

МАТЕМАТИКА MATHEMATICS

УДК 512.542
MSC 20F17
Оригинальное исследование

DOI 10.52575/2687-0959-2025-57-4-253-265
EDN ABZZCW

О максимальных подформациях кратно Ω -расслоенных формаций конечных групп

Нестеров А. С. 

(Статья представлена членом редакционной коллегии Васильевым В. Б.)
Брянский государственный университет имени академика И. Г. Петровского,
Россия, 241036, г. Брянск, ул. Бежицкая, 14
a.s.nest@yandex.ru

Аннотация. Рассматриваются только конечные группы. Изучаются формации конечных групп, т. е. классы групп, замкнутые относительно гомоморфных образов и подпрямых произведений. Ω -расслоенные формации были построены В. А. Ведерниковым в 1999 году с помощью функциональных методов. В дальнейшем концепция кратной локальности, введенная в рассмотрение А. Н. Скибой, была использована для определения кратно Ω -расслоенных формаций. В настоящей статье изучаются максимальные подформации кратно Ω -расслоенных формаций. Получены свойства функций-спутников таких подформаций, установлены достаточные условия максимальности подформации исследуемой формации, найдено свойство максимальных кратно Ω -расслоенных подформаций, характеризующее группы, в нее входящие.

Ключевые слова: конечная группа, класс групп, формация, Ω -расслоенная формация, максимальная подформация формации

Для цитирования: Нестеров А.С. О максимальных подформациях кратно Ω -расслоенных формаций конечных групп. *Прикладная математика & Физика*. 2025;57(4):253–265. DOI 10.52575/2687-0959-2025-57-4-253-265 EDN ABZZCW

Original Research

On Maximal Subformations of Multiple Ω -foliated Formations of Finite Groups

Alexander S. Nesterov 

(Article submitted by a member of the editorial board Vasilyev V. B.)
Bryansk State University named after Academician I.G. Petrovsky,
14 Bezhitskaya St., Bryansk 241036, Russia
a.s.nest@yandex.ru

Abstract. Only finite groups are considered. Formations of finite groups, i. e. classes of groups closed under homomorphic images and subdirect products, are studied. Ω -foliated formations were constructed by V. A. Vedernikov in 1999 using functional methods. Subsequently, the concept of multiple locality, introduced by A. N. Skiba, was used to define multiple Ω -foliated formations. In this paper, maximal subformations of multiple Ω -foliated formations are studied. Properties of satellite-functions of such subformations are obtained, sufficient conditions for the maximality of a subformation of the formation under study are established, and a property of maximal multiple Ω -foliated subformations that characterizes the groups included in it is found.

Keywords: Finite Group, Class of Groups, Formation, Ω -Foliated Formation, Maximal Subformation of Formation

For citation: Nesterov AS. On Maximal Subformations of Multiple Ω -foliated Formations of Finite Groups. *Applied Mathematics & Physics*. 2025;57(4):253–265 (In Russ). DOI 10.52575/2687-0959-2025-57-4-253-265 EDN ABZZCW

1. Введение. Рассматриваются только конечные группы. Формацией называется класс групп, замкнутый относительно гомоморфных образов и подпрямых произведений. В. Гащюц в работе [1] для изучения формаций предложил использовать функциональные методы, с помощью которых им были построены локальные формации, нашедшие многочисленные применения в теории групп. Развивая функциональный подход В. Гащюца, Л. А. Шеметков в 1978 году ввел в рассмотрение композиционные формации [2]. В статье [3] А. Н. Скибой была разработана концепция кратной локальности для формаций, получившая в дальнейшем интенсивное развитие (см., например, [4]). Позднее А. Н. Скиба и Л. А. Шеметков построили кратно ω -локальные формации [5] и кратно \mathfrak{Q} -композиционные формации [6], где ω – непустое множество простых чисел, \mathfrak{Q} – непустой класс простых групп. В дальнейшем В. А. Ведерников построил серию ω -верных формаций [7], в которую вошли ω -локальные формации как один из видов, и

серию Ω -расслоенных формаций [8], включающую Ω -композиционные формации как один из видов, где Ω – непустой класс простых групп. Изучению свойств кратно Ω -расслоенных формаций посвящены работы Ю. А. Еловиковой, М. М. Сорокиной, Е. Н. Деминой, С. П. Максакова и др. (см., например, [9]–[12]).

К актуальным вопросам современной теории формаций относятся вопросы исследования внутреннего строения формаций. При поиске ответа на данный вопрос важную роль играют максимальные подформации исследуемых формаций, их наличие, свойства, внутреннее строение и другие характеристики. В работе [12] установлено существование максимальных n -кратно Ω -расслоенных подформаций для формаций с определенными свойствами, установлена взаимосвязь между максимальным внутренним Ω -спутником 1-кратно Ω -расслоенной формации и максимальным внутренним Ω -спутником ее максимальной 1-кратно Ω -расслоенной подформации. Настоящая работа также посвящена решению ряда вопросов, связанных с исследованием максимальных кратно Ω -расслоенных подформаций кратно Ω -расслоенных формаций.

Как демонстрируют исследования формаций, построенных с помощью функциональных методов, свойства таких формаций и их подформаций во многом определяются строением и особенностями их функций-спутников. Например, в [5, теорема 4] для доказательства модулярности решетки I_n^ω всех n -кратно ω -локальных формаций использовалось строение их ω -локальных I_{n-1}^ω -значных спутников, т. е. таких ω -локальных спутников, все значения которых являются $(n-1)$ -кратно ω -локальными формациями. В [9, теорема 1] с помощью свойств минимальных $\Omega\varphi_{(n-1)}$ -спутников исследовались решеточные свойства кратно Ω -расслоенных формаций. В теоремах 1 и 2 настоящей работы проводится исследование взаимосвязи минимальных функций-спутников кратно Ω -расслоенной формации и ее максимальной кратно Ω -расслоенной подформации.

При исследовании максимальных подформаций большую роль играют теоремы-признаки, позволяющие ответить на вопрос, является ли заданная подформация формации \mathfrak{F} максимальной в \mathfrak{F} . Например, в [4, лемма 5.1.20 (1)] установлены достаточные условия максимальности τ -замкнутой кратно локальной подформации τ -замкнутой кратно локальной формации, где τ – подгрупповой функтор. В теореме 3 установлены достаточные условия максимальности кратно Ω -расслоенной подформации кратно Ω -расслоенной формации.

При изучении подформационного строения формаций важную роль играет наличие связи между группами, принадлежащими рассматриваемой формации, и группами, которые входят в ее максимальную подформацию. Например, в [4, теорема 5.1.22] доказано, что для любой разрешимой группы G из неединичной τ -замкнутой локальной формации \mathfrak{F} фактор-группа $G/F(G)$ принадлежит пересечению всех максимальных τ -замкнутых n -кратно локальных подформаций формации \mathfrak{F} , где $F(G)$ – подгруппа Фиттинга группы G . Развитие данного результата для кратно ω -локальных формаций получено в [5, теорема 6]. В теореме 4 настоящей работы установлено, что для любой неединичной разрешимой Ω -группы G , принадлежащей кратно Ω -расслоенной формации с направлением φ , фактор-группа $G/(\bigcap_{A \in \Omega} G_{\varphi(A)})$ принадлежит пересечению всех максимальных кратно Ω -расслоенных подформаций заданной формации.

2. Предварительные сведения. Используемые определения и обозначения стандартны (см., например, [2], [13]). Символ $:=$ означает равенство по определению. Запись $H \leq G$ ($H < G$, $H \triangleleft G$, $H \cdot \triangleleft G$, $H < \cdot G$) означает, что H является подгруппой (соответственно, собственной, нормальной, минимальной нормальной, максимальной подгруппой) группы G ; 1 – единичная группа; через $G = A \times B$ обозначается полупрямое произведение подгрупп A и B группы G , где $A \triangleleft G$; $A \wr B$ – регулярное сплетение групп A и B ; Z_n – циклическая группа порядка n ; $\pi(G)$ – множество всех простых делителей порядка группы G ; $F(G)$ – подгруппа Фиттинга группы G ; $\Phi(G)$ – подгруппа Фраттини группы G ; $\text{Core}_G(H)$ – ядро подгруппы H в группе G ; $\text{Soc}(G)$ – подгруппа группы G , являющаяся произведением всех минимальных нормальных подгрупп группы G . Группа G называется *примитивной*, если в G существует максимальная подгруппа M (примитиватор) такая, что $\text{Core}_G(M) = 1$. Группа G называется *монолитической*, если она обладает единственной минимальной нормальной подгруппой (монолитом).

Классом групп называется совокупность групп, содержащая вместе с каждой своей группой и все группы, ей изоморфные. Через \mathfrak{G} обозначается класс всех конечных групп, \mathfrak{S} , \mathfrak{N} , \mathfrak{A} – класс всех разрешимых, нильпотентных, абелевых групп из \mathfrak{G} соответственно, \mathfrak{E} – класс всех единичных групп, \mathfrak{F} – класс всех простых групп.

Класс групп \mathfrak{F} называется *замкнутым относительно*:

- гомоморфных образов, если из $G \in \mathfrak{F}$ и $N \triangleleft G$ следует $G/N \in \mathfrak{F}$ (1);
- подпрямых произведений, если $G/A \in \mathfrak{F}$ и $G/B \in \mathfrak{F}$ следует $G/(A \cap B) \in \mathfrak{F}$ (2);
- нормальных подгрупп, если из $G \in \mathfrak{F}$ и $N \triangleleft G$ следует $N \in \mathfrak{F}$ (3);
- произведений нормальных \mathfrak{F} -подгрупп, если из $G = AB$, где $A \triangleleft G$, $B \triangleleft G$, $A, B \in \mathfrak{F}$, следует, что $G \in \mathfrak{F}$ (4).

Класс групп \mathfrak{F} , удовлетворяющий условиям (1) и (2), называется *формацией*; класс групп \mathfrak{F} , удовлетворяющий условиям (3) и (4), называется *классом Фиттинга*; \mathfrak{F} – формация Фиттинга, если \mathfrak{F} является формацией и классом Фиттинга.

Наибольшая нормальная подгруппа группы G , принадлежащая классу Фиттинга \mathfrak{F} , обозначается $G_{\mathfrak{F}}$ и называется \mathfrak{F} -радикалом группы G [2, гл. I, п. 1].

Пусть \mathfrak{X} – непустое множество групп. Тогда (\mathfrak{X}) – класс групп, порожденный множеством \mathfrak{X} , т. е. (\mathfrak{X}) – пересечение всех классов групп, содержащих \mathfrak{X} , в частности, (G) – класс всех групп, изоморфных группе G ; $\text{form}\mathfrak{X}$ – формация, порожденная множеством \mathfrak{X} ; $K(G)$ – класс всех простых групп, изоморфных композиционным факторам группы G ; $K(\mathfrak{X}) = \cup_{G \in \mathfrak{X}} K(G)$. Через Ω обозначается непустой подкласс класса \mathfrak{F} . Группа G называется Ω -группой, если $K(G) \subseteq \Omega$ [14, с. 126].

Пусть $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2$ – классы групп. Произведением классов \mathfrak{F}_1 и \mathfrak{F}_2 называется класс групп $\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2 = (G \in \mathfrak{G} \mid \text{существует } N \triangleleft G, \text{ где } N \in \mathfrak{F}_1, G/N \in \mathfrak{F}_2)$ [13, II, (1.3)].

Для произвольного класса групп $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}$ будем использовать следующие обозначения:

$$\mathfrak{G}_{\mathfrak{X}} := (G \in \mathfrak{G} \mid K(G) \subseteq \mathfrak{X}); \quad \mathfrak{G}_{\mathfrak{X}'} := (G \in \mathfrak{G} \mid K(G) \cap \mathfrak{X} = \emptyset) \quad [14, \text{с. 126}].$$

Пусть $A \in \mathfrak{F}$. Тогда $(A)' = \mathfrak{F} \setminus (A)$, $\mathfrak{G}_A := \mathfrak{G}_{(A)}$, $\mathfrak{G}_{A'} := \mathfrak{G}_{(A)'}$, $\mathfrak{R}_p := \mathfrak{G}_{Z_p}$. Главный фактор H/L группы G называется *главным A -фактором*, если $K(H/L) \subseteq (A)$. Через \mathfrak{S}_{cA} обозначается класс всех групп, у которых каждый главный A -фактор централен; $O_{\Omega}(G) := G_{\mathfrak{G}_{\Omega}}$, $O_A(G) := G_{\mathfrak{G}_A}$, $O_p(G) := O_{Z_p}(G)$, $O_{A',A}(G) := G_{\mathfrak{G}_{A'}\mathfrak{G}_A}$, $F_A(G) := G_{\mathfrak{S}_{cA}}$ [14, с. 126].

Замечание 1. В любой конечной группе G , имеющей главные A -факторы (здесь $A \in \mathfrak{F}$), подгруппа $F_A(G)$ совпадает с пересечением централизаторов всех главных A -факторов группы G . Если в G нет главных A -факторов, то полагают $F_A(G) = G$ [14, с. 126].

Пусть $f : \Omega \cup \{\Omega'\} \rightarrow \{\text{формации групп}\}$, где $f(\Omega') \neq \emptyset$ (здесь символ Ω' обозначает элемент из области определения функции f , не принадлежащий Ω), $h : \mathfrak{F} \rightarrow \{\text{формации групп}\}$, $\varphi : \mathfrak{F} \rightarrow \{\text{непустые формации Фиттинга}\}$ – функции, принимающие одинаковые значения на изоморфных группах из области определения, называемые соответственно ΩF -функцией, F -функцией, FR -функцией [14, определение 1]. Если ψ_1, ψ_2 – ΩF -функции (F -функции, FR -функции), то полагают $\psi_1 \leq \psi_2$ тогда и только тогда, когда $\psi_1(X) \subseteq \psi_2(X)$ для любого $X \in \Omega \cup \{\Omega'\}$ (соответственно для любого $X \in \mathfrak{F}$). Если $\psi_1 \leq \psi_2$ и $\psi_1 \neq \psi_2$, то пишут $\psi_1 < \psi_2$ [14, замечание 3]. Формация

$$\mathfrak{F} = (G \in \mathfrak{G} \mid G/O_{\Omega}(G) \in f(\Omega') \text{ и } G/G_{\varphi(A)} \in f(A) \text{ для всех } A \in \Omega \cap K(G))$$

называется Ω -расслоенной формацией с направлением φ (коротко, $\Omega\varphi$ -расслоенной формацией) с Ω -спутником f и обозначается $\mathfrak{F} = \Omega F(f, \varphi)$; формация

$$\mathfrak{H} = (G \in \mathfrak{G} \mid G/G_{\varphi(A)} \in h(A) \text{ для всех } A \in K(G))$$

называется *расслоенной формацией* с направлением φ (коротко, φ -расслоенной формацией) со спутником h и обозначается $\mathfrak{H} = F(h, \varphi)$ [14, определение 2].

Ω -спутник f Ω -расслоенной формации \mathfrak{F} называется *внутренним*, если $f(X) \subseteq \mathfrak{F}$ для любого $X \in \Omega \cup \{\Omega'\}$ [8].

Ω -расслоенная (расслоенная) формация с направлением φ называется:

– Ω -свободной (свободной), если $\varphi = \varphi_0$, где φ_0 – FR -функция, имеющая следующее строение $\varphi_0(A) = \mathfrak{G}_{A'}$ для любой группы $A \in \mathfrak{F}$ [14, определение 3];

– Ω -биканонической (биканонической), если $\varphi = \varphi_2$, где φ_2 – FR -функция, имеющая следующее строение $\varphi_2(A) = \mathfrak{G}_{A'}\mathfrak{G}_A$ для любой абелевой группы $A \in \mathfrak{F}$ и $\varphi(A) = \mathfrak{G}_{A'}$ для любой неабелевой группы $A \in \mathfrak{F}$ [8, определение 2];

– Ω -композиционной (композиционной), если $\varphi = \varphi_3$, где φ_3 – FR -функция, имеющая следующее строение $\varphi_3(A) = \mathfrak{S}_{cA}$ для любой $A \in \mathfrak{F}$ [14, определение 4].

Направление φ Ω -расслоенной (расслоенной) формации называется:

– r -направлением, если $\mathfrak{G}_{A'}\varphi(A) = \varphi(A)$ для любой группы $A \in \mathfrak{F}$ [14, определение 6];

– b_A -направлением, где $A \in \mathfrak{F}$, если $\varphi(A)\mathfrak{G}_A = \varphi(A)$ [8, определение 1];

– b -направлением, если $\varphi(A)\mathfrak{G}_A = \varphi(A)$ для любой абелевой группы $A \in \mathfrak{F}$ [8, определение 1];

– $i_1 i_2 \dots i_k$ -направлением, если φ – i_j -направление для любого $j = \overline{1, k}$ [8, определение 1].

Пусть $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, φ – FR -функция. Следуя [4], всякую непустую формацию считают 0 -кратно $\Omega\varphi$ -расслоенной (0 -кратно φ -расслоенной); при $n > 0$ $\Omega\varphi$ -расслоенную (φ -расслоенную) формацию \mathfrak{F} называют n -кратно $\Omega\varphi$ -расслоенной (n -кратно φ -расслоенной), если \mathfrak{F} обладает хотя бы одним $\Omega\varphi_{(n-1)}$ -спутником ($\varphi_{(n-1)}$ -спутником), то есть таким Ω -спутником (спутником), все непустые значения которого являются $(n-1)$ -кратно $\Omega\varphi$ -расслоенными ($(n-1)$ -кратно φ -расслоенными) формациями. $\Omega\varphi_{(n-1)}$ -спутники ($\varphi_{(n-1)}$ -спутники) n -кратно Ω -свободной (n -кратно свободной), n -кратно Ω -биканонической (n -кратно биканонической), n -кратно Ω -композиционной (n -кратно композиционной) формаций называют соответственно $\Omega Fr_{(n-1)}$ -спутником ($Fr_{(n-1)}$ -спутником), $\Omega B_{(n-1)}$ -спутником ($B_{(n-1)}$ -спутником), $\Omega C_{(n-1)}$ -спутником ($C_{(n-1)}$ -спутником). Через $\Omega F_n(\mathfrak{X}, \varphi)$ обозначается n -кратно $\Omega\varphi$ -расслоенная формация, порожденная множеством групп \mathfrak{X} , т. е. $\Omega F_n(\mathfrak{X}, \varphi)$ – пересечение всех n -кратно $\Omega\varphi$ -расслоенных формаций, содержащих \mathfrak{X} ; в частности, $\Omega F_1(\mathfrak{X}, \varphi) := \Omega F(\mathfrak{X}, \varphi)$ и $\Omega F_0(\mathfrak{X}, \varphi) := \text{form}\mathfrak{X}$. Если $\mathfrak{X} = \{G\}$, то вместо $\Omega F_n(\{G\}, \varphi)$ пишут $\Omega F_n(G, \varphi)$ [8, с. 56]. Через $\Omega B_n(\mathfrak{X})$ ($B_n(\mathfrak{X})$), $\Omega C_n(\mathfrak{X})$ ($C_n(\mathfrak{X})$), $F_n(\mathfrak{X}, \varphi)$ обозначаются

соответственно n -кратно Ω -биканоническая (n -кратно биканоническая), n -кратно Ω -композиционная (n -кратно композиционная), n -кратно φ -расслоенная формации, порожденные множеством \mathfrak{X} .

Через $\Omega\varphi^n F$ (соответственно $\varphi^n F$) обозначим множество всех n -кратно $\Omega\varphi$ -расслоенных (n -кратно φ -расслоенных) формаций.

Замечание 2. Множество $\Omega\varphi^n F$ является полной и модулярной решеткой для любого $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и любого направления φ [11, теорема 4 (6)].

Следуя [15], для любых n -кратно $\Omega\varphi$ -расслоенных формаций \mathfrak{F}_1 и \mathfrak{F}_2 полагаем:

$$\mathfrak{F}_1 \wedge_{\Omega\varphi^n F} \mathfrak{F}_2 := \mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_2, \quad \mathfrak{F}_1 \vee_{\Omega\varphi^n F} \mathfrak{F}_2 := \Omega F_n(\mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2, \varphi).$$

Аналогично, для $\mathfrak{F}_i \in \Omega\varphi^n F, i \in I$:

$$\bigwedge_{i \in I} \mathfrak{F}_i := \bigcap_{i \in I} \mathfrak{F}_i, \quad \bigvee_{i \in I} \mathfrak{F}_i := \Omega F_n(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i, \varphi).$$

Следуя [4], через $\mathfrak{F}_2 /_{\Omega\varphi^n F} \mathfrak{F}_1$ обозначим множество всех n -кратно $\Omega\varphi$ -расслоенных формаций \mathfrak{H} , удовлетворяющих условию $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}_2$.

Замечание 3. Поскольку $\Omega\varphi^n F$ является модулярной решеткой, то, согласно [16, теорема 13], для любых формаций $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2 \in \Omega\varphi^n F$ следующие интервалы формаций $(\mathfrak{F}_1 \vee_{\Omega\varphi^n F} \mathfrak{F}_2) /_{\Omega\varphi^n F} \mathfrak{F}_2$ и $\mathfrak{F}_1 /_{\Omega\varphi^n F} (\mathfrak{F}_1 \wedge_{\Omega\varphi^n F} \mathfrak{F}_2)$ изоморфны.

Собственная n -кратно $\Omega\varphi$ -расслоенная подформация \mathfrak{M} n -кратно $\Omega\varphi$ -расслоенной формации \mathfrak{F} называется максимальной n -кратно $\Omega\varphi$ -расслоенной подформацией формации \mathfrak{F} , если для любой n -кратно $\Omega\varphi$ -расслоенной формации \mathfrak{H} , удовлетворяющей условию $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$, имеет место либо $\mathfrak{M} = \mathfrak{H}$, либо $\mathfrak{H} = \mathfrak{F}$ [12, с. 19]. Через $\Phi_{\Omega\varphi^n F}(\mathfrak{F})$ обозначается пересечение всех максимальных n -кратно $\Omega\varphi$ -расслоенных подформаций формации \mathfrak{F} .

Замечание 4. n -кратно $\Omega\varphi$ -расслоенная подформация \mathfrak{M} n -кратно $\Omega\varphi$ -расслоенной формации \mathfrak{F} является максимальной в \mathfrak{F} тогда и только тогда, когда множество $\mathfrak{F} /_{\Omega\varphi^n F} \mathfrak{M}$ двухэлементно.

В лемме 1 приведены используемые далее известные результаты теории групп.

Лемма 1.

(1) Пусть K и H – группы и ψ – гомоморфизм группы K в $\text{Aut}(H)$. Тогда существует группа G , содержащая подгруппы $H^* \cong H$ и $K^* \cong K$, причем $G = H^* \rtimes K^*$ [17, теорема 2.47].

(2) Пусть G – разрешимая неединичная примитивная группа и M – ее примитиватор. Тогда группа G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу N , причем $N = C_G(N)$ и $C = N \rtimes M$ [17, теорема 4.42 (1)].

(3) Пусть A – некоторая группа автоморфизмов p -группы G . Если A действует тождественно на каждом факторе субнормального A -допустимого ряда $G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq \dots \supseteq G_t = 1, t > 0$, то A является p -группой [2, лемма 3.10].

(4) Пусть $G = A \wr B = KB$, где $K = \prod_{b \in B} A_1^b$ – база сплетения G и A_1 – первая копия A в K . Тогда $\text{Soc}(G) \subseteq \prod_{b \in B} M^b$, где $M = \text{Soc}(A_1)$ [4, лемма 3.1.9 (3)].

(5) $\Phi(G) \leq F(G)$ для любой группы G . В частности, если G является неединичной разрешимой группой, то $\Phi(G) \neq F(G)$ [17, лемма 4.21 (1)].

(6) $F(G/\Phi(G)) = F(G)/\Phi(G)$ для любой группы G [17, лемма 4.21 (2)].

В дальнейшем используются следующие свойства Ω -расслоенных формаций.

Лемма 2.

(1) Пусть $A \in \mathfrak{F}, \mathfrak{F}$ – Ω -расслоенная формация с b_A -направлением φ . Тогда $O_A(G/G_{\varphi(A)}) = 1$ для любой группы G [8, лемма 6 (1)].

(2) Пусть \mathfrak{F} – Ω -расслоенная формация с Ω -спутником f и br -направлением φ . Тогда $\mathfrak{N}_p f(Z_p) \subseteq \mathfrak{F}$ для всех p таких, что $Z_p \in \Omega$ [8, следствие 3 (1)].

(3) Пусть $n \in \mathbb{N}, \varphi$ – FR-функция, $\varphi_0 \leq \varphi$. Если \mathfrak{X} – непустой класс групп, то формация $\mathfrak{F} = \Omega F_n(\mathfrak{X}, \varphi)$ обладает единственным минимальным $\Omega\varphi_{(n-1)}$ -спутником f таким, что $f(\Omega') = \Omega F_{(n-1)}((G/O_\Omega(G) \mid G \in \mathfrak{X}), \varphi), f(A) = \emptyset$, если $A \in \Omega \setminus K(\mathfrak{X})$, и $f(A) = \Omega F_{(n-1)}((G/G_{\varphi(A)} \mid G \in \mathfrak{X}), \varphi)$ для всех $A \in \Omega \cap K(\mathfrak{X})$ [10, теорема 2].

(4) Пусть $n \in \mathbb{N}, \varphi$ – FR-функция, $\varphi_0 \leq \varphi, \mathfrak{F}_i \in \Omega\varphi^n F$ и f_i – минимальный $\Omega\varphi_{(n-1)}$ -спутник формации $\mathfrak{F}_i, i = 1, 2$. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2$, когда $f_1 \leq f_2$ [10, следствие 2.1].

(5) Пусть $n \in \mathbb{N}, \varphi$ – FR-функция, $\varphi_0 \leq \varphi$. Если $\mathfrak{F}_i \in \Omega\varphi^n F, i \in I$, и $\mathfrak{F} = \bigvee_{i \in I} \mathfrak{F}_i$, то $\mathfrak{F} \in \Omega\varphi^n F$ [18, следствие леммы 3].

(6) Пусть \mathfrak{F} – Ω -расслоенная формация с Ω -спутником f и r -направлением φ . Если $A \in \Omega, G/O_A(G) \in \mathfrak{F}$ и $G/G_{\varphi(A)} \in f(A)$, то $G \in \mathfrak{F}$ [8, лемма 2 (1)].

Замечание 5. Если \mathfrak{F} – n -кратно $\Omega\varphi$ -расслоенная формация, то, ввиду равенства $\mathfrak{F} = \Omega F_n(\mathfrak{F}, \varphi)$, из леммы 2 (3) следует, что минимальный $\Omega\varphi_{(n-1)}$ -спутник формации \mathfrak{F} является внутренним.

Используя методы доказательств, разработанные в [4] для исследования τ -замкнутых n -кратно локальных формаций, где τ – подгрупповой функтор, предварительно докажем следующую лемму.

Лемма 3. Пусть $n \in \mathbb{N}, \varphi$ – FR-функция, $\varphi_0 \leq \varphi, G$ – группа, $\mathfrak{F} = \Omega F_n(G, \varphi), \mathfrak{H} \in \Omega\varphi^n F$ и $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{F}$. Тогда \mathfrak{H} содержится в некоторой максимальной n -кратно $\Omega\varphi$ -расслоенной подформации формации \mathfrak{F} .

Доказательство. Пусть $\mathcal{X} := \{ \mathfrak{X} \in \Omega\varphi^n F \mid \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F} \}$, $\{ \mathfrak{X}_i \mid i \in I \}$ – произвольная цепь в \mathcal{X} и $\mathfrak{D} := \bigcup_{i \in I} \mathfrak{X}_i$. Тогда $\mathfrak{D} = \bigvee_{\Omega\varphi^n F} \{ \mathfrak{X}_i \mid i \in I \}$ и по лемме 2 (5) $\mathfrak{D} \in \Omega\varphi^n F$, причем $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{F}$. Если $\mathfrak{D} = \mathfrak{F}$, то $G \in \mathfrak{D}$ и найдется такое $j \in I$, что $G \in \mathfrak{X}_j$ и $\mathfrak{F} = \Omega F_n(G, \varphi) \subseteq \mathfrak{X}_j$, что противоречит выбору \mathcal{X} . Следовательно, $\mathfrak{D} \subset \mathfrak{F}$ и поэтому $\mathfrak{D} \in \mathcal{X}$. Тогда, согласно лемме Цорна, в \mathcal{X} имеется максимальный элемент \mathfrak{M} .

Покажем, что \mathfrak{M} – максимальная n -кратно $\Omega\varphi$ -расслоенная подформация в \mathfrak{F} . Действительно, пусть $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{X} \subset \mathfrak{F}$, где $\mathfrak{X} \in \Omega\varphi^n F$. Так как $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{M}$, то $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{X}$ и поэтому $\mathfrak{X} \in \mathcal{X}$. Тогда из $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{X}$ следует, что $\mathfrak{M} = \mathfrak{X}$. Таким образом, \mathfrak{M} – максимальная n -кратно $\Omega\varphi$ -расслоенная подформация в \mathfrak{F} , содержащая \mathfrak{H} . Лемма доказана.

3. Основные результаты.

3.1. Спутники максимальных подформаций кратно Ω -расслоенных формаций. В следующих двух теоремах проводится исследование связи между функциями-спутниками кратно Ω -расслоенной формации и ее максимальной кратно Ω -расслоенной подформации.

В теореме 1 установлены условия, при которых для подходящего простого числа p значение $f(Z_p)$ минимального спутника f кратно Ω -расслоенной формации \mathfrak{F} определяется посредством соответствующего значения минимального спутника ее максимальной кратно Ω -расслоенной подформации.

Теорема 1. Пусть $n \in \mathbb{N}$, \mathfrak{F} – n -кратно $\Omega\varphi$ -расслоенная формация с минимальным $\Omega\varphi_{(n-1)}$ -спутником f , \mathfrak{M} – максимальная n -кратно $\Omega\varphi$ -расслоенная подформация формации \mathfrak{F} с минимальным $\Omega\varphi_{(n-1)}$ -спутником m , где φ – br -направление, удовлетворяющее условию $\varphi \leq \varphi_3$. Если p – такое простое число, что $Z_p \in \Omega$, $f(Z_p) \setminus m(Z_p) \neq \emptyset$, H – группа минимального порядка из $f(Z_p) \setminus m(Z_p)$ и $O_p(H) = 1$, то формация $f(Z_p)$ имеет следующее строение

$$f(Z_p) = \Omega F_{(n-1)}(\{H\} \cup m(Z_p), \varphi).$$

Доказательство. Пусть p – такое простое число, что $Z_p \in \Omega$, $f(Z_p) \setminus m(Z_p) \neq \emptyset$, H – группа минимального порядка из $f(Z_p) \setminus m(Z_p)$ и $O_p(H) = 1$. Покажем, что $f(Z_p) = \Omega F_{(n-1)}(\{H\} \cup m(Z_p), \varphi)$.

Предположим, что H имеет по крайней мере две различные минимальные нормальные подгруппы N_1 и N_2 . Так как класс групп $f(Z_p)$ замкнут относительно гомоморфных образов, то $H/N_1, H/N_2 \in f(Z_p)$. Отсюда, в силу выбора группы H , получаем, что $H/N_1, H/N_2 \in m(Z_p)$. Тогда, ввиду замкнутости класса групп $m(Z_p)$ относительно подпрямых произведений, имеем $H \cong H/(N_1 \cap N_2) \in m(Z_p)$, что противоречит выбору H . Следовательно, группа H является монолитической. Пусть R – монолит группы H . Пусть $G_1 := Z_p \wr H$. Тогда, ввиду леммы 1 (4), $G_1 = T_1 \rtimes H$, где T_1 – база сплетения G_1 и T_1 – элементарная абелева p -группа. Так как $T_1 \neq 1$ и $T_1 \triangleleft G_1$, то существует такая подгруппа $T \triangleleft G_1$, что $T \subseteq T_1$. Пусть $G := TH$. Отметим, что $G = T \rtimes H$.

I. Установим, что $T = G_{\varphi(Z_p)} = O_{Z_p}(G)$.

Предварительно проверим, что $T_1 = C_{G_1}(T_1)$. Пусть $C := C_{G_1}(T_1)$. Так как T_1 – абелева группа, то $T_1 \subseteq C$. Допустим, что $T_1 \subset C$. Рассмотрим $C \cap H := C_1$. Покажем, что $C_1 \neq 1$. Действительно, если $C_1 = 1$, то по модулярному тождеству

$$C = G_1 \cap C = T_1 H \cap C = T_1 (H \cap C) = T_1.$$

Получили противоречие. Таким образом, $C_1 \neq 1$.

Покажем, что $C_1 \triangleleft G_1$. Так как $C \triangleleft N_{G_1}(T_1) = G_1$, то $C \cap H \triangleleft H$, откуда следует, что $H \subseteq N_{G_1}(C_1)$. Далее, так как

$$C_1 = C_{G_1}(T_1) \cap H = \{x \in H \mid xt = tx, \text{ для любого } t \in T_1\},$$

то для любых $x \in C_1$, $t \in T_1$ выполняется $xt = tx$ и поэтому для любого $t \in T_1$ имеет место $tC_1 = C_1t$. Таким образом, $T_1 \subseteq N_{G_1}(C_1)$. Тем самым установлено, что $G_1 = HT_1 \subseteq N_{G_1}(C_1)$ и, значит, $C_1 \triangleleft G_1$.

Так как $C_1 \triangleleft G_1$ и $C_1 \neq 1$, то существует такая подгруппа $L \triangleleft G_1$, что $L \subseteq C_1$. Покажем, что $L \subseteq T_1$. Действительно, так как $\text{Soc}(Z_p) = Z_p$, то, ввиду леммы 1 (4), имеем $\text{Soc}(G_1) \subseteq T_1$. Таким образом, из $L \subseteq \text{Soc}(G_1)$ получаем $L \subseteq T_1$ и, значит, L – p -группа. Поскольку $L \triangleleft G_1$ и $L \subseteq C_1 \subseteq H$, то $L \triangleleft H$. Следовательно, $L \subseteq O_p(H) = 1$. Получили противоречие. Тем самым установлено, что $T_1 = C_{G_1}(T_1)$.

Покажем, что $C_G(T) = T$. Предварительно установим, что $C_{G_1}(T) = T_1$. Действительно, так как T_1 – абелева группа и $T \subseteq T_1$, то справедливо включение $T_1 \subseteq C_{G_1}(T)$. По модулярному тождеству

$$C_{G_1}(T) = G_1 \cap C_{G_1}(T) = T_1 H \cap C_{G_1}(T) = T_1 (H \cap C_{G_1}(T)).$$

Докажем, что $H \cap C_{G_1}(T) = 1$. Допустим, что $H \cap C_{G_1}(T) \neq 1$. Покажем, что $R \subseteq C_{G_1}(T)$. Действительно, ввиду $C_{G_1}(T) \triangleleft N_{G_1}(T) = G_1$, имеем $H \cap C_{G_1}(T) \triangleleft H$. Так как R – монолит группы H , то $R \subseteq H \cap C_{G_1}(T)$. Получаем $C_R(T) = C_{G_1}(T) \cap R = R$. Таким образом, $C_R(T) = R$.

Рассмотрим гомоморфизм $\gamma : R \rightarrow \text{Aut}(T)$. По лемме 1 (1) существует группа $L = M \rtimes W$, где $M \cong T$, $W \cong R$, т. е. $L \cong T \rtimes R$. Далее, $R/N \cong R^y$, где $N := \text{Ker}(\gamma)$ и $R^y \leq \text{Aut}(T)$. Пусть $A := R^y$.

Установим, что $C_{R/N}(T) = R/N$. Отметим, что

$$C_{R/N}(T) = \{rN \in R/N \mid (rN)t = t(rN) \text{ для любого } t \in T\}.$$

Проверим, что $R/N \subseteq C_{R/N}(T)$. Пусть $rN \in R/N$ и t – произвольный элемент из T . Покажем, что $(rN)t \subseteq t(rN)$. Пусть $x \in (rN)t$. Так как $C_R(T) = R$ и $N \subseteq R$, то $x = rn_1t = rtn_1 = trn_1 \in t(rN)$, где $n_1 \in N$. Поэтому $(rN)t \subseteq t(rN)$. Аналогично рассуждая, получаем $t(rN) \subseteq (rN)t$. Следовательно, $(rN)t = t(rN)$ для любого $t \in T$. Это означает, что $rN \in C_{R/N}(T)$ и поэтому $R/N \subseteq C_{R/N}(T)$. Таким образом, $C_{R/N}(T) = R/N$ и, следовательно, группа R/N действует тождественно на T . Тем самым установлено, что A – группа автоморфизмов группы T , действующая тождественно на T .

Поскольку $T^\alpha = T$ для любого $\alpha \in A$, то субнормальный ряд $1 \triangleleft T$ группы T является A -допустимым. Тогда по лемме 1 (3) A – p -группа и, значит, R/N – p -группа. Так как $R \triangleleft H$, то R является элементарной абелевой p -группой. Поэтому $R \subseteq O_p(H)$. Получили противоречие. Следовательно, $H \cap C_{G_1}(T) = 1$ и $C_{G_1}(T) = T_1$. Тогда по модулярному тождеству

$$C_G(T) = G \cap C_{G_1}(T) = G \cap T_1 = T(H \cap T_1) = T.$$

Таким образом, $C_G(T) = T$.

Покажем, что $T \triangleleft G$. Допустим, что это не так. Тогда существует такая $X \triangleleft G$, что $1 \subset X \subset T$. Так как $X \triangleleft G$, то $H \subseteq N_{G_1}(X)$. Поскольку $X \subset T \subseteq T_1$, то $T_1 = C_{G_1}(T_1) \subseteq C_{G_1}(X) \subseteq N_{G_1}(X)$. Следовательно, $G_1 = HT_1 \subseteq N_{G_1}(X)$ и $X \triangleleft G_1$. Тогда из $1 \subset X \subset T$ следует, что подгруппа T не является минимальной нормальной в G_1 . Получили противоречие. Таким образом, $T \triangleleft G$. Допустим, что существует $K \triangleleft G$ такая, что $K \neq T$. Тогда $KT \leq G$ и $KT = K \times T$. Поэтому $K \subseteq C_G(T) = T$. Получили противоречие. Следовательно, G – монолитическая группа с монолитом T .

Установим, что $F_{Z_p}(G) \subseteq C_G(T)$. Действительно, так как $T \triangleleft G$ и T – p -группа, то $T/1$ – главный p -фактор группы G . Тогда по замечанию 1 $F_{Z_p}(G) \subseteq C_G(T/1) = C_G(T)$.

Поскольку φ является b -направлением, то $\varphi(Z_p) = \varphi(Z_p)\mathfrak{M}_p$. Это означает, что $\mathfrak{M}_p \subseteq \varphi(Z_p)$ и поэтому $T \subseteq O_p(G) \subseteq G_{\varphi(Z_p)}$. Так как по условию $\varphi \leq \varphi_3$, то $G_{\varphi(Z_p)} \subseteq G_{\varphi_3(Z_p)} = F_{Z_p}(G)$.

Таким образом,

$$T \subseteq O_p(G) \subseteq G_{\varphi(Z_p)} \subseteq F_{Z_p}(G) \subseteq C_G(T) = T.$$

Следовательно, имеют место равенства

$$T = G_{\varphi(Z_p)} = O_{Z_p}(G).$$

II. Покажем, что $\mathfrak{F} = \Omega F_n(\{G\} \cup \mathfrak{M}, \varphi)$.

Предварительно установим, что $G \notin \mathfrak{M}$. Допустим, что $G \in \mathfrak{M}$. Тогда, ввиду $Z_p \in \Omega \cap K(G)$, по определению Ω -расслоенной формации имеем $G/G_{\varphi(Z_p)} \in m(Z_p)$. Отсюда следует, что $H \cong G/T \in m(Z_p)$. Получили противоречие с выбором группы H . Следовательно, $G \notin \mathfrak{M}$.

Проверим, что $G \in \mathfrak{F}$. Так как f – минимальный $\Omega\varphi(n-1)$ -спутник формации \mathfrak{F} , то по замечанию 5 $f(Z_p) \subseteq \mathfrak{F}$. Поскольку φ – r -направление, $Z_p \in \Omega$, $G/O_{Z_p}(G) \cong H \in f(Z_p) \subseteq \mathfrak{F}$, $G/G_{\varphi(Z_p)} \cong H \in f(Z_p)$, то по лемме 2 (6) имеем $G \in \mathfrak{F}$.

Так как $G \in \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$, то $\Omega F_n(\{G\} \cup \mathfrak{M}, \varphi) \subseteq \mathfrak{F}$. С другой стороны, ввиду того, что $G \notin \mathfrak{M}$, имеем $\mathfrak{M} = \Omega F_n(\mathfrak{M}, \varphi) \subset \Omega F_n(\{G\} \cup \mathfrak{M}, \varphi)$. Поскольку \mathfrak{M} – максимальная n -кратно $\Omega\varphi$ -расслоенная подформация формации \mathfrak{F} , то из $\mathfrak{M} \subset \Omega F_n(\{G\} \cup \mathfrak{M}, \varphi) \subseteq \mathfrak{F}$ следует, что $\Omega F_n(\{G\} \cup \mathfrak{M}, \varphi) = \mathfrak{F}$. Тогда, согласно лемме 2 (3),

$$f(Z_p) = \Omega F_{(n-1)}(\{M/M_{\varphi(Z_p)} \mid M \in \{G\} \cup \mathfrak{M}\}, \varphi) = \Omega F_{(n-1)}(\{G/G_{\varphi(Z_p)}\} \cup \{M/M_{\varphi(Z_p)} \mid M \in \mathfrak{M}\}, \varphi).$$

Пусть $\mathfrak{M}_1 := \{M/M_{\varphi(Z_p)} \mid M \in \mathfrak{M}\}$. Тогда $f(Z_p) = \Omega F_{(n-1)}(\{H\} \cup \mathfrak{M}_1, \varphi)$. Отметим, что по лемме 2 (3) $m(Z_p) = \Omega F_{(n-1)}(\mathfrak{M}_1, \varphi)$. Так как $\{H\} \cup \mathfrak{M}_1 \subseteq \Omega F_{(n-1)}(\{H\} \cup m(Z_p), \varphi)$, то $f(Z_p) \subseteq \Omega F_{(n-1)}(\{H\} \cup m(Z_p), \varphi)$. С другой стороны, ввиду того, что $\mathfrak{M}_1 \subseteq \{H\} \cup \mathfrak{M}_1 \subseteq f(Z_p)$, следует $m(Z_p) \subseteq f(Z_p)$. Поэтому $\Omega F_{(n-1)}(\{H\} \cup m(Z_p), \varphi) \subseteq f(Z_p)$. Таким образом,

$$f(Z_p) = \Omega F_{(n-1)}(\{H\} \cup m(Z_p), \varphi).$$

Теорема доказана.

Поскольку φ_2 и φ_3 – br -направления и $\varphi_2 \leq \varphi_3$, то из теоремы 1 вытекают результаты для n -кратно Ω -биканонических и n -кратно Ω -композиционных формаций.

Следствие 1. Пусть $n \in \mathbb{N}$, \mathfrak{F} – n -кратно Ω -биканоническая формация с минимальным $\Omega B_{(n-1)}$ -спутником f , \mathfrak{M} – максимальная n -кратно Ω -биканоническая подформация формации \mathfrak{F} с минимальным $\Omega B_{(n-1)}$ -спутником t . Если p – такое простое число, что $Z_p \in \Omega$, $f(Z_p) \setminus m(Z_p) \neq \emptyset$, H – группа минимального порядка из $f(Z_p) \setminus m(Z_p)$ и $O_p(H) = 1$, то формация $f(Z_p)$ имеет следующее строение

$$f(Z_p) = \Omega B_{(n-1)}(\{H\} \cup m(Z_p)).$$

Следствие 2. Пусть $n \in \mathbb{N}$, \mathfrak{F} – n -кратно Ω -композиционная формация с минимальным $\Omega C_{(n-1)}$ -спутником f , \mathfrak{M} – максимальная n -кратно Ω -композиционная подформация формации \mathfrak{F} с минимальным

$\Omega_{C(n-1)}$ -спутником t . Если p – такое простое число, что $Z_p \in \Omega$, $f(Z_p) \setminus t(Z_p) \neq \emptyset$, H – группа минимального порядка из $f(Z_p) \setminus t(Z_p)$ и $O_p(H) = 1$, то формация $f(Z_p)$ имеет следующее строение

$$f(Z_p) = \Omega_{C(n-1)}(\{H\} \cup t(Z_p)).$$

В случае, когда $\Omega = \mathfrak{F}$, из теоремы 1 и следствий 1, 2 получаем соответственно следующие результаты для n -кратно φ -расслоенных, n -кратно биканонических и n -кратно композиционных формаций.

Следствие 3. Пусть $n \in \mathbb{N}$, \mathfrak{F} – n -кратно φ -расслоенная формация с минимальным $\varphi_{(n-1)}$ -спутником f , \mathfrak{M} – максимальная n -кратно φ -расслоенная подформация формации \mathfrak{F} с минимальным $\varphi_{(n-1)}$ -спутником t , где φ – br -направление, удовлетворяющее условию $\varphi \leq \varphi_3$. Если p – такое простое число, что $f(Z_p) \setminus t(Z_p) \neq \emptyset$, H – группа минимального порядка из $f(Z_p) \setminus t(Z_p)$ и $O_p(H) = 1$, то формация $f(Z_p)$ имеет следующее строение

$$f(Z_p) = F_{(n-1)}(\{H\} \cup t(Z_p), \varphi).$$

Следствие 4. Пусть $n \in \mathbb{N}$, \mathfrak{F} – n -кратно биканоническая формация с минимальным $B_{(n-1)}$ -спутником f , \mathfrak{M} – максимальная n -кратно биканоническая подформация формации \mathfrak{F} с минимальным $B_{(n-1)}$ -спутником t . Если p – такое простое число, что $f(Z_p) \setminus t(Z_p) \neq \emptyset$, H – группа минимального порядка из $f(Z_p) \setminus t(Z_p)$ и $O_p(H) = 1$, то формация $f(Z_p)$ имеет следующее строение

$$f(Z_p) = B_{(n-1)}(\{H\} \cup t(Z_p)).$$

Следствие 5. Пусть $n \in \mathbb{N}$, \mathfrak{F} – n -кратно композиционная формация с минимальным $C_{(n-1)}$ -спутником f , \mathfrak{M} – максимальная n -кратно композиционная подформация формации \mathfrak{F} с минимальным $C_{(n-1)}$ -спутником t . Если p – такое простое число, что $f(Z_p) \setminus t(Z_p) \neq \emptyset$, H – группа минимального порядка из $f(Z_p) \setminus t(Z_p)$ и $O_p(H) = 1$, то формация $f(Z_p)$ имеет следующее строение

$$f(Z_p) = C_{(n-1)}(\{H\} \cup t(Z_p)).$$

В теореме 2 доказано, что для любой максимальной n -кратно Ω -расслоенной подформации \mathfrak{M} заданной n -кратно Ω -расслоенной формации \mathfrak{F} существует такой ее спутник, строение которого определяется строением минимального спутника формации \mathfrak{F} .

Теорема 2. Пусть $n \in \mathbb{N}$, \mathfrak{F} – n -кратно $\Omega\varphi$ -расслоенная формация с минимальным $\Omega\varphi_{(n-1)}$ -спутником f , $\varphi_0 \leq \varphi$. Если \mathfrak{M} – максимальная n -кратно $\Omega\varphi$ -расслоенная подформация формации \mathfrak{F} , то \mathfrak{M} имеет такой $\Omega\varphi_{(n-1)}$ -спутник h , что для некоторого $A \in (\Omega \cap K(\mathfrak{F})) \cup \{\Omega'\}$ формация $h(A)$ является максимальной $(n-1)$ -кратно $\Omega\varphi$ -расслоенной подформацией формации $f(A)$, а для всех $B \in ((\Omega \cap K(\mathfrak{F})) \cup \{\Omega'\}) \setminus \{A\}$ имеет место равенство $h(B) = f(B)$.

Доказательство. Пусть \mathfrak{M} – максимальная n -кратно $\Omega\varphi$ -расслоенная подформация формации \mathfrak{F} и t – ее минимальный $\Omega\varphi_{(n-1)}$ -спутник. Так как $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{F}$, то $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{M} \neq \emptyset$. Пусть $G \in \mathfrak{F} \setminus \mathfrak{M}$. Тогда $\mathfrak{M} = \Omega F_n(\mathfrak{M}, \varphi) \subset \Omega F_n(\{G\} \cup \mathfrak{M}, \varphi) \subseteq \mathfrak{F}$. Отсюда, с учетом максимальнойности \mathfrak{M} в \mathfrak{F} , следует, что $\Omega F_n(\{G\} \cup \mathfrak{M}, \varphi) = \mathfrak{F}$.

Покажем, что $K(\mathfrak{F}) \cap \Omega = (K(G) \cup K(\mathfrak{M})) \cap \Omega$. Поскольку $\{G\} \cup \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$, то $(K(G) \cup K(\mathfrak{M})) \cap \Omega \subseteq K(\mathfrak{F}) \cap \Omega$. Допустим, что $(K(G) \cup K(\mathfrak{M})) \cap \Omega \subset K(\mathfrak{F}) \cap \Omega$. Тогда существует такая группа $X \in K(\mathfrak{F}) \cap \Omega$, что $X \notin (K(G) \cup K(\mathfrak{M})) \cap \Omega$. Это означает, что $X \in \Omega \setminus (K(G) \cup K(\mathfrak{M}))$ и, в силу леммы 2 (3), $f(X) = \emptyset$. С другой стороны, поскольку $\mathfrak{F} = \Omega F_n(\mathfrak{F}, \varphi)$, то, по лемме 2 (3) $f(X) = \Omega F_{(n-1)}((T/T_{\varphi(A)} \mid T \in \mathfrak{F}), \varphi) \neq \emptyset$. Получили противоречие. Тем самым установлено, что $K(\mathfrak{F}) \cap \Omega = (K(G) \cup K(\mathfrak{M})) \cap \Omega$ и, значит,

$$f(A) = \begin{cases} \Omega F_{(n-1)}(\{L/O_{\Omega}(L) \mid L \in \{G\} \cup \mathfrak{M}\}, \varphi), & \text{если } A \in \{\Omega'\}; \\ \Omega F_{(n-1)}(\{L/L_{\varphi(A)} \mid L \in \{G\} \cup \mathfrak{M}\}, \varphi), & \text{если } A \in \Omega \cap K(\mathfrak{F}); \\ \emptyset, & \text{если } A \in \Omega \setminus K(\mathfrak{F}). \end{cases}$$

Пусть

$$\mathfrak{M}^{\Omega} := \{M/O_{\Omega}(M) \mid M \in \mathfrak{M}\};$$

$$\mathfrak{M}^A := \begin{cases} \{M/M_{\varphi(A)} \mid M \in \mathfrak{M}\}, & \text{если } A \in \Omega \cap K(\mathfrak{M}); \\ \emptyset, & \text{если } A \in (\Omega \cap K(\mathfrak{F})) \setminus K(\mathfrak{M}). \end{cases}$$

Тогда

$$f(A) = \begin{cases} \Omega F_{(n-1)}(\{G/O_{\Omega}(G)\} \cup \mathfrak{M}^{\Omega}, \varphi), & \text{если } A \in \{\Omega'\}; \\ \Omega F_{(n-1)}(\{G/G_{\varphi(A)}\} \cup \mathfrak{M}^A, \varphi), & \text{если } A \in \Omega \cap K(\mathfrak{F}); \\ \emptyset, & \text{если } A \in \Omega \setminus K(\mathfrak{F}). \end{cases}$$

Отметим, что, в силу леммы 2 (3), минимальный $\Omega\varphi_{(n-1)}$ -спутник t формации \mathfrak{M} имеет следующее строение:

$$t(A) = \begin{cases} \Omega F_{(n-1)}(\mathfrak{M}^{\Omega}, \varphi), & \text{если } A \in \{\Omega'\}; \\ \Omega F_{(n-1)}(\mathfrak{M}^A, \varphi), & \text{если } A \in \Omega \cap K(\mathfrak{M}); \\ \emptyset, & \text{если } A \in \Omega \setminus K(\mathfrak{M}). \end{cases}$$

Пусть $A \in \{\Omega'\}$. Так как $\{G/O_\Omega(G)\} \cup \mathfrak{M}^\Omega \subseteq \Omega F_{(n-1)}(\{G/O_\Omega(G)\} \cup m(\Omega'), \varphi)$, то $f(\Omega') \subseteq \Omega F_{(n-1)}(\{G/O_\Omega(G)\} \cup m(\Omega'), \varphi)$. С другой стороны, поскольку $\mathfrak{M}^\Omega \subseteq \{G/O_\Omega(G)\} \cup \mathfrak{M}^\Omega \subseteq f(\Omega')$, то $m(\Omega') \subseteq f(\Omega')$. Поэтому $\Omega F_{(n-1)}(\{G/O_\Omega(G)\} \cup m(\Omega'), \varphi) \subseteq f(\Omega')$. Тем самым установлено, что $f(\Omega') = \Omega F_{(n-1)}(\{G/O_\Omega(G)\} \cup m(\Omega'), \varphi)$.

Пусть $A \in \Omega \cap K(\mathfrak{F})$. Рассуждая, как и выше, получаем равенство $f(A) = \Omega F_{(n-1)}(\{G/G_{\varphi(A)}\} \cup m(A), \varphi)$. Таким образом,

$$f(A) = \begin{cases} \Omega F_{(n-1)}(\{G/O_\Omega(G)\} \cup m(\Omega'), \varphi), & \text{если } A \in \{\Omega'\}; \\ \Omega F_{(n-1)}(\{G/G_{\varphi(A)}\} \cup m(A), \varphi), & \text{если } A \in \Omega \cap K(\mathfrak{F}); \\ \emptyset, & \text{если } A \in \Omega \setminus K(\mathfrak{F}). \end{cases}$$

Поскольку $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{F}$, то по лемме 2 (4) $m < f$. Поэтому найдется такой элемент $X \in \Omega \cup \{\Omega'\}$, что $m(X) \subset f(X)$. Рассмотрим случай, когда $X \in \{\Omega'\}$, т. е. $m(\Omega') \subset f(\Omega')$. По лемме 3 в $f(\Omega')$ существует такая максимальная $(n-1)$ -кратно $\Omega\varphi$ -расслоенная подформация \mathfrak{M}_1 , что $m(\Omega') \subseteq \mathfrak{M}_1$.

Пусть h – ΩF -функция такая, что $h(\Omega') = \mathfrak{M}_1$ и $h(A) = f(A)$ для всех $A \in \Omega$ и $\mathfrak{H} := \Omega F(h, \varphi)$. Покажем, что $\mathfrak{H} = \mathfrak{M}$. Так как $h(\Omega') = \mathfrak{M}_1 \subset f(\Omega')$ и $h(A) = f(A)$ для всех $A \in \Omega$, то $h \leq f$. Тогда по определению Ω -расслоенной формации $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$. Если $\mathfrak{H} = \mathfrak{F}$, то по лемме 2 (4) $h_1(\Omega') = f(\Omega')$, где h_1 – минимальный $\Omega\varphi_{(n-1)}$ -спутник формации \mathfrak{H} . С другой стороны, по лемме 2 (3) $h_1(\Omega') \subseteq h(\Omega') \subset f(\Omega')$. Получили противоречие. Таким образом, $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{F}$. Поскольку $m(\Omega') \subseteq \mathfrak{M}_1 = h(\Omega')$ и $m(A) \subseteq f(A) = h(A)$ для всех $A \in \Omega$, то $m \leq h$. Следовательно, $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H}$. Так как \mathfrak{M} – максимальная $(n-1)$ -кратно $\Omega\varphi$ -расслоенная подформация формации \mathfrak{F} , то $\mathfrak{M} = \mathfrak{H}$ и h – искомый $\Omega\varphi_{(n-1)}$ -спутник формации \mathfrak{M} .

Рассмотрим случай, когда $f(\Omega') = m(\Omega')$. Тогда $X \in \Omega$ и $m(X) \subset f(X)$. Если $X \in \Omega \setminus K(\mathfrak{F})$, то $m(X) = \emptyset = f(X)$, что невозможно. Поэтому $X \in \Omega \cap K(\mathfrak{F})$. По лемме 3 в $f(X)$ существует такая максимальная $(n-1)$ -кратно $\Omega\varphi$ -расслоенная подформация \mathfrak{M}_2 , что $m(X) \subseteq \mathfrak{M}_2$. Пусть b – ΩF -функция такая, что $b(\Omega') = f(\Omega')$, $b(X) = \mathfrak{M}_2$ и $b(Y) = f(Y)$ для всех $Y \in \Omega \setminus (X)$ и $\mathfrak{B} := \Omega F(b, \varphi)$. Установим, что $\mathfrak{B} = \mathfrak{M}$. Поскольку $\mathfrak{M}_2 \subset f(X)$, то $b \leq f$. Следовательно, $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{F}$. Если $\mathfrak{B} = \mathfrak{F}$, то по лемме 2 (4) $b_1(X) = f(X)$, где b_1 – минимальный $\Omega\varphi_{(n-1)}$ -спутник формации \mathfrak{B} . С другой стороны, по лемме 2 (3) $b_1(X) \subseteq b(X) \subset f(X)$. Получили противоречие. Таким образом, $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{F}$. Поскольку $m(\Omega') = f(\Omega') = b(\Omega')$, $m(X) \subseteq \mathfrak{M}_2 = b(X)$ и $m(Y) \subseteq f(Y) = b(Y)$ для всех $Y \in \Omega \setminus (X)$, то $m \leq b$. Следовательно, $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{B}$. Так как \mathfrak{M} – максимальная $(n-1)$ -кратно $\Omega\varphi$ -расслоенная подформация в \mathfrak{F} , то $\mathfrak{M} = \mathfrak{B}$ и, значит, b – искомый $\Omega\varphi_{(n-1)}$ -спутник формации \mathfrak{M} . Теорема доказана.

Поскольку $\varphi_0 \leq \varphi_2 \leq \varphi_3$, то из теоремы 2 вытекают результаты для n -кратно Ω -свободных, n -кратно Ω -биканонических и n -кратно Ω -композиционных формаций.

Следствие 6. Пусть $n \in \mathbb{N}$, \mathfrak{F} – n -кратно Ω -свободная формация с минимальным $\Omega Fr_{(n-1)}$ -спутником f . Если \mathfrak{M} – максимальная n -кратно Ω -свободная подформация формации \mathfrak{F} , то \mathfrak{M} имеет такой $\Omega Fr_{(n-1)}$ -спутник h , что для некоторого $A \in (\Omega \cap K(\mathfrak{F})) \cup \{\Omega'\}$ формация $h(A)$ является максимальной $(n-1)$ -кратно Ω -свободной подформацией формации $f(A)$, а для всех $B \in ((\Omega \cap K(\mathfrak{F})) \cup \{\Omega'\}) \setminus (A)$ имеет место равенство $h(B) = f(B)$.

Следствие 7. Пусть $n \in \mathbb{N}$, \mathfrak{F} – n -кратно Ω -биканоническая формация с минимальным $\Omega B_{(n-1)}$ -спутником f . Если \mathfrak{M} – максимальная n -кратно Ω -биканоническая подформация формации \mathfrak{F} , то \mathfrak{M} имеет такой $\Omega B_{(n-1)}$ -спутник h , что для некоторого $A \in (\Omega \cap K(\mathfrak{F})) \cup \{\Omega'\}$ формация $h(A)$ является максимальной $(n-1)$ -кратно Ω -биканонической подформацией формации $f(A)$, а для всех $B \in ((\Omega \cap K(\mathfrak{F})) \cup \{\Omega'\}) \setminus (A)$ имеет место равенство $h(B) = f(B)$.

Следствие 8. Пусть $n \in \mathbb{N}$, \mathfrak{F} – n -кратно Ω -композиционная формация с минимальным $\Omega C_{(n-1)}$ -спутником f . Если \mathfrak{M} – максимальная n -кратно Ω -композиционная подформация формации \mathfrak{F} , то \mathfrak{M} имеет такой $\Omega C_{(n-1)}$ -спутник h , что для некоторого $A \in (\Omega \cap K(\mathfrak{F})) \cup \{\Omega'\}$ формация $h(A)$ является максимальной $(n-1)$ -кратно Ω -композиционной подформацией формации $f(A)$, а для всех $B \in ((\Omega \cap K(\mathfrak{F})) \cup \{\Omega'\}) \setminus (A)$ имеет место равенство $h(B) = f(B)$.

В случае, когда $\Omega = \mathfrak{F}$, из теоремы 2 и следствий 6–8 получаем следующие результаты для n -кратно φ -расслоенных, n -кратно свободных, n -кратно биканонических и n -кратно композиционных формаций соответственно.

Следствие 9. Пусть $n \in \mathbb{N}$, \mathfrak{F} – n -кратно φ -расслоенная формация с минимальным $\varphi_{(n-1)}$ -спутником f , $\varphi_0 \leq \varphi$. Если \mathfrak{M} – максимальная n -кратно φ -расслоенная подформация формации \mathfrak{F} , то \mathfrak{M} имеет такой $\varphi_{(n-1)}$ -спутник h , что для некоторого $A \in K(\mathfrak{F})$ формация $h(A)$ является максимальной $(n-1)$ -кратно φ -расслоенной подформацией формации $f(A)$, а для всех $B \in K(\mathfrak{F}) \setminus (A)$ имеет место равенство $h(B) = f(B)$.

Следствие 10. Пусть $n \in \mathbb{N}$, \mathfrak{F} – n -кратно свободная формация с минимальным $Fr_{(n-1)}$ -спутником f . Если \mathfrak{M} – максимальная n -кратно свободная подформация формации \mathfrak{F} , то \mathfrak{M} имеет такой $Fr_{(n-1)}$ -спутник h , что для некоторого $A \in K(\mathfrak{F})$ формация $h(A)$ является максимальной $(n-1)$ -кратно свободной подформацией формации $f(A)$, а для всех $B \in K(\mathfrak{F}) \setminus (A)$ имеет место равенство $h(B) = f(B)$.

Следствие 11. Пусть $n \in \mathbb{N}$, \mathfrak{F} – n -кратно биканоническая формация с минимальным $B_{(n-1)}$ -спутником f . Если \mathfrak{M} – максимальная n -кратно биканоническая подформация формации \mathfrak{F} , то \mathfrak{M} имеет такой

$V_{(n-1)}$ -спутник h , что для некоторого $A \in K(\mathfrak{F})$ формация $h(A)$ является максимальной $(n-1)$ -кратно биканонической подформацией формации $f(A)$, а для всех $B \in K(\mathfrak{F}) \setminus (A)$ имеет место равенство $h(B) = f(B)$.

Следствие 12. Пусть $n \in \mathbb{N}$, \mathfrak{F} – n -кратно композиционная формация с минимальным $C_{(n-1)}$ -спутником f . Если \mathfrak{M} – максимальная n -кратно композиционная подформация формации \mathfrak{F} , то \mathfrak{M} имеет такой $C_{(n-1)}$ -спутник h , что для некоторого $A \in K(\mathfrak{F})$ формация $h(A)$ является максимальной $(n-1)$ -кратно композиционной подформацией формации $f(A)$, а для всех $B \in K(\mathfrak{F}) \setminus (A)$ имеет место равенство $h(B) = f(B)$.

3.2. Достаточные условия максимальности кратко Ω -расслоенной подформации кратко Ω -расслоенной формации

Теорема 3. Пусть \mathfrak{F} и \mathfrak{M} – n -кратно Ω -расслоенные формации с направлением φ и минимальными $\Omega\varphi_{(n-1)}$ -спутниками f и t соответственно. Если $A \in \Omega \cap K(\mathfrak{M})$, $\varphi - b_{A\Gamma}$ -направление, $f(\Omega') = t(\Omega')$, $f(B) = t(B)$ для любого $B \in \Omega \setminus (A)$, $t(A) \subset f(A)$, причем для любой группы $G \in f(A) \setminus t(A)$ с $O_A(G) = 1$ выполняется равенство $f(A) = \Omega F_{(n-1)}(\{G\} \cup t(A), \varphi)$, то \mathfrak{M} является максимальной n -кратно $\Omega\varphi$ -расслоенной подформацией формации \mathfrak{F} .

Доказательство. Пусть $A \in \Omega \cap K(\mathfrak{M})$, $\varphi - b_{A\Gamma}$ -направление, $f(\Omega') = t(\Omega')$, $f(B) = t(B)$ для любого $B \in \Omega \setminus (A)$, $t(A) \subset f(A)$, причем для любой группы $G \in f(A) \setminus t(A)$ с $O_A(G) = 1$ выполняется $f(A) = \Omega F_{(n-1)}(\{G\} \cup t(A), \varphi)$. Тогда $t < f$ и, значит, по определению Ω -расслоенной формации $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$. Допустим, что $\mathfrak{M} = \mathfrak{F}$. Тогда по лемме 2 (3) $t = f$, что невозможно. Следовательно, $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{F}$.

Пусть \mathfrak{L} – произвольная n -кратно $\Omega\varphi$ -расслоенная формация, причем $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{F}$. Покажем, что $\mathfrak{L} = \mathfrak{F}$. Поскольку $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{L}$, то существует группа $H \in \mathfrak{L} \setminus \mathfrak{M}$. Так как $H \notin \mathfrak{M}$, то $\mathfrak{M} = \Omega F_n(\mathfrak{M}, \varphi) \subset \Omega F_n(\{H\} \cup \mathfrak{M}, \varphi) \subseteq \mathfrak{L}$. Пусть $\mathfrak{H} := \Omega F_n(\{H\} \cup \mathfrak{M}, \varphi)$, h – минимальный $\Omega\varphi_{(n-1)}$ -спутник формации \mathfrak{H} , l – минимальный $\Omega\varphi_{(n-1)}$ -спутник формации \mathfrak{L} .

Ввиду того, что $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{F}$, по лемме 2 (4) имеем $l \leq f$. Так как $H \in \mathfrak{L}$, то по определению Ω -расслоенной формации $H/H_{\varphi(X)} \in l(X) \subseteq f(X)$ для любого $X \in \Omega \cap K(H)$. Если $A \in K(H)$, то $H/H_{\varphi(A)} \in f(A)$. Если $A \notin K(H)$, то $H \in \mathfrak{G}_{A'}$. Поскольку $\varphi - r$ -направление, то $H \in \mathfrak{G}_{A'} \subseteq \mathfrak{G}_{A'}\varphi(A) = \varphi(A)$. Поэтому $H = H_{\varphi(A)}$. Так как $A \in K(\mathfrak{L}) \cap \Omega$, то $l(A) \neq \emptyset$. Следовательно, $H/H_{\varphi(A)} = 1 \in l(A) \subseteq f(A)$, т. е. $H/H_{\varphi(A)} \in f(A)$. Покажем, что $H/H_{\varphi(A)} \notin t(A)$. Предположим, что $H/H_{\varphi(A)} \in t(A)$. Поскольку для любого $B \in (\Omega \cap K(H)) \setminus (A)$ справедливо $H/H_{\varphi(B)} \in f(B) = t(B)$ и $H/O_{\Omega}(H) \in l(\Omega') \subseteq f(\Omega') = t(\Omega')$, то по определению Ω -расслоенной формации $H \in \mathfrak{M}$, что невозможно. Следовательно, $H/H_{\varphi(A)} \notin t(A)$ и, значит, $H/H_{\varphi(A)} \in f(A) \setminus t(A)$.

Поскольку $\varphi - b_{A\Gamma}$ -направление, то по лемме 2 (1) $O_A(H/H_{\varphi(A)}) = 1$. Так как $H/H_{\varphi(A)} \in f(A) \setminus t(A)$ и $O_A(H/H_{\varphi(A)}) = 1$, то по условию теоремы справедливо равенство

$$f(A) = \Omega F_{n-1}(\{H/H_{\varphi(A)}\} \cup t(A), \varphi).$$

Покажем, что $l(A) = f(A)$. Так как по лемме 2 (4) $t < h \leq l \leq f$, с учетом равенств $t(\Omega') = f(\Omega')$ и $t(B) = f(B)$ для любого $B \in \Omega \setminus (A)$, имеет место

$$\begin{aligned} m(\Omega') &= h(\Omega') = l(\Omega') = f(\Omega'); \\ m(B) &= h(B) = l(B) = f(B) \text{ для любого } B \in \Omega \setminus (A); \\ m(A) &\subset h(A) \subseteq l(A) \subseteq f(A). \end{aligned}$$

Поскольку $\mathfrak{H} = \Omega F_n(\mathfrak{H}, \varphi)$ и $\mathfrak{H} = \Omega F_n(\{H\} \cup \mathfrak{M}, \varphi)$, то, в силу леммы 2 (3), справедливо равенство $K(\mathfrak{H}) \cap \Omega = (K(H) \cup K(\mathfrak{M})) \cap \Omega$. По лемме 2 (3) минимальный $\Omega\varphi_{(n-1)}$ -спутник формации \mathfrak{H} имеет следующее строение:

$$h(X) = \begin{cases} \Omega F_{(n-1)}(\{L/O_{\Omega}(L) \mid L \in \{H\} \cup \mathfrak{M}\}, \varphi), & \text{если } X \in \{\Omega'\}; \\ \Omega F_{(n-1)}(\{L/L_{\varphi(X)} \mid L \in \{H\} \cup \mathfrak{M}\}, \varphi), & \text{если } X \in \Omega \cap K(\mathfrak{H}); \\ \emptyset, & \text{если } X \in \Omega \setminus K(\mathfrak{H}). \end{cases}$$

Рассуждая как и при доказательстве теоремы 2, нетрудно показать, что

$$h(X) = \begin{cases} \Omega F_{(n-1)}(\{H/O_{\Omega}(H)\} \cup t(\Omega'), \varphi), & \text{если } X \in \{\Omega'\}; \\ \Omega F_{(n-1)}(\{H/H_{\varphi(X)}\} \cup t(X), \varphi), & \text{если } X \in \Omega \cap K(\mathfrak{H}); \\ \emptyset, & \text{если } X \in \Omega \setminus K(\mathfrak{H}). \end{cases}$$

Если $A \notin K(\mathfrak{H})$, то $h(A) = \emptyset$ и, значит, $m(A) = \emptyset = h(A)$. Получили противоречие. Следовательно, $A \in \Omega \cap K(\mathfrak{H})$ и поэтому $h(A) = \Omega F_{(n-1)}(\{H/H_{\varphi(A)}\} \cup t(A), \varphi) = f(A)$. Это, ввиду включения $h(A) \subseteq l(A) \subseteq f(A)$, означает равенство $l(A) = f(A)$. Таким образом, $l = f$ и по определению Ω -расслоенной формации $\mathfrak{L} = \mathfrak{F}$. Тем самым установлено, что \mathfrak{M} – максимальная n -кратно $\Omega\varphi$ -расслоенная подформация формации \mathfrak{F} . Теорема доказана.

Поскольку φ_2 и φ_3 являются b_A -направлениями для любой абелевой группы $A \in \mathfrak{A}$, то из теоремы 3 вытекают результаты для n -кратно Ω -биканонических и n -кратно Ω -композиционных формаций.

Следствие 13. Пусть \mathfrak{F} и \mathfrak{M} – n -кратно Ω -биканонические формации с минимальными $\Omega B_{(n-1)}$ -спутниками f и t соответственно. Если $A \in \Omega \cap K(\mathfrak{M}) \cap \mathfrak{A}$, $f(\Omega') = t(\Omega')$, $f(B) = t(B)$ для любого $B \in (\Omega \cap \mathfrak{A}) \setminus (A)$, $t(A) \subset f(A)$, причем для любой группы $G \in f(A) \setminus t(A)$ с $O_A(G) = 1$ выполняется равенство $f(A) = \Omega B_{(n-1)}(\{G\} \cup t(A))$, то \mathfrak{M} является максимальной n -кратно Ω -биканонической подформацией формации \mathfrak{F} .

Следствие 14. Пусть \mathfrak{F} и \mathfrak{M} – n -кратно Ω -композиционные формации с минимальными $\Omega C_{(n-1)}$ -спутниками f и t соответственно. Если $A \in \Omega \cap K(\mathfrak{M}) \cap \mathfrak{A}$, $f(\Omega') = t(\Omega')$, $f(B) = t(B)$ для любого $B \in \Omega \setminus (A)$, $t(A) \subset f(A)$, причем для любой группы $G \in f(A) \setminus t(A)$ с $O_A(G) = 1$ выполняется равенство $f(A) = \Omega C_{(n-1)}(\{G\} \cup t(A))$, то \mathfrak{M} является максимальной n -кратно Ω -композиционной подформацией формации \mathfrak{F} .

В случае, когда $\Omega = \mathfrak{Z}$, из теоремы 3 и следствий 13, 14 получаем результаты для n -кратно φ -расслоенных, n -кратно биканонических и n -кратно композиционных формаций.

Следствие 15. Пусть \mathfrak{F} и \mathfrak{M} – n -кратно расслоенные формации с направлением φ и минимальными $\varphi_{(n-1)}$ -спутниками f и t соответственно. Если $A \in K(\mathfrak{M})$, φ – b_{Ar} -направление, $f(B) = t(B)$ для любого $B \in \mathfrak{Z} \setminus (A)$, $t(A) \subset f(A)$, причем для любой группы $G \in f(A) \setminus t(A)$ с $O_A(G) = 1$ выполняется равенство $f(A) = F_{(n-1)}(\{G\} \cup t(A), \varphi)$, то \mathfrak{M} является максимальной n -кратно φ -расслоенной подформацией формации \mathfrak{F} .

Следствие 16. Пусть \mathfrak{F} и \mathfrak{M} – n -кратно биканонические формации с минимальными $B_{(n-1)}$ -спутниками f и t соответственно. Если $A \in K(\mathfrak{M}) \cap \mathfrak{A}$, $f(B) = t(B)$ для любого $B \in (\mathfrak{Z} \cap \mathfrak{A}) \setminus (A)$, $t(A) \subset f(A)$, причем для любой группы $G \in f(A) \setminus t(A)$ с $O_A(G) = 1$ выполняется равенство $f(A) = B_{(n-1)}(\{G\} \cup t(A))$, то \mathfrak{M} является максимальной n -кратно биканонической подформацией формации \mathfrak{F} .

Следствие 17. Пусть \mathfrak{F} и \mathfrak{M} – n -кратно композиционные формации с минимальными $C_{(n-1)}$ -спутниками f и t соответственно. Если $A \in K(\mathfrak{M}) \cap \mathfrak{A}$, $f(B) = t(B)$ для любого $B \in (\mathfrak{Z} \cap \mathfrak{A}) \setminus (A)$, $t(A) \subset f(A)$, причем для любой группы $G \in f(A) \setminus t(A)$ с $O_A(G) = 1$ выполняется равенство $f(A) = C_{(n-1)}(\{G\} \cup t(A))$, то \mathfrak{M} является максимальной n -кратно композиционной подформацией формации \mathfrak{F} .

3.3. О группах, входящих в максимальные подформациикратно Ω -расслоенных формаций. Установим, что для любой неединичной разрешимой Ω -группы G , принадлежащей n -кратно Ω -расслоенной формации \mathfrak{F} с направлением φ , фактор-группа $G/(\bigcap_{A \in \Omega} G_{\varphi(A)})$ принадлежит пересечению всех максимальных n -кратно $\Omega\varphi$ -расслоенных подформаций формации \mathfrak{F} . Используя методы доказательств, разработанные в [4] для исследования τ -замкнутых n -кратно локальных формаций, где τ – подгрупповой функтор, предварительно докажем следующие две леммы.

Лемма 4. Пусть $n \in \mathbb{N}$, φ – FR -функция, $\varphi_0 \leq \varphi$. Если $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2 \in \Omega\varphi^n F$ и $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2$, то $\Phi_{\Omega\varphi^n F}(\mathfrak{F}_1) \subseteq \Phi_{\Omega\varphi^n F}(\mathfrak{F}_2)$. **Доказательство.** Пусть $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2 \in \Omega\varphi^n F$ и $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2$. Предположим, что $\Phi_{\Omega\varphi^n F}(\mathfrak{F}_1) \not\subseteq \Phi_{\Omega\varphi^n F}(\mathfrak{F}_2)$. Тогда в \mathfrak{F}_2 существует такая максимальная n -кратно $\Omega\varphi$ -расслоенная подформация \mathfrak{M} , что $\Phi_{\Omega\varphi^n F}(\mathfrak{F}_1) \not\subseteq \mathfrak{M}$. Ввиду включения $\Phi_{\Omega\varphi^n F}(\mathfrak{F}_1) \subseteq \mathfrak{F}_1$, имеем $\mathfrak{F}_1 \not\subseteq \mathfrak{M}$. Это означает, что $\mathfrak{M} \subset \Omega F_n(\mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{M}, \varphi)$ и, следовательно,

$$\mathfrak{F}_2 = \Omega F_n(\mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{M}, \varphi) = \mathfrak{F}_1 \vee_{\Omega\varphi^n F} \mathfrak{M}.$$

Так как, ввиду замечания 3, $\mathfrak{F}_2 /_{\Omega\varphi^n F} \mathfrak{M} \cong \mathfrak{F}_1 /_{\Omega\varphi^n F} (\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{M})$ и по замечанию 4 множество $\mathfrak{F}_2 /_{\Omega\varphi^n F} \mathfrak{M}$ имеет лишь два элемента \mathfrak{M} и \mathfrak{F}_2 , то множество $\mathfrak{F}_1 /_{\Omega\varphi^n F} (\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{M})$ также является двухэлементным. Тогда по замечанию 4 формация $\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{M}$ является максимальной n -кратно $\Omega\varphi$ -расслоенной подформацией в \mathfrak{F}_1 . Поэтому $\Phi_{\Omega\varphi^n F}(\mathfrak{F}_1) \subseteq \mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{M}$. Получили противоречие. Следовательно, $\Phi_{\Omega\varphi^n F}(\mathfrak{F}_1) \subseteq \Phi_{\Omega\varphi^n F}(\mathfrak{F}_2)$. Лемма доказана.

Лемма 5. Пусть $n \in \mathbb{N}$, φ – FR -функция, являющаяся br -направлением Ω -расслоенной формации, $\varphi \leq \varphi_3$, G – неединичная разрешимая Ω -группа. Тогда $G/F(G) \in \Phi_{\Omega\varphi^n F}(\Omega F_n(G, \varphi))$.

Доказательство. Пусть G – контрпример минимального порядка и $\mathfrak{F} := \Omega F_n(G, \varphi)$. Так как $G \neq 1$, то $\mathfrak{F} \neq \mathfrak{E}$ и, значит, $1 \in \Phi_{\Omega\varphi^n F}(\mathfrak{F})$. Тогда из $G/F(G) \notin \Phi_{\Omega\varphi^n F}(\mathfrak{F})$ следует, что $F(G) \neq G$ и, в частности, $\Phi(G) \neq G$. Предположим, что $\Phi(G) \neq 1$. Согласно лемме 1 (6), имеем

$$G/F(G) \cong (G/\Phi(G))/(F(G)/\Phi(G)) = (G/\Phi(G))/F(G/\Phi(G)).$$

Поскольку $G/\Phi(G)$ – неединичная разрешимая Ω -группа и $|G/\Phi(G)| < |G|$, то, в силу выбора группы G , справедливо

$$(G/\Phi(G))/F(G/\Phi(G)) \in \Phi_{\Omega\varphi^n F}(\Omega F_n(G/\Phi(G), \varphi)).$$

Из $G \in \mathfrak{F}$ следует, что $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$ и, значит, $\Omega F_n(G/\Phi(G), \varphi) \subseteq \mathfrak{F}$. Так как φ – r -направление, то $\varphi_0 \leq \varphi$. Тогда по лемме 4 получаем

$$\Phi_{\Omega\varphi^n F}(\Omega F_n(G/\Phi(G), \varphi)) \subseteq \Phi_{\Omega\varphi^n F}(\mathfrak{F}).$$

Следовательно, $G/F(G) \in \Phi_{\Omega\varphi^n F}(\mathfrak{F})$, что противоречит выбору группы G . Тем самым установлено, что $\Phi(G) = 1$ и, ввиду леммы 1 (5), $F(G) \neq 1$.

I. Рассмотрим случай, когда G – примитивная группа. Пусть M – примитиватор группы G . Согласно лемме 1 (2), $G = P \rtimes M$ – монолитическая группа с абелевым монолитом $P = C_G(P)$. Пусть $K(P) = (Z_p)$. Так как φ – br -направление и $\varphi \leq \varphi_3$, то

$$\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{G}_{(Z_p)} \mathfrak{N}_p \subseteq (\mathfrak{G}_{(Z_p)} \varphi(Z_p)) \mathfrak{N}_p = \varphi(Z_p) \mathfrak{N}_p = \varphi(Z_p) \subseteq \varphi_3(Z_p).$$

Поэтому $F(G) \subseteq G_{\varphi(Z_p)} \subseteq G_{\varphi_3(Z_p)} = F_{Z_p}(G) \subseteq C_G(P) = P$ и, следовательно, $P = F(G) = G_{\varphi(Z_p)}$.

Поскольку $\mathfrak{F} = \Omega F_n(G, \varphi)$ и $\varphi_0 \leq \varphi$, то по лемме 2 (3) формация \mathfrak{F} обладает единственным минимальным $\Omega\varphi_{(n-1)}$ -спутником f , имеющим, с учетом $K(G) \subseteq \Omega$, следующее строение:

$$f(A) = \begin{cases} \Omega F_{(n-1)}(G/O_{\Omega}(G), \varphi) = \mathfrak{E}, & \text{если } A \in \{\Omega'\}; \\ \Omega F_{(n-1)}(G/G_{\varphi(A)}, \varphi), & \text{если } A \in K(G); \\ \emptyset, & \text{если } A \in \Omega \setminus K(G), \end{cases}$$

в частности, $f(Z_p) = \Omega F_{(n-1)}(G/P, \varphi) = \Omega F_{(n-1)}(M, \varphi)$.

Так как $G/F(G) \notin \Phi_{\Omega\varphi^{nF}}(\mathfrak{F})$, то в \mathfrak{F} существует такая максимальная n -кратно $\Omega\varphi$ -расслоенная подформация \mathfrak{H} , что $G/F(G) \notin \mathfrak{H}$. Пусть h – минимальный $\Omega\varphi_{(n-1)}$ -спутник формации \mathfrak{H} . Ввиду леммы 2 (4), $h < f$. Если $h(\Omega') \subset f(\Omega')$, то из $f(\Omega') = \mathfrak{E}$ получаем $h(\Omega') = \emptyset$, что противоречит определению Ω -расслоенной формации. Следовательно, $h(\Omega') = f(\Omega')$. Если $h(Z_p) = f(Z_p)$, то $G/F(G) = G/G_{\varphi(Z_p)} \in h(Z_p) \subseteq \mathfrak{H}$, что невозможно. Следовательно, $h(Z_p) \subset f(Z_p)$ и $h(A) \subseteq f(A)$ для любой группы $A \in \Omega \setminus (Z_p)$. По лемме 3 в $f(Z_p)$ существует такая максимальная $(n-1)$ -кратно $\Omega\varphi$ -расслоенная подформация \mathfrak{M} , что $h(Z_p) \subseteq \mathfrak{M}$. Отметим также, что $\Phi_{\Omega\varphi^{(n-1)F}}(f(Z_p)) \subseteq \mathfrak{M}$.

Пусть m – такая ΩF -функция, что $m(\Omega') = f(\Omega')$, $m(Z_p) = \mathfrak{M}$, $m(A) = f(A)$ для любой группы $A \in \Omega \setminus (Z_p)$, и \mathfrak{M}_1 – $\Omega\varphi$ -расслоенная формация с Ω -спутником m . В силу задания функции m , имеем $\mathfrak{M}_1 \in \Omega\varphi^{nF}$. Покажем, что $M \in \mathfrak{M}_1$. Поскольку $|M| < |G|$ и M – неединичная разрешимая Ω -группа, то, ввиду выбора группы G , справедливо

$$M/F(M) \in \Phi_{\Omega\varphi^{(n-1)F}}(\Omega F_{(n-1)}(M, \varphi)) = \Phi_{\Omega\varphi^{(n-1)F}}(f(Z_p)) \subseteq \mathfrak{M} = m(Z_p).$$

Так как $F(M) \subseteq M_{\varphi(Z_p)}$, то $M/M_{\varphi(Z_p)} \in m(Z_p)$. Поскольку $M \in \mathfrak{F}$, то $M/O_{\Omega}(M) \in f(\Omega') = m(\Omega')$ и $M/M_{\varphi(A)} \in f(A) = m(A)$ для любой группы $A \in K(M) \setminus (Z_p)$. Это, по определению Ω -расслоенной формации, означает, что $M \in \mathfrak{M}_1$. Так как

$$\begin{aligned} h(\Omega') &= m(\Omega') = f(\Omega'); \\ h(Z_p) &\subseteq m(Z_p) \subset f(Z_p); \\ h(A) &\subseteq m(A) = f(A) \text{ для любой группы } A \in \Omega \setminus (Z_p), \end{aligned}$$

то, $h \leq m < f$ и, согласно определению Ω -расслоенной формации, $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{F}$. Если $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{F}$, то по лемме 2 (3) $f \leq m$ и, значит, $f(Z_p) \subseteq m(Z_p)$, что противоречит включению $m(Z_p) \subset f(Z_p)$. Следовательно, $\mathfrak{M}_1 \subset \mathfrak{F}$ и, в силу максимальнойности \mathfrak{H} в \mathfrak{F} , справедливо равенство $\mathfrak{H} = \mathfrak{M}_1$. Тогда $G/F(G) \cong M \in \mathfrak{H}$, что невозможно. Таким образом, в случае, когда G – примитивная группа, мы получаем противоречие с выбором группы G .

II. Пусть теперь группа G не является примитивной, $\{M_1, \dots, M_k\}$ – совокупность всех максимальных подгрупп группы G , $T_i := G/\text{Core}_G(M_i)$, $i = 1, k$, $T := T_1 \times T_2 \times \dots \times T_k$ и $\mathfrak{T} := \Omega F_n(T, \varphi)$. Тогда $T \in \mathfrak{F}$ и поэтому $\mathfrak{T} \subseteq \mathfrak{F}$. С другой стороны, так как $G \cong G/\Phi(G) = G/(\bigcap_{i=1,k} \text{Core}_G(M_i))$ и класс \mathfrak{T} замкнут относительно подпрямых произведений, то $G \in \mathfrak{T}$ и, значит, $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{T}$. Следовательно, $\mathfrak{F} = \mathfrak{T}$. Поскольку T_i – неединичная разрешимая Ω -группа и $|T_i| < |G|$, то, в силу выбора группы G , используя лемму 4, получаем

$$T_i/F(T_i) \in \Phi_{\Omega\varphi^{nF}}(\Omega F_n(T_i, \varphi)) \subseteq \Phi_{\Omega\varphi^{nF}}(\mathfrak{T}) = \Phi_{\Omega\varphi^{nF}}(\mathfrak{F}), \quad i = \overline{1, k}.$$

Ввиду того, что $T_i F(T)/F(T) \cong T_i/T_i \cap F(T) = T_i/F(T_i)$, имеем

$$\begin{aligned} T/F(T) &= (T_1 \times \dots \times T_k)/F(T) = T_1 F(T)/F(T) \times \dots \times T_k F(T)/F(T) \cong \\ &\cong T_1/F(T_1) \times \dots \times T_k/F(T_k) \in \Phi_{\Omega\varphi^{nF}}(\mathfrak{F}). \end{aligned}$$

Так как группа G входит подпрямо в T , то $GF(T)/F(T)$ входит подпрямо в $T/F(T)$ и, значит, $GF(T)/F(T) \in \Phi_{\Omega\varphi^{nF}}(\mathfrak{F})$. Тогда из $GF(T)/F(T) \cong G/G \cap F(T)$ следует

$$G/F(G) \cong (G/(G \cap F(T)))/(F(G)/(G \cap F(T))) \in \Phi_{\Omega\varphi^{nF}}(\mathfrak{F}).$$

Получили противоречие с выбором группы G . Лемма доказана.

Теорема 4. Пусть $n \in \mathbb{N}$, \mathfrak{F} – n -кратно Ω -расслоенная формация с br -направлением φ , $\varphi \leq \varphi_3$, G – неединичная разрешимая Ω -группа. Если $G \in \mathfrak{F}$, то $G/(\bigcap_{A \in \Omega} G_{\varphi(A)}) \in \Phi_{\Omega\varphi^n F}(\mathfrak{F})$.

Доказательство. Пусть $G \in \mathfrak{F}$ и $A \in \Omega$. Поскольку $G \neq 1$, то $\mathfrak{F} \neq \mathfrak{E}$ и поэтому $\Phi_{\Omega\varphi^n F}(\mathfrak{F}) \neq \emptyset$. Покажем, что $G/G_{\varphi(A)} \in \Phi_{\Omega\varphi^n F}(\mathfrak{F})$. Рассмотрим случай, когда $A \notin K(G)$. Так как φ – r -направление, то

$$G \in \mathfrak{G}_{A'} \subseteq \mathfrak{G}_{A'}\varphi(A) = \varphi(A)$$

и, значит, $G = G_{\varphi(A)}$. Следовательно, в этом случае $G/G_{\varphi(A)} = 1 \in \Phi_{\Omega\varphi^n F}(\mathfrak{F})$.

Пусть $A \in K(G)$ и $\mathfrak{F}_1 := \Omega F_n(G, \varphi)$. Так как $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}$, то, в силу леммы 4, $\Phi_{\Omega\varphi^n F}(\mathfrak{F}_1) \subseteq \Phi_{\Omega\varphi^n F}(\mathfrak{F})$. Согласно лемме 5, $G/F(G) \in \Phi_{\Omega\varphi^n F}(\mathfrak{F}_1)$ и, значит, $G/F(G) \in \Phi_{\Omega\varphi^n F}(\mathfrak{F})$. Ввиду разрешимости группы G , $A \cong Z_p$ для некоторого простого числа p . Так как φ является br -направлением, то

$$\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{G}_{(Z_p)'}\mathfrak{N}_p \subseteq (\mathfrak{G}_{(Z_p)'}\varphi(Z_p))\mathfrak{N}_p = \varphi(Z_p)\mathfrak{N}_p = \varphi(Z_p).$$

Это означает, что $F(G) \subseteq G_{\varphi(Z_p)}$. Следовательно, $G/G_{\varphi(Z_p)} \cong (G/F(G))/(G_{\varphi(Z_p)}/F(G)) \in \Phi_{\Omega\varphi^n F}(\mathfrak{F})$.

Поскольку $\Phi_{\Omega\varphi^n F}(\mathfrak{F})$ является классом групп, замкнутым относительно подпрямых произведений, то из $G/G_{\varphi(A)} \in \Phi_{\Omega\varphi^n F}(\mathfrak{F})$ для любой группы $A \in \Omega$ следует, что $G/(\bigcap_{A \in \Omega} G_{\varphi(A)}) \in \Phi_{\Omega\varphi^n F}(\mathfrak{F})$. Теорема доказана.

Из теоремы 4 непосредственно вытекают результаты для n -кратно Ω -биканонических и n -кратно Ω -композиционных формаций. Полагаем $\Phi_{\Omega\varphi_2^n F}(\mathfrak{F}) := \Phi_{\Omega B^n F}(\mathfrak{F})$, $\Phi_{\Omega\varphi_3^n F}(\mathfrak{F}) := \Phi_{\Omega C^n F}(\mathfrak{F})$.

Следствие 18. Пусть $n \in \mathbb{N}$, \mathfrak{F} – n -кратно Ω -биканоническая формация и G – неединичная разрешимая Ω -группа. Если $G \in \mathfrak{F}$, то $G/(\bigcap_{A \in \Omega} O_{A',A}(G)) \in \Phi_{\Omega B^n F}(\mathfrak{F})$.

Следствие 19. Пусть $n \in \mathbb{N}$, \mathfrak{F} – n -кратно Ω -композиционная формация и G – неединичная разрешимая Ω -группа. Если $G \in \mathfrak{F}$, то $G/(\bigcap_{A \in \Omega} F_A(G)) \in \Phi_{\Omega C^n F}(\mathfrak{F})$.

В случае, когда $\Omega = \mathfrak{Z}$, из теоремы 4 получаем результаты для n -кратно расслоенных формаций, и в частности, для n -кратно биканонических и n -кратно композиционных формаций. Полагаем $\Phi_{\varphi_2^n F}(\mathfrak{F}) := \Phi_{B^n F}(\mathfrak{F})$, $\Phi_{\varphi_3^n F}(\mathfrak{F}) := \Phi_{C^n F}(\mathfrak{F})$.

Следствие 20. Пусть $n \in \mathbb{N}$, \mathfrak{F} – n -кратно расслоенная формация с br -направлением φ , $\varphi \leq \varphi_3$, G – неединичная разрешимая группа. Если $G \in \mathfrak{F}$, то $G/(\bigcap_{A \in \mathfrak{Z}} G_{\varphi(A)}) \in \Phi_{\varphi^n F}(\mathfrak{F})$.

Следствие 21. Пусть $n \in \mathbb{N}$, \mathfrak{F} – n -кратно биканоническая формация и G – неединичная разрешимая группа. Если $G \in \mathfrak{F}$, то $G/(\bigcap_{A \in \mathfrak{Z}} O_{A',A}(G)) \in \Phi_{B^n F}(\mathfrak{F})$.

Следствие 22. Пусть $n \in \mathbb{N}$, \mathfrak{F} – n -кратно композиционная формация и G – неединичная разрешимая группа. Если $G \in \mathfrak{F}$, то $G/(\bigcap_{A \in \mathfrak{Z}} F_A(G)) \in \Phi_{C^n F}(\mathfrak{F})$.

4. Заключение. В монографии А. Н. Скибы [4] изучались τ -замкнутые n -кратно локальные формации (здесь τ – подгрупповой функтор), в частности, была исследована взаимосвязь между минимальными экранами (спутниками) таких формаций и их максимальных подформаций [4, лемма 5.1.20 (2)], установлены достаточные условия максимальности подформаций τ -замкнутых n -кратно локальных формаций [4, лемма 5.1.20 (1)]. В теоремах 1–3 получено развитие данных результатов для Ω -расслоенных формаций. Теорема 4 является аналогом результата Л. А. Шеметкова и А. Н. Скибы [5, теорема 6] о формации $\Phi_n^\omega(\mathfrak{F})$ (здесь $\Phi_n^\omega(\mathfrak{F})$ – пересечение всех максимальных n -кратно ω -локальных подформаций n -кратно ω -локальной формации \mathfrak{F}) для случая n -кратно Ω -расслоенной формации \mathfrak{F} .

Список литературы

1. Gaschutz W. Zur Theorie der endlichen auflosbaren Gruppen. *Math. Z.* 1963;80(4):300–305.
2. Шеметков Л.А. Формации конечных групп. М.: Наука; 1978. 272 с.
3. Скиба А.Н. Характеризация конечных разрешимых групп заданной нильпотентной длины. *Вопросы алгебры.* 1987;3:21–31.
4. Скиба А.Н. Алгебра формаций. Минск: Беларуская навука; 1997.
5. Шеметков Л.А., Скиба А.Н. Кратно ω -локальные формации и классы Фиттинга конечных групп. *Математические труды.* 2000;10(2):112–141.
6. Скиба А.Н., Шеметков Л.А. Кратно \mathfrak{L} -композиционные формации конечных групп. *Украинский математический журнал.* 2000;52(6):783–797.
7. Ведерников В.А. О новых типах ω -всерных формаций конечных групп. *Український математический конгресс. – 2001, Праці, Київ, Секція 1.* 2002;36–45.
8. Ведерников В.А. Максимальные спутники Ω -расслоенных формаций и классов Фиттинга. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics.* 2001;7(2):55–71.
9. Еловицова (Скачкова) Ю.А. Решетки Ω -расслоенных формаций. *Дискретная математика.* 2002;14(2):85–94.
10. Сорокина М.М. О минимальных спутниках кратно Ω -расслоенных классов Фиттинга и формаций конечных групп. *Сборник научных трудов: Брянскому государственному педагогическому университету имени академика И.Г. Петровского – 70 лет.* 2000;199–203.

11. Ведерников В.А., Демина Е.Н. Ω -расслоенные формации мультиоператорных T -групп. *Сибирский математический журнал*. 2010;51(5):789–804.
12. Сорокина М.М., Макасов С.П. О максимальных подформациях n -кратно Ω -расслоенных формаций конечных групп. *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика*. 2021;21(1):15–25.
13. Doerk K., Hawkes T. Finite soluble groups. Walter de Gruyter: Berlin – New York; 1992. 891 p.
14. Ведерников В.А., Сорокина М.М. Ω -Расслоенные формации и классы Фиттинга конечных групп. *Дискретная математика*. 2001;11(5):507–527.
15. Шеметков Л.А., Скиба А.Н. Формации алгебраических систем. М.: Наука; 1989. 252 с.
16. Биркгоф Г. Теория решеток. М.: Наука; 1984. 568 с.
17. Монахов В.С. Введение в теорию конечных групп и их классов: учебное пособие. Мн.: Выш. шк.; 2006. 207 с.
18. Еловицова Ю.А. Алгебраичность решеток Ω -расслоенных формаций. *Вестник Брянского государственного университета: Точные и естественные науки*. 2013;4:13–16.

References

1. Gaschutz W. Zur Theorie der endlichen auflösbaren Gruppen. *Math. Z.* 1963;80(4):300–305.
2. Shemetkov LA. Formations of finite groups. Nauka: Moscow; 1978. 272 p (In Russ.).
3. Skiba AN. Characterization of finite solvable groups of given nilpotent length. *Algebra issues*. 1987;3:21–31 (In Russ.).
4. Skiba AN. Algebra of formations. Minsk: Belarusskay Nauka; 1997 (In Russ.).
5. Shemetkov LA., Skiba AN. Multiple ω -local formations and Fitting classes of finite groups. *Siberian Advances in Mathematics*. 2000;10(2):112–141.
6. Skiba AN., Shemetkov LA. Multiple \mathfrak{L} -composition formations of finite groups. *Ukrainian Mathematical Journal*. 2000;52(6):783–797 (In Russ.).
7. Vedernikov VA. On new types of ω -fibered formations of finite groups. *Ukrainian Mathematical Congress – 2001. Section 1. Kiev: Inst. Matematiki NAN Ukrainy*. 2002;36–45 (In Russ.).
8. Vedernikov VA. Maximal satellites of Ω -foliated formations and Fitting classes. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*. 2001;7(2):55–71 (In Russ.).
9. Elovikova (Skachkova) YA. Lattices of Ω -foliated formations. *Discrete Mathematics*. 2002;14(2):85–94.
10. Sorokina MM. On minimal satellites of multiply Ω -foliated Fitting classes and formations of finite groups. *Sbornik of scientific papers: Bryansk State Pedagogical University named after academician I.G. Petrovsky – 70 years*. 2000;199–203. (In Russ.)
11. Vedernikov V.A., Demina E.N. Ω -foliated formations of multioperator T -groups. *Siberian Mathematical Journal*. 2010;51(5):789–804.
12. Sorokina MM., Maksakov SP. On maximal subformations of n -multiple Ω -foliated formations of finite groups. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya: Mathematics. Mechanics. Computer Science*. 2021;21(1):15–25 (In Russ.).
13. Doerk K., Hawkes T. Finite soluble groups. Walter de Gruyter: Berlin – New York; 1992. 891 p.
14. Vedernikov VA., Sorokina MM. Ω -Foliated formations and Fitting classes of finite groups. *Discrete Mathematics and Applications*. 2001;11(5):507–527. (In Russ.)
15. Shemetkov LA., Skiba AN. Formations of algebraic systems. M.: Science; 1989. 252 p. (In Russ.)
16. Birkhoff G. Lattice Theory. M.: Science; 1984. 568 p. (In Russ.)
17. Monakhov VS. Introduction to the theory of finite groups and classes of finite groups: textbook. Mн.: Vyshaya shkola; 2006. 207 p (In Russ.).
18. Elovikova YA. The Algebraicity of lattices of Ω -foliated formations. *The Bryansk State University Herald: Exact and Natural sciences*. 2013;4:13–16 (In Russ.).

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 29.09.2025

Received September 29, 2025

Поступила после рецензирования 11.11.2025

Revised November 11, 2025

Принята к публикации 19.11.2025

Accepted November 19, 2025

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Нестеров Александр Сергеевич – преподаватель кафедры математического анализа, алгебры и геометрии, Брянский государственный университет имени академика И. Г. Петровского, г. Брянск, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Alexander S. Nesterov – Lecturer of the Department of Mathematical Analysis, Algebra and Geometry, Bryansk State University named after Academician I.G. Petrovsky, Bryansk, Russia

[К содержанию](#)