Прикладная математика & Физика, 2026, том 58, № 1. С. 22–28.
Applied Mathematics & Physics, 2026, Volume 58, No 1. P. 22–28.

УДК 517.95
MSC 35L25,35L35,35L55,35L99
Оригинальное исследование

DOI 10.52575/2687-0959-2026-58-1-22-28
EDN FBVXHX

Задача с нелокальными условиями Стеклова для уравнения в частных производных четвертого порядка и критерии единственности ее решения

Богатов А. В.
(*Статья представлена членом редакционной коллегии Солдатовым А. П.*)
Публичное акционерное общество «Банк ПСБ»,
Россия, 150003, г. Ярославль, ул. Республиканская, 16
andrebogato@mail.ru

Аннотация. В статье рассматривается начально-краевая задача для уравнения четвертого порядка с нелокальными краевыми условиями. Были получены критерии единственности решения задачи для уравнения, которое является обобщением уравнения Буссинеска – Лява. Нелокальные краевые условия представляют собой соотношения между значениями искомого решения и его производных по пространственной переменной в различных точках границы и известны в научной литературе как условия Стеклова. Ранее задачи с такими условиями рассматривались для уравнений второго порядка.

Ключевые слова: уравнение четвертого порядка, нелокальная задача, условия Стеклова, критерии единственности

Для цитирования: Богатов А.В. Задача с нелокальными условиями Стеклова для уравнения в частных производных четвертого порядка и критерии единственности ее решения. *Прикладная математика & Физика.* 2026;58(1):22–28.
DOI 10.52575/2687-0959-2026-58-1-22-28 EDN FBVXHX

Original Research

The Problem with Steklov Conditions for Fourth Order Partial Differential Equation and Criteria for Uniqueness of its Solution

Andrey V. Bogatov
(*Article submitted by a member of the editorial board Soldatov A. P.*)
Bank PSB Public Joint-Stock Company,
16 Respublikanskaya St., Yaroslavl 150003, Russia
andrebogato@mail.ru

Abstract. In this article, we consider the initial-boundary problem for fourth order partial differential equation with nonlocal boundary conditions. Our attention is focused on the equation that one may interpret as generalization of Boussinesque – Love equation. Nonlocal conditions here are relations between the values of required solution and its derivatives with respect to spacial variable in different boundary points. Such nonlocal conditions are known as Steklov conditions. Earlier nonlocal problems with Steklov conditions were considered for second order partial differential equations. First, such problem was stated for the one-dimensional heat equation in connection with study of the process of cooling of a bar. Later it was noted that the nonlocal problem with Steklov conditions is closely related to the problem of longitudinal vibration of a thik short bar if we take into account the transverse deformation. The mathematical model of longitudinal vibration of a thik short bar considering the effect of transverse movements is called Rayleigh bar and is based on Boussinesque – Love equation.

Keywords: Fourth Order Partial Differential Equation, Nonlocal Problem, Steklov Conditions, Criteria of Uniqueness

For citation: Bogatov AV. The Problem with Steklov Conditions for Fourth Order Partial Differential Equation and Criteria for Uniqueness of its Solution. *Applied Mathematics & Physics.* 2026;58(1):22–28. (In Russ).
DOI 10.52575/2687-0959-2026-58-1-22-28 EDN FBVXHX

1. Введение. В статье рассмотрена задача для уравнения четвертого порядка

$$u_{tt} - (au_x)_x - (bu_{xtt})_x + cu = f(x,t), \tag{1}$$

которое можно интерпретировать как обобщение уравнения Буссинеска – Лява. Уравнение Буссинеска – Лява, как известно, возникает при математическом моделировании различных колебательных процессов, в частности, продольных колебаний толстого короткого стержня с учетом эффектов поперечных деформаций. Такая математическая модель называется стержнем Рэлея [1]. При небольшой длине стержня, колебания которого изучаются, режимы на его концах могут влиять друг на друга. Этот эффект был замечен В. А. Стекловым [2] и представлен им в виде

$$\begin{aligned} &\alpha_{11}u_x(0,t) + \alpha_{12}u_x(l,t) + \beta_{11}u(0,t) + \beta_{12}u(l,t) = 0,\\ &\alpha_{21}u_x(0,t) + \alpha_{22}u_x(l,t) + \beta_{21}u(0,t) + \beta_{22}u(l,t) = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Задачи с такими условиями изучались для уравнений второго порядка [3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]. В данной статье рассматривается уравнение четвертого порядка и для него получены критерии единственности решения задачи с условиями (2).

2. Постановка задачи. В области $Q_T = (0,l) \times (0,T)$ найти решение уравнения (1), удовлетворяющее нелокальным условиям (2), где α_{ij}, $\beta_{i,j}$ – постоянные, $i,j = 1,2$, и начальным условиям

$$u(x,0) = \varphi(x), u_t(x,0) = \psi(x). \tag{3}$$

Будем считать, что коэффициенты уравнения (1) достаточно гладкие функции, $a(x,t) > 0, b(x,t) > 0$ всюду в $\bar{Q_T}$. Под решением задачи мы понимаем функцию $u \in C^2(\bar{Q_T})$, имеющую $u_{xxtt} \in C(Q_T)$, которая удовлетворяет условиям (2), (3) и обращает (1) в верное равенство. Естественным условием, при выполнении которого можно ожидать однозначную разрешимость поставленной задачи, является линейная независимость соотношений (2). Это свойство имеет место, если не все миноры матрицы из коэффициентов $\alpha_{ij}, \beta_{i,j}$ равны нулю. В настоящей статье получены два варианта условий, обеспечивающих единственность решений.

3. Основной результат.

Теорема 1.

Если $\Delta = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{21}\alpha_{12} \neq 0$ и выполняются условия:

H1: $a, a_t, b, b_t, c \in C(\bar{Q_T})$;

H2: $\gamma_{12}b(0,t) + \gamma_{21}b(l,t) = 0$;

H3: $\gamma_{22} < 0, \gamma_{11} > 0, \gamma_{12}^2 b(0,\tau) + \gamma_{11}\gamma_{22}b(l,\tau) \leq 0$, то существует не более одного решения задачи (1)-(3).

Доказательство.

Пусть $\Delta = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{21}\alpha_{12} \neq 0$. Тогда (2) можно представить в виде

$$\begin{aligned} u_x(0,t) &= \gamma_{11}u(0,t) + \gamma_{12}u(l,t) \\ u_x(l,t) &= \gamma_{21}u(0,t) + \gamma_{22}u(l,t), \end{aligned} \tag{4}$$

где

$$\gamma_{11} = \frac{1}{\Delta}(\alpha_{22}\beta_{11} - \alpha_{12}\beta_{21}), \gamma_{12} = \frac{1}{\Delta}(\alpha_{22}\beta_{12} - \alpha_{12}\beta_{21}),$$

$$\gamma_{22} = \frac{1}{\Delta}(\alpha_{11}\beta_{22} - \alpha_{21}\beta_{12}), \gamma_{21} = \frac{1}{\Delta}(\alpha_{11}\beta_{21} - \alpha_{21}\beta_{11}).$$

Предположим, что задача (1), (3), (4) имеет два различных решения: $u_1(x,t), u_2(x,t)$. Тогда их разность $u = u_1 - u_2$ удовлетворяет однородному уравнению (1) и однородным условиям (2).

Умножим обе части равенства (1) с $f = 0$ на u_t и проинтегрируем по области $Q_\tau = (0,l) \times (0,\tau)$. После преобразований интегрированием некоторых слагаемых получим

$$\frac{1}{2}\int_0^l \Big[u_t^2(x,\tau) + au_x^2(x,\tau) + bu_{xt}^2(x,\tau)\Big]dx - \frac{1}{2}\int_0^\tau\int_0^l a_t u_x^2 dxdt -$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^\tau\int_0^l b_t u_{xt}^2 dxdt - \int_0^\tau a u_t(l,t)u_x(l,t)dt + \int_0^\tau a(0,t)u_t(0,t)u_x(0,t)dt -$$

$$-\int_0^\tau b(l,t)u_{xtt}(l,t)u_t(l,t)dt + \int_0^\tau b(0,t)u_{xtt}(0,t)u_t(0,t)dt + \int_0^\tau\int_0^l cuu_t dxdt = 0.$$

Принимая во внимание условия (4), получим

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\int_0^l \Big[u_t^2(x,\tau) + a(x,\tau)u_x^2(x,\tau) + b(x,\tau)u_{xt}(x,\tau)\Big]dx = \\ &= -\int_0^\tau\int_0^l cuu_t dxdt + \frac{1}{2}\int_0^\tau\int_0^l a_t u_x^2 dxdt + \frac{1}{2}\int_0^\tau\int_0^l b_t u_{xt}^2 dxdt + \\ &+ \int_0^\tau a(l,t)u_t(l,t)[\gamma_{21}u(0,t) + \gamma_{22}u(l,t)]dt - \\ &- \int_0^\tau a(0,t)u_t(0,t)[\gamma_{11}u(0,t) + \gamma_{12}u(l,t)]dt + \\ &+ \int_0^\tau b(l,t)u_t(l,t)[\gamma_{21}u_{tt}(0,t) + \gamma_{22}u_{tt}(l,t)]dt - \\ &- \int_0^\tau b(0,t)u_t(0,t)[\gamma_{11}u_{tt}(0,t) + \gamma_{12}u_{tt}(l,t)]dt. \end{aligned} \tag{5}$$

Так как $a(x,t), b(x,t)$ положительны всюду в $\bar{Q}_T$, то левая часть (5) неотрицательна. Также заметим, что существуют числа $a_0 > 0, b_0 > 0$ такие, что $a(x,t) \geq a_0, b(x,t) \geq b_0$.

Рассмотрим правую часть (5) и сделаем некоторые преобразования с целью вывести оценку, которая и позволит получить критерий единственности решения в рассматриваемом случае. В первую очередь нас будут интересовать последние четыре интеграла.

$$\gamma_{21}\int_0^\tau b(l,t)u_t(l,t)u_{tt}(0,t)dt;$$

$$\gamma_{22}\int_0^\tau b(l,t)u_t(l,t)u_{tt}(l,t)dt = \frac{1}{2}\gamma_{22}b(l,\tau)u_t^2(l,\tau) - \frac{\gamma_{22}}{2}\int_0^\tau b_t(l,t)u_t^2(l,t)dt;$$

$$-\gamma_{11}\int_0^\tau b(0,t)u_t(0,t)u_{tt}(0,t)dt = -\frac{1}{2}\gamma_{11}b(0,\tau)u_t^2(0,\tau) + \frac{\gamma_{11}}{2}\int_0^\tau b_t(0,t)u_t^2(0,t)dt;$$

$$-\gamma_{12}\int_0^\tau b(0,t)u_t(0,t)u_{tt}(l,t)dt = \gamma_{12}\int_0^\tau b(0,t)u_t(l,t)u_{tt}(0,t)dt+$$
$$+\gamma_{12}\int_0^\tau b_t(0,t)u_t(0,t)u_t(l,t)dt - \gamma_{12}b(0,\tau)u_t(0,\tau)u_t(0,\tau).$$

В результате проделанных преобразований (5) принимает вид

$$\frac{1}{2}\int_0^l [u_t^2(x\tau) + a(x,\tau)u_x^2(x,\tau) + b(x,\tau)u_{xt}^2(x,\tau)]dx =$$
$$= -\int_0^\tau\int_0^l cuu_t dxdt + \frac{1}{2}\int_0^\tau\int_0^l a_t u_x^2 dxdt + \frac{1}{2}\int_0^\tau\int_0^l b_t u_{xt}^2 dxdt+$$
$$+\int_0^\tau a(l,t)u_t(l,t)[\gamma_{21}u(0,t) + \gamma_{22}u(l,t)]dt-$$
$$-\int_0^\tau a(0,t)u_t(0,t)[\gamma_{11}u(0,t) + \gamma_{12}u(l,t)]dt-$$
$$-\frac{1}{2}\gamma_{22}\int_0^\tau b_t(l,t)u_t^2(l,t)dt + \frac{1}{2}\gamma_{11}\int_0^\tau b_t(0,t)u_t^2(0,t)dt+$$
$$+\gamma_{12}\int_0^\tau b_t(0,t)u_t(0,t)u_t(l,t)dt + \gamma_{12}\int_0^\tau b(0,t)u_t(l,t)u_{tt}(0,t)dt+$$
$$+\gamma_{21}\int_0^\tau b(l,t)u_t(l,t)u_{tt}(0,t)dt + \frac{1}{2}\gamma_{22}b(l,\tau)u_t^2(l,\tau)-$$
$$-\frac{1}{2}\gamma_{11}b(0,\tau)u_t^2(0,\tau) - \gamma_{12}b(0,\tau)u_t(0,\tau)u_t(l,\tau). \qquad (6)$$

Из **H1** следует, что существуют положительные числа a_1, b_1, c_0 такие, что

$$\max_{\bar{Q}_T}|a, a_t| \leq a_1, \max_{\bar{Q}_T}|b, b_t| \leq b_1, \max_{\bar{Q}_T}|c| \leq c_0,$$

из **H2** следует, что

$$\gamma_{12}\int_0^\tau b(0,t)u_t(l,t)u_{tt}(0,t)dt + \gamma_{21}\int_0^\tau b(l,t)u_t(l,t)u_{tt}(0,t)dt = 0,$$

из **H3** следует, что

$$\frac{1}{2}\gamma_{22}b(l,\tau)u_t^2(l,\tau) - \gamma_{12}b(0,\tau)u_t(0,\tau)u_t(l,\tau) - \frac{1}{2}b(0,\tau)u_t^2(0,\tau) \leq 0.$$

С учетом этих следствий из равенства (6) вытекает неравенство

$$\frac{1}{2}\int_0^l [u_t^2(x\tau) + a(x,\tau)u_x^2(x,\tau) + b(x,\tau)u_{xt}^2(x,\tau)]dx \leq$$
$$\leq \Big| -\int_0^\tau\int_0^l cuu_t dxdt + \frac{1}{2}\int_0^\tau\int_0^l a_t u_x^2 dxdt + \frac{1}{2}\int_0^\tau\int_0^l b_t u_{xt}^2 dxdt+$$

$$+\int_0^\tau a(l,t)u_t(l,t)[\gamma_{21}u(0,t)+\gamma_{22}u(l,t)]dt-\int_0^\tau a(0,t)u_t(0,t)[\gamma_{11}u(0,t)+\gamma_{12}u(l,t)]dt-$$

$$-\frac{1}{2}\gamma_{22}\int_0^\tau b_t(l,t)u_t^2(l,t)dt+\frac{1}{2}\gamma_{11}\int_0^\tau b_t(0,t)u_t^2(0,t)dt+\gamma_{12}\int_0^\tau b_t(0,t)u_t(0,t)u_t(l,t)dt\Big|.$$

Оценим правую часть этого неравенства. Применив неравенство Коши, получим:

$$\Big|-\int_0^\tau\int_0^l cuu_t dxdt\Big|\le\frac{c_0}{2}\int_0^\tau\int_0^l(u^2+u_t^2)dxdt;$$

$$\Big|\gamma_{21}\int_0^\tau a(l,t)u_t(l,t)u(0,t)dt\Big|\le\frac{a_1}{2}|\gamma_{21}|\int_0^\tau\Big[u_t^2(l,t)+u^2(0,t)\Big]dt;$$

$$\Big|\gamma_{22}\int_0^\tau a(l,t)u_t(l,t)u(l,t)dt\Big|\le\frac{a_1}{2}|\gamma_{22}|\int_0^\tau\Big[u_t^2(l,t)+u^2(l,t)\Big]dt;$$

$$\Big|\gamma_{11}\int_0^\tau a(0,t)u_t(0,t)u(0,t)dt\Big|\le\frac{a_1}{2}|\gamma_{11}|\int_0^\tau\Big[u_t^2(0,t)+u^2(0,t)\Big]dt;$$

$$\Big|\gamma_{12}\int_0^\tau a(0,t)u_t(0,t)u(l,t)dt\Big|\le\frac{a_1}{2}|\gamma_{12}|\int_0^\tau\Big[u_t^2(0,t)+u^2(l,t)\Big]dt;$$

$$\Big|\gamma_{12}\int_0^\tau b(0,t)u_t(0,t)u(l,t)dt\Big|\le\frac{b_1}{2}|\gamma_{12}|\int_0^\tau\Big[u_t^2(0,t)+u^2(l,t)\Big]dt.$$

Оценим теперь правые части полученных неравенств с помощью неравенств [10]

$$v^2(\xi_i,t)\le 2l\int_0^l v_x^2(x,t)dx+\frac{2}{l}\int_0^l v^2(x,t)dx,\ \xi_1=0,\ \xi_2=l. \tag{7}$$

Обозначим

$$P_1=\frac{1}{2}\Big[a_1(|\gamma_{21}|+|\gamma_{22}|)+b_1|\gamma_{12}|\Big],P_2=\frac{a_1}{2}(|\gamma_{21}|+|\gamma_{11}|),P_3=\frac{a_1}{2}a_1(|\gamma_{22}|+|\gamma_{12}|).$$

Получим

$$P_1\int_0^\tau u_t^2(l,t)dt\le 2P_1l\int_0^\tau\int_0^l u_{xt}^2(x,t)dxdt+\frac{2P_1}{l}\int_0^\tau\int_0^l u_t^2(x,t)dxdt;$$

$$P_2\int_0^\tau u^2(0,t)dt\le 2P_2l\int_0^\tau\int_0^l u_x^2(x,t)dxdt+\frac{2P_2}{l}\int_0^\tau\int_0^l u^2(x,t)dxdt;$$

$$P_3\int_0^\tau u^2(l,t)dt\le 2P_3l\int_0^\tau\int_0^l u_x^2(x,t)dxdt+\frac{2P_3}{l}\int_0^\tau\int_0^l u^2(x,t)dxdt;$$

$$\frac{1}{2}\Big|\gamma_{11}\int_0^\tau b_t(0,t)u_t^2(0,t)dx\Big|\le lb_1|\gamma_{11}|\int_0^\tau\int_0^l u_{xt}^2dxdt+\frac{b_1}{4}|\gamma_{11}|\int_0^\tau\int_0^l u_t^2;$$

$$\frac{1}{2}\Big|\gamma_{22}\int_0^\tau b_t(l,t)u_t^2(0,t)dx\Big|\le lb_1|\gamma_{22}|\int_0^\tau\int_0^l u_{xt}^2dxdt+\frac{b_1}{4}|\gamma_{22}|\int_0^\tau\int_0^l u_t^2,$$

и мы получаем неравенство

$$\int_0^l[u_t^2(x,\tau)+a(x,\tau)u_x^2(x,\tau)+b(x,\tau)u_{xt}^2(x,\tau)]dx\le M_1\int_0^\tau\int_0^l(u^2+u_t^2+u_x^2+u_{xt}^2)dxdt, \tag{8}$$

где M_1 выражается через $a_1, b_1, c_0, |\gamma_{ij}|, l$.

Так как в силу однородности начального условия справедливо представление

$$u(x,\tau)=\int_0^\tau u_t dt,$$

из которого следует неравенство

$$\int_0^l u^2(x,\tau)dx\le\int_0^\tau\int_0^l u_t^2 dxdt,$$

то прибавив последнее к (8), а затем учтя, что $a(x,t)\ge a_0, b(x,t)\ge b_0$, получим

$$\int_0^l[u^2(x,\tau+u_t^2(x,\tau)+u_x^2(x,\tau)+u_{xt}^2(x,\tau)]dx\le$$

$$\leq M\int_0^\tau\int_0^l(u^2+u_t^2+u_x^2+u_{xt}^2)dxdt, \tag{9}$$

где $M=M_1/m_0, m_o=\min\{1,a_0,b_0\}$. Применив к (9) лемму Гронуолла [11], убеждаемся, что задача имеет не более одного решения.

Пусть теперь $\Delta=\alpha_{11}\alpha_{22}-\alpha_{21}\alpha_{12}=0$, но $\Delta_1=\beta_{12}\alpha_{22}-\alpha_{12}\beta_{22}\neq 0$.

(Заметим, что можно выбрать и $\beta_{12}\alpha_{21}-\alpha_{11}\beta_{21}\neq 0$).

Теорема 2.

Если $\Delta_1\neq 0$ и выполняются условия:

H4 $a(l,t)\rho\sigma=a(0,t)$;

H5: $b(l,t)\rho\sigma=b(0,t)$;

H6: $\rho r\geq 0$, то существует не более одного решения задачи (1)-(3).

Доказательство

Тогда (2) представим в форме

$$\begin{aligned}&u(l,t)=\rho u(0,t),\\&u_x(l,t)=\sigma u_x(0,t)+ru(0,t),\end{aligned} \tag{10}$$

где

$$\rho=\frac{\alpha_{12}\beta_{21}-\alpha_{22}\beta_{11}}{\Delta_1},$$

$$\sigma=\frac{\alpha_{11}\beta_{22}-\alpha_{21}\beta_{12}}{\Delta_1},$$

$$r=\frac{\beta_{11}\beta_{22}-\beta_{12}\beta_{21}}{\Delta_1}.$$

Делая те же предположения о существовании двух различных решений, получим для них соотношение, как и в первом варианте:

$$\frac{1}{2}\int_0^l\left[u_t^2(x,\tau)+au_x^2(x,\tau)+bu_{xt}^2(x,\tau)\right]dx=\frac{1}{2}\int_0^\tau\int_0^l a_tu_x^2dxdt-$$

$$-\int_0^\tau au_t(l,t)u_x(l,t)dt+\int_0^\tau a(0,t)u_t(0,t)u_x(0,t)dt-\int_0^\tau b(l,t)u_{xtt}(l,t)u_t(l,t)dt+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^\tau\int_0^l b_tu_{xt}^2dxdt+\int_0^\tau b(0,t)u_{xtt}(0,t)u_t(0,t)dt-\int_0^\tau\int_0^l cuu_tdxdt.$$

Из (10) $u_t(l,t)=\rho u_t(0,t), u_{xtt}(l,t)=\sigma u_{xtt}(0,t)+ru_{tt}(0,t)$.

Тогда, учитывая эти равенства, получим

$$\frac{1}{2}\int_0^l\left[u_t^2(x,\tau)+au_x^2(x,\tau)+bu_{xt}^2(x,\tau)\right]dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^\tau\int_0^l(a_tu_x^2+b_tu_{xt})dxdt-\int_0^\tau\int_0^l cuu_tdxdt-$$

$$-\int_0^\tau a\rho u_t(0,t)[\sigma u_x(0,t)+ru(0,t)]dt+\int_0^\tau a(0,t)u_t(0,t)u_x(0,t)dt-$$

$$-\int_0^\tau b\rho u_t(0,t)[\sigma u_{xtt}(0,t)+ru_{tt}(0,t)]dt+\int_0^\tau bu_{xtt}(0,t)u_t(0,t)dt. \tag{11}$$

Если $a(l,t)\rho=a(0,t), \rho\sigma b(l,t)=b(0,t)$, то

$$\frac{1}{2}\int_0^l\left[u_t^2(x,\tau)+au_x^2(x,\tau)+bu_{xt}^2(x,\tau)\right]dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^\tau\int_0^l(a_tu_x^2+b_tu_{xt})dxdt-\int_0^\tau\int_0^l cuu_tdxdt-$$

$$-\int_0^\tau a(l,t)\rho ru_t(0,t)u(0,t)dt-\int_0^\tau b(l,t)\rho ru_t(0,t)u_{tt}(0,t)dt.$$

Преобразуем два последних интеграла

$$-\int_0^\tau a(l,t)\rho ru_t(0,t)u(0,t)dt=\frac{1}{2}\int_0^\tau a_t(l,t)\rho ru^2(0,t)dt-\frac{1}{2}a(l,\tau)\rho ru^2(0,\tau);$$

$$-\int_0^\tau b(l,t)\rho r u_t(0,t)u(0,t)dt = \frac{1}{2}\int_0^\tau b_t(l,t)\rho r u^2(0,t)dt - \frac{1}{2}b(l,\tau)\rho r u^2(0,\tau).$$

Тогда

$$\frac{1}{2}\int_0^l \left[u_t^2(x,\tau) + a u_x^2(x,\tau) + b u_{xt}^2(x,\tau)\right]dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\tau\int_0^l (a_t u_x^2 + b_t u_{xt})dxdt - \int_0^\tau\int_0^l c u u_t dxdt + \int_0^\tau a_t(l,t)\rho r u^2(0,t)dt +$$

$$+\int_0^\tau b_t(l,t)\rho r u^2(0,t)dt - a(l,t)\rho r u^2(0,t) - b(l,t)\rho r u^2(0,t). \qquad (12)$$

Так как $\rho r \geq 0$, то тогда из (12) следует неравенство

$$\int_0^l [u^2(x,\tau + u_t^2(x,\tau) + u_x^2(x,\tau) + u_{xt}^2(x,\tau)]dx \leq M_2 \int_0^\tau\int_0^l (u^2 + u_t^2 + u_x^2 + u_{xt}^2)dxdt,$$

которое получено в результате оценок, аналогичных проделанным в первом варианте. Применив лемму Гронуолла, убеждаемся в том, что не может существовать более одного решения и в этом случае.

4. Заключение. Таким образом, была поставлена начально-краевая задача для уравнения четвертого порядка с нелокальными краевыми условиями. Получены критерии единственности решения задачи для уравнения, которое является обобщением уравнения Буссинеска – Лява, которые заключаются в следующем. Если $\Delta = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{21}\alpha_{12} \neq 0$, то критерием единственности является выполнение гипотез **H1-H3**; если же $\Delta = 0$, но $\Delta_1 = \beta_{12}\alpha_{22} - \alpha_{12}\beta_{22} \neq 0$, то критерием единственности является выполнение гипотез **H4-H6**.

Благодарность. *Автор выражает благодарность Пулькиной Людмиле Степановне за помощь в постановке задачи и внимание к работе.*

Список литературы

1. Федотов И.А., Полянин А.Д., Шаталов М.Ю. Теория свободных и вынужденных колебаний твердого стержня, основанная на модели Рэлея. *Доклады академии наук.* 2007;417(1):1–7.
2. Стеклов В.А. Задача об охлаждении неоднородного твердого тела. *Сообщения Харьковского математического общества. Серия 2.* 1896;5(3):136–181.
3. Ионкин Н.И. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием. *Дифференциальные уравнения.* 1977;13(2):294–304.
4. Ионкин Н.И., Моисеев Е.И. О задаче для уравнения теплопроводности с двуточечными краевыми условиями. *Дифференциальные уравнения.* 1979;15(7):1284–1295.
5. Пулькина Л.С. Об одной краевой задаче со смещением для гиперболического уравнения. *Тезисы докладов международной конференции, посвященной 100-летию со дня рождения С. Л. Соболева.* 2008;194–195.
6. Кожанов А.И. О разрешимости некоторых пространственно нелокальных задач для линейных параболических уравнений. *Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия.* 2008;3(62):165–174.
7. Лажетич Н.Л. О классической разрешимости смешанной задачи для одномерного гиперболического уравнения второго порядка. *Дифференциальные уравнения.* 2006;42(8):1072–1077.
8. Пулькина Л.С., Дюжева А.В. Нелокальная задача с переменными по времени краевыми условиями Стеклова для гиперболического уравнения. *Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия.* 2010;4(78):56–64.
9. Дюжева А.В. Задача с условиями Стеклова для уравнения гиперболического типа. *Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения.* 2021;198:50–60.
10. Пулькина Л.С. Краевые задачи для гиперболического уравнения с нелокальными условиями 1 и 2-го рода. *Известия вузов. Математика.* 2012;4:74–83.
11. Гординг Л. Задача Коши для гиперболических уравнений. Москва: Издательство Иностранной литературы; 1961. 120 с.

References

1. Fedotov IA., Polyanin AD., Shatalov MYu. Theory of free forced vibrations of a rigid rod based on the Rayleigh model. *Doklady Physics.* 2007;417(1):1–7. (In Russ).
2. Steklov VA. Zadacha ob okhlazhdenii neodnorodnogo tverdogo tela [The problem of cooling of an inhomogeneous solid body]. *Soobshcheniya Kharkovskogo matematicheskogo obshchestva. Seriya 2.* 1896;5(3):136–181.
3. Ionkin NI. Reshenie odnoi kraevoi zadachi teorii teploprovodnosti s neklassicheskim kraevym usloviem [Solution of a boundary value problem of heat conduction theory with a non-classical boundary condition.]. *Differentsial'nye uravneniya [Differential Equations].* 1977;13(2):294–304.

4. Ionkin NI., MoiseevEI. On a problem for the heat equation with two-point boundary conditions. *Differentsial'nye uravneniya [Differential Equations].* 1979;15(7):1284–1295. (In Russ).
5. Pulkina LS. Ob odnoi kraevoi zadache so smeshcheniem dlya giperbolicheskogo uravneniya [On a boundary value problem with a deviating argument for a hyperbolic equation]. *Tezisi dokladov mezhdunarodnoi konferentsii, posvyashchennoi 100-letiyu so dnya rozhdeniya S.L. Soboleva.* 2008;194–195.
6. Kozhanov AI. O razreshimosti nekotorikh prostranstvenno nelokalnikh zadach dlya lineinikh parabolicheskikh uravnenii [On the solvability of certain spatially nonlocal boundary-value problems for linear hyperbolic equations of second order]. *Vestnik SamGU. Yestestvennonauchnaya seriya.* 2008;3(62):165–174.
7. Lazetic NL. O klassicheskoi razreshimosti smeshannoi zadachi dlya odnomergogo giperbolicheskogo uravneniya vtorogo poryadka [On the classical solvability of a mixed problem for a one-dimensional second-order hyperbolic equation]. *Differentsial'nye uravneniya [Differential Equations].* 2006;42(8):1072–1077.
8. Pulkina LS., Dyuzheva AV. Nonlocal problem with time-dependent Steklov's boundary conditions for hyperbolic equation.*Vestnik SamGU. Yestestvennonauchnaya seriya.* 2010;4(78):56–64. (In Russ).
9. Dyuzheva AV. Zadacha s usloviyami Steklova dlya uravneniya giperbolicheskogo tipa [The Steklov problem for a hyperbolic-type equation]. *Itogi nauki i tekhniki. Sovremennaya matematika i ee prilozheniya.* 2021;198:50–60.
10. Pulkina LS. Boundary value problems for a hyperbolic equation with nonlocal conditions of the first and second kind. *Izvestiya vuzov. Matematika [Izvestiya VUZ. Matematika].* 2012;4:74–83. (In Russ).
11. Gording L. The Cauchy problem for hyperbolic equations. Moscow: Izdatelstvo Inostrannoi literaturi; 1961. 120 c. (In Russ).

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.
Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 13.10.2025
Поступила после рецензирования 29.11.2025
Принята к публикации 03.12.2025

Received October 13, 2025
Revised November 29, 2025
Accepted December 3, 2025

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Богатов Андрей Владимирович – главный специалист, Публичное акционерное общество «Банк ПСБ», г. Ярославль, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Andrey V. Bogatov – Chief Specialist, Bank PSB Public Joint-Stock Company, Yaroslavl, Russia

К содержанию