Прикладная математика & Физика, 2026, том 58, № 1. С. 29–43.
Applied Mathematics & Physics, 2026, Volume 58, No 1. P. 29–43.

УДК 511.336, 511.212
MSC 11L05, 11A15, 65T50
Оригинальное исследование

DOI 10.52575/2687-0959-2026-58-1-29-43
EDN ECHQIL

О тождествах для степеней сингулярных дифференциальных операторов с особенностями в нуле

Ситник С. М., **Чернова О. В.**
Белгородский государственный национальный исследовательский университет,
Россия, 308015, г. Белгород, Победы, 85
sitnik@bsuedu.ru, Chernova_Olga@bsuedu.ru

Аннотация. В работе рассматриваются явные реализации в интегральном виде дробных степеней оператора Бесселя. Для них изучается связь с преобразованиями Ханкеля и Меллина, операторами дробного интегродифференцирования, а также установлена обобщённая формула Тэйлора с явным остаточным членом. Полученные результаты важны для теории уравнений с частными производными, содержащими оператор Лапласа – Бесселя.

Ключевые слова: операторы Бесселя, гипергеометрические функции, функции Лежандра, формула Тэйлора

Для цитирования: Ситник С.М., Чернова О.В. О тождествах для степеней сингулярных дифференциальных операторов с особенностями в нуле. *Прикладная математика & Физика.* 2026;58(1):29–43.
DOI 10.52575/2687-0959-2026-58-1-29-43 EDN ECHQIL

Original Research

On Equalities for Powers of Singular Differential Operators with Singularity at Zero

Sergey M. Sitnik, **Olga V. Chernova**
Belgorod National Research University,
85 Pobedy St., Belgorod 308015, Russia
sitnik@bsuedu.ru, Chernova_Olga@bsuedu.ru

Abstract. In the paper we consider explicit realizations in the integral form of fractional powers of Bessel operators. For them connections with Hankel and Mellin transforms and fractional operators are considered. Also Taylor–type formulas are derived with remainder term. The results are important for the theory of partial differential equations, especially with Laplace – Bessel operator.

Keywords: Bessel Operator, Hypergeometric Function, Legeandre Function, Taylor Formular

For citation: Sitnik SM., Chernova OV. On Equalities for Powers of Singular Differential Operators with Singularity at Zero. *Applied Mathematics & Physics.* 2026;58(1):29–43. (In Russ). DOI 10.52575/2687-0959-2026-58-1-29-43
EDN ECHQIL

---

1. Введение. О дробных степенях оператора Бесселя. В данной работе используются в явном интегральном виде дробные степени дифференциального оператора Бесселя

$$B_\nu = D^2 + \frac{\nu}{x}D, \quad \operatorname{Re}\nu \geq 0,$$

заданного на подходящих гладких функциях. Эти операторы были введены в [1] и подробно изучены в [2, 3, 4]. Приведём необходимые определения и перечислим основные свойства этих операторов.

Определение. *Пусть $f(x) \in C^{2k}(0,b]$. Определим правосторонний оператор дробного интегрирования Бесселя при условии*

$$f^{(i)}(b) = 0, \quad 0 \leq i \leq 2k-1, \quad k \in N$$

по формуле

$$(B_{b-}^{\nu,k} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(2k)} \int_x^b \left(\frac{y^2-x^2}{2y}\right)^{2k-1} {}_2F_1(k+\frac{\nu-1}{2}, k; 2k; 1-\frac{x^2}{y^2}) \cdot f(y)\,dy =$$
$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2k-1}\Gamma(k)} \int_x^b (y^2-x^2)^{k-\frac{1}{2}} \left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{\nu}{2}} P_{\frac{\nu}{2}-1}^{\frac{1}{2}-k}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)\right) \cdot f(y)dy, \quad (1)$$

а при условии

$$f^{(i)}(a) = 0, \quad 0 \leq i \leq 2k-1, \quad k \in N$$

определим левосторонний оператор дробного интегрирования Бесселя по формуле

$$(B_{a+}^{\nu,k}f)(x) = \frac{1}{\Gamma(2k)}\int_a^x \Big(\frac{x^2-y^2}{2x}\Big)^{2k-1} {}_2F_1(k+\frac{\nu-1}{2},k;2k;1-\frac{y^2}{x^2})\cdot f(y)\,dy =$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2k-1}\Gamma(k)}\int_a^x (x^2-y^2)^{(k-\frac{1}{2})}\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{\nu}{2}} P_{\frac{\nu}{2}-1}^{\frac{1}{2}-k}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)\right)\cdot f(y)dy, \quad (2)$$

где ${}_2F_1$ *– гипергеометрическая функция Гаусса,* $P_\nu^\mu(z)$ *– функция Лежандра.*

Введённые операторы и являются интегральными реализациями отрицательных целых степеней оператора Бесселя $(B_\nu)^{-k}$. Их распространение на произвольные комплексные значения параметра k проводится аналогично классическому случаю. При $\nu = 0$ оператор Бесселя сводится ко второй производной, а введённые операторы — к дробным интегралам Римана – Лиувилля

$$B_{b-}^{0,k}f = I_{b-}^{2k}f, \quad B_{a+}^{0,k}f = I_{a+}^{2k}f.$$

Отметим важную работу [1], в которой рассматривалось решение в явном виде обыкновенных дифференциальных уравнений с целыми степенями операторов Бесселя. Также было впоследствии замечено, что выражение гипергеометрических функций Гаусса в формулах (1)–(2) через функции Лежандра существенно упрощает вычисления. При помощи достаточно простых выкладок, основанных на тождествах для функций Лежандра, получается первоначальный набор простейших свойств операторов (1)–(2). К ним относятся полугрупповое свойство по параметру k, действие как умножение на соответствующую степень в образах преобразования Ханкеля (при более ограничительных условиях на параметры) и преобразования Мейера (при менее ограничительных условиях на параметры).

2. Формулы типа Тейлора для дробных степеней операторов Бесселя. Перейдём к формулировкам результатов для формулы типа Тейлора для дробных степеней операторов Бесселя. При этом для гипергеометрических функций будет использовано одно из следующих обозначений

$${}_2F_1(a,b;c;z) = {}_2F_1\left(\begin{array}{cc} a, & b \\ c & \end{array}\middle| z\right).$$

Теорема 2.1. *Справедлива формула Тэйлора разложения произвольной достаточно гладкой функции по степеням дифференциального оператора Бесселя при* $x = b$ *с остаточным членом в интегральной форме*

$$f(x) = \sum_{i=1}^{k}\Bigg\{\frac{1}{\Gamma(2i-1)}\Big(\frac{b^2-x^2}{2b}\Big)^{2i-2} {}_2F_1(i+\frac{\nu-1}{2},i-1;2i-1;1-\frac{x^2}{b^2})(B^{i-1}f)|_b -$$

$$- \frac{1}{\Gamma(2i)}\Big(\frac{b^2-x^2}{2b}\Big)^{2i-1} {}_2F_1(i+\frac{\nu-1}{2},i;2i;1-\frac{x^2}{b^2})\cdot(DB^{i-1}f)|_b\Bigg\} + B_{b-}^{\nu,k}(B^kf), \quad (3)$$

где $B_{b-}^{\nu,k}$ *есть оператор левостороннего дробного интегрирования Бесселя (1),* ${}_2F_1$ *— гипергеометрическая функция Гаусса.*

Также справедлива двойственная формула, использующая формально сопряжённый к B_ν оператор

$$C_\nu f = D^2f - D\left(\frac{\nu}{y}f\right) = D^2 - \frac{\nu}{y}Df + \frac{\nu}{y^2}.$$

Теорема 2.2. *Справедлива формула Тэйлора разложения произвольной достаточно гладкой функции по степеням дифференциального оператора* C_ν *при* $x = a$ *с остаточным членом в интегральной форме*

$$f(x) = \sum_{i=1}^{k}\Bigg\{\frac{1}{\Gamma(2i-1)}\Big(\frac{x^2-a^2}{2x}\Big)^{2i-2}(\frac{a}{x})\, {}_2F_1(i+\frac{\nu-1}{2},i;2i-1;1-\frac{a^2}{x^2})(C_\nu^{i-1}f)|_a +$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(2i)}\Big(\frac{x^2-a^2}{2x}\Big)^{2i-1}\cdot\, {}_2F_1(i+\frac{\nu-1}{2},i;2i;1-\frac{a^2}{x^2})\, a^\nu\,(Dx^{-\nu}C_\nu^{i-1}f)|_a\Bigg\} + B_{a+}^{\nu,k}(C_\nu^kf), \quad (4)$$

где $B_{a+}^{\nu,k}$ *есть оператор правостороннего дробного интегрирования Бесселя (2),* ${}_2F_1$ *– гипергеометрическая функция Гаусса.*

Гипергеометрические функции в формулах Тэйлора могут быть выражены через функции Лежандра аналогично определениям (1)–(2). Рассмотрены и более общие комбинированные дробные степени для пары операторов $(\frac{1}{x}D)^m(B_\nu)^k$. Это семейство операторов интересно тем, что содержит обычные операторы Римана – Лиувилля ($m = 0,\ \nu = 0$), дробное интегродифференцирование Бесселя (m=0), операторы Эрдейи – Кобера (k=0) (см. [5, 6, 7]. Рассмотренные задачи также тесно связаны с теорией операторов преобразования, см. [8, 9].

3. Некоторые вспомогательные формулы.

$$\text{(I)}\quad I^kB^kf(x)=f(x)-\sum_{i=1}^{k}\frac{(1-x^2)^{2i-2}}{2^{2i-2}\Gamma(2i-1)}F(i+\frac{\nu-1}{2},i-1;2i-1,1-x^2)B^{i-1}f\Big|_1-$$
$$-\frac{(1-x^2)^{2i-1}}{2^{2i-1}\Gamma(2i)}F(i+\frac{\nu-1}{2},i,2i,1-x^2)DB^{i-1}f\Big|_1;$$

1°. Для доказательств этих формул нам потребуются следующие вспомогательные соотношения:

$$(b-a)(1-z)F(a,b,c)-(c-a)F(a-1,b,c)+(c-b)F(a,b-1,c)=0, \tag{5}$$

$$c(1-z)F(a,b,c)-cF(a,b-1,c)+(c-a)zF(a,b,c+1)=0, \tag{6}$$

$$c(1-z)F(a,b,c)-cF(a-1,b,c)+(c-b)zF(a,b,c+1)=0, \tag{7}$$

$$(c-a-1)F(a,b,c)+aF(a+1,b,c)-(c-1)F(a,b,c-1)=0, \tag{8}$$

$$(c-b-1)F(a,b,c)+bF(a,b+1,c)-(c-1)F(a,b,c-1)=0, \tag{9}$$

$$\frac{ab}{c}F(a+1,b+1,c+1)=\frac{(c-1)}{z}F(a,b,c-1)-\frac{(c-1)}{z}F(a,b,c), \tag{10}$$

$$\frac{d^n}{dz^n}F(a,b,c,z)=\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n}F(a+n,b+n,c+n,z), \tag{11}$$

$$\frac{d}{dy}F\left(a,b,c,1-\frac{x^2}{y^2}\right)=2(c-1)\frac{x^2}{y^2-x^2}\frac{1}{y}\left[F(a,b,c-1)-F(a,b,c)\right]. \tag{12}$$

Соотношения (5)–(9) выражают связь между смежными гипергеометрическими функциями, полученные Гауссом. Воспользуемся ими для доказательства формулы (10).

Доказательство формулы (10)**:** произведя в (5) подстановку $a\to a+1,\ b\to b+1,\ c\to c+1$, получим:

$$F(a+1,b+1,c+1)=\frac{1}{(b-a)(1-z)}[(c-a)F(a,b+1,c+1)-(c-b)F(a+1,b,c+1)]=$$

Далее, полагая $\begin{matrix}a\to a,\\ b\to b+1,\\ c\to c,\end{matrix}$ – в (6) и $\begin{matrix}a\to a+1,\\ b\to b,\\ c\to c,\end{matrix}$ – в (7), выразим $F(a,b+1,c+1)$ и $F(a+1,b,c+1)$ из (6), (7) соответственно. Подставляя, продолжим предыдущее равенство и получим:

$$=\frac{1}{(b-a)(1-z)}\left[\frac{c}{z}F(a,b,c)-c\frac{1-z}{z}F(a,b+1,c)-\frac{c}{z}F(a,b,c)+c\frac{1-z}{z}F(a+1,b,c)\right]=$$
$$=\frac{c}{b-a}\frac{1}{z}\left[F(a+1,b,c)-F(a,b+1,c)\right].$$

Выражая теперь $F(a+1,b,c)$ из (8), $F(a,b+1,c)$– из (9) и подставляя в нашу формулу, получим:

$$F(a+1,b+1,c+1)=$$
$$=\frac{c}{b-a}\frac{1}{z}\left[\frac{c-1}{a}F(a,b,c-1)-\frac{c-a-1}{a}F(a,b,c)-\frac{c-1}{b}F(a,b,c-1)+\frac{c-b-1}{b}F(a,b,c)\right]=$$
$$=\frac{c}{b-a}\frac{1}{z}\left[\left(\frac{c-1}{a}-\frac{c-1}{b}\right)F(a,b,c-1)-\frac{c-1}{a}F(a,b,c)+\frac{c-1}{b}F(a,b,c)\right]=$$
$$=\frac{c(c-1)}{z\cdot ab}[F(a,b,c-1)-F(a,b,c)].$$

Таким образом,

$$\frac{ab}{c}F(a+1,b+1,c+1)=\frac{(c-1)}{z}[F(a,b,c-1)-F(a,b,c)].\qquad\blacksquare$$

С помощью (10), (11) докажем теперь формулу (12).

Доказательство формулы (12)**:** полагая в (11) $n = 1, z = 1 - \dfrac{x^2}{y^2}$, получим:

$$\frac{d}{dy}F\left(a, b, c; 1 - \frac{x^2}{y^2}\right) = \frac{dF}{dz} \cdot \frac{dz}{dy} = 2\frac{x^2}{y^3}\frac{d}{dz}F(a, b, c; z) = 2\frac{x^2}{y^3}\frac{ab}{c}F(a + 1, b + 1, c + 1; z) =$$

Воспользуемся теперь соотношением (10):

$$= 2\frac{x^2}{y^3}\frac{y^2}{y^2 - x^2}(c - 1)[F(a, b, c - 1) - F(a, b, c)].$$

Таким образом,

$$\frac{d}{dy}F\left(a, b, c; 1 - \frac{x^2}{y^2}\right) = 2(c-1)\frac{x^2}{y^2 - x^2}[F(a, b, c - 1) - F(a, b, c)]. \qquad \blacksquare$$

2°. В дальнейшем будем использовать следующие обозначения:

$$\Phi_m \equiv \left(\frac{y^2 - x^2}{2y}\right)^{2m-1} F\left(m + \frac{\nu - 1}{2}, m; 2m; 1 - \frac{x^2}{y^2}\right),$$

$$\widetilde{\Phi}_m \equiv \left(\frac{y^2 - x^2}{2y}\right)^{2m-2} F\left(m + \frac{\nu - 1}{2}, m - 1; 2m - 1; 1 - \frac{x^2}{y^2}\right).$$

Сформулируем и докажем теперь несколько утверждений.

Лемма 3.1.

$$\forall \quad m \in \mathbb{N} \quad \left(\frac{d}{dy} - \frac{\nu}{y}\right)\Phi_m = (2m - 1)\widetilde{\Phi}_m. \tag{13}$$

Доказательство.

$$\frac{d}{dy}\Phi_m = \frac{d}{dy}\left(\frac{y^2 - x^2}{2y}\right)^{2m-1} F\left(m + \frac{\nu - 1}{2}, m; 2m; 1 - \frac{x^2}{y^2}\right) =$$

$$= (2m - 1)\left(\frac{y^2 - x^2}{2y}\right)^{2m-2}\left(\frac{y^2 + x^2}{2y^2}\right)F\left(m + \frac{\nu - 1}{2}, m; 2m; 1 - \frac{x^2}{y^2}\right) +$$

$$+\left(\frac{y^2 - x^2}{2y}\right)^{2m-1}\frac{d}{dy}F\left(m + \frac{\nu - 1}{2}, m; 2m; 1 - \frac{x^2}{y^2}\right) =$$

Оставим 1-е слагаемое выражения без изменений, 2-е преобразуем с помощью (12), тогда получим

$$= (2m - 1)\left(\frac{y^2 - x^2}{2y}\right)^{2m-2}\left(\frac{y^2 + x^2}{2y^2}\right)F\left(m + \frac{\nu - 1}{2}, m; 2m; 1 - \frac{x^2}{y^2}\right) +$$

$$+2(2m - 1)\frac{x^2}{y^2 - x^2}\frac{1}{y}\left(\frac{y^2 - x^2}{2y}\right)^{2m-1}F\left(m + \frac{\nu - 1}{2}, m; 2m - 1\right) - F\left(m + \frac{\nu - 1}{2}, m; 2m\right) =$$

$$= (2m - 1)\left(\frac{y^2 - x^2}{2y}\right)^{2m-2}\left(\frac{y^2 + x^2}{2y^2}\right)F\left(m + \frac{\nu - 1}{2}, m; 2m\right) +$$

$$+(2m - 1)\left(\frac{y^2 - x^2}{2y}\right)^{2m-2}\frac{x^2}{y^2}\left(F\left(m + \frac{\nu - 1}{2}, m; 2m - 1\right) - F\left(m + \frac{\nu - 1}{2}, m; 2m\right)\right) =$$

$$= (2m - 1)\left(\frac{y^2 - x^2}{2y}\right)^{2m-2}\left(\frac{y^2 - x^2}{2y^2}F\left(m + \frac{\nu - 1}{2}, m; 2m\right) + \frac{x^2}{y^2}F\left(m + \frac{\nu - 1}{2}, m; 2m - 1\right)\right).$$

Следовательно,

$$\left(\frac{d}{dy} - \frac{\nu}{y}\right)\Phi_m = (2m - 1)\left(\frac{y^2 - x^2}{2y}\right)^{2m-2}\left(\frac{y^2 + x^2}{2y^2}F\left(m + \frac{\nu - 1}{2}, m; 2m\right) +\right.$$

$$\left.+\frac{x^2}{y^2}F\left(m + \frac{\nu - 1}{2}, m; 2m - 1\right)\right) - \frac{\nu}{y}\left(\frac{y^2 - x^2}{2y}\right)^{2m-1}F\left(m + \frac{\nu - 1}{2}, m; 2m\right) =$$

$$= \left(\frac{y^2 - x^2}{2y}\right)^{2m-2}\left[(2m - 1)\frac{y^2 - x^2}{2y^2}F\left(m + \frac{\nu - 1}{2}, m; 2m\right) + (2m - 1)\frac{x^2}{y^2}F\left(m + \frac{\nu - 1}{2}, m; 2m - 1\right) -\right.$$

$$-\nu\frac{y^2-x^2}{2y^2}F\left(m+\frac{\nu-1}{2},m;2m\right)\Bigg]=$$

$$=\left(\frac{y^2-x^2}{2y}\right)^{2m-2}\left[\left(m-\frac{\nu+1}{2}\right)\left(1-\frac{x^2}{y^2}\right)F\left(m+\frac{\nu-1}{2},m;2m\right)+(2m-1)\frac{x^2}{y^2}F\left(m+\frac{\nu-1}{2},m;2m-1\right)\right].$$

Полагая в (6)

$$a=m+\frac{\nu-1}{2},\quad b=m,\quad c=2m-1,\quad z=1-\frac{x^2}{y^2}$$

и замечая, что выражение в квадратных скобках

$$\left[\left(m-\frac{\nu+1}{2}\right)\left(1-\frac{x^2}{y^2}\right)F\left(m+\frac{\nu-1}{2},m;2m\right)+(2m-1)\frac{x^2}{y^2}F\left(m+\frac{\nu-1}{2},m;2m-1\right)\right]=$$

$$=(2m-1)F\left(m+\frac{\nu-1}{2},m-1;2m-1\right),$$

окончательно получим

$$\left(\frac{d}{dy}-\frac{\nu}{y}\right)\Phi_m=(2m-1)\left(\frac{y^2-x^2}{2y}\right)^{2m-2}F\left(m+\frac{\nu-1}{2},m-1,2m-1\right)=(2m-1)\widetilde{\Phi}_m.$$

Тем самым утверждение (13) доказано. ■

Лемма 3.2.

$$\frac{d}{dy}\widetilde{\Phi}_m=(2m-2)\Phi_{m-1},\quad \forall m\in\mathbb{N}. \tag{14}$$

Доказательство.

$$\frac{d}{dy}\widetilde{\Phi}_m=\frac{d}{dy}\left(\frac{y^2-x^2}{2y}\right)^{2m-2}F\left(m+\frac{\nu-1}{2},m-1;2m-1;1-\frac{x^2}{y^2}\right)=$$

$$=(2m-2)\left(\frac{y^2-x^2}{2y}\right)^{2m-3}\left(\frac{y^2+x^2}{2y^2}\right)F\left(m+\frac{\nu-1}{2},m-1;2m-1\right)+$$

$$+\left(\frac{y^2-x^2}{2y}\right)^{2m-2}\frac{d}{dy}F\left(m+\frac{\nu-1}{2},m-1;2m-1\right)=$$

Для преобразования 2-го слагаемого воспользуемся (12), 1-е – оставим без изменений:

$$=(2m-2)\left(\frac{y^2-x^2}{2y}\right)^{2m-3}\left(\frac{y^2+x^2}{2y^2}\right)F\left(m+\frac{\nu-1}{2},m-1;2m-1\right)+$$

$$+\left(\frac{y^2-x^2}{2y}\right)^{2m-2}2(2m-2)\frac{x^2}{y^2-x^2}\cdot\frac{1}{y}\left(F\left(m+\frac{\nu-1}{2},m-1;2m-2\right)-\right.$$

$$\left.-F\left(m+\frac{\nu-1}{2},m-1;2m-1\right)\right)=(2m-2)\left(\frac{y^2-x^2}{2y}\right)^{2m-3}\left(\frac{y^2+x^2}{2y^2}\right)F\left(m+\frac{\nu-1}{2},m-1;2m-1\right)+$$

$$+\left(\frac{y^2-x^2}{2y}\right)^{2m-3}(2m-2)\frac{x^2}{y^2}\left(F\left(m+\frac{\nu-1}{2},m-1;2m-2\right)-F\left(m+\frac{\nu-1}{2},m-1;2m-1\right)\right)=$$

$$=\left(\frac{y^2-x^2}{2y}\right)^{2m-3}\left[(m-1)\left(1-\frac{x^2}{y^2}\right)F\left(m+\frac{\nu-1}{2},m-1;2m-1\right)++(2m-2)\frac{x^2}{y^2}F\left(m+\frac{\nu-1}{2},m-1;2m-2\right)\right].$$

Полагая в (7)

$$a=m+\frac{\nu-1}{2},\quad b=m-1,\quad c=2m-2,\quad z=1-\frac{x^2}{y^2},$$

видим, что выражение в квадратных скобках

$$\left[(m-1)\left(1-\frac{x^2}{y^2}\right)F\left(m+\frac{\nu-1}{2},m-1;2m-1\right)+(2m-2)\frac{x^2}{y^2}F\left(m+\frac{\nu-1}{2},m-1;2m-2\right)\right]=$$

$$=(2m-2)F\left(m-1+\frac{\nu-1}{2},m-1;2m-2;1-\frac{x^2}{y^2}\right).$$

Следовательно,

$$\frac{d}{dy}\widetilde{\Phi}_m = (2m-2)\left(\frac{y^2-x^2}{2y}\right)^{2m-3} F\left(m-1+\frac{\nu-1}{2}, m-1; 2m-2; 1-\frac{x^2}{y^2}\right) = (2m-2)\Phi_{m-2}.$$

Тем самым утверждение (14) доказано. ■

Лемма 3.3. *Для* $\forall\, i = \overline{1, k-1}$ *верна следующая формула:*

$$\overline{B}^{\,i}\Phi_k = \left(\frac{d^2}{dy^2} - \frac{d}{dy}\frac{\nu}{y}\right)^i \Phi_k = (2k-1)\cdot\ldots\cdot(2k-2i)\Phi_{k-i}. \tag{15}$$

Доказательство проведем методом математической индукции.

1) Для $i = 1$ утверждение верно:

$$\overline{B}\Phi_k = \frac{d}{dy}\left(\frac{d}{dy} - \frac{\nu}{y}\right)\Phi_k = (2k-1)(2k-2)\Phi_{k-1}.$$

Мы воспользовались в данном случае формулами (13), (14), полагая $m = k$.

2) Пусть для $i-1$ утверждение верно:

$$\overline{B}^{i-1}\Phi_k = (2k-1)\cdot\ldots\cdot(2k-2i+2)\Phi_{k-i+1}.$$

Тогда

$$\overline{B}^{\,i}\Phi_k = \overline{B}B^{i-1}\Phi_k = (2k-1)\cdot\ldots\cdot(2k-2i+2)\overline{B}\Phi_{k-i+1} =$$

Снова воспользуемся (13), (14), полагая $m = k-i+1$:

$$= (2k-1)\cdot\ldots\cdot(2k-2i+2)(2k-2i+1)(2k-2i)\Phi_{k-i},$$

т. е. утверждение верно и для i. Формула (15) доказана. ■

Лемма 3.4. *Для* $\forall\, i = \overline{1, k-1}$ *верна следующая формула:*

$$\left(\frac{d}{dy} - \frac{\nu}{y}\right)\overline{B}^{\,i}\Phi_k = (2k-1)\cdot\ldots\cdot(2k-2i-1)\widetilde{\Phi}_{k-i}. \tag{16}$$

Доказательство непосредственно вытекает из утверждений (15), (13):

$$\left(\frac{d}{dy} - \frac{\nu}{y}\right)\overline{B}^{\,i}\Phi_k = (2k-1)\cdot\ldots\cdot(2k-2i)\left(\frac{d}{dy} - \frac{\nu}{y}\right)\Phi_{k-i} = (2k-1)\cdot\ldots\cdot(2k-2i)(2k-2i-1)\widetilde{\Phi}_{k-i}.$$ ■

Лемма 3.5. *Для* $\forall\, k \in \mathbb{N}$

$$\overline{B}^{\,k}\Phi_k \equiv 0. \tag{17}$$

Доказательство проведем методом математической индукции.

1) Для $k = 1$ утверждение верно:

$$\overline{B}\Phi_1 = \frac{d}{dy}\left(\frac{d}{dy} - \frac{\nu}{y}\right)\Phi_1 = \frac{d}{dy}\widetilde{\Phi}_1 = \frac{d}{dy}F\left(\frac{\nu+1}{2}, 0, 1; 1-\frac{x^2}{y^2}\right) = \frac{d}{dy}\cdot 1 = 0.$$

На втором шаге мы воспользовались формулой (13), полагая $m = 1$.

2) Пусть для $k-1$ утверждение верно:

$$\overline{B}^{k-1}\Phi_{k-1} \equiv 0.$$

Тогда

$$\overline{B}^{k}\Phi_k = \overline{B}^{k-1}(B\Phi_k) = (2k-1)(2k-2)\overline{B}^{k-1}\Phi_{k-1} \equiv 0.$$

Здесь мы применяем формулу (15) для $i = 1$. Утверждение (17) доказано. ■

Отметим также справедливость следующих соотношений:

$$\overline{B}^{i}\Phi_k\Big|_{y=x} = (2k-1)\cdot\ldots\cdot(2k-2i)\left(\frac{y^2-x^2}{2y}\right)^{2k-1-2i} F(\,,\,,\,)\Big|_{y=x} = 0, \quad \forall\, i = \overline{1, k-1};\ k = 2, 3, \ldots \tag{18}$$

$$\left(\frac{d}{dy} - \frac{\nu}{y}\right)\overline{B}^{i}\Phi_k\Big|_{y=x} = (2k-1)\cdot\ldots\cdot(2k-2i-1)\left(\frac{y^2-x^2}{2y}\right)^{2k-2-2i} F(\,,\,,\,)\Big|_{y=x} = 0,\ \forall\, i = \overline{0, k-2};\ k = 2, 3, \ldots \tag{19}$$

$$\left(\frac{d}{dy}-\frac{\nu}{y}\right)\overline{B}^{k-1}\Phi_k=(2k-1)!\widetilde{\Phi}_1=(2k-1)!F\left(\frac{\nu+1}{2},0;1,1-\frac{x^2}{y^2}\right)\equiv(2k-1)!,\quad k=1,2,\ldots \tag{20}$$

3°. Перейдем теперь к доказательству формулы (I).

$$I^kB^kf(x)=\frac{1}{\Gamma(2k)}\int_x^1\left(\frac{y^2-x^2}{2y}\right)^{2k-1}F\left(k+\frac{\nu-1}{2},k;2k;1-\frac{x^2}{y^2}\right)B^kfdy=\frac{1}{\Gamma(2k)}\int_x^1\Phi_kB^kfdy. \tag{21}$$

Проинтегрируем выражение (21) по частям:

$$\int_x^1\Phi_kB^kfdy=\int_x^1\Phi_k\left(y^{-\nu}\frac{d}{dy}y^{\nu}\frac{d}{dy}B^{k-1}f\right)dy=\Phi_k\frac{d}{dy}B^{k-1}f\Big|_x^1-\int_x^1y^{\nu}\frac{d}{dy}y^{-\nu}\Phi_k\frac{d}{dy}B^{k-1}fdy=$$

$$=\Phi_k\frac{d}{dy}B^{k-1}f\Big|_x^1-y^{\nu}\frac{d}{dy}y^{-\nu}\Phi_kB^{k-1}f\Big|_x^1+\int_x^1B^{k-1}f\frac{d}{dy}y^{\nu}\frac{d}{dy}y^{-\nu}\Phi_kdy=$$

$$=\Phi_k\frac{d}{dy}B^{k-1}f\Big|_x^1-\left(\frac{d}{dy}-\frac{\nu}{y}\right)\Phi_kB^{k-1}f\Big|_x^1+\int_x^1\overline{B}\Phi_kB^{k-1}fdy.$$

Повторив итерации k раз, получим следующую формулу:

$$I^kB^kf(x)=\frac{1}{\Gamma(2k)}\left\{\Phi_k\frac{d}{dy}B^{k-1}f\Big|_x^1-B^{k-1}f\left(\frac{d}{dy}-\frac{\nu}{y}\right)\Phi_k\Big|_x^1+\overline{B}\Phi_k\frac{d}{dy}B^{k-2}f\Big|_x^1-B^{k-2}f\left(\frac{d}{dy}-\frac{\nu}{y}\right)\overline{B}\Phi_k\Big|_x^1+\right.$$

$$+\ \ldots\ +$$

$$\left.+\overline{B}^{k-1}\Phi_k\frac{d}{dy}f\Big|_x^1-f\left(\frac{d}{dy}-\frac{\nu}{y}\right)\overline{B}^{k-1}\Phi_k\Big|_x^1+\int_x^1f\overline{B}^k\Phi_kdy\right\}.$$

Используя формулы (15), (16), а также соотношения (18), (19), (20) получим:

$$I^kB^kf(x)=f(x)-f(1)+\frac{1}{\Gamma(2)}\left(\frac{1-x^2}{2}\right)F\left(1+\frac{\nu-1}{2},1;2;1-x^2\right)\frac{df}{dx}\Big|_1=$$

$$=-\frac{1}{\Gamma(3)}\left(\frac{1-x^2}{2}\right)^2F\left(2+\frac{\nu-1}{2},1;3;1-x^2\right)Bf\Big|_1+\frac{1}{\Gamma(4)}\left(\frac{1-x^2}{3}\right)^2F\left(2+\frac{\nu-1}{2},2;4;1-x^2\right)\frac{d}{dx}Bf\Big|_1-$$

$$-\frac{1}{\Gamma(5)}\left(\frac{1-x^2}{2}\right)^4F\left(3+\frac{\nu-1}{2},2;5;1-x^2\right)B^2f\Big|_1+$$

$$+\frac{1}{\Gamma(2k-1)}\left(\frac{1-x^2}{2}\right)^{2k-2}F\left(k+\frac{\nu-1}{2},k-1;2k-1;1-x^2\right)B^{k-1}f\Big|_1+$$

$$+\frac{1}{\Gamma(2k)}\left(\frac{1-x^2}{2}\right)^{2k-1}F\left(k+\frac{\nu-1}{2},k;2k;1-x^2\right)\frac{d}{dx}B^{k-1}f\Big|_1;$$

Т. е.

$$I^kB^kf(x)=$$

$$=f(x)-\sum_{i=1}^k\frac{(1-x^2)^{2i-2}}{2^{2i-2}\Gamma(2i-1)}F(i+\frac{\nu-1}{2},i-1;2i-1;1-x^2)B^{i-1}f\Big|_1-$$

$$-\frac{(1-x^2)^{2i-1}}{2^{2i-1}\Gamma(2i)}F\left(i+\frac{\nu-1}{2},i;2i;1-x^2\right)DB^{i-1}f\Big|_1.$$

Теперь установим формулы

$$B_{b-}^{\nu,k}B^kf=\frac{1}{\Gamma(2k)}\int_x^b\left(\frac{y^2-x^2}{2y}\right)^{2k-1}{}_2F_1\left(k+\frac{\nu-1}{2},k;2k;1-\frac{x^2}{y^2}\right)B^kfdy.$$

Подставив в (21) в верхний предел b, получим:

$$\text{(I}'\text{)}\quad \underline{B_{b-}^{\nu,k}B^kf}=f(x)-\sum_{i=1}^k\left\{\frac{1}{\Gamma(2i-1)}\left(\frac{b^2-x^2}{2b}\right)^{2i-1}{}_2F_1\left(i+\frac{\nu-1}{2},i-1;2i-1;1-\frac{x^2}{b^2}\right)B^{i-1}f\Big|_b-\right.$$

$$-\frac{1}{\Gamma(2i)}\left(\frac{b^2-x^2}{2b}\right)^{2i-1} {}_2F_1\left(i+\frac{\nu-1}{2}, i; 2i; 1-\frac{x^2}{b^2}\right) DB^{i-1}f\bigg|_b\bigg\};$$

$$4^\circ.\quad \underline{B^{\nu,k}_{a+}\bar{B}^k f} = \frac{1}{\Gamma(2k)}\int_a^x \left(\frac{x^2-y^2}{2x}\right)^{2k-1} {}_2F_1\left(k+\frac{\nu-1}{2}, k; 2k; 1-\frac{y^2}{x^2}\right)\bar{B}^k f dy;$$

$$\text{(II)}\quad \underline{B^{\nu,k}_{a+}\bar{B}^k f} = f(x) - \sum_{i=1}^{k}\frac{1}{\Gamma(2i-1)}\left(\frac{x^2-a^2}{2x}\right)^{2i-2}\left(\frac{a}{x}\right){}_2F_1\left(i+\frac{\nu-1}{2}, i; 2i-1; 1-\frac{a^2}{x^2}\right)\bar{B}^{i-1}f\bigg|_a +$$

$$+\frac{1}{\Gamma(2i)}\left(\frac{x^2-a^2}{2x}\right)^{2i-1} {}_2F_1\left(i+\frac{\nu-1}{2}, i; 2i; 1-\frac{a^2}{x^2}\right) a^\nu D y^{-\nu}\bar{B}^{i-1}f\bigg|_a.$$

Для доказательства формулы (II) сформулируем несколько утверждений. Будем использовать следующие обозначения:

$$\Psi_m \equiv \left(\frac{x^2-y^2}{2x}\right)^{2m-1} {}_2F_1\left(m+\frac{\nu-1}{2}, m; 2m; 1-\frac{y^2}{x^2}\right),$$

$$\widetilde{\Psi}_m \equiv \left(\frac{x^2-y^2}{2x}\right)^{2m-2}\left(-\frac{y}{x}\right){}_2F_1\left(m+\frac{\nu-1}{2}, m; 2m-1; 1-\frac{y^2}{x^2}\right).$$

Лемма 3.6.

$$\frac{d}{dy}\Psi_m = (2m-1)\widetilde{\Psi}_m \quad \forall \in \mathbb{N}. \tag{22}$$

Доказательство.

$$\frac{d}{dy}\left[\left(\frac{x^2-y^2}{2x}\right)^{2m-1} F\left(m+\frac{\nu-1}{2}, m; 2m; 1-\frac{y^2}{x^2}\right)\right] =$$

$$= (2m-1)\left(\frac{x^2-y^2}{2x}\right)^{2m-2}\left(-\frac{y}{x}\right)F\left(m+\frac{\nu-1}{2}, m; 2m\right) + \left(\frac{x^2-y^2}{2x}\right)^{2m-1}\frac{d}{dy}F\left(m+\frac{\nu-1}{2}, m; 2m\right) =$$

преобразуем второе слагаемое с помощью (12):

$$= (2m-1)\left(\frac{x^2-y^2}{2x}\right)^{2m-2}\left(-\frac{y}{x}\right)F\left(m+\frac{\nu-1}{2}, m; 2m\right) +$$

$$+2\left(\frac{x^2-y^2}{2x}\right)^{2m-2}\frac{1}{x}\frac{y}{y^2-x^2}(2m-1)\left(F\left(m+\frac{\nu-1}{2}, m; 2m\right) - F\left(m+\frac{\nu-1}{2}, m; 2m-1\right)\right) =$$

$$= (2m-1)\left(\frac{x^2-y^2}{2x}\right)^{2m-2}\left(-\frac{y}{x}\right)\cdot F\left(m+\frac{\nu-1}{2}, m; 2m-1; 1-\frac{y^2}{x^2}\right) = (2m-1)\widetilde{\Psi}_m. \qquad \blacksquare$$

Лемма 3.7. *Для* $\forall\, i = \overline{1, k-1}$ *верна следующая формула:*

$$B^i\Psi_m = (2k-1)(2k-2)\cdot\ldots\cdot(2k-2i)\Psi_{k-i}. \tag{23}$$

Доказательство проведем методом математической индукции.

1) Покажем,что утверждение верно для $i=1$, т. е. $B\Psi_k = (2k-1)(2k-2)\Psi_{k-1}$. Отметим, что

$$\bar{B} = \frac{d^2}{dy^2} - \frac{d}{dy}\frac{\nu}{y} = y^\nu B y^{-\nu}. \tag{24}$$

Получим:

$$\left(\frac{x^2-y^2}{2x}\right)^{2k-1} {}_2F_1\left(k+\frac{\nu-1}{2}, k; 2k; 1-\frac{y^2}{x^2}\right) = \left(\frac{x}{y}\right)^\nu\left(\frac{x^2-y^2}{2y}\right)^{2k-1} {}_2F_1\left(k+\frac{\nu-1}{2}, k; 2k; 1-\frac{y^2}{x^2}\right),$$

или же возвращаясь к нашим обозначениям:

$$\Phi_k = \left(\frac{y}{x}\right)^\nu\Psi_k. \tag{25}$$

Тогда пользуясь (24), (25), получаем: $\bar{B}\Phi_k = y^\nu B y^{-\nu}\Phi_k = y^\nu B x^{-\nu}\Psi_k = \left(\frac{y}{x}\right)^{-\nu}B\Psi_k$. С другой стороны (см. лемму 3.3), имеем:

$$\bar{B}\Phi_k = (2k-1)(2k-2)\Phi_{k-1} = (2k-1)(2k-2)\left(\frac{y}{x}\right)^\nu\Psi_{k-1}.$$

Таким образом, $\left(\dfrac{y}{x}\right)^{\nu} B\Phi_k = \left(\dfrac{y}{x}\right)^{\nu}(2k-1)(2k-2)\Psi_{k-1}$, т. е. $B\Psi_k = (2k-1)(2k-2)\Psi_{k-1}$.

2) Предположим теперь, что для $(i-1)$ утверждение верно:

$$B^{i-1}\Psi_k = (2k-1)\cdot\ldots\cdot(2k-2i+2)\Psi_{k-i+1}.$$

Тогда

$$B^{i}\Psi_k = (2k-1)\cdot\ldots\cdot(2k-2i)\Psi_{k-i}.$$

Тем самым утверждение (23) доказано. ■

Лемма 3.8.

$$B^k\Psi_k \equiv 0, \quad \forall\, k \in \mathbb{N}. \tag{26}$$

Доказательство проведем методом математической индукции.

1) Для $k = 1$ утверждение верно:

$$B\Psi_1 = \left(\frac{d}{dy} + \frac{\nu}{y}\right)\frac{d}{dy}\Psi_1 = \left(\frac{d}{dy} + \frac{\nu}{y}\right)\left(-\frac{y}{x}\right)F\left(\frac{\nu+1}{2}, 1; 1; 1-\frac{y^2}{x^2}\right) =$$

$$= \left(\frac{d}{dy} + \frac{\nu}{y}\right)\left[\left(-\frac{y}{x}\right)\left(\frac{y^2}{x^2}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}\right] = \frac{d}{dy}\left(-\left(\frac{y}{x}\right)^{-\nu}\right) - \frac{\nu}{x}\left(\frac{y}{x}\right)^{-\nu-1} = 0.$$

На 1-м шаге мы воспользовались (22).

2) Пусть далее $B^{k-1}\Psi_{k-1} \equiv 0$, тогда $B^k\Psi_k = (2k-1)(2k-2)B^{k-1}\Psi_{k-1} \equiv 0$.

Перейдем теперь к доказательству формулы (II).

$$B^{\nu,k}_{a+}\bar{B}^k f = \frac{1}{\Gamma(2k)}\int_0^x \left(\frac{x^2-y^2}{2x}\right)^{2k-1} {}_2F_1\left(k + \frac{\nu-1}{2}, k; 2k; 1-\frac{y^2}{x^2}\right)\bar{B}^k f(y)dy.$$

Перепишем это выражение в виде:

$$B^{\nu,k}_{a+}\bar{B}^k f = \frac{1}{\Gamma(2k)}\int_a^x \Psi_k \bar{B}^k f(y)dy$$

и проинтегрируем по частям $2k$ раз; в результате получим:

$$B^{\nu,k}_{a+}\bar{B}^k f = \frac{1}{\Gamma(2k)}\left\{\Psi_k y^{\nu}\frac{d}{dy}y^{-\nu}\bar{B}^{k-1}f\Big|_a^x - \frac{d}{dy}\Psi_k\bar{B}^{k-1}f\Big|_a^x + B\Psi_k y^{\nu}\frac{d}{dy}y^{-\nu}\bar{B}^{k-2}f\Big|_a^x - \frac{d}{dy}B\Psi_k\bar{B}^{k-2}f\Big|_a^x + \right.$$

$$+\ \ldots\ +$$

$$+ B^i\Psi_k y^{\nu}\frac{d}{dy}y^{-\nu}\bar{B}^{k-i-1}\Big|_a^x - \frac{d}{dy}B^i\Psi_k\bar{B}^{k-i-1}f\Big|_a^x + \ldots + \int_a^x fB^k\Psi_k dy.$$

Используя (22)–(26), получим:

$$B^{\nu,k}_{a+}\bar{B}^k f = \frac{1}{\Gamma(2k)}\left\{\frac{\Gamma(2k)}{\Gamma(2)}\Psi_1 y^{\nu}\frac{d}{dy}y^{-\nu}f\Big|_a^x - \frac{\Gamma(2k)}{\Gamma(1)}\frac{d}{dy}\Psi_1 f\Big|_a^x + \ldots + \right.$$

$$+\frac{\Gamma(2k)}{\Gamma(2k-2i)}\Psi_{2k-2i}y^{\nu}\frac{d}{dy}y^{-\nu}\bar{B}^{k-i-1}f\Big|_a^x - \frac{\Gamma(2k)}{\Gamma(2k-2i-1)}\widetilde{\Psi}_{2k-2i}\bar{B}^{k-i-1}f\Big|_a^x + \ldots +$$

$$\left.+\Psi_k y^{\nu}\frac{d}{dy}y^{-\nu}\bar{B}^{k-1}f\Big|_a^x - \frac{d}{dy}\widetilde{\Psi}_k\bar{B}^{k-1}f\Big|_a^x\right\}.$$

Подставляя вместо Ψ_i, $\widetilde{\Psi}_i$ их значения, получим следующую формулу:

$$B^{\nu,k}_{a+}\bar{B}^k f = f(x) - f(a) - \frac{1}{\Gamma(2)}\left(\frac{x^2-a^2}{2x}\right)F\left(1 + \frac{\nu-1}{2}, 1; 2; 1-\frac{a^2}{x^2}\right)a^{\nu}\frac{d}{dy}y^{-\nu}f\Big|_a -$$

$$-\frac{1}{\Gamma(4)}\left(\frac{x^2-a^2}{2x}\right)^3 F\left(2 + \frac{\nu-1}{2}, 2; 4; 1-\frac{a^2}{x^2}\right)a^{\nu}\frac{d}{dy}y^{-\nu}\bar{B}f\Big|_a - \ldots -$$

$$-\frac{1}{\Gamma(2k)}\left(\frac{x^2-a^2}{2x}\right)^{2k-1} F\left(k + \frac{\nu-1}{2}, k; 2k; 1-\frac{a^2}{x^2}\right)a^{\nu}\frac{d}{dy}y^{-\nu}\bar{B}^{k-1}f\Big|_a -$$

$$-\frac{1}{\Gamma(2k-1)}\left(\frac{x^2-a^2}{2x}\right)^{2k-2} F\left(k + \frac{\nu-1}{2}, k; 2k-1; 1-\frac{a^2}{x^2}\right)\bar{B}^{k-1}f\Big|_a.$$

Таким образом,

$$B_{a+}^{\nu,k}\bar{B}^k f = f(x) - \sum_{i=1}^{k}\left\{\frac{1}{\Gamma(2i)}\left(\frac{x^2-a^2}{2x}\right)^{2i-1} {}_2F_1\left(i+\frac{\nu-1}{2}, i; 2i; 1-\frac{a^2}{x^2}\right) a^\nu D y^{-\nu}\bar{B}^{i-1}f\Big|_a +\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\Gamma(2i-1)}\left(\frac{a}{x}\right)\left(\frac{x^2-a^2}{2x}\right)^{2i-1} {}_2F_1\left(i+\frac{\nu-1}{2}, i; 2i-1; 1-\frac{a^2}{x^2}\right)\bar{B}^{i-1}f\Big|_a\right\};$$

$$\mathbf{5^\circ}.\quad D_{b-}(k,l,\nu)\left(-\frac{1}{y}\frac{d}{dy}\right)^l B^k f = \frac{1}{\Gamma(l+2k)}\int_x^b \left(\frac{y^2-x^2}{2}\right)^{l+2k-1} y^{1-2k}\times$$

$$\times {}_2F_1\left(l+k+\frac{\nu-1}{2}, l+k; l+2k; 1-\frac{x^2}{y^2}\right)\left(-\frac{1}{y}\frac{d}{dy}\right)^l B^k f(y)dy.$$

$$\text{(III)}\quad D_{b-}(k,l,\nu)\left(-\frac{1}{y}D\right)^l B^k f = f(x) - \sum_{i=1}^{l}\frac{b^{-2k}}{\Gamma(l+2k-i)}\times$$

$$\times {}_2F_1\left(l-i+k+\frac{\nu-1}{2}, k; l-i+2k; 1-\frac{x^2}{b^2}\right)\left(\frac{b^2-x^2}{2}\right)^{2k-1}\left(-\frac{1}{y}\frac{d}{dy}\right)^{l-i} B^k f\Big|_b -$$

$$-\sum_{i=1}^{k}\left\{\frac{1}{\Gamma(2i-1)}\left(\frac{b^2-x^2}{2b}\right)^{2i-2} {}_2F_1\left(i+\frac{\nu-1}{2}, i-1; 2i-1; 1-\frac{x^2}{b^2}\right)B^{i-1}f\Big|_b -\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\Gamma(2i)}\left(\frac{b^2-x^2}{2b}\right)^{2i-1} {}_2F_1\left(i+\frac{\nu-1}{2}, i; 2i; 1-\frac{x^2}{b^2}\right)\frac{d}{dy}B^{i-1}f\Big|_b\right\}.$$

Обозначим

$$\Phi_{k,l} \equiv \left(\frac{y^2-x^2}{2}\right)^{l+2k-1} y^{-2k+1}{}_2F_1\left(l+k+\frac{\nu-1}{2}, k; l+2k; 1-\frac{x^2}{y^2}\right).$$

Для доказательства формулы нам понадобится

Лемма 3.9. *Для* $\forall\, l,k \in \mathbb{N}, i=\overline{1,l}$ *верна формула:*

$$\left(\frac{d}{dy}\frac{1}{y}\right)^i \Phi_{k,l} = (l+2k-1)\cdot\ldots\cdot(l-i+2k-1)\Phi_{k,l-i}. \tag{27}$$

Доказательство проведем методом математической индукции.

1) Пусть $i=1$; покажем, что утверждение верно.

$$\frac{d}{dy}\frac{1}{y}\Phi_{k,l} = \frac{d}{dy}\left[\frac{1}{y}\left(\frac{y^2-x^2}{2}\right)^{l+2k-1} y^{-2k+1}{}_2F_1\left(l+k+\frac{\nu-1}{2}, k; l+2k; 1-\frac{x^2}{b^2}\right)\right] =$$

$$= D\left[\left(\frac{y^2-x^2}{2}\right)^{l+2k-1} y^{-2k}\right] F\left(l+k+\frac{\nu-1}{2}, k; l+2k; 1-\frac{x^2}{b^2}\right)+$$

$$+\left(\frac{y^2-x^2}{2}\right)^{l+2k-1} y^{-2k}\frac{d}{dy}F\left(l+k+\frac{\nu-1}{2}, k; l+2k; 1-\frac{x^2}{b^2}\right) =$$

Дифференцируя сомножитель в 1-м слагаемом, преобразуя 2-е слагаемое с помощью (12), получим:

$$= y^{-2k+1}\left(\frac{y^2-x^2}{2}\right)^{l+2k-2}\left(l-1+k+k\frac{x^2}{y^2}\right)F\left(l+k+\frac{\nu-1}{2}, k; l+2k\right)+$$

$$+2\left(\frac{y^2-x^2}{2}\right)^{l+2k-2} y^{-2k}(l+2k-1)\frac{x^2}{y^2-x^2}\frac{1}{y}\left[F\left(l+k+\frac{\nu-1}{2}, k; l+2k-1\right)-\right.$$

$$\left.-F\left(l+k+\frac{\nu-1}{2}, k; l+2k\right)\right] = y^{-2k+1}\left(\frac{y^2-x^2}{2}\right)^{l+2k-2}\left[(l+2k-1)\frac{x^2}{y^2}\times\right.$$

$$\left.\times F\left(l+\frac{\nu-1}{2}+k; k; l+2k-1\right)+(l+k-1)\left(1-\frac{x^2}{y^2}\right)F\left(l+k+\frac{\nu-1}{2}, k; l+2k; 1-\frac{x^2}{y^2}\right)\right].$$

Полагая в (7) $a = l + k + \frac{\nu - 1}{2}$, $b = k$, $c = l + 2k - 1$, $z = 1 - \frac{x^2}{y^2}$, видим, что выражение в квадратных скобках

$$(l + 2k - 1)\frac{x^2}{y^2}F\left(l + k + \frac{\nu - 1}{2}; k; l + 2k - 1; 1 - \frac{x^2}{y^2}\right) + \\ + (l + k - 1)\left(1 - \frac{x^2}{y^2}\right)F\left(l + k + \frac{\nu - 1}{2}, k; l + 2k; 1 - \frac{x^2}{y^2}\right) = \\ = (l + 2k - 1)F\left(l - 1 + k + \frac{\nu - 1}{2}; k; l + 2k - 1\right) = (l + 2k - 1)\Phi_{l-1}.$$

2) Пусть теперь

$$\left(\frac{d}{dy}\frac{1}{y}\right)^{i-1}\Phi_{k,l} = (l + 2k - 1)\cdot\ldots\cdot(l - i + 2k)\Phi_{k,l-i+1},$$

тогда

$$\left(\frac{d}{dy}\frac{1}{y}\right)^{i}\Phi_{k,l} = (l + 2k - 1)\cdot\ldots\cdot(l - i + 2k - 1)\Phi_{k,l-i}.$$

Тем самым (27) доказана. ■

Вернемся теперь к формуле

$$D_{b-}(k, l, \nu)\left(-\frac{1}{y}\frac{d}{dy}\right)^l B^k f = \frac{1}{\Gamma(l + 2k)}\int_x^b \Phi_{k,l}\left(-\frac{1}{y}\frac{d}{dy}\right)^l B^k f dy =$$

проинтегрируя l раз выражение по частям

$$= \frac{1}{\Gamma(l + 2k)}\left\{-\frac{1}{y}\left(-\frac{1}{y}D\right)^{l-1}B^k f\Big|_x^b - \frac{1}{y}D\frac{1}{y}\Phi_{k,l}\left(-\frac{1}{y}D\right)^{l-2}B^k f\Big|_x^b - \right. \\ - \ldots - \\ \left. -\frac{1}{y}\left(D\frac{1}{y}\right)^{l-1}\Phi_{k,l}B^k f\Big|_x^b + \int_x^b\left(D\frac{1}{y}\right)^l\Phi_{k,l}B^k f dy\right\} =$$

Используя соотношение (27), получаем следующее выражение

$$= \frac{1}{\Gamma(l + 2k)}\left\{-\frac{1}{b}\left(\frac{b^2 - x^2}{2}\right)^{l+2k-1}b^{1-2k}F\left(l + k + \frac{\nu - 1}{2}, k; l + 2k; 1 - \frac{x^2}{b^2}\right) - \right. \\ -b^{-2k}\left(\frac{b^2 - x^2}{2}\right)^{l+2k-2}\frac{\Gamma(l + 2k)}{\Gamma(l + 2k - 1)}F\left(l - 1 + k + \frac{\nu - 1}{2}, k; l - 1 + 2k; 1 - \frac{x^2}{b^2}\right) - \\ - \ldots - \\ -b^{-2k}\left(\frac{b^2 - x^2}{2}\right)^{2k}\frac{\Gamma(l + 2k)}{\Gamma(2k - 1)}F\left(k + 1 + \frac{\nu - 1}{2}, k; 2k + 1; 1 - \frac{x^2}{b^2}\right) + \\ \left. + \int_x^b\left(\frac{y^2 - x^2}{2y}\right)^{2k-1}\frac{\Gamma(l + 2k)}{\Gamma(2k)}F\left(k + \frac{\nu - 1}{2}, k; 2k; 1 - \frac{x^2}{b^2}\right)B^k f dy\right\}.$$

Подставляя вместо последнего слагаемого формулу (I′), будем иметь

$$D_{b-}(k, l, \nu)\left(-\frac{1}{y}\frac{d}{dy}\right)^l B^k f = \\ = f(x) - \sum_{i=1}^{l} b^{-2k}\frac{1}{\Gamma(l + 2k - i)}F\left(l - i + k + \frac{\nu - 1}{2}, k; l - i + 2k; 1 - \frac{x^2}{b^2}\right)\left(\frac{b^2 - x^2}{2}\right)^{2k-1}\left(-\frac{1}{y}\frac{d}{dy}\right)^{l-i} \times \\ \times B^k f\Big|_b - \sum_{i=1}^{k}\left\{\left(\frac{b^2 - x^2}{2b}\right)^{2i-2}\frac{1}{\Gamma(2i - 1)}F\left(i + \frac{\nu - 1}{2}, i - 1; 2i - 1; 1 - \frac{x^2}{b^2}\right)B^{i-1}f\Big|_b - \right. \\ \left. - \frac{1}{\Gamma(2i)}\left(\frac{b^2 - x^2}{2b}\right)^{2i-1}F\left(i + \frac{\nu - 1}{2}, i; 2i; 1 - \frac{x^2}{b^2}\right)\frac{d}{dy}B^{i-1}f\Big|_b\right\}.$$

$$6^\circ. \quad D_{a+}(k,l,\nu)\bar{B}^k\left(D\frac{1}{y}\right)^l f = \frac{1}{\Gamma(l+2k)}\int_a^x \left(\frac{x^2-y^2}{2}\right)^{l+2k-1} x^{1-2k}\times$$
$$\times F\left(l+k+\frac{\nu-1}{2}, k; l+2k; 1-\frac{y^2}{x^2}\right)\bar{B}^k\left(D\frac{1}{y}\right)^l f dy.$$

$$D_{a+}(k,l,\nu)\bar{B}^k\left(D\frac{1}{y}\right)^l f = f(x) - \sum_{i=0}^{l-1}\frac{1}{\Gamma(l-i)}x\left(\frac{x^2-a^2}{2}\right)^{l-i-1}\left(D\frac{1}{y}\right)^{l-i-1} f\Big|_a -$$
$$-\sum_{i=0}^{k-1}\left\{\frac{1}{\Gamma(l+2k-2i-l)}\left(\frac{x^2-a^2}{2}\right)^{l+2(k-i)-2} x^{2-2(k-i)}\left(\frac{a}{x}\right)\times\right.$$
$$\times F\left(l+k-i+\frac{\nu-1}{2}, k-i; l+2(k-i)-1; 1-\frac{a^2}{x^2}\right)\bar{B}^{k-1-i}\left(D\frac{1}{y}\right)^l f\Big|_a +$$
$$+\frac{1}{\Gamma(l+2k-2i)}x^{1-2(k-i)}\left(\frac{x^2-a^2}{2}\right)^{l+2(k-i)-1} F\left(l+k-i+\frac{\nu-1}{2}, k-i; l+2(k-i); 1-\frac{a^2}{x^2}\right)\times$$
$$\left.\times a^\nu \frac{d}{dy}y^{-\nu}\bar{B}^{k-1-i}\left(\frac{d}{dy}\frac{1}{y}\right)^l f\Big|_a\right\};$$

Введем следующие обозначения:

$$\Psi_{k,l} \equiv \left(\frac{x^2-y^2}{2}\right)^{l+2k-1} x^{1-2k} F\left(l+k+\frac{\nu-1}{2}, k; l+2k; 1-\frac{y^2}{x^2}\right),$$

$$\widetilde{\Psi}_{k,l} \equiv \left(\frac{x^2-y^2}{2}\right)^{l+2k-2} x^{2-2k}\left(-\frac{y}{x}\right) F\left(l+k+\frac{\nu-1}{2}, k; l+2k-1; 1-\frac{y^2}{x^2}\right).$$

Лемма 3.10.

$$\frac{d}{dy}\Psi_{m,l} = (l+2m-1)\widetilde{\Psi}_{m,l}, \quad \forall\, m,l \in \mathbb{N} \tag{28}$$

Доказательство.

$$\frac{d}{dy}\left[\left(\frac{x^2-y^2}{2}\right)^{l+2m-1} x^{1-2m} F\left(l+m+\frac{\nu-1}{2}, m; l+2m\right)\right] = (l+2m-1)\left(\frac{x^2-y^2}{2}\right)^{l+2m-2}(-y)^{1-2m}\times$$
$$\times F\left(l+m+\frac{\nu-1}{2}, m; 2m+l\right) + \left(\frac{x^2-y^2}{2}\right)^{l+2m-2} x^{1-2m}\left(-2\frac{y}{x^2}\right)(l+2m-1)\frac{x^2}{x^2-y^2}\times$$
$$\times\left[F\left(l+m+\frac{\nu-1}{2}, m; l+2m-1\right) - F\left(l+m+\frac{\nu-1}{2}, m; l+2m\right)\right] =$$

используя (12)

$$= (l+2m-1)\left(\frac{x^2-y^2}{2}\right)^{l+2m-2} x^{2-2m}\left(-\frac{y}{x}\right) F\left(l+m+\frac{\nu-1}{2}, m; l+2m-1\right) = (l+2m-1)\widetilde{\Psi}_{m,l}. \qquad \blacksquare$$

Лемма 3.11. $\forall\, k,l \in \mathbb{N}$, $\forall\, i = \overline{1,k}$ *верно:*

$$B^i\Psi_{k,l} = (l+2m-1)\cdot\ldots\cdot(l+2k-2i)\Psi_{k-i,l}, \tag{29}$$

Доказательство проведем методом математической индукции.

1) Покажем, что для $i = 1$ утверждение верно:

$$B\Psi_{k,l} = \left(\frac{d^2}{dy^2} + \frac{\nu}{y}\frac{d}{dy}\right)\Psi_{k,l}.$$

Из доказанного выше следует, что

$$\frac{\nu}{y}\frac{d}{dy}\Psi_{k,l} = -\nu(l+2k-1)\left(\frac{x^2-y^2}{2}\right)^{l+2k-2} x^{1-2k} F\left(l+k+\frac{\nu-1}{2}, k; l+2k-1; 1-\frac{y^2}{x^2}\right);$$

$$D^2\Psi_{k,l} = -(l+2k-1)x^{1-2k}\frac{d}{dy}\left[\left(\left(\frac{x^2-y^2}{2}\right)^{l+2k-2} yF\left(l+k+\frac{\nu-1}{2},k;l+2k-1\right)\right]=$$

$$=-(l+2k-1)x^{1-2k}\left[\left\{(l+2k-2)\left(\frac{x^2-y^2}{2}\right)^{l+2k-3}(-y)y+\left(\frac{x^2-y^2}{2}\right)^{l+2k-2}\right\}\times\right.$$

$$\times F\left(l+k+\frac{\nu-1}{2},k;l+2k-1\right)+y\left(\frac{x^2-y^2}{2}\right)^{l+2k-3}\left(-2\frac{y}{x^2}\right)(l+2k-2)\frac{x^2}{x^2-y^2}\times$$

$$\times\left(F\left(l+k+\frac{\nu-1}{2},k;l+2k-2\right)-F\left(l+k+\frac{\nu-1}{2},k;l+2k-1\right)\right)=$$

$$=(l+2k-1)\left(\frac{x^2-y^2}{2}\right)^{l+2k-3}x^{3-2k}\left[(l+2k-2)\frac{y^2}{x^2}F\left(l+k+\frac{\nu-1}{2},k;l+2k-2\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\left(1-\frac{y^2}{x^2}\right)F\left(l+k+\frac{\nu-1}{2},k;l+2k-1\right)\right].$$

Тогда

$$\left(\frac{d^2}{dy^2}+\frac{\nu}{y}\frac{d}{dy}\right)\Psi_{k,l}=(l+2k-1)\left(\frac{x^2-y^2}{2}\right)^{l+2k-3}x^{3-2k}\cdot\left[(l+2k-2)\frac{y^2}{x^2}F\left(l+k+\frac{\nu-1}{2},k;l+2k-2;1-\frac{y^2}{x^2}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{\nu+1}{2}\left(1-\frac{y^2}{x^2}\right)F\left(l+k+\frac{\nu-1}{2},k;l+2k-1;1-\frac{y^2}{x^2}\right)\right].$$

Полагая в приведенных формулах

$$a=l+k-1+\frac{\nu-1}{2},\quad b=k,\quad c=l+2k-2,\quad z=1-\frac{y^2}{x^2},$$

получим, что выражение в квадратных скобках:

$$(l+2k-2)\frac{y^2}{x^2}F\left(l+k+\frac{\nu-1}{2},k;l+2k-2;1-\frac{y^2}{x^2}\right)-\frac{\nu+1}{2}\left(1-\frac{y^2}{x^2}\right)F\left(l+k+\frac{\nu-1}{2},k;l+2k-1;1-\frac{y^2}{x^2}\right)=$$

$$=(b+2k-2)F\left(l+k+\frac{\nu-1}{2},k-1;l+2k-2;1-\frac{y^2}{x^2}\right).$$

Таким образом,

$$B\Psi_{k,l}=(l+2k-1)(l+2k-2)\Psi_{k-1,l}.$$

2)Пусть теперь

$$B^{i-1}\Psi_{k,l}=(l+2k-1)\cdot\ldots\cdot(l+2k-2i+2)\Psi_{k-i+1,l}.$$

Тогда

$$B^{i}\Psi_{k,l}=(l+2k-1)\cdot\ldots\cdot(l+2k-2i)\Psi_{k-i,l}.$$

Формула (29) доказана. ■

Следствие.

$$\Psi_{0,l}=\left(\frac{x^2-y^2}{2}\right)^{l-1}x,$$

$$\left(-\frac{1}{y}D\right)^i\Psi_l=(l-1)\cdot\ldots\cdot(l-i)\Psi_{l-i},\quad i=\overline{1,l} \tag{30}$$

$$\left(-\frac{1}{y}D\right)^l\Psi_l\equiv 0.$$

Перейдем к доказательству формулы

$$D_{a+}(k,l,\nu)\bar{B}^k\left(\frac{d}{dy}\frac{1}{y}\right)^l f=\frac{1}{\Gamma(l+2k)}\int_a^x\Psi_{k,l}\bar{B}^k\left(\frac{d}{dy}\frac{1}{y}\right)^l f(y)dy=$$

Интегрируя $2k$ раз по частям, получаем

$$=\frac{1}{\Gamma(l+2k)}\left\{\Psi_{k,l}y^\nu\frac{d}{dy}y^{-\nu}\bar{B}^{k-1}\left(\frac{d}{dy}\frac{1}{y}\right)^l f\Big|_a^x-\frac{d}{dy}\Psi_{k,l}\bar{B}^{k-1}\left(\frac{d}{dy}\frac{1}{y}\right)^l f\Big|_a^x+\right.$$

$$+\ldots+$$

$$+B^i\Psi_{k,l}y^\nu\frac{d}{dy}y^{-\nu}\left(\frac{d}{dy}\frac{1}{y}\right)^l f\Big|_a^x-\frac{d}{dy}B^i\Psi_{k,l}\bar{B}^{k-1-i}\left(\frac{d}{dy}\frac{1}{y}\right)f\Big|_a^x+$$

$$+\ldots+$$

$$+B^{k-1}\Psi_{k,l}y^\nu\frac{d}{dy}y^{-\nu}\left(\frac{d}{dy}\frac{1}{y}\right)^l f\Big|_a^x-DB^{k-1}\Psi_{k,l}\left(D\frac{1}{y}\right)^l f\Big|_a^x+\int_a^x B^k\Psi_{k,l}\left(D\frac{1}{y}\right)^l f dy\Big\}. \quad (31)$$

Учитывая следствие из леммы 3.11, проинтегрируем последнее слагаемое по частям l раз

$$\int_a^x\Psi_{0,l}\left(\frac{d}{dy}\frac{1}{y}\right)^l f dy=\sum_{i=0}^{l-1}\left(-\frac{1}{y}D\right)^i\Psi_l\left(D\frac{1}{y}\right)^{l-i-1}f\Big|_a^x+\int\left(-\frac{1}{y}D\right)^l\Psi_l f dy. \quad (32)$$

Подставляя соотношения (28), (29), (30) в выражения (31), (32), получим следующую формулу:

$$D_{a+}(k,l,\nu)\bar{B}^k\left(\frac{d}{dy}\frac{1}{y}\right)^l f=f(x)-\sum_{i=0}^{l-1}\frac{1}{\Gamma(l-i)}x\left(\frac{x^2-a^2}{2}\right)^{l-i-1}\left(\frac{d}{dy}\frac{1}{y}\right)^{l-i-1}f\Big|_a-$$

$$-\sum_{i=0}^{k-1}\Bigg\{\frac{1}{\Gamma(l+2k-2i-1)}\left(\frac{x^2-a^2}{2}\right)^{l+2(k-i)-2}x^{1-2(k-i)}aF\Bigg(l+k-i+\frac{\nu-1}{2},k-i;l+2(k-i)-1;$$

$$1-\frac{a^2}{x^2}\Bigg)\cdot\bar{B}^{k-1-i}\left(\frac{d}{dy}\frac{1}{y}\right)^l f\Big|_a+$$

$$+\frac{1}{\Gamma(l+2k-2i)}x^{1-2(k-i)}\left(\frac{x^2-a^2}{2}\right)^{l+2(k-i)-1}F\left(l+k-i+\frac{\nu-1}{2},k-i;l+2(k-i);1-\frac{a^2}{x^2}\right)\times$$

$$\times a^\nu\frac{d}{dy}y^{-\nu}\bar{B}^{k-1-i}\left(\frac{d}{dy}\frac{1}{y}\right)^l f\Big|_a\Bigg\}.$$

Таким образом, теоремы 2.1. и 2.2. полностью доказаны. ■

4. Заключение. В работе рассматриваются явные реализации в интегральном виде дробных степеней оператора Бесселя. Для них изучается связь с преобразованиями Ханкеля и Меллина, операторами дробного интегродифференцирования, а также установлена обобщённая формула Тэйлора с явным остаточным членом. Полученные результаты важны для теории уравнений с частными производными, содержащими оператор Лапласа – Бесселя.

References

1. Sprinkhuizen-Kuyper IG. A fractional integral operator corresponding to negative powers of a certain second–order differential operator. *Journal of Mathematical Analysis and Applications.* 1979;72:674–702.
2. Shishkina E., Sitnik S. Transmutations, Singular and Fractional Differential Equations with Applications to Mathematical Physics. Series: Mathematics in Science and Engineering. 1st Edition. Elsevier. Academic Press; 592 p.
3. Shishkina EL., Sitnik SM. Fractional Bessel Integrals and Derivatives on Semi-axes. 2020, P. 615–651. In the book: Kravchenko Vladislav, Sitnik Sergei M. (Eds.) Transmutation Operators and Applications. Trends in Mathematics. 2020, Birkhauser Basel, Springer Nature Switzerland AG, Basel.
4. Shishkina EL., Sitnik SM. On fractional powers of Bessel operators. Journal of Inequalities and Special Functions. (Special issue To honor Prof. Ivan Dimovski's contributions). 2017;8(1):49–67.
5. Samko S., Kilbas AA., Marichev OI. Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications. Gordon and Breach Science Publishers. Yveron; 1993. 1012 p.
6. Kilbas AA., Srivastava HM., Truhillo JJ. Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Elsevier, Amsterdam; 2006. 540 p.
7. Kiryakova V. Generalized Fractional Calculus and Applications.— Pitman Research Notes in Mathematics Series. No. 301. Longman Sci. UK; 1994. 402 p.
8. Sitnik SM., Shishkina EL. Method of Transmutations for Differential Equations with Bessel operators. Moscow, Fizmatlit; 2019, 224 p.
9. Katrakhov VV., Sitnik SM. The transmutation method and boundary-value problems for singular elliptic equations. *Contemporary Mathematics. Fundamental Directions.* 2018;64(2):211–426.

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.
Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 15.10.2025
Поступила после рецензирования 28.11.2025
Принята к публикации 03.12.2025

Received October 15, 2025
Revised November 28, 2025
Accepted December 3, 2025

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Ситник Сергей Михайлович – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры прикладной математики и компьютерного моделирования, Белгородский государственный национальный исследовательский университет, г. Белгород, Россия

Чернова Ольга Викторовна – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры прикладной математики и компьютерного моделирования, Белгородский государственный национальный исследовательский университет, г. Белгород, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Sergey M. Sitnik – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Professor of the Department of Applied Mathematics and Computer Modelling, Belgorod National Research University, Belgorod, Russia

Olga V. Chernova – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Assosiate Professor, Assosiate Professor of the Department of Applied Mathematics and Computer Modelling, Belgorod National Research University, Belgorod, Russia

К содержанию