*Прикладная математика & Физика, 2026, том 58, № 1. С. 88–95.*
*Applied Mathematics & Physics, 2026, Volume 58, No 1. P. 88–95.*

УДК 519.24
MSC 60K35, 60J85
Оригинальное исследование

DOI 10.52575/2687-0959-2026-58-1-88-95
EDN TKTCHG

# Анализ перколяционной модели сети электрических распределительных станций

**Вирченко Ю. П.**, **Пархоменко В. Е.**
Белгородский государственный технологический университет им. В. Г. Шухова,
Россия, 308012, г. Белгород, ул. Костюкова, 46
virch@bsuedu.ru

**Аннотация.** Конструируется математическая модель расчета надежности функционирования сети электрических подстанций, связанных с фиксированной центральной распределительной станцией. В модели каждая $k$-я подстанция сети является вершиной конечного графа $\Gamma$ и характеризуется вероятностью $p_k$ собственной бесперебойной работы. Совокупность этих характеристик определяет неоднородное бернуллиевское поле с распределением вероятностей $\{p_k; k = 1 \div N\}$. В рамках построенной модели безотказная работа конкретной $k$-й подстанции сети обеспечивается наличием у нее перколяционной связи с центральной распределительной станцией. Выводится формула для оценки надежности работы каждой из подстанций сети и для этой характеристики предлагается алгоритм численного расчета.

**Ключевые слова:** бернуллиевское случайное поле, вероятность безотказной работы, внешняя граница кластера, кластерное разложение, парная перколяционная функция

**Для цитирования:** Вирченко Ю.П., Пархоменко В.Е. Анализ перколяционной модели сети электрических распределительных станций. *Прикладная математика & Физика.* 2026;58(1):88–95. DOI 10.52575/2687-0959-2026-58-1-88-95
EDN TKTCHG

---

Original Research

# Analysis of the Percolation Model of the Electric Distribution Stations Network

**Yuri P. Virchenko**, **Vladislav E. Parkhomenko**
Belgorod State Shukhov's Technological University,
46 Kostyukova St., Belgorod 308012, Russia
virch@bsuedu.ru

**Abstract.** A mathematical model is being developed to calculate the reliability of a network of electrical substations connected to a fixed central distribution station. Each $k$th substation in the network is a finite graph $\Gamma$ vertex in the model. It is characterizes by the probability $p_k$ of its uptime. Aggregate of all these characteristics defines a nonuniform Bernoulli random field with the probability distibution $\{p_k; k = 1 \div N\}$. In the framework of the model the uptime of the concrete $k$th substation in the network is understood as the presence of its percolation connection with a central distribution station. A formula is derived for assessing the reliability of each of the network's substations, and a numerical calculation algorithm is proposed for this characteristic.

**Keywords:** Bernoulli's Random Field, Probability of Uptime, External Cluster Board, Cluster Expansion, Pair Percolation Function

**For citation:** Virchenko YuP., Parkhomenko VE. Analysis of the Percolation Model of the Electric Distribution Stations Network. *Applied Mathematics & Physics.* 2026;58(1):88–95. (In Russ.). DOI 10.52575/2687-0959-2026-58-1-88-95
EDN TKTCHG

---

**1. Введение.** Теория перколяции возникла в статистической физике [1, 2] с целью математического моделирования процессов, протекающих в неупорядоченных конденсированных физических средах. Предметом изучения этой теории, с математической точки зрения, являлся физический эффект возникновения просачивания – так называемый эффект перколяции в реализациях случайных подмножеств фиксированного некомпактного множества $V$, которое мы называем *пространством погружения.* Каждое случайное подмножество представляется семейством $\mathcal{W} = \{W_j \subset V; j \in \mathbb{N}\}$ своих связных компонент. Теория исходит из того, что для таких подмножеств имеется какое-то распределение вероятностей. Тогда возникает задача вычисления вероятности просачивания связных компонент $W_j$, $j = 1 \div N$ на большие расстояния, то есть такого их расположения, что вершины одной или нескольких компонент могут удаляться на сколь угодно большие расстояния от заданной фиксированной вершины.

Ввиду сложности вычисления и анализа статистических характеристик конкретных моделей случайных множеств, при создании теории перколяции естественно пришлось отказаться от моделирования расположенной случайным образом в пространстве неупорядоченной твердотельной среды, и прибегнуть к дискретизации пространства погружения, а именно сконструировать соответствующую математическую модель на решетке $\mathbb{Z}^2$, а фактически, на бесконечном графе, гомеоморфном этой решетке. В дальнейшем, теория развивалась в основном в направлении изучения перколяции именно на бесконечных графах $\Gamma = \langle V, \Phi \rangle$ с не более чем счетным множеством вершин $V$ и множеством пар смежности $\Phi \subset V \times V$. Такую теорию можно назвать *дискретной теорией перколяции.* Дискретизация пространства погружения значительно облегчает изучение основанных на ней моделей теории перколяции. Однако она еще, сама по себе, не позволяет обозримым образом конструировать и анализировать математические модели этой теории. Для конкретизации теоретических построений нужно иметь возможность генерировать посредством какого-то алгоритма бесконечные и, может быть конечные, но очень большие графы таким образом, чтобы процесс их создания имел форму индуктивного построения на основе фиксированного набора конечных графов. Поэтому следующим шагом в направлении упрощения построения математических моделей теории перколяции явилось использование так называемых периодических графов (см. [3]), а также деревьев Кэйли.

Наконец, укажем еще на одну сложность конструирования и анализа перколяционных моделей. Она связана с нелокальностью самой описанной выше постановки задачи, которая вызывает значительные математические сложности (см. [3]) даже в случае, когда распределение вероятностей случайных подмножеств вершин бесконечного графа определяется посредством каких-то его локальных характеристик. Это приводит к тому, что явление перколяции возникает только при определенных значениях параметров, определяющих распределение вероятностей случайных подмножеств пространства погружения. Поэтому, в настоящее время, большинство результатов, полученных в рамках дискретной теории перколяции, связано с изучением предельного, с точки зрения локальности, случая, а именно, с исследованием перколяции бернуллиевского случайного поля $\{\rho(x); x \in V\}$ статистически независимых случайных величин $\rho(x)$, $x \in V$, принимающих значения $\{0, 1\}$. Случайные подмножества в этом случае определяются как $\{x \in V : \rho(x) = 1\}$.

Эффект перколяции состоит в наличии с ненулевой вероятностью $P$ бесконечной связной компоненты $W$, $|W| = \infty$ случайной реализации $\mathcal{W}$, которая называется *вероятностью перколяции.* Само собой разумеется, что этот эффект может проявляться только в случае, когда $|V| = \infty$. При этом отличие вероятности $P$ от нуля возникает начиная с каких-то граничных значений параметров, которые определяют распределение вероятностей случайных реализаций $\mathcal{W}$. В таком случае основные задачи, которые решаются в рамках дискретной теории перколяции, состоят в определении области таких значений и, более общó, в вычислении вероятности перколяции $P$. Однако мыслимы задачи теории перколяции, которые сводятся к вычислению вероятности того, что существует просачивание случайного поля $\{\rho(x); x \in V\}$ из фиксированной вершины $y$ в заданную вершину $z$ на графе $\Gamma$. Набор таких вероятностей, зависящий от пар $\{y, z\} \subset V$, мы называем в настоящей работе *парными перколяционными функциями.* Их вычисление может иметь приложение к анализу систем математического моделирования.

Примером указанного положения является, как раз, изучаемая нами в этой работе система соединенных между собой электрических подстанций, каждая из которых может с некоторой вероятностью, независимо от других подстанций, выходить из рабочего состояния. При этом вероятность противоположного события называется *надежностью* (см. [4, 5]) безотказной работы этой подстанции. Такого рода надежность мы будем, далее, называть *собственной надежностью.* Она определяется техническими характеристиками подстанции [6] и рассматривается нами как заданная величина для каждой из подстанций. Задача состоит в вычислении надежности работы каждой из включенных в сеть подстанций, но уже не собственной, а той, которая зависит от того, какую роль каждая из них играет в функционировании всей системы.

**2. Описание модели.** В этом разделе мы сконструируем модель, описывающую работу распределительной сети электрических подстанций, с целью расчета надежности работы каждой из них в составе сети.

Сеть состоит из центральной распределительной электростанции (РЭЦ), через которую электрическое напряжение ($\sim 30 \div 120$ кВ) распределяется по всей сети, состоящей из некоторого множества промежуточных подстанций. Оно уменьшается по мере удаления от РЭЦ по отдельным ветвям сети. В дальнейшем, напряжение распределяется ($\sim 6$ кВ) по конечным подстанциям сети, которые доводят напряжение до потребителей. Обозначим посредством $N + 1 \sim 50 \div 100$ число подстанций, составляющих сеть и перенумеруем все эти подстанции каким-либо удобным, с операционной точки зрения, способом посредством $k = 0 \div N$. Предполагается, что каждая из подстанций характеризуется своей собственной надежностью безаварийной работы — некоторым параметром $p_j \in (0, 1)$, $j = 0 \div N$, имеющим вероятностный смысл, который может быть рассчитан на основе технической документации подстанции. Целью создания математической модели является возможность расчета надежности работы каждой из подстанций уже в составе сети.

Модель строится на основе понятия графа, у которого вершинами являются подстанции, а ребрами или, что тоже самое, смежными парами вершин, — линии электропередачи, соединяющие пары подстанций. При этом граф понимается как неориентированный и, конечно же, не содержащий петель и кратных ребер. Более того, в предлагаемой модели мы не приписываем ребрам, соединяющим вершины, какие-либо веса. Каждой вершине мы приписываем вес $p_j \in (0,1)$, $j \in I_N \cup \{0\}$, $I_N = \{1, 2, ..., N\}$, который является характеристикой подстанции, величина которой не зависит от работы других станций сети.

Таким образом, модель представляет собой пару $\langle \Gamma, \rho \rangle$. Здесь $\Gamma = \langle V, \Phi \rangle$ – граф, у которого $V$ – множество вершин, а $\Phi$ – множество его смежных пар $\{j,k\} \subset (\{0\} \cup I_N)^2$ вершин, и $\rho = \{\rho_j ; j \in \{0\} \cup I_N\}$ – случайное бернуллиевское поле (вообще говоря, неоднородное), то есть множество случайных величин таких, что каждая их пара $\rho_j$ и $\rho_k$ статистически независима при $j \neq k$ и $\Pr\{\rho_m = 1; m \in \{0\} \cup I_N\} = p_m$. Естественно, что мы считаем граф $\Gamma$ связным.

В рамках такой модели мы пренебрегаем влиянием на надежность работы сети и, соответственно, на надежность каждой из входящих в нее подстанций величины распределяемого ею электрического напряжения, а также пренебрегаем различием процесса электропередачи между каждыми двумя связанными подстанциями.

Для завершения построения модели, описывающей сеть электроподстанций, необходимо упорядочить их положение в составе сети. Прежде всего, укажем, что в графе должна быть выделенная вершина, описывающая работу РЭЦ. Этой вершине мы припишем индекс 0. Нумерацию остальных вершин мы учтем в специальной структуре графа посредством множества смежности $\Phi$.

Как уже было отмечено во введении, стандартные задачи дискретной теории перколяции ставятся для графов, построенных на основе какого-то алгоритма. Графы, используемые нами для моделирования сети электроподстанций, конечно же, не обладают таким свойством и, в то же время, являются довольно большими. Такая ситуация являются очень богатой, с точки зрения аналитического изучения системы. Поэтому, во-первых, сразу нужно ориентироваться на то, чтобы под решением задачи понимать именно ее численное решение, которое основано на разработке соответствующего алгоритма. Во-вторых, даже при постановке задачи численного решения разумно ограничиться каким-то специальным семейством графов, так как вряд ли возможно создание универсальных расчетных алгоритмов, пригодных для графов произвольного вида, для проведения необходимых вычислений за обозримое время.

Каждой случайной реализации $\rho$ поля сопоставим множества $V(\rho) = \{j \in V : \rho_j = 1\}$. Соответствующие сужения графа $\Gamma$ на множества $V(\rho)$ обозначим посредством $\Gamma(\rho) = \langle V(\rho), \Phi(\rho) \rangle$, где $\Phi(\rho)$ сужение множества смежности $\Gamma$ на $V(\rho)$. Графы $\Gamma(\rho)$ уже не обязательно являются связными. Если на таком графе имеется путь из вершины $j$ в вершину $k$, полностью расположенный на $V(\rho)$, то мы будем говорить, что на графе $\Gamma(\rho)$ имеется перколяция из вершины $j$ в вершину $k$. В этом случае мы будем писать $j \sim k$.

Так как используемый в модели граф $\Gamma$ конечен, то для него не имеет смысла стандартная постановка задачи дискретной теории перколяции. В такой ситуации как теоретический, так и практический интерес представляет задача вычисления парной перколяционной функции, которая определяется формулой

$$p_{j,k} = \Pr\{\rho_j \sim \rho_k\}\,.$$

В частности, число $p_{0,k}$ в описанной выше модели является вероятностью безотказной работы $k$-й подстанции, получающей электрическое напряжение от РЭЦ. Нашей целью в этой работе является разработка алгоритма для вычисления вероятностей $p_{0,k}$ для каждой подстанции сети, $k = 1 \div N$. Для решения этой задачи нам потребуется описать конкретную структуру графов, которые предполагается использовать в качестве составной части математической модели сети электрических подстанций. Это мы сделаем в пятом разделе, а перед этим мы приведем некоторые необходимые для такого описания понятия и факты теории графов (см. по этому поводу, например, [7])

**3. Древесное представление графов.** С целью описания семейства графов, которые могут быть использованы для моделирования работы сети электроподстанций, опишем представление конечного графа, удобное для вычисления парных перколяционных функций, определяемых посредством задания на нем бернуллиевского поля.

Пусть задан граф $\Gamma = \langle V, \Phi \rangle$. Последовательность $\gamma(j,k) = \langle j = j_0, j_1, ..., j_n = k \rangle$ вершин графа $\Gamma$, у которых каждая пара $\{j_{m-1}, j_m\}$, $m = 1 \div n$ является смежной, то есть принадлежит $\Phi$, называется путем на этом графе. При этом число $n$ называется длиной пути $\gamma(j,k)$. Путь $\gamma(j,k)$ называется несамопересекающимся, если для номеров $j_m$ и $j_{m'}$ выполняется $j_m \neq j_{m'}$ для любой пары $\{m, m'\}$ несовпадающих номеров. В противном случае, путь называется *самопересекающимся.*

Граф $\Gamma$, на котором нельзя разместить ни одного самопересекающегося пути $\gamma(j,k)$, то есть так, чтобы имело место $\{\gamma(j,k)\} \subset \Phi$, называется *древесным.*

Степенью вершины $m \in V$ графа $\Gamma$ называется число $|\{j \in V : \{j,m\} \in \Phi\}|$. Вершину $m \in V$ назовем концевой для графа $\Gamma$, если ее степень равна 1.

Нам понадобится понятие вершины сочленения, которое используется в теории гиббсовских точечных случайных полей (см. по этому поводу[8],[9]).

**Определение 1.** *Вершина $m$ графа $\Gamma$ называется его вершиной сочленения, если на связном графе существует пара вершин $\{j,k\} \subset \Phi$ таких, что любой несамопересекающийся путь $\gamma(j,k)$ обязательно проходит (содержит) вершину $m$.*

Очевидно, что все неконцевые вершины древесного графа являются вершинами сочленения. Граф, который не имеет вершин сочленения, будем называть *блочным.*

Определим некоторые операции над графами.

**Определение 2.** *Пусть $\Gamma_1 = \langle V_1, \Phi_1 \rangle$ и $\Gamma_2 = \langle V_2, \Phi_2 \rangle$ – графы с непересекающимися множествами $V_1$ и $V_2$ вершин. Пусть также в множествах $V_1$ и $V_2$ отмечены вершины $m_1$ и $m_2$. Бинарная операция, которая называется склейкой графов $\Gamma_1$ и $\Gamma_2$ по вершинам $m_1$ и $m_2$, соответственно, сопоставляет парам $\langle \Gamma_1, m_1 \rangle$ и $\langle \Gamma_2, m_2 \rangle$ новый граф $\Gamma = \langle \Gamma_1, m_1 \rangle \circ \langle \Gamma_2, m_2 \rangle$ с множеством вершин $V = (V_1 \cup V_2)_{m=m_1=m_2}$ и отношением смежности $(\Phi_1 \cup \Phi_2)_{m=m_1=m_2}$, который обладает отмеченной вершиной $m$.*

Таким образом, операция склейки пар $\langle \Gamma_1, m_1 \rangle$ и $\langle \Gamma_2, m_2 \rangle$, которую будем далее обозначать посредством знака $\vee$, сопоставляет парам $\langle \Gamma_j, m_j \rangle$, $j \in \{1,2\}\}$ новую пару $\langle \Gamma, m \rangle$.

Очевидно, что вершина $m$ на графе $\Gamma$, полученном в результате склейки графов $\Gamma_1$ и $\Gamma_2$, является его вершиной сочленения. Следующая операция является, в некотором смысле, обратной по отношению к операции склеивания графов.

**Определение 3.** *Пусть граф $\Gamma = \langle V, \Phi \rangle$ обладает отмеченной вершиной сочленения $m$. Операция разрезания графа $\Gamma$ по вершине $m$ сопоставляет ему пару графов $\Gamma_1 = \langle V_1, \Phi_1 \rangle$ и $\Gamma_2 = \langle V_2, \Phi_2 \rangle$, которые имеют непересекающиеся множества $V_1 = (V)_{m=m_1}$ и $V_2 = (V)_{m=m_2}$ с отмеченными вершинами $m_1$ и $m_2$ и отношения смежности $\Phi_1 = (\Phi)_{V_1}$ и $\Phi_2 = (\Phi)_{V_2}$, то есть представляющие собой сужения отношения смежности $\Phi$, соответственно, на множества $V_1$ и $V_2$, $\Phi_1 = (\Phi)_{V_1}$ и $\Phi_2 = (\Phi)_{V_2}$ с переименованием вершины $m$, соответственно, в $m_1$ и $m_2$.*

Очевидно, что справедливо следующее утверждение.

**Теорема 1.** *Если граф $\Gamma$ обладает вершиной сочленения $m$, то он однозначным образом представим в виде склейки двух графов $\Gamma_1 = \langle V_1, \Phi_1 \rangle$ и $\Gamma_2 = \langle V_2, \Phi_2 \rangle$, с множествами вершин $V_1 = (V)_{m=m_1}$ и $V_2 = (V)_{m=m_2}$ и отношениями смежности, которые являются сужениями отношения смежности $\Phi$, соответственно, на множества $V_1$ и $V_2$, $\Phi_1 = (\Phi)_{V_1}$ и $\Phi_2 = (\Phi)_{V_2}$.*

Используя последовательно утверждение этой теоремы, доказывается

**Теорема 2.** *Любой граф $\Gamma$, посредством операции разрезания по вершинам сочленения, однозначным образом представляется в виде набора пар $\{\langle \Gamma_j, C_j \subset V_j \rangle; j \in I_n\}$ блочных графов $\Gamma_j = \langle V_j, \Phi_j \rangle$ с множествами $C_j$, $j = 1 \div n$ отмеченных у них вершин. При этом суммарное число $\sum_{j=1}^{n} |C_j|$ вершин в множестве $\bigcup_{j=1}^{n} C_j$ превосходит удвоенное число вершин сочленения в графе $\Gamma$.*

□ Доказательство проводится последовательными разрезаниями графа $\Gamma$ по вершинам сочленения. При этом так как общее множество вершин сочленения на каждом шаге разрезания может только лишь сужаться, то процесс последовательных разрезаний должен остановиться тогда, когда исчерпаются все вершины сочленения исходного графа $\Gamma$. Получающиеся в конце последовательности разрезаний графы $\Gamma_j$ однозначно определены с точностью до переименования их вершин. Они являются блочными, так как в противном случае, процесс разрезания может быть продолжен. Множества $\{C_j \subset V_j; j \in I_n\}$ всех новых вершин, полученных в результате разрезаний, представляют собой множества отмеченных вершин в графах $\Gamma_j$, $j \in I_n$. ■

Очевидно, что любой граф $\Gamma$ может быть получен посредством операции склеивания из набора $\{\Gamma_j = \langle V_j, \Phi_j \rangle; j \in I_n\}$ блочных графов, у которых в множествах их вершин выделены подмножества $C_j \subset V_j$. При этом число вершин в объединении $\bigcup_{j=1}^{n} C_j$ должно превосходить удвоенное число вершин сочленения в графе $\Gamma$.

**4. Парная перколяционная функция.** В этом разделе мы выведем формулу для расчета парной перколяционной функции, пригодную для связных конечных графов произвольного вида, которая выражает эту функцию через парные корреляционные функции блоков, составляющих этот граф.

Пусть $J(\Gamma)$ – множество вершин сочленения графа $\Gamma$ и $\mathcal{B}(\Gamma)$ – семейство блоков, составляющих этот граф. Если $B_k$, $k = 1 \div L(\Gamma)$ – блоки, составляющие семейство $\mathcal{B}(\Gamma)$, то сопоставим каждому блоку $B_k$ из этого семейства множество $J_k$ принадлежащих ему вершин сочленения. Составим также пары блоков $\{B_k, B_l\}$, у которых имеется общая вершина сочленения, которую мы обозначим как $j_{k,l}$. Введем в рассмотрение граф $\bar{\Gamma} = \langle \mathcal{B}(\Gamma), \Phi(\bar{\Gamma}) \rangle$, у которого множество смежности $\Phi(\bar{\Gamma})$ состоит из пар $\{B_k, B_l\}$, имеющих общую вершину сочленения $j_{k,l}$. Граф $\bar{\Gamma}$ будем называть *каркасом* графа $\Gamma$. Очевидно, что граф $\bar{\Gamma}$ является древесным.

Для заданного бернуллиевского случайного поля $\{p_j; j \in I_N\}$ на графе $\Gamma$ определим его сужение $\{p_j; j \in B_k\}$ на каждый из блоков $B_k$, $k = 1 \div L(\Gamma)$, составляющих граф. Тогда такие сужения определяют для каждого блока условную парную перколяционную функцию $\bar{p}_{lm}^{(k)}$ для пар $\{l,m\} \subset B_k$ вершин из блока $B_k$, $k = 1 \div L(\Gamma)$ при условии, что имеет место случайное событие $\{\rho_l = 1\}$. В частности, каждое такое сужение определяет условную вероятность $\bar{p}_{l,j_{k,m}}^{(k)}$ перколяции из любой вершины $l$ блока $B_k$ в вершину сочленения этого блока с блоком $B_m$, $m \neq k$ при том же условии. Поэтому, точно так же, такое сужение определяет условную вероятность $\bar{p}^{(k)}_{j_{k,m},j_{k,m'}}$ перколяции из вершины сочленения $j_{k,m}$ блока $B_k$ с блоком $B_m$ в вершину $j_{k,m'}$ сочленения этого блока $B_k$ с любым другим блоком $B_{m'}$ при выполнении условия $\{\rho_m = 1\}$.

Зафиксируем пару вершин $\{j_0, j_s\} \subset V$ на графе $\Gamma$ так, что вершина $j_0$ принадлежит блоку $B_{k_0}$, а вершина $j_s$ принадлежит блоку $B_{k_s}$ так, что $k_0 \neq k_s$. Паре блоков $B_{k_0}$ и $B_{k_s}$ сопоставим путь $\bar{\gamma}(j_0, j_s)$ на графе $\bar{\Gamma}$, соединяющий блоки $B_{j_0}$ и $B_{j_s}$.

**Теорема 4.** *Парная перколяционная функция $p_{j_0,j_s}$ представляется в виде произведения*

$$p_{j_0,j_s} = c\bar{p}^{(k_0)}_{j_0,j_{k_0,k_1}} \Big[\prod_{m=1}^{s-1} \bar{p}^{(k_m)}_{j_{k_{m-1},k_m},j_{k_m,k_{m+1}}}\Big] \bar{p}^{(k_s)}_{j_{k_{s-1},k_s},j_{k_s,j_s}} . \tag{1}$$

□ Справедливость этой формулы следует из статистической независимости значений случайного поля $\{\rho_m; m \in I_N \cup \{0\}\}$ в вершинах, расположенных вне блоков $B_{k_0}, B_{k_1}, ..., B_{k_s}$ со значениями этого поля в вершинах, принадлежащих этим блокам. Поэтому, так как любой несамопересекающийся путь $\gamma(j_0, j_s)$, соединяющий вершины $j_0$ и $j_s$, расположен полностью в множестве вершин $\bigcup_{m=1}^{s} B_{k_{m-1},k_m}$, то вероятность $p_{j_0,j_s}$ совпадает с условной вероятностью того, что путь $\gamma(j_0, j_s)$ расположен в указанном множестве. Тогда, так как для любого пути $\gamma(j_0, j_s)$, расположенного в множестве $\bigcup_{m=1}^{s} B_{k_{m-1},k_m}$, справедливо представление $\gamma(j_0, j_{k_0,k_1}) \vee \gamma(j_{k_0,k_1}) \vee ... \vee \gamma(j_{k_{s-1},k_s}) \vee \gamma(j_{k_s}, j_s)$, где пути $\gamma_{k_{m-1},k_m}$ расположены, соответственно, в блоках $B_{k_0}, B_{k_1}, ..., B_{k_s}$, то для вероятности $p_{j_0,j_s}$ справедливо представление

$$p_{j_0,j_s} \equiv \Pr\Big\{\exists(\gamma(j_0, j_s))\Big(\{\gamma(j_0, j_s)\} \subset \bigcup_{m=1}^{s} B_{k_{m-1},k_m}\Big)\Big\} =$$

$$= \Pr\{j_s \sim j_{k_s,k_{s-1}} | j_{k_s,k_{s-1}} \sim j_0\}\Big[\prod_{m=2}^{s} \Pr\{j_{k_m,k_{m-1}} \sim j_{k_{m-1},k_{m-2}} | j_{k_{m-1},k_{m-2}} \sim j_0\}\Big] \Pr\{j_{k_{1,0}} \sim j_0\} =$$

$$= \bar{p}^{(k_s)}_{j_s,\, j_{k_s,k_{s-1}}} \Big[\prod_{m=2}^{s} \bar{p}^{(k_{m-1})}_{j_{k_m},k_{m-1},\, j_{k_{m-1},k_{m-2}}}\Big] c\bar{p}^{(k_0)}_{l,\, j_{k_0,k_1}} ,$$

где мы воспользовались формулой для вероятности произведения событий и условием независимости случайных значений поля $\{\rho_m; m \in I_N \cup \{0\}\}$, находящихся в вершинах из различных блоков графа $\Gamma$, а также определением вероятностей $\bar{p}^{(k)}_{l,l'}$. ■

**Следствие.** *Вероятность перколяции из вершины 0 в любую $l$-ю вершину графа равна*

$$p_{0,l} = c\bar{p}^{(k_0)}_{0,j_{k_0,k_1}} \Big[\prod_{m=1}^{s-1} \bar{p}^{(k_m)}_{j_{k_{m-1},k_m},j_{k_m,k_{m+1}}}\Big] \bar{p}_{j_{k_{s-1},k_s},l} . \tag{2}$$

□ Формула (2) следует из (1) при заменах $j_0$ на 0 и $j_s$ на $l$. ■

Далее, для численных расчетов понадобится следующая очевидным образом справедливая формула, которая выражает вероятность перколяции внутри каждого из блоков $B_k$, $k = 1 \div L(\Gamma)$ из вершины $l \in B_k$ в какую-то из вершин сочленения $j_k$

$$p_{l,j_k} = \sum_{W \subset B_k : j_k \sim l} \Big(\prod_{m \in W} p_m\Big)\Big(\prod_{m' \in B_k \setminus W} (1 - p_{m'})\Big), \tag{3}$$

где суммирование производится по всем подмножествам $W$ вершин из блока $B_k$ таким, которые содержат какой-либо путь $\gamma(l, j_k)$.

**5. Структура программы вычисления перколяционной функции.** На основе формул (2) и (3) создана программа численного расчета надежности работы распределительных подстанций электрической сети, управляемой посредством РЭЦ, которая может быть применена для сети, типичная из которых схематически изображена на рисунке. Вся сеть управляется из центральной распределительной станции (с наибольшим значением напряжения ∼ 110кВ). Она выполняет роль отмеченной нулевой вершины описанной в тексте модели. Далее, расположены промежуточные подстанции с управляемым напряжением ∼ 35кВ. На периферии графа находятся конечные подстанции, распределяющие напряжение 6кВ.

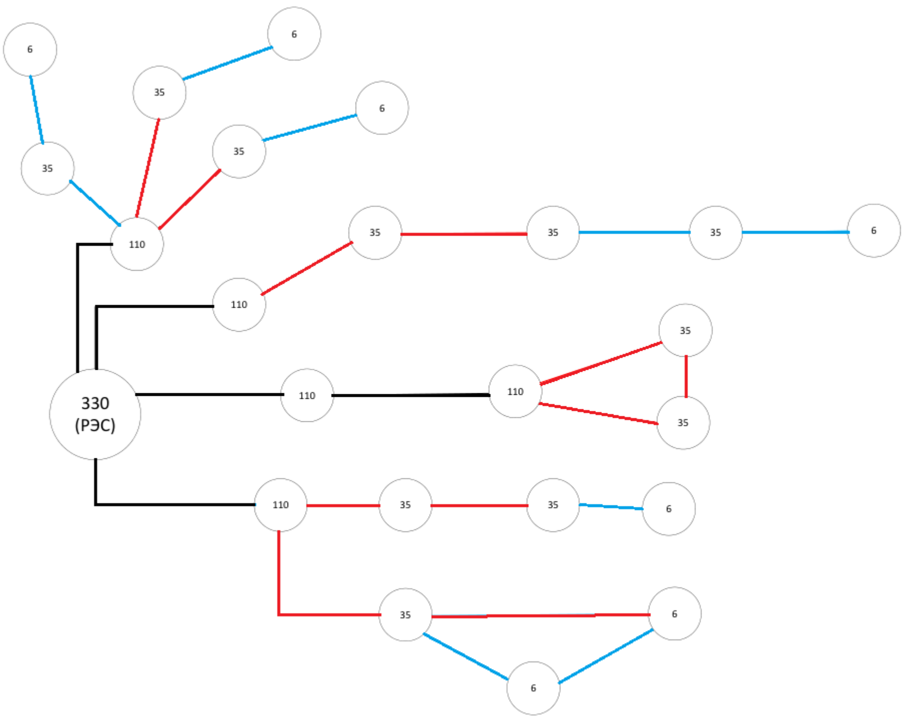


Рис. 1. На рисунке схематически изображены кружками, которые являются вершинами графа, подстанции электрической сети. Внутри них указаны величины распределяемых ими электрических напряжений
Fig. 1. The figure schematically depicts the electrical network substations as circles, which are the nodes of the graph. The values of the electrical voltages they distribute are indicated inside them

Эта программа позволяет по входным данным относительно общего числа подстанций сети и имеющимся между ними линиям электропередачи, которые играют роль ребер модельного графа $\Gamma$, рассчитать вероятности бесперебойной работы каждой из подстанций на основе заданных технических характеристик сети — надежностей каждой из включенных в ее состав подстанций. Возможность применения программы связана с довольно простым устройством модельного графа $\Gamma$. Он состоит из древесного графа $\Gamma'$, корневая вершина которого моделирует центральную распределительную станцию сети. В состав древесного графа входит также некоторое количество промежуточных подстанций. К концевым вершинам графа $\Gamma'$ приклеены блоки. Эти блоки состоят из малого числа вершин $\sim 3 \div 5$, которые моделируют подстанции, выполняющие роль конечных распределителей напряжения. Некоторые пары вершин, входящих в состав одного блока, соединены между собой связями так, чтобы блок не содержал внутри себя древесный подграф, хотя возможны такие ситуации, когда конечные распределительные подстанции являются концевыми вершинами древесного графа $\Gamma'$, что, естественно, упрощает расчет надежности их функционирования в составе сети. Описанный вид модельного графа $\Gamma$ указывает на то, что подстанции, образами которых являются вершины графа, входящие в один и тот же блок, соединены между собой линиями электропередачи.

Малое число вершин, входящих в каждый из блоков, позволяет рассчитать аналитически явно выражения для вероятностей $\bar{p}_{kl}^{(k)}$ перколяции из вершины $k$-го блока, по которой производится его приклеивание к графу $\Gamma'$, в любую $l$-ю вершину, входящую в состав этого блока. Эти выражения имеют полиномиальный вид относительно вероятностей $p_j$ собственных надежностей работы электрических подстанций, которым соответствуют вершины графа $\Gamma$ с номерами $j$, расположенные в $k$-м блоке. Наличие указанных аналитических выражений также значительно упрощает процедуру рассчета. Опишем структуру программы, не входя в детали составляющих ее алгоритмов, что требует отдельной публикации.

1. Программа исходит из базы данных $\mathsf{D}$ относительно всех подстанций, входящих в состав сети. Эта база составлена на основе предварительной нумерации $k = 1 \div N$ всех подстанций сети, присоединенных к РЭЦ (нулевой подстанции). В соответствии с этой нумерацией в базе указаны их собственные надежности $p_k$, $k = 1 \div N$, которая представляет собой упорядоченный набор $\mathsf{P} = \langle p_k; k = 1 \div N \rangle$ и описаны все связи между подстанциями сети, то есть описано отношение смежности модельного графа $\Gamma$ в виде его $\{0, 1\}$-матрицы смежности $G_{jk} = (\mathsf{G})_{jk}$, где 1 соответствует наличию связи между вершинами с номерами $j$ и $k$ модельного графа, то есть наличию линии электропередачи между $j$-й и $k$-й подстанциями, а 0 — отсутствию такой связи. Таким образом, база данных $\mathsf{D}$ представляет собой пару $\langle \mathsf{P}, \mathsf{G} \rangle$.

2. На первом этапе программа, исходя из базы данных, находит для каждой вершины графа Г, используя алгоритм Дейкстры [10], кратчайшие пути $\gamma_{0,k}$ из нулевой вершины. Таким образом составляется упорядоченный набор путей $\mathsf{R} = \langle \gamma_{0,k}; k = 1 \div N \rangle$.

3. На втором этапе, на основе набора D, программа составляет, исходя из базы данных, каркас графа Г. Этот этап выполняет отдельная подпрограмма, которая, исходя из путей набора D, посредством сравнения их начальных отрезков, находит набор S вершин каркаса, не являющихся его концевыми вершинами, а также набор E концевых вершин каркаса. После этого производится перенумерация всех вершин графа и, как следствие, перенумерация элементов базы данных. Нумерация становится двух-индексной, в которой значение первого индекса указывает на номер вершины каркаса, а второй, при фиксированном номере вершины каркаса, указывает номер вершины в блоке, соответствующем этой вершине в каркасе. Причем при нумерации вершин каркаса на первое место сначала перечисляются вершины из набора E.

4. На третьем этапе программа формирует блоки графа Г. Это достигается последовательным выделением для каждого пути $\gamma_{0,k}$ из набора E тех путей $\gamma_{0,l}$ из набора D, конечные вершины которых не попадают в множество $\mathsf{E} \cup \mathsf{S}$, но начальный их отрезок совпадает с путем $\gamma_{0,k}$, конечная вершина которого находится в наборе E. Набор концевых вершин всех таких путей составляют подграф, который является блоком $B_k$ в подграфе Г.

5. Далее, исходя из сформированных на основе базы D списков вершин, составляющих каркас S графа Г, то есть список входящих в него вершин вместе с соответствующей матрицей смежности, формируемой на основе матрицы G, создаются списки вершин, составляющих блоки в графе Г с соответствующими им при каждом фиксированном значении номера вершины из списка E матрицами смежности.

6. Наконец, имея полную информацию о каркасе и блоках графа Г, используя формулы (2) и (3), вычисляются вероятности $p_{0;k,l}$ перколяции из нулевой вершины в $l$-ю вершину $k$-го блока.

**6. Заключение.** В работе рассмотрена статистическая математическая модель технической системы, формулировка и анализ которой осуществляется в рамках представлений теории перколяции. Постановка задачи при изучении этой модели существенно отличается от постановок тех задач, которым посвящено большинство исследований теории. Эти отличия приводят к тому, что разработанные в рамках дискретной теории перколяции аналитические методы становятся неприменимыми при ее решении. Это утверждение, в первую очередь, касается нерегулярности конструкции графов, на которых задается случайное поле $\{\rho(x); x \in V\}$. Поэтому теряются удобные, с точки зрения математического анализа, свойства распределений вероятностей этого поля на таких графах, связанные с его трансляциями. В частности, нерегулярность структуры графов влечет неопределенность их размерности при попытке их погружения в евклидово пространство с условием периодичности относительно трансляций, и поэтому становятся неприменимыми контурные оценки (см. [3]) вероятности перколяции.

Вторым отличием в постановке изучаемой в работе задачи, существенно усложняющей ее изучение, является неоднородность случайного поля $\{\rho(x); x \in V\}$, которая, в месте с нерегулярностью конструкции графа, приводит к тому, что вычисляемые вероятностные характеристики становятся зависящими от большого числа параметров, определяющих распределение вероятностей этого поля.

Наконец, существенное изменение претерпевает постановка задачи о наличии перколяции, ввиду конечности графа, который заложен в основу модели. Эта конечность приводит к тому, что исчезает понятие порога перколяции и, вообще, понятия о критическом поведении перколяционных вероятностных характеристик. В связи с этим возникает совершенно новая постановка вопросов в теории перколяции, при которой интересуются свойством перколяции уже не с качественной точки зрения, то есть вопросом обладает или не обладает этим свойством изучаемая модель, а вопрос может ставиться с количественной точки зрения. В частности, относительно вероятности перколяции $P$, которая в случае конечного графа всегда отлична от нуля, ставится вопрос о величине ее отклонения от нуля. При такой постановке вопроса, вместо задачи о вычислении порога перколяции, мы приходим к формулировке задачи, аналогичной той, которая имеется в математической статистике при нахождении интервальных оценок параметров распределений на основе выборок случайных величин, которые основаны на понятии *уровня значимости*. А именно, в случае однородности бернуллиевского случайного поля $\{\rho(x); x \in V\}$, то есть его зависимости только от одного параметра $p$, можно интересоваться величиной этого параметра, при которой зависящая от этого параметра вероятность перколяции отклоняется от нуля не менее чем на a priori заданную величину.

В настоящей работе вероятность перколяции вычислялась на основе парной перколяционной функции, что тоже является существенным отличием от большого числа исследований теории. Несмотря на то, что прикладной характер задачи и нерегулярность конструкции графов, приводящая к неприменимости аналитических методов дискретной теории перколяции, подразумевает ее численное решение, существенным обстоятельством, которое приводило к доверительным численным результатам в конкретной практической ситуации применения математической модели, являлось то, что задача решалась в случае, когда типичная изучаемая конструкция графа Г имела все же довольно простой вид. А именно, этот граф обладал блоками малых размеров $\sim 4$ так, что в компьютерную программу можно было вставлять конкретный вид тех полиномов от вероятностей $p_j$, $j = 1 \div N$, которые представляли парную перколяционную функцию каждого такого отдельного блока. В противном случае, если бы величина $|B_j|$ какого-либо из блоков была уже несколько больше, то расчет парной перколяционной функции приводил бы к учету экспоненциально большого числа слагаемых $\gtrsim 2^{|B_j|}$, что уже при $|B_j| = 20$ давало бы число $\approx 10^6$. Таким образом, для получения численного результата пришлось бы вычислять коэффициенты $10^6$ полиномов, имеющих в своем составе порядка 20-ти слагаемых.

## References


1. Hammersley JM. Percolation processes: lower bounds for the critical probability. *Ann. Math. Statistics.* 1957;28(3):790–795.
2. Frisch CM., Hammersley JM. Percolation processes and related topics.*Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics.* 1963;11:894–918.
3. Kesten H. Percolation Theory for Mathematicians. New York: Springer Science+Business Media; 1982. 424 p.
4. Gnedenko BV., Belyayev YuK., Solovyev AD. Mathematical methods in the reliability theory. New York: Academic Press, 1969. – 506 p.
5. Gnedenko BV., Belyaev YuK., Kovalenko I.N. Mathematical problems of the reliability theory. *Itogi nauki i tekhniki. Seriya "Teoriya veroyatnostey. Matematicheskaya statistika. Teoreticheskaya kibernetika".* 1964. M.: VINITI, 1966. – P.7–53.
6. Tarakanov KV., Ovcharov LA., Tyryshkin AN. Analyitical methods of systems investigation. Moscow: Soviet Radio, 1974. – 240 p.
7. Harary F., Palmer EM. Graphical Enumeration. New York: Academic Press, 1973. – 324 p.
8. Virchenko YuP., Danilova LP. Graphs and algebras of Symmetric Functions. *Journal of Mathematical Sciences.* –Springer – 2023;272:642–657.
9. Mayer JE., Goeppert Mayer M. Statistical Mechanics. New York: J. Wiley & sons, Incorporated, 1966. – 495 p.
10. Dijkstra EW. A note on two problems in connection with graphs. *Numerische Mathematik.* F. Brezzi – Springer Science+Business Media, 1959;1(1):269–271.


**Конфликт интересов:** о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.
**Conflict of interest:** no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 30.12.2025
Поступила после рецензирования 10.02.2026
Принята к публикации 16.02.2026

Received December 30, 2025
Revised February 10, 2026
Accepted February 16, 2026

### СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

**Юрий Петрович Вирченко** – доктор физико-математических наук, профессор кафедры программного обеспечения, Белгородский государственный технологический университет им. В. Г. Шухова, г. Белгород, Россия

**Пархоменко Владислав Евгеньевич** – аспирант кафедры программного обеспечения, Белгородский государственный технологический университет им. В. Г. Шухова, г. Белгород, Россия

### INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

**Yuri P. Virchenko** – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Department of Software, Belgorod State Shukhov's Technological University, Belgorod, Russia

**Vladislav E. Parkhomenko** – Graduate Student of the Department of Software, Belgorod State Shukhov's Technological University, Belgorod, Russia

К содержанию