

Угловая плотность ПРИ в периодической слоистой среде с тремя слоями в периоде в геометрии рассеяния Лауэ

Носков А. В.¹, Пирматова М. Д.¹, Мачукаев Д. Д.², Бардакова И. Н.³, Блажевич С. В.³

(Статья представлена членом редакционной коллегии Никуличевой Т. Б.)

¹ Московский технический университет связи и информатики,
Россия, 111024, г. Москва, ул. Авиамоторная, 8а

² Белгородский государственный технологический университет им. В. Г. Шухова,
Россия, 308012, г. Белгород, ул. Костюкова, 46

³ Белгородский государственный национальный исследовательский университет,
Россия, 308015, г. Белгород, ул. Победы, 85

noskovbupk@mail.ru

Аннотация. Развита теория параметрического рентгеновского излучения релятивистского электрона, пересекающего периодическую слоистую среду с тремя слоями в периоде в геометрии рассеяния Лауэ. В рамках двухволнового приближения динамической теории дифракции получено выражение, описывающее угловую плотность параметрического рентгеновского излучения. Используя полученное выражение, проведены численные расчеты угловой плотности ПРИ. Показана существенная зависимость угловой плотности ПРИ от отношения значений действительных частей диэлектрических восприимчивостей материалов слоев и отношения толщин слоев.

Ключевые слова: периодическая слоистая структура, трехслойная структура, динамическая дифракция, параметрическое рентгеновское излучение

Для цитирования: Носков А.В., Пирматова М.Д., Мачукаев Д.Д., Бардакова И.Н., Блажевич С.В. Угловая плотность ПРИ в периодической слоистой среде с тремя слоями в периоде в геометрии рассеяния Лауэ. *Прикладная математика & Физика*. 2026;58(1):78–87. DOI 10.52575/2687-0959-2026-58-1-78-87 EDN OTWVUX

Short Communication

Angular Density of the PXR in a Periodic Layered Medium with Three Layers in a Period in Laue Scattering Geometry

Anton V. Noskov¹, Maria D. Pirmatova¹, Deni D. Machukaev², Irina N. Bardakova³,

Sergey V. Blazhevich³

(Article submitted by a member of the editorial board Nikulicheva T. B.)

¹ Moscow Technical University of Communications and Informatics,
8a Aviamotornaya St., Moscow 111024, Russia

² Belgorod State Shukhov's Technological University,
46 Kostyukova St., Belgorod 308012, Russia

³ Belgorod National Research University,
85 Pobedy St., Belgorod 308015, Russia

noskovbupk@mail.ru

Abstract. A theory of parametric X-ray radiation from a relativistic electron traversing a periodic layered medium with three layers per period in Laue scattering geometry has been developed. Within the two-wave approximation of dynamic diffraction theory, an expression describing the angular density of parametric X-ray emission has been derived. Using this expression, numerical calculations of the PXR angular density have been performed. A significant dependence of the PXR angular density on the ratio of the real parts of the dielectric susceptibilities of the layer materials and the ratio of the layer thicknesses has been demonstrated.

Keywords: Periodic Layered Structure, Three-layer Structure, Dynamic Diffraction, Parametric X-ray Radiation

For citation: Noskov AV., Pirmatov MD., Machukaev DD., Bardakova IN., Blazhevich SV. Angular Density of the PXR in a Periodic Layered Medium with Three Layers in a Period in Laue Scattering Geometry. *Applied Mathematics & Physics*. 2026;58(1):78–87. (In Russ.). DOI 10.52575/2687-0959-2026-58-1-78-87 EDN OTWVUX

1. Введение. Впервые когерентное рентгеновское излучение (КРИ) релятивистских электронов, пересекающих мишень, имеющую периодическую слоистую структуру, в рамках динамической теории дифракции рентгеновских волн исследовалось в работе [1]. ПРИ в такой мишени генерируется вследствие

дифракции псевдо-фотонов кулоновского поля релятивистского электрона на слоях, аналогично генерации ПРИ в монокристалле на атомных плоскостях [2, 3]. Следует отметить, что формулы динамической теории [1] хорошо описывают данные эксперимента по излучению релятивистских электронов в периодической слоистой среде [4]. ПРИ релятивистского электрона в периодической слоистой среде для общего случая асимметричного относительно поверхности мишени отражения поля электрона в геометрии рассеяния Лауэ впервые рассматривался в работе [5], а в геометрии рассеяния Брэгга в работе [6]. В работах [5, 6] было показано, что в периодической слоистой среде интенсивность ПРИ релятивистских электронов должна быть в несколько раз выше, чем в монокристалле в аналогичных условиях. Примечательно, что слоистые структуры представляют большой интерес для генерации излучения в мягком рентгеновском диапазоне (100-2000 эВ), текущие исследования активно изучают эту область [7, 8, 9]. Стоит отметить недавние исследования по генерации мягкого рентгеновского излучения электронами низких энергий порядка десятков и сотен кэВ из структур Ван-дер-Ваальса [10, 11, 12]. В недавних работах авторов [13, 14, 15, 16] исследовалось когерентное рентгеновское излучение в периодической слоистой среде и монокристалле в динамической дифракции рентгеновских волн. Во всех цитируемых выше работах излучение релятивистских электронов рассматривалось в периодической слоистой среде с двумя различными слоями на периоде. Когерентное рентгеновское излучение релятивистских электронов, пересекающих периодическую слоистую среду с тремя слоями в периоде в геометрии рассеяния Брэгга, впервые рассматривалось в работе [17]. В работах [18, 19] исследовалась возможность проявления эффектов динамической дифракции в ПРИ релятивистских электронов, пересекающих такую структуру. В работе [20] рассматривалось влияние угловой расходимости электронного пучка на ПРИ релятивистских электронов в периодической слоистой среде с тремя слоями в периоде в геометрии рассеяния Брэгга.

В настоящей работе впервые рассматривается параметрическое рентгеновское излучение релятивистских электронов, пересекающих периодическую слоистую среду с тремя различными слоями на периоде в геометрии рассеяния Лауэ, когда фотоны излучения выходят через заднюю границу мишени. Получены и исследованы выражения, описывающие спектрально-угловые и угловые плотности ПРИ.

2. Геометрия процесса излучения. Рассмотрим излучение релятивистского электрона в пластине из периодической слоистой среды с тремя слоями в периоде в геометрии рассеяния Лауэ (рис. 1). В этом случае рентгеновское излучение выходит через заднюю границу мишени и распространяется в направлении рассеяния Брэгга.

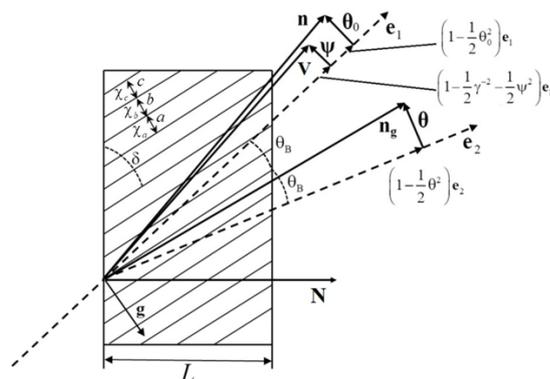


Рис. 1. Геометрия процесса излучения

Fig. 1. Geometry of the radiation process

Пластинка состоит из трех различных периодически расположенных аморфных слоев с толщинами, равными a , b и c . Толщина пластины – L , а период периодической слоистой среды – $T = a + b + c$. Диэлектрические восприимчивости атомов слоев – χ_a , χ_b и χ_c . Рассматривается общий случай асимметричного отражения псевдо-фотонов кулоновского поля релятивистского электрона относительно поверхности мишени, когда отражающие слои расположены под некоторым углом δ к поверхности мишени. Если угол между слоями и поверхностью мишени равен $\delta = \pi/2$, то этот случай соответствует симметричному отражению поля электрона.

Направление оси пучка релятивистских электронов определяется единичным вектором e_1 , а отклонение скорости V произвольного электрона пучка относительно оси пучка e_1 определяется вектором $\Psi(\Psi_{\perp}, \Psi_{\parallel})$. Направление псевдофотона кулоновского поля релятивистского электрона и фотона когерентного рентгеновского излучения вблизи направления оси пучка определяется углом θ_0 ($\theta_{0\perp}, \theta_{0\parallel}$), волновой вектор этих фотонов равен $k = \omega n$. В результате рассеяния псевдофотонов кулоновского поля релятивистского электрона, а также фотонов переходного излучения на системе параллельных атомных плоскостей монокристалла вблизи направления рассеяния Брэгга e_2 генерируются параметрическое рентгеновское излучение и дифрагированное переходное излучение с волновым вектором $k_g = \omega n_g$. Векторы e_1 , e_2 , n и n_g являются единичными векторами.

Угол когерентного излучения, отсчитываемый от оси детектора \mathbf{e}_2 , определяется вектором $\theta(\theta_\perp, \theta_\parallel)$. Разложим рассматриваемые угловые векторы на составляющие: $\theta_0 = \theta_{0\perp} + \theta_{0\parallel}$, $\theta = \theta_\perp + \theta_\parallel$, $\Psi = \Psi_\perp + \Psi_\parallel$. Векторы θ_\perp , $\theta_{0\perp}$ и Ψ_\perp перпендикулярны плоскости векторов \mathbf{k} и \mathbf{k}_g . Векторы θ_\parallel , $\theta_{0\parallel}$ и Ψ_\parallel параллельны плоскости векторов \mathbf{k} и \mathbf{k}_g . Для решения задачи рассматриваемые углы и векторы свяжем соотношениями:

$$\mathbf{V} = \left(1 - \frac{1}{2}\gamma^{-2} - \frac{1}{2}\Psi^2\right)\mathbf{e}_1 + \Psi, \quad \mathbf{n}_g = \left(1 - \frac{1}{2}\theta^2\right)\mathbf{e}_2 + \theta, \quad \mathbf{n} = \left(1 - \frac{1}{2}\theta_0^2\right)\mathbf{e}_1 + \theta_0, \quad (1)$$

где $\mathbf{e}_1\Psi = 0$, $\mathbf{e}_1\theta_0 = 0$, $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 = \cos 2\theta_B$, $\mathbf{e}_2\theta = 0$, $|\mathbf{e}_1| = |\mathbf{e}_2| = |\mathbf{n}| = |\mathbf{n}_g| = 1$. Это можно сделать, так как выполняются условия $\gamma^{-2} \ll 1$, $\Psi \ll 1$, $\theta \ll 1$, $\theta_0 \ll 1$, из которых следуют приближенные равенства $\mathbf{V}^2 \approx 1$, $\mathbf{n}_g^2 \approx 1$ и $\mathbf{n}^2 \approx 1$. $\gamma = 1/\sqrt{1 - V^2}$ – Лоренц-фактор релятивистского электрона. Вектор \mathbf{g} (рис. 1) перпендикулярен слоям мишени, его длина равна $g = \frac{2\pi}{T}n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Этот вектор аналогичен вектору обратной решетки в монокристалле. С другой стороны, модуль вектора обратной решетки $g = 2\omega_B \sin \theta_B / V$, где ω_B – частота Брэгга, θ_B – угол Брэгга. Тогда частота Брэгга принимает значение $\omega_B = \frac{\pi n}{T \sin \theta_B}$. В случае дифракции Брэгга волновые векторы падающей \mathbf{k} и дифрагированной волны \mathbf{k}_g связаны между собой уравнением $\mathbf{k}_g = \mathbf{k} + \mathbf{g}$.

3. Амплитуда излучения. В работе [17] была развита динамическая теория когерентного рентгеновского излучения релятивистских электронов в периодической слоистой среде с тремя слоями на периоде в геометрии рассеяния Брэгга. Однако в отличие от работы [17] ПРИ будем рассматривать в геометрии рассеяния Лауэ, когда излучение выходит через заднюю границу мишени. Как и в цитируемой работе, излучение и рассеяние рентгеновского излучения в периодической слоистой среде рассмотрено в рамках двухволнового приближения динамической теории дифракции. Разница в рассмотрении генерации излучения в геометриях рассеяния Лауэ и Брэгга заключается в основном в граничных условиях на входной и выходной поверхностях мишени.

Фурье-образы напряженности электрического поля падающего излучения $\mathbf{E}_{\omega, \mathbf{k}}$ и дифрагированного излучения $\mathbf{E}_{\omega, \mathbf{k}+\mathbf{g}}$ в периодической слоистой среде представим в виде:

$$\mathbf{E}_{\omega, \mathbf{k}} = E_{\omega, \mathbf{k}}^{(1)}\mathbf{e}^{(1)} + E_{\omega, \mathbf{k}}^{(2)}\mathbf{e}^{(2)}, \quad \mathbf{E}_{\omega, \mathbf{k}+\mathbf{g}} = E_{\omega, \mathbf{k}+\mathbf{g}}^{(1)}\mathbf{e}_g^{(1)} + E_{\omega, \mathbf{k}+\mathbf{g}}^{(2)}\mathbf{e}_g^{(2)}, \quad (2)$$

где

$$\mathbf{e}^{(1)} = \mathbf{e}_g^{(1)} = \frac{[\mathbf{k}, \mathbf{g}]}{|\mathbf{k}, \mathbf{g}|}, \quad \mathbf{e}^{(2)} = \frac{[\mathbf{k}, \mathbf{e}^{(1)}]}{k}, \quad \mathbf{e}_g^{(2)} = \frac{[\mathbf{k}_g, \mathbf{e}^{(1)}]}{k_g}.$$

Векторы $\mathbf{e}^{(1)}$ и $\mathbf{e}^{(2)}$ перпендикулярны вектору \mathbf{k} , а векторы $\mathbf{e}_g^{(1)}$ и $\mathbf{e}_g^{(2)}$ перпендикулярны вектору $\mathbf{k}_g = \mathbf{k} + \mathbf{g}$. Векторы $\mathbf{e}^{(2)}$, $\mathbf{e}_g^{(2)}$ лежат в плоскости векторов \mathbf{k} и \mathbf{k}_g (π -поляризация), а векторы $\mathbf{e}^{(1)}$ и $\mathbf{e}_g^{(1)}$ перпендикулярны ей (σ -поляризация). Система уравнений, описывающая проекции Фурье-образов напряженностей электрического поля в рамках двухволнового приближения динамической теории дифракции, имеет вид:

$$\begin{aligned} (k^2 - \omega^2(1 + \chi_0(\omega)))E_{\omega, \mathbf{k}}^{(s)} - \omega^2\chi_{-g}(\omega)E_{\omega, \mathbf{k}+\mathbf{g}}^{(s)} C^{(s)} &= 8\pi^2 i\omega e\Omega^{(s)}\delta(\omega - \mathbf{kV}), \\ ((\mathbf{k} + \mathbf{g})^2 - \omega^2(1 + \chi_0(\omega)))E_{\omega, \mathbf{k}+\mathbf{g}}^{(s)} - \omega^2\chi_g(\omega)E_{\omega, \mathbf{k}}^{(s)} C^{(s)} &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где введены обозначения:

$$\Omega^{(1)} = \mathbf{e}^{(1)}\mathbf{V} = \theta_\perp - \Psi_\perp, \quad \Omega^{(2)} = \mathbf{e}^{(2)}\mathbf{V} = \theta_\parallel + \Psi_\parallel, \quad C^{(1)} = 1, \quad C^{(2)} = \cos 2\theta_B.$$

Если $s = 1$, то система уравнений (3) описывает поля σ -поляризованные, а при $s = 2$ описывает поля π -поляризованные. $\chi_0(\omega)$ – средняя диэлектрическая восприимчивость периодической слоистой среды, χ_g и χ_{-g} – коэффициенты Фурье разложения диэлектрической восприимчивости по векторам \mathbf{g} :

$$\chi(\omega, \mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{g}} \chi_{\mathbf{g}}(\omega) \exp(i\mathbf{g}\mathbf{r}), \quad (4)$$

где $\chi_g = \chi'_g(\omega) + i\chi''_g(\omega)$, χ_0 и χ_g в рассматриваемой периодической структуре принимают значения:

$$\begin{aligned} \chi_0(\omega) &= \frac{a}{T}\chi_a + \frac{b}{T}\chi_b + \frac{c}{T}\chi_c, \\ \chi_g &= \frac{1}{igT} (\chi_c - \chi_a + (\chi_a - \chi_b)e^{iga} + (\chi_b - \chi_c)e^{-igc}). \end{aligned} \quad (5)$$

Решая систему уравнений (3) для Фурье-образов напряженностей электрических полей внутри мишени, а также в вакууме ($\chi_0 = \chi_g = 0$) и применяя граничные условия на входной и выходной

поверхностях мишени, получим выражение, описывающее амплитуду напряженности электрического поля излучения ПРИ $E_{\text{ПРИ}}^{(s)}$, возбуждаемого в направлении рассеяния Брэгга:

$$E_{\text{ПРИ}}^{(s)} = \frac{4\pi^2 i e \chi_g C^{(s)} \varepsilon}{\lambda_g^{(1)} - \lambda_g^{(2)}} \Omega^{(s)} \left[\left(\frac{1}{\Gamma - \chi_0} - \frac{\omega \varepsilon}{2(\lambda_g^* - \lambda_g^{(1)})} \right) \times \right. \\ \left. \times \left(e^{i \frac{\lambda_g^{(1)} - \lambda_g^*}{\varepsilon} \frac{L}{\sin(\delta - \theta_B)}} - 1 \right) - \left(\frac{1}{\Gamma - \chi_0} - \frac{\omega \varepsilon}{2(\lambda_g^* - \lambda_g^{(2)})} \right) \left(e^{i \frac{\lambda_g^{(2)} - \lambda_g^*}{\varepsilon} \frac{L}{\sin(\delta - \theta_B)}} - 1 \right) \right] e^{i \left(\frac{\omega \chi_0}{2} + \lambda_g^* \right) \frac{L}{\varepsilon \sin(\delta - \theta_B)}}, \quad (6)$$

где

$$\Gamma = \gamma^{-2} + (\theta_{\perp} - \Psi_{\perp})^2 + (\theta_{\parallel} + \Psi_{\parallel})^2, \quad \lambda_g^* = \frac{1}{2L_{\text{ext}}^{(s)}} (2\xi^{(s)} - i\rho^{(s)} + \varepsilon\sigma^{(s)}), \\ \sigma^{(s)} = \frac{1}{\nu^{(s)} |\chi'_0|} (\gamma^{-2} + (\theta_{\perp} - \Psi_{\perp})^2 + (\theta_{\parallel} + \Psi_{\parallel})^2 + |\chi'_0|), \quad \chi'_0 = \chi'_b \left(\delta'_{ab} I_1 + I_2 + \frac{\delta'_{ab}}{\delta'_{ac}} I_3 \right), \\ \lambda_g^{(1,2)} = \frac{1}{2L_{\text{ext}}^{(s)}} \left(\xi^{(s)} - \frac{i\rho^{(s)}(1 - \varepsilon)}{2} \pm \Lambda^{(s)}(\xi^{(s)}) \right), \\ \Lambda^{(s)}(\xi^{(s)}) = \sqrt{\xi^{(s)2} + \varepsilon} - \frac{i\rho^{(s)} \left((1 - \varepsilon)\xi^{(s)} + 2\kappa^{(s)}\varepsilon \right)}{2\sqrt{\xi^{(s)2} + \varepsilon}} - \frac{\rho^{(s)2}}{2\sqrt{\xi^{(s)2} + \varepsilon}} \left(\frac{(1 - \varepsilon)^2}{4} + \kappa^{(s)2}\varepsilon \right), \quad (7)$$

где $\lambda_g^{(1,2)}$ – динамические добавки к волновым векторам рентгеновского излучения в периодической слоистой среде в направлении рассеяния Брэгга: $k_g^{(1,2)} = \omega\sqrt{1 + \chi_0} + \lambda_g^{(1,2)}$.

В выражениях (7) введены обозначения:

$$\xi^{(s)}(\omega) = \eta^{(s)}(\omega) + \frac{1 - \varepsilon}{2\nu^{(s)}}, \quad \varepsilon = \frac{\sin(\delta + \theta_B)}{\sin(\delta - \theta_B)}, \quad \eta^{(s)}(\omega) = \frac{2\pi^2 n^2 L_{\text{ext}}^{(s)}}{T^2 \omega_B} \left(\frac{\omega}{\omega_B} \left(1 - \theta_{\parallel} \sqrt{\frac{T^2 \omega_B^2}{n^2 \pi^2} - 1} \right) - 1 \right), \\ L_{\text{ext}}^{(s)} = \frac{n\pi}{C^{(s)} \omega |\chi'_b| I^*}, \\ I^* = \sqrt{(1 - \delta'_{ab})\delta'_1 \sin^2(n\pi I_1) + (\delta'_{ab} - 1)\delta'_2 \sin^2(n\pi I_2) + \delta'_1 \delta'_2 \sin^2(n\pi I_3)}, \\ I_1 = \left(1 + \left(\frac{a}{c} \right)^{-1} + \left(\frac{a}{b} \right)^{-1} \right)^{-1}, \quad I_2 = \left(1 + \frac{a}{b} + \frac{a}{b} \left(\frac{a}{c} \right)^{-1} \right)^{-1}, \quad I_3 = \left(1 + \frac{a}{c} + \frac{a}{c} \left(\frac{a}{b} \right)^{-1} \right)^{-1}, \\ \delta'_1 = \frac{\delta'_{ab}}{\delta'_{ac}} - \delta'_{ab}, \quad \delta'_2 = \frac{\delta'_{ab}}{\delta'_{ac}} - 1, \quad \delta'_{ab} = \frac{\chi'_a}{\chi'_b}, \quad \delta'_{ac} = \frac{\chi'_a}{\chi'_c}. \quad (8)$$

Параметры динамического рассеяния:

$$\nu^{(s)} = \frac{C^{(s)}}{n\pi} \frac{I^*}{I_2 \left| \frac{a}{b} \delta'_{ab} + 1 + \frac{a}{b} \left(\frac{a}{c} \right)^{-1} \frac{\delta'_{ab}}{\delta'_{ac}} \right|}, \quad (9)$$

$$\rho^{(s)} = \frac{n\pi}{C^{(s)}} \frac{I_2 \left| \frac{a}{b} \rho_a + \rho_b + \frac{a}{b} \left(\frac{a}{c} \right)^{-1} \rho_c \right|}{I^*}, \quad (10)$$

$$\kappa^{(s)} = \frac{C^{(s)}}{n\pi} \frac{\sqrt{(\rho_1 \sin^2(n\pi I_1) + \rho_2 \sin^2(n\pi I_2) + \rho_3 \sin^2(n\pi I_3))}}{I_2 \left| \frac{a}{b} \rho_a + \rho_b + \frac{a}{b} \left(\frac{a}{c} \right)^{-1} \rho_c \right|}, \quad (11)$$

где

$$\rho_1 = (\rho_a - \rho_b)(\rho_a - \rho_c), \quad \rho_2 = (\rho_b - \rho_a)(\rho_b - \rho_c), \quad \rho_3 = (\rho_c - \rho_a)(\rho_c - \rho_b), \\ \rho_a = \frac{\chi''_a}{|\chi'_b|}, \quad \rho_b = \frac{\chi''_b}{|\chi'_b|}, \quad \rho_c = \frac{\chi''_c}{|\chi'_b|}.$$

Так как в рентгеновском диапазоне частот излучения выполняется неравенство $\frac{2\pi^2 L_{\text{ext}}^{(s)} n^2}{T^2 \omega_B} \gg 1$, то $\eta^{(s)}(\omega)$ является быстро изменяющейся функцией с изменением частоты излучения ω в окрестности частоты Брэгга ω_B . $L_{\text{ext}}^{(s)}$ – длина экстинкции рентгеновского излучения в рассматриваемой структуре.

Представленный в (9) параметр динамического рассеяния $\nu^{(s)}$ является интерференционным параметром, который определяет степень интерференции рентгеновского излучения, отраженного от трех слоев на периоде рассматриваемой мишени. Значение этого параметра лежит в интервале $0 < \nu^{(s)} < 1$. Чем ближе $\nu^{(s)}$ к единице, тем более конструктивна интерференция излучения, отраженного от трех различных слоев на периоде. В этом случае интенсивность ПРИ и ДПИ возрастает.

Параметр $\rho^{(s)}$ определяет степень фотопоглощения рентгеновского излучения в рассматриваемой трехслойной структуре (10). Фотопоглощение излучения в слоях мишени определены выражениями ρ_a , ρ_b и ρ_c . Чем меньше значение этих параметров, тем меньше фотопоглощение рентгеновского излучения.

Значение параметра $\kappa^{(s)}$ из (11) определяет расположение в слоистой среде пучностей стоячей волны, которая образуется в результате интерференции падающей и дифрагированной волн.

Параметр ε определяет асимметрию отражения кулоновского поля релятивистского электрона относительно поверхности мишени. При фиксированном угле Брэгга θ_B параметр асимметрии ε определяет угол между поверхностью мишени и отражающими слоями δ . В случае симметричного отражения поля электрона относительно поверхности мишени, когда отражающие слои и поверхность мишени перпендикулярны ($\delta = \pi/2$), параметр асимметрии равен единице: $\varepsilon = 1$. Угол падения электрона на поверхность пластины $\delta - \theta_B$ увеличивается, если параметр ε уменьшается и наоборот.

4. Спектрально-угловая и угловая плотности ПРИ. Слагаемые в квадратных скобках выражения (6) соответствуют двум различным ветвям возбуждаемых рентгеновских волн в рассматриваемой структуре. Для возникновения рефлекса ПРИ необходимо, чтобы реальные части знаменателей вторых слагаемых ветвей ПРИ обращались в нуль, то есть необходимо выполнение хотя бы одного из следующих равенств:

$$\text{Re}(\lambda_g^* - \lambda_g^{(1)}) = \frac{\varepsilon}{2L_{\text{ext}}} \left(\sigma^{(s)} + \frac{\xi^{(s)} - \sqrt{\xi^{(s)2} + \varepsilon}}{\varepsilon} \right) = 0, \quad (12)$$

$$\text{Re}(\lambda_g^* - \lambda_g^{(2)}) = \frac{\varepsilon}{2L_{\text{ext}}} \left(\sigma^{(s)} + \frac{\xi^{(s)} + \sqrt{\xi^{(s)2} + \varepsilon}}{\varepsilon} \right) = 0. \quad (13)$$

Существенной является первая ветвь ПРИ, так как реальная часть знаменателя этой ветви может обратиться в нуль (12), что приведет к значимому рефлексу ПРИ. Поэтому только первое слагаемое в (6) дает вклад в выход ПРИ.

Подставим (6) в хорошо известное выражение для спектрально-угловой плотности рентгеновского излучения

$$\omega \frac{d^3 N^{(s)}}{d\omega d\theta_{\perp} d\theta_{\parallel}} = \omega^2 (2\pi)^{-6} \left| E_{\text{ПРИ}}^{(s)} \right|^2,$$

получим выражения, описывающие спектрально-угловую плотность ПРИ:

$$\omega \frac{d^3 N_{\text{ПРИ}}^{(s)}}{d\omega d\theta_{\perp} d\theta_{\parallel}} = \frac{e^2}{4\pi^2} \frac{\Omega^{(s)2}}{(\Gamma - \chi_0')^2} R_{\text{ПРИ}}^{(s)}, \quad (14)$$

$$R_{\text{ПРИ}}^{(s)} = \left(1 - \frac{\xi^{(s)}}{\sqrt{\xi^{(s)2} + \varepsilon}} \right)^2 \frac{1 + \exp(-2b^{(s)} \rho^{(s)} \Delta^{(s)}) - 2 \exp(-b^{(s)} \rho^{(s)} \Delta^{(s)}) \cos \left(b^{(s)} \left(\sigma^{(s)} + \frac{\xi^{(s)} - \sqrt{\xi^{(s)2} + \varepsilon}}{\varepsilon} \right) \right)}{\left(\sigma^{(s)} + \frac{\xi^{(s)} - \sqrt{\xi^{(s)2} + \varepsilon}}{\varepsilon} \right)^2 + \rho^{(s)2} \Delta^{(s)2}}, \quad (15)$$

где введены обозначения:

$$\Delta^{(s)} = \frac{\varepsilon+1}{2\varepsilon} - \frac{1-\varepsilon}{2\varepsilon} \frac{\xi^{(s)}}{\sqrt{\xi^{(s)2} + \varepsilon}} - \frac{\kappa^{(s)}}{\sqrt{\xi^{(s)2} + \varepsilon}}, \quad b^{(s)} = \frac{1}{2 \sin(\delta - \theta_B)} \frac{L}{L_{\text{ext}}^{(s)}}, \quad \Gamma = \gamma^{-2} + (\theta_{\perp} - \Psi_{\perp})^2 + (\theta_{\parallel} + \Psi_{\parallel})^2. \quad (16)$$

Параметр $b^{(s)}$, который характеризует толщину мишени L , равен половине длины пути электрона в мишени $L_e = \frac{L}{\sin(\delta - \theta_B)}$, выраженной в длине экстинкции $L_{\text{ext}}^{(s)}$.

Чтобы найти угловую плотность ПРИ проинтегрируем выражения (14) по частотной функции $\eta^{(s)}(\omega)$, используя соотношение $\frac{d\omega}{\omega} = \frac{T^2 \omega_B}{2\pi^2 n^2 L_{\text{ext}}^{(s)}} d\eta^{(s)}$, следующее из выражения для $\eta^{(s)}(\omega)$ из (8). Получено выражение, описывающее угловую плотность ПРИ:

$$\frac{d^2 N_{\text{ПРИ}}^{(s)}}{d\theta_{\perp} d\theta_{\parallel}} = \frac{e^2}{8\pi^4} \frac{T^2 \omega_B}{n^2 L_{\text{ext}}^{(s)}} \frac{\Omega^{(s)2}}{(\Gamma - \chi'_0)^2} \int_{-\infty}^{\infty} R_{\text{ПРИ}}^{(s)} d\eta^{(s)}. \quad (17)$$

Полученные выражения (14) и (17), описывающие спектрально-угловую и угловую плотности ПРИ, являются главным результатом настоящей работы. Их можно применять для анализа спектрально-угловых характеристик ПРИ в периодической слоистой среде с тремя слоями в периоде в зависимости от параметров слоев мишени и энергии излучающих электронов.

5. Численные расчеты угловой плотности излучения и анализ. Используя полученные выражения для угловых плотностей ПРИ и ДПИ, проведем численные расчеты для определенных параметров мишени и проанализируем результаты вычислений. Рассмотрим излучение релятивистского электрона с Лоренц-фактором $\gamma = 500$, движущегося вдоль оси электронного пучка e_1 , когда $\Psi_{\perp} = 0$, $\Psi_{\parallel} = 0$. Период периодической слоистой среды примем равным $T = a + b + c = 0.002$ мкм, в этом случае отношения толщин слоев a/b и a/c определяют толщины всех слоев. Положим угол Брэгга равным $\theta_B = 2.25^\circ$, который является углом между осью пучка релятивистских электронов и отражающими слоями. В этом случае частота Брэгга принимает значение $\omega_B = 8$ кэВ. Действительную часть диэлектрической восприимчивости второго слоя положим при рассматриваемой частоте излучения как у углерода: $\chi'_b = -2.25 \cdot 10^{-5}$, при этом отношения $\delta'_{ab} = \chi'_a/\chi'_b$, $\delta'_{ac} = \chi'_a/\chi'_c$ будут определять реальные части диэлектрических восприимчивостей первого и третьего слоев. Расчеты выполним для σ -поляризованных волн, когда $s = 1$.

На рис. 2 представлены кривые, построенные по формуле (17), описывающие угловые плотности ПРИ. Кривые построены при различных толщинах мишени L и конкретных параметрах периодической слоистой среды. Угол между системой параллельных атомных плоскостей монокристалла и поверхностью мишени равен $\delta = \pi/40$, в этом случае параметр асимметрии равен $\varepsilon = \sin(\delta + \theta_B)/\sin(\delta - \theta_B) \approx 3$. Из рис. 3 следует рост угловой плотности параметрического рентгеновского излучения при увеличении толщины мишени до некоторого насыщения при толщине $L = 2\mu\text{m}$.

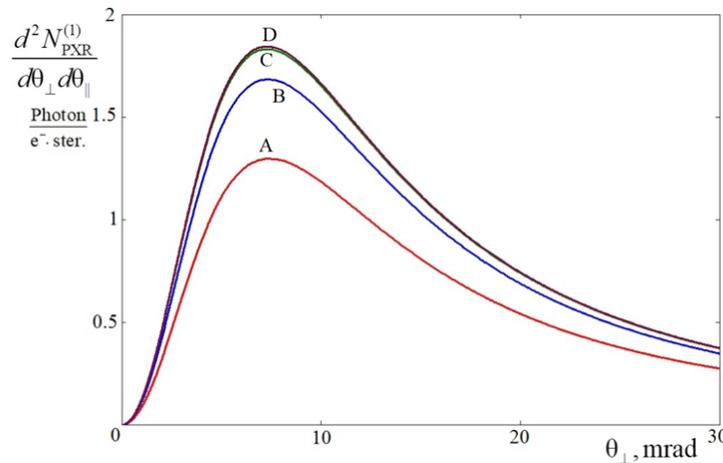


Рис. 2. Угловая плотность ПРИ для различных толщин мишени. Обозначения: А ($L = 0.5\mu\text{m}$), В ($L = 1\mu\text{m}$), С ($L = 2\mu\text{m}$), D ($L = 3\mu\text{m}$). Параметры: $\delta'_{ab} = 2$, $\delta'_{ac} = 0.4$, $a/b = 0.5$, $a/c = 1$, $\rho_a = 0.3$, $\rho_b = 0.1$, $\rho_c = 0.2$

Fig. 2. Angular density of PXR for different target thicknesses. Notation: A ($L = 0.5\mu\text{m}$), B ($L = 1\mu\text{m}$), C ($L = 2\mu\text{m}$), D ($L = 3\mu\text{m}$). Parameters: $\delta'_{ab} = 2$, $\delta'_{ac} = 0.4$, $a/b = 0.5$, $a/c = 1$, $\rho_a = 0.3$, $\rho_b = 0.1$, $\rho_c = 0.2$

Рассмотрим параметр динамического рассеяния $\nu^{(s)}$ (9), который определяет характер интерференции когерентного рентгеновского излучения от трех слоев на периоде слоистой структуры. Подбирая параметры слоев таким образом, чтобы параметр $\nu^{(s)}$ имел как можно большее значение, можно увеличить интенсивность излучения. На рис. 3 представлены кривые, описывающие зависимость параметра $\nu^{(s)}$ от соотношения слоев a/b для различных значений отношений диэлектрических восприимчивостей первого и третьего слоев: $\delta'_{ac} = \chi'_a/\chi'_c$. При этом отношения a/c и $\delta'_{ab} = \chi'_a/\chi'_b$ фиксированы. Из рисунка следует, что при уменьшении δ'_{ac} увеличивается параметр $\nu^{(1)}$. При этом, уменьшая отношение a/b , можно также увеличить интенсивность излучения до некоторого значения, затем следует резкое уменьшение параметра $\nu^{(1)}$.

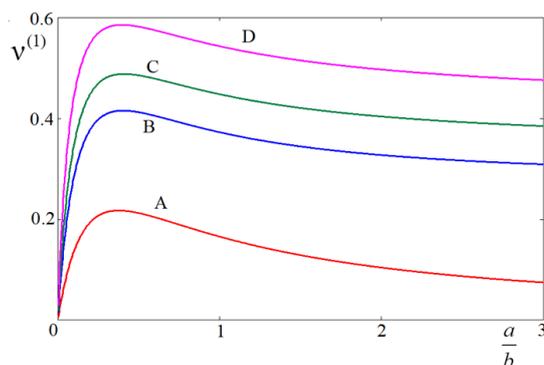


Рис. 3. Зависимость интерференционного параметра динамического рассеяния от соотношения слоев a/b для различных значений отношений $\delta'_{ac} = \chi'_a/\chi'_c$. Обозначения: А ($\delta'_{ac} = 1$), В ($\delta'_{ac} = 0.4$), С ($\delta'_{ac} = 0.3$), D ($\delta'_{ac} = 0.2$).

Параметры: $\delta'_{ab} = 2$, $a/c = 1$

Fig. 3. Dependence of the dynamic scattering interference parameter on the layer ratio a/b for different values of the ratios $\delta'_{ac} = \chi'_a/\chi'_c$. Notation: A ($\delta'_{ac} = 1$), B ($\delta'_{ac} = 0.4$), C ($\delta'_{ac} = 0.3$), D ($\delta'_{ac} = 0.2$). Parameters: $\delta'_{ab} = 2$, $a/c = 1$

На рис. 4 представлены кривые, построенные по формуле (17), описывающие угловые плотности ПРИ для разных значений параметра δ'_{ac} при фиксированных других параметрах. Из рисунка следует, что при уменьшении параметра δ'_{ac} увеличивается угловая плотность ПРИ, так же, как и значения параметра $\nu^{(1)}$ на рис. 3.

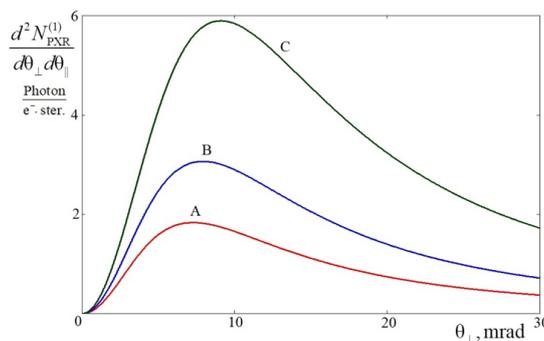


Рис. 4. Угловые плотности ПРИ при различных значениях параметра $\delta'_{ac} = \chi'_a/\chi'_c$. Обозначения: А ($\delta'_{ac} = 0.4$), В ($\delta'_{ac} = 0.3$), С ($\delta'_{ac} = 0.2$). Параметры: $\delta'_{ab} = 2$, $a/b = 0.5$, $a/c = 1$, $\rho_a = 0.3$, $\rho_b = 0.1$, $\rho_c = 0.2$, $L = 2\mu\text{m}$

Fig. 4. Angular densities of the PXR for different values of the parameter $\delta'_{ac} = \chi'_a/\chi'_c$. Notation: A ($\delta'_{ac} = 0.4$), B ($\delta'_{ac} = 0.3$), C ($\delta'_{ac} = 0.2$). Parameters: $\delta'_{ab} = 2$, $a/b = 0.5$, $a/c = 1$, $\rho_a = 0.3$, $\rho_b = 0.1$, $\rho_c = 0.2$, $L = 2\mu\text{m}$

На рис. 5 представлены кривые, описывающие угловые плотности ПРИ для разных значений отношений толщин первого и второго слоев a/b при фиксированных других параметрах. Из рисунка следует, что при уменьшении отношения a/b увеличивается угловая плотность ПРИ.

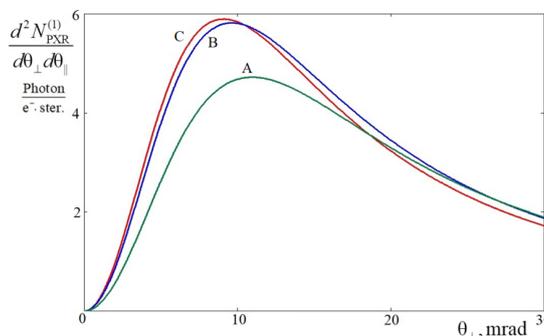


Рис. 5. Угловые плотности ПРИ для различных отношений слоев a/b . Обозначения: А ($a/b = 0.5$), В ($a/b = 0.7$), С ($a/b = 2$). Параметры: $\delta'_{ab} = 2$, $\delta'_{ac} = 0.2$, $a/c = 1$, $\rho_a = 0.3$, $\rho_b = 0.1$, $\rho_c = 0.2$, $L = 2\mu\text{m}$

Fig. 5. Angular densities of the PXR for different layer ratios a/b . Notation: A ($a/b = 0.5$), B ($a/b = 0.7$), C ($a/b = 2$).

Parameters: $\delta'_{ab} = 2$, $\delta'_{ac} = 0.2$, $a/c = 1$, $\rho_a = 0.3$, $\rho_b = 0.1$, $\rho_c = 0.2$, $L = 2\mu\text{m}$

6. Заключение. Развита динамическая теория параметрического рентгеновского излучения релятивистских электронов, пересекающих периодическую слоистую мишень с тремя слоями на периоде в

геометрии рассеяния Лауэ, когда когерентное рентгеновское излучение выходит через заднюю границу мишени в направлении рассеяния Брэгга. Получены выражения, описывающие параметры динамического рассеяния рентгеновского излучения в периодической слоистой среде с тремя слоями в периоде. Показано, что интерференционный параметр динамического рассеяния рентгеновского излучения в периодической слоистой среде существенно зависит от отношения реальных частей диэлектрических восприимчивостей атомов различных слоев мишени, а также от отношения толщин слоев. Получены выражения, описывающие спектрально-угловую и угловую плотности ПРИ. На основе полученных выражений проведены численные расчеты угловой плотности ПРИ. Показано, что угловая плотность ПРИ существенно зависит от отношения значений действительных частей диэлектрических восприимчивостей материалов слоев и отношения толщин слоев.

Список литературы

1. Nasonov N.N., Kaplin V.V., Uglov S.R., Piestrup M.A., Gary C.K. X rays from relativistic electrons in a multilayer structure. *Physical Review E*. 2023;68(3):036504. DOI: 10.1103/PhysRevE.68.036504
2. Garibian G.M., Yang C. Quantum microscopic theory of radiation by a charged particle moving uniformly in a crystal. *Sov. Phys. JETP*. 1972;34:495.
3. Baryshevsky V.G., Feranchuk I.D. Transition radiation of γ -rays in a crystal. *Sov. Phys. JETP*. 1972;34:502.
4. Kaplin V.V., Uglov S.R., Zabaev V.N., Piestrup M.A. Observation of bright monochromatic x rays generated by relativistic electrons passing through a multilayer mirror *Appl. Phys. Lett.* 76. 2000;24:3647-3649. DOI: 10.1063/1.126735
5. Blazhevich S.V., Kolosova I.V., Noskov A.V. Coherent x-ray radiation generated by a relativistic electron in an artificial periodic structure. *J. Exp. Theor. Phys.* 2012;114:547-554. DOI: 10.1134/S1063776112020021
6. Blazhevich S.V., Noskov A.V. Dynamic theory of coherent X-radiation of relativistic electron within a periodic layered medium in Bragg scattering geometry. *Nucl. Instrum. Meth. B*. 2013;309:70-75. DOI: 10.1016/j.nimb.2013.02.035
7. Potylitsyn A. *Electromagnetic Radiation of Electrons in Periodic Structures*. Springer. 2011.216 p. DOI: 10.1007/978-3-642-19248-7
8. Uglov S.R., Kaplin V.V., Kubankin A.S., Andre J.M., Le Guen K., Jonnard Ph., De Rossi S., Meltchakov E., Delmotte F. Cr/Sc multilayer radiator for parametric EUV radiation in "water-window" spectral range. *Journal of Physics:Conference Series*. 2016;732(1):012017. DOI: 10.1088/1742-6596/732/1/012017
9. Shevelev M.V., Uglov S.R., Vukolov A.V. Spectrum of coherent VUV radiation generated by 5.7 MeV electrons in a multilayer X-ray mirror. *Journal of Instrumentation*. 2024;19(4):C04049. DOI: 10.1088/1748-0221/19/04/C04049
10. Huang S., Duan R., Pramanik N., Herrin J.S., Boothroyd C., Liu Z., Wong L.J. Quantum recoil in free-electron interactions with atomic lattices. *Nature Photonics*. 2023;17(3):224-230. DOI: 10.1038/s41566-022-01132-6
11. Huang S., Duan R., Pramanik N., Boothroyd C., Liu Z., Wong L.J. Enhanced Versatility of Table-Top X-Rays from Van der Waals Structures. *Advanced Science*. 2022;9(16):2105401. DOI: 10.1002/advs.202105401
12. Shi X., Kurman Y., Shentcis M., Wong L.J., Garcia J.F., Kaminer I. Free-electron interactions with van der Waals heterostructures: a source of focused X-ray radiation. *Light Sci Appl*. 2023;12(1):148. DOI: 10.1038/s41377-023-01141-2
13. Blazhevich S.V., Noskov A.V. Coherent X-ray Radiation Generated by a Relativistic Electron Beam in a Periodic Layered Medium in the Bragg Scattering Geometry. *Journal of Experimental and Theoretical Physics*. 2017;125(2):223-234. DOI: 10.1134/S1063776117070172
14. Blazhevich S.V., Drygina Yu.A., Shevchuk O.Yu., Noskov A.V. Coherent X-Ray Radiation Generated Near the Axis of the Beam of Relativistic Electrons in an Artificial Periodic Structure. *Journal of Surface Investigation: X-ray, Synchrotron and Neutron Techniques*. 2020;14(3):586-595. DOI: 10.1134/S1027451020030222
15. Носков А.В., Бондаренко В.А., Блажевич С.В., Юрьева А.А., Федосеев А.Э. О влиянии многократного рассеяния на переходное излучение в монокристалле. *Прикладная математика & Физика*. 2023;55(2): 183-192. DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-2-183-192
16. Носков А.В., Киперша В.К., Блажевич С.В., Плесканев А.А., Ильинский Р.Ю., Волошкина Е.В. Спектрально-угловые плотности переходного излучения и дифрагированного переходного излучения релятивистских электронов в периодической слоистой среде. *Прикладная математика & Физика*. 2024;56(1):66-74. DOI 10.52575/2687-0959-2024-56-1-66-74
17. Noskov A.V., Blazhevich S.V. Coherent X-ray radiation excited by a relativistic electron in a periodic layered medium. *Journal of Instrumentation*. 2024;19(7):P07007. DOI: 10.1088/1748-0221/19/07/P07007
18. Noskov A.V., Blazhevich S.V. Effects of dynamic diffraction in coherent X-ray radiation from a beam of relativistic electrons in a periodic layered medium with three layers in a period. *Physics Letters A*. 2024;525:129835. DOI: 10.1016/j.physleta.2024.129835
19. Носков А.В., Блажевич С.В., Чуева А.И., Мачукаев Д.Д., Киперша В.К. Влияние асимметрической дифракции на спектрально-угловую плотность КРИ релятивистского электрона в трехслойной структуре. *Прикладная математика & Физика*. 2025;57(1):59-67. DOI 10.52575/2687-0959-2025-57-1-59-67

20. Носков А.В., Мачукаев Д.Д., Киперша В.К., Пугина П.Д., Пирматова М.Д. Влияние расходимости электронного пучка на КРИ в периодической слоистой среде с тремя слоями на периоде. Прикладная математика & Физика. 2025;57(4):279-289. DOI 10.52575/2687-0959-2025-57-4-279-289

References

1. Nasonov NN., Kaplin VV., Uglov SR., Piestrup MA., Gary CK. X rays from relativistic electrons in a multilayer structure. *Physical Review E*. 2023;68(3):036504. DOI: 10.1103/PhysRevE.68.036504
2. Garibian GM., Yang C. Quantum microscopic theory of radiation by a charged particle moving uniformly in a crystal. *ZHurnal Eksperimental'noj i Teoreticheskoy Fiziki* [Journal of Experimental and Theoretical Physics]. JETP. 1972;34(3):495.
3. Baryshevsky VG., Feranchuk ID. Transition radiation of γ -rays in a crystal. *ZHurnal Eksperimental'noj i Teoreticheskoy Fiziki* [Journal of Experimental and Theoretical Physics]. 1972;34(3):502.
4. Kaplin VV., Uglov SR., Zabaev VN., Piestrup MA. Observation of bright monochromatic x rays generated by relativistic electrons passing through a multilayer mirror *Appl. Phys. Lett.* 76. 2000;24:3647-3649. DOI: 10.1063/1.126735
5. Blazhevich SV., Kolosova IV., Noskov AV. Coherent x-ray radiation generated by a relativistic electron in an artificial periodic structure. *ZHurnal Eksperimental'noj i Teoreticheskoy Fiziki* [Journal of Experimental and Theoretical Physics]. 2012;141(4):547-554 (In Russian). DOI: 10.1134/S1063776112020021
6. Blazhevich SV., Noskov AV. Dynamic theory of coherent X-radiation of relativistic electron within a periodic layered medium in Bragg scattering geometry. *Nucl. Instrum. Meth. B*. 2013;309:70-75. DOI: 10.1016/j.nimb.2013.02.035
7. Potylitsyn A. *Electromagnetic Radiation of Electrons in Periodic Structures*. Springer. 2011.216 p. DOI: 10.1007/978-3-642-19248-7
8. Uglov SR., Kaplin VV., Kubankin AS., Andre JM., Le Guen K., Jonnard Ph., De Rossi S., Meltchakov E., Delmotte F. Cr/Sc multilayer radiator for parametric EUV radiation in “water-window” spectral range. *Journal of Physics: Conference Series*. 2016;732(1):012017. DOI: 10.1088/1742-6596/732/1/012017
9. Shevelev MV., Uglov SR., Vukolov AV. Spectrum of coherent VUV radiation generated by 5.7 MeV electrons in a multilayer X-ray mirror. *Journal of Instrumentation*. 2024;19(4):C04049. DOI: 10.1088/1748-0221/19/04/C04049
10. Huang S., Duan R., Pramanik N., Herrin JS., Boothroyd C., Liu Z., Wong LJ. Quantum recoil in free-electron interactions with atomic lattices. *Nature Photonics*. 2023;17(3):224-230. DOI: 10.1038/s41566-022-01132-6
11. Huang S., Duan R., Pramanik N., Boothroyd C., Liu Z., Wong LJ. Enhanced Versatility of Table-Top X-Rays from Van der Waals Structures. *Advanced Science*. 2022;9(16):2105401. DOI: 10.1002/advs.202105401
12. Shi X., Kurman Y., Shentcis M., Wong LJ., Garcia JF., Kaminer I. Free-electron interactions with van der Waals heterostructures: a source of focused X-ray radiation. *Light Sci Appl*. 2023;12(1):148. DOI: 10.1038/s41377-023-01141-2
13. Blazhevich SV., Noskov AV. Coherent X-ray Radiation Generated by a Relativistic Electron Beam in a Periodic Layered Medium in the Bragg Scattering Geometry. *ZHurnal Eksperimental'noj i Teoreticheskoy Fiziki* [Journal of Experimental and Theoretical Physics]. 2017;152(2):223–234 (In Russian). DOI: 10.1134/S1063776117070172
14. Blazhevich SV., Drygina YuA., Shevchuk OYu., Noskov AV. Coherent X-Ray Radiation Generated Near the Axis of the Beam of Relativistic Electrons in an Artificial Periodic Structure. *Poverhnost'. Rentgenovskie, sinhrotronnye i nejtronnye issledovaniya* [Journal of Surface Investigation: X-ray, Synchrotron and Neutron Techniques]. 2020;14(3):586-595 (In Russian). DOI: 10.1134/S1027451020030222
15. Noskov AV., Bondarenko VA., Blazhevich SV., Yuryeva AA., Fedoseev AE. On the influence of multiple scattering on transition radiation in a single crystal. *Prikladnaya matematika & Fizika* [Applied Mathematics & Physics]. 2023;55(2):183–192 (In Russ.). DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-2-183-192
16. Noskov AV., Kipersha VK., Blazhevich SV., Pleskaneev AA., Ilyinsky RYu., Voloshkina EV. Spectral-angular densities of transition radiation and diffracted transition radiation of relativistic electrons in a periodic layered medium. *Prikladnaya matematika & Fizika* [Applied Mathematics & Physics]. 2024;56(1):66-74 (In Russ.). DOI 10.52575/2687-0959-2024-56-1-66-74
17. Noskov AV., Blazhevich SV. Coherent X-ray radiation excited by a relativistic electron in a periodic layered medium. *Journal of Instrumentation*. 2024;19(7):P07007. DOI: 10.1088/1748-0221/19/07/P07007
18. Noskov AV., Blazhevich SV. Effects of dynamic diffraction in coherent X-ray radiation from a beam of relativistic electrons in a periodic layered medium with three layers in a period. *Physics Letters A*. 2024;525:129835. DOI: 10.1016/j.physleta.2024.129835
19. Noskov AV., Blazhevich SV., Chueva AI., Machukaev DD., Kipersha VK. The influence of asymmetric diffraction on the spectral-angular density of the CRI of a relativistic electron in a three-layer structure. *Prikladnaya matematika & Fizika* [Applied Mathematics & Physics]. 2025;57(1):59-67 (In Russ.). DOI 10.52575/2687-0959-2025-57-1-59-67
20. Noskov AV., Machukaev DD., Kipersha VK., Pugin PD., Pirmatova MD. The influence of electron beam divergence on the CXR in a periodic layered medium with three layers per period. *Prikladnaya matematika & Fizika* [Applied Mathematics & Physics]. 2025;57(4):279–289 (In Russ.). DOI 10.52575/2687-0959-2025-57-4-279-289

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 29.12.2025

Received December 29, 2025

Поступила после рецензирования 13.02.2026

Revised February 13, 2026

Принята к публикации 16.02.2026

Accepted February 16, 2026

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Носков Антон Валериевич – доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой физики, Московский технический университет связи и информатики, г. Москва, Россия

Пирматова Мария Дмитриевна – студентка факультета «Информационные технологии», Московский технический университет связи и информатики, г. Москва, Россия

Мачукаев Дени Даудович – аспирант кафедры теоретической и прикладной химии, Белгородский государственный технологический университет им. В. Г. Шухова, г. Белгород, Россия

Бардакова Ирина Николаевна – аспирант кафедры теоретической и экспериментальной физики, Белгородский государственный национальный исследовательский университет, г. Белгород, Россия

Блажевич Сергей Владимирович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической и экспериментальной физики, Белгородский государственный национальный исследовательский университет, г. Белгород, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Anton V. Noskov – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Head of the Department of Physics, Moscow Technical University of Communications and Informatics, Moscow, Russia

Maria D. Pirmatova – Student of the Faculty of Information Technology, Moscow Technical University of Communications and Informatics, Moscow, Russia

Deni D. Machukaev – Graduate Student of the Department of Theoretical and Applied Chemistry, Belgorod State Shukhov's Technological University, Belgorod, Russia

Irina N. Bardakova – Graduate Student of the Department of Theoretical and Experimental Physics, Belgorod National Research University, Belgorod, Russia

Sergey V. Blazhevich – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Department of Theoretical and Experimental Physics, Belgorod National Research University, Belgorod, Russia

[К содержанию](#)