Прикладная математика & Физика, 2020, том 52, №4. С. 255–261.

УДК 517.95 DOI 10.18413/2687-0959-2020-52-4-255-261
MSC 35J56

ОБ ИЗМЕНЕНИИ ХАРАКТЕРА УСТОЙЧИВОСТИ ТРИВИАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ПРИ ПЕРЕХОДЕ ОТ МОДЕЛИ С СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ К МОДЕЛИ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

М. В. Половинкина[1], **И. П. Половинкин**[2]

[1] Воронежский государственный университет инженерных технологий,
Воронеж, 394036, Россия
E-mail: polovinkina-marina@yandex.ru
[2] Воронежский государственный университет,
Воронеж, 394018, Россия
E-mail: polovinkin@yandex.ru

Аннотация. Рассматривается вопрос об уточнении условий устойчивости тривиального стационарного решения при замене модели с сосредоточенными параметрами моделью с распределенными параметрами путем добавления слагаемых, моделирующих диффузионные процессы. В некоторых случаях тривиальное решение, неустойчивое в моделях без диффузионных членов, оказывается устойчивым в моделях с диффузионными членами.

Ключевые слова: модель с сосредоточенными параметрами, модель с распределенными параметрами, диффузионные модели, стационарное решение, устойчивость.

Для цитирования: Половинкина М. В., Половинкин И. П. 2020. Об изменении характера устойчивости тривиального решения при переходе от модели с сосредоточенными параметрами к модели с распределенными параметрами. Прикладная математика & Физика. 52(4): 255–261. DOI 10.18413/2687-0959-2020-52-4-255-261.

ABOUT CHANGE IN THE STABILITY CHARACTER OF THE TRIVIAL SOLUTION AT THE TRANSITION FROM A MODEL WITH CONCENTRATED PARAMETERS TO A MODEL WITH DISTRIBUTED PARAMETERS

M. V. Polovinkina[1], **I. P. Polovinkin**[2]

Voronezh State University of Engineering Technologies,
Voronezh, 394036, Russia
E-mail: polovinkina-marina@yandex.ru
Voronezh State University,
Voronezh, 394018, Russia
E-mail: polovinkin@yandex.ru
Received November 30, 2020

Abstract. We consider the question of refining the stability conditions for the trivial stationary solution for replacing the lumped model with a distributed model by adding terms, simulating diffusion processes. In some cases, a trivial solution that is unstable in models without diffusion terms turns out to be stable in models with diffusion terms.

Key words: model with lumped parameters, model with distributed parameters, diffusion models, stationary solution, stability.

For citation: Polovinkina M. V., Polovinkin I. P. 2020. On the change in the nature of stability of a trivial solution in the transition from a model with lumped parameters to a model with distributed parameters. Applied Mathematics & Physics. 52(4): 255–261 (in Russian). DOI 10.18413/2687-0959-2020-52-4-255-261.

Рассмотрим начально-краевую задачу для системы уравнений в частных производных:

$$\frac{\partial u_s}{\partial t} = \vartheta_s \Delta u_s + F_s(u), \ \ x = (x_1, \ldots, x_n) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, \ t > 0, \tag{1}$$

$$\left(\mu_s u_s + \eta_s \frac{\partial u_s}{\partial \nu}\right)\bigg|_{x\in\partial\Omega} = 0, \ \mu_s^2 + \eta_s^2 > 0, \ \mu_s \geq 0, \ \eta_s \geq 0, \ \mu_s = const, \ \eta_s = const, \tag{2}$$

$$u_s(x, 0) = 0, \ s = 1, \ldots, m, \tag{3}$$

где Ω – ограниченная область с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$, ν – единичный вектор нормали к границе $\partial\Omega$ области Ω, $u = (u_1(x,t), \ldots, u_m(x,t))$, $\vartheta_s \geq 0$, $s = 1, \ldots, m$, Δ — оператор Лапласа, определенный формулой

$$\Delta v = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 v}{\partial x_j^2}.$$

При отсутствии диффузионных членов, то есть при

$$\vartheta_s = 0, \; s = 1, \ldots, m, \tag{4}$$

переменные $x_1, \ldots, x_n$ входят в уравнения (1) как параметры, производные по которым не содержатся в этих уравнениях. Это случай модели с сосредоточенными параметрами. Если же

$$\sum_{s=1}^{m} \vartheta_s^2 > 0, \tag{5}$$

то мы имеем дело с системой с распределенными параметрами.

Предположим, что функции $F_s(u) = F_s(u_1, \ldots, u_m)$, определенные в некоторой окрестности точки $u = 0 \in \mathbb{R}^m$, дифференцируемы в точке $u = 0$ и удовлетворяют условиям $F_s(0) = 0, \; s = 1, \ldots, m$. Тогда в некоторой окрестности G точки $u = 0 \in \mathbb{R}^m$ имеют место представления

$$F_s(u) = \sum_{k=1}^{m} b_{sk}\, u_k + \sum_{k=1}^{m} \epsilon_{sk}(u)\, u_k, \tag{6}$$

где

$$b_{sk} = \frac{\partial F_s(0)}{\partial u_k}, \; \lim_{u \to 0} \epsilon_{sk}(u) = 0, s, k = 1, \ldots, m.$$

При сделанных предположениях тривиальное решение $u = 0$ задачи (1)–(3) будет и ее стационарным решением. Мы зададимся вопросом об устойчивости тривиального решения задачи (1)–(3). При такой постановке проблемы нетривиальное решение $u(x,t)$ мы считаем отклонением от тривиального решения, причем достаточно малым отклонением.

Умножим каждое s-е уравнение в системе (1) на u_s, а затем полученное равенство проинтегрируем по области Ω. Получим с учетом (6):

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\Omega} u_s^2\, dx = \vartheta_s \int\limits_{\Omega} u_s\, \Delta u_s\, dx + \int\limits_{\Omega} \sum_{k=1}^{m} b_{sk}\, u_s\, u_k\, dx + \int\limits_{\Omega} \sum_{k=1}^{m} \epsilon_{sk}(u)\, u_s\, u_k\, dx, \; s = 1, \ldots, m. \tag{7}$$

Последнее слагаемое в правой части равенства (7) при малых отклонениях u не влияет на знак всей суммы и может быть отброшено. К первому слагаемому в правой части применим формулу Грина (см. [5]). В результате получим:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\Omega} u_s^2\, dx = -\vartheta_s \int\limits_{\Omega} |\nabla u_s|^2\, dx + \vartheta_s \int\limits_{\partial\Omega} u_s\, \frac{\partial u_s}{\partial \nu}\, d\Gamma + \int\limits_{\Omega} \sum_{k=1}^{m} b_{sk}\, u_s\, u_k\, dx, \; s = 1, \ldots, m, \tag{8}$$

где $d\Gamma$ является элементом границы $d\Omega$, так что второе слагаемое в правой части равенства (8) представляет собой поверхностный (при $n \geq 3$) или криволинейный (при $n = 2$) интеграл первого рода по границе области Ω, а в случае $n = 1$ этот интеграл следует поменять на сумму значений на концах интервала Ω. В интеграле по границе при $\mu_s = 0$ или при $\eta_s = 0$ подынтегральная функция равна нулю в силу краевого условия (2). Из этого же краевого условия при $\mu_s \eta_s > 0$ получим:

$$\left.\frac{\partial u_s}{\partial \nu}\right|_{\partial\Omega} = -\left.\frac{\mu_s}{\eta_s}\, u_s\right|_{\partial\Omega}.$$

Поэтому равенство (8) может быть переписано в виде

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\Omega} u_s^2\, dx = -\vartheta_s \int\limits_{\Omega} |\nabla u_s|^2\, dx - \sigma\vartheta_s \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\mu_s}{\eta_s}\, u_s^2\, d\Gamma + \int\limits_{\Omega} \sum_{k=1}^{m} b_{sk}\, u_s\, u_k\, dx, \; s = 1, \ldots, m, \tag{9}$$

где $\sigma = 1$ в случае $\mu_s \eta_s > 0$ или $\sigma = 0$ в случае $\mu_s \eta_s = 0$. Сложим m равенств (9), после чего получим

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\Omega} |u|^2\, dx = \sum_{s=1}^{m}\left(-\vartheta_s \int\limits_{\Omega} |\nabla u_s|^2\, dx - \sigma\vartheta_s \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\mu_s}{\eta_s}\, u_s^2\, d\Gamma\right) + \int\limits_{\Omega} \sum_{s=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} \Theta_{sk}\, u_s\, u_k\, dx, \tag{10}$$

где

$$\Theta_{sk} = (b_{sk} + b_{ks})/2. \tag{11}$$

Знак левой части равенства (10) рассматривается как индикатор устойчивости тривиального решения. Поэтому важно найти соотношение слагаемых в правой части, приводящее к тому, чтобы это выражение было отрицательным. В скобках в правой части как первое слагаемое, так и второе слагаемое не больше нуля. Далее нужно учесть знак последнего слагаемого в правой части. Очевидно, что отрицательная определенность квадратичной формы

$$\sum_{s=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} \Theta_{sk}\, u_k u_s\, dx \tag{12}$$

обеспечит отрицательность левой части равенства (10), а значит, устойчивость стационарного решения.

Отметим, что в случае модели с сосредоточенными параметрами (система обыкновенных дифференциальных уравнений), который определяется условием (4), отрицательная определенность квадратичной формы (12) является и необходимым условием устойчивости тривиального решения.

Представим теперь, что мы переходим к рассмотрению диффузионной модели с распределенными параметрами. В этом случае можно ослабить достаточное условие устойчивости стационарного решения. Для этого воспользуемся неравенством Стеклова– Пуанкаре – Фридрихса (см. [4], [8] [3] с. 150, [1] с. 62)

$$\int\limits_{\Omega} |\nabla u_s|^2 dx \geq \frac{1}{d^2} \int\limits_{\Omega} u_s^2 dx,$$

где $d = \operatorname{diam}\Omega-$ диаметр области Ω. Отсюда

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\Omega} |\, u\,|^2\ dx \leqslant -\sum_{s=1}^{m}\frac{\vartheta_s}{d^2}\int\limits_{\Omega} u_s^2\, dx - \sum_{s=1}^{m}\vartheta_s \int\limits_{\partial\Omega}\frac{\mu_s}{\eta_s}u_s^2 d\Gamma + \int\limits_{\Omega}\ \sum_{s=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\Theta_{sk}\, u_k u_s\, dx. \tag{13}$$

Теперь можно утверждать, что достаточным условием устойчивости стационарного решения является отрицательная определенность квадратичной формы

$$\sum_{s=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} A_{sk}\, u_k u_s\,, \tag{14}$$

где

$$A_{sk} = \Theta_{sk} - \delta_{ks}\vartheta_s/d^2.$$

Чтобы наглядно продемонстрировать, как меняются свойства модели при введении распределенных параметров посредством добавления диффузионных членов, рассмотрим случай

$$b_{sk} = 0,\ s, k = 1, \dots, m.$$

В бездиффузионном случае нулевой вектор не является устойчивым решением. Если же все уравнения системы содержат диффузионные члены, то есть при

$$\prod_{s=1}^{m}\vartheta_s > 0,$$

квадратичная форма (14) примет вид

$$-\frac{1}{d^2}\sum_{s=1}^{m}\sum\ \vartheta_s\, z_s^2 \tag{15}$$

и, очевидно, будет отрицательно определенной, что означает устойчивость нулевого решения. Другой интересный пример дает уравнение Хотеллинга

$$\frac{\partial p}{\partial t} = A(\xi - p)p + B\Delta p,$$

где $p-$искомая функция, $p = p(x, y, t) \in C^2(\Omega)\bigcap C^1(\overline{\Omega})$ при каждом $t > 0$,

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

есть оператор Лапласа, A, B, ξ суть заданные положительные постоянные. Это уравнение описывает рост и распространение популяции. При этом входящие в уравнение величины имеют следующий смысл: A – темп роста популяции, B – темп распространения, ξ – коэффициент насыщенной плотности, p – плотность популяции, t – время.

Пусть $w(x, y)$ – стационарное решение уравнения Хотеллинга, то есть решение уравнения

$$A(\xi - w)w + B\Delta w = 0.$$

Изложенный выше метод приводит к заключению о том, что условие

$$w > \frac{\xi}{2} - \frac{B}{2Ad^2}$$

является достаточным для устойчивости стационарного решения $w(x, y)$ (см. [2], [6]). На сей раз интересно отметить, что в диффузионном случае (при $B \neq 0$) нулевое стационарное решение может оказаться как устойчивым, так и неустойчивым, что определяется размером области Ω.

Предложенный нами выше метод ослабления достаточных условий устойчивости стационарных решений в диффузионных моделях можно применять и к исследованию устойчивости нетривиальных стационарных решений. Рассмотрим в качестве примера классическую модель У. Кермака и А. Мак-Кендрика распространения инфекции

$$\frac{dS}{dt} = -\beta SI, \tag{16}$$
$$\frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I, \tag{17}$$
$$\frac{dR}{dt} = \gamma I, \tag{18}$$

где β и γ — положительные постоянные.

Эта модель, предложенная в 1927 г. [7], по-видимому, является исторически первой из компартментальных моделей, суть которых состоит в том, чтобы разделить популяцию на несколько групп (англ. compartments), доли которых в рассматриваемом случае обозначаются следующим образом: S (англ. susceptible) — восприимчивые, I (англ. infectious) — больные, R (англ. recovered) — выздоровевшие. Впоследствии на основе модели (16)–(18) было создано внушительное количество моделей, уточняющих ее и приспособленных к различным ситуациям. Мы изменим модель (16)–(18) путем добавления в правой части каждого уравнения диффузионного члена, после чего получим систему уравнений в частных производных

$$\frac{dS}{dt} = -\beta SI + \vartheta_1 \Delta S, \tag{19}$$
$$\frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I + \vartheta_2 \Delta I, \tag{20}$$
$$\frac{dR}{dt} = \gamma I + \vartheta_3 \Delta R. \tag{21}$$

Будем рассматривать систему (19)–(21) в области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ границей, представляющей собой простую кусочно гладкую кривую $\Gamma = \partial\Omega$ и введя согласованные с исходной моделью единообразные обозначения $u_1 = u_1(x, t) = S$, $u_2 = u_2(x, t) = I$, $u_3 = u_3(x, t) = R$, наложим на решение (u_1, u_2, u_3) дополнительные условия

– краевые:

$$\left.\left(\mu_j u_j + \eta_j \frac{\partial u_j}{\partial \nu}\right)\right|_{x \in \partial\Omega} = B_j(x),\ \mu_j^2 + \eta_j^2 > 0,\ \mu_j \geq 0,\ \eta_j \geq 0, \tag{22}$$

– начальные:

$$u_j(x, 0) = w_j(x),\ j = 1, 2, 3. \tag{23}$$

Здесь $B_j(x) \in C(\partial\Omega)$, $w_j(x) \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, $j = 1, 2, 3$, $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$. Пусть вектор $w = (w_1(x), w_2(x), w_3(x))$– стационарное решение системы (19)–(21), то есть решение системы

$$-\beta w_1 w_2 + \vartheta_1 \Delta w_1 = 0, \tag{24}$$
$$\beta w_1 w_2 - \gamma w_2 + \vartheta_2 \Delta w_2 = 0, \tag{25}$$
$$\gamma w_2 + \vartheta_3 \Delta w_3 = 0, \tag{26}$$

удовлетворяющее краевым условиям

$$\left.\left(\mu_j w_j + \eta_j \frac{\partial w_j}{\partial \nu}\right)\right|_{x \in \partial\Omega} = B_j(x),\ \mu_j^2 + \eta_j^2 > 0,\ \mu_j \geq 0,\ \eta_j \geq 0. \tag{27}$$

Пусть $z = z(x,t) = u(x,t) - w(x) = (z_1, z_2, z_3)$ — вектор отклонений от стационарного решения. Подставим в систему (19)–(21) представление $u = w + z$. Тогда уравнение (19) перепишется в виде

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\partial z_1}{\partial t} = -\beta(w_1+z_1)(w_2+z_2) + \vartheta_1 \Delta(w_1+z_1).$$

После очевидных тождественных преобразований получим:

$$\frac{\partial z_1}{\partial t} = -\beta w_1 w_2 - \beta z_1 w_2 - \beta w_1 z_2 - \beta z_1 z_2 + \vartheta_1 \Delta w_1 + \vartheta_1 \Delta z_1.$$

Учитывая, что функция w_1 удовлетворяет уравнению (24), мы получим:

$$\frac{\partial z_1}{\partial t} = -\beta z_1 w_2 - \beta w_1 z_2 - \beta z_1 z_2 + \vartheta_1 \Delta z_1. \tag{28}$$

Умножим равенство (28) на z_1, а полученное после этого равенство проинтегрируем по области Ω. Получим:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\Omega} z_1^2\,dx = \int\limits_{\Omega} \left(-\beta z_1^2 w_2 - \beta w_1 z_1 z_2 - \beta z_1^2 z_2\right)\,dx + \vartheta_1 \int\limits_{\Omega} z_1 \Delta z_1\,dx. \tag{29}$$

Применяя ко второму интегралу в правой части равенства (29) первую формулу Грина, получим

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\Omega} z_1^2\,dx = \int\limits_{\Omega} \left(-\beta z_1^2 w_2 - \beta w_1 z_1 z_2 - \beta z_1^2 z_2\right)\,dx -$$

$$-\vartheta_1 \int\limits_{\Omega} |\nabla z_1|^2\,dx - \vartheta_1 \int\limits_{\partial\Omega} g_1\,d\Gamma. \tag{30}$$

В равенстве (30) функция $g_1(x)$ тождественно равна нулю на Γ, если $\mu_1\eta_1 = 0$ или $g_1 = \mu_1 z_1^2/\eta_1$, если $\mu_1\eta_1 > 0$. Ко второму интегралу в равенстве (30) применим неравенство Стеклова – Пуанкаре – Фридрихса, после чего получим:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\Omega} z_1^2\,dx \leqslant \int\limits_{\Omega} \left(-\beta z_1^2 w_2 - \beta w_1 z_1 z_2 - \beta z_1^2 z_2\right)\,dx -$$

$$-\frac{\vartheta_1}{d^2}\int\limits_{\Omega} z_1^2\,dx - \vartheta_1 \int\limits_{\partial\Omega} g_1\,d\Gamma. \tag{31}$$

Поступим аналогичным образом с двумя оставшимися уравнениями системы (19)–(21). Из (20) получим неравенство

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\Omega} z_2^2\,dx \leqslant \int\limits_{\Omega} \left(\beta w_2 z_1 z_2 + \beta w_1 z_2^2 + \beta z_1 z_2^2\right)\,dx -$$

$$-\frac{\vartheta_2}{d^2}\int\limits_{\Omega} z_2^2\,dx - \vartheta_2 \int\limits_{\partial\Omega} g_2\,d\Gamma, \tag{32}$$

а из (21) — неравенство

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\Omega} z_3^2\,dx \leqslant \gamma \int\limits_{\Omega} z_2 z_3\,dx - \frac{\vartheta_3}{d^2}\int\limits_{\Omega} z_3^2\,dx - \vartheta_3 \int\limits_{\partial\Omega} g_3\,d\Gamma, \tag{33}$$

где, как и ранее, функция $g_j(x)$ тождественно равна нулю на Γ, если $\mu_j\eta_j = 0$ или $g_j = \mu_j z_j^2/\eta_j$, если $\mu_j\eta_j > 0$, $j = 1, 2, 3$.

Складывая неравенства (31)–(33), получим неравенство

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\Omega} z^2\,dx \leqslant \int\limits_{\Omega} \sum_{k,j=1}^{3} A_{kj} z_k z_j\,dx - \int\limits_{\partial\Omega} \sum_{j=1}^{3} \vartheta_j g_j\,d\Gamma + \int\limits_{\Omega} \left(\beta z_1 z_2^2 - \beta z_1^2 z_2\right)\,dx, \tag{34}$$

где

$$A_{11} = -\beta w_2 - \frac{\vartheta_1}{d^2}\,,\ A_{22} = \beta w_1 - \gamma - \frac{\vartheta_2}{d^2}\,,\ A_{33} = -\frac{\vartheta_3}{d^2}, \tag{35}$$

$$A_{12} = \beta w_2 - \beta w_1\,,\ A_{23} = \gamma\ \ A_{13} = 0. \tag{36}$$

Пользуясь критерием Сильвестра, получаем следующие достаточные условия отрицательной определенности квадратичной формы.

$$A_{11} = -\beta w_2 - \frac{\vartheta_1}{d^2} < 0, \tag{37}$$

$$A_{11}A_{22} - A_{12}^2 = \left(-\beta w_2 - \frac{\vartheta_1}{d^2}\right)\left(-\beta w_1 - \gamma - \frac{\vartheta_2}{d^2}\right) - \frac{1}{4}\beta\left(w_2 - w_1\right) > 0, \tag{38}$$

$$\left(A_{11}A_{22} - A_{12}^2\right)A_{33} - A_{11}A_{23}^2 =$$

$$= \left(\left(-\beta w_2 - \frac{\vartheta_1}{d^2}\right)\left(-\beta w_1 - \gamma - \frac{\vartheta_2}{d^2}\right) - \frac{1}{4}\beta\left(w_2 - w_1\right)\right)\left(-\frac{\vartheta_3}{d^2}\right) - \left(-\beta w_2 - \frac{\vartheta_1}{d^2}\right)\frac{\gamma^2}{4} < 0. \tag{39}$$

Эти условия на практике, при компьютерных симуляциях, проверяемы. Отметим, что если в рамках этой модели рассматривать тривиальное стационарное решение $w_1 = w_2 = w_3 = 0$, условия (37–39) будут выглядеть следующим образом:

$$A_{11} = \frac{\vartheta_1}{d^2} > 0, \tag{40}$$

$$A_{11}A_{22} - A_{12}^2 = \frac{\vartheta_1}{d^2}\left(\gamma + \frac{\vartheta_2}{d^2}\right) > 0, \tag{41}$$

$$\left(A_{11}A_{22} - A_{12}^2\right)A_{33} - A_{11}A_{23}^2 =$$

$$= \frac{\vartheta_1}{d^2}\left(\frac{\gamma^2}{4} - \left(\gamma + \frac{\vartheta_2}{d^2}\right)\frac{\vartheta_3}{d^2}\right) < 0. \tag{42}$$

В модели с сосредоточенными параметрами, то есть при $\vartheta_1 = \vartheta_2 = \vartheta_3 = 0$, условия (40)–(42) не выполнены, тривиальное решение неустойчиво. В модели с распределенными параметрами при $\vartheta_1\vartheta_2\vartheta_3 > 0$ условия (40), (41) выполняются в любом случае, так что содержательным достаточным условием устойчивости тривиального решения становится условие (42), которое, очевидно, можно переписать в виде

$$\frac{\gamma^2}{4} - \left(\gamma + \frac{\vartheta_2}{d^2}\right)\frac{\vartheta_3}{d^2} < 0. \tag{43}$$

Выполнение этого условия возможно для областей с небольшим диаметром. Для областей с большим диаметром это условие не выполняется. Мы не берем на себя смелость выносить окончательный вердикт этому явлению на языке предметной области. Осмелимся лишь предположить, что для больших областей диффузия (распространение инфекции за счет миграции) оказывает небольшое влияние на устойчивость нулевого уровня зараженности, решающее же влияние оказывают параметры роста. Правда, возможно, эти параметры зависят в том числе и от условий диффузии. В любом случае приходится признать, что модели процесса роста и распространения заболеваний пока далеки от законченных очертаний.

Список литературы

1. Ладыженская О. А. 1973. Краевые задачи математической физики. Москва, Наука, 408.
2. Мешков В. З., Половинкин И. П., Семенов М. Е. 2002. Об устойчивости стационарного решения уравнения Хотеллинга. Обозрение прикладной и промышленной математики, 9(1): 226–227.
3. Михайлов В. П. 1976. Дифференциальные уравнения в частных производных. Москва, Наука, 392.
4. Friedrichs K. O. 1973. Spectral Theory of Operators in Hilbert Space. New York. Heidelberg, Berlin, Springer-Verlag, 244.
5. Gilbarg D. and Trudinger N. S. 2001. Elliptic Partial Differential Equations of Second Order. New York. Heidelberg, Berlin, Springer-Verlag, 531.
6. Gogoleva T. N., Shchepina I. N., Polovinkina M. V. and Rabeeakh S. A. 2019. On stability of a stationary solution to the Hotelling migration equation. IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series 1203 (2019) 012041 doi:10.1088/1742-6596/1203/1/012041
7. Kermack W. O., McKendrick A. G. 1927. A contribution to the mathematical theory of epidemics. Proc. R. Soc. London, A 1927, 115: 700–721.
8. Rektorys K. 2012. Variational Methods in Mathematics, Science and Engineering. Springer Science & Business Media, 571.

References

1. Ladyzhenskaya O. A. 1973. Kraevye zadachi matematicheskoj fiziki [Boundary Value Problems of Mathematical Physics]. Moscow, Nauka, 408.

2. Meshkov V. Z., Polovinkin I. P., Semenov M. E. 2002. Ob ustojchivosti stacionarnogo resheniya uravneniya Hotellinga [On stability stationary solution of the Hotelling equation]. Review of Applied and Industrial Mathematics, 9 (1): 226–227.

3. Mikhailov VP 1976. Differencial'nye uravneniya v chastnyh proizvodnyh [Partial Differential Equations]. Moscow, Nauka, 392.

4. Friedrichs K. O. 1973. Spectral Theory of Operators in Hilbert Space. New York. Heidelberg, Berlin, Springer-Verlag, 244.

5. Gilbarg D. and Trudinger N. S. 2001. Elliptic Partial Differential Equations of Second Order. New York. Heidelberg, Berlin, Springer-Verlag, 531.

6. Gogoleva T. N., Shchepina I. N., Polovinkina M. V. and Rabeeakh S. A. 2019. On stability of a stationary solution to the Hotelling migration equation. IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series 1203 012041 doi:10.1088/1742-6596/1203/1/012041

7. Kermack W. O., McKendrick A. G. 1927. A contribution to the mathematical theory of epidemics. Proc. R. Soc. London, A 1927, 115: 700–721.

8. Rektorys K. 2012. Variational Methods in Mathematics, Science and Engineering. Springer Science & Business Media, 571.

Получена 30.11.2020

Половинкина Марина Васильевна – кандидат физико-математических наук, доцент Воронежского государственного университета инженерных технологий

http://orcid.org/0000-0002-7722-6927
пр. Революции, 19, г. Воронеж, 394036, Россия
E-mail: polovinkina-marina@yandex.ru

Половинкин Игорь Петрович – доктор физико-математических наук, доцент, профессор Воронежского государственного университета

http://orcid.org/0000-0002-4308-8909
Университетская площадь, 1, Воронеж, 394018, Россия
E-mail: polovinkin@yandex.ru