. \end{cases}$$

Заметим, что функция $v(x,y)$ для любого $n \in \mathbb{N}$ представляет собой решение уравнения

$$\mathbf{L}^* v \equiv \begin{cases} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + D_{by}^{\alpha} v(x,y) = 0, & (x,y) \in D^+, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - D_{ay}^{\alpha} v(x,y) = 0, & (x,y) \in D^-, \end{cases}$$

удовлетворяющее условиям

$$v(0,y) = v(r,y) = 0. \tag{38}$$

В области D^+ у нас есть

$$\int\limits_{D^+} (vLu - uL^* v) dx dy =$$

$$= \int\limits_0^b \left(v\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial v}{\partial x} \right)\Big|_{x=0}^{x=r} dy + \int\limits_0^r \left(\frac{\partial u}{\partial y} D_{by}^{\alpha-2} v - u\frac{\partial}{\partial y} D_{by}^{\alpha-2} v \right)\Big|_{y=0}^{y=b} dx. \tag{39}$$

Для области D^- аналогичная формула будет иметь вид

$$\int\limits_{D^-} (vLu - uL^* v) dx dy =$$

$$= \int\limits_a^0 \left(v\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial v}{\partial x} \right)\Big|_{x=0}^{x=r} dy + \int\limits_0^r \left(\frac{\partial u}{\partial y} D_{ay}^{\alpha-2} v - u\frac{\partial}{\partial y} D_{ay}^{\alpha-2} v \right)\Big|_{y=a}^{y=0} dx. \tag{40}$$

Поскольку $u(0,x) = u(r,y) = 0, v(0,y) = v(r,y) = 0$, из соотношений (39), (40) имеем

$$\int\limits_0^r \left(\frac{\partial u}{\partial y} D_{by}^{\alpha-2} v - u\frac{\partial}{\partial y} D_{by}^{\alpha-2} v \right)\Big|_{y=0}^{y=b} dx = 0, \tag{41}$$

$$\int\limits_0^r \left(\frac{\partial u}{\partial y} D_{ay}^{\alpha-2} v - u\frac{\partial}{\partial y} D_{ay}^{\alpha-2} v \right)\Big|_{y=a}^{y=0} dx = 0. \tag{42}$$

Далее упростим подынтегральные выражения с помощью формулы дифференцирования

$$D_{at}^{\gamma} |t-a|^{\mu-1} E_{1/\rho}(\lambda |t-a|^{\rho}; \mu) =$$

$$= |t-a|^{\mu-\gamma-1} E_{1/\rho}(\lambda |t-a|^{\rho}; \mu-\gamma),\ \gamma \in \mathbb{R}, \tag{43}$$

$\mu > 0$, если $\gamma \notin \mathbb{N} \cup \{0\}$, и $\mu \in \mathbb{R}$, если$\gamma \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ [9]. Получим

$$D_{by}^{\alpha-2} v = \varphi_n(x) D_{by}^{\alpha-2} \omega_n(y) = \varphi_n(x)(b-y) E_{\alpha,2}[\lambda(b-y)^{\alpha}].$$

Отсюда следует

$$\lim_{y\to b} D_{by}^{\alpha-2} v = 0,\ y > 0, \tag{44}$$

$$\lim_{y\to 0} D_{by}^{\alpha-2} v = \varphi_n(x) b E_{\alpha,2}(\lambda b^{\alpha}),\ y > 0. \tag{45}$$

По определению

$$-\frac{\partial}{\partial y} D_{by}^{\alpha-2} v = D_{by}^{\alpha-1} v.$$

Поэтому вместо $-\frac{\partial}{\partial y} D_{by}^{\alpha-2} v$ вычислим

$$D_{by}^{\alpha-1} v = \varphi_n(x) D_{by}^{\alpha-1} \omega_n(y) = \varphi_n(x) E_{\alpha,1}[\lambda(b-y)^{\alpha}].$$

$$\lim_{y\to 0} D_{by}^{\alpha-1} v = \varphi_n(x) E_{\alpha,1}[\lambda b^{\alpha}],\ y > 0. \tag{46}$$

Аналогично, с помощью формулы (43) вычислим

$$D_{ay}^{\alpha-2} v = \varphi_n(x) D_{ay}^{\alpha-2} (y-a)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda(y-a)^{\alpha}] =$$

$$= \varphi_n(x)(y-a) E_{\alpha,2}[-\lambda(y-a)^{\alpha}].$$

$$\lim_{y\to a} D_{ay}^{\alpha-2}v = 0,\ y<0. \tag{47}$$

$$\lim_{y\to 0} D_{ay}^{\alpha-2}v = \varphi_n(x)(-a)E_{\alpha,2}(-\lambda(-a)^\alpha),\ y<0. \tag{48}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}D_{ay}^{\alpha-2}v = D_{ay}^{\alpha-1}v = \varphi_n(x)D_{ay}^{\alpha-1}(y-a)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda(y-a)^\alpha] =$$

$$\varphi_n(x)E_{\alpha,1}[-\lambda(y-a)^\alpha].$$

$$\lim_{y\to 0} D_{ay}^{\alpha-1}v = \varphi_n(x)E_{\alpha,1}[-\lambda(-a)^\alpha],\ y<0. \tag{49}$$

С учетом (44)–(49) система (41), (42) примет вид

$$bE_{\alpha,2}(\lambda b^\alpha)\int_0^r u_y(x,0)\varphi_n(x)dx + E_{\alpha,1}(\lambda b^\alpha)\int_0^r u(x,0)\varphi_n(x)dx = 0,$$

$$aE_{\alpha,2}(-\lambda|a|^\alpha)\int_0^r u_y(x,0)\varphi_n(x)xdx + E_{\alpha,1}(-\lambda|a|^\alpha)\int_0^r u(x,0)\varphi_n(x)dx = 0.$$

Отсюда в силу (37) следует, что

$$\int_0^r u_y(x,0)\sin\sqrt{\lambda_n}xdx = 0, \int_0^r u(x,0)\sin\sqrt{\lambda_n}xdx = 0. \tag{50}$$

Отметим, что всякую функцию $\varphi(x)\in C_0^\infty(0,r)$ можно разложить в равномерно и абсолютно сходящийся ряд Фурье $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\varphi_n\sin\sqrt{\lambda_n}x$. Тогда из равенств (50) мы имеем

$$\int_0^r u_y(x,0)\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n\sin\sqrt{\lambda_n}xdx = 0, \int_0^r u(x,0)\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n\sin\sqrt{\lambda_n}xdx = 0.$$

Тогда на основании леммы Лагранжа [6, с. 24] заключаем, что

$$u_y(x,0) = 0,\ u(x,0) = 0 \quad \forall x\in(0,r). \tag{51}$$

С учетом формул (51) и обобщенной формулы Ньютона – Лейбница [5, с. 80] можно записать

$$\partial_{0y}^\alpha u = D_{0y}^{\alpha-2}u_{yy} = D_{0y}^\alpha u - \frac{|y|^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}u_y(x,0) - \frac{|y|^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}u(x,0) = D_{0y}^\alpha u.$$

Тогда уравнение (1) при $y<0$ перепишем в виде

$$\mathrm{L}u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - D_{0y}^\alpha u = 0,\ a<y<0. \tag{52}$$

Так как $u(x,0)=0$,

$$\lim_{y\to 0}D_{0y}^{\alpha-1}u = \lim_{y\to 0}D_{0y}^{\alpha-2}u_y.$$

Далее заметим

$$\begin{gathered}\lim_{y\to 0}D_{0y}^{\alpha-1}u = \Gamma(1-\alpha)\lim_{y\to 0}y^{2-\alpha}u_y(x,y) = 0,\\ \lim_{y\to 0}D_{0y}^{\alpha-2}u = \Gamma(1-\alpha)\lim_{y\to 0}y^{2-\alpha}u(x,y) = 0.\end{gathered} \tag{53}$$

Таким образом, u является решением уравнения (52), удовлетворяющим краевым условиям (53). Задача (2), (53) для уравнения (52) имеет только нулевое решение в области D^- [9, с. 123].

В силу (51) в области D^+ функция $u(x,y)$ является решением однородной задачи Дирихле $u|_{\partial D^+}=0$ для уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \partial_{0y}^\alpha u = 0.$$

Как показано в работе [3], эта задача имеет только решение $u(x,y)=0\ \forall(x,y)\in D^+$. Таким образом, $u(x,y)=0$ во всей области D.

Пусть нарушено условие (37), тогда функция $u(x, y) = u_D$, где

$$u_D = \left(|a|E_{\alpha,2}(-\lambda|a|^\alpha)E_{\alpha,1}(\lambda y^\alpha) - yE_{\alpha,2}(\lambda y^\alpha)E_{\alpha,1}(-\lambda|a|^\alpha)\right)\sin\sqrt{\lambda_n}x, \quad (x, y) \in D^+,$$

$$u_D = \left(|y|E_{\alpha,2}(-\lambda|y|^\alpha)E_{\alpha,1}(\lambda b^\alpha) - bE_{\alpha,2}(\lambda b^\alpha)E_{\alpha,1}(-\lambda|y|^\alpha)\right)\sin\sqrt{\lambda_n}x, \quad (x, y) \in D^-,$$

является нетривиальным решением уравнения (1), удовлетворяющим условиям (2), (3) с $\varphi(x) = 0$ и $\psi(x) = 0$. Теорема 2 доказана.

Из теорем 1 и 2 и приведенной выше леммы имеем

Замечание. *Пусть функции $\varphi(x) \in C^2[0, r], \psi(x) \in C[0, r]$ имеют производные $\varphi'''(x)$ и $\psi'(x)$ соответственно, удовлетворяющие условиям Дирихле в промежутке $(0, r)$, выполняются условия согласования $\varphi''(0) = \varphi''(r) = 0$, и $\frac{|a|^\alpha}{r^2} \geq \frac{h}{\pi^2}$, где h определяется соотношением (5), тогда существует единственное регулярное решение задачи (1)-(3) и имеет вид*

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, y), \tag{54}$$

где функции $u_n(x, y) = u_n^+(x, y)$, $(x, y) \in D^+$, $\quad u_n(x, y) = u_n^-(x, y)$, $\quad (x, y) \in D^-$, определяются с помощью формул (27),(29).

Список литературы

1. Боголюбов А. Н., Кобликов А. А., Смирнова Д. Д., Шапкина Н. Е. 2013. Математическое моделирование сред с временной дисперсией при помощи дробного дифференцирования. Матем. моделирование, 25: 12, 50–64.

2. Джрбашян М. М. 1966. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М.: Наука. 672.

3. Масаева О. Х. 2012. Задача Дирихле для обобщенного уравнения Лапласа с производной Капуто. Дифференц. уравнения. 48 (3): 442–446.

4. Масаева О. Х. 2013. Задача Дирихле для нелокального волнового уравнения. Дифференц. уравнения. 49 (12): 1554–1559.

5. Нахушев А. М. 2003. Дробное исчисление и его применение. М., Физматлит, 272.

6. Нахушев А. М. 1995. Уравнения математической биологии. М.: Высшая школа, 301.

7. Попов А. Ю. 2006. О количестве вещественных собственных значений одной краевой задачи для уравнения второго порядка с дробной производной. Фундамент. и прикл. мат-ка. 12 (6): 137–155.

8. Псху А. В. 2005. О вещественных нулях функции типа Миттаг – Леффлера. Матем. заметки, 77 (4): 592–599.

9. Псху А. В. 2005. Уравнения в частных производных дробного порядка. М., Наука. 199.

10. Сабитов К. Б. 2007. Задача Дирихле для уравнений смешанного типа в прямоугольной области. Док. акад. наук. 413 (1): 23–26.

11. Смирнов В. И. 1961. Курс высшей математики. Т. 2. М.: Физматлит. 630.

12. Agrawal O. P. 2002. Solution for a fractional diffision-wave equation defined in a bounded domain. Nonlinear Dynam, 29-1(4): 145–155.

13. Cannon J. R. 1963. A Dirichlet problem for an equation of mixed type with a discontinuous coefficient. Ann. de Math. pura ed Appl. 61: 371–377.

14. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. 2006. Theory and applications of Fractional Differential Equations.– Amsterdam: Elsevier, 523.

15. Mainardi F. 1996. The fundamental solutions for the fractional diffusion-wave equation. Appl. Math. Lett. 9 (6), 23–28.

16. Masaeva O. Kh. 2017. Uniqueness of solutions to Dirichlet problems for generalized Lavrent'ev-Bitsadze equations with a fractional derivative, Electron. J. Differential Eq., 2017 (74): 1–8.

17. Masaeva O. Kh. 2020. Existence of solution to Dirichlet problem for generalized Lavrent'ev-Bitsadze equation with a fractional derivative, Progress in Fractional Differentiation and Applications. 6 (3): 239–244.

References

1. Bogolyubov A. N., Koblikov A. A., Smirnova D. D., Shapkina N. E. 2013. A mathematical model of media with time dispersion using fractional differentiation. Mat. Model. 25 (12): 50—64 (in Russian).

2. Dzhrbashyan M. M. 1966. Integral'nye preobrazovaniya i predstavleniya funktsii v kompleksnoi oblasti [Integral Transforms and Representations of Functions in the Complex Domain]. Moscow. 672.

3. Masaeva O. Kh. 2012. Dirichlet Problem for the Generalized Laplace Equation with the Caputo Derivative. Differential Equations, 48 (3): 449–454 (in Russian).

4. Masaeva O. Kh. 2013. Dirichlet problem for a nonlocal wave equation. Differential Equations, 49 (12): 1518–1523 (in Russian).

5. Nakhushev A. M. 2003. Drobnoe ischislenie i ego primenenie [Fractional Calculus and Its Applications], Moscow. 272.

6. Nakhushev A. M. 1995. Uravneniya matematicheskoi biologii [Equations of Mathematical Biology], Moscow. 301.

7. Popov A. Yu. 2008. On the number of real eigenvalues of a certain boundary-value problem for a second-order equation with fractional derivative. J. Math. Sci. 151 (1): 2726–2740 (in Russian).

8. Pskhu A. V. 2005. On the real zeros of a function of Mittag-Leffler type, Math. Notes, 77 (4): 546–552.

9. Pskhu A. V. 2005. Uravneniya v chastnykh proizvodnykh drobnogo poryadka [Partial Differential Equations of Fractional Order] Moscow, Nauka, 199.

10. Sabitov K. B. 2007. Dirichlet problem for mixed-type equations in a rectangular domain. Doklady Mathematics Pleiades Publishing, Ltd. 75 (2): 193–196.

11. Smirnov V. I. 1961. Kurs vysshei matematiki [Course of Higher Mathematics], Moscow: Gosudarstv. Izdat. Fiz.-Mat. Lit., 630.

12. Agrawal O. P. 2002. Solution for a fractional diffision-wave equation defined in a bounded domain. Nonlinear Dynam, 29-1 (4): 145–155.

13. Cannon J. R. 1963. A Dirichlet problem for an equation of mixed type with a discontinuous coefficient. Ann. de Math. pura ed Appl. 61: 371–377.

14. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. 2006. Theory and applications of Fractional Differential Equations.– Amsterdam: Elsevier, 523.

15. Mainardi F. 1996. The fundamental solutions for the fractional diffusion-wave equation. Appl. Math. Lett. 9 (6), 23–28.

16. Masaeva O. Kh. 2017. Uniqueness of solutions to Dirichlet problems for generalized Lavrent'ev-Bitsadze equations with a fractional derivative, Electron. J. Differential Eq., 2017 (74): 1–8.

17. Masaeva O. Kh. 2020. Existence of solution to Dirichlet problem for generalized Lavrent'ev-Bitsadze equation with a fractional derivative, Progress in Fractional Differentiation and Applications. 6 (3): 239-244.

Получена 23.11.2020

Масаева Олеся Хажисмеловна – научный сотрудник отдела Дробного исчисления
http://orcid.org/0000-0002-0200-3702
ул. Шортанова, 89А, Нальчик, 360000, Россия
E-mail: olesya.masaeva@yandex.ru