

Кластерное разложение вероятности перколяции на дереве Кэйли

Вирченко Ю. П.[✉], Пашкова В. С.[✉]

Белгородский государственный технологический университет им. В. Г. Шухова,
Россия, 308000, г. Белгород, ул.Костюкова, 46
virch@bsuedu.ru

Аннотация. Изучается однородное бернуlliевское случайное поле на бесконечном однородном графе типа дерева Кэйли со степенью вершин $s = 3$. Для вероятности перколяции $P(c)$ случайного поля на бесконечность из фиксированной вершины графа, которая является функцией от вероятности c заполнения вершин, строится кластерное разложение. Находятся гарантированные оценки точности ее аппроксимаций посредством частичных сумм разложения и показывается, что это разложение сходится всюду при $c \in (0, 1)$ так, что порог перколяции c_* не является особой точкой с точки зрения сходимости разложения.

Ключевые слова: бернуlliевское случайное поле, марковская цепь с ветвлением, надкритический режим, порог перколяции, кластерное разложение

Для цитирования: Вирченко Ю.П., Пашкова В. С. Кластерное разложение вероятности перколяции на дереве Кэйли. *Прикладная математика & Физика*. 2025;57(4):298–305. DOI 10.52575/2687-0959-2025-57-4-298-305 EDN YCXVFM

Original Research

Cluster Expansion of the Percolation Probability on a Caley Tree

Yuri P. Virchenko[✉], Valery S. Pashkova[✉]

Belgorod State Technological University named after V. G. Shukhov,
46 Kostyкова St., Belgorod 308012, Russia
virch@bsuedu.ru

Abstract. The Bernoulli uniform random field on the infinite uniform Caley tree with the vertex degree $s = 3$ is investigated. For this graph, the percolation probability $P(c)$ of the random field from a marked graph vertex to infinity is studied, where it is a function on the vertex filling c . The famous cluster decomposition of the function $P(c)$ is constructed for the graph. Some guaranteed estimates of the accuracy of its approximations are found when they are built by means of partial sums of the decomposition. It is shown that the decomposition converges everywhere in $(0, 1)$ such that the percolation threshold c_* is not a special point from the decomposition convergence viewpoint.

Keywords: Bernoulli's Random Field, Branching Markov Chain, Supercritical Regime, Percolation Threshold, Cluster Expansion

For citation: Virchenko YuP., Pashkova VS. Cluster Expansion of the Percolation Probability on a Caley Tree. *Applied Mathematics & Physics*. 2025;57(4):298–305 (In Russ.). DOI 10.52575/2687-0959-2025-57-4-298-305 EDN YCXVFM

1. Введение. Возникшая в статистической физике, в процессе математического моделирования неупорядоченных сред [1], [2], [3] теория перколяции представляет, в настоящее время, направление исследований, находящееся на стыке между теорией вероятностей и математической физикой или, более общо, математического моделирования. В этой теории разработан адекватный математический язык, позволяющий, в частности, математически описывать на его основе среды со всем возможными случайными нарушениями пространственно упорядоченной внутренней структуры и сформулировать на этом языке математические задачи, направленные на вычисление физических характеристик таких сред, которые связаны только лишь с их стохастической геометрией. Одной из самых важных из таких характеристик является вероятность перколяции P , которая описывает количественно физический эффект перколяции (просачивания), то есть способность среды, опираясь на какое-то понятие пространственной связности элементов, из которых она состоит, устанавливать связи между элементами, удаленными на большие расстояния. Само понятие связности определяется, конечно же, в соответствии с конкретными физическими свойствами изучаемой среды. Эффект перколяции, в частности, заключается в том, что связность между удаленными элементами среды может исчезать и появляться в процессе изменения параметров изучаемой физической системы. Вероятность же перколяции, в этом случае, является функцией этих параметров. Она может, в соответствии со сказанным, обращаться в нуль или принимает ненулевые значения при прохождении параметров системы каких-то пороговых значений.

Несмотря на успехи на начальной стадии развития теории перколяции, которые были связаны, главным образом, с компьютерными экспериментами в простейшей, с математической точки зрения,

ситуации, случайное состояние среды допускало математическое моделирование на основе точечного бернуллиевского случайного поля $\{\tilde{\rho}(x); x \in V\}$ на некотором бесконечном графе $\langle V, \Phi \rangle$ со счетным множеством вершин V и бинарным отношением смежности Φ . Такое допущение возможно в том случае, когда состояние системы можно охарактеризовать одним параметром $c \in (0, 1)$, который, для любой вершины графа $x \in V$, имеет смысл вероятности события $\{\tilde{\rho}(x) = 1\}$. В описанной ситуации вероятность перколяции из этой вершины на сколь угодно большое удаление от нее является функцией $P(c)$ только одного этого параметра. Эффект перколяции состоит в том, что интервал $(0, 1)$ изменения параметра c разбивается на полуинтервал $(0, c_*]$, где $P(c) = 0$ и интервал $(c_*, 1)$, в котором $P(c) > 0$.

Для моделей теории перколяции, связанных с бернуллиевскими случайными полями на довольно простых бесконечных периодических графах (см., например, [4]), удалось численно определить пороги c_* перколяции, используя метод Монте-Карло, то есть на основе обработки статистических данных, получаемых посредством компьютерных датчиков случайных чисел. В некоторых совершенно простых случаях удалось вычислить пороги перколяции точно. Однако, что касается развития аналитических результатов в математической теории перколяции, то, в настоящее время, здесь поставлено гораздо больше непростых вопросов, чем полученных математически обоснованных результатов (см., например, [4], [5]). В частности, это утверждение относится к задаче вычисления вероятности перколяции $P(c)$ для бернуллиевского случайного поля на периодических графах. Основным аналитическим инструментом при решении этой задачи является т. н. кластерное разложение. Несмотря на то, что, посредством несложных вероятностных рассуждений легко устанавливается сходимость этого разложения на полуинтервале $(c_*, 1]$, вместе с тем точность получаемых на его основе аппроксимаций перколяции $P(c)$ удается оценивать очень грубо на основе оценки сверху решения комбинаторной задачи о числе конечных кластеров с заданной мерой их границы. Грубость этих оценок заключается в том, что их область сходимости составляет такой полуинтервал значений $(c_+, 1]$, для которого точка c_+ , как правило, существенно превосходит c_* . Различные попытки изменения оценок такого рода (см., например, [6]–[8]) приводили лишь к незначительным улучшениям. В этой связи возникает естественный вопрос, а возможно ли, в принципе, решение задачи о вычислении вероятности перколяции $P(c)$ в окрестности точки c_* посредством последовательных приближений на основе кластерного разложения с гарантированными оценками точности. Результат, полученный в настоящей работе, дает некоторую надежду на положительный ответ.

2. Постановка задачи. Неориентированный граф Γ представляет собой пару $\langle V, \Phi \rangle$, в которой V – множество, элементы которого называются *вершинами*, а Φ – множество парных множеств с элементами из V , которые называются *ребрами*, связывающими вершины, входящие в эти множества. Множество Φ называется отношением смежности на графе. Вершины графов мы будем обозначать посредством букв латинского алфавита x, y, z, u, v, w , а факт смежности пары $\{x, y\}$, то есть ее принадлежности к Φ будем записывать как $\varphi(x, y)$.

Путем $\gamma(x, y)$ с начальной вершиной x и конечной – y называется последовательность $\langle x = x_0, x_1, \dots, x_n = y \rangle = \gamma(x, y)$ длины $n + 1$, в которой имеет место $\varphi(x_{j-1}, x_j)$, $j = 1 \div n$. Длину пути $\gamma(x, y)$ будем обозначать посредством $|\gamma(x, y)|$. Далее, говоря о путях на графике, мы будем всегда предполагать, что они обладают свойством невозвратности, то есть $x_{j+1} \neq x_{j-1}$, $j \in I_{n-1}$ для любой длины n .

Пара $\{x, y\}$ вершин графа называется *связанной*, если на графике существует путь $\gamma(x, y)$. Если пара вершин связана на Γ , то мы будем этот факт записывать в виде $\psi(x, y)$. Бинарное отношение ψ является очевидным образом, симметричным. Оно также является рефлексивным, если установить, по определению, что на графике Γ всегда существуют пути $\gamma(x, x)$ нулевой длины для любой вершины $x \in V$. Несложно доказывается, что отношение ψ является транзитивным, то есть для любых трех вершин x, y, z из $\psi(x, y)$ и $\psi(y, z)$ следует, что имеет место $\psi(x, z)$. Таким образом, отношение ψ является *отношением эквивалентности*. Оно разбивает все множество V вершин на непересекающиеся множества эквивалентных друг другу вершин. Они называются *связными компонентами* графа Γ . Граф называется *связным*, если он состоит только из одной связной компоненты.

Пусть Γ – бесконечный связный график со множеством вершин V со счетной мощностью. Степенью вершины x графа будем называть число $s \in \mathbb{N}$, определяемое как число элементов в множестве $\{y \in V : \varphi(x, y)\}$.

Путь $\langle x = x_0, x_1, \dots, x_n = y \rangle = \gamma(x, y)$ длины n на графике называется *несамопересекающимся*, если $x_j \neq x_k$ для любой пары $\{j, k\} \in I_n \cup \{0\}$, $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$. Класс всех несамопересекающихся путей на графике Γ обозначим посредством \mathcal{G} . Расстоянием между двумя вершинами x и y на графике называется число

$$r(x, y) = \min\{|\gamma(x, y)|; \gamma(x, y) \in \mathcal{G}\}.$$

Связный график Γ называется *древесным*, если на нем все пути являются несамопересекающимися.

Определение 2.1. Деревом Кэйли степени s называется *древесный график*, у которого степени всех вершин совпадают и равны s .

Очевидно, что дерево Кэйли полностью характеризуется указанием степени своих вершин, которая принимает значения $s \geq 2$. При $s = 2$ дерево Кэйли не представляет интереса с точки зрения теории переколии, так как для него $P(c) = 0$ при $c \neq 1$. В этой работе мы будем рассматривать дерево Кэйли степени $s = 3$.

Пусть на графе Γ , который, в соответствии со сказанным, является деревом Кэйли со степенью 3, задано однородное бернульевское случайное поле $\{\rho(x) \in \{0, 1\}; x \in V\}$. Его распределение вероятностей полностью определяется условием статистической независимости всех случайных величин $\rho(x)$, $x \in V$ и значением вероятности $\Pr\{\rho(x) = 1\} = c \in (0, 1)$.

Каждая случайная реализация $\tilde{\rho}$ поля определяет подграф $\Gamma[\rho] = \langle V(\rho), \Phi(\rho) \rangle$ с множеством вершин $V(\rho) = \{x : \rho(x) = 1\}$ и определяемым наследственным образом отношением смежности. Этот подграф уже не является, в общем случае, связанным. Его связные компоненты W называются *кластерами*. Пусть $\mathcal{W}(\rho)$ – класс всех кластеров графа $\Gamma(\rho)$. Число вершин в кластере W , если таких вершин конечное множество, будем обозначать посредством $|W|$. Если же это множество бесконечно, то будем писать $|W| = \infty$, а кластер будем называть *бесконечным*.

Отметим на графике Γ какую-либо из вершин, которую будем называть начальной и отмечать посредством **0**. Если эта вершина принадлежит бесконечному кластеру, то будем говорить, что из этой вершины имеется переколия. Наличие переколии из вершины **0** эквивалентно тому, что имеется бесконечный несамопересекающийся путь $\gamma(0)$. Функция $P(c)$, о которой шла речь во введении, определяется как вероятность $P(c) = \Pr\{\exists(\gamma(x) : |\gamma(x)| = \infty)\}$. Если при данном значении $c \in (0, 1)$ вероятность $P(c)$ того, что случайные реализации ρ обладают переколией, положительна, то говорят, что при этом значении c имеется переколия на графике Γ . Задача состоит в том, чтобы определить для графа Γ множество значений c , которые обладают таким свойством.

Лемма 2.1. *Вероятность $P(c)$ переколии на дереве Кэйли не зависит от $x \in V$.*

Доказательство. Ввиду постоянства степеней всех вершин для графа Γ и отсутствия в нем самопересекающихся путей возможно ввести следующее преобразование T трансляции. Оно определяется индуктивно для каждой вершины, согласно ее расстоянию от вершины **0**. Выберем одну из вершин $R_1 = \{e_j; j \in \{1, 2, 3\}\}$, смежных с вершиной **0**, например e_1 , и положим $T0 = e_1$. Вершина e_1 имеет три смежных вершины. Обозначим множество этих вершин посредством R'_1 (оно содержит вершину **0**). Установим каким-то образом биекцию множества R_1 на множество R'_1 . Далее, рассмотрим множество из шести вершин, находящихся на расстоянии 2 от вершины **0**. Установим биекцию этого множества на множество R'_2 вершин, находящихся на расстоянии 2 от вершины e_1 . Причем эту биекцию можно сделать так, что каждая пара вершин, смежных с вершиной e_j , $j \in \{1, 2, 3\}$ из R_1 , перейдет в пару вершин, смежных с образом Te_j в R'_1 . Такую биекцию можно всегда построить, так как на рассматриваемом графике – дереве Кэйли со степенью 3 не имеется самопересекающихся путей, и поэтому при выборе вершин множества R'_2 используются вершины, которые не рассматривались на предыдущем шаге.

Продолжим процесс построения, рассматривая последовательно множества R_m всех вершин, находящихся на расстояниях m от вершины **0**. Они состоят, соответственно, из $3 \cdot 2^{m-1}$ вершин. Эти множества отображаются биективно, соответственно, в множества R'_m вершин, находящихся на расстоянии m от вершины e_1 , $m = 1, 2, \dots, n$, которые содержат точно такое же количество вершин. При этом каждое из множеств R'_m состоит из вершин, которые не использовались на предыдущих шагах построения. Рассуждая по индукции, определим биекцию множества R_{n+1} , состоящего из $3 \cdot 2^n$ вершин, находящихся на расстоянии $n+1$ от вершины **0**, на множество R'_{n+1} , которое состоит из такого же количества вершин, которые находятся на расстоянии $n+1$ от вершины e_1 . При этом биекция может быть определена так, что она отображает каждую пару вершин из R_{n+1} , смежных с какой-то вершиной $x \in R_n$, в пару вершин из R'_{n+1} , смежных с вершиной Tx . Это возможно в силу того, что степень вершин графа равна 3, и того, что в множестве R'_{n+1} входят вершины графа, которые не рассматривались на предыдущих шагах построения.

Продолжая описанный процесс построения неограниченно, увеличивая расстояние n до вершины **0**, определим полностью требуемое отображение T . Так вероятность $\Pr\{\rho(x) = c\}$ не зависит от x , то распределения вероятностей на графах Γ и $T\Gamma$ совпадают. Поэтому вероятность переколии из вершины **0** на исходном графике Γ совпадает с вероятностью переколии из вершины **0** на графике $T\Gamma$. ■

3. Кластерное разложение. Задача о вычислении вероятности переколии на дереве Кэйли Γ со степенью $s = 3$ решается точно так, что функция $P(c)$ выражается в виде элементарной функции. В самом деле, представим график Γ в виде склейки трех подграфов Γ_j , $j = 1, 2, 3$ с общей вершиной **0**. Множествами вершин каждого подграфа с фиксированным значением $j \in \{1, 2, 3\}$ являются $V_j \cup \{0\}$, где V_j – множество всех вершин, до которых можно добраться из начальной вершины **0** по пути с начальным ребром $\langle 0, x_j \rangle$. Ребра подграфа Γ_j состоят из всех ребер, инцидентных вершинам из V_j .

Пусть $Q(c)$ – условная вероятность того, что пересечение бесконечного кластера W , в котором расположены бесконечный путь, реализующий переколию, с множеством V_j вершин подграфа Γ_j , конечно, при условии, что $\{\tilde{\rho}(0) = 1\}$. Тогда, вследствие статистической независимости случайного поля на множествах вершин V_j каждого из подграфов Γ_j , $j \in \{1, 2, 3\}$, вероятность $P(c)$ равна $(1 - Q^3(c))$, так как,

в случае существования перколяции с ненулевой вероятностью на графе Γ , она должна существовать, с ненулевой вероятностью, по крайней мере, на каком-нибудь из подграфов Γ_j , $j \in \{1, 2, 3\}$. Таким образом, нужно вычислить вероятность $Q(c)$.

Точно так же рассуждая, находим, что условная вероятность перколяции из вершины e_j при условии, что $\rho(e_j) = 1$ равна $Q^2(c)$, так как подграф Γ_j представляется в виде склейки по вершине e_j двух изоморфных ему подграфов $\Gamma_{j,1}$ и $\Gamma_{j,2}$, $j \in \{1, 2, 3\}$.

Так как случайное событие, состоящее в отсутствии перколяции из вершины e_j на графе Γ_j , складывается из суммы двух несовместимых событий: $\{\rho(e_j) = 0\}$ и

$$\{\rho(e_j) = 1, \exists \{\gamma(e_j) : |\gamma(e_j)| = \infty, \{\gamma(e_j)\} \subset V_j\}\},$$

то вероятность $Q(c)$ подчинена квадратному уравнению

$$Q(c) = 1 - c + cQ^2(c). \quad (1)$$

При $c \leq 1/2$ это уравнение имеет единственное решение $Q(c) = 1$, удовлетворяющее условию $0 \leq Q(c) \leq 1$, а при $c > 1/2$, кроме этого решения, имеется еще одно $Q(c) = (1 - c)/c$, так как только в этом случае $(1 - c)/c \leq 1$.

Сформулируем доказанное утверждение в виде отдельной теоремы.

Теорема 2.1. Вероятность перколяции на дереве Кэйли со степенью $s = 3$ имеет вид $P(c) = c(1 - Q(c))^3$, где функция $Q(c)$ подчинена уравнению (1), которое при $c > 1/2$ имеет два решения $Q(c) = 1$ и $Q(c) = (1 - c)/c$.

Очевидно, что порогом перколяции у рассматриваемой модели является значение $c_* = 1/2$. Однако для установления этого факта нужно указать, что при $c > 1/2$ из двух возможных решений уравнения (1) необходимо выбирать функцию $(1 - c)/c$. Но для этого требуются соображения, связанные с непрерывностью функции $Q(c)$. Однако нас в этой работе интересует не само решение, которое находится элементарными методами, а то, как быстро сходится к истинному решению $Q(c)$ уравнения (1) кластерное разложение, формируемое посредством вероятностных соображений.

Пусть $\Gamma = \langle V, \Phi \rangle$ – связный граф и $\{\rho(x); x \in V\}$ – бернуlliевское случайное поле на V с вероятностью заполнения вершин $\Pr\{\rho(x) = 1\} = c$, $x \in V$. Пусть \mathcal{W}_0 – класс всех конечных кластеров на графе Γ , содержащих вершину 0 . Каждой реализации случайного поля ρ соответствует класс $\mathcal{W}(\rho)$ кластеров.

Так как событие $\{\rho(x) = 1\}$ реализуется в тех случаях, когда эта вершина x содержится в каком-то однозначно определяемом конечном кластере W , либо она содержится в бесконечном кластере и поэтому существует несамопересекающийся бесконечный путь γ с началом в этой вершине, то это событие представимо в виде дизъюнктивного разложения

$$\{\rho(x) = 1\} = \left(\bigcup_{W \in \mathcal{W}_0} \{W \ni x : W \in \mathcal{W}(\rho)\} \right) \cup \{W \ni x : \exists (\gamma(x) : |\gamma(x)| = \infty, \{\gamma(x)\} \subset W \in \mathcal{W}(\rho))\}.$$

Следовательно, имеет место разложение

$$c = \sum_{W \ni x : W \in \mathcal{W}_0} P[x; W] + P(c), \quad (2)$$

где

$$P[x; W] = \Pr\{W \ni x : W \in \mathcal{W}(\rho)\}$$

есть вероятность того, что вершина x принадлежит конечному кластеру, который содержится в классе $\mathcal{W}(\rho)$ всех конечных кластеров, порождаемых случайной реализацией ρ . Из разложения (2) следует, что вероятность перколяции $P(c)$ представима в виде

$$P(c) = c - \sum_{W \ni 0 : W \in \mathcal{W}_0} P[0; W]. \quad (3)$$

Представление вероятности перколяции из вершины 0 мы будем называть ее *кластерным разложением*. Сумма в правой части (3) заведомо сходится при любом значении c , так как $P(c) \geq 0$. Нашей целью является установление того, с какой скоростью реализуется сходимость этого ряда и тем самым найти гарантированные оценки точности аппроксимаций вероятности $P(c)$ посредством его частичных сумм.

4. Перколяция на Γ и марковские цепи с марковским измельчением. Применим для оценки вероятностей $P[0; W]$ представления теории марковских цепей с марковским измельчением.

Сконструируем древесный граф Γ'_1 с начальной вершиной e_1 такой, что его склейка с ребром $\{0, e_1\}$ в этой вершине представляет введенный выше граф Γ_1 . Представим множество вершин V' графа Γ'_1 в виде дизъюнктивного разложения

$$V' = \bigcup_{m=0}^{\infty} V_m, \quad V_0 = \{e_1\}$$

где V_m – множество вершин в m -го поколения, определяемые индуктивно как $V_{m+1} = V_m \times I_2$, $I_2 = \{1, 2\}$, то есть $V_m = I_2^m$ при $m \in \mathbb{N}$. Вершины множества V_m обозначим метками в виде $\langle j_1, \dots, j_m \rangle$ последовательностей длины m , в которых $j_k \in \{1, 2\}$, $k \in \{1, 2, \dots, m\}$. Причем отношение смежности на графе Γ'_1 строится указанием при каждом $m = 0, 1, 2, \dots$ смежных пар $\{\langle j_1, \dots, j_m \rangle, \langle j_1, \dots, j_m, j_{m+1} \rangle\}$, $j_{m+1} \in \{1, 2\}$ для каждой вершины, описываемой последовательностью $\langle j_1, \dots, j_m \rangle$.

Сопоставим бернульевскому случайному полю $\{\rho(x); x \in V'\}$ специальный случайный процесс $\{S_m; m \in \mathbb{N}_+\}$ с дискретным временем $m \in \mathbb{N}_+$. Он является марковской цепью общего вида [9]. При каждом значении m состояние процесса S_m является подмножеством в V_m , $S_m \subset V_m$. Таким образом, конструируемый случайный процесс обладает изменяющимся пространством состояний.

Пусть W – случайное множество на V' такое, что $W = \{x \in V' : \tilde{\rho}(x) = 1\}$. Тогда S_m является множеством заполненных узлов в m -м поколении, $S_m = W \cap V_m$. Для фиксированного $S_m \subset V_m$ множество $S_m \times I_2 \subset V_{m+1}$ содержит множество S_{m+1} заполненных вершин случайной реализации W в следующем поколении. Таким образом, траекториями случайного процесса являются последовательности $\langle S_0 = V_0, S_1, S_2, \dots, S_m, \dots \rangle$, где $S_{m+1} \subset S_m \times I_2$. Определим для них операцию проектирования $\text{pr}[S_{m+1}] = S_m$, $m \in \mathbb{N}_+$. Если на графике имеется переколяция, то последовательность множеств $\langle S_0 = V_0, S_1, S_2, \dots, S_m, \dots \rangle$ бесконечна и, наоборот, траектория случайного процесса обрывается в какой-то момент времени, если на случайной реализации W не существует какого-либо бесконечного пути $y(\mathbf{e}_1)$, то есть вершина \mathbf{e}_1 принадлежит конечному кластеру.

Обозначим посредством $P_m[S]$ вероятность события, которое состоит в том, что в момент m траектория случайного процесса будет находиться в состоянии $S \subset V_m$. Тогда $\Pr\{\tilde{\rho}(x) = 1\} = c$ и поэтому $P_0[\mathbf{e}_1] = c$. Кроме того, $P_1[S] = c^{|S|}(1-c)^{2^{|S|}-|S|}$, $S \subset I_2 = V_1$. Так как случайное поле на графике Γ'_1 бернульевское и график Γ'_1 древесный, то при $m > 1$ вероятности $P_m[\cdot]$ вычисляются на основе следующего рекуррентного соотношения

$$P_{m+1}[S'] = \Pr\{\tilde{S}_{m+1} = S'\} = P_m[S]c^{|S'|}(1-c)^{2^{|S|}-|S'|}, \quad (4)$$

где $\text{pr}[S'] = S$, а, в противном случае, если между множествами $S \subset V_m$ и $S' \subset V_{m+1}$ такая связь отсутствует, то $P_{m+1}[S'] = 0$. Это означает, что конструируемый случайный процесс с дискретным временем является марковским. Такого типа случайные процессы были введены при конструировании *случайных множеств фрактального типа*, обладающих дробной размерностью Хаусдорфа-Безиковича (см. [10], [11]). Для их обозначения мы используем термин *марковские цепи с марковским измельчением*. Они связаны с ветвящимися марковскими процессами [12].

Используя уравнение связи (4), получаем, что справедливо следующее утверждение.

Теорема 4.1. *Вероятность $P_n(S|0, S-1, \dots, S_{n-1})$ того, что случайный процесс $\{S_m \in V_m; m \in \mathbb{N}_+\}$ вплоть до момента $n \in \mathbb{N}$ обладает траекторией $\langle S_m \in V_m; m \in \{0, 1, \dots, n-1\}; S_n = S \rangle$, у которой $S_j \neq \emptyset$, $S_j \subset S_{j-1} \times I_2$, $j = 0 \div n$, равна*

$$P_n(S|0, S_1, \dots, S_{n-1}) = c^{|S_1|+1}(1-c)^{2^{-|S_1|}}c^{|S_2|}(1-c)^{2^{|S_1|}-|S_2|}\dots c^{|S|}(1-c)^{2^{|S_{n-1}|}-|S|}. \quad (5)$$

5. Оценка точности частичных сумм кластерного разложения. Обозначим посредством P_n вероятность того, что траектория случайного процесса $\{S_m; m \in \mathbb{N}_+\}$, сопоставленного бернульевскому случайному полю на графике Γ'_1 , конечна и обрывается на n -м шаге, то есть $S_{n+1} = \emptyset$, $S_n \neq \emptyset$. Тогда вероятность $Q(c)$ отсутствия переколяции на графике Γ_1 выражается в виде ряда

$$Q(c) = 1 - c + \sum_{n=0}^{\infty} P_n,$$

который можно рассматривать как аналог кластерного разложения вероятности $Q(c)$ на Γ_1 .

При $n = 0$ имеем $P_0 = c(1-c)^2$. А при $n \in \mathbb{N}$, согласно (5), –

$$P_n = c \sum_{\substack{\langle S_1, S_2, \dots, S_n \rangle: \\ \emptyset \neq S_j \subset S_{j-1} \times I_2, \\ j=1 \div n}} P_n(S_n|S_1, \dots, S_{n-1}) = c \sum_{\substack{\langle S_1, S_2, \dots, S_n \rangle: \\ \emptyset \neq S_j \subset S_{j-1} \times I_2, \\ j=1 \div n}} (1-c)^{2^{|S_n|}} \prod_{j=1}^n c^{|S_j|} (1-c)^{2^{|S_{j-1}|}-|S_j|}. \quad (6)$$

Введем параметр

$$\eta = c(1-c) \in (0, 1/4].$$

Учитывая, что $|S_0| = 1$, находим, что

$$(1-c)^{2^{|S_n|}} \prod_{j=1}^n c^{|S_j|} (1-c)^{2^{|S_{j-1}|}-|S_j|} = (1-c)^2 \prod_{j=1}^n c^{|S_j|} (1-c)^{2^{|S_j|}-|S_j|} = (1-c)^2 \prod_{j=1}^n \eta^{|S_j|}.$$

Таким образом, из разложения (6) следует

$$P_n \equiv c(1-c)^2 Q_n(\eta) = c(1-c)^2 \sum_{\substack{\langle S_1, S_2, \dots, S_n \rangle: \\ \emptyset \neq S_j \subset S_{j-1} \times I_2, \\ j=1 \div n}} \prod_{j=1}^n \eta^{|S_j|}, \quad (7)$$

то есть справедлива

Теорема 5.1. Вероятность P_n того, что траектория случайного процесса $\{S_m; m \in \mathbb{N}_+\}$, сопоставленного бернуlliевскому случайному полю на графе Γ'_1 , и обрывается на n -м шаге определяется формулой (7).

Теперь, нашей задачей является получение такой оценки для функций

$$Q_n(\eta) = \sum_{\substack{\langle S_1, S_2, \dots, S_n \rangle: \\ \emptyset \neq S_j \subset S_{j-1} \times I_2, \\ j=1 \div n}} \prod_{j=1}^n \eta^{|S_j|},$$

которая бы позволяла устанавливать гарантированную точность аппроксимаций для функции $Q(\eta)$, получаемых на основе частичных сумм ряда в (7).

Запишем выражение для функции $Q_{n+1}(\eta)$ в виде

$$\begin{aligned} Q_{n+1}(\eta) &= \sum_{\substack{\langle S_1, S_2, \dots, S_{n+1} \rangle: \\ \emptyset \neq S_j \subset S_{j-1} \times I_2, \\ j=1 \div n+1}} \prod_{j=1}^{n+1} \eta^{|S_j|} = \sum_{\emptyset \neq S_1 \subset I_2} \eta^{|S_1|} \sum_{\substack{\langle S_2, \dots, S_{n+1} \rangle: \\ \emptyset \neq S_j \subset S_{j-1} \times I_2, \\ j=2 \div n+1}} \prod_{j=2}^{n+1} \eta^{|S_j|} = \\ &= \eta \sum_{S_1 \in \{\{1\}, \{2\}\}} \sum_{\substack{\langle S_2, \dots, S_{n+1} \rangle: \\ \emptyset \neq S_j \subset S_{j-1} \times I_2, \\ j=2 \div n+1}} \prod_{j=2}^{n+1} \eta^{|S_j|} + \eta^2 \sum_{\substack{\langle S_2, \dots, S_{n+1} \rangle: \\ \emptyset \neq S_j \subset S_{j-1} \times I_2, \\ j=2 \div n+1}} \prod_{j=2}^{n+1} \eta^{|S_j|}. \end{aligned} \quad (8)$$

С каждым из двух слагаемых при выборе $S_1 = \{k\}$, $k \in \{1, 2\}$ произведем следующее преобразование. Так как в каждом из них происходит суммирование по наборам $\langle S_2, \dots, S_{n+1} \rangle$, у которых $S_2 \subset \{k\} \times I_2$ и $S_j \subset S_{j-1}$, $j = 3 \div n+1$ с фиксированным k , то в каждой из этих сумм заменим переменные суммирования $S_2 \Rightarrow S_1 \in I_2$ и $S_{j+1} \Rightarrow S_j$ с тем же условие суммирования $\emptyset \neq S_j \subset S_{j-1} \times I_2$, $j = 2 \div n$. В результате оба слагаемых первой суммы в (8), соответствующие $k \in \{1, 2\}$, принимают одинаковый вид, и поэтому эта первая сумма равна

$$\eta \sum_{S_1 \in \{\{1\}, \{2\}\}} \sum_{\substack{\langle S_2, \dots, S_{n+1} \rangle: \\ \emptyset \neq S_j \subset S_{j-1} \times I_2, \\ j=2 \div n+1}} \prod_{j=2}^{n+1} \eta^{|S_j|} = \sum_{\substack{\langle S_1, \dots, S_n \rangle: \\ \emptyset \neq S_j \subset S_{j-1} \times I_2, \\ j=1 \div n}} \prod_{j=1}^n \eta^{|S_j|} = 2\eta Q_n(\eta). \quad (9)$$

Рассмотрим вторую сумму в (8). Каждую компоненту S_j в наборах $\langle S_2, \dots, S_{n+1} \rangle$ представим в виде дизъюнктивного разложения $S_j = S'_j \cup S''_j$ по правилу $S'_1 = \{1\}$ и $S''_1 = \{2\}$ и при $j = 2, \dots, n+1$ установим $S'_j \subset S'_{j-1}$, $S''_j \subset S''_{j-1}$. В результате рассматриваемая сумма принимает вид

$$\sum_{\substack{\langle S_2, \dots, S_{n+1} \rangle: \\ \emptyset \neq S_j \subset S_{j-1} \times I_2, \\ j=2 \div n+1}} \prod_{j=2}^{n+1} \eta^{|S_j|} = \left(\sum_{\substack{\langle S'_2, \dots, S'_{n+1} \rangle: \\ S'_1 = \{1\}, \emptyset \neq S'_j \subset S'_{j-1} \times I_2, \\ j=2 \div n+1}} \prod_{j=2}^{n+1} \eta^{|S'_j|} \right) \left(\sum_{\substack{\langle S''_2, \dots, S''_{n+1} \rangle: \\ S''_1 = \{2\}, \emptyset \neq S''_j \subset S''_{j-1} \times I_2, \\ j=2 \div n+1}} \prod_{j=2}^{n+1} \eta^{|S''_j|} \right). \quad (10)$$

После этого произведем такое же преобразование каждой из сумм, записанных в скобках формулы (10), которое было проделано с первой суммой в формуле (8). После этого обе указанные суммы совпадают и, в результате, вторая сумма в этой формуле принимает вид

$$\eta^2 \left(\sum_{\substack{\langle S_1, \dots, S_n \rangle: \\ \emptyset \neq S_j \subset S_{j-1} \times I_2, \\ j=1 \div n}} \prod_{j=1}^n \eta^{|S'_j|} \right)^2 = \eta^2 Q_n^2(\eta). \quad (11)$$

Учитывая (9) и (11), приходим к выводу, что справедливо следующее утверждение.

Теорема 5.2. Функции $Q_n(\eta)$, $n \in \mathbb{N}$ удовлетворяют следующей системе уравнений

$$Q_{n+1}(\eta) = 2\eta Q_n(\eta) + \eta^2 Q_n^2(\eta). \quad (12)$$

На основе полученного уравнения (12), получим теперь искомую оценку для функций $Q_n(\eta)$, $n \in \mathbb{N}$. Положим, что имеет место неравенство $Q_n(\eta) \leq A(\eta)(M\eta)^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$ с постоянной $M > 0$ и $A(\eta) = Q_1(\eta) = (1 + \eta)^2 - 1$. Докажем это неравенство индукцией по $n \in \mathbb{N}$. Для этого построим индукционный шаг, допустив, что указанное неравенство имеет место для фиксированного $n \in \mathbb{N}$. Тогда, на основании (12) и сделанного допущения, имеем

$$Q_{n+1}(\eta) \leq 2\eta A(\eta)(M\eta)^{n-1} + \eta^2 A^2(\eta)(M\eta)^{2(n-1)} = A(\eta)(M\eta)^n \left(\frac{2}{M} + A(\eta)\eta M^{n-2} \right)$$

Учитывая, что $\eta = c(1 - c) \leq 1/4$, имеем $A(\eta) \leq 1/16$, потребуем, чтобы $(2 + A(\eta)\eta^n M^{n-1}) \leq M$ при $n \in \mathbb{N}$. Для этого достаточно, чтобы $M\eta \leq 1$ и $\max(2 + A(\eta)\eta) = M$. Положив $\eta = 1/4$, найдем значение $M = 2 + (3/2^4)^2$, которое удовлетворяет также условию $M\eta \leq M/4 < 1$. ■

Сформулируем полученный результат в виде отдельного утверждения.

Теорема 5.3. *Вероятность перколяции $P(c)$ бернульевского случайного поля $\{\tilde{\rho}(x); x \in V\}$ на дереве Кэйли со степенью вершин $s = 3$ представляется в форме $P(c) = c(1 - Q^3(c))$, где для функции $Q(c)$ имеет место сходящееся при $c \in (0, 1)$ разложение*

$$Q(c) = (1 - c)^2 \sum_{n=1}^{\infty} Q_n,$$

в котором для вероятностей Q_n справедлива оценка $Q_n \leq A(\eta)(M\eta)^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, где $A(\eta) = (1 + \eta)^2 - 1 \leq (3/4)^2$ и $M = 2 + (3/2^4)^2$ при $\eta = c(1 - c)$.

5. Заключение. Для рассмотренной в работе перколяционной модели вероятность перколяции $P(c)$ выражается явно в виде элементарной функции от параметра c . Эта функция находится явно как «ветвь» одной из двух функций, которые появляются в результате трансверсального пересечения графиков аналитических функций от $c \in (0, 1)$. Это приводит к тому, что $P(c)$ не является аналитической функцией, так как она равна в точности нулю при $c \in (0, c_*)$, $c_* = 1/2$, но не равна нулю при $c \in (c_*, 1)$. Таким образом, несмотря на то, что каждое слагаемое, входящее в кластерное разложение является полиномом от c , аппроксимации для функции $P(c)$ невозможно строить на основе ряда по степеням c^n , $n \in \mathbb{N}$. Однако доказанное в работе утверждение показывает, что аппроксимации вероятности перколяции $P(c)$ на дереве Кэйли с степенью вершин $s = 3$ можно строить в виде частичных сумм кластерного разложения во всем диапазоне изменения концентрации $c \in (0, 1)$, а не только при $c > c_*$, где $P(c) \neq 0$. При этом каждая частичная сумма является полиномом от c так, что при неограниченном возрастании порядка аппроксимации степень полинома также возрастает неограниченно. Существенно, что оценки точности таких аппроксимаций пропорциональны степеням $[c(1 - c)]^n$, $n \in \mathbb{N}$. И это происходит несмотря на то, что функция $P(c)$ зависит от c не аналитически в окрестности точки c_* , которая является ее точкой непрерывности, а производная $P'(c)$ терпит в этой точке разрыв.

В связи с полученным результатом, возникает принципиальный вопрос. Сохраняется ли такое положение для вероятности перколяции на периодических графах, которые являются традиционным и основным объектом изучения в дискретной теории перколяции? В настоящее время априорные оценки точности приближений, получаемые на основе частичных сумм кластерного разложения для периодических графов посредством так называемых контурных оценок для внешних границ конечных кластеров [6]–[8], которые дают вклад в кластерное разложение, не позволяют дать однозначного ответа на этот вопрос. В этой связи сделаем еще одно существенное, на наш взгляд, замечание. Правая производная $P'(c)$ принимает конечное значение, что является следствием указанного выше факта, что $P(c)$ получается как ветвь трансверсального и, в то же время, не ортогонального по отношению другу к другу графиков пары гладких функций. Но конечность производной в критической точке c_* противоречит мнению о том, что перколяция аналогична фазовым переходам второго рода в равновесной статистической механике, так как для таких бифуркационных переходов правая производная по температуре равна бесконечности [13]. Это противоречие, в свою очередь, указывает на то, что для описания поведения функции $P(c)$ в окрестности точки c_* неприменим подход на основе «ренорм-группы» (см. по этому поводу [14], [15], [16]) типа ренорм-группы Каданова, так как не возникает понятия критического индекса параметра порядка, которым в данном случае является функция $P(c)$.

References

1. Hammersley JM. Percolation processes: lower bounds for the critical probability. *Ann. Math. Statistics*. 1957;28(3):790–795.
2. Broadbent SR., Hammersley JM. Percolation processes I. Crystals and mazes. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. 1957;53:629–641.
3. CM., Hammersley JM. Percolation processes and related topics. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*. 1963;11:894–918.

4. Kesten H. Percolation Theory for Mathematicians. New York: Springer Science+Business Media; 1982. 424 p.
5. Grimmet G. Percolation. New York: Springer-Verlag; 1999. 444 p.
6. Virchenko YuP., Tolmacheva YuA. Revision of the upper estimate of percolation threshold in square lattice. *Matematicheskaya fizika, analiz, geometriya*. 2003;10(1):29–39.
7. Virchenko YuP., Tolmacheva YuA. Method of Sequential Approximative Estimates in Discrete Percolation Theory. *Studies in Mathematical Physics Research*. ed. Charles V. Benton. New York: Nova Science Publishers, Inc.; 2004:155–175.
8. Virchenko YuP., Tolmacheva YuA. Majorant estimates of the percolation threshold of a Bernoulli field on a square lattice *Ukrainian Mathematical Journal*. 2005;57(10):1535–1549.
9. Nummelin E. General irreducible Markov chains and non-negative operators. New York: Cambridge University Press; 1984.
10. Virchenko YuP., Shpilinskaya OL. Point random fields with markovian commutations and the geometry of fractally disordered media. *Theoretical and Mathematical Physics*. 2000;124(3):1273–1285.
11. Virchenko YuP., Shpilinskaya OL. Stochastic fractals with markovian commutations. *Theoretical and Mathematical Physics*. 2001;128(2):983–995.
12. Sevasyanov BA. Branching Processes. Moscow: Nauka; 1971.
13. Ruelle D. Statistical Mechanics. Rigorous Results. New York: W.A. Benjamin Inc.; 1969.
14. Sykes MF., Essam JW. Exact critical percolation probabilities for site and bond problems in two dimensions. *Journal of Mathematical Physics*. 1964;5:1117–1127.
15. Essam JW. Percolation Theory *Reports of Progress Physics*. 1986;43:833–912.
16. Stauffer D., Aharony A. Introduction to Percolation Theory. 2nd Ed. London: Taylor and Francis; 1991.

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 06.10.2025

Received October 6, 2025

Поступила после рецензирования 21.11.2025

Revised November 21, 2025

Принята к публикации 25.11.2025

Accepted November 25, 2025

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Вирченко Юрий Петрович – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры программного обеспечения, Белгородский государственный технологический университет им. В. Г. Шухова, г. Белгород, Россия

Пашкова Валерия Сергеевна – аспирант кафедры программного обеспечения, Белгородский государственный технологический университет им. В. Г. Шухова, г. Белгород, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Yuri P. Virchenko – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Professor of the Software Department, Belgorod State Technological University named after V. G. Shukhov, Belgorod, Russia

Valery S. Pashkova – Graduate Student of the Software Department, Belgorod State Technological University named after V. G. Shukhov, Belgorod, Russia

[К содержанию](#)