Прикладная математика & Физика, 2025, том 57, № 4. С. 266–271
Applied Mathematics & Physics, 2025, Volume 57, No 4. P. 266–271

УДК 517; 517.95
MSC 35J20
Оригинальное исследование

DOI 10.52575/2687-0959-2025-57-4-266-271
EDN AXHDEU

Теорема о среднем и субгармонические функции на стратифицированном множестве

Ощепкова С. Н.[1], **Спивак А. С.**[2]
(*Статья представлена членом редакционной коллегии Пенкиным О. М.*)
[1] Воронежский государственный университет инженерных технологий,
Россия, 394036, г. Воронеж, пр. Революции, 19
osonia@mail.ru
[2] Воронежский государственный университет,
Россия, 394018, г. Воронеж, Университетская пл., 1
alexs1nger@yandex.ru

Аннотация. В данной работе приводится аналог теоремы о среднем для субгармонических функций в следующей ситуации: вместо области пространства $\mathbb{R}^d$ рассматривается стратифицированное множество Ω, а вместо классического лапласиана – «стратифицированный». Ранее похожий результат был получен для так называемого мягкого лапласиана, максимально приближенного по своим свойствам к классическому. Здесь же мы приводим результат – аналог теоремы о среднем, – имеющий место для всех стратифицированных лапласианов. Теорема о среднем играет важную роль при обсуждении качественных свойств субгармонических функций на стратифицированных множествах и в вопросах разрешимости на них задачи Дирихле.

Ключевые слова: стратифицированное множество, стратифицированная мера, лапласиан, теорема о среднем

Для цитирования: Ощепкова С.Н., Спивак А.С. Теорема о среднем и субгармонические функции на стратифицированном множестве. *Прикладная математика & Физика.* 2025;57(4):266–271.
DOI 10.52575/2687-0959-2025-57-4-266-271 EDN AXHDEU

Original Research

The Mean Value Theorem and the Subharmonic Functions on the Stratified Set

Sofia N. Oshchepkova[1], **Aleksandra S. Spivak**[2]
(*Article submitted by a member of the editorial board Penkin O. M.*)
[1] Voronezh State University of Engineering Technologies,
19 Revolutsii Av., Belgorod 394036, Russia
osonia@mail.ru
[2] Voronezh State University,
1 University Sq., Voronezh 394018, Russia
alexs1nger@yandex.ru

Abstract. In this paper, an analogue of the mean value theorem for subharmonic functions is presented in the following setting: instead of a domain in $\mathbb{R}^d$, a stratified set Ω is considered, and instead of the classical Laplacian, a "stratified"one is used. Previously, a similar result was obtained for the so-called soft Laplacian, whose properties are as close as possible to the classical one. Here, we present a result—an analogue of the mean value theorem—that holds for all stratified Laplacians. The mean value theorem plays an important role in discussing the qualitative properties of subharmonic functions on stratified sets and in addressing the solvability of the Dirichlet problem on them.

Keywords: Stratified Set, Stratified Measure, Laplacian, Mean Value Theorem

For citation: Oshchepkova SN., Spivak AS. The Mean Value Theorem and the Subharmonic Functions on the Stratified Set. *Applied Mathematics & Physics.* 2025;57(4):266–271 (In Russ.). DOI 10.52575/2687-0959-2025-57-4-266-271 EDN AXHDEU

1. Основные понятия и вспомогательные факты.

1.1. Стратифицированное множество. Общее определение стратифицированного множества, лапласиана на нем и т. п. можно найти в [1] (см. также [2], [3]). В данной работе мы ограничиваемся случаем, когда все страты, кроме граничных (подробности ниже), являются плоскими, что упрощает описание основных понятий. Плоской стратой σ_{kj} мы называем открытое связное подмножество k-мерного линейного многообразия L пространства $\mathbb{R}^d$ в топологии, индуцированной на L из $\mathbb{R}^d$.

Множество $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ называется стратифицированным, если оно связно и состоит из конечного числа страт σ_{kj} различных размерностей (здесь k – размерность, а j служит для автономной нумерации страт фиксированной размерности), имеющих компактные замыкания и примыкающих друг к другу в соответствии со следующими требованиями:

- пересечение замыканий $\overline{\sigma}_{kj} \cap \overline{\sigma}_{mi}$ различных страт σ_{kj}, σ_{mi} либо пусто, либо состоит из некоторых страт;
- граница $\partial\sigma_{kj} = \overline{\sigma}_{kj} \backslash \sigma_{kj}$ либо пуста (так будет, например, при $k = 0$), либо состоит из страт.

Строго говоря, стратифицированное множество – это тройка $(\Omega, \mathcal{S}, \varphi)$, в которой $\mathcal{S}$ – фиксированный набор страт, представляющих множество Ω, а φ – отображение, отождествляющее границы некоторых страт (способ склейки Ω из элементов набора $\mathcal{S}$), но мы будем называть стратифицированным множеством само Ω, считая $\mathcal{S}$ и φ фиксированными.

1.2. Стратифицированная мера. Пусть $\omega \subset \Omega$ таково, что каждое пересечение $\omega \cap \sigma_{kj}$ измеримо по Лебегу. Нетрудно показать, что семейство таких подмножеств образует σ-алгебру Σ в Ω. Меру любого множества $\omega \in \Sigma$ определим формулой

$$\mu(\omega) = \sum_{\sigma_{kj}} \mu_k(\omega \cap \sigma_{kj}),$$

где μ_k – обычная k-мерная мера Лебега. Определенную таким образом меру будем называть стратифицированной. Легко проверить, что она удовлетворяет стандартным аксиомам меры.

Понятие измеримой функции определяется стандартно. Можно показать, что интеграл Лебега измеримой функции f по измеримому множеству $\omega \subset \Omega$ сводится к сумме обычных интегралов Лебега по фрагментам $\omega \cap \sigma_{kj}$. В частности, при $\omega = \Omega$ имеем

$$\int_{\Omega} f\, d\mu = \sum_{\sigma_{kj}} \int_{\sigma_{kj}} f\, d\mu_k.$$

1.3. Дивергенция и лапласиан на стратифицированном множестве. На сегодняшний день наиболее распространёнными методами определения гармонических функций на сложных множествах, как правило метрических пространствах с мерой, согласованной с метрикой, являются следующие:

- Гармоническими называют функции, удовлетворяющие равенству среднего:

$$u(X) = \frac{1}{\mu(B_r(X))} \int_{B_r(X)} u\, d\mu.$$

- Гармоническими называют функции, минимизирующие специальным образом определенные интегралы Дирихле.

Первый подход реализован, например, в [4]. Он хорошо приспособлен к изучению качественных свойств гармонических функций, но с ними не всегда можно связать какой-нибудь дифференциальный оператор, похожий на «настоящий» лапласиан.

Второй подход, реализованный, например, в [5], на наш взгляд, является более естественным, но изучение качественных свойств соответствующих гармонических функций оказывается весьма сложным.

В данной работе мы реализуем второй подход, но вместо абстрактного метрического пространства со специальной мерой, удовлетворяющей принципу удвоения, рассматриваем стратифицированные множества, наделенные стратифицированной мерой. Это открывает возможность построения полноценной качественной теории соответствующих гармонических функций; примеры таковой можно найти в [6, 7].

Начнём с определения дивергенции касательных векторных полей.

Всюду далее Ω считается представленным в виде дизъюнктного объединения $\Omega = \Omega_0 \cup \partial\Omega_0$, где Ω_0 – открытое, связное подмножество Ω, составленное из его страт и плотное в Ω, т. е. $\overline{\Omega}_0 = \Omega$. Все только что упомянутые топологические понятия относятся к топологии Ω, индуцируемой на него стандартной топологией $\mathbb{R}^d$. Множество $\partial\Omega_0 = \Omega \backslash \Omega_0$ оказывается при этом топологической границей Ω_0. Формально допускается случай, когда $\Omega_0 = \Omega$, $\partial\Omega_0 = \varnothing$, но обычно предполагается $\Omega_0 \neq \Omega$.

Выше уже отмечалось, что мы намерены рассматривать случай, когда все страты, не считая граничных, плоские. Граничные страты из $\partial\Omega_0$ будем считать гладкими многообразиями. Рис. 1. иллюстрирует возможное геометрическое устройство стратифицированного множества; на нем граничные страты выделены жирным.

Векторное поле $\vec{F}$ в $\mathbb{R}^d$ назовём касательным к Ω_0, если для любой страты $\sigma_{kj} \subset \Omega_0$ и любой точки $X \in \sigma_{kj}$ вектор $\vec{F}(X)$ принадлежит касательному пространству $T_X\sigma_{kj}$, понимаемому в обычном дифференциально-геометрическом смысле. При $k = 0$ считается, что $T_X\sigma_{kj}$ состоит из одного лишь нуль-вектора.

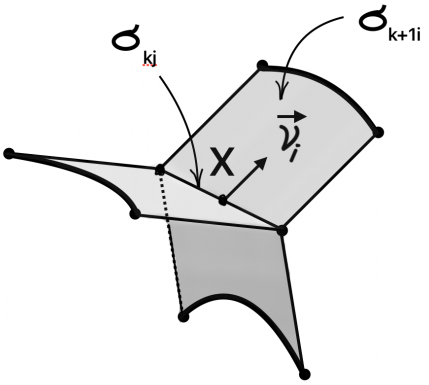

Рис. 1. Стратифицированное множество
Fig.1. Stratified set

Дивергенция касательного векторного поля в точке $X \in \sigma_{kj}$ определяется следующим выражением:

$$\nabla \cdot \vec{F}(X) = \nabla_k \cdot \vec{F}(X) + \sum_{\sigma_{k+1i} \succ \sigma_{kj}} \vec{F}(X + 0 \cdot \vec{v}_i) \cdot \vec{v}_i,$$

где $\nabla_k \cdot \vec{F}$ – классическая k-мерная дивергенция сужения векторного поля $\vec{F}$ на σ_{kj}; $\vec{v}_i$ – единичная нормаль к σ_{kj} в точке X, направленная внутрь страты σ_{k+1i} (см. рис. 1.), примыкающей к σ_{kj} (факт примыкания σ_{k+1i} к σ_{kj} выражается записью вида $\sigma_{k+1i} \succ \sigma_{kj}$). Обозначение вида $\vec{F}\ (X +\ 0\ \cdot\ \vec{v}_i)$ служит для записи предельного значения вектора $\vec{F}(Y)$, когда Y, двигаясь по страте σ_{k+1i}, стремится к X.

Введенное нами понятие дивергенции является точным аналогом классической дивергенции, определяемой как плотность потока векторного поля; только в нашем случае плотность потока нужно относить к стратифицированной мере, упомянутой выше.

Множество векторных полей, для которых эта дивергенция существует, обозначается $\vec{C}^1(\Omega_0)$. В качестве достаточных условий существования дивергенции годятся следующие:

- сужения $\vec{F}$ на страты $\sigma_{kj} \subset \Omega_0$ принадлежат классу C^1;
- эти сужения допускают продолжения по непрерывности в $(k-1)$-мерные страты $\sigma_{k-1i} \prec \sigma_{kj}$ при $k > 0$.

Пусть $u : \Omega_0 \longrightarrow \mathbb{R}$ – непрерывная скалярная функция. Если через ∇u обозначить векторное поле на Ω_0, составленное из градиентов сужений u на страты $\sigma_{kj} \subset \Omega_0$, и если $\nabla u \in \vec{C}^1(\Omega_0)$ (множество функций u, обладающих такими свойствами, обозначается $C^2(\Omega_0)$), то можно определить оператор $\Delta u = \nabla \cdot (\nabla u)$, являющийся аналогом классического лапласиана. Более того, можно определить целый класс операторов вида $\nabla \cdot (p\nabla u)$, где p – так называемая стратифицированная константа, равная на каждой страте из Ω_0 либо тождественной единице, либо нулю. При этом всегда предполагается, что $p = 1$ на свободных стратах; так мы называем страты, не являющиеся граничными для других страт. В частности, если $p = 1$ только на таких стратах, то соответствующий оператор называется мягким лапласианом, а если $p \equiv 1$ на Ω_0, то соответствующий оператор называется жёстким лапласианом.

В данной работе мы, ради простоты формул, ограничимся случаем жёсткого лапласиана, но приводимые нами результаты имеют место и для всех промежуточных лапласианов.

1.4. Основные интегральные тождества. Ключевую роль в наших рассмотрениях играют следующие интегральные тождества. Их обоснования можно найти в [1].

Теорема 1.1 (Теорема о дивергенции). *Пусть* $\vec{F} \in \vec{C}^1(\Omega_0)$. *Тогда*

$$\int\limits_{\partial\Omega_0} (\vec{F})_\nu \, d\mu = -\int\limits_{\Omega_0} \nabla \cdot \vec{F} \, d\mu,$$

где $(\vec{F})_\nu = \sum\limits_{\substack{\sigma_{k+1i} \succ \sigma_{kj}, \\ \sigma_{k+1i} \subset \Omega_0}} \vec{F}(X + 0 \cdot \vec{v}_i) \cdot \vec{v}_i$. Знак «–» в формуле связан с тем, что здесь мы используем в граничных стратах внутренние нормали.

В следующей теореме $C^1(\Omega_0)$ означает множество непрерывных на Ω_0 функций, непрерывно дифференцируемых на каждой страте, а ν представляет собой единичный вектор внутренней нормали.

Теорема 1.2 (Формула Грина). *Если $u \in C^2(\Omega_0)$ и $v \in C^1(\Omega_0)$, то*

$$\int\limits_{\partial\Omega_0} (v \cdot \nabla u)_\nu \, d\mu = -\int\limits_{\Omega_0} \nabla v \cdot \nabla u \, d\mu - \int\limits_{\Omega_0} v \cdot \Delta u \, d\mu. \tag{1}$$

2. Теорема о среднем для гармонических функций на стратифицированном множестве. Пусть $X_0 \in \sigma_{kj} \subset \Omega_0$ и пусть также $r > 0$ не превосходит расстояния от X_0 до всех страт $\sigma_{mi}, m \leq k$, не содержащих X_0. Здесь мы пользуемся внутренней метрикой на Ω, т. е. расстояние $dist(X,Y)$ определяется как минимум длин непрерывных кривых, соединяющих X и Y и лежащих в Ω. Если число r удовлетворяет сформулированным требованиям, то оно называется допустимым радиусом, а множество $B_r(X_0) = \{X \in \Omega : dist(X_0, X) < r\}$ – допустимым открытым шаром радиуса r. Граница этого шара $S_r(X_0) = \{X \in \Omega : dist(X_0, X) = r\}$ называется допустимой сферой. Эту сферу можно рассматривать как стратифицированное множество (теперь уже с неплоскими стратами), если её стратами объявить пересечение страт из Ω с $S_r(X_0)$. Мера и интеграл на этой сфере интерпретируются так же, как мера и интеграл на всем стратифицированном множестве. Обозначать эту меру будем через μ_r.

Из формулы (1) для стратифицированных множеств легко получается следующее утверждение:

Теорема 2.1. *Пусть функция $u \in C^2(\Omega_0)$ такова, что $\Delta u \geq 0$ (естественно назвать такую функцию субгармонической). Тогда на любой допустимой сфере имеет место равенство:*

$$\int\limits_{S_r(X_0)} (\nabla u)_\nu \, d\mu_r \geq 0; \tag{2}$$

смысл обозначения $(\cdot)_\nu$ раскрывается в формулировке теоремы 1.1, однако здесь используется единичный вектор внешней нормали.

Справедливость последнего неравенства естественным образом следует из формулы (1), если положить $v \equiv 1$, в качестве Ω_0 взять $B_r(X_0)$, а в качестве $\partial\Omega_0$ – $S_r(X_0)$.

В развернутой форме формулу (2) можно переписать в виде:

$$\sum_{\widetilde{\sigma}_{kj}} \int\limits_{\widetilde{\sigma}_{kj}} (\nabla u)_\nu \, d\mu_r \geq 0,$$

где $\widetilde{\sigma}_{kj}$ – страты допустимой сферы, определяемые упомянутым выше способом.

Последнюю формулу можно также записать следующим образом:

$$\sum_{S_r^k(X_0)} \int\limits_{S_r^k(X_0)} (\nabla u)_\nu \, d\mu_r \geq 0, \tag{3}$$

где $S_r^k(X_0)$ – k-мерный фрагмент сферы $S_r(X_0)$, составленный из страт $\widetilde{\sigma}_{kj}$ размерности k.

На рис. 2. изображён стратифицированный шар с соответствующей сферой, разбитой на фрагменты.

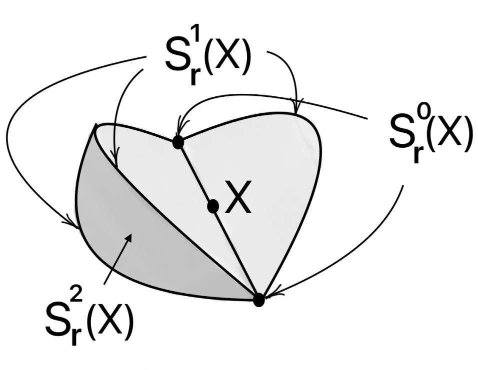

Рис. 2. Стратифицированный шар и сфера
Fig. 2. Stratified Ball and Sphere

Нетрудно показать, что для фрагментов $S_r^k(X_0)$ допустимой сферы имеет место равенство

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{|S_r^k(X_0)|}\int\limits_{S_r^k(X_0)} u \, d\mu_r\right) = \frac{1}{|S_r^k(X_0)|}\int\limits_{S_r^k(X_0)} (\nabla u)_\nu \, d\mu_r,$$

являющееся аналогом классической формулы дифференцирования средних.

В знаменателях этой формулы стоит площадь k-мерного фрагмента сферы, равная αr^k, где α – угловая мера этого фрагмента.

Отсюда, после сокращения α, получаем

$$\int\limits_{S_r^k(X_0)} (\nabla u)_\nu \, d\mu_r = r^k \frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r^k} \int\limits_{S_r^k(X_0)} u \, d\mu_r \right),$$

что позволяет переписать выражение (3) в следующем виде:

$$\sum_{S_r^k(X_0)} r^k \frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r^k} \int\limits_{S_r^k(X_0)} u \, d\mu_r \right) \geq 0.$$

Умножим неравенство выше на r:

$$\sum_{k=0}^{n-1} r^{k+1} \frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r^k} \int\limits_{S_r^k(X_0)} u \, d\mu_r \right) \geq 0.$$

Пусть R – допустимый радиус для данной точки X_0. Тогда можно проинтегрировать последнее неравенство от 0 до R. В результате получим

$$\sum_{k=0}^{n-1} \int\limits_0^R r^{k+1} \frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r^k} \int\limits_{S_r^k(X_0)} u \, d\mu_r \right) dr \geq 0.$$

Интегрируя по частям, преобразуем это выражение к виду

$$\sum_{k=0}^{n-1} r \int\limits_{S_r^k(X_0)} u \, d\mu_r \Big|_0^R - \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) \int\limits_0^R \left(\int\limits_{S_r^k(X_0)} u \, d\mu_r \right) dr \geq 0.$$

В первом интеграле подстановка $r = 0$ означает предельный переход при $r \to 0$; за счёт множителя r перед интегралом получаем на нижнем пределе нулевое значение. Далее замечаем, что повторный интеграл равен интегралу по $(k+1)$-мерному фрагменту $B_R^{k+1}(X)$, составленному из пересечений $(k+1)$-мерных страт с шаром $B_R(X)$. Таким образом имеем:

$$\sum_{k=0}^{n-1} R \int\limits_{S_R^k(X_0)} u \, d\mu_R - \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) \int\limits_{B_R^{k+1}(X_0)} u \, d\mu \geq 0.$$

После очевидных преобразований приходим к следующему утверждению.

Теорема 2.2 (Теорема о среднем для субгармонических функций). *Пусть u – субгармоническая функция в смысле жесткого лапласиана. Тогда для любой точки $X_0 \in \Omega_0$ и допустимого $R > 0$ имеет место следующее неравенство:*

$$R \int\limits_{S_R(X_0)} u \, d\mu_R \geq \sum_{k=1}^{n} k \int\limits_{B_R^k(X_0)} u \, d\mu.$$

В применении к классическому случаю – лапласиану в области G пространства $\mathbb{R}^d$, сумма сводится к одному слагаемому и формула преобразуется к

$$\int\limits_{S_R(X_0)} u \, d\mu_R \geq \frac{d}{R} \int\limits_{B_R(X_0)} u \, d\mu.$$

Список литературы

1. Покорный Ю.В., Пенкин О.М., Прядиев В.Л., Боровских А.В., Лазарев К.П., Шабров С.А. Дифференциальные уравнения на геометрических графах. М.:Физматлит; 2005. 272с.

2. Oshchepkova S.N., Penkin O.M. The mean-value theorem for elliptic operators on stratified sets. *Mathematical Notes.* 2007;81(3):365-372 https://doi.org/10.1134/S0001434607030108
3. Oshchepkova S.N., Penkin O.M., Savasteev D.V. Strong maximum principle for an elliptic operator on a stratified set. *Mathematical Notes.* 2012;92(2):249–259 https://doi.org/10.1134/S0001434612070267
4. Adamowicz T., Gaczkowski M., Gorka P. Harmonic functions on metric measure spaces. *Revista Matematica Complutense.* 2019;32:141-186 https://doi.org/10.1007/s13163-018-0272-7
5. Ambrosio L., Gigli N., Savare G. Calculus and heat flow in metric measure spaces and applications to spaces with Ricci bounds from below. *Inventiones Mathematicae.* 2014;195:289-391 https://doi.org/10.1007/s00222-013-0456-1
6. Dairbekov N.S., Penkin O.M., Savasteev D.V. On Removable Singularities of Harmonic Functions on a Stratified Set. *Doklady Mathematics.* 2024;110:297-300 https://doi.org/10.1134/S1064562424601379
7. Dairbekov N.S., Penkin O.M., Savasteev D.V. Harnack's Inequality for Harmonic Functions on Stratified Sets. *Siberian Mathematical Journal.* 2023;64(5):1137–1144 https://doi.org/10.1134/S0037446623050063

References

1. Pokornyi YV., Penkin OM., Priadiev VL., Borovskikh AV., Lazarev KP., Shabrov SA. Differentcial'nye uravneniia na geometricheskikh grafakh [Differential equations on geometric graphes]. Moscow: Fizmatlit; 2005. 272p (In Russ.).
2. Oshchepkova SN., Penkin OM. The mean-value theorem for elliptic operators on stratified sets. *Mathematical Notes.* 2007;81(3):365-372 https://doi.org/10.1134/S0001434607030108
3. Oshchepkova SN., Penkin OM., Savasteev DV. Strong maximum principle for an elliptic operator on a stratified set. *Mathematical Notes.* 2012;92(2):249-259 https://doi.org/10.1134/S0001434612070267
4. Adamowicz T., Gaczkowski M., Gorka P. Harmonic functions on metric measure spaces. *Revista Matematica Complutense.* 2019;32:141-186 https://doi.org/10.1007/s13163-018-0272-7
5. Ambrosio L., Gigli N., Savare G. Calculus and heat flow in metric measure spaces and applications to spaces with Ricci bounds from below. *Inventiones Mathematicae.* 2014;195:289-391 https://doi.org/10.1007/s00222-013-0456-1
6. Dairbekov NS., Penkin OM., Savasteev DV. On Removable Singularities of Harmonic Functions on a Stratified Set. *Doklady Mathematics.* 2024;110:297-300 https://doi.org/10.1134/S1064562424601379
7. Dairbekov NS., Penkin OM., Savasteev DV. Harnack's Inequality for Harmonic Functions on Stratified Sets. *Siberian Mathematical Journal.* 2023;64(5):1137–1144 https://doi.org/10.1134/S0037446623050063

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.
Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 08.09.2025
Поступила после рецензирования 06.11.2025
Принята к публикации 20.11.2025

Received September 8, 2025
Revised November 6, 2025
Accepted November 20, 2025

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Ощепкова Софья Николаевна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, Воронежский государственный университет инженерных технологий, г. Воронеж, Россия

Спивак Александра Сергеевна – бакалавр 4 года обучения направления подготовки «Прикладная математика», Воронежский государственный университет инженерных технологий, г. Воронеж, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Sofia N. Oshchepkova – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Assosiate Professor of the Department of Higher Mathematics, Voronezh State University of Engineering Technologies, Voronezh, Russia

Aleksandra S. Spivak – 4-year Bachelor's Degree in Applied Mathematics, Voronezh State University of Engineering Technologies, Voronezh, Russia

К содержанию