

Прямые произведения циклических полугрупп, допускающие вершинно-внешнепланарные графы Кэли

Соломатин Д. В. 

(Статья представлена членом редакционной коллегии Васильевым В. Б.)

Омский государственный педагогический университет,

Россия, 6440996, г. Омск, наб. Тухачевского, 14

solomatin_dv@omgpu.ru

Аннотация. В настоящей работе исследованы прямые произведения циклических полугрупп, для которых графы Кэли обладают свойством вершинной внешнепланарности. Сформулированы и доказаны критерии, задающие необходимые и достаточные условия существования вершинно-внешнепланарных графов Кэли в указанном классе, а также проведена классификация полугрупп, удовлетворяющих этим условиям, по количеству множителей. Основной результат включает установление точных условий внешнепланарности на уровне параметров индекса, порядка и количества элементов системы образующих, входящих в произведение циклических полугрупп; выделение и описание семейств прямых произведений, для которых вершинная внешнепланарность достигается и сохраняется при естественных операциях; демонстрацию соответствия между алгебраическими ограничениями структуры произведения и топологическими свойствами графов Кэли. Как следствие получен исчерпывающий перечень полугрупп, являющихся прямым произведением неоднородных циклических полугрупп, которые допускают планарный граф Кэли, но при этом не допускают вершинно-внешнепланарный граф Кэли.

Ключевые слова: циклические полугруппы, прямые произведения полугрупп, графы Кэли, внешнепланарные графы, вершинно-внешнепланарные графы, теория графов, теория полугрупп

Для цитирования: Соломатин Д.В. Прямые произведения циклических полугрупп, допускающие вершинно-внешнепланарные графы Кэли. *Прикладная математика & Физика*. 2026;58(1):44–53.

DOI 10.52575/2687-0959-2026-58-1-44-53 EDN JDNULF

Original Research

Direct Products of Cyclic Semigroups Allowing Apex-Outerplanar Cayley Graphs

Denis V. Solomatin 

(Article submitted by a member of the editorial board Vasiliev V. B.)

Omsk State Pedagogical University,

14 Tukhachevsky Emb., Omsk 644099, Russia

solomatin_dv@omgpu.ru

Abstract. This article examines the structural conditions under which direct products of cyclic semigroups admit Cayley graphs that are apex-outerplanar. A Cayley graph is called apex-outerplanar if the removal of a single distinguished vertex (the apex) yields an outerplanar graph. We provide a characterization of those semigroups whose Cayley graphs possess this property, establishing necessary and sufficient conditions in terms of the generating sets and the algebraic interactions among the cyclic components of the product. The analysis combines techniques from graph theory, including minor theory and embedding arguments, with algebraic properties of commutative semigroups. It is shown that certain configurations of cyclic semigroups give rise to Cayley graphs that become outerplanar upon deletion of an apex vertex, thereby extending known classifications of planar and outerplanar Cayley graphs. These results contribute to the broader understanding of the interplay between algebraic structure and topological properties of Cayley graphs, situating apex-outerplanar graphs within the framework of semigroup theory and flat embeddings.

Keywords: Cyclic Semigroups, Direct Products, Cayley Graphs, Apex-Outerplanar Graphs, Outerplanarity, Graph Minors, Graph Embeddings, Commutative Semigroups, Algebraic Graph Theory, Planar Cayley Graphs, Topological Graph Properties, Semigroup Theory, Combinatorial Structures

For citation: Solomatin DV. Direct Products of Cyclic Semigroups Allowing Apex-Outerplanar Cayley Graphs. *Applied Mathematics & Physics*. 2026;58(1):44–53. (In Russ). DOI 10.52575/2687-0959-2026-58-1-44-53 EDN JDNULF

1. Введение. Исследование структурных свойств полугрупп и их графов Кэли занимает важное место в современной алгебре и комбинаторике. Графы Кэли позволяют визуализировать алгебраические объекты, переводя их свойства на язык теории графов, что открывает путь к междисциплинарным связям между алгеброй, дискретной математикой и топологией. Особый интерес представляют случаи,

когда графы Кэли обладают дополнительными геометрическими или топологическими характеристиками – например, вершинной внешнепланарностью. Понятие «вершинно-внешнепланарный граф» (в англоязычной литературе – *арех-outerplanar graph*) было впервые введено и охарактеризовано в диссертации Станислава Дзёбьяка под научным руководством Гуоли Дина, защищённой в Луизианском государственном университете в 2011 году [1]. В этой работе дан класс графов, которые становятся внешнепланарными после удаления одной вершины, и приведена его полная минорная характеристика в виде конечного списка из 57 запрещённых миноров. Некоторые из этих миноров для удобства читателя приведём на рис. 1. Позднее результаты диссертации были опубликованы в рецензируемом журнале [2], что закрепило использование термина в академической литературе и подчеркнуло значимость данного класса для структурной теории графов.

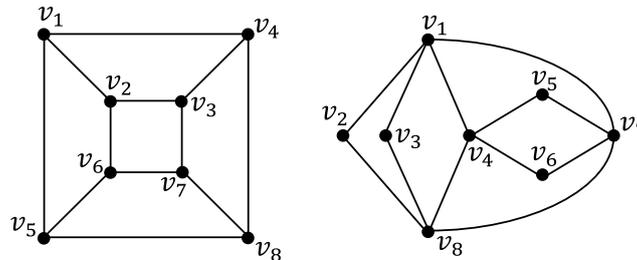


Рис. 1. Графы Q и J_1
Fig. 1. Graphs Q and J_1

Внешнепланарные графы характеризуются тем, что их можно вложить в плоскость так, чтобы все вершины лежали на внешней границе, а рёбра не пересекались. Это свойство делает такие графы особенно удобными для анализа: они обладают простой структурой, допускают эффективные алгоритмы распознавания и тесно связаны с задачами визуализации и оптимизации. Вершинно-внешнепланарные графы Кэли, в свою очередь, отражают глубокие ограничения на алгебраическую структуру исходной полугруппы. Циклические полугруппы – одни из наиболее простых и фундаментальных объектов в теории полугрупп. Их прямые произведения образуют богатый класс структур, где взаимодействие элементарных циклов порождает сложные комбинаторные картины. Мотивация изучения именно вершинно-внешнепланарных графов Кэли для этого класса полугрупп довольно прозрачна. Во-первых, ограничение внешнепланарности накладывает строгие условия на структуру полугруппы, что помогает классифицировать и описывать её свойства. Во-вторых, такие графы обладают малой плотностью рёбер и простой топологией, что делает их удобными для анализа и построения алгоритмов. В-третьих, вершинно-внешнепланарные графы встречаются в задачах сетевого моделирования, визуализации и теории вычислений, где важна простота структуры и отсутствие пересечений.

Тот факт, что изучение вершинно-внешнепланарных графов является сравнительно новым и перспективным направлением исследования, подтверждается бурным ростом числа публикаций в этой сфере [3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12] ссылающихся на [2]. Таким образом, продолжая начатое нами ранее исследование [13], анализ прямых произведений циклических полугрупп, допускающих вершинно-внешнепланарных графы Кэли, не только углубляет понимание взаимодействия алгебраических и комбинаторных свойств, но и открывает перспективы для применения этих результатов в смежных областях математики и информатики.

2. Основной результат. Формулировку и доказательство основной теоремы предварим необходимыми определениями из [14, 15] и известными фактами из [16] для полноты изложения.

Графом Кэли полугруппы S относительно множества X образующих её элементов называем ориентированный мультиграф $\text{Cay}(S, X)$ с помеченными дугами, множество вершин которого совпадает с S , а вершина a соединена дугой помеченной элементом x с вершиной b тогда и только тогда, когда во множестве образующих X существует такой элемент x , что $ax = b$.

Основой графа Кэли $\text{Cay}(S, X)$ называем обыкновенный граф $SCay(S, X)$ полученный из исходного графа путём удаления всех его петель, меток, направлений дуг и кратных рёбер.

Плоской укладкой графа называем вложение вершин и рёбер графа в плоскость, при котором вершинам графа соответствуют точки плоскости, а рёбрам – непрерывные плоские линии без самопересечений, не имеющие общих точек, кроме возможно общих вершин. Граф вместе со своей плоской укладкой называется плоским графом, а всякий граф изоморфный плоскому графу называется планарным. Граф, для которого после удаления некоторой его вершины существует такая плоская укладка, что все оставшиеся вершины принадлежат одной внешней грани, называется вершинно-внешнепланарным.

Говорим, что полугруппа допускает вершинно-внешнепланарный граф Кэли если относительно некоторого минимального множества образующих её элементов основа графа Кэли является вершинно-внешнепланарным графом.

Следующая теорема содержит исчерпывающий перечень полугрупп, являющихся прямым произведением неоднородных циклических полугрупп, допускающих вершинно-внешнепланарный граф Кэли.

Теорема 1. Конечная полугруппа S , являющаяся прямым произведением неоднородных циклических полугрупп, допускает вершинно-внешнепланарный граф Кэли тогда и только тогда, когда выполнено одно из условий:

1) $S \cong \langle a \mid a^{r+m} = a^r \rangle \times \langle b \mid b^{h+t} = b^h \rangle$, где для натуральных чисел r, m, h, t выполняется хотя бы одно из ограничений:

- 1.1) $r = 1, h = 1, \text{НОД}(m, t) = 1$;
- 1.2) $r = 1, m = 2, (h < 4, t = 1)$ или $(h < 3, t = 2)$;
- 1.3) $r = 2, m = 1, h < 4, t < 3$;
- 1.4) $r = 2, m = 1, h < 5, t = 1$;
- 1.5) $r = 3, m = 1, h = 3, t = 1$;

2) $S \cong \langle a \mid a^{r+m} = a^r \rangle \times \langle b \mid b^{h+t} = b^h \rangle \times \langle c \mid c^{k+l} = c^k \rangle$, где для натуральных чисел r, m, h, t, k, l выполняется одно из следующих ограничений:

- 2.1) $r = 1, m = 2, h = 2, t = 1, k = 2, l = 1$;
- 2.2) $r = 2, m = 1, h = 2, t = 1, k = 2, l < 3$;
- 2.3) $r = 2, m = 1, h = 2, t = 1, k = 3, l = 1$;

3) $S \cong \langle a_0 \mid a_0^{r+m} = a_0^r \rangle \times \prod_{i=1}^n \langle a_i \mid a_i^{2+1} = a_i^2 \rangle$, где для натуральных чисел r и m выполняется одно из следующих ограничений:

- 3.1) $r = 1, m = 2$;
- 3.2) $r = 2, m < 3$;
- 3.3) $r = 3, m = 1$.

Представленное ниже доказательство теоремы опирается на следующую лемму, которая содержит исчерпывающий перечень полугрупп, являющихся прямым произведением неоднородных циклических полугрупп, допускающих планарный граф Кэли.

Лемма 1 [16, Теорема 21]. Конечная полугруппа S , являющаяся прямым произведением неоднородных циклических полугрупп, допускает планарный граф Кэли тогда и только тогда, когда выполнено одно из условий:

1) $S \cong \langle a \mid a^{r+m} = a^r \rangle \times \langle b \mid b^{h+t} = b^h \rangle$, где для натуральных чисел r, m, h, t выполняется хотя бы одно из ограничений:

- 1.1) $r = 1, h = 1, \text{НОД}(m, t) < 3$;
- 1.2) $r = 1, m = 2, t < 3$;
- 1.3) $r = 2, m = 1, h < 4, t < 3$;
- 1.4) $r = 2, m = 1, h < 5, t = 1$;
- 1.5) $r = 3, m = 1, h = 3, t = 1$;

2) $S \cong \langle a \mid a^{r+m} = a^r \rangle \times \langle b \mid b^{h+t} = b^h \rangle \times \langle c \mid c^{k+l} = c^k \rangle$, где для натуральных чисел r, m, h, t, k, l выполняется хотя бы одно из следующих ограничений:

- 2.1) $r = 1, m = 2, h = 1, t = 2, k = 1, l = 2$;
- 2.2) $r = 1, m = 2, h = 2, t = 1, k = 2, l = 1$;
- 2.3) $r = 2, m = 1, h = 2, t = 1, k = 2, l < 3$;
- 2.4) $r = 2, m = 1, h = 2, t = 1, k = 3, l = 1$;

3) $S \cong \langle a_0 \mid a_0^{r+m} = a_0^r \rangle \times \prod_{i=1}^n \langle a_i \mid a_i^{2+1} = a_i^2 \rangle$, где для натуральных чисел r и m выполняется хотя бы одно из следующих ограничений:

- 3.1) $r = 1, m = 2$;
- 3.2) $r = 2, m < 3$;
- 3.3) $r = 3, m = 1$.

Доказательство теоремы 1. Класс вершинно-внешнепланарных графов является строгим подмножеством класса планарных графов. То есть каждый вершинно-внешнепланарный граф является планарным, но далеко не каждый планарный граф является вершинно-внешнепланарным. Проанализируем каждую из серий ограничений Леммы 1 и выберем среди допускающих планарные графы Кэли лишь те полугруппы, которые допускают вершинно-внешнепланарный граф Кэли.

1) Пусть $S \cong \langle a \mid a^{r+m} = a^r \rangle \times \langle b \mid b^{h+t} = b^h \rangle$, где r, m, h, t – натуральные числа, тогда:

1.1) Если $r = 1, h = 1, \text{НОД}(m, t) = 1$, то S изоморфна циклической группе порядка mt . Основа графа Кэли конечной циклической группы изоморфна циклу, следовательно, является вершинно-внешнепланарным графом. В случае, когда $\text{НОД}(m, t) = 2$, выделим несколько вариантов. При $r = 1, m = 2, h = 1, t = 2$ основа графа Кэли полугруппы S является циклом четвертого порядка, следовательно, допускает вершинно-внешнепланарную укладку. Этот вариант содержится в пункте 1.2. Общий вид графа Кэли полугруппы S , являющейся прямым произведением двух циклических групп четных порядков, представлен на рис. 2. И при $m > 2$ или $t > 2$ содержит подграф, стягиваемый к графу Q с рис. 1

на вершинах $v_1 \in \{(a, b)\}$, $v_2 \in \{(a^2, b^2)\}$, $v_3 \in \{(a^3, b^3)\}$, $v_4 \in \{(a^4, b^4), \dots, (a^m, b^t)\}$, $v_5 \in \{(a^{1+\frac{m}{2}}, b^{1+\frac{t}{2}})\}$, $v_6 \in \{(a^{2+\frac{m}{2}}, b^{2+\frac{t}{2}})\}$, $v_7 \in \{(a^{3+\frac{m}{2}}, b^{3+\frac{t}{2}})\}$, $v_8 \in \{(a^{4+\frac{m}{2}}, b^{4+\frac{t}{2}}), \dots, (a^{\frac{m}{2}}, b^{\frac{t}{2}})\}$, следовательно, не является вершинно-внешнепланарным.

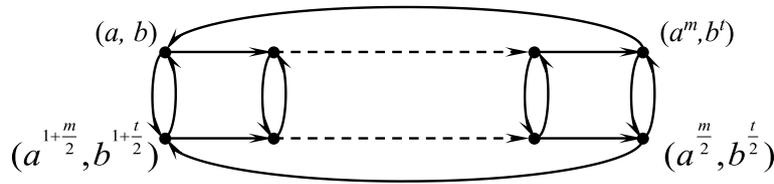


Рис. 2. Схема плоской укладки графа Кэли прямого произведения двух циклических групп четных порядков
 Fig. 2. Planar embedding of the Cayley graph of the direct product of two cyclic groups of even orders

1.2) Разобьем случай $r = 1, m = 2, t < 3$ на два варианта. Граф Кэли полугруппы является вершинно-внешнепланарным при $t = 1$, если $h < 4$, то общая схема его укладки представлена на рис. 3, а при $t = 2$, если $h < 3$, то укладка представлена на рис. 4. Если же $t < 3$ и $h + t \geq 5$, то обнаруживается подграф, стягиваемый к графу J_1 с рис. 1 на следующих вершинах: $v_1 \in \{(a, b^2)\}$, $v_2 \in \{(a^2, b)\}$, $v_3 \in \{(a, b)\}$, $v_4 \in \{(a^2, b^3)\}$, $v_5 \in \{(a, b^4)\}$, $v_6 \in \{(a^2, b^4)\}$, $v_7 \in \{(a, b^3)\}$, $v_8 \in \{(a^2, b^2)\}$, следовательно, не является вершинно-внешнепланарным.

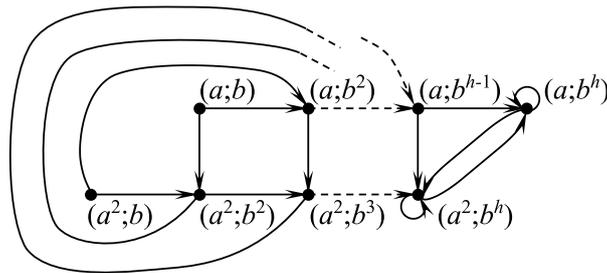


Рис. 3. Схема плоской укладки графа Кэли прямого произведения полугрупп $A = \langle a \mid a^{1+2} = a \rangle$ и $B = \langle b \mid b^{h+1} = b^h \rangle$ относительно образующих неразложимых элементов $(a; b), (a^2; b)$
 Fig. 3. Planar embedding of the Cayley graph of the direct product of semigroups $A = \langle a \mid a^{1+2} = a \rangle$ and $B = \langle b \mid b^{h+1} = b^h \rangle$ with respect to generators of indecomposable elements $(a; b), (a^2; b)$

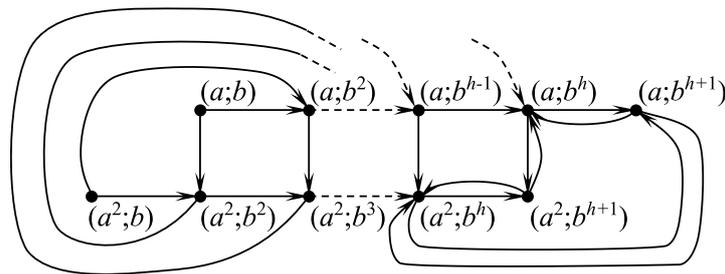


Рис. 4. Схема плоской укладки графа Кэли прямого произведения полугрупп $A = \langle a \mid a^{1+2} = a \rangle$ и $B = \langle b \mid b^{h+2} = b^h \rangle$ относительно образующих неразложимых элементов $(a; b), (a^2; b)$
 Fig. 4. Planar embedding of the Cayley graph of the direct product of semigroups $A = \langle a \mid a^{1+2} = a \rangle$ and $B = \langle b \mid b^{h+2} = b^h \rangle$ with respect to generators of indecomposable elements $(a; b), (a^2; b)$

1.3) Пусть $r = 2, m = 1$. При $h = 1, t = 1$ попадаем в условия предыдущего пункта. Общий вид графа Кэли полугруппы удовлетворяющей данным условиям изображен на Рис.3. В рассматриваемом случае этот граф является внешнепланарным графом четвертого порядка. Оставшиеся варианты графов Кэли прямого произведения полугрупп $A = \langle a \mid a^{2+1} = a^2 \rangle, B = \langle b \mid b^{h+t} = b^h \rangle$, где $h < 4, t < 3$, изображены на рис. 5 – рис. 8 и при необходимости обращаются во внешнепланарный граф путём удаления вершины, соответствующей элементу $(a^2; b^3)$.

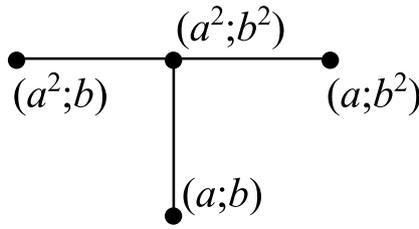


Рис. 5. Плоская укладка основы графа Кэли прямого произведения полугрупп $A = \langle a \mid a^{2+1} = a^2 \rangle$, $B = \langle b \mid b^{2+1} = b^2 \rangle$ относительно образующих элементов $(a; b)$, $(a; b^2)$, $(a^2; b)$
 Fig. 5. Planar embedding of the base of the Cayley graph of a direct product of semigroups $A = \langle a \mid a^{2+1} = a^2 \rangle$, $B = \langle b \mid b^{2+1} = b^2 \rangle$ with respect to the generators $(a; b)$, $(a; b^2)$, $(a^2; b)$

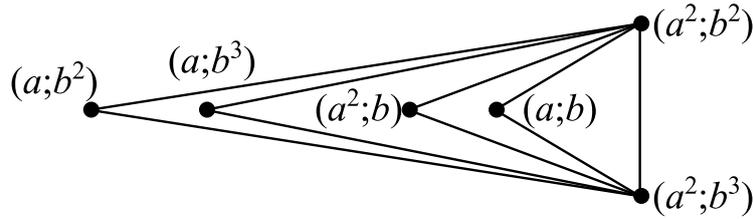


Рис. 6. Плоская укладка основы графа Кэли прямого произведения полугрупп $A = \langle a \mid a^{2+1} = a^2 \rangle$, $B = \langle b \mid b^{2+2} = b^2 \rangle$ относительно образующих элементов $(a; b)$, $(a; b^2)$, $(a; b^3)$, $(a^2; b)$
 Fig. 6. Planar embedding of the base of the Cayley graph of the direct product of semigroups $A = \langle a \mid a^{2+1} = a^2 \rangle$, $B = \langle b \mid b^{2+2} = b^2 \rangle$ with respect to the generators $(a; b)$, $(a; b^2)$, $(a; b^3)$, $(a^2; b)$

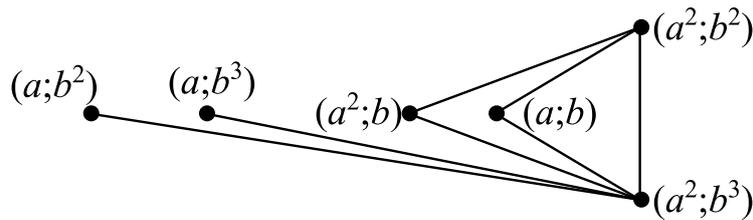


Рис. 7. Плоская укладка основы графа Кэли прямого произведения полугрупп $A = \langle a \mid a^{2+1} = a^2 \rangle$, $B = \langle b \mid b^{3+1} = b^3 \rangle$ относительно образующих элементов $(a; b)$, $(a; b^2)$, $(a; b^3)$, $(a^2; b)$
 Fig. 7. Planar embedding of the base of the Cayley graph of the direct product of semigroups $A = \langle a \mid a^{2+1} = a^2 \rangle$, $B = \langle b \mid b^{3+1} = b^3 \rangle$ with respect to the generators $(a; b)$, $(a; b^2)$, $(a; b^3)$, $(a^2; b)$

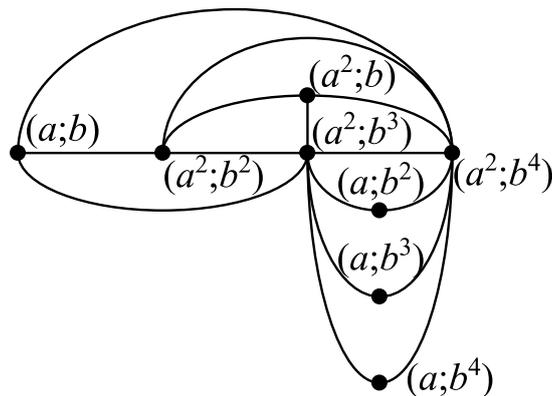


Рис. 8. Плоская укладка основы графа Кэли прямого произведения полугрупп $A = \langle a \mid a^{2+1} = a^2 \rangle$, $B = \langle b \mid b^{3+2} = b^3 \rangle$ относительно образующих элементов $(a; b)$, $(a; b^2)$, $(a; b^3)$, $(a; b^4)$, $(a^2; b)$
 Fig. 8. Planar embedding of the base of the Cayley graph base of a direct product of semigroups $A = \langle a \mid a^{2+1} = a^2 \rangle$, $B = \langle b \mid b^{3+2} = b^3 \rangle$ with respect to the generators $(a; b)$, $(a; b^2)$, $(a; b^3)$, $(a; b^4)$, $(a^2; b)$

1.4) Граф Кэли единственно нового варианта полугруппы для случая $r = 2, m = 1, h < 5, t = 1$, не представленного в предыдущем пункте, изображен на рис. 9. В результате удаления соответствующей элементу $(a^2; b^3)$ вершины из этого графа получается внешнепланарный граф.

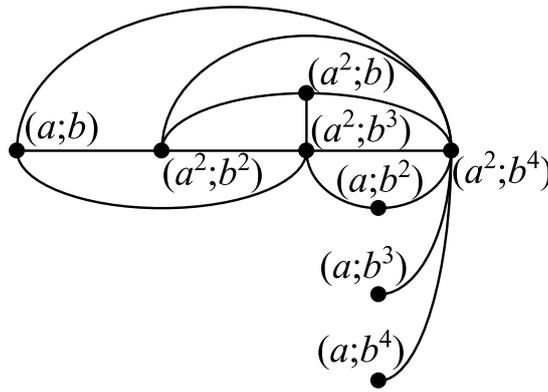


Рис. 9. Плоская укладка основы графа Кэли прямого произведения полугрупп $A = \langle a \mid a^{2+1} = a^2 \rangle$, $B = \langle b \mid b^{4+1} = b^4 \rangle$ относительно образующих элементов $(a;b), (a;b^2), (a;b^3), (a;b^4), (a^2;b)$
 Fig. 9. Planar embedding of the base of the Cayley graph of a direct product of semigroups $A = \langle a \mid a^{2+1} = a^2 \rangle$, $B = \langle b \mid b^{4+1} = b^4 \rangle$ with respect to the generators $(a;b), (a;b^2), (a;b^3), (a;b^4), (a^2;b)$

1.5) Граф Кэли полугруппы, формирующейся при $r = 3, m = 1, h = 3, t = 1$, изображен на рис. 10 и является вершинно-внешнепланарным, так как внешнепланарную укладку имеет граф, получаемый из него удалением вершины $(a^3;b^3)$ или $(a;b)$.

2) Пусть $S \cong \langle a \mid a^{r+m} = a^r \rangle \times \langle b \mid b^{h+t} = b^h \rangle \times \langle c \mid c^{k+l} = c^k \rangle$, где r, m, h, t, k, l – натуральные числа, тогда:

2.1) Если все три сомножителя полугруппы $S = C_2 \times C_2 \times C_2$ группового типа, то основа графа Кэли этой полугруппы представляет собой в точности трехмерный куб Q в обозначениях с рис. 1 на вершинах $v_1 = (a;b^2;c), v_2 = (a;b^2;c^2), v_3 = (a^2;b^2;c^2), v_4 = (a^2;b^2;c), v_5 = (a;b;c), v_6 = (a;b;c^2), v_7 = (a^2;b;c^2), v_8 = (a^2;b;c)$. Следовательно, граф не является вершинно-внешнепланарным.

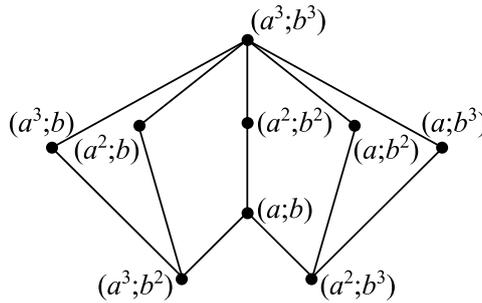


Рис. 10. Плоская укладка основы графа Кэли прямого произведения полугрупп $A = \langle a \mid a^{3+1} = a^3 \rangle, B = \langle b \mid b^{3+1} = b^3 \rangle$ относительно образующих элементов $(a;b), (a;b^2), (a;b^3), (a^2;b), (a^3;b)$

Fig. 10. Planar embedding of the base of the Cayley graph of the direct product of semigroups $A = \langle a \mid a^{3+1} = a^3 \rangle, B = \langle b \mid b^{3+1} = b^3 \rangle$ with respect to the generators $(a;b), (a;b^2), (a;b^3), (a^2;b), (a^3;b)$

2.2) Если $r = 1, m = 2, h = k = 2, t = l = 1$, то граф Кэли полугруппы S в основе своей имеет вершинно-внешнепланарный граф, изображенный на рис. 11, обращающийся во внешнепланарный после удаления вершины $(a^2;b^2;c^2)$ или $(a;b^2;c^2)$.

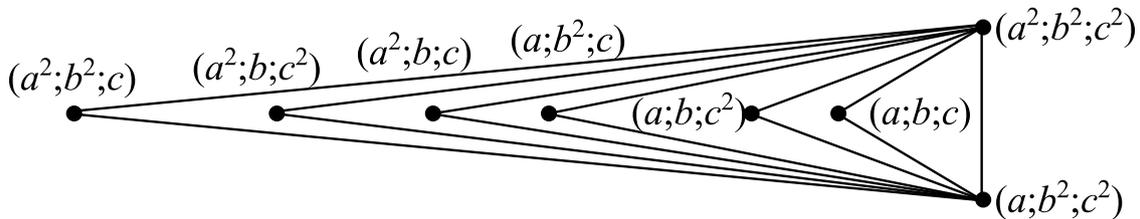


Рис. 11. Плоская укладка основы графа Кэли прямого произведения полугрупп $A = \langle a \mid a^{1+2} = a \rangle, B = \langle b \mid b^{2+1} = b^2 \rangle$ и $C = \langle c \mid c^{2+1} = c^2 \rangle$ относительно образующих элементов $(a;b;c), (a;b;c^2), (a;b^2;c), (a^2;b;c), (a^2;b;c^2), (a^2;b^2;c)$

Fig. 11. Planar embedding of the basis of the Cayley graph of the direct product of the semigroups $A = \langle a \mid a^{1+2} = a \rangle, B = \langle b \mid b^{2+1} = b^2 \rangle$ and $C = \langle c \mid c^{2+1} = c^2 \rangle$ with respect to the generators $(a;b;c), (a;b;c^2), (a;b^2;c), (a^2;b;c), (a^2;b;c^2), (a^2;b^2;c)$

2.3) Если $r = 2, m = 1, h = k = 2, t = 1, l < 3$, то граф Кэли полугруппы S в основе своей имеет вершинно-внешнепланарный граф, изображенный на рис. 12 или рис. 13. Последний обращается во внешнепланарный после удаления вершины $(a^2;b^2;c^2)$ или $(a^2;b^2;c^3)$.

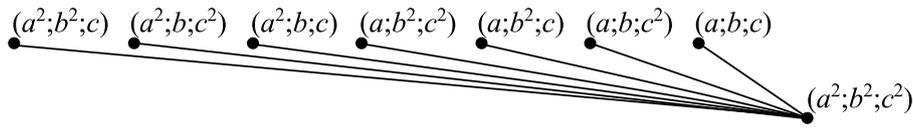


Рис. 12. Плоская укладка основы графа Кэли прямого произведения полугрупп $A = \langle a \mid a^{2+1} = a^2 \rangle$, $B = \langle b \mid b^{2+1} = b^2 \rangle$ и $C = \langle c \mid c^{2+1} = c^2 \rangle$ относительно образующих элементов $(a; b; c)$, $(a; b; c^2)$, $(a; b^2; c)$, $(a; b^2; c^2)$, $(a^2; b; c)$, $(a^2; b; c^2)$, $(a^2; b^2; c^2)$

Fig. 12. Planar embedding of the base of the Cayley graph of the direct product of semigroups $A = \langle a \mid a^{2+1} = a^2 \rangle$, $B = \langle b \mid b^{2+1} = b^2 \rangle$ and $C = \langle c \mid c^{2+1} = c^2 \rangle$ with respect to the generators $(a; b; c)$, $(a; b; c^2)$, $(a; b^2; c)$, $(a; b^2; c^2)$, $(a^2; b; c)$, $(a^2; b; c^2)$, $(a^2; b^2; c^2)$

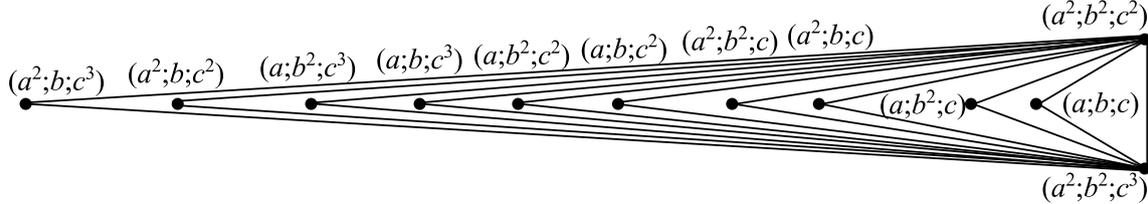


Рис. 13. Плоская укладка основы графа Кэли прямого произведения полугрупп $A = \langle a \mid a^{2+1} = a^2 \rangle$, $B = \langle b \mid b^{2+1} = b^2 \rangle$ и $C = \langle c \mid c^{2+2} = c^2 \rangle$ относительно образующих элементов $(a; b; c)$, $(a; b^2; c)$, $(a; b; c^2)$, $(a; b^2; c^2)$, $(a; b; c^3)$, $(a; b^2; c^3)$, $(a^2; b; c)$, $(a^2; b^2; c)$, $(a^2; b; c^2)$, $(a^2; b; c^3)$

Fig. 13. Planar embedding of the base of the Cayley graph of the direct product of semigroups $A = \langle a \mid a^{2+1} = a^2 \rangle$, $B = \langle b \mid b^{2+1} = b^2 \rangle$ and $C = \langle c \mid c^{2+2} = c^2 \rangle$ with respect to the generating elements $(a; b; c)$, $(a; b^2; c)$, $(a; b; c^2)$, $(a; b^2; c^2)$, $(a; b; c^3)$, $(a; b^2; c^3)$, $(a^2; b; c)$, $(a^2; b^2; c)$, $(a^2; b; c^2)$, $(a^2; b; c^3)$

2.4) Если $r = 2$, $m = 1$, $h = 2$, $t = 1$, $k = 3$, $l = 1$, то граф Кэли полугруппы S в основе своей имеет вершинно-внешнепланарный граф, изображенный на рис. 14, обращающийся во внешнепланарный после удаления вершины $(a^2; b^2; c^2)$ или $(a^2; b^2; c^3)$.

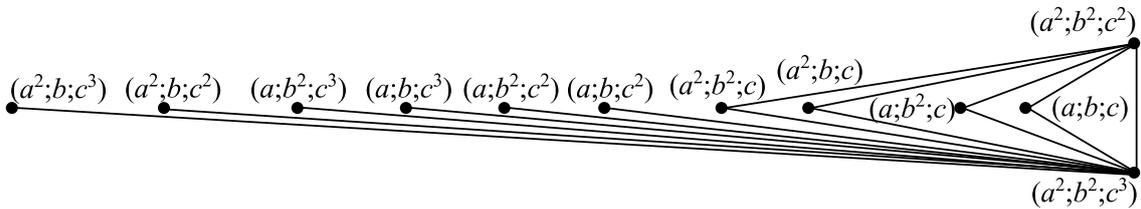


Рис. 14. Плоская укладка основы графа Кэли прямого произведения полугрупп $A = \langle a \mid a^{2+1} = a^2 \rangle$, $B = \langle b \mid b^{2+1} = b^2 \rangle$ и $C = \langle c \mid c^{3+1} = c^3 \rangle$ относительно образующих элементов $(a; b; c)$, $(a; b^2; c)$, $(a; b; c^2)$, $(a; b^2; c^2)$, $(a; b; c^3)$, $(a; b^2; c^3)$, $(a^2; b; c)$, $(a^2; b^2; c)$, $(a^2; b; c^2)$, $(a^2; b; c^3)$

Fig. 14. Planar embedding of the base of the Cayley graph of the direct product of semigroups $A = \langle a \mid a^{2+1} = a^2 \rangle$, $B = \langle b \mid b^{2+1} = b^2 \rangle$ and $C = \langle c \mid c^{3+1} = c^3 \rangle$ with respect to the generating elements $(a; b; c)$, $(a; b^2; c)$, $(a; b; c^2)$, $(a; b^2; c^2)$, $(a; b; c^3)$, $(a; b^2; c^3)$, $(a^2; b; c)$, $(a^2; b^2; c)$, $(a^2; b; c^2)$, $(a^2; b; c^3)$

3) Пусть $S \cong \langle a_0 \mid a_0^{r+m} = a_0^r \rangle \times \prod_{i=1}^n \langle a_i \mid a_i^{2+1} = a_i^2 \rangle$, где n, r, m – натуральные числа, тогда:

3.1) Если $r = 1$, $m = 2$, то основа графа Кэли полугруппы S по своей структуре является вершинно-внешнепланарным графом и представлена на рис. 15; при удалении вершины соответствующей элементу $(a_0; a_1^2; \dots; a_n^2)$ или $(a_0^2; a_1^2; \dots; a_n^2)$ этот граф становится внешнепланарным.

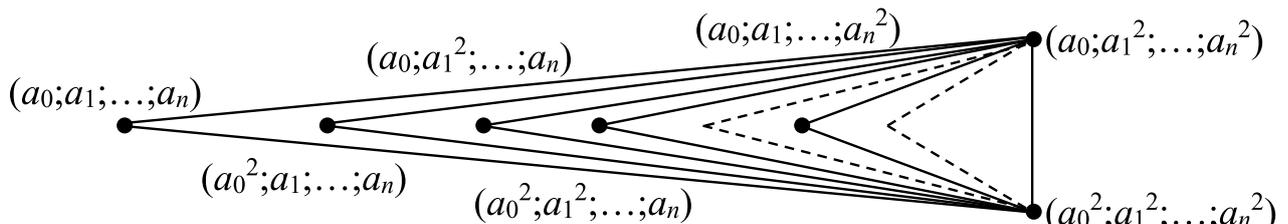


Рис. 15. Плоская укладка основы графа Кэли полугруппы $S \cong \langle a_0 \mid a_0^{1+2} = a_0 \rangle \times \prod_{i=1}^n \langle a_i \mid a_i^{2+1} = a_i^2 \rangle$ относительно множества образующих элементов $M = S \setminus \{(a_0; a_1^2; \dots; a_n^2), (a_0^2; a_1^2; \dots; a_n^2)\}$

Fig. 15. Planar embedding of the base of the Cayley graph of the semigroup $S \cong \langle a_0 \mid a_0^{1+2} = a_0 \rangle \times \prod_{i=1}^n \langle a_i \mid a_i^{2+1} = a_i^2 \rangle$ with respect to the set of generating elements $M = S \setminus \{(a_0; a_1^2; \dots; a_n^2), (a_0^2; a_1^2; \dots; a_n^2)\}$

3.2) Если $r = 2, m < 3$, то граф Кэли полугруппы S по своей структуре является вершинно-внешнепланарным и его основа представлена на Р рис. 16 или рис. 17, соответственно, для $m = 1$ или $m = 2$. В случае удаления определённой вершины $(a_0^2; a_1^2; \dots; a_n^2)$ или $(a_0^3; a_1^2; \dots; a_n^2)$ граф, изображённый на рис. 17, становится внешнепланарным.

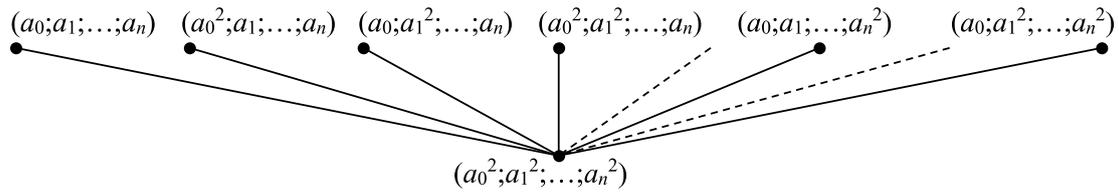


Рис. 16. Плоская укладка основы графа Кэли полугруппы $S \cong \langle a_0 \mid a_0^{2+1} = a_0^2 \rangle \times \prod_{i=1}^n \langle a_i \mid a_i^{2+1} = a_i^2 \rangle$ относительно множества образующих элементов $M = S \setminus \{(a_0^2; a_1^2; \dots; a_n^2)\}$

Fig. 16. Planar embedding of the base of the Cayley graph of the semigroup $S \cong \langle a_0 \mid a_0^{2+1} = a_0^2 \rangle \times \prod_{i=1}^n \langle a_i \mid a_i^{2+1} = a_i^2 \rangle$ with respect to the set of generating elements $M = S \setminus \{(a_0^2; a_1^2; \dots; a_n^2)\}$

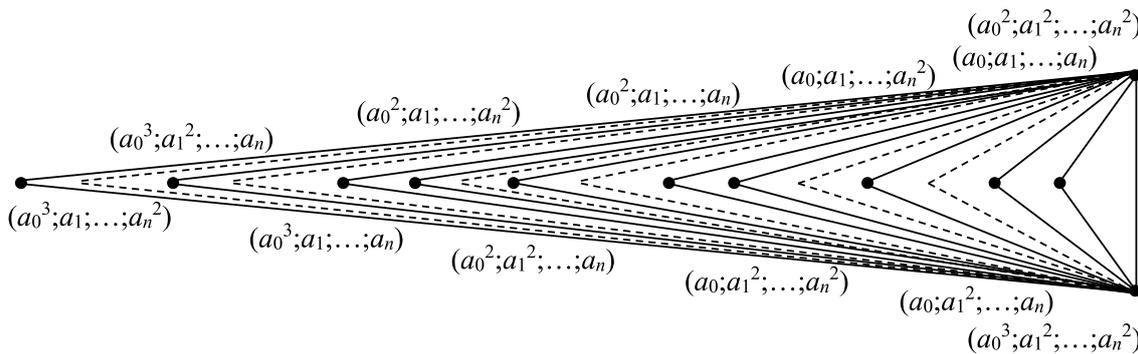


Рис. 17. Плоская укладка основы графа Кэли полугруппы $S \cong \langle a_0 \mid a_0^{2+2} = a_0^2 \rangle \times \prod_{i=1}^n \langle a_i \mid a_i^{2+1} = a_i^2 \rangle$ относительно множества образующих элементов $M = S \setminus \{(a_0^2; a_1^2; \dots; a_n^2), (a_0^3; a_1^2; \dots; a_n^2)\}$

Fig. 17. Planar embedding of the base of the Cayley graph of the semigroup $S \cong \langle a_0 \mid a_0^{2+2} = a_0^2 \rangle \times \prod_{i=1}^n \langle a_i \mid a_i^{2+1} = a_i^2 \rangle$ with respect to the set of generating elements $M = S \setminus \{(a_0^2; a_1^2; \dots; a_n^2), (a_0^3; a_1^2; \dots; a_n^2)\}$

3.3) Как показано на рис. 18, если $r = 3, m = 1$, то граф Кэли полугруппы S в основе своей является вершинно-внешнепланарным. Данный граф становится внешнепланарным после удаления одной из вершин, а именно, $(a_0^2; a_1^2; \dots; a_n^2)$ или $(a_0^3; a_1^2; \dots; a_n^2)$. Это упрощённое изображение отражает основную структуру и важное свойство рассматриваемого графа Кэли, заключающееся в возможности получения такой его плоской укладки, что все вершины лежат на одной внешней грани.

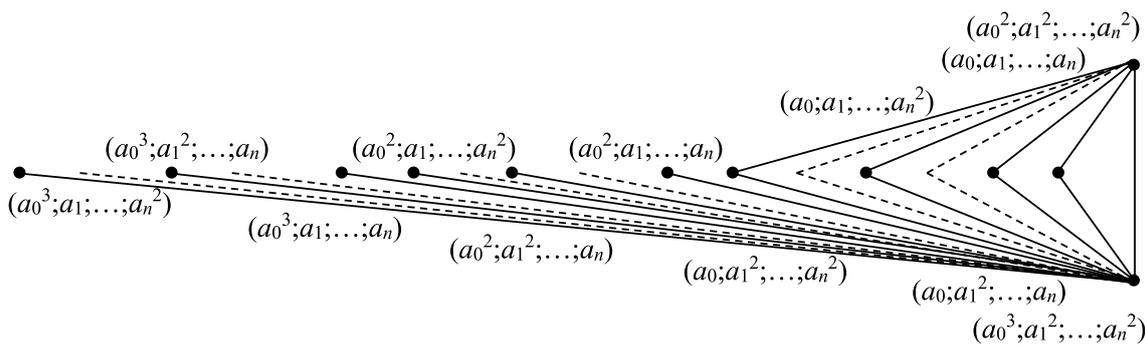


Рис. 18. Плоская укладка основы графа Кэли полугруппы $S \cong \langle a_0 \mid a_0^{3+1} = a_0^3 \rangle \times \prod_{i=1}^n \langle a_i \mid a_i^{2+1} = a_i^2 \rangle$ относительно множества образующих элементов $M = S \setminus \{(a_0^2; a_1^2; \dots; a_n^2), (a_0^3; a_1^2; \dots; a_n^2)\}$

Fig. 18. Planar embedding of the base of the Cayley graph of the semigroup $S \cong \langle a_0 \mid a_0^{3+1} = a_0^3 \rangle \times \prod_{i=1}^n \langle a_i \mid a_i^{2+1} = a_i^2 \rangle$ with respect to the set of generating elements $M = S \setminus \{(a_0^2; a_1^2; \dots; a_n^2), (a_0^3; a_1^2; \dots; a_n^2)\}$

Теорема 1 доказана.

Сопоставив условия Леммы 1 и Теоремы 1, получаем как следствие перечень полугрупп, являющихся прямым произведением неоднородных циклических полугрупп, допускающих планарный граф Кэли, но не допускающих при этом вершинно-внешнепланарный граф Кэли.

Следствие 1. Конечная полугруппа S , являющаяся прямым произведением неоднородных циклических полугрупп, допускает планарный, но не допускает вершинно-внешнепланарный граф Кэли, тогда и только тогда, когда выполнено одно из условий:

1) $S \cong \langle a \mid a^{r+m} = a^r \rangle \times \langle b \mid b^{h+t} = b^h \rangle$, где для натуральных чисел r, m, h, t выполняется хотя бы одно из ограничений:

1.1) $r = 1, h = 1, \text{НОД}(m, t) = 2$, при $m > 2$ или $t > 2$;

1.2) $r = 1, m = 2, (h \geq 4, t = 1)$ или $(h \geq 3, t = 2)$;

2) $S \cong \langle a \mid a^{r+m} = a^r \rangle \times \langle b \mid b^{h+t} = b^h \rangle \times \langle c \mid c^{k+l} = c^k \rangle$, где для натуральных чисел r, m, h, t, k, l выполняется следующее ограничение:

2.1) $r=1, m=2, h = 2, t=1, k=2, l=1$.

Легко понять как устроена бесконечная полугруппа, являющаяся прямым произведением неоднородных полугрупп, относительно бесконечного числа образующих. Следующее следствие содержит нетривиальный результат об отсутствии бесконечных полугрупп, являющихся прямым произведением конечного числа неоднородных циклических полугрупп, допускающих вершинно-внешнепланарную укладку графа Кэли.

Следствие 2. Граф Кэли всякой бесконечной полугруппы S , являющейся прямым произведением конечного числа неоднородных циклических полугрупп, относительно любого множества образующих не допускает вершинно-внешнепланарную укладку.

Для сравнения, граф Кэли бесконечной полугруппы S , являющейся прямым произведением конечного числа неоднородных циклических полугрупп, допускает плоскую укладку в единственном случае, а именно, тогда и только тогда, когда $S \cong \langle a \mid a^3 = a \rangle \times \langle b \mid b = b \rangle$.

3. Заключение. Перспективы данного направления исследований видятся в переносе полученных критериев на более широкие классы полугрупп, моноидов и полугрупп с нулем, включая неабелевы и нециклические компоненты. Вызывает неподдельный интерес изучение связи вершинной внешнепланарности с другими инвариантами графов, например, числом связности, хроматическими характеристиками, спектральными признаками, в контексте графов Кэли полугрупп. С практической точки зрения полезна разработка эффективных алгоритмов распознавания внешнепланарности и их применение в задачах анализа алгебраических структур.

Работа вносит вклад в теорию графов Кэли для полугрупп, показывая, как конкретные алгебраические ограничения непосредственным образом определяют топологическую организацию соответствующих графов. Полученные результаты задают направление дальнейшего развития темы и служат отправной точкой для более общего анализа взаимосвязи алгебраической структуры и топологических свойств.

Список литературы

1. Dziobiak S. Excluded-minor characterization of apex-outerplanar graphs. LSU Doctoral Dissertations. 3102; 2011. 83 p. https://repository.lsu.edu/gradschool_dissertations/3102
2. Ding G., Dziobiak S, Excluded-minor characterization of apex-outerplanar graphs. *Graphs and Combinatorics*. 2016;32(2):583–627.
3. Chatzidimitriou D. et al., Sparse obstructions for minor-covering parameters. *Discrete Appl. Math.* 2020;278:28–50.
4. Donkers H. et al., Preprocessing for outerplanar vertex deletion: an elementary kernel of quartic size. *Algorithmica*. 2022;84(11):3407–3458.
5. Eppstein D. On the biplanarity of blowups. *J. Graph Algorithms Appl.* 2024;28(2):83–99.
6. Jobson A.S., Kézdy A.E. All minor-minimal apex obstructions with connectivity two. *Electron. J. Comb.* 2021;28(1):Research Paper P1.23, 58 p.
7. Leivaditis A. et al., Minor-obstructions for apex sub-unicyclic graphs. *Acta Math. Univ. Comen. New Ser.* 2019;88(3):903–910.
8. Leivaditis A. et al., Minor-obstructions for apex sub-unicyclic graphs. *Discrete Appl. Math.* 2020;284:538–555.
9. Leivaditis A. et al., Minor obstructions for apex-pseudoforests. *Discrete Math.* 2021;344(10): Article ID 112529, 31 p.
10. Mattman T.W. Forbidden minors: finding the finite few. in: *A primer for undergraduate research. From groups and tiles to frames and vaccines. Cham: Birkhäuser.* 2017;85–97
11. Sau I. et al., k -apices of minor-closed graph classes. I: Bounding the obstructions. *J. Comb. Theory, Ser. B* 2023;161:180–227.
12. Savitsky T.J., Schluchter S.A. Some excluded minors for the spindle surface. *J. Comb. Math. Comb. Comput.* 2024;119:217–232.
13. Соломатин Д.В. Прямые произведения циклических полугрупп, допускающие внешнепланарные графы Кэли и их обобщения. *Прикладная математика & Физика*. 2024;56(1):13–20.
14. Harary F. Graph Theory: Advanced Book Program Series. Boulder: Westview Press; 1994. 284 p.
15. Zelinka B. Graphs of Semigroups. *Casopis. Pest. Mat.* 1981;106:407–408.
16. Соломатин Д.В. Исследования полугрупп с планарными графами Кэли: результаты и проблемы. *Прикладная Дискретная Математика*. 2021;54:5–57.

References

1. Dziobiak S, Excluded-minor characterization of apex-outerplanar graphs. LSU Doctoral Dissertations. 3102; 2011. 83 p. https://repository.lsu.edu/gradschool_dissertations/3102
2. Ding G., Dziobiak S, Excluded-minor characterization of apex-outerplanar graphs. *Graphs and Combinatorics*. 2016;32(2):583–627.
3. Chatzidimitriou D. et al., Sparse obstructions for minor-covering parameters. *Discrete Appl. Math.* 2020;278:28–50.
4. Donkers H. et al., Preprocessing for outerplanar vertex deletion: an elementary kernel of quartic size. *Algorithmica*. 2022;84(11):3407–3458.
5. Eppstein D. On the biplanarity of blowups. *J. Graph Algorithms Appl.* 2024;28(2):83–99.
6. Jobson AS., Kézdy AE, All minor-minimal apex obstructions with connectivity two. *Electron. J. Comb.* 2021;28(1):Research Paper P1.23, 58 p.
7. Leivaditis A. et al., Minor-obstructions for apex sub-unicyclic graphs. *Acta Math. Univ. Comen. New Ser.* 2019;88(3):903–910.
8. Leivaditis A. et al., Minor-obstructions for apex sub-unicyclic graphs. *Discrete Appl. Math.* 2020;284:538–555.
9. Leivaditis A. et al., Minor obstructions for apex-pseudoforests. *Discrete Math.* 2021;344(10): Article ID 112529, 31 p.
10. Mattman TW, Forbidden minors: finding the finite few. in: *A primer for undergraduate research. From groups and tiles to frames and vaccines. Cham: Birkhäuser.* 2017;85–97
11. Sau I. et al., k -apices of minor-closed graph classes. I: Bounding the obstructions. *J. Comb. Theory, Ser. B* 2023;161:180–227.
12. Savitsky TJ., Schluchter SA, Some excluded minors for the spindle surface. *J. Comb. Math. Comb. Comput.* 2024;119:217–232.
13. Solomatin DV, Direct Products of Cyclic Semigroups Allowing Outerplanar Cayley Graphs and Their Generalizations. *Applied Mathematics & Physics*. 2024;56(1):13–20. (in Russ.)
14. Harary F. Graph Theory: Advanced Book Program Series. Boulder: Westview Press; 1994. 284 p.
15. Zelinka B. Graphs of Semigroups. *Casopis. Pest. Mat.* 1981;106:407–408.
16. Solomatin DV, Researches of semigroups with planar Cayley graphs: results and problems. *Prikladnaya Diskretnaya Matematika*. 2021;54:5–57. (in Russ.)

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 15.10.2025

Received October 15, 2025

Поступила после рецензирования 27.11.2025

Revised November 27, 2025

Принята к публикации 03.12.2025

Accepted December 3, 2025

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Соломатин Денис Владимирович – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры математики и методики обучения математике, Омский государственный педагогический университет, г. Омск, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Denis V. Solomatin – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Mathematics and Mathematics Education Methods, Omsk State Pedagogical University, Omsk, Russia

К содержанию