

МАТЕМАТИКА MATHEMATICS

УДК 517.927.4
MSC 34E10, 34L20, 34B15, 78A60, 78A50
Оригинальное исследование

DOI 10.52575/2687-0959-2026-58-2-113-129
EDN SGMZTP

Метод возмущений в задаче о распространении суперпозиции двух электромагнитных волн в плоском слое, заполненном нелинейной средой

Валовик Д. В. 

(Статья представлена членом редакционной коллегии Васильевым В. Б.)

Пензенский государственный университет,
Россия, 440026, г. Пенза, ул. Красная, 40
dvalovik@mail.ru

Аннотация. В работе предложен метод возмущений для доказательства существования, в том числе нелинеаризуемых решений, в задаче о распространении суперпозиции двух монохроматических электромагнитных волн. Волны распространяются в плоском слое, заполненном диэлектриком с керровской нелинейностью. Физическая задача сведена к нелинейной двухпараметрической задаче на собственные значения для нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений на отрезке с краевыми условиями третьего рода и двумя дополнительными локальными условиями. В качестве невозмущенной рассматривается пара нелинейных задач (для каждой из волн в суперпозиции), имеющих нелинеаризуемые решения. Предложенный метод возмущений может найти приложения в области нелинейной математической физики, в частности в теории нелинейных колебаний.

Ключевые слова: уравнения Максвелла, многопараметрическая задача на собственные значения, нелинеаризуемое решение, связанная нелинейная распространяющаяся волна, метод возмущения, плоский волновод, нелинейная диэлектрическая проницаемость

Финансирование: Исследование поддержано РФФ, проект № 25-71-10036.

Для цитирования: Валовик Д.В. Метод возмущений в задаче о распространении суперпозиции двух электромагнитных волн в плоском слое, заполненном нелинейной средой. *Прикладная математика & Физика*. 2026;58(2):113–129. DOI 10.52575/2687-0959-2026-58-2-113-129 EDN SGMZTP

Original Research

A Perturbation Method in a Problem of Propagation of a Sum of Two Electromagnetic Waves in a Plane Layer Filled With a Nonlinear Medium

Dmitry V. Valovik 

(Article submitted by a member of the editorial board Vasiliev V. B.)

Penza State University,
40 Krasnaya St., Penza 440026, Russia
dvalovik@mail.ru

Abstract. The article deals with a problem of propagation of an electromagnetic two-frequency wave in a plane nonlinear waveguide (the nonlinearity is of Kerr type). The permittivity of the waveguide is perturbed in its nonlinear term. The problem reduces to a nonlinear two-parameter eigenvalue problem for Maxwell's equations. We prove existence of nonlinearizable solutions to the problem. The proof is based on applying of a novel unstandard perturbation approach. The developed approach has a potential to be used in the theory of nonlinear oscillations and vibrations.

Keywords: Maxwell's Equations, Multiparameter Eigenvalue Problem, Nonlinearizable Solution, Coupled Nonlinear Guided Wave, Perturbation Method, Plane Waveguide, Nonlinear Permittivity

Funding: The work is supported by RSF, project no. 25-71-10036.

For citation: Valovik D.V. A Perturbation Method in a Problem of Propagation of a Sum of Two Electromagnetic Waves in a Plane Layer Filled With a Nonlinear Medium. *Applied Mathematics & Physics*. 2026;58(2):113–129. (In Russ.) DOI 10.52575/2687-0959-2026-58-2-113-129 EDN SGMZTP

1. Введение. В статье изучается задача о распространении электромагнитных волн в плоском слое, заполненном нелинейной средой. Электромагнитная волна представляет собой сумму двух монохроматических волн (частоты этих волн, вообще говоря, различны): ТЕ-волны и ТМ-волны. Диэлектрическая проницаемость волновода нелинейно зависит от поля по закону Керра, в нелинейной части диэлектрической проницаемости присутствует возмущение нелинейными слагаемыми. Искомыми являются

вещественные параметры, определяющие режим волноводного распространения нелинейной (связанной) волны. В электродинамике такие параметры называются постоянными распространения [1]. Поскольку связанная волна состоит из двух слагаемых, то искомым параметров тоже два.

Кратко обсудим математический подход к обсуждаемой физической задаче. Из этого обсуждения будет понятно, как работает подход на уровне идеи. Кроме этого, из такого «грубого» описания читатель сразу сможет понять, возможно ли применить эти идеи к интересующим его задачам.

Итак, рассмотрим две задачи: нелинейную задачу $R(\alpha)$, где α – набор параметров, и ее линеаризацию $R(0)$. Широко известный и в некотором смысле классический подход, см., например, [2], заключается в следующем. Если задача $R(0)$ имеет решение u_0 , то в достаточно широких предположениях задача $R(\alpha)$ также имеет решение u_α как только $|\alpha|$ достаточно мало и $\lim_{\alpha \rightarrow 0} u_\alpha = u_0$.

Описанный подход имеет как преимущества, так и недостатки. Основное преимущество заключается в том, что возможно доказать существование решений нелинейной задачи, когда другие методы этого сделать не позволяют. Недостатки, однако, представляются куда более серьезными. Во-первых, нелинейная задача имеет нелинеаризуемые решения, то есть решения, которые не переходят в решения линеаризованной задачи при $\alpha \rightarrow 0$ (сюда же мы включаем нелинейные задачи, линеаризации которых вовсе не имеют решений, пример см. в [3]). Ясно, что с помощью обсуждаемого подхода такие решения не найти. Отметим, что задачи, имеющие нелинеаризуемые решения, встречаются в теории оптических нелинейных волноводов, см., например, [4, 5, 6, 7]. Во-вторых, если доказано существование возмущенного решения u_α задачи $R(\alpha)$ для достаточно малого $|\alpha|$, то, это позволяет «навести» математическую строгость, но как правило, не добавляет понимания в изучении именно нелинейного явления. Очевидно, если задача $R(0)$ имеет решение, то внесение малого регулярного возмущения в задачу $R(0)$ лишь трансформирует ее решение u_0 в решение u_α (это решение, естественно, не может сильно отличаться от u_0 , если $|\alpha|$ достаточно мало).

В настоящей статье мы рассмотрим более сложный случай – нелинейную задачу, в которой можно вычленив более простые, но нелинейные, подзадачи, которые с одной стороны наследуют некоторые отличительные свойства исходной задачи и могут быть приняты в качестве невозмущенных, а с другой стороны, могут быть эффективно исследованы.

Рассмотрим нелинейную задачу $R(\alpha)$, где $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_l)$ – некоторый набор параметров. В операторной форме обозначим эту задачу $\mathcal{R}(u; \lambda, \alpha) = 0$, где $\mathcal{R}$ – нелинейная оператор-функция по u , u – в общем случае вектор-функция, λ – еще один набор параметров (например, спектральных, как в рассмотренном здесь случае). Мы считаем, что задача $R(0)$, где $0 = (0, \dots, 0)$, линейная.

Если существует решение $u \equiv u_0(x; \lambda)$ задачи $R(0)$, то в достаточно широких предположениях относительно $\mathcal{R}$ и как только $|\alpha|$ достаточно мало, можно доказать, что задача $R(\alpha)$ также имеет решение $u \equiv u_\alpha(x; \lambda)$ и $u_\alpha(x; \lambda) \rightarrow u_0(x; \lambda)$ как только $|\alpha| \rightarrow 0$. Этот подход использован, например, в [8, 9, 10].

Пусть задача $R(\alpha')$, где $\alpha' = (\alpha_1, \dots, \alpha_{l'}, 0, \dots, 0)$ и $\alpha_1, \dots, \alpha_{l'} \neq 0$ остается нелинейной, но является в каком-то смысле более простой, чем задача $R(\alpha)$. Предположим, что разрешимость задачи $R(\alpha')$ может быть установлена и пусть $u \equiv u_{\alpha'}(x; \lambda)$ – ее решение. В этом случае и при некоторых ограничениях на $\mathcal{R}$ и условии, что $|\alpha - \alpha'|$ достаточно мало, можно доказать, что задача $R(\alpha)$ тоже разрешима, а ее решение $u_\alpha(x; \lambda) \rightarrow u_{\alpha'}(x; \lambda)$ как только $|\alpha - \alpha'| \rightarrow 0$. Важно отметить, что ни $|\alpha|$, ни $|\alpha'|$ не предполагаются малыми.

Резюмируя, можно сказать, что предлагаемый подход может быть полезен, если:

- i существует набор параметров α' , такой, что задача $R(\alpha')$, будучи более простой нелинейной задачей, может быть эффективно исследована;
- ii решения задачи $R(\alpha')$ существуют не только для малых $|\alpha'|$;
- iii задача $R(\alpha')$ имеет решения, не связанные с решениями задачи $R(0)$.

Ясно, что если рассматривать задачу $R(0)$ как невозмущенную, то в случаях ii, iii это едва ли даст какую-то информацию о решениях задачи $R(\alpha)$. Заметим, что в некоторых случаях задача $R(0)$ может вовсе не иметь решений, см. [3].

Электродинамика нелинейных волноведущих структур (в частности, плоских и цилиндрических волноводов, заполненных нелинейной средой) приводит к задачам, для которых имеют место случаи i–iii. Например, некоторые задачи, зависящие от одного скалярного параметра α и удовлетворяющие свойствам ii, iii, изучены в [5, 6]. Широкий класс задач, зависящих от векторного параметра α , для которых применим вышеописанный подход, введены в [9]. Некоторые многопараметрические задачи, удовлетворяющие свойствам i–iii, изучены в [11, 12].

Несмотря на то, что многопараметрические задачи не являются новым разделом математики, публикаций на эту тему не так много, особенно в контексте метода возмущений. Мы, однако, укажем фундаментальные работы [13, 14], а также несколько работ по нелинейным задачам [15, 16, 17, 18, 19], также отметим недавнюю работу [20], связанную с многопараметрической задачей, возникающей в теории волноводов.

Математическая постановка (основной) физической задачи представлена в разделе 2; раздел 3 посвящен результатам статьи: известные, но необходимые результаты о линейных и вспомогательных нелинейных задачах представлены в подразделах 3.1 и 3.2, соответственно, основные результаты представлены в подразделе 3.3; строгая физическая формулировка задачи (она удовлетворяет ключевым свойствам, изложенным здесь ниже) представлена в разделе 4 (именно эту физическую задачу мы изучим в настоящей статье); обсуждение полученных результатов и некоторые нерешенные проблемы представлены в разделе 6.

2. Математическая постановка задачи. Введем обозначения, которые будут использоваться на протяжении всей статьи. Всюду ниже индекс j принимает значения 1, 2. Пусть $I = (0, h)$, $\bar{I} = [0, h]$, где $h > 0$ – постоянная, $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$ и $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ есть пара вещественных параметров. Следующие постоянные $a_j, \alpha_j, s_j, c_j, A_j$ предполагаются вещественными и положительными, где $c_j \leq s_j < a_j$. Мы также используем положительные параметры $\kappa_{c,j}, \kappa_{s,j}$, где $\kappa_{c,j}^2 = \lambda_j^2 - c_j$, $\kappa_{s,j}^2 = \lambda_j^2 - s_j$, то есть мы предполагаем, что $\lambda_j^2 > s_j$. Помимо λ введем множество $\Lambda^* = \Lambda_1^* \times \Lambda_2^*$, где $\Lambda_j^* = (\sqrt{s_j}, \lambda_j^*)$; постоянные $\lambda_j^* > 0$ фиксированы и будут определены позднее (см. следствие 3.11 и утверждение 3.16); также мы используем обозначение $\Lambda_j = (\sqrt{s_j}, +\infty)$.

Основная задача, которую мы назовем задачей $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\delta)$, состоит в доказательстве существования значений $\lambda = \bar{\lambda}$, для которых существуют решения $u_1 \equiv u_1(x; \bar{\lambda}, \delta)$, $u_2 \equiv u_2(x; \bar{\lambda}, \delta)$ и $u_3 \equiv u_3(x; \bar{\lambda}, \delta)$ системы

$$\begin{cases} u_3' - \lambda_1 u_1 = -\frac{1}{\lambda_1} (a_1 + \alpha_1 u_1^2 + \alpha_2 u_2^2 + \alpha_1 u_3^2) u_1, \\ u_2'' = -(a_2 - \lambda_2^2 + \alpha_2 u_1^2 + \alpha_1 u_2^2 + \alpha_2 u_3^2) u_2, \\ u_3'' - \lambda_1 u_1' = -(a_1 + \alpha_1 u_1^2 + \alpha_2 u_2^2 + \alpha_1 u_3^2) u_3, \end{cases} \quad (1)$$

где $\alpha_2 = \delta$ есть вещественный положительный малый параметр, $(x, \bar{\lambda}) \in \bar{I} \times \Lambda^*$, удовлетворяющие краевым условиям

$$(a_1 + \alpha_1 u_1^2 + \alpha_2 u_2^2 + \alpha_1 u_3^2) u_1|_{x=0} = \frac{\lambda_1 s_1}{\kappa_{s,1}} u_3|_{x=0}, \quad (2)$$

$$(a_1 + \alpha_1 u_1^2 + \alpha_2 u_2^2 + \alpha_1 u_3^2) u_1|_{x=h} = -\frac{\lambda_1 c_1}{\kappa_{c,1}} u_3|_{x=h}, \quad (3)$$

$$(\kappa_{s,2} u_2 - u_2')|_{x=0} = 0, \quad (4)$$

$$(\kappa_{c,2} u_2 + u_2')|_{x=h} = 0, \quad (5)$$

и дополнительным локальным условиям

$$u_3|_{x=0} = \frac{\kappa_{s,1}}{\lambda_1} A_1, \quad (6)$$

$$u_2|_{x=0} = A_2. \quad (7)$$

Мы предполагаем, что

$$u_1 \in C^1(\bar{I}), \quad u_2, u_3 \in C^2(\bar{I}). \quad (8)$$

Определение 2.1. Пара чисел $\lambda = \bar{\lambda} \in \Lambda^*$, где $\bar{\lambda} = (\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2)$, такая, что существуют функции $u_1 \equiv u_1(x; \bar{\lambda}, \delta)$, $u_2 \equiv u_2(x; \bar{\lambda}, \delta)$, $u_3 \equiv u_3(x; \bar{\lambda}, \delta)$, удовлетворяющие (1)–(8), называется векторным собственным значением, а соответствующие функции u_1, u_2, u_3 – собственными функциями задачи $\mathcal{P}(\delta)$.

Полагая $\delta = 0$ в задаче $\mathcal{P}(\delta)$, получаем задачу $\mathcal{P}(0)$ с $\alpha_1 > 0$. Задача $\mathcal{P}(0)$, очевидно, распадается на две независимые нелинейные задачи, которые мы назовем задачами $\mathcal{P}_j$. Задачи $\mathcal{P}_j$ удовлетворяют условиям ii, iii, перечисленным в разделе 1. Параметр α_1 не предполагается малым.

Задача $\mathcal{P}_1$ состоит в доказательстве существования значений $\lambda_1 = \hat{\lambda}_1$, для которых существуют решения $v_1 \equiv v_1(x; \hat{\lambda}_1)$, $v_3 \equiv v_3(x; \hat{\lambda}_1)$ системы

$$\begin{cases} v_3' - \lambda_1 v_1 = -\frac{1}{\lambda_1} (a_1 + \alpha_1 v_1^2 + \alpha_1 v_3^2) v_1, \\ v_3'' - \lambda_1 v_1' = -(a_1 + \alpha_1 v_1^2 + \alpha_1 v_3^2) v_3, \end{cases} \quad (9)$$

удовлетворяющие краевым условиям

$$(a_1 + \alpha_1 v_1^2 + \alpha_1 v_3^2) v_1|_{x=0} = \frac{\lambda_1 s_1}{\kappa_{s,1}} v_3|_{x=0}, \quad (10)$$

$$(a_1 + \alpha_1 v_1^2 + \alpha_1 v_3^2) v_1|_{x=h} = -\frac{\lambda_1 c_1}{\kappa_{c,1}} v_3|_{x=h}, \quad (11)$$

и дополнительному локальному условию

$$v_3|_{x=0} = \frac{\kappa_{s,1}}{\lambda_1} A_1, \quad (12)$$

где $(x, \hat{\lambda}_1) \in \bar{I} \times \Lambda_1$ и

$$v_1 \in C^1(\bar{I}), \quad v_3 \in C^2(\bar{I}). \quad (13)$$

Определение 2.2. Значение $\lambda_1 = \widehat{\lambda}_1 \in \Lambda_1$, такое, что существуют функции $v_1 \equiv v_1(x; \widehat{\lambda}_1)$ и $v_3 \equiv v_3(x; \widehat{\lambda}_1)$, удовлетворяющие (9)–(13), называется собственным значением, а соответствующие функции v_1, v_3 – собственными функциями задачи $\mathcal{P}_1$.

Задача $\mathcal{P}_2$ состоит в доказательстве существования значений $\lambda_2 = \widehat{\lambda}_2$, для которых существуют решения $v_2 \equiv v_2(x; \widehat{\lambda}_2)$ уравнения

$$v_2'' = -(a_2 - \lambda_2^2)v_2 - \alpha_1 v_2^3, \quad (14)$$

удовлетворяющие краевым условиям

$$(\kappa_{s,2}v_2 - v_2')|_{x=0} = 0, \quad (15)$$

$$(\kappa_{c,2}v_2 + v_2')|_{x=h} = 0, \quad (16)$$

и дополнительному локальному условию

$$v_2|_{x=0} = A_2, \quad (17)$$

где $(x, \widehat{\lambda}_2) \in \bar{I} \times \Lambda_2$ и

$$v_2 \in C^2(\bar{I}). \quad (18)$$

Определение 2.3. Значение $\lambda_2 = \widehat{\lambda}_2 \in \Lambda_2$, такое, что существует функция $v_2 \equiv v_2(x; \widehat{\lambda}_2)$, удовлетворяющая (14)–(18), называется собственным значением, а соответствующая функция v_2 – собственной функцией задачи $\mathcal{P}_2$.

Рассмотрим также задачу $\mathcal{P}^0$, которая есть задача $\mathcal{P}(0)$ с $\alpha_1 = 0$. Ясно, что задача $\mathcal{P}^0$ распадается на две независимых линейных задачи, которые мы обозначим $\mathcal{P}_j^0$. Также ясно, что задача $\mathcal{P}_j^0$ совпадает с задачей $\mathcal{P}_j$ при $\alpha_1 = 0$.

Задача $\mathcal{P}_1^0$ состоит в доказательстве существования значений $\lambda_1 = \widetilde{\lambda}_1$, для которых существуют нетривиальные решения $w_1 \equiv w_1(x; \widetilde{\lambda}_1)$, $w_3 \equiv w_3(x; \widetilde{\lambda}_1)$ системы

$$\begin{cases} w_3' - \lambda_1 w_1 = -\frac{a_1}{\lambda_1} w_1, \\ w_3'' - \lambda_1 w_1' = -a_1 w_3, \end{cases}$$

удовлетворяющие краевым условиям

$$(a_1 w_1 - \frac{\lambda_1 s_1}{\kappa_{s,1}} w_3)|_{x=0} = 0, \quad (a_1 w_1 - \frac{\lambda_1 c_1}{\kappa_{c,1}} w_3)|_{x=h} = 0, \quad (19)$$

где $(x, \widetilde{\lambda}_1) \in \bar{I} \times (\sqrt{s_1}, \sqrt{a_1})$ и $w_1, w_3 \in C^2[0, h]$.

Задача $\mathcal{P}_2^0$ состоит в доказательстве существования значений $\lambda_2 = \widetilde{\lambda}_2$, для которых существуют нетривиальные решения $w_2 \equiv w_2(x; \widetilde{\lambda}_2)$ уравнения

$$w_2'' = -(a_2 - \lambda_2^2)w_2,$$

удовлетворяющие краевым условиям

$$(\kappa_{s,2}w_2 - w_2')|_{x=0} = 0, \quad (\kappa_{c,2}w_2 + w_2')|_{x=h} = 0,$$

где $(x, \widetilde{\lambda}_2) \in \bar{I} \times (\sqrt{s_2}, \sqrt{a_2})$ и $w_2 \in C^2[0, h]$.

Для исследования задачи $\mathcal{P}(\delta)$ будет развит метод возмущений, в котором возмущенной является задача $\mathcal{P}(\delta)$, а невозмущенными являются (нелинейные) задачи $\mathcal{P}_j$. Подчеркнем, что задачи $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$ имеют нелинеаризуемые решения, и мы опираемся, в том числе, на это, развивая метод возмущений.

Основной метод для изучения задач $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$ – метод интегральных характеристических уравнений [5, 6]. Заметим, что широко известные методы нелинейного анализа, такие как вариационные методы [21, 22] и теория ветвления решений [23, 24], не применимы для изучения задач $\mathcal{P}(\delta)$ и $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$.

3. Результаты. Собственные значения задач $\mathcal{P}(\delta)$, $\mathcal{P}_j$ и $\mathcal{P}_j^0$ будут обозначаться $\bar{\lambda}_{k,l} = (\bar{\lambda}_{1,k}, \bar{\lambda}_{2,k'})$, $\widehat{\lambda}_{j,k}$ и $\widetilde{\lambda}_{j,k}$, соответственно, где $k, k' = 1, 2, \dots$ – целые индексы; мы также будем использовать обозначения $\bar{\lambda}$, $\widehat{\lambda}_j$ и $\widetilde{\lambda}_j$.

3.1 Задачи $\mathcal{P}_j^0$. Существование решений задач $\mathcal{P}_j^0$ хорошо известно из классической электродинамики [1, 25, 26]. Собственные значения (постоянные распространения) задачи $\mathcal{P}_1^0$ и только они являются простыми корнями уравнения

$$\tan \sqrt{a_1 - \lambda_1^2} h = \frac{a_1 \sqrt{(a_1 - \lambda_1^2)} (c_1 \sqrt{\lambda_1^2 - s_1} + s_1 \sqrt{\lambda_1^2 - c_1})}{s_1 c_1 (a_1 - \lambda_1^2) - a_1^2 \sqrt{\lambda_1^2 - s_1} \sqrt{\lambda_1^2 - c_1}}, \quad (20)$$

и собственные значения (постоянные распространения) задачи $\mathcal{P}_2^0$ и только они являются простыми корнями уравнения

$$\tan \sqrt{a_2 - \lambda_2^2} h = \frac{\sqrt{a_2 - \lambda_2^2} (\sqrt{\lambda_2^2 - s_2} + \sqrt{\lambda_2^2 - c_2})}{a_2 - \lambda_2^2 - \sqrt{\lambda_2^2 - s_2} \sqrt{\lambda_2^2 - c_2}}. \quad (21)$$

Уравнения (20), (21) в электродинамике называются дисперсионными соотношениями (уравнениями) [1, 25, 26]; с точки зрения теории Штурма – Лиувилля эти уравнения естественно называть характеристическими уравнениями задач $\mathcal{P}_1^0$ и $\mathcal{P}_2^0$, соответственно, [27].

Элементарный анализ уравнений (20), (21) позволяет сформулировать следующее утверждение.

Утверждение 3.1. *Существует постоянная $h_0 > 0$, такая, что для любого $h > h_0$ задача $\mathcal{P}_j^0$ имеет конечное число (не менее одного) положительных и простых (кратности 1) собственных значений $\tilde{\lambda}_{j,k}$ и все $\tilde{\lambda}_{j,k} \in (\sqrt{s_j}, \sqrt{a_j})$; кроме того, если $s_j = c_j$, тогда $h_0 = 0$. Если $a_j \leq s_j$, то задача $\mathcal{P}_j^0$ не имеет (положительных) решений.*

Мы опустим доказательство, поскольку этот результат широко известен.

Используя линейные задачи $\mathcal{P}_j^0$ как невозмущенные и применяя подходящий метод возмущений, можно показать, что в любой окрестности собственного значения $\tilde{\lambda}_{j,k}$ задачи $\mathcal{P}_j^0$ существует собственное значение $\hat{\lambda}_{j,k}$ задачи $\mathcal{P}_j$, как только $|\alpha_j|$ достаточно мал, пример такого подхода см. в [28]. Также можно доказать, что в любой окрестности любой пары $(\tilde{\lambda}_{1,k}, \tilde{\lambda}_{2,l})$ существует собственное значение $\bar{\lambda}_{k,l}$ задачи $\mathcal{P}(\delta)$, как только $|\delta|$ достаточно мало [8, 9, 10]. Принимая во внимание утверждение 3.1, ясно, что поскольку задача $\mathcal{P}_j^0$ не имеет решений для $a_j \leq s_j$, то вышеупомянутый метод возмущений не позволит доказать существование решений задач $\mathcal{P}_j$ and $\mathcal{P}$.

3.2 Задачи $\mathcal{P}_j$. Этот пункт частично основан на известных результатах (в этих случаях точные ссылки на доказательства приведены сразу после соответствующих формулировок), но их едва ли возможно опустить без серьезного ухудшения качества представления основного результата.

Ниже в этом разделе мы опираемся на следующее утверждение.

Утверждение 3.2. *Задача Коши (9), (10), (12) глобально однозначно разрешима для $x \in \bar{I}$, а ее (классическое) решение $v_1 \equiv v_1(x; \lambda_1)$, $v_3 \equiv v_3(x; \lambda_1)$ непрерывно зависит от точки $(x, \lambda_1) \in \bar{I} \times \Lambda_1$.*

Это утверждение доказывается таким же образом, как и аналогичный результат в [6] (см. утверждение 3 в [6]). Этот же факт может быть извлечен и из результатов, представленных в [4]. Дважды непрерывная дифференцируемость решения v_3 по x для $x \in \bar{I}$ следует из гладкости правой части второго уравнения (9).

Утверждение 3.3. *Задача Коши (14), (15), (17) глобально однозначно разрешима для $x \in \bar{I}$, а ее (классическое) решение $v_2 \equiv v_2(x; \lambda_2)$ непрерывно зависит от точки $(x, \lambda_2) \in \bar{I} \times \Lambda_2$.*

Это утверждение доказано в [5] (см. утверждение 2 в [5]). Дважды непрерывная дифференцируемость решения v_2 по x для $x \in \bar{I}$ следует из гладкости правой части уравнения (14).

Интегральное характеристическое уравнение относительно λ_1 получено в [4] в следующей форме

$$\Phi_1(\lambda_1; n_1) \equiv - \int_{-\frac{c_1}{\lambda_1 k_{c,1}}}^{\frac{s_1}{\lambda_1 k_{s,1}}} \frac{ds}{w_1(s; \lambda_1)} + n_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{w_1(s; \lambda_1)} = h, \quad (22)$$

где

$$w_1(\mu_1; \lambda_1) \equiv \lambda_1 \frac{(\bar{a}_1 \theta_1 + \mu_1^2 (\theta_1 - 1)) (\alpha_1 \mu_1^2 + \alpha_1 \theta_1^2) + \theta_1 (\theta_1 - \bar{a}_1) (\alpha_1 \mu_1^2 + \alpha_1 \theta_1^2)}{\theta_1 (\alpha_1 \mu_1^2 + \alpha_1 \theta_1^2)},$$

$n_1 = 1, 2, \dots$, $\bar{a}_1 = a_1 \lambda_1^{-2}$, а μ_1 и θ_1 связаны соотношением

$$q_1 \mu_1^4 + 2q_2 \theta_1^2 \mu_1^2 + q_3 \theta_1^4 = 0; \quad (23)$$

здесь

$$\begin{aligned} q_1 &= \theta_1 (\theta_1 - \bar{a}_1) (2\theta_1 - 3) + \bar{a}_1 (\theta_1 - \bar{a}_1) - \alpha_1 \bar{C}_1, \\ q_2 &= \theta_1 (\theta_1 - 1) (\theta_1 - \bar{a}_1) + \bar{a}_1 (\theta_1 - \bar{a}_1) - \alpha_1 \bar{C}_1, \\ q_3 &= (\theta_1 - \bar{a}_1)^2 + 2\bar{a}_1 (\theta_1 - \bar{a}_1) - \alpha_1 \bar{C}_1, \end{aligned} \quad (24)$$

$\bar{C}_1 = C_1 \lambda_1^{-6}$, а

$$\begin{aligned} C_1 &= 2(a_1 + \alpha_1 v_1^2(0) + \alpha_1 v_3^2(0))^2 v_1^2(0) - 4\lambda_1^2 (a_1 + \alpha_1 v_1^2(0) + \alpha_1 v_3^2(0)) v_1^2(0) + \\ &\quad + \lambda_1^4 \alpha_1 (v_1^4(0) + 2v_1^2(0) v_3^2(0) + v_3^4(0)) + 2\lambda_1^2 a_1 (v_1^2(0) + v_3^2(0)) \end{aligned}$$

есть постоянная, значения $v_1(0)$ и $v_3(0)$ определяются из (10), (12).

Интегральное характеристическое уравнение относительно λ_2 получено в [5] в следующей форме

$$\Phi_2(\lambda_2; n_2) \equiv \int_{-K_{c,2}}^{K_{s,2}} \frac{ds}{w_2(s; \lambda_2)} + n_2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{w_2(s; \lambda_2)} = h, \quad (25)$$

где $w_2(\mu_2; \lambda_2) \equiv \mu_2^2 + a_2 - \lambda_2 + \alpha_1 \theta_2(\mu_2; \lambda_2)$, $n_2 = 0, 1, \dots$, а μ_2 and θ_2 связаны соотношением

$$(\mu_2^2 + a_2 - \lambda_2)\theta_2 + \alpha_1 \frac{\theta_2^2}{2} = C_2, \quad (26)$$

здесь $C_2 = (a_2 - s_2)A_2^2 + \alpha_1 \frac{A_2^4}{2} > 0$ есть постоянная.

Подчеркнем, что уравнения (22) и (25) есть семейства уравнений для различных n_1 и n_2 , то есть для того чтобы найти все собственные значения, необходимо решить (22) для каждого n_1 и (25) для каждого n_2 .

Имеют место теоремы об эквивалентности.

Теорема 3.4. Число $\widehat{\lambda}_1 \in \Lambda_1$ является собственным значением задачи $\mathcal{P}_1$ тогда и только тогда, когда существует целое $\widehat{n}_1 \geq 0$ такое, что $\lambda_1 = \widehat{\lambda}_1$ удовлетворяет уравнению (22) при $n_1 = \widehat{n}_1$; в этом случае собственная функция $v_3 \equiv v_3(x; \widehat{\lambda}_1)$, отвечающая собственному значению $\widehat{\lambda}_1$, имеет $\widehat{n}_1$ простых нулей $x_{j,i} \in I$, где $i = \overline{1, \widehat{n}_1}$.

Доказательство этой теоремы следует из доказательства теоремы 1 и следствия 1 в [6].

Теорема 3.5. Число $\widehat{\lambda}_2 \in \Lambda_2$ является собственным значением задачи $\mathcal{P}_2$ тогда и только тогда, когда существует целое $\widehat{n}_2 \geq 0$ такое, что $\lambda_2 = \widehat{\lambda}_2$ удовлетворяет уравнению (25) при $n_2 = \widehat{n}_2$; в этом случае собственная функция $v_2 \equiv v_2(x; \widehat{\lambda}_2)$, отвечающая собственному значению $\widehat{\lambda}_2$, имеет $\widehat{n}_2$ простых нулей $x_{j,i} \in I$, где $i = \overline{1, \widehat{n}_2}$.

Доказательство этой теоремы следует из доказательства теоремы 1 и следствия 1 в [5].

Явные формулы для $x_{j,i}$ легко получаются из формул (22) и (25), см. следствие 1 в [4] для (22) и теорему 1 в [5] для (25).

Разрешимость задач $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$ утверждается в следующих теоремах.

Теорема 3.6. Задача $\mathcal{P}_1$ имеет бесконечное число собственных значений $\widehat{\lambda}_{1,k} \in \Lambda_1$ с точкой накопления на бесконечности. Кроме этого:

(i) если задача $\mathcal{P}_1^0$ имеет k' решений $\widetilde{\lambda}_{1,k}$ ($k = \overline{1, k'}$), тогда существует постоянная $\alpha_1'' > 0$ такая, что для любого положительного $\alpha_1 = \alpha_1' < \alpha_1''$

$$\widehat{\lambda}_{1,k} \in (\sqrt{s_1}, \sqrt{a_1}) \text{ и } \lim_{\alpha_1' \rightarrow +0} \widehat{\lambda}_{1,k} = \widetilde{\lambda}_{1,k} \text{ } (k = \overline{1, k'}),$$

где $\widehat{\lambda}_{1,1} < \widehat{\lambda}_{1,2} < \dots < \widehat{\lambda}_{1,k'}$ – первые k' решений задачи $\mathcal{P}_1$ при $\alpha_1 = \alpha_1'$;

(ii) для достаточно больших $\widehat{\lambda}_1$ имеют место оценки

$$\max_{x \in [0, h]} v_1^2(x; \widehat{\lambda}_1) = \frac{3}{2\alpha_1} \widehat{\lambda}_1^2 + O(1), \quad \max_{x \in [0, h]} v_3^2(x; \widehat{\lambda}_1) = \frac{1}{2\alpha_1} \widehat{\lambda}_1^2 + O(1).$$

Множество собственных значений задачи $\mathcal{P}_1$ дискретно на Λ_1 , то есть на каждом отрезке $\Lambda_1' \subset \Lambda_1$ существует не более конечного числа (изолированных) собственных значений.

Доказательство этой теоремы следует из доказательств теорем 4, 5 и 6 в [6].

Теорема 3.7. Задача $\mathcal{P}_2$ имеет бесконечное число собственных значений $\widehat{\lambda}_{2,k} \in \Lambda_2$ с точкой накопления на бесконечности. Кроме этого:

(i) если задача $\mathcal{P}_2^0$ имеет k' решений $\widetilde{\lambda}_{2,k}$ ($k = \overline{1, k'}$), тогда существует постоянная $\alpha_1'' > 0$ такая, что для любого положительного $\alpha_1 = \alpha_1' < \alpha_1''$

$$\widehat{\lambda}_{2,k} \in (\sqrt{s_2}, \sqrt{a_2}) \text{ и } \lim_{\alpha_1' \rightarrow +0} \widehat{\lambda}_{2,k} = \widetilde{\lambda}_{2,k} \text{ } (k = \overline{1, k'}),$$

где $\widehat{\lambda}_{2,1} < \widehat{\lambda}_{2,2} < \dots < \widehat{\lambda}_{2,k'}$ – первые k' решений задачи $\mathcal{P}_2$ при $\alpha_1 = \alpha_1'$;

(ii) для достаточно больших $\widehat{\lambda}_2$ имеет место оценка

$$\max_{x \in [0, h]} v_2^2(x; \widehat{\lambda}_2) = \frac{2}{\alpha_1} \widehat{\lambda}_2^2 + O(1).$$

Множество собственных значений задачи $\mathcal{P}_2$ дискретно на Λ_2 , то есть на каждом отрезке $\Lambda_2' \subset \Lambda_2$ существует не более конечного числа (изолированных) собственных значений.

Доказательство этой теоремы следует из доказательств теорем 4, 5 и 6 в [5].

Замечание 3.8. Если $k > k'$, то собственные значения $\widehat{\lambda}_{j,k}$ не связаны с решениями (линейной) задачи $\mathcal{P}_j^0$, в том числе, при $\alpha_1 \rightarrow +0$ [5, 6].

Используя теоремы 3.6 и 3.7, докажем следующие утверждения.

Утверждение 3.9. Пусть $\{\widehat{\lambda}_{1,k}\}$ – последовательность собственных значений задачи $\mathcal{P}_1$. Тогда существует (бесконечная) подпоследовательность $\{\widehat{\lambda}_{1,k'}\}$ с точкой накопления на бесконечности и такая, что для каждого элемента $\widehat{\lambda}_{1,k'}$ этой подпоследовательности имеет место формула

$$(\Phi_1(\widehat{\lambda}_{1,k'} - \Delta_{1,k'}; \widehat{n}_1) - h) \cdot (\Phi_1(\widehat{\lambda}_{1,k'} + \Delta_{1,k'}; \widehat{n}_1) - h) < 0, \quad (27)$$

где $\Delta_{1,k'} > 0$ – постоянная и отрезок $[\widehat{\lambda}_{1,k'} - \Delta_{1,k'}, \widehat{\lambda}_{1,k'} + \Delta_{1,k'}]$ не содержит других элементов последовательности $\{\widehat{\lambda}_{1,k}\}$.

Доказательство. Покажем, что функция w_1 , определенная в (22), положительна. Приравняв w_1 к нулю и подставив результат в (23), получим противоречие. Отсюда следует, что w_1 не обращается в нуль для $\lambda_1 \in \Lambda_1$. Теперь достаточно определить знак w_1 в некоторой точке, например, в точке $\mu_1 = 0$. Значение θ_1 , отвечающее значению $\mu_1 = 0$, вычисляется из (23). Следовательно, $\theta_1 = \bar{\theta}_1$, где $\bar{\theta}_1$ – максимальное из решений уравнения $q_3(\theta_1, \lambda_1) = 0$, которое будет положительным. Для $\alpha_1 \geq 0$ легко видеть, что функция w_1 положительна. Значит, функция w_1 (если существует) положительна для всех $\lambda_1 \in \Lambda_1$. Существование функции w_1 для всех $\lambda_1 \in \Lambda_1$ следует из анализа формулы (23).

Непрерывность функции Φ_1 по $\lambda_1 \in \Lambda_1$ следует из анализа формулы (22) и (23).

Принимая во внимание положительность функции w_1 , получаем следующие неравенства

$$(n_1 - 1)T_1(\lambda_1) < \Phi_1(\lambda_1; n_1) < n_1 T_1(\lambda_1), \quad (28)$$

где $n_1 = 1, 2, \dots$, $\lambda_1 \in \Lambda_1$, and $T_1(\lambda_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{w_1(s; \lambda_1)}$.

В работе [4], см. также [6], доказано, что $\lim_{\lambda_1 \rightarrow +\infty} T_1(\lambda_1) = 0$. Из этого следует существование бесконечного числа решений уравнения (22). Действительно, для любого $h > 0$ можно найти целое $n_1 = n_1^0 \geq 1$, такое, что

$$h < (n_1^0 - 1) \max_{\lambda_1 \in \Lambda_1} T_1(\lambda_1) < \max_{\lambda_1 \in \Lambda} \Phi_1(\lambda_1; n_1^0).$$

Поскольку $\lim_{\lambda_1 \rightarrow +\infty} T_1(\lambda_1) = 0$, то всегда можно выбрать значение $\lambda_1 \geq \lambda_1^0$, такое что $\Phi_1(\lambda_1^0; n_1^0) < n_1^0 T_1(\lambda_1^0) < h$. Но между λ_1 , где функция $\Phi_1(\lambda_1; n_1^0)$ достигает своего максимума, и λ_1^0 существует $\lambda_1 = \widehat{\lambda}_1$, такое что $\Phi_1(\widehat{\lambda}_1; n_1^0) = h$.

Далее, поскольку $\lim_{\lambda_1 \rightarrow +\infty} T_1(\lambda_1) = 0$, то существует бесконечное множество собственных значений $\widehat{\lambda}_{1,k}$, переходя через которые функция $\Phi_1(\lambda_1; n_1) - h$ меняет знак, см. формулу (22). Таким образом, мы доказали, что существует бесконечное множество собственных значений задачи $\mathcal{P}_1$, для которых имеет место неравенство (27). По следствию теоремы 4 в [6] все упомянутые собственные значения изолированы (дискретны).

Утверждение 3.10. Пусть $\{\widehat{\lambda}_{2,k}\}$ – последовательность собственных значений задачи $\mathcal{P}_2$. Тогда существует (бесконечная) подпоследовательность $\{\widehat{\lambda}_{2,k'}\}$ с точкой накопления на бесконечности и такая, что для каждого элемента $\widehat{\lambda}_{2,k'}$ этой подпоследовательности имеет место формула

$$(\Phi_2(\widehat{\lambda}_{2,k'} - \Delta_{2,k'}; \widehat{n}_2) - h) \cdot (\Phi_2(\widehat{\lambda}_{2,k'} + \Delta_{2,k'}; \widehat{n}_2) - h) < 0, \quad (29)$$

где $\Delta_{2,k'} > 0$ – постоянная и отрезок $[\widehat{\lambda}_{2,k'} - \Delta_{2,k'}, \widehat{\lambda}_{2,k'} + \Delta_{2,k'}]$ не содержит других элементов последовательности $\{\widehat{\lambda}_{2,k}\}$.

Доказательство. Покажем, что функция w_2 , определенная в (25), положительна. Действительно, приравнявая w_2 к нулю, выражая отсюда $\mu_2^2 + a_2 - \lambda_2^2$ и подставляя этот результат в (26), получаем противоречие, то есть w_2 в нуль не обращается. Теперь достаточно выяснить знак w_2 в любой точке. Ясно, что для любого $\lambda_2^2 < a_2$ функция w_2 положительна, что значит, что эта функция (когда существует) положительна для всех $\lambda_2 \in \Lambda_2$. Существование функции w_2 для всех $\lambda_2 \in \Lambda_2$ следует из анализа формулы (26).

Непрерывность функции Φ_2 по $\lambda_2 \in \Lambda_2$ следует из анализа формулы (25) и (26).

Принимая во внимание положительность функции w_2 , получаем следующие неравенства

$$n_2 T_2(\lambda_2) < \Phi_2(\lambda_2; n_2) < (n_2 + 1) T_2(\lambda_2), \quad (30)$$

где $n_2 = 0, 1, \dots$, $\lambda_2 \in \Lambda_2$, а $T_2(\lambda_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{w_2(s; \lambda_2)}$.

В работе [5] доказано, что $\lim_{\lambda_2 \rightarrow +\infty} T_2(\lambda_2) = 0$. Отсюда следует существование бесконечного числа решений уравнения (25). Действительно, для любого $h > 0$ существует целое $n_2 = n_2^0 \geq 1$, такое что

$$h < (n_2^0 - 1) \max_{\lambda_2 \in \Lambda_2} T_2(\lambda_2) < \max_{\lambda_2 \in \Lambda_2} \Phi_2(\lambda_2; n_2^0).$$

Поскольку $\lim_{\lambda_2 \rightarrow +\infty} T_2(\lambda_2) = 0$, то всегда можно выбрать значение $\lambda_2 \geq \lambda_2^0$, такое что $\Phi_2(\lambda_2^0; n_2^0) < n_2^0 T_2(\lambda_2^0) < h$. Но тогда между λ_2 , при котором функция $\Phi_2(\lambda_2; n_2^0)$ достигает своего максимума, и λ_2^0 существует $\lambda_2 = \hat{\lambda}_2$, такое что $\Phi_2(\hat{\lambda}_2; n_2^0) = h$.

Теперь поскольку $\lim_{\lambda_2 \rightarrow +\infty} T_2(\lambda_2) = 0$, то существует бесконечное число собственных значений $\hat{\lambda}_{2,k}$, переходя через которые функция $\Phi_2(\lambda_2; n_2) - h$ меняет знак, см. формулу (25). Таким образом, мы доказали, что существует бесконечное число собственных значений задачи $\mathcal{P}_2$, для которых имеет место неравенство (29). По следствию теоремы 4 в [5] все эти собственные значения изолированы (дискретны).

Из утверждений 3.9 и 3.10 получаем такое следствие.

Следствие 3.11. Существует постоянная $\lambda_j^* > \sqrt{a_j}$ такая, что интервал $(\sqrt{a_j}, \lambda_j^*)$ содержит собственные значения $\hat{\lambda}_j$ задачи $\mathcal{P}_j$, которые не связаны с решениями $\tilde{\lambda}_j$ (линейной) задачи $\mathcal{P}_j^0$ при $\alpha_1 \rightarrow +0$.

В силу теорем 3.6 и 3.7, если $\alpha_1 > 0$ достаточно мало, то все собственные значения $\hat{\lambda}_j \in (\sqrt{a_j}, \lambda_j^*)$ задач $\mathcal{P}_j$ не связаны с решениями соответствующих линейных задач. Если же $\alpha_1 > 0$ не мало, то интервал $(\sqrt{a_j}, \lambda_j^*)$ может содержать среди прочих и такие собственные значения $\hat{\lambda}_j$, для которых $\lim_{\alpha_1 \rightarrow +0} \hat{\lambda}_j = \tilde{\lambda}_j$.

Принимая во внимание теоремы 3.4 и 3.5, будем называть уравнения (22), (25) интегральными характеристическими уравнениями (ИХУ) задач $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$, соответственно.

Уравнения типа (22), (25) – мощный инструмент исследования некоторого круга нелинейных задач на собственные значения, см. [4, 5, 6, 7]. В частности, на основе анализа уравнения (22) в [6] и уравнения (25) в [5] получены глубокие результаты о разрешимости задач $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$, а также различные свойства собственных значений и собственных функций.

В классической (линейной) теории Штурма – Лиувилля известно определение характеристической функции, которое находит многочисленные применения [27]. Для задач $\mathcal{P}_j$ мы введем аналогичные определения.

Имеют место следующие утверждения.

Утверждение 3.12. Число $\hat{\lambda}_1 \in \Lambda_1$ является собственным значением задачи $\mathcal{P}_1$, если и только если $\lambda_1 = \hat{\lambda}_1$ удовлетворяет уравнению

$$\varphi_1(\lambda_1, \alpha_1) = 0, \quad (31)$$

где $\varphi_1(\lambda_1, \alpha_1) := ((a_1 + \alpha_1 v_1^2 + \alpha_1 v_3^2)v_1 + \lambda_1 \kappa_{c,1}^{-1} v_3)|_{x=h}$, $a v_1 \equiv v_1(x; \lambda_1)$, $v_3 \equiv v_3(x; \lambda_1)$ – решения задачи Коши (9), (10), (12).

Доказательство. Пусть $v_1 \equiv v_1(x; \hat{\lambda}_1)$, $v_3 \equiv v_3(x; \hat{\lambda}_1)$ – решение задачи Коши (9), (10), (12). Если $\lambda_1 = \hat{\lambda}_1$ удовлетворяет уравнению (31), то, очевидно, $\hat{\lambda}_1$ – собственное значение и $v_1 \equiv v_1(x; \hat{\lambda}_1)$, $v_3 \equiv v_3(x; \hat{\lambda}_1)$ – собственные функции задачи $\mathcal{P}_1$.

Пусть $\lambda_1 = \hat{\lambda}_1^* \in \Lambda_1$ – решение уравнения (31). Рассмотрим задачу Коши (9), (10), (12) при $\lambda_1 = \hat{\lambda}_1^*$. По утверждению 3.2 существует единственное нетривиальное решение $v_1 \equiv v_1(x; \hat{\lambda}_1^*)$, $v_3 \equiv v_3(x; \hat{\lambda}_1^*)$ этой задачи Коши и это решение непрерывно зависит от $(x, \lambda_1) \in \bar{I} \times \Lambda_1$. Если уравнение (31) выполняется для $\lambda_1 = \hat{\lambda}_1^*$ на этом решении задачи Коши в точке $x = h$, тогда $\lambda_1 = \hat{\lambda}_1^*$ – собственное значение задачи $\mathcal{P}_1$.

Предположим, что уравнение (31) не выполняется для $\lambda_1 = \hat{\lambda}_1^*$ и найденного решения при $x = h$. Следовательно, решение задачи (9), (10), (12) при $\lambda_1 = \hat{\lambda}_1^*$ неединственно; для одного из них уравнение (31) выполняется, а для другого – нет. Этот вывод противоречит утверждению 3.2. А значит, предположение о существовании решения задачи Коши (9), (10), (12) при $\lambda_1 = \hat{\lambda}_1^*$, для которого уравнение (31) не выполняется, неверно.

Утверждение 3.13. Число $\hat{\lambda}_2 \in \Lambda_2$ является собственным значением задачи $\mathcal{P}_2$, если и только если $\lambda_2 = \hat{\lambda}_2$ удовлетворяет уравнению

$$\varphi_2(\lambda_2, \alpha_1) = 0, \quad (32)$$

где $\varphi_2(\lambda_2, \alpha_2) := (\kappa_{c,2} v_2 + v_2')|_{x=h}$, $a v_2 \equiv v_2(x; \lambda_2)$ – решение задачи Коши (14), (15), (17).

Доказательство. Пусть $v_2 \equiv v_2(x; \hat{\lambda}_2)$ – решение задачи Коши (14), (15), (17). Если $\lambda_2 = \hat{\lambda}_2$ удовлетворяет уравнению (32), то, очевидно, $\hat{\lambda}_2$ – собственное значение и $v_2(x; \hat{\lambda}_2)$ – собственная функция задачи $\mathcal{P}_2$.

Пусть $\lambda_2 = \hat{\lambda}_2^* \in \Lambda_2$ – решение уравнения (32). Рассмотрим задачу Коши (14), (15), (17) при $\lambda_2 = \hat{\lambda}_2^*$. По утверждению 3.3 нетривиальное решение $v_2 \equiv v_2(x; \hat{\lambda}_2^*)$ этой задачи Коши существует и непрерывно зависит от $(x, \lambda_2) \in \bar{I} \times \Lambda_2$. Если уравнение (32) удовлетворяется для $\lambda_2 = \hat{\lambda}_2^*$ на этом решении задачи Коши в точке $x = h$, то $\lambda_2 = \hat{\lambda}_2^*$ – собственное значение задачи $\mathcal{P}_2$.

Предположим, что уравнение (31) не удовлетворяется для $\lambda_1 = \hat{\lambda}_1^*$ и найденного решения задачи Коши в точке $x = h$. Следовательно, существует неединственное решение задачи Коши (14), (15), (17) с $\lambda_2 = \hat{\lambda}_2^*$; для одного из них уравнение (32) выполняется, а для другого – нет. Этот вывод противоречит утверждению 3.3. А значит, предположение о существовании решения задачи Коши (14), (15), (17) при $\lambda_2 = \hat{\lambda}_2^*$, для которого уравнение (32) не выполняется, неверно.

Естественно называть уравнения (31), (32) *характеристическими уравнениями*, а их левые части *характеристическими функциями* задач $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$, соответственно.

Теоремы 3.4, 3.6 и утверждение 3.12 дают такое следствие.

Следствие 3.14. Любое решение $\lambda_1 = \hat{\lambda}_1 \in \Lambda_1$ уравнения (22) есть решение уравнения (31) и наоборот; более того, если $\hat{\lambda}_1$ такое, что выполняется условие (27), то также выполняется и условие

$$\varphi_1(\hat{\lambda}_1 - \Delta_1, \alpha_1) \cdot \varphi_1(\hat{\lambda}_1 + \Delta_1, \alpha_1) < 0, \quad (33)$$

где $\varphi_1(\lambda_1, \alpha_1, \alpha_3)$ определена в (31), а $\Delta_1 > 0$ – некоторая постоянная.

В силу теоремы 3.6 для каждого собственного значения $\hat{\lambda}_1$ задачи $\mathcal{P}_1$, удовлетворяющего свойству (27), постоянная Δ_1 может быть выбрана так, что отрезок $[\hat{\lambda}_1 - \Delta_1, \hat{\lambda}_1 + \Delta_1]$ не содержит других собственных значений задачи $\mathcal{P}_1$.

Теоремы 3.5, 3.7 и утверждение 3.13 дают такое следствие.

Следствие 3.15. Любое решение $\lambda_2 = \hat{\lambda}_2 \in \Lambda_2$ уравнения (25) есть решение уравнения (32) и наоборот; более того, если $\hat{\lambda}_2$ такое, что выполняется условие (29), то также выполняется и условие

$$\varphi_2(\hat{\lambda}_2 - \Delta_2, \alpha_1) \cdot \varphi_2(\hat{\lambda}_2 + \Delta_2, \alpha_1) < 0, \quad (34)$$

где $\varphi_2(\lambda_2, \alpha_1)$ определена в (32), а $\Delta_2 > 0$ – некоторая постоянная.

В силу теоремы 3.7 для каждого собственного значения $\hat{\lambda}_2$ задачи $\mathcal{P}_2$, удовлетворяющего свойству (29), постоянная Δ_2 может быть выбрана так, что отрезок $[\hat{\lambda}_2 - \Delta_2, \hat{\lambda}_2 + \Delta_2]$ не содержит других собственных значений задачи $\mathcal{P}_2$.

3.3 Задачи $\mathcal{P}(\delta)$. Нам понадобится следующее утверждение.

Утверждение 3.16. Существует $\delta^* > 0$ такое, что для $0 < \delta < \delta^*$ задача Коши (1), (2), (4), (6), (7) глобально однозначно разрешима для $x \in \bar{I}$, а ее (классическое) решение

$$u_1 \equiv u_1(x; \lambda, \delta), \quad u_2 \equiv u_2(x; \lambda, \delta), \quad u_3 \equiv u_3(x; \lambda, \delta) \quad (35)$$

непрерывно зависит от $(x, \lambda, \delta) \in \bar{I} \times \Lambda^* \times D^*$, где $D^* = (0, \delta^*)$.

Кроме того, функции u_1, u_2, u_3 , определенные посредством (35), и их производные u'_1, u'_2, u'_3 равномерно относительно $(x, \lambda) \in \bar{I} \times \Lambda^*$ стремятся к функциям v_1, v_2, v_3 и их производным v'_1, v'_2, v'_3 , соответственно, при $\delta \rightarrow +0$, где $v_1 \equiv v_1(x; \lambda_1)$, $v_3 \equiv v_3(x; \lambda_1)$ – решение задачи Коши (9), (10), (12) и $v_2 \equiv v_2(x; \lambda_2)$ – решение задачи Коши (14), (15), (17), а v'_1, v'_2, v'_3 производные этих решений.

Доказательство. Это утверждение является следствием «интегральной» теоремы непрерывности [29]. Следуя [29], рассмотрим нормальную систему уравнений

$$u'_i = f_i(x, u_1, \dots, u_n, \gamma_1, \dots, \gamma_l), \quad i = \overline{1, n}, \quad (36)$$

правые части которой зависят от параметров $\gamma_1, \dots, \gamma_l$. Система (36) может быть записана в векторной форме

$$\mathbf{u}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{u}, \boldsymbol{\gamma}). \quad (37)$$

Мы предполагаем, что правые части системы (36) определены и непрерывны вместе со своими частными производными $\frac{\partial}{\partial u_k} f_i(x, \mathbf{u}, \boldsymbol{\gamma})$ в некоторой области $\bar{\Gamma}$ пространства R переменных $x, u_1, \dots, u_n, \gamma_1, \dots, \gamma_l$. Следующая теорема хорошо известна, и доказана, например, в [29].

Пусть $(x_0, \mathbf{u}_0, \boldsymbol{\gamma}_0)$ – некоторая точка в области $\bar{\Gamma}$ и $\mathbf{u} = \boldsymbol{\varphi}(x, \boldsymbol{\gamma})$ – решение уравнения (37), удовлетворяющее начальному условию $\boldsymbol{\varphi}(x_0, \boldsymbol{\gamma}) = \mathbf{u}_0$. Если решение $\mathbf{u} = \boldsymbol{\varphi}(x, \boldsymbol{\gamma}_0)$ определено при $x \in \bar{I}$, то существует число $\gamma_0 > 0$, такое, что для $|\boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{\gamma}_0| < \gamma_0$ решение $\mathbf{u} = \boldsymbol{\varphi}(x, \boldsymbol{\gamma})$ определено на том же самом интервале $\bar{I}$, и функция $\boldsymbol{\varphi}(x, \boldsymbol{\gamma})$ непрерывна на множестве переменных $x, \boldsymbol{\gamma}$ для $x \in \bar{I}$ и $|\boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{\gamma}_0| < \gamma_0$. Более того, $\boldsymbol{\varphi}(x, \boldsymbol{\gamma}) \rightarrow \boldsymbol{\varphi}(x, \boldsymbol{\gamma}^*)$ равномерно по $x \in \bar{I}$ при $\boldsymbol{\gamma} \rightarrow \boldsymbol{\gamma}^*$, как только $|\boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{\gamma}^*| < \gamma_0$.

Заметим, что эта теорема сформулирована в [29] без дополнительного утверждения о равномерном стремлении $\boldsymbol{\varphi}(x, \boldsymbol{\gamma})$ к $\boldsymbol{\varphi}(x, \boldsymbol{\gamma}^*)$. Однако этот результат следует из доказательства, представленного в [29].

Теперь утверждение 3.16 является прямым следствием применения сформулированной выше теоремы к задаче Коши (1), (2), (4), (6), (7) при дополнительном допущении о существовании единственного непрерывного решения задачи Коши (9), (10), (12) при $(x, \lambda_1, \alpha_1) \in \bar{I} \times \Lambda_1 \times A$, определенного глобально и задачи Коши (14), (15), (17) для $(x, \lambda_2, \alpha_1) \in \bar{I} \times \Lambda_2 \times A$. Справедливость этого дополнительного допущения гарантируется утверждениями 3.2 и 3.3.

Дважды непрерывная дифференцируемость решений u_2 и u_3 по $x \in \bar{I}$ следует из гладкости правых частей второго и третьего уравнений в (1).

Мы предположим, что $(x, \lambda, \delta) \in \bar{I} \times \Lambda^* \times D^*$, где λ_j^* выбраны в соответствии со следствием 3.11, но δ^* выбирается по λ_j^* в смысле утверждения 3.16. Отметим, что λ_j^* не предполагается малым.

Поскольку утверждение 3.16 дает существование непрерывного решения задачи Коши, определенного глобально, то мы можем ввести систему характеристических уравнений задачи $\mathcal{P}(\delta)$ так, как это было сделано в утверждениях 3.12, 3.13 для задач $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$.

Имеем следующее утверждение.

Утверждение 3.17. Пара чисел $\bar{\lambda} = (\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2)$ есть (векторное) собственное значение задачи $\mathcal{P}(\delta)$, если и только если $\lambda = \bar{\lambda} \in \Lambda^*$ удовлетворяет системе уравнений

$$\begin{cases} \psi_1(\lambda, \delta) = 0, \\ \psi_2(\lambda, \delta) = 0, \end{cases} \quad (38)$$

где

$$\begin{aligned} \psi_1(\lambda, \delta) &:= ((a_1 + \alpha_1 u_1^2 + \alpha_2 u_2^2 + \alpha_1 u_3^2)u_1 + \lambda_1 c_1 \kappa_{c,1}^{-1} u_3)|_{x=h}, \\ \psi_2(\lambda, \delta) &:= (\kappa_{c,2} u_2 + u_2')|_{x=h}, \end{aligned}$$

а $u_1 \equiv u_1(x; \lambda, \delta)$, $u_2 \equiv u_2(x; \lambda, \delta)$, $u_3 \equiv u_3(x; \lambda, \delta)$ – решение задачи Коши (1), (2), (4), (6), (7), определенное в утверждении 3.16.

Доказательство. Пусть $u_1 \equiv u_1(x; \bar{\lambda}, \delta)$, $u_2 \equiv u_2(x; \bar{\lambda}, \delta)$, $u_3 \equiv u_3(x; \bar{\lambda}, \delta)$ – решение задачи Коши (1), (2), (4), (6), (7). Если $\lambda = \bar{\lambda}$ удовлетворяет уравнению (38), то, очевидно, $\bar{\lambda}$ – собственное значение и $u_1 \equiv u_1(x; \bar{\lambda}, \delta)$, $u_2 \equiv u_2(x; \bar{\lambda}, \delta)$, $u_3 \equiv u_3(x; \bar{\lambda}, \delta)$ – собственные функции задачи $\mathcal{P}(\delta)$.

Пусть $\lambda = \bar{\lambda}^* \in \Lambda^*$ – некоторое решение уравнений (38). Рассмотрим задачу Коши (1), (2), (4), (6), (7) при $\lambda = \bar{\lambda}^*$. По утверждению 3.16 существует единственное нетривиальное решение (35) этой задачи Коши, непрерывно зависящее от $(x, \lambda, \delta) \in \bar{I} \times \Lambda^* \times D^*$. Если уравнения (38) удовлетворяются для $\lambda = \bar{\lambda}^*$ на этом решении задачи Коши в точке $x = h$, то $\lambda = \bar{\lambda}^*$ – собственное значение задачи $\mathcal{P}(\delta)$.

Предположим, что для найденного решения задачи Коши в точке $x = h$ уравнения (38) не выполняются для $\lambda = \bar{\lambda}^*$. Это значит, что существует неединственное решение задачи Коши (1), (2), (4), (6), (7) при $\lambda = \bar{\lambda}^*$; для одного из них уравнения (38) выполняются, а для другого – нет. Это вывод противоречит утверждению 3.16. Следовательно, предположение о существовании решения задачи Коши (1), (2), (4), (6), (7) при $\lambda = \bar{\lambda}^*$, для которого уравнения (38) не выполняются, неверно.

Вычитая левые части уравнений (31), (32) из левых частей уравнений (38), получаем следующую систему

$$\begin{cases} \psi_1(\lambda, \delta) - \varphi_1(\lambda_1) = -\varphi_1(\lambda_1), \\ \psi_2(\lambda, \delta) - \varphi_2(\lambda_2) = -\varphi_2(\lambda_2), \end{cases} \quad (39)$$

где все выражения в (39) определены посредством (31), (32) и (38). Доказательство существования векторных собственных значений $\bar{\lambda}$ задачи $\mathcal{P}(\delta)$ опирается на анализ системы (39) при $\delta \rightarrow +0$. В (39) мы намеренно опустили явную зависимость от α_1 , чтобы не загромождать выкладки.

Левые части (39) зависят от δ , а правые части – нет. Ясно, что система (39) распадается на два независимых уравнения (31), (32) при $\delta = 0$.

Принимая во внимание следствия 3.14, 3.15, мы получаем основной результат данной статьи.

Теорема 3.18. Пусть каждая из задач $\mathcal{P}_j$ имеет n'_j собственных значений

$$\widehat{\lambda}_{j,1}, \dots, \widehat{\lambda}_{j,n'_j} \in (\sqrt{s_j}, \lambda_j^*),$$

удовлетворяющих свойствам, сформулированным в следствиях 3.14, 3.15, соответственно.

Тогда существует постоянная $\delta^0 > 0$ такая, что для любого $\delta \in (0, \delta^0)$ задача $\mathcal{P}(\delta)$ имеет не меньше $n'_1 \times n'_2$ векторных собственных значений $\bar{\lambda}_{i_1, i_2} = (\bar{\lambda}_{1, i_1}, \bar{\lambda}_{2, i_2})$, где $i_j = \overline{1, n'_j}$; кроме этого, $\bar{\lambda}_{i_1, i_2} \rightarrow (\bar{\lambda}_{1, i_1}, \bar{\lambda}_{2, i_2})$ при $\delta \rightarrow +0$.

Доказательство. Утверждение 3.16 влечет следующий результат: если $\lambda \in \Lambda^*$ и $\delta \rightarrow 0$, то

$$\begin{aligned} u_1(x; \lambda, \delta) &\rightarrow v_1(x; \lambda_1), & u_1'(x; \lambda, \delta) &\rightarrow v_1'(x; \lambda_1), \\ u_2(x; \lambda, \delta) &\rightarrow v_2(x; \lambda_2), & u_2'(x; \lambda, \delta) &\rightarrow v_2'(x; \lambda_2), \\ u_3(x; \lambda, \delta) &\rightarrow v_3(x; \lambda_1), & u_3'(x; \lambda, \delta) &\rightarrow v_3'(x; \lambda_1) \end{aligned} \quad (40)$$

равномерно по $x \in \bar{I}$; здесь $u_1(x; \lambda, \delta)$, $u_2(x; \lambda, \delta)$, $u_3(x; \lambda, \delta)$ – решение задачи Коши (1), (2), (4), (6), (7), а $v_1(x; \lambda_1)$, $v_3(x; \lambda_1)$ – решение задачи Коши (9), (10), (12) и $v_2(x; \lambda_2)$ – решение задачи Коши (14), (15), (17).

В силу формул (40), очевидно, что, если $\delta \rightarrow 0$, то

$$\psi_1(\lambda, \delta) \rightarrow \varphi_1(\lambda_1), \quad \psi_2(\lambda, \delta) \rightarrow \varphi_2(\lambda_2) \quad (41)$$

равномерно по $\lambda \in \Lambda^*$, где φ_1 , φ_2 и ψ_j определены формулами (31), (32) и (38), соответственно.

В силу (41) мы получаем, что для любого $\epsilon > 0$ существует $\epsilon' > 0$, такое, что для всех $\lambda \in \Lambda^*$ левые части формул (39) меньше ϵ по абсолютному значению, как только $|\delta| < \epsilon'$.

Нули правых частей формул (39) являются собственными значениями задач $\mathcal{P}_j$. Из следствия 3.11 известно, что существует постоянная $\lambda_j^* (> \sqrt{a_j})$, такая, что интервал $(\sqrt{s_j}, \lambda_j^*)$ содержит собственные значения задач $\mathcal{P}_j$, удовлетворяющие следствиям 3.14, 3.15. Предполагается, что λ_j^* достаточно велико и, следовательно, интервал $(\sqrt{s_j}, \lambda_j^*)$ содержит такие собственные значения задач $\mathcal{P}_j$, которые не переходят в какие-либо собственные значения задач $\mathcal{P}_j^0$ при $\delta \rightarrow +0$. Значит, для любого собственного значения $\hat{\lambda}_{j,k}$, удовлетворяющего следствию 3.14 или 3.15, существует интервал (содержащий это собственное значение), такой, что правая часть формулы в (39), отвечающая $\hat{\lambda}_{j,k}$, принимает значения разных знаков на различных концах этого интервала. Поскольку левые части могут быть сделаны сколь угодно малыми, а правые части не зависят от δ , непрерывны по λ_j и меняют знак при переходе через $\hat{\lambda}_{j,k}$, то для достаточно малого δ в этих интервалах найдутся $\bar{\lambda}_{1,i_1}$ и $\bar{\lambda}_{2,i_2}$, удовлетворяющие системе (39).

Замечание 3.19. Значения λ_j^* были введены при формулировании задачи $\mathcal{P}(\delta)$. Эти значения выбираются достаточно большими, чтобы интервалы $(\sqrt{a_j}, \lambda_j^*)$ содержали собственные значения задач $\mathcal{P}_j$, удовлетворяющих свойству (33) или (34), см. следствие 3.11 и следствия 3.14, 3.15. Параметр $\delta^* > 0$ фиксируется в соответствии с утверждением 3.16 и зависит от значения λ_j^* (чем больше λ_j^* , тем меньше δ^*).

4. Физическая постановка задачи. Рассмотрим задачу о распространении суммы двух монохроматических ТЕ и ТМ волн в плоском открытом волноводе, заполненном нелинейной средой. Нелинейный отклик среды характеризуется тензорным эффектом Керра [30, 31, 32, 33]. В нелинейном режиме такая сумма волн образует единую нелинейную двухчастотную волну (также называемую связанной ТЕ-ТМ волной).

Пусть $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq h, (y, z) \in \mathbb{R}^2\}$ – диэлектрический слой, расположенный между двух полупространств $x < 0$ and $x > h$ в декартовых координатах $Oxyz$. Полупространства заполнены немагнитной средой, характеризующейся вещественными диэлектрическими проницаемостями $\epsilon = \epsilon_s \geq \epsilon_0 > 0$ и $\epsilon = \epsilon_c \geq \epsilon_0 > 0$, соответственно, где ϵ_0 – диэлектрическая проницаемость вакуума. Диэлектрическая проницаемость ϵ_l слоя Σ будет введена ниже; магнитная проницаемость μ во всем пространстве положительная постоянная.

В соответствии с [34], введем двухчастотное электромагнитное поле

$$\mathbf{E}_\omega = \mathbf{E}_1 e^{-i\omega_1 t} + \mathbf{E}_2 e^{-i\omega_2 t}, \quad \mathbf{H}_\omega = \mathbf{H}_1 e^{-i\omega_1 t} + \mathbf{H}_2 e^{-i\omega_2 t}, \quad (42)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1 &= (e_x, 0, e_z)^\top e^{i\gamma_1 y}, & \mathbf{H}_1 &= (0, h_y, 0)^\top e^{i\gamma_1 y}, \\ \mathbf{E}_2 &= (0, e_y, 0)^\top e^{i\gamma_2 z}, & \mathbf{H}_2 &= (h_x, 0, h_z)^\top e^{i\gamma_2 z}; \end{aligned} \quad (43)$$

здесь компоненты $e_x, e_y, e_z, h_x, h_y, h_z$ зависят только от одной пространственной координаты x , а γ_1, γ_2 – вещественные постоянные, подлежащие определению. Величины $\mathbf{E}_j = \mathbf{E}_j^+ + i\mathbf{E}_j^-$, $\mathbf{H}_j = \mathbf{H}_j^+ + i\mathbf{H}_j^-$ называются комплексными амплитудами [35]. Поле (42)–(43) называется ТЕ-ТМ волной. Вещественное (физическое) поле $\tilde{\mathbf{E}}_\omega, \tilde{\mathbf{H}}_\omega$ имеет вид $\text{Re } \mathbf{E}_\omega, \text{Re } \mathbf{H}_\omega$.

Частоты ω_1 и ω_2 , вообще говоря, различны, но их выбор имеет некоторые ограничения, связанные с выбором закона нелинейности для ϵ_l . Здесь предполагается, что оптический отклик диэлектрической проницаемости является локальным в пространстве и времени; временная зависимость оптического отклика описывается одной частотой; фазовый синхронизм отсутствует, так что вклад высших гармоник в оптический отклик пренебрежимо мал [9, 31, 36]. Эти предположения являются стандартными при изучении эффектов самовоздействия (самофокусировка, самодефокусировка, фазовая самомодуляция и т. д.) в нелинейной оптике [30, 31, 32, 33, 36, 37, 38].

Пусть диэлектрическая проницаемость ϵ_l слоя Σ имеет вид

$$\epsilon_l(\tilde{\mathbf{E}}_\omega) \equiv \begin{pmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{pmatrix}, \quad (44)$$

где $\epsilon_1 = \epsilon_3 = \epsilon + \tilde{\alpha}_1 t_1^2 + \tilde{\alpha}_2 t_2^2 + \tilde{\alpha}_3 t_3^2$, $\epsilon_2 = \epsilon + \tilde{\alpha}_2 t_1^2 + \tilde{\alpha}_1 t_2^2 + \tilde{\alpha}_2 t_3^2$, $\epsilon, \tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2 > 0$ – вещественные постоянные;

$$t_1 = |(\mathbf{E}_1, \mathbf{e}_x)|^2, \quad t_2 = |(\mathbf{E}_2, \mathbf{e}_y)|^2, \quad t_3 = |(\mathbf{E}_1, \mathbf{e}_z)|^2,$$

$\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2$ – векторы электрического поля, формирующие ТЕ-ТМ волну; $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ – единичные орты, отвечающие осям Ox, Oy, Oz координат $Oxyz$; $(\cdot, \cdot)$ – евклидово скалярное произведение. Всюду $\mu = \mu_0$, где μ_0 – магнитная проницаемость вакуума.

Мы считаем, что выполняются неравенства $\epsilon > \epsilon_s \geq \epsilon_c > 0$, где ϵ_s – диэлектрическая проницаемость полупространства $x < 0$, ϵ_c – диэлектрическая проницаемость полупространства $x > h$. Неравенство $\epsilon > \max\{\epsilon_s, \epsilon_c\}$ является необходимым условием существования распространяющихся ТЕ и ТМ волн в слое, заполненном однородной линейной средой, то есть при $\tilde{\alpha}_1 = \tilde{\alpha}_2 = 0$ [25, 26].

Отметим, что теоретическое доказательство существования двухчастотных распространяющихся волн, являющихся возмущением суммы двух решений соответствующих линейных задач, было получено относительно недавно на основе линеаризации нелинейных уравнений Максвелла: нелинейные распространяющиеся (связанные) ТЕ-ТМ и ТЕ-ТЕ волны в слое с керровской нелинейностью были введены и изучены в [10] и [8], соответственно. Однако потребовалось создание нового математического аппарата, чтобы доказать существование нелинеаризуемых решений в этих и некоторых близких задачах, см., например, [39].

Задача о распространении ТЕ-ТМ волны на одной частоте в слое с керровской нелинейностью была впервые рассмотрена в работах [35, 40]; позднее эта задача также привлекала исследователей [36, 41, 42]. Задача о распространении многочастотной волны в нелинейном фотонном кристалле упомянута в [43]. Общая формулировка задачи о распространении многочастотной волны в круглых и плоских цилиндрических волноводах была сформулирована в [9].

Различные существующие и потенциальные применения плоских волноводов с диэлектрической проницаемостью вида $\epsilon + \alpha|E|^2$, а также некоторые экспериментальные результаты представлены в [32, 36, 44, 45, 46, 47, 48].

Итак, подставляя (42) в уравнения Максвелла и принимая во внимание линейность оператора rot , получаем, что E_k, H_k удовлетворяют (связанным) уравнениям

$$\begin{cases} e^{-i\omega_1 t} \text{rot } H_1 + e^{-i\omega_2 t} \text{rot } H_2 = -i\epsilon(\omega_1 E_1 e^{-i\omega_1 t} + \omega_2 E_2 e^{-i\omega_2 t}), \\ e^{-i\omega_1 t} \text{rot } E_1 + e^{-i\omega_2 t} \text{rot } E_2 = i\mu(\omega_1 H_1 e^{-i\omega_1 t} + \omega_2 H_2 e^{-i\omega_2 t}). \end{cases} \quad (45)$$

Поскольку полученная система должна выполняться для всех t , то отсюда следует, что имеет место система 4-х (векторных) уравнений

$$\begin{cases} \text{rot } H_j = -i\epsilon\omega_j E_j, \\ \text{rot } E_j = i\mu\omega_j H_j. \end{cases} \quad (46)$$

Распространяющиеся волны (которые мы ищем) затухают при удалении от границ слоя, то есть затухают при $|x| \rightarrow \infty$ (как видно из формул (49) искомого решения затухают экспоненциально при $|x| \rightarrow \infty$). Кроме того, из классической теории электромагнитного поля известно, что касательные компоненты полей E_j, H_j непрерывны на границах $x = 0, x = h$ [1, 25, 26]. И наконец, мы требуем, чтобы величины $e_x(x)|_{x=0}$ и $e_y(x)|_{x=0}$ имели фиксированные (известные) значения.

Подставляя (43) в (46) и используя обозначения $u_1 := e_x, u_2 := e_y, u_3 := e_z$, после некоторых преобразований, получаем

$$\begin{cases} \gamma_1 u'_3 = -(\mu\omega_1^2 \epsilon_1 - \gamma_1^2)u_1, \\ u''_2 = -(\mu\omega_2^2 \epsilon_2 - \gamma_2^2)u_2, \\ u''_3 - \gamma_1 u'_1 = -\mu\omega_1^2 \epsilon_3 u_3, \end{cases} \quad (47)$$

$h_x = -\gamma_2(\mu\omega_2)^{-1}e_y, h_y = \gamma_1^{-1}\omega_1 e_x, h'_y = -i\omega_1 e_z, h_z = (i\mu\omega_2)^{-1}e'_y$, где

$$\epsilon_1 = \epsilon_3 = \begin{cases} \epsilon_s, & x < 0, \\ \epsilon_1, & 0 \leq x \leq h, \\ \epsilon_c, & x > h, \end{cases} \quad \epsilon_2 = \begin{cases} \epsilon_s, & x < 0, \\ \epsilon_2, & 0 \leq x \leq h, \\ \epsilon_c, & x > h, \end{cases} \quad (48)$$

и $\epsilon_1 = \epsilon + \tilde{\alpha}_1 u_1^2 + \tilde{\alpha}_2 u_2^2 + \tilde{\alpha}_3 u_3^2, \epsilon_2 = \epsilon + \tilde{\alpha}_2 u_1^2 + \tilde{\alpha}_1 u_2^2 + \tilde{\alpha}_2 u_3^2$.

В соответствии с условиями на бесконечности, решения системы (47) в полупространствах $x < 0, x > h$ имеют вид

$$\begin{cases} u_1(x) = A_1 e^{\sqrt{(\gamma_1^2 - \omega_1^2 \mu \epsilon_s)}x}, \\ u_2(x) = A_2 e^{\sqrt{(\gamma_2^2 - \omega_2^2 \mu \epsilon_s)}x}, \\ u_3(x) = \gamma_1^{-1} \sqrt{(\gamma_1^2 - \omega_1^2 \mu \epsilon_s)} A_1 e^{\sqrt{(\gamma_1^2 - \omega_1^2 \mu \epsilon_s)}x}, \\ u_1(x) = B_1 e^{-\sqrt{(\gamma_1^2 - \omega_1^2 \mu \epsilon_c)}(x-h)}, \\ u_2(x) = B_2 e^{-\sqrt{(\gamma_2^2 - \omega_2^2 \mu \epsilon_c)}(x-h)}, \\ u_3(x) = -\gamma_1^{-1} \sqrt{(\gamma_1^2 - \omega_1^2 \mu \epsilon_c)} B_1 e^{-\sqrt{(\gamma_1^2 - \omega_1^2 \mu \epsilon_c)}(x-h)}, \end{cases} \quad (49)$$

где $A_j, B_j \neq 0$ – вещественные постоянные и, без потери общности, $A_j > 0$.

Внутри слоя Σ система (47) принимает вид

$$\begin{cases} u'_3 = \gamma_1 u_1 - \omega_1^2 \mu \gamma_1^{-1} (\epsilon + \tilde{\alpha}_1 u_1^2 + \tilde{\alpha}_2 u_2^2 + \tilde{\alpha}_3 u_3^2) u_1, \\ u''_2 = \gamma_2^2 u_2 - \omega_2^2 \mu (\epsilon + \tilde{\alpha}_2 u_1^2 + \tilde{\alpha}_1 u_2^2 + \tilde{\alpha}_2 u_3^2) u_2, \\ u''_3 = \gamma_1 u'_1 - \omega_1^2 \mu (\epsilon + \tilde{\alpha}_1 u_1^2 + \tilde{\alpha}_2 u_2^2 + \tilde{\alpha}_3 u_3^2) u_3. \end{cases} \quad (50)$$

Касательные компоненты поля (42)–(43) – это e_y , h_z и e_z , h_y . Таким образом, функции $u'_3 - \gamma_1 u_1$, u_2 , u_3 и u'_2 непрерывны на границах $x = 0$ и $x = h$. Принимая во внимание это свойство и используя решения (49) в полупространствах, получаем условия сопряжения

$$\begin{aligned} \left(\omega_1^2 \mu (\epsilon + \tilde{\alpha}_1 u_1^2 + \tilde{\alpha}_2 u_2^2 + \tilde{\alpha}_3 u_3^2) u_1 - \frac{\gamma_1 \epsilon_s u_3}{\sqrt{(\gamma_1^2 - \omega_1^2 \mu \epsilon_s)}} \right) \Big|_{x=0} &= 0, \\ \left(\omega_1^2 \mu (\epsilon + \tilde{\alpha}_1 u_1^2 + \tilde{\alpha}_2 u_2^2 + \tilde{\alpha}_3 u_3^2) u_1 + \frac{\gamma_1 \epsilon_c u_3}{\sqrt{(\gamma_1^2 - \omega_1^2 \mu \epsilon_c)}} \right) \Big|_{x=h} &= 0, \\ \omega_j \sqrt{\mu (\gamma_j^2 - \epsilon_s)} u_j \Big|_{x=0} - u'_j \Big|_{x=0} &= 0, \\ -\omega_j \sqrt{\mu (\gamma_j^2 - \epsilon_c)} u_j \Big|_{x=h} - u'_j \Big|_{x=h} &= 0. \end{aligned} \quad (51)$$

Дополнительные локальные условия принимают вид

$$u_1|_{x=0} = A_1, \quad u_2|_{x=0} = A_2,$$

где A_j совпадают с одноименными постоянными в (49).

Задача $\mathcal{P}(\delta)$ есть не что иное, как сформулированная здесь задача о распространении волн, если использовать обозначения $\lambda_j = \gamma_j$, $a_1 = \omega_1^2 \mu_0 \epsilon$, $a_2 = \omega_2^2 \mu_0 \epsilon$, $s_j = \omega_j^2 \mu_0 \epsilon_s$, $c_j = \omega_j^2 \mu_0 \epsilon_c$; $\alpha_1 = \omega_1^2 \mu_0 \tilde{\alpha}_1$, $\alpha_2 = \omega_2^2 \mu_0 \tilde{\alpha}_2$. Условия, перечисленные в этом разделе, дают условия (2)–(7) для $\delta \neq 0$, условия (10)–(12) и (15)–(17) для $\delta = 0$.

Поле (42)–(43) распространяется в слое Σ только на некоторых (выделенных) значениях пары (γ_1, γ_2) , которые называются (векторными или связанными) постоянными распространения. С математической точки зрения это нелинейная двухпараметрическая задача на собственные значения для системы (50) с начальными и краевыми условиями, выписанными выше. Векторные собственные значения этой задачи являются искомыми векторными постоянными распространения.

Нелинейные законы, используемые в нелинейной оптике, часто содержат множители, которые должны быть малы в силу физических ограничений модели [31, 33, 36]. Это позволяет применять методы возмущений для поиска возмущенных решений соответствующих линеаризованных задач, см., например, [8, 9, 10]. Однако такой подход не позволяет находить нелинеаризуемые решения, если они есть. Как показано в настоящей статье, в изучаемой здесь задаче такие решения есть (см. теорему 3.18).

5. Заключение. В связи с теоремой 3.18 сделаем два замечания. Во-первых, поскольку λ_j^* в Λ_j^* может быть достаточно большим, то теорема 3.18 утверждает существование векторных собственных значений задачи $\mathcal{P}(\delta)$ даже в той области, в которой нет собственных значений линейных задач $\mathcal{P}_j^0$, то есть нелинеаризуемых собственных значений. Во-вторых, теорема 3.18 также утверждает существование векторных собственных значений $\tilde{\lambda}_{k,l} = (\tilde{\lambda}_{1,k}, \tilde{\lambda}_{2,l})$, которые являются возмущениями пар решений $(\tilde{\lambda}_{1,k}, \tilde{\lambda}_{2,l})$ линейных задач $\mathcal{P}_j^0$ (аналогичные результаты были получены ранее с помощью интегральных уравнений, см. [8, 9, 10]).

Теорема 3.18 утверждает существование лишь конечного числа векторных собственных значений задачи $\mathcal{P}(\delta)$. Однако принимая во внимание, что каждая из задач $\mathcal{P}_j$ имеет бесконечное число собственных значений для любого $\alpha_1 > 0$, можно предположить, что задача $\mathcal{P}(\delta)$ также имеет бесконечное число решений. Доказательство этого результата, хотя бы для малых $\delta > 0$, было бы существенным шагом вперед.

Еще один интересный момент заключается в том, что задача $\mathcal{P}(\delta)$ может иметь решения, которые не могут быть представлены как какие-либо комбинации решений задач $\mathcal{P}_j$. Действительно, здесь доказано, что некоторые решения основной задачи могут быть эффективно приближены суперпозицией решений задач $\mathcal{P}_j$. Но поскольку основная задача является нелинейной и не может быть рассмотрена как суперпозиция $\mathcal{P}_j$, то задача $\mathcal{P}(\delta)$ может иметь другие решения. Разработка строго теоретического подхода для исследования этого вопроса была бы еще одним мощным продвижением в этой области.

Также представляется важным отметить, что предложенный подход может быть полезен не только в нелинейной оптике, но и в теории нелинейных задач на собственные значения с малым параметром, которые удовлетворяют пунктам i, ii, iii, сформулированным в первом разделе, в первую очередь это относится к задачам теории нелинейных колебаний.

В настоящей статье мы предполагаем зависимость основной задачи от одного малого коэффициента – δ . При необходимости можно ввести несколько коэффициентов для возмущений различных членов (1), а также и краевых условий (2)–(3).

Что касается физической задачи для более простого случая $\omega_1 = \omega_2$, в котором уравнения Максвелла имеют один временной множитель [36, 49]. Хотя этот случай известен десятилетия, существование связанных собственных волн было доказано лишь недавно. Строгое доказательство, насколько известно автору, впервые было предложено в [34], см. также и библиографию там.

В заключение заметим, что подход, использованный в настоящей статье, был развит для близких задач в [39] и существенно отличается от методов, предложенных в [11, 12]. В работах [11, 12] многопараметрическая задача на собственные значения сводится к системе интегральных характеристических

уравнений, которая является многомерным обобщением уравнений (22), (25). Анализ этой системы позволяет получить результаты, близкие к результатам, полученным здесь. В настоящей статье все результаты частично опираются на более простой подход (утверждения 3.16 и 3.17) и выкладки технически проще по сравнению с выкладками в [11, 12]. Наконец, заметим, что несмотря на то, что доказательство теоремы 3.18 опирается на, казалось бы, простую аргументацию о перемене знака непрерывной функции, сами результаты (уравнения (22), (25) и теоремы 3.4–3.7), которые позволяют прибегнуть к такой аргументации, являются достаточно сложными и самодостаточны в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Некоторые численные результаты см., например, в [9, 11].

Список литературы

1. Вайнштейн Л.А. Электромагнитные волны. М.: Радио и связь; 1988.
2. Малкин И.Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.-Л.: ГИТТЛ; 1956.
3. Martynova V.Yu., Valovik D.V. Nonclassical perturbation approach to a nonlinear multiparameter eigenvalue problem arising in electromagnetics. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. 2023;46:804–833, <https://doi.org/https://doi.org/10.1002/mma.9244>.
4. Valovik D.V. Asymptotic analysis of a nonlinear eigenvalue problem arising in electromagnetics. *Nonlinearity*. 2020;33:3470–3499.
5. Валовик Д.В. Распространение электромагнитных волн в открытом плоском диэлектрическом волноводе, заполненном нелинейной средой i: ТЕ-волны. *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2019;59:838–858.
6. Валовик Д.В. Распространение электромагнитных волн в открытом плоском диэлектрическом волноводе, заполненном нелинейной средой i: ТМ-волны. *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2020;60:429–450.
7. Smirnov Yu.G., Valovik D.V. Guided electromagnetic waves propagating in a plane dielectric waveguide with nonlinear permittivity. *Physical Review A*. 2015;91:013840(6 pages).
8. Smirnov Yu.G., Valovik D.V. Problem of nonlinear coupled electromagnetic te-te wave propagation. *Journal of mathematical physics*. 2013;54:083502(13).
9. Valovik D.V. Nonlinear multi-frequency electromagnetic wave propagation phenomena. *Journal of Optics*. 2017;19:115502(16 pages).
10. Valovik D.V. On the problem of nonlinear coupled electromagnetic te-tm wave propagation. *Journal of mathematical physics*. 2013;54:042902(14).
11. Tikhov S.V., Valovik D.V. Perturbation of nonlinear operators in the theory of nonlinear multifrequency electromagnetic wave propagation. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2019;75:76–93.
12. Kurseeva V.Yu., Tikhov S.V., Valovik D.V. Nonlinear multiparameter eigenvalue problems: Linearised and nonlinearised solutions. *Journal of Differential Equations*. 2019;267:2357–2384.
13. Atkinson E.V., Mingarelli A.B. Multiparameter Eigenvalue Problems. Sturm-Liouville Theory. USA: CRC Press; 2011.
14. Volkmer H. Multiparameter Eigenvalue Problems and Expansion Theorems. Berlin: Springer-Verlag; 1988.
15. Pons A., Gutschmidt S. Nonlinear multiparameter eigenvalue problems in aeroelasticity. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*. 2019;19(5):1941008(22 pages), <https://doi.org/10.1142/S0219455419410086>.
16. Amer M.A. Constructive solutions for nonlinear multiparameter eigenvalue problems. *Computers & Mathematics with Applications*. 1988;35:83–90.
17. Binding P.A. On the use of degree theory for nonlinear multiparameter eigenvalue problems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 1980;73:381–391.
18. Browne P.J., Sleeman B. D. Nonlinear multiparameter Sturm-Liouville problems. *Journal of Differential Equations*. 1979;34:139–146.
19. Shibata T. Variational methods for nonlinear multiparameter elliptic eigenvalue problems. *Nonlinearity*. 1997;10:1319–1329.
20. Gravenkamp H., Plestenjak B., Kiefer D. A., Jarlebring E. Computation of leaky waves in layered structures coupled tounbounded media by exploiting multiparameter eigenvalueproblems. *Journal of Sound and Vibration*. 2025;596:118716(22 pages).
21. Ambrosetti A., Rabinowitz P.H. Dual variational methods in critical point theory and applications. *Journal of Functional Analysis*. 1973;14:349–381.
22. Вайнберг М.М. Вариационные методы исследования нелинейных операторов. М.: ГИТТЛ; 1956.
23. Красносельский М.А. Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. М.: ГИТТЛ; 1956.
24. Вайнберг М. М., Треногин В. А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М.: Наука; 1969.

25. Adams M.J., An Introduction to Optical Waveguides. New York: John Wiley & Sons; 1981.
26. Унгер Х.-Г. Планарные и волоконные оптические волноводы. М.: Мир; 1980.
27. Марченко В. А. Спектральная теория операторов Штурма – Лиувилля. Киев: Наукова Думка; 1972.
28. Schürmann H.W., Smirnov Yu.G., Shestopalov Yu. V. Propagation of te-waves in cylindrical nonlinear dielectric waveguides. *Phys. Rev. E*. 2005;71:016614(10).
29. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: ГИФМЛ; 1962.
30. Маныкин Е.А. Взаимодействие света с веществом: феноменология нелинейной оптики. М.: МИФИ; 1996.
31. Ландау Л.Д., Лившиц Е.М. Электродинамика непрерывных сред. М.: Наука; 1982.
32. Ахмедиев Н.Н., Анкевич А. Солитоны, нелинейные импульсы и пучки. М.: Наука; 2003.
33. Шен И.Р. Принципы нелинейной оптики. М.: Наука; 1989.
34. Валовик Д.В., Смирнов Ю.Г. К задаче о распространении нелинейных связанных электромагнитных ТЕ-ТМ волн в слое. *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2014;54:522–536.
35. Eleonskii P.N., Ogan'es'yants L.G., Silin V.P. Cylindrical nonlinear waveguides. *Soviet Physics JETP*. 1972;35:44–47.
36. Boardman A.D., Egan P., Lederer F., Langbein U., Mihalache D. Third-Order Nonlinear Electromagnetic TE and TM Guided Waves. New York: Elsevier sci. Publ.; 1991. Reprinted from *Nonlinear Surface Electromagnetic Phenomena*, Eds. H.-E. Ponath and G. I. Stegeman.
37. Eleonskii P.N., Silin V.P. Theory of self-trapping of an electromagnetic field. *Soviet Physics JETP*. 1970;31:918–923.
38. Akhmanov S.A., Sukhorukov A.P., Khokhlov R.V. Self-focusing and self-trapping of intense light beams in a nonlinear medium. *Soviet Physics JETP*. 1966;23:1025–1033.
39. Валовик Д.В. Метод возмущений в теории распространения двухчастотных электромагнитных волн в нелинейном волноводе I: ТЕ-ТЕ волны. *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2021;61(1):103–117.
40. Eleonskii P.N., Ogan'es'yants L.G., Silin V.P. Structure of three-component vector fields in self-focusing waveguides. *Soviet Physics JETP*. 1973;36:282–285.
41. Boardman A.D., Twardowski T. Theory of nonlinear interaction between te and tm waves. *Journal of the Optical Society of America B*. 1988;5:523–528.
42. Boardman A.D., Twardowski T. Transverse-electric and transverse-magnetic waves in nonlinear isotropic waveguides. *Physical Review A*. 1989;39:2481–2492.
43. Ping Xie, Zhao-Qing Zhang Multifrequency gap solitons in nonlinear photonic crystals. *Physical Review Letters*. 2003;91:213904(4 pages).
44. Besse V., Boudebs G., Leblond H. Determination of the third- and fifth-order optical nonlinearities: the general case. *Applied Physics B*. 2014;116:911–917.
45. Ciattoni A., Rizza C., Palange E. Extreme nonlinear electrodynamics in metamaterials with very small linear dielectric permittivity. *Physical Review A*. 2010;81:043839(12 pages).
46. Boardman A.D., Alberucci A., Assanto G., Grimalsky V.V., Kibler B., McNiff J., Nefedov I.S., Rapoport Yu.G., Valagiannopoulos C.A. Waves in hyperbolic and double negative metamaterials including rogues and solitons. *Nanotechnology*. 2017;28(44):444001.
47. Borghi M., Castellan C., Signorini S., Trenti A., Pavesi L. Nonlinear silicon photonics. *Journal of Optics*. 2017;19:093002.
48. Naseri M., Keshavarz A., Honarasa G. Imaging properties of a nonlinear multilayered superlens. *International Journal of Modern Physics B*. 2017;31:1750152(9 pages).
49. Eleonskii P.N., Ogan'es'yants L. G., Silin V. P. Vector structure of electromagnetic field in self-focused waveguides. *Sov. Phys. Usp.* 1972;15:524–525.

References

1. Vainstein L.A. Electromagnetic Waves. Moscow: Radio i Svyaz; 1988. (In Russ.)
2. Malkin IG. Some problems in the theory of nonlinear oscillations USA: U.S. Atomic Energy Commission, Technical Information Service; 1956.
3. Martynova VYu, Valovik DV. Nonclassical perturbation approach to a nonlinear multiparameter eigenvalue problem arising in electromagnetics. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. 2023;46:804–833.
4. Valovik DV. Asymptotic analysis of a nonlinear eigenvalue problem arising in electromagnetics. *Nonlinearity*. 2020;33:3470–3499.
5. Valovik DV. Propagation of electromagnetic waves in an open planar dielectric waveguide filled with a nonlinear medium I: TE waves. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2019;59(6):958–977.
6. Valovik DV. Propagation of Electromagnetic Waves in an Open Planar Dielectric Waveguide Filled with a Nonlinear Medium II: TM Waves. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2020;60(3):427–447.

7. Smirnov YuG, Valovik DV. Guided electromagnetic waves propagating in a plane dielectric waveguide with nonlinear permittivity. *Physical Review A*. 2015;91:013840(6 pages).
8. Smirnov YuG, Valovik DV. Problem of nonlinear coupled electromagnetic te-te wave propagation. *Journal of mathematical physics*. 2013;54:083502(13).
9. Valovik DV. Nonlinear multi-frequency electromagnetic wave propagation phenomena. *Journal of Optics*. 2017;19:115502(16 pages).
10. Valovik DV. On the problem of nonlinear coupled electromagnetic te-tm wave propagation. *Journal of mathematical physics*. 2013;54:042902(14).
11. Tikhov SV, Valovik DV. Perturbation of nonlinear operators in the theory of nonlinear multifrequency electromagnetic wave propagation. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2019;75:76–93.
12. Kurseeva VYu, Tikhov SV, Valovik DV. Nonlinear multiparameter eigenvalue problems: Linearised and nonlinearised solutions. *Journal of Differential Equations*. 2019;267:2357–2384.
13. Atkinson EV, Mingarelli AB. Multiparameter Eigenvalue Problems. Sturm-Liouville Theory. USA: CRC Press; 2011.
14. Volkmer H. Multiparameter Eigenvalue Problems and Expansion Theorems. Berlin: Springer-Verlag; 1988.
15. Pons A, Gutschmidt S. Nonlinear multiparameter eigenvalue problems in aeroelasticity. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*. 2019;19(5):1941008(22 pages).
16. Amer MA. Constructive solutions for nonlinear multiparameter eigenvalue problems. *Computers & Mathematics with Applications*. 1988;35:83–90.
17. Binding PA. On the use of degree theory for nonlinear multiparameter eigenvalue problems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 1980;73:381–391.
18. Browne PJ, Sleeman BD. Nonlinear multiparameter Sturm-Liouville problems. *Journal of Differential Equations*. 1979;34:139–146.
19. Shibata T. Variational methods for nonlinear multiparameter elliptic eigenvalue problems. *Nonlinearity*. 1997;10:1319–1329.
20. Gravenkamp H, Plestenjak B, Kiefer DA, Jarlebring E. Computation of leaky waves in layered structures coupled tounbounded media by exploiting multiparameter eigenvalueproblems. *Journal of Sound and Vibration*. 2025;596:118716(22 pages).
21. Ambrosetti A, Rabinowitz PH. Dual variational methods in critical point theory and applications. *Journal of Functional Analysis*. 1973;14:349–381.
22. Vainberg MM. Variational methods for the study of nonlinear operators. USA: Holden-Day; 1964.
23. Krasnosel'skii MA. Topological Methods in the Theory of Nonlinear Integral Equations. Oxford: Pergamon Press; 1964/
24. Vainberg MM, Trenogin VA. Theory of Branching of Solutions of Nonlinear Equations. Netherlands: Wolters-Noordhoff B.V.; 1974.
25. Adams MJ. An Introduction to Optical Waveguides. New York: John Wiley & Sons; 1981.
26. Unger H-G. Planar Optical Waveguides and Fibres. Oxford: Clarendon Press; 1977.
27. Marchenko VA. Spectral Theory of Sturm-Liouville Operators. Kiev: Nauk. Dumka; 1972. (In Russ.)
28. Schürmann HW, Smirnov YuG, Shestopalov YuV. Propagation of te-waves in cylindrical nonlinear dielectric waveguides. *Phys. Rev. E*. 2005;71:016614(10).
29. Pontryagin L.S. Ordinary Differential Equations. Oxford: Pergamon Press; 1962.
30. Manykin EA. Interaction of Light with Matter: Phenomenology of Nonlinear Optics. Moscow: National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute); 1996. (In Russ.)
31. Landau LD, Lifshitz EM, Pitaevskii LP. Course of Theoretical Physics (vol.8). Electrodynamics of Continuous Media. Oxford: Butterworth-Heinemann; 1993
32. Akhmediev NN, Ankevich A. Solitons, Nonlinear Pulses and Beams. London: Chapman and Hall; 1997.
33. Shen YR. The Principles of Nonlinear Optics. New York: John Wiley and Sons; 1984.
34. Valovik DV, Smirnov YuG. On the Problem of Propagation of Nonlinear Coupled TE-TM Wave in a Layer. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2014;54(3):522–536.
35. Eleonskii PN, Oganess'yants LG, Silin VP. Cylindrical nonlinear waveguides. *Soviet Physics JETP*. 1972;35:44–47.
36. Boardman AD, Egan P, Lederer F, Langbein U, Mihalache D. Third-Order Nonlinear Electromagnetic TE and TM Guided Waves. New York: Elsevier sci. Publ.; 1991. Reprinted from *Nonlinear Surface Electromagnetic Phenomena*, Eds. Ponath H-E and Stegeman GI.
37. Eleonskii PN, Silin VP. Theory of self-trapping of an electromagnetic field. *Soviet Physics JETP*. 1970;31:918–923.
38. Akhmanov SA, Sukhorukov AP, Khokhlov RV. Self-focusing and self-trapping of intense light beams in a nonlinear medium. *Soviet Physics JETP*. 1966;23:1025–1033.
39. Valovik DV. Perturbation Method in the Theory of Propagation of Two-Frequency Electromagnetic Waves in a Nonlinear Waveguide I: TE-TE Waves. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2021;61(1):103–117.

40. Eleonskii PN, Ogan'es'yants LG, Silin VP. Structure of three-component vector fields in self-focusing waveguides. *Soviet Physics JETP*. 1973;36:282–285.
41. Boardman AD, Twardowski T. Theory of nonlinear interaction between te and tm waves. *Journal of the Optical Society of America B*. 1988;5:523–528.
42. Boardman AD, Twardowski T. Transverse-electric and transverse-magnetic waves in nonlinear isotropic waveguides. *Physical Review A*. 1989;39:2481–2492.
43. Ping Xie, Zhao-Qing Zhang Multifrequency gap solitons in nonlinear photonic crystals. *Physical Review Letters*. 2003;91:213904(4 pages).
44. Besse V, Boudebs G, Leblond H. Determination of the third- and fifth-order optical nonlinearities: the general case. *Applied Physics B*. 2014;116:911–917.
45. Ciattoni A, Rizza C, Palange E. Extreme nonlinear electrodynamics in metamaterials with very small linear dielectric permittivity. *Physical Review A*. 2010;81:043839(12 pages).
46. Boardman AD, Alberucci A, Assanto G, Grimalsky VV, Kibler B, McNiff J, Nefedov IS, Rapoport Yu.G, Valagiannopoulos CA. Waves in hyperbolic and double negative metamaterials including rogues and solitons. *Nanotechnology*. 2017;28(44):444001.
47. Borghi M, Castellan C, Signorini S, Trenti A, Pavesi L. Nonlinear silicon photonics. *Journal of Optics*. 2017;19:093002.
48. Naseri M, Keshavarz A, Honarasa G. Imaging properties of a nonlinear multilayered superlens. *International Journal of Modern Physics B*. 2017;31:1750152(9 pages).
49. Eleonskii PN, Ogan'es'yants LG, Silin VP. Vector structure of electromagnetic field in self-focused waveguides. *Sov. Phys. Usp.* 1972;15:524–525.

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 12.01.2026

Поступила после рецензирования 27.02.2026

Принята к публикации 02.03.2026

Received January 12, 2026

Revised February 27, 2026

Accepted March 2, 2026

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Валовик Дмитрий Викторович – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры математики и суперкомпьютерного моделирования, Пензенский государственный университет, г. Пенза, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Dmitry V. Valovik – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Mathematics and Supercomputing, Penza State University, Penza, Russia

К содержанию