*Прикладная математика & Физика, 2026, том 58, № 1. С. 54–64.*
*Applied Mathematics & Physics, 2026, Volume 58, No 1. P. 54–64.*

УДК 517.927.4 DOI 10.52575/2687-0959-2026-58-1-54-64
MSC 34B15 EDN JMBVDU
Оригинальное исследование

# Краевые задачи с производными по «расщепленным» мерам и монотонной нелинейностью

**Ал-Гарайхоли И. А. Х.**[1,2], **Шабров С. А.**[1]
(*Статья представлена членом редакционной коллегии Васильевым В. Б.*)
[1] Воронежский государственный университет,
Россия, 394018, г. Воронеж, Университетская пл., 1
noskovbupk@mail.ru

[2] Университет Ти-Кар, Педагогический колледж точных наук,
Ирак, 00964, г. Насирия
evan.abd3@gmail.com

**Аннотация.** В работе изучена непрерывная ветвь нелинейной спектральной задачи с производными по «расщепленным» мерам. Получены достаточные условия непустоты множества неотрицательных значений, при каждом из которых существует неотрицательное нетривиальное решение изучаемой нелинейной спектральной задачи с разрывными решениями; показана монотонность решения по спектральному параметру; доказана сходимость итерационной последовательности к решению. Трудности, возникающие при анализе, вызванные отсутствием непрерывности у решения, мы преодолеваем с применением производных по мере. Используется также теория положительных вполне непрерывных операторов, разработанная М.А. Красносельским.

**Ключевые слова:** производная по мере, краевая задача, монотонная нелинейность, непрерывная ветвь, функция Грина

**Для цитирования:** Ал-Гарайхоли И.А.Х., Шабров С.А. Краевые задачи с производными по «расщепленным» мерам и монотонной нелинейностью. *Прикладная математика & Физика.* 2026;58(1):54–64.
DOI 10.52575/2687-0959-2026-58-1-54-64 EDN JMBVDU

---

Original Research

# Boundary Value Problems with Derivatives with Respect to «Split» Measures and Monotone Nonlinearity

**Evan A. H. Al-Garayholi**[1,2], **Sergey A. Shabrov**[1]
(*Article submitted by a member of the editorial board Vasiliev V. B.)*
[1] Voronezh State University,
1 Universitetskaya Sq., Voronezh, 394018, Russia,
noskovbupk@mail.ru

[2] Thi-Qar University, Pedagogical College of Exact Sciences,
12 Nas ThiQar, Nasiriyah, 00964, Iraq,
evan.abd3@gmail.com

**Abstract.** This paper examines a continuous branch of a nonlinear spectral problem with derivatives with respect to "split" measures. Sufficient conditions for the nonemptiness of the set of nonnegative values, for each of which a nonnegative, nontrivial solution to the nonlinear spectral problem with discontinuous solutions exists, are obtained. The monotonicity of the solution with respect to the spectral parameter is demonstrated; and the convergence of the iterative sequence to the solution is proven. Difficulties arising in the analysis of a nonlinear boundary value problem with discontinuous solutions are overcome using derivatives with respect to the measure. The resulting equation is then considered as a relationship between the solution value and its derivatives up to a certain order, i.e., it becomes ordinary. This approach to treating equations with nonsmooth and discontinuous solutions was proposed by Yu.V. Pokorny. The theory of positive completely continuous operators developed by M.A. Krasnosel'skii is also used.

**Keywords:** Derivative with Respect to Measure, Boundary Value Problem, Monotone Nonlinearity, Continuous Branch, Green's Function

**For citation:** Al-Garayholi EAH., Shabrov SA. Boundary Value Problems with Derivatives with Respect to «Split» Measures and Monotone Nonlinearity. *Applied Mathematics & Physics.* 2026;58(1):54–64. (In Russ).
DOI 10.52575/2687-0959-2026-58-1-54-64 EDN JMBVDU

---

**1. Введение.** В работах [1, 2] Ю. В. Покорным был предложен поточечеый подход для изучения качественных свойств решений краевых задач с негладкими решениями; исследование систем Чебышева – Хаара в теории разрывных ядер Келлога было предпринято в работе [3] Покорным Ю. В. и Боровских А. В.

Поточечная трактовка краевой задачи, когда уравнение в каждой точке трактуется как связь между значением решения и ее производными до некоторого порядка (в отличие от теории распределения), позволил построить точную параллель классической теории ОДУ [4].

Несмотря на ряд нерешенных проблем (например, умножение обобщенной функции на разрывную и т. д. [5]), теория обобщенных функций незаменима в спектральных вопросах [6, 7, 8, 9] и множестве других.

**2. Некоторые сведения о производных и интеграле по «расщепленным» мерам.** Для удобства читателей приведем определения и некоторые сведения о производных и интеграле по «расщепленным» мерам, более подробные сведения о которых можно найти в [10].

Пусть $\mu(x)$ — строго возрастающая на $[0;\ell]$ функция, определенная в каждой точке отрезка $[0;\ell]$. При этом мы предполагаем, что множество $S(\mu)$ точек разрыва функции $\mu(x)$ непусто, т. е. $S(\mu) \neq \emptyset$, и $\Delta^-\mu(\xi) \neq \Delta^+\mu(\xi)$ хотя бы для одной точки $\xi$, принадлежащей множеству $S(\mu)$. Здесь и далее, через $\Delta^-\mu(\xi)$ и $\Delta^+\mu(\xi)$ обозначены левый и правый скачки функции $\mu(x)$ в точке $\xi$, т. е. $\Delta^-\mu(\xi) = \mu(\xi) - \mu(\xi - 0)$ и $\Delta^+\mu(\xi) = \mu(\xi + 0) - \mu(\xi)$. Таким образом, мера в точке $\xi \in S(\mu)$, в которой $\Delta^-\mu(\xi) \neq \Delta^+\mu(\xi)$ «расщеплена» на два значения.

Нам удобней считать, что $\mu(x)$ определена на множестве $\overline{[0;\ell]}_\mu$, в котором каждая точка $\xi \in S(\mu)$ заменена на тройку собственных элементов (см., напр., [4]). Так как для восстановления функции (с точностью до постоянной константы) после дифференцирования, необходимо «помнить» оба скачка функции $u(x)$, которые вообще говоря различны, то производная функции $u(x)$ по мере $\mu(x)$, которую мы обозначим через $\frac{du}{d[\mu]_2}$, чтобы подчеркнуть, что она в точке $\xi$ принимает два упорядоченных значения, определена на множестве $\overline{[0;\ell]}_\mu^{(2)}$ (см. рисунок 1), в котором каждая точка $\xi \in S(\mu)$ заменена на пару собственных значений (помимо предельных $\xi \pm 0$). Обозначать мы будем через $\tau_1^\xi$ и $\tau_2^\xi$, причем

$$\frac{du}{d[\mu]_2}(\tau_1^\xi) = \frac{\Delta^- u(\xi)}{\Delta^-\mu(\xi)} = \frac{u(\xi) - u(\xi - 0)}{\mu(\xi) - \mu(\xi - 0)},$$
$$\frac{du}{d[\mu]_2}(\tau_2^\xi) = \frac{\Delta^+ u(\xi)}{\Delta^+\mu(\xi)} = \frac{u(\xi + 0) - u(\xi)}{\mu(\xi + 0) - \mu(\xi)}.$$

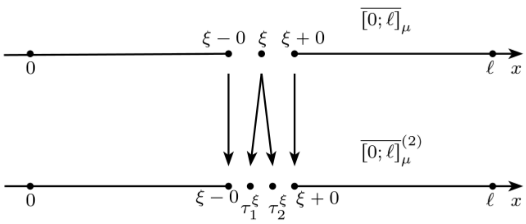


Рис. 1. Структура множества $\overline{[0;\ell]}_\mu^{(2)}$

Fig. 1. Structure of the set $\overline{[0;\ell]}_\mu^{(2)}$

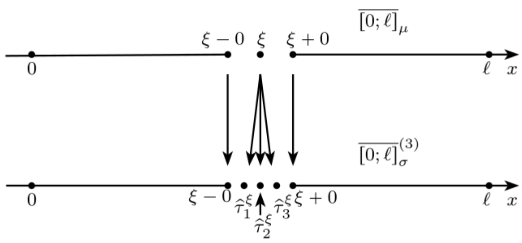


Рис. 2. Структура множества $\overline{[0;\ell]}_\mu^{(3)}$

Fig. 2. Structure of the set $\overline{[0;\ell]}_\mu^{(3)}$

Пусть на множестве $\overline{[0;\ell]}_\mu^{(2)}$ определена функция $\sigma(x)$, которая порождает на нем меру. При дифференцировании функции $v(x) = u'_{[\mu]_2}(x)$ по мере $\sigma$ необходимо «помнить» уже три значения в точке $\xi \in S(\mu)$. Поэтому производная $v'_{[\sigma]_3}(x)$ определена на множестве $\overline{[0;\ell]}_\sigma^{(3)}$, в котором каждая точка разрыва заменена на тройку (помимо предельных $\xi - 0$ и $\xi + 0$) собственных значений $\widehat{\tau}_1^\xi$, $\widehat{\tau}_2^\xi$ и $\widehat{\tau}_3^\xi$ (см. рисунок 2). При этом $[\sigma]_3$–производная функции $v(x)$ в точках $\widehat{\tau}_j^\xi$ $(j = 1, 2, 3)$ определяется следующим образом:

$$\frac{dv}{d[\sigma]_3}(\widehat{\tau}_1^\xi) = \frac{v(\tau_1^\xi) - v(\xi - 0)}{\sigma(\tau_1^\xi) - \sigma(\xi - 0)},$$

$$\frac{dv}{d[\sigma]_3}(\widehat{\tau_2^\xi}) = \frac{v(\tau_2^\xi) - v(\tau_1^\xi)}{\sigma(\tau_2^\xi) - \sigma(\tau_1^\xi)},$$

$$\frac{dv}{d[\sigma]_3}(\widehat{\tau_3^\xi}) = \frac{v(\xi + 0) - v(\tau_2^\xi)}{\sigma(\xi + 0) - \sigma(\tau_2^\xi)}.$$

На рисунках 1 и 2 показана структура множеств $\overline{[0;\ell]}_\mu^{(2)}$ и $\overline{[0;\ell]}_\sigma^{(3)}$ соответственно. При этом естественно считать, что $\xi - 0 < \tau_1^\xi < \xi < \tau_2^\xi < \xi + 0$ для всех точек разрыва функции $\mu(x)$.

Всюду далее мы будем предполагать, что концевые точки отрезка $[0;\ell]$ являются точками непрерывности функции $\mu(x)$, а, следовательно, и функций $u(x)$ и $v(x)$.

В дальнейшем, чтобы не затенять сути дела, мы будем предполагать, что множества точек разрыва функций $u(x)$ и $v(x)$ совпадают, и записывать это следующим образом: $S(u) = S(v)$.

Пусть даны две функции $u(x)$ и $v(x)$, первая из них определена на множестве $\overline{[0;\ell]}_\sigma^{(3)}$, а вторая – на $\overline{[0;\ell]}_\mu^{(2)}$; обе они являются функциями с конечным изменением на $\overline{[0;\ell]}_\sigma^{(3)}$ и $\overline{[0;\ell]}_\mu^{(2)}$ соответственно. Тогда множество точек разрыва у каждой из них не более чем счетно.

На множестве $\overline{[0;\ell]}_\mu^{(2)}$ определим функцию $v_s(x)$ следующим образом:

$$v_s(0) = 0;$$

если $x$ не совпадает ни с одной из точек $\tau_i^\xi$ ни при каком $\xi \in S(v)$ и $i = 1, 2$, то

$$v_s(x) = \sum_{\substack{\xi \in S(v) \\ \xi < x}} \left(v(\xi + 0) - v(\xi - 0)\right);$$

если $x = \tau_1^\xi$ при некотором $\xi \in S(v)$, то

$$v_s(x) = \sum_{\substack{\xi \in S(v) \\ \xi < x}} \left(v(\xi + 0) - v(\xi - 0)\right) + v(\tau_1^\xi) - v(\xi - 0);$$

если $x = \tau_2^\xi$ при некотором $\xi \in S(v)$, то

$$v_s(x) = \sum_{\substack{\xi \in S(v) \\ \xi < x}} \left(v(\xi + 0) - v(\xi - 0)\right) + v(\tau_2^\xi) - v(\xi - 0).$$

Как и в классическом случае, эту функцию мы назовем функцией скачков. Очевидно, что $v_0(x) = v(x) - v_s(x)$ непрерывна на $\overline{[0;\ell]}_\mu^{(2)}$.

Положим

$$\int_0^\ell u\, d[v]_2 = \int_0^\ell u\, dv_0 + \sum_{\xi \in S(\mu)} \Big[ u\left(\widehat{\tau_1^\xi}\right)\left(v\left(\tau_1^\xi\right) - v(\xi - 0)\right) + \\ + u\left(\widehat{\tau_2^\xi}\right)\left(v\left(\tau_2^\xi\right) - v\left(\tau_1^\xi\right)\right) + u\,()\left(v\left(\xi + 0\right) - v\left(\tau_2^\xi\right)\right)\Big]. \quad (1)$$

Первый интеграл в правой части (1) понимается по Лебегу – Стилтьесу (а так как функция $v_0(x)$ непрерывна в классическом смысле, то он будет существовать и в смысле Римана – Стилтьеса). Интеграл, определенный равенством (1), мы назовем $\pi_2$–интегралом.

Введем еще один интеграл

$$\int_0^\ell v\, d[u]_2^* = uv\Big|_0^\ell - \int_0^\ell u\, d[v]_2,$$

где $uv\Big|_0^\ell = u(\ell)v(\ell) - u(0)v(0)$, который мы будем называть $\pi_2^*$–интегралом.

Нетрудно видеть, что введенные термины обладают всеми свойствами интеграла. Более того, если одна из функций непрерывна на всем отрезке $[0;\ell]$ введенный интеграл численно совпадает с интегралом Римана – Стилтьеса.

Справедлива следующая теорема.

**Теорема 2.1.** [10] *Пусть $S(u) = S(v)$. Если $u_s(x)$ – функция скачков функции $u(x)$, построенная так же, как и $v_s(x)$, а $u_0(x) = u(x) - u_s(x)$ – непрерывная составляющая функции $u(x)$, то справедливо равенство*

$$\int_0^\ell v\, d[u]_2^* = \int_0^\ell v\, du_0 + \sum_{\xi \in S(\mu)} \Big[ v\,(\xi - 0) \left( u\left(\widehat{\tau}_1^\xi\right) - u(\xi - 0) \right) + \\ + v\left(\tau_1^\xi\right)\left(u\left(\widehat{\tau}_2^\xi\right) - u\left(\widehat{\tau}_1^\xi\right)\right) + v\left(\tau_2^\xi\right)\left(u\left(\widehat{\tau}_3^\xi\right) - u\left(\widehat{\tau}_2^\xi\right)\right) + \\ + v\,(\xi + 0)\left(u\,(\xi + 0) - u\left(\widehat{\tau}_2^\xi\right)\right)\Big].$$

**Теорема 2.2.** [10] *Пусть $S(u) = S(v)$. Если $u_s(x)$ – функция скачков функции $u(x)$, построенная так же, как и $v_s(x)$, а $u_0(x) = u(x) - u_s(x)$ – непрерывная составляющая функции $u(x)$, то справедливо равенство*

$$\int_0^\ell v\, d[u]_1^* = \int_0^\ell v\, du_0 + \sum_{\xi \in S(\mu)} \Big[ v\,(\xi - 0) \left( u\left(\tau_1^\xi\right) - u(\xi - 0) \right) + \\ + v\left(\tau^\xi\right)\left(u\left(\tau_2^\xi\right) - u\left(\tau_1^\xi\right)\right) + v\,(\xi + 0)\left(u\,(\xi + 0) - u\left(\tau_2^\xi\right)\right)\Big].$$

Также вводятся $\pi_1$– и $\pi_1^*$–интегралы, которые нам понадобятся.

Пусть даны две функции $u(x)$ и $v(x)$, первая из них определена на множестве $\overline{[0;\ell]}_\mu^{(2)}$, а вторая – на $\overline{[0;\ell]}_\mu$; обе они являются функциями с конечным изменением на $\overline{[0;\ell]}_\mu^{(2)}$ и $\overline{[0;\ell]}_\mu$ соответственно. Тогда множество точек разрыва у каждой из них не более чем счетно.

На множестве $\overline{[0;\ell]}_\mu$ определим функцию $v_s(x)$ следующим образом:

$$v_s(0) = 0;$$

если $x$ не совпадает ни с одной из точек $\tau^\xi$ ни при каком $\xi \in S(v)$, то

$$v_s(x) = \sum_{\substack{\xi \in S(v) \\ \xi < x}} \left(v(\xi + 0) - v(\xi - 0)\right);$$

если $x = \tau^\xi$ при некотором $\xi \in S(v)$, то

$$v_s(x) = \sum_{\substack{\xi \in S(v) \\ \xi < x}} \left(v(\xi + 0) - v(\xi - 0)\right) + v(\tau^\xi) - v(\xi - 0).$$

Как и в классическом случае, эту функцию мы назовем функцией скачков. Очевидно, что $v_0(x) = v(x) - v_s(x)$ непрерывна на $\overline{[0;\ell]}_\mu$.

Положим

$$\int_0^\ell u\, d[v]_1 = \int_0^\ell u\, dv_0 + \sum_{\xi \in S(\mu)} \left[ u\left(\tau_1^\xi\right)\left(v\left(\tau^\xi\right) - v(\xi - 0)\right) + u\left(\tau_2^\xi\right)\left(v\,(\xi + 0) - v\left(\tau^\xi\right)\right)\right]. \qquad (2)$$

Первый интеграл в правой части (2) понимается по Лебегу – Стилтьесу (а так как функция $v_0(x)$ непрерывна в классическом смысле, то он будет существовать и в смысле Римана – Стилтьеса). Интеграл, определенный равенством (2), мы назовем $\pi_1$–интегралом.

Введем еще один интеграл

$$\int_0^\ell v\, d[u]_1^* = uv\Big|_0^\ell - \int_0^\ell u\, d[v]_1,$$

где $uv\Big|_0^\ell = u(\ell)v(\ell) - u(0)v(0)$, который мы будем называть $\pi_1^*$–интегралом.

Нетрудно видеть, что введенные термины обладают всеми свойствами интеграла. Более того, если одна из функций непрерывна на всем отрезке $[0;\ell]$, введенный интеграл численно совпадает с интегралом Римана – Стилтьеса.

Справедлива следующая теорема.

**Теорема 2.3** [10] *Пусть $S(u) = S(v)$. Если $u_s(x)$ – функция скачков функции $u(x)$, построенная так же, как и $v_s(x)$, а $u_0(x) = u(x) - u_s(x)$ – непрерывная составляющая функции $u(x)$, то справедливо равенство*

$$\int\limits_0^\ell v\,d[u]_1^* = \int\limits_0^\ell v\,du_0 + \sum_{\xi \in S(\mu)} \Big[ v\,(\xi - 0) \left( u\left(\tau_1^\xi\right) - u(\xi - 0) \right) +$$

$$+ v\left(\tau^\xi\right) \left( u\left(\tau_2^\xi\right) - u\left(\tau_1^\xi\right) \right) + v\,(\xi + 0) \left( u\,(\xi + 0) - u\left(\tau_2^\xi\right) \right) \Big]. \quad (3)$$

Отметим, что введенные $\pi_1^*$– и $\pi_2^*$–интегралы невозможно свести к обычному интегралу Лебега – Стилтьеса по некоторому вспомогательному заряду ввиду того, что мера точек разрыва функции $\mu(x)$ «расщеплена» на несколько частей, и мера крайних частей умножается на значение, ранее бывшее предельным.

**3. Оценки функции Грина задачи с «расщеплёнными» мерами**. Генезис краевой задачи, которая обсуждается ниже, можно найти в [10].

Дадим ряд важных определений.

**Определение 3.1.** *Функцию $u(x)$, определенную на $\overline{[0;\ell]}_\mu$, назовем $\mu$-непрерывной в точке $x_0 \in \overline{[0;\ell]}_\mu$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех $x \in \overline{[0;\ell]}_\mu$, удовлетворяющих неравенству $|\mu(x) - \mu(x_0)| < \delta$ справедливо $|u(x) - u(x_0)| < \varepsilon$.*

**Определение 3.2.** *Функцию $u(x)$ будем называть $\mu$-непрерывной на $\overline{[0;\ell]}_\mu$, если она $\mu$-непрерывна в каждой точке этого множества.*

Множество $\mu$-непрерывных на $\overline{[0;\ell]}_\mu$ функций мы обозначим через $C_\mu\overline{[0;\ell]}_\mu$. Очевидно, что если это множество снабдить нормой $\|u\|_\mu = \max\limits_{x \in \overline{[0;\ell]}_\mu} |u(x)|$, то оно становится банаховым пространством.

**Определение 3.3.** *Функцию $F(x)$ назовем $\mu$-абсолютно непрерывной на множестве $\overline{[0;\ell]}_\mu$, если для всякого положительного $\varepsilon$ найдется такое $\delta > 0$, что для произвольной системы неперекрывающихся интервалов $\left\{\overline{(\alpha_i;\beta_i)}_\mu\right\}_{i=1}^{i=n}$, для которой*

$$\sum_{i=1}^n (\mu(\beta_i) - \mu(\alpha_i)) < \delta$$

*выполняется*

$$\left| \sum_{i=1}^n (F(\beta_i) - F(\alpha_i)) \right| < \varepsilon.$$

Аналогично вводится понятие $[\sigma]$-абсолютно непрерывной на $\overline{[0;\ell]}_\mu^{(2)}$ функции.

Решение изучаемых ниже краевых задач (и самих уравнений) мы ищем в классе $E$ – $\mu$-абсолютно непрерывных на $\overline{[0;\ell]}_\mu$ функций, $\mu$-производная которых $\sigma$-абсолютно непрерывна на $\overline{[0;\ell]}_\mu^{(2)}$.

Всюду в дальнейшем мы предполагаем выполненными следующие условия:

1) $\min\limits_{x \in \overline{[0;\ell]}_\mu^{(2)}} p(x) > 0$;

2) $Q(x)$ не убывает на $\overline{[0;\ell]}_\mu^{(2)}$;

3) функции $p(x)$, $Q(x)$ и $F(x)$ $[\sigma]$-абсолютно непрерывны на $\overline{[0;\ell]}_\mu^{(2)}$.

Пусть краевая задача

$$\begin{cases} -\frac{d}{d[\sigma]_3}\left(p\frac{du}{d[\mu]_2}\right) + u\frac{dQ}{d[\sigma]_3} = \frac{dF}{d[\sigma]_3}; \\ u(0) = u(\ell) = 0. \end{cases} \quad (4)$$

является невырожденной и однородное уравнение

$$Lu \equiv -\frac{d}{d[\sigma]_3}\left(p\frac{du}{d[\mu]_2}\right) + u\frac{dQ}{d[\sigma]_3} = 0 \quad (5)$$

не осциллирует на $\overline{[0;\ell]}_\mu$.

Поясним понятия невырожденности краевой задачи и неосциляции однородного уравнения.

Будем говорить, что краевая задача (4) является невырожденной, если однородная задача (при $\frac{dF}{d[\sigma]_3}(x) \equiv 0$) имеет только тривиальное решение.

Точку $s$, принадлежащую множеству $\overline{[0;\ell]}_\mu$, мы назовем нулевой точкой решения $u(x)$ однородного уравнения, если $u(s) = 0$.

Точку $\tau_1^\xi$ назовем нулевым местом решения $\varphi(x)$ однородного уравнения (5), если $\varphi(\xi - 0) \cdot \varphi(\xi) < 0$; точку $\tau_2^\xi$ назовем нулевым местом решения $\varphi(x)$ однородного уравнения (5), если $\varphi(\xi) \cdot \varphi(\xi + 0) < 0$.

Нулевые точки и нулевые места мы будем называть нулями решения.

Нетрудно видеть, что краевая задача

$$\begin{cases} -\frac{d}{d[\sigma]_3}\left(\frac{du}{d[\mu]_2}\right) = \frac{dF}{d[\sigma]_3}; \\ u(0) = u(\ell) = 0, \end{cases} \tag{6}$$

является невырожденной, и ее функция Грина имеет вид

$$g(x,s) = \frac{(\mu(\min\{x,s\}) - \mu(0))\,(\mu(\ell) - \mu(\max\{x,s\}))}{\mu(\ell) - \mu(0)}.$$

Так как однородное уравнение $Lu = 0$ не осциллирует на $\overline{[0;\ell]}_\mu$ (что проверяется непосредственно), то найдутся положительные константы $C_i$ $(i = 1,2,3,4)$, что для всех $x \in \overline{[0;\ell]}_\mu$ справедливы неравенства

$$C_1\,(\mu(x) - \mu(0)) \leqslant \varphi_1(x) \leqslant C_2\,(\mu(x) - \mu(0))\,, \tag{7}$$

$$C_3\,(\mu(\ell) - \mu(x)) \leqslant \varphi_2(x) \leqslant C_4\,(\mu(\ell) - \mu(x))\,. \tag{8}$$

Из неравенств (7) и (8) мы находим, что

$$\frac{C_1C_3\,(\mu(\ell) - \mu(0))}{-W[\varphi_1,\varphi_2](0)} \cdot g(x,s) \leqslant G(x,s) \leqslant \frac{C_2C_4\,(\mu(\ell) - \mu(0))}{-W[\varphi_1,\varphi_2](0)} \cdot g(x,s),$$

где $W[\varphi_1,\varphi_2](0)$ – аналог определителя Вронского [10].

Таким образом, доказана теорема.

**Теорема 3.1**. *Пусть краевая задача* (4) *невырождена, однородное уравнение* $Lu = 0$ *не осциллирует на* $\overline{[0;\ell]}_\mu$; $G(x,s)$ *и* $g(x,s)$ *– функции Грина задач* (4) *и* (6) *соответственно. Тогда существуют положительные константы* $m$ *и* $M$, *что для всех* $x$ *и* $s$, *принадлежащих множеству* $\overline{[0;\ell]}_\mu$, *выполнены неравенства*

$$m \cdot g(x,s) \leqslant G(x,s) \leqslant M \cdot g(x,s). \tag{9}$$

Для функции Грина $g(x,s)$ достаточно очевидны неравенства $(x,s,\tau \in \overline{[0;\ell]}_\mu)$

$$g(x,s) \geqslant u_0(x) g(\tau,s), \tag{10}$$

где $u_0(x) = \dfrac{(\mu(x) - \mu(0))\,(\mu(\ell) - \mu(x))}{(\mu(\ell) - \mu(0))^2}$,

$$u_0(x) \cdot v_1(s) \leqslant g(x,s) \leqslant u_0(x) \cdot v_2(s), \tag{11}$$

где $v_1(s)$ и $v_2(s)$ – положительные суммируемые функции.

Из неравенств (9), (10) и (11) мы получаем

$$G(x,s) \geqslant \widehat{u}_0(x) \cdot G(\tau,s),$$

где $\widehat{u}_0(x) = \dfrac{m}{M} \cdot u_0(x)$,

$$\widehat{u}_0(x) \cdot \widehat{v}_1(s) \leqslant G(x,s) \leqslant \widehat{u}_0(x) \cdot \widehat{v}_2(s),$$

$\widehat{v}_1(s) = M \cdot v_1(s)$ и $\widehat{v}_2(s) = \dfrac{M^2}{m} v_2(s)$.

**4. Нелинейные краевые задачи с производными по «расщепленным» мерам и монотонной нелинейностью**. Здесь приводятся условия на «монотонный» рост нелинейности $f(x,u)$, для которой краевая задача

$$\begin{cases} Lu \equiv -\frac{d}{d[\sigma]_3}\left(p\frac{du}{d[\mu]_2}\right) + u\frac{dQ}{d[\sigma]_3} = \lambda f(x,u), \\ u(0) = u(\ell) = 0, \end{cases} \tag{12}$$

($\lambda$ – спектральный параметр), может иметь не более одного нетривиального неотрицательного решения, т. е. решения, принадлежащего конусу $K$ неотрицательных на $\overline{[0;\ell]}_\mu$ функций.

Нелинейное уравнение из (12) в точках разрыва понимается как три равенства:

$$-\left[\left(pu'_{[\mu]_2}\right)(\tau_1^\xi) - \left(pu'_{[\mu]_2}\right)(\xi - 0)\right] + u(\xi - 0)\left[Q(\tau_1^\xi) - Q(\xi - 0)\right] = \lambda f(\tau_1^\xi, u(\xi - 0))\cdot)(\sigma(\tau_1^\xi) - \sigma(\xi - 0)),$$

$$-\left[\left(pu'_{[\mu]_2}\right)(\tau_2^\xi) - \left(pu'_{[\mu]_2}\right)(\tau_1^\xi)\right] + u(\xi)\left[Q(\tau_2^\xi) - Q(\tau_1^\xi)\right] = \lambda f(\tau_2^\xi, u(\xi))(\sigma(\tau_2^\xi) - \sigma(\tau_1^\xi)),$$

$$-\left[\left(pu'_{[\mu]_2}\right)(\xi + 0) - \left(pu'_{[\mu]_2}\right)(\tau_2^\xi)\right] + u(\xi + 0)\left[Q(\xi + 0) - Q(\tau_2^\xi)\right] = \lambda f(\tau_3^\xi, u(\xi + 0))(\sigma(\xi + 0) - \sigma(\tau_2^\xi)).$$

**Теорема 4.1.** *Пусть выполнены следующие условия:*

1. *уравнение* $Lu = 0$ *не осциллирует на* $\overline{[0;\ell]}_\mu$;
2. $f(x, 0) \equiv 0$;
3. $f(x, u)$ *не убывает по* $u$ *при* $u \geqslant 0$ *и каждом* $x \in \overline{[0;\ell]}_\mu$;
4. $\frac{f(x,u)}{u}$ *убывает по* $u$ *при* $u > 0$;
5. *оператор суперпозиции, порождаемый функцией* $f(x, u_0(x)u)$, *непрерывно действует из* $C_\mu\overline{[0;\ell]}_\mu$ *в* $L_{p,\mu}\overline{[0;\ell]}_\mu$ *при некотором* $p \in (1; +\infty]$.

*Тогда множество* $\Lambda$ *неотрицательных значений* $\lambda$, *при которых задача* (12) *имеет хотя бы одно нетривиальное в* $K$ *решение, обладает следующими свойствами:*

(i) *Множество* $\Lambda$ *непусто и совпадает с некоторым интервалом* $(\lambda_0, \lambda_\infty)$, *при* $0 \leqslant \lambda_0 < \lambda_\infty \leqslant +\infty$;

(ii) *Каждому* $\lambda \in \Lambda$ *отвечает лишь одно решение* $u(x, \lambda) \in K$ *задачи* (12), *и* $\lim\limits_{\lambda\to\lambda_0} \|u(\cdot, \lambda)\|_{C_\mu} = 0$, $\lim\limits_{\lambda\to\lambda_\infty} \|u(\cdot, \lambda)\|_{C_\mu} = \infty$.

(iii) *Функция* $u(x, \lambda)$ *монотонна по* $\lambda$: *при всех* $x \in \overline{[0;\ell]}_\mu$ *справедливо неравенство*

$$(\lambda_1 - \lambda_2)(u(x, \lambda_1) - u(x, \lambda_2)) \geqslant 0.$$

(iv) *При каждом фиксированном* $\lambda^* \in \Lambda$ *для любого начального приближения* $u_0(x)$ *итерационная последовательность* $\{u_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, *определяемая как решение задачи*

$$\begin{cases} Lu = \lambda^* f(x, u_{n-1}(x)), \\ u(0) = u(\ell) = 0, \end{cases}$$

$n = 1, 2, \ldots$, *равномерно сходится к* $u(x, \lambda^*)$.

**Доказательство**. Так как $f(x, u)$ не убывает по $u$ при $u \geqslant 0$ и $f(x, 0) \equiv 0$, то $f(x, u) \geqslant 0$ для всех $x \in \overline{[0;\ell]}_\mu$ и $u \geqslant 0$; из убывания $\frac{f(x,u)}{u}$ при $u > 0$ вытекает, что если краевая задача (12) разрешима в $K$ при некотором $\lambda > 0$, то ее решение $u(x, \lambda)$ принадлежит внутренности $K_{u_0} = \left\{ u \in K : \inf\limits_{x\in\overline{(0;\ell)}_\mu} \frac{u(x)}{u_0(x)} \right\}$.

Покажем, что $\Lambda$ является непустым множеством. Для этого достаточно доказать, что хотя бы при каком-то $\lambda > 0$ существует нетривиальное решение, принадлежащее $K$, уравнения $u = \lambda Au$, где $A = \widetilde{G}\widetilde{F}$ и $(\widetilde{G}f)(x) = \int\limits_0^\ell \dfrac{G(x,s)}{u_0(x)} f(s)\, d[\sigma(s)]$, $(\widetilde{F}u)(x) = f(x, u_0(x)u(x))$. Оператор

$$A_k^{(r)} v = \frac{kAv + v_0}{\|kAv + v_0\|_{C_\mu}} \cdot r,$$

$v_0(x) \equiv 1$, $v(x) = \frac{u(x)}{u_0(x)}$, где $r$ – положительное фиксированное число, $k = 1, 2, \ldots$, в условиях теоремы действует и вполне непрерывен в $C_\mu\overline{[0;\ell]}_\mu$, оставляет инвариантным конус $K$. Более того, $A_k^{(r)}$ вполне непрерывен на $K$, так как норма в $C_\mu\overline{[0;\ell]}_\mu$ монотонна: $\|kAv + v_0\|_{C_\mu} \geqslant \|v_0\|_{C_\mu}$ при $v(x) \geqslant 0$; преобразует $K$ в единичную сферу пространства $C_\mu\overline{[0;\ell]}_\mu$. Поэтому $A_k^{(r)}$ оставляет инвариантным множество функций $v(x) \in K$, для которых $\|u\|_{C_\mu} \leqslant 1$, которое, как нетрудно видеть, ограниченно, выпукло и замкнуто. Вследствие принципа Шаудера у $A_k^{(r)}$ существует точка $v_k$: $A_k^{(r)} v_k = v_k$. Вспоминая определения $A_k^{(r)}$, последнее равенство перепишем в следующем виде:

$$r(Av_k)(x) + \frac{r}{k} = \zeta_k v_k(x), \tag{13}$$

где $\zeta_k = \left\|Av_k + \frac{1}{k}\right\|_{C_\mu}$. Из компактности $A$ и равенства $\|v_k\|_{C_\mu} = r$ следует, что последовательности $\{\zeta_k v_k\}$ и $\{\zeta_k\}$ компактны. Покажем, что $\inf\limits_k\{\zeta_k\} > 0$. Если предположить противное: $\inf\limits_k\{\zeta_k\} = 0$, то из (13) вытекает положительность $u_k(x)$ для всех $x \in \overline{[0;\ell]}_\mu$. Поэтому $m_k = \inf\limits_{x\in\overline{(0;\ell)}_\mu} v_k(x) > 0$. Так как $\|v_k\|_{C_\mu} \leqslant r$, то $m_k \leqslant r$. Если $m_k = r$ при некотором $k$, то $v_k(x) \equiv r$ и $(Av_k)(x) = \left(\dfrac{\zeta_k}{r} - \dfrac{1}{k}\right) v_k(x)$ и доказательство непустоты $\Lambda$

на этом завершилось (следует отметить, что предположение $m_k = r$ никак не связанно со сделанным предположением $\inf_k\{\zeta_k\} = 0$).

Значит, можно считать $m_k < r$. Так как $f(x,u)$ убывает по $u$, то $f(x,r) \leqslant \frac{1}{m_k} f(x,m_k)$ при всех $x \in \overline{[0;\ell]}_\mu$; из неубывания $f(x,u)$ по $u$ и неравенства $v_k(x) \geqslant m_k$ вытекает $f(x,v_k(x)) \geqslant f(x,m_k)$. Поэтому $f(x,r) \leqslant \frac{1}{m_k} f(x,v_k(x))$ для всех $x \in \overline{[0;\ell]}_\mu$. Тогда в силу положительности оператора $\widetilde{G}$ имеем

$$\frac{1}{m_k}(Av_k)(x) - (Av_0)(x) = \widetilde{G}\left(\frac{1}{m_k} f(x,v_k)(x)) - f(x,r)\right) \geqslant 0.$$

Отсюда и из (13) вытекает неравенство $v_k(x) \geqslant \dfrac{rm_k}{\zeta_k}(Av_0)(x)$, справедливое для всех $x \in \overline{[0;\ell]}_\mu$. Поэтому $m_k \geqslant \frac{rm_k}{\zeta_k}(Av_0)(x)$, следовательно, $\zeta_k \geqslant r(Av_0)(x)$, что вместе с предположением $\inf_k\{\zeta_k\} = 0$, означает $\min_x (Av_0)(x) = 0$, чего заведомо не может быть. Таким образом, $\inf_k\{\zeta_k\} > 0$.

Как отмечалось ранее, последовательности $\{\zeta_k v_k\}$ и $\{\zeta_k\}$ компактны. Так как $\inf_k\{\zeta_k\} > 0$, то последовательность $\{v_k\}$ также компактна. Выделяя из $\{v_k\}$ сходящуюся подпоследовательность, из $\{\zeta_k\}$ – последовательность $\{\zeta_{k_m}\}$, которая сходится к $\zeta_0$, из (13) будем иметь

$$rAv_{k_m} + \frac{r}{k_m} = \zeta_{k_m} v_{k_m}, \tag{14}$$

при этом $v_{k_m}(x) \overset{\overline{[0;\ell]}_\mu}{\rightrightarrows} w_0(x)$. Переходя в (14) к пределу $m \to \infty$, получим $Aw_0 = \frac{\zeta_0}{r} w_0$, и непустота $\Lambda$ доказана.

Так как $\|v_k\|_{C_\mu} = r$, то и норма $\|w_0\|_{C_\mu} = r$. А так как $r$ – произвольное положительное число, то этим доказано, что при некотором $\lambda$ уравнение $u = \lambda A$ имеет в $K$ решение с нормой $r$, т. е. множество значений $\|u(\cdot,\lambda)\|_{C_\mu}$ на $\Lambda$ заполняет $(0,\infty)$.

Покажем теперь, что для каждого $\lambda \in \Lambda$ задача (12) имеет в $K$ ровно одно неотрицательное решение. Пусть $v(x)$ и $w(x)$ – различные решения из $K$ краевой задачи (12), отвечающие некоторому $\lambda \in \Lambda$. Очевидно $\lambda > 0$. (Ниже будет показано, что $\Lambda = (\lambda_0, \lambda_\infty)$). Так как всякое решение $u(x)$ задачи (12), в силу условий теоремы, принадлежит внутренности конуса $K_{u_0}$, то при некоторых положительных и конечных $\alpha$ и $\beta$ справедливы неравенства $\alpha \leqslant \frac{u(x)}{u_0(x)} \leqslant \beta$ для всех $x \in \overline{(0;\ell)}_\mu$. Поэтому функция $\frac{v(x)}{w(x)}$ строго положительна на $\overline{(0;\ell)}_\mu$. Без ограничения общности мы можем считать, что неравенство $\frac{v(x)}{w(x)} > 1$ при некоторых $x \in \overline{(0;\ell)}_\mu$ нарушается, так как в противном случае поменяем $v(x)$ и $w(x)$ местами. Тогда для величины $æ = \inf_{x\in\overline{(0;\ell)}_\mu} \frac{v(x)}{w(x)}$ справедливо двойное неравенство $0 < æ < 1$. Функции $\widetilde{v}(x) = \frac{v(x)}{u_0(x)}$ и $\widetilde{w}(x) = \frac{w(x)}{u_0(x)}$ удовлетворяют нелинейному интегральному уравнению

$$\widetilde{u}(x) = \lambda \int\limits_0^\ell \widetilde{G}(x,s) f(s, u_0(s)\widetilde{u}(s))\, d[\sigma(s)],$$

где $\widetilde{u}(x) = \frac{u(x)}{u_0(x)}$ и $\widetilde{G}(x,s) = \frac{G(x,s)}{u_0(x)}$. Более того, $\widetilde{v}(x)$ и $\widetilde{w}(x)$ положительны на $\overline{(0;\ell)}_\mu$. Так как функция $\frac{f(x,u)}{u}$ убывает по $u$, то $\frac{1}{æ} f(x, æ\widetilde{w}(x)) \geqslant f(x, \widetilde{w}(x))$ для всех $x \in \overline{[0;\ell]}_\mu$; ввиду положительности $\widetilde{w}(x)$ на $\overline{(0;\ell)}_\mu$ последнее неравенство является строгим почти всюду (в смысле меры $\sigma$). Из определения $æ$ следует $\widetilde{v}(x) \geqslant æ\widetilde{w}(x)$, что вместе с неубыванием $f(x,u)$ по $u$ нам дает $f(x,\widetilde{v}(x)) \geqslant f(x, \zeta_k \widetilde{w}(x))$ для всех $x$, принадлежащих $\overline{[0;\ell]}_\mu$. Тогда функция $w(x) = f(x,\widetilde{v}(x)) - f(x, æ\widetilde{w}(x))$ положительна на множестве полной $\mu$-меры из $\overline{[0;\ell]}_\mu$. Отсюда, в сочетании с сильной положительностью интегрального оператора $\widetilde{G}(x,s)$, с ядром $\widetilde{G}(x,s) = \frac{G(x,s)}{u_0(x)}$, следует неравенство $(\widetilde{G}w)(x) > 0$ на $\overline{[0;\ell]}_\mu$, т. е. $(\widetilde{G}w)(x) \geqslant \widetilde{æ}_0$ при некотором положительном $\widetilde{æ}_0$. Последнее означает, что $\widetilde{v}(x) - æ\widetilde{w}(x) = (\widetilde{G}w)(x) \geqslant \lambda\widetilde{æ}_0$ для всех $x \in \overline{[0;\ell]}_\mu$. Значит, $\frac{\widetilde{v}(x)}{\widetilde{w}(x)} = \frac{v(x)}{w(x)} \geqslant \widetilde{æ}_0 + \frac{\lambda\widetilde{æ}_0}{\|\widetilde{w}\|_{C_\mu}}$, что противоречит определению числа $\widetilde{æ}_0$.

Покажем монотонность $u(x,\lambda)$ на $\Lambda$. Пусть $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ и $\lambda_1 < \lambda_2$. Положим $u_1(x) = \frac{u(x,\lambda_1)}{u_0(x)}$ и $u_2(x) = \frac{u(x,\lambda_2)}{u_0(x)}$. Докажем, что величина $m_0 = \inf\limits_{0<x<\ell} \dfrac{u_2(x)}{u_1(x)}$ не меньше единицы. Предположим противное: $m_0 < 1$. Тогда из неравенства $u_2(x) \geqslant m_0 u_1(x)$ следует

$$\frac{1}{m_0} f(x, u_0(x)u_2(x)) \geqslant \frac{1}{m_0} f(x, m_0 u_0(x) u_1(x)) \geqslant f(x, u_0(x)u_1(x)).$$

Следовательно, $\dfrac{1}{m_0}u_2(x) = \dfrac{\lambda_2}{m_0}(Au_2)(x) \geqslant \lambda_2(Au_1)(x) = \dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}u_1(x)$. Отсюда вытекает неравенство $\frac{u_2(x)}{u_1(x)} \geqslant \frac{\lambda_2}{\lambda_1}m_0$, справедливое для всех $x \in \overline{(0;\ell)}_\mu$. Откуда, по определению $m_0$, следует неравенство $\lambda_2 \leqslant \lambda_1$, что противоречит предположению.

Покажем теперь связность $\Lambda$. Пусть $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$, $\lambda_1 < \lambda_2$, $u(x,\lambda_1)$ и $u(x,\lambda_2)$ – решения (12) при $\lambda_1, \lambda_2$ соответственно. Покажем включение $[\lambda_1,\lambda_2] \subset \Lambda$. Пусть $v_1(x) = \frac{u(x,\lambda_1)}{u_0(x)}$, $v_2(x) = \frac{u(x,\lambda_2)}{u_0(x)}$ и $v(x) = \frac{u(x)}{u_0(x)}$. Монотонный оператор $A_\lambda v = \lambda Av$ оставляет инвариантным ограниченное замкнутое и выпуклое множество функций $\mathfrak{M} = \left\{ v(x) \in C_\mu\overline{[0;\ell]}_\mu | v_1(x) \leqslant v(x) \leqslant v_2(x) \right\}$, действуя в $C_\mu\overline{[0;\ell]}_\mu$. Из полной непрерывности $A$ вытекает существование в $\mathfrak{M}$ у оператора $A_\lambda$ неподвижной точки $v_\lambda : v_\lambda = A_\lambda v_\lambda$. Последнее равенство означает что $v_\lambda = \lambda A v_\lambda$, т. е. $\Lambda$ – связное подмножество из $\mathbb{R}^+$.

Положив $\lambda_0 = \inf\Lambda$ и $\lambda_\infty = \sup\Lambda$, будем иметь $\Lambda \subset [\lambda_0;\lambda_\infty]$. Покажем, что $\lambda_0 \notin \Lambda$. Если это не так, то для $\lambda_0$ существует решение $u(x,\lambda_0)$ краевой задачи (12). Как установлено ранее, для любого другого решения $u(x,\lambda)$ краевой задачи (12) при $\lambda \in \Lambda$ должно быть $u(x,\lambda) \geqslant u(x,\lambda_0)$ для всех $x \in [0;\ell]$, т. е. $\|u(\cdot,\lambda)\|_{C_\mu} \geqslant \|u(\cdot,\lambda_0)\|_{C_\mu} > 0$ и функция $\|u(\cdot,\lambda)\|_{C_\mu}$ не может принимать как угодно малых значений. Аналогично доказывается, что $\lambda_\infty \notin \Lambda$.

Как показано ранее, функция $\|u(\cdot,\lambda)\|_{C_\mu}$ заполняет своими значениями промежуток $(0;+\infty)$, поэтому, $\lim\limits_{\lambda\to\lambda_0+0} \|u(\cdot,\lambda)\|_{C_\mu} = 0$ и $\lim\limits_{\lambda\to\lambda_\infty-0} \|u(\cdot,\lambda)\|_{C_\mu} = +\infty$. Здесь мы использовали доказанные ранее пункты (i), (iii) и монотонность нормы в $C[0;\ell]$.

Осталось доказать последний пункт. Пусть $\lambda^* \in \Lambda$ и $u(x,\lambda^*)$ – соответствующее решение (12). Положим $v^*(x) = \frac{u(x,\lambda^*)}{u_0(x)}$. Функция $v^*(x)$ удовлетворяет уравнению $v = \lambda^* Av$, т. е. справедливо тождество $v^* = \lambda^* Av^*$. Пусть $v_0(x)$ – произвольная неотрицательная $\mu$-непрерывная на $\overline{[0;\ell]}_\mu$ функция. Покажем, что последовательность $\{v_n(x)\}$, где $v_n(x) = \lambda^*(Av_{n-1})(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, равномерно сходится к $v^*(x)$.

Так как функции $v_1(x)$ и $v^*(x)$ положительны на $[0;\ell]$, то при некоторых $\alpha$ и $\beta$, удовлетворяющих неравенствам $\alpha < 1 < \beta$, имеет место ($x \in \overline{[0;\ell]}_\mu$)

$$\underline{u}_1(x) = \alpha v^*(x) \leqslant v_1(x) = \lambda^*(Av_0)(x) \leqslant \beta v^*(x) = \overline{u}_1(x). \tag{15}$$

Из неубывания $f(x,u)$ и убывания $\frac{1}{u}f(x,u)$ по $u$ следует

$$(A\underline{u}_1)(x) \geqslant \alpha\lambda^*(Av^*)(x) = \alpha v^*(x) = \underline{u}_1(x)$$

и

$$\overline{u}_1(x) = \beta v^*(x) = \beta\lambda^*(Av^*)(x) \geqslant \lambda^*(A\overline{u}_1)(x).$$

Поэтому из монотонности $A$ и из (15) вытекают неравенства

$$\underline{u}_1(x) \leqslant \lambda^*(A\underline{u}_1)(x) \leqslant \lambda^*(Au_1)(x) = u_2(x) \leqslant \lambda^*(A\overline{u}_1)(x) \leqslant \overline{u}_1(x).$$

Для последовательностей $\underline{u}_{n+1}(x) = \lambda^*(A\underline{u}_n)(x)$ и $\overline{u}_{n+1}(x) = \lambda^*(A\overline{u}_n)(x)$ имеем $\underline{u}_n \leqslant \underline{u}_{n+1} \leqslant v_n \leqslant \overline{u}_{n+1} \leqslant \overline{u}_n$ для всех $n = 1, 2, \ldots$. Тогда каждая последовательность, являясь монотонной и ограниченной, вследствие компактности оператора $A$, сходится к неподвижной точке оператора $\lambda^* A$. Так как $v^*(x)$ – единственная неподвижная точка, то $\lim\limits_{n\to\infty}\underline{u}_n = \lim\limits_{n\to\infty}\overline{u}_n = v^*$. Тогда последовательность $v_n$, заключенная между $\underline{u}_n$ и $\overline{u}_n$, также обязана сходиться к $v^*$. Теорема доказана.

Для случая, когда $f(x,u)$ непрерывно дифференцируема в окрестности нуля (по переменной $u$) и в окрестности бесконечности (в смысле определения, приведенного ниже), интервал $\Lambda$ может быть эффективно указан.

**Определение 4.1**. *Будем говорить, что функция $f(x,u)$ непрерывно дифференцируема в окрестности бесконечности, если существует функция $f'_\infty(x)$ такая, что $\frac{f(x,u)}{u} \overset{\overline{[0;\ell]}_\mu}{\rightrightarrows} f'_\infty(x)$ при $u \to +\infty$.*

**Теорема 4.2**. *Числа $\lambda_0$ и $\lambda_\infty$ являются минимальными собственными значениями спектральных задач*

$$\left\{ \begin{array}{l} Lu = \lambda f'_u(x,0)u, \\ u(0) = u(\ell) = 0, \end{array} \right. \quad \text{и} \quad \left\{ \begin{array}{l} Lu = \lambda f'_\infty(x)u, \\ u(0) = u(\ell) = 0, \end{array} \right.$$

*соответственно.*

**Доказательство**. Возьмем последовательность $\lambda_k \in \Lambda$, стремящуюся к $\lambda_0$. Тогда последовательность решений $u(x,\lambda_n)$ задачи (12) соответствующих $\lambda_n$, равномерно сходится к нулю. Функции $v_n(x) = \frac{u(x,\lambda_n)}{u_0(x)}$ также сходятся к нулю; последовательность $w_n(x) = \frac{v_n(x)}{\|v_n\|_{C_\mu}}$ компактна, следовательно, из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность $w_{n_k}(x)$: $w_{n_k}(x) \overset{\overline{[0;\ell]}_\mu}{\rightrightarrows} w_0(x)$ при $k \to \infty$. Тогда функция

$w_0(x)$ удовлетворяет уравнению

$$w_0(x) = \lambda_0 \int_0^{\ell} \widetilde{G}(x,s) f_u'(s,0) w_0(s)\, d[\sigma(s)],$$

причем для фигурирующего здесь интегрального оператора число $\frac{1}{\lambda_0}$ является максимальным собственным значением

Рассуждения для $\lambda_\infty$ аналогичны.

**5. Заключение.** В работе изучена монотонная ветвь нелинейной спектральной задачи с «расщепленными» мерами, а именно, получены достаточные условия того, что множество неотрицательных значений, при которых нелинейная задача имеет хотя бы одно нетривиальное решение — непусто; показана монотонность решения по спектральному параметру.

**Благодарность.** *Авторы выражают благодарность доценту кафедры математического анализа Зверевой Маргарите Борисовне за ряд ценных рекомендаций, способствовавших улучшению рукописи.*

**Список литературы**

1. Покорный Ю.В. Интеграл Стилтьеса и производные по мере в обыкновенных дифференциальных уравнениях. *ДАН*, 1999;364(2):167–169.
2. Покорный Ю.В. О дифференциалах Стилтьеса в обобщенной задаче Штурма-Лиувилля. *ДАН*, 2002;383(5):1–4.
3. Боровских А.В., Покорный Ю.В. Системы Чебышева-Хаара в теории разрывных ядер Келлога. *Успехи математических наук.* 1994;49(3(297)):3–42.
4. Покорный Ю.В., Зверева М.Б., Шабров С.А. Осцилляционная теория Штурма–Лиувилля для импульсных задач. *Успехи математических наук.* 2008;63(1(379)):111–154.
5. Дерр В.Я., Кинзебулатов Д.М. Динамические обобщенные функции и проблема умножения. *Известия высших учебных заведений. Математика.* 2007;(5(540)):33–45.
6. Владимиров А.А. К осцилляционной теории задачи Штурма – Лиувилля с сингулярными коэффициентами. *Журнал вычислительной математики и математической физики.* 2009;49(9):1609–1621.
7. Шкаликов А.А. Регулярные спектральные задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. *Успехи математических наук.* 2021;76(5(461)):203–204.
8. Конечная Н.Н., Мирзоев К.А., Шкаликов А.А. Об асимптотике решений двучленных дифференциальных уравнений. *Математические заметки.* 2023;113(2):217–235.
9. Лялинов М.А. О собственных функциях существенного спектра модельной задачи для оператора Шрёдингера с сингулярным потенциалом. *Математический сборник.* 2023;214(10):71–97.
10. Ал-Гарайхоли И.А.Х. О приложении интегралов Стилтьеса с «расщепленными» мерами к краевых задачам. *Вестник Воронежского государственного университета. Серия Физика. Математика.* 2024;4:19–35.

**References**

1. Pokorny YuV. Stieltjes integral and derivatives with respect to measure in ordinary differential equations. *DAN.* 1999;364(2):167–169. (In Russ.)
2. Pokorny YuV. On Stieltjes differentials in the generalized Sturm-Liouville problem. *DAN.* 2002;383(5):1–4. (In Russ.)
3. Borovskikh AV., Pokorny YuV. Chebyshev-Haar systems in the theory of discontinuous Kellogg nuclei. *Russian Mathematical Surveys.* 1994;49(3(297)):3–42. (In Russ.)
4. Pokorny YuV., Zvereva MB., Shabrov SA. Oscillation theory of Sturm-Liouville for impulse problems. *Russian Mathematical Surveys.* 2008;63(1(379)):111–154. (In Russ.)
5. Derr VYa., Kinzebulatov DM. Dynamic Generalized Functions and the Multiplication Problem. *News of Higher Education Institutions. Mathematics.* 2007;(5(540)):33–45. (In Russ.)
6. Vladimirov AA. On the oscillation theory of the Sturm-Liouville problem with singular coefficients. *Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics.* 2009;49(9):1609–1621. (In Russ.)
7. Shkalikov A.A. Regular spectral problems for systems of ordinary differential equations of the first order. *Russian Mathematical Surveys.* 2021;76(5(461)):203–204. (In Russ.)
8. Konechnaya N.N., Mirzoev K.A., Shkalikov A.A. On the asymptotic behavior of solutions of two-term differential equations. *Mathematical Notes.* 2023;113(2):217–235. (In Russ.)
9. Lyalinov M.A. On the eigenfunctions of the essential spectrum of a model problem for the Schr?dinger operator with a singular potential. *Sbornik: Mathematics.* 2023;214(10):71–97. (In Russ.)
10. Al–Garayholi EAH. on the application of Stiltjes integrals with split measures to boundary value problems. *Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics.* 2024;4:19–35. (In Russ.)

**Конфликт интересов:** о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.
**Conflict of interest:** no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 10.01.2026
Поступила после рецензирования 21.02.2026
Принята к публикации 25.02.2026

Received January 10, 2026
Revised February 21, 2026
Accepted February 25, 2026

---

**СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ**

**Ал–Гарайхоли Иван Абдулкариим Хузам** – соискатель, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия; Университет Ти-Кар, Педагогический колледж точных наук, г. Насирия, Ирак

**Шабров Сергей Александрович** – доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры математического анализа, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия

**INFORMATION ABOUT THE AUTHORS**

**Evan A. H. Al-Garayholi** – Applicant, Voronezh State University, Voronezh, Russia; Thi-Qar University, Pedagogical College of Exact Sciences, Nasiriyah, Iraq

**Sergey A. Shabrov** – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Assosiate Professor, Professor of the Department of Mathematical Analysis, Voronezh State University, Voronezh, Russia

К содержанию