

Низкочастотный спектр задачи Штурма – Лиувилля на геометрическом графе

Поздняков А. А. 

(Статья представлена членом редакционной коллегии Пенкиным О. М.)

Воронежский государственный университет,
Россия, 394018, г. Воронеж, Университетская пл., 1
AndAlexPozdnyakov@yandex.ru

Аннотация. Данная работа посвящена исследованию зависимости спектра частот собственных колебаний струнной сетки от распределения массы между струнами и узлами. Сетка моделируется геометрическим графом, для которого формулируется задача Штурма – Лиувилля. Показано, что при стремлении шага сетки к нулю её динамические свойства приближаются к свойствам сплошной мембраны. Проведен анализ уравнения, описывающего низкочастотную часть спектра. Доказана монотонная зависимость собственных значений от линейной плотности струн. Установлено, что спектр сетки всегда заключён между спектром разностного оператора Лапласа и спектром мембраны. На основе полученных результатов дано обоснование выбора струнной сетки в качестве эффективной редукционной модели задачи о колебаниях мембраны, что, в свою очередь, приводит к уменьшению вычислительной сложности данной задачи.

Ключевые слова: геометрический граф, задача Штурма – Лиувилля, лапласиан, модель пониженного порядка

Для цитирования: Поздняков А.А. Низкочастотный спектр задачи Штурма – Лиувилля на геометрическом графе. *Прикладная математика & Физика*. 2026;58(2):130–136. DOI 10.52575/2687-0959-2026-58-2-130-136
EDN UTYLUS

Original Research

Low-frequency Spectrum of the Sturm – Liouville Problem on a Metric Graph

Andrey A. Pozdnyakov 

(Article submitted by a member of the editorial board Penkin O. M.)

Voronezh State University,
1 Universitetskaya Sq., Voronezh 394018, Russia
AndAlexPozdnyakov@yandex.ru

Abstract. This paper investigates the dependence of the natural oscillation frequency spectrum of a string grid on the mass distribution between the strings and nodes. The grid is modeled as a metric graph, for which a Sturm–Liouville problem is formulated. It is shown that as the grid spacing tends to zero, its dynamic properties approach those of a continuous membrane. An analysis of the equation describing the low-frequency part of the spectrum is carried out. The monotonic dependence of the eigenvalues on the linear density of the strings is proved. It is established that the spectrum of the grid is always enclosed between the spectrum of the difference Laplace operator and the spectrum of the membrane. Based on the obtained results, a justification is given for choosing the string grid as an effective reduced-order model for problems concerning membrane oscillations, which, in turn, leads to a reduction in the computational complexity of this problem.

Keywords: Metric Graph, Sturm – Liouville Problem, Laplacian, Model Order Reduction

For citation: Pozdnyakov AA. Low-frequency Spectrum of the Sturm – Liouville Problem on a Metric Graph. *Applied Mathematics & Physics*. 2026;58(2):130–136. (In Russ.).
DOI 10.52575/2687-0959-2026-58-2-130-136 EDN UTYLUS

1. Постановка задачи. Пусть имеется сетка из струн с квадратными ячейками, натянутая в плоскости xOy и закреплённая по контуру квадрата $Q = [0; l] \times [0; l]$ (см. следующий рисунок).

Узлы сетки – точки примыкания струн друг к другу – имеют координаты $(ih; jh)$, где $i, j \in \mathbb{Z}$, $0 \leq i, j \leq n$; $n = l/h \geq 2$. Мы считаем, что к внутренним (т. е. не лежащим на границе квадрата Q) узлам сетки прикреплены грузы одинаковой массы m_h . Мы также считаем, что вдоль струн распределена масса постоянной плотности ρ_h и они имеют постоянное натяжение σ_h .

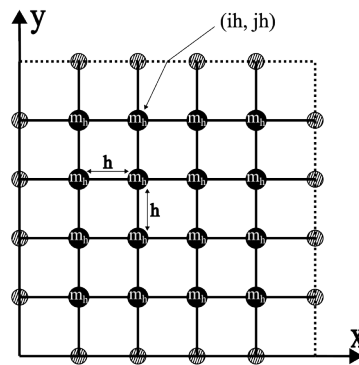


Рис. 1. Струнная сетка

Fig. 1. String grid

Будем моделировать эту механическую систему геометрическим графом $G_h = V \cup E^H \cup E^V$. Объясним, как устроены множества, которые составляют геометрический граф:

$V = \{v_{ij} - \text{узлы сетки с координатами } (ih; jh)\};$

$E^H = \{e_{ij}^H - \text{горизонтальные рёбра между вершинами } v_{ij} \text{ и } v_{i+1,j}\};$

$E^V = \{e_{ij}^V - \text{вертикальные рёбра между вершинами } v_{ij} \text{ и } v_{i,j+1}\}.$

Множество вершин, лежащих на границе квадрата Q , обозначим как ∂G_h . Эти вершины будем называть граничными, а остальные – внутренними. Множество, составленное из внутренних вершин и точек всех рёбер, обозначим через G_h° .

Квадраты частот собственных колебаний этой системы, как хорошо известно (см. например, [1]), являются собственными значениями следующей задачи Штурма – Лиувилля на графе G_h :

$$\sigma_h u''(x) + \lambda \rho_h u(x) = 0, \quad (1)$$

$$\sum_{i,j \in I(v_{ij})} \sigma_h u'_{v_{ij}}(v_{ij}) + \lambda m_h u(v_{ij}) = 0, \quad (2)$$

$$u|_{\partial G_h} = 0. \quad (3)$$

Первое уравнение относится к точкам X , лежащим на рёбрах; x – координата точки X при натуральной параметризации соответствующего ребра. Производная, фигурирующая в нём, относится именно к этому параметру, меняющемуся от 0 до h (начальная вершина имеет координату 0, конечная – h).

Второе уравнение относится к внутренним вершинам $v_{ij} \in G_h^\circ$. В этом уравнении $I(v_{ij})$ – множество номеров рёбер, инцидентных этой вершине, v_j – единичный вектор, направленный от v_{ij} внутрь ребра e_{ij}^H (или e_{ij}^V).

При достаточно малых размерах ячеек данная механическая система близка по своим свойствам к мембране (в смысле близости спектров частот собственных колебаний), растянутой в квадрате $Q = [0, l] \times [0, l]$, если её напряжение σ связано с натяжением σ_h , а плотность ρ связана с плотностью сетки ρ_h так, что выполнены следующие условия:

$$\rho = \frac{2\rho_h h + m_h}{h^2}; \quad (4)$$

$$\sigma = \frac{\sigma_h}{h}. \quad (5)$$

Данные соотношения имеют физический смысл. Если выделить фрагмент $h \times h$ сетки и мембраны, изображённый на рисунке, то масса, сосредоточенная на кресте, в точности равна массе, сосредоточенной на квадрате. А сила, с которой натяжение действует на концевые точки креста, совпадает с силой, с которой напряжение мембраны действует на границу квадрата. Поэтому естественно ожидать, что низкочастотные части спектров частот собственных колебаний сетки и мембраны, при достаточно малом h , будут близки.

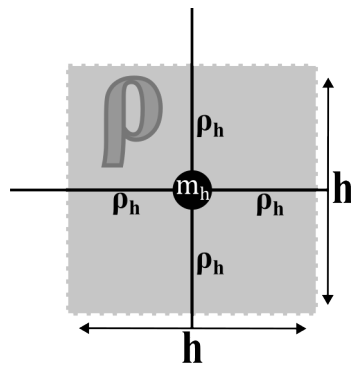


Рис. 2. Распределение масс

Fig. 2. Mass distribution

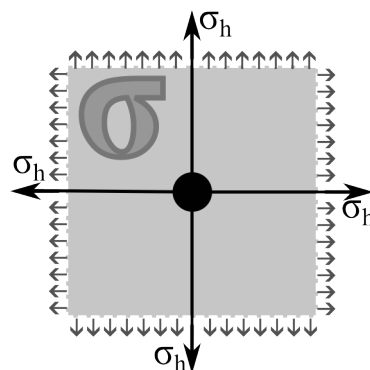


Рис. 3. Струнная сетка

Fig. 3. String grid

Квадраты частот собственных колебаний мембраны являются собственными значениями следующей краевой задачи:

$$\sigma \Delta u + \lambda \rho u = 0, \quad (6)$$

$$u|_{\partial Q} = 0. \quad (7)$$

Факт близости низкочастотных частей спектров задач (1)–(3) и (6)–(7) был доказан в [2]. В следующем разделе будет подробно изучен спектр задачи (1)–(3) при различных значениях ρ_h .

2. Анализ низкочастотной части спектра струнной сетки. Пусть общая масса систем является постоянной величиной, тогда верно соотношение $2\rho_h h + m_h = \rho h^2 = \text{const}$. Мы изучим поведение собственного значения λ при изменении ρ_h от его минимального значения – $\rho_h = 0$ ($m_h = 2\rho h^2$) до максимального – $\rho_h = \frac{\rho h}{2}$ ($m_h = 0$).

Подробный анализ задачи (1) – (3) устанавливает, что её собственные значения могут быть выражены двумя уравнениями, приведёнными ниже. Этот факт был установлен в [1].

$$2 \cos \left(\frac{\pi h}{l} i \right) + 2 \cos \left(\frac{\pi h}{l} j \right) = 4 \cos \left(h \sqrt{\lambda \frac{\rho_h}{\sigma_h}} \right) - m_h \sqrt{\frac{\lambda}{\rho_h \sigma_h}} \sin \left(h \sqrt{\lambda \frac{\rho_h}{\sigma_h}} \right); \quad (8)$$

$$\left(\sin \left(h \sqrt{\lambda \frac{\rho_h}{\sigma_h}} \right) \right)^{n^2-1} = 0. \quad (9)$$

Здесь и всюду далее $i, j = 1, \dots, n-1$ обозначают номера собственных частот.

Интерес представляет анализ уравнения (8), описывающего низкочастотную часть спектра. Уравнение (9) отвечает за высокочастотную «струнную» часть спектра задачи (1)–(3), которая в данной работе не рассматривается.

В частности, нас интересует λ в зависимости от распределения масс по струне. Так как m_h и ρ_h являются зависимыми друг от друга величинами: $m_h = \rho h^2 - 2\rho_h h$, то λ можно считать функцией от одной переменной $\lambda_{ij} = \lambda_{ij}(\rho_h)$.

Возможные значения переменной ρ_h в свою очередь находятся в промежутке $\left[0, \frac{\rho h}{2} \right]$.

Перепишем уравнение (8) в виде

$$F_{ij}(\lambda_{ij}, \rho_h) = 4 \cos(\alpha) - \frac{(\rho_h - 2\rho_h)}{\rho_h} \alpha \sin(\alpha) - C_{ij} = 0, \quad (10)$$

где

$$\alpha = h \sqrt{\lambda_{ij} \frac{\rho_h}{\sigma_h}}; \quad C_{ij} = 2 \cos\left(\frac{\pi h}{l} i\right) + 2 \cos\left(\frac{\pi h}{l} j\right).$$

Начнём анализ с изучения поведения функции $\lambda_{ij}(\rho_h)$ в крайних точках области определения. Пусть $\rho_h = \frac{\rho h}{2}$, а $m_h = 0$, тогда уравнение (10) сводится к выражению

$$2 \cos\left(h \sqrt{\frac{\lambda \rho}{2\sigma}}\right) = \cos\left(\frac{\pi h}{l} i\right) + \cos\left(\frac{\pi h}{l} j\right). \quad (11)$$

Разложение выражения (11) в ряд Тейлора приводит к следующему выражению для λ_{ij} :

$$\lambda_{ij}\left(\frac{\rho h}{2}\right) = \frac{\sigma \pi^2}{\rho l^2} (i^2 + j^2) + O(h^2).$$

Первое слагаемое данного выражения в точности соответствует выражению, которое описывает спектр колебаний квадратной мембраны.

Замечание. При $(i = j)$ из выражения (11) сразу следует, что

$$\lambda_{ii}\left(\frac{\rho h}{2}\right) = \frac{\sigma \pi^2}{\rho l^2} (i^2 + i^2).$$

Таким образом, мы выяснили, что при $\rho_h = \frac{\rho h}{2}$ низкочастотная часть спектра задачи (1)–(3) близка к соответствующим собственным значениям задачи (6)–(7) с квадратичной точностью приближения (см., например, [3]). Кроме того, для кратных собственных значений $(i = j)$ значения совпадают в точности, независимо от параметра разбиения сетки h .

Теперь рассмотрим случай $\rho_h = 0$, $m_h = \rho h^2$. Прямую подстановку в выражение (11) производить нельзя, ввиду наличия параметра ρ_h в знаменателе, поэтому будем рассматривать предельное значение $F_{ij}(\lambda, \rho_h)$ при $\rho_h \rightarrow 0$. После выполнения предельного перехода получаем выражение для λ :

$$\lambda_{ij}(0) = \frac{4\sigma \left(\sin^2\left(\frac{\pi h}{2l} i\right) + \sin^2\left(\frac{\pi h}{2l} j\right) \right)}{\rho h^2}. \quad (12)$$

Выражение (12) в точности совпадает со спектром разностного оператора Лапласа, выражение для которого можно посмотреть в [4]. Это значит, что низкочастотный спектр задачи (1)–(3) совпадает со спектром задачи (6)–(7), если бы он вычислялся с помощью метода конечных разностей.

Приступим к изучению поведения функции $\lambda_{ij}(\rho_h)$ при $\rho_h \in \left(0, \frac{\rho h}{2}\right)$. Для этого воспользуемся теоремой о дифференцировании неявной функции:

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_{ij}}{d\rho_h} &= -\frac{\frac{\partial F}{\partial \rho_h}}{\frac{\partial F}{\partial \lambda}}; \\ \frac{d\lambda_{ij}}{d\rho_h} &= \frac{\lambda_{ij} (\rho h - 2\rho_h) (\sin(\alpha) - \alpha \cos(\alpha))}{\rho_h \left((\rho h + 2\rho_h) \sin(\alpha) + \alpha (\rho h - 2\rho_h) \cos(\alpha) \right)}. \end{aligned} \quad (13)$$

Теперь необходимо изучить знак выражения (13). $\lambda_{ij} > 0$, $\rho_h \geq 0$, $h > 0$, из (4) следует, что $\rho h - 2\rho_h = \frac{m_h}{h} \geq 0$. Таким образом, знак производной определяется выражением

$$\frac{\sin \alpha - \alpha \cos \alpha}{(\rho h + 2\rho_h) \sin \alpha + \alpha (\rho h - 2\rho_h) \cos \alpha}. \quad (14)$$

Для того, чтобы определить знак выражения (14), потребуется несколько вспомогательных утверждений.

Утверждение 1. $|C_{ij}| = \left| 2 \cos\left(\frac{\pi h}{l} i\right) + 2 \cos\left(\frac{\pi h}{l} j\right) \right| < 4$.

Доказательство. Выражения C_{ij} соответствуют внутренним вершинам графа G_h , для них известно, что $i, j \in (1, n-1)$.

$$-1 < \cos\left(\frac{\pi(n-1)}{n}\right) \leq \cos\left(\frac{\pi i}{n}\right) \leq \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) < 1;$$

$$-2 < 2 \cos\left(\frac{\pi i}{n}\right) < 2.$$

Аналогичная цепочка неравенств верна и для $\cos\left(\frac{\pi j}{n}\right)$:

$$-2 < 2 \cos\left(\frac{\pi j}{n}\right) < 2.$$

Складывая неравенства, получаем

$$-4 < 2 \cos\left(\frac{\pi i}{n}\right) + 2 \cos\left(\frac{\pi j}{n}\right) < 4.$$

С учётом обозначений: $|C_{ij}| < 4$. ■

Утверждение 2. $\alpha \in (0, \pi)$.

Доказательство. Введём обозначение $\Phi(\alpha) = 4 \cos(\alpha) - \frac{(\rho h - 2\rho_h)}{\rho_h} \alpha \sin(\alpha)$;

$\Phi(\alpha)$ – непрерывная по α функция, для которой

$$\Phi(0) = 4; \quad \Phi(\pi) = -4.$$

С другой стороны, из (10) напрямую следует $\Phi(\alpha) = C_{ij}$. Напомним, что $|C_{ij}| < 4$. По теореме о промежуточном значении, $\Phi(\alpha) = C_{ij}$ имеет хотя бы одно решение при $\alpha \in (0, \pi)$. ■

Утверждение 3. $N(\alpha) = \sin \alpha - \alpha \cos \alpha > 0$.

Доказательство. $N(\alpha)$ – непрерывная функция. Её производная $N'(\alpha) = \alpha \sin \alpha > 0$ при $\alpha \in (0, \pi)$. Таким образом, $N(\alpha)$ – строго возрастающая функция, причём $N(0) = 0$. Это означает, что $N(\alpha) > 0$ на всей области определения. ■

Утверждение 4. $D(\alpha) = (\rho h + 2\rho_h) \sin \alpha + \alpha(\rho h - 2\rho_h) \cos \alpha > 0$.

Доказательство. Рассмотрим случай $\cos \alpha \geq 0$. Тогда первое слагаемое положительно, а второе – неотрицательно. Значит, $D(\alpha) > 0$ при $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$

Теперь рассмотрим $\cos \alpha < 0$. Из уравнения (10) выразим $B = \rho h - 2\rho_h$:

$$B = \frac{\rho_h(4 \cos \alpha - C_{ij})}{\alpha \sin \alpha}.$$

$B \geq 0$, $\sin \alpha > 0$, тогда должно выполняться $4 \cos \alpha - C_{ij} \geq 0$. Учитывая $|C_{ij}| < 4$, получим оценку

$$B = \frac{\rho_h(4 \cos \alpha - C_{ij})}{\alpha \sin \alpha} \leq \frac{\rho_h(4 \cos \alpha + 4)}{\alpha \sin \alpha} = \frac{4\rho_h(\cos \alpha + 1)}{\alpha \sin \alpha}.$$

Подставим данную оценку в выражение для $D(\alpha)$:

$$D(\alpha) \geq \frac{(\rho h + 2\rho_h) \sin^2 \alpha + 4\rho_h(\cos \alpha + 1) \cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

Отдельно рассмотрим числитель данного выражения

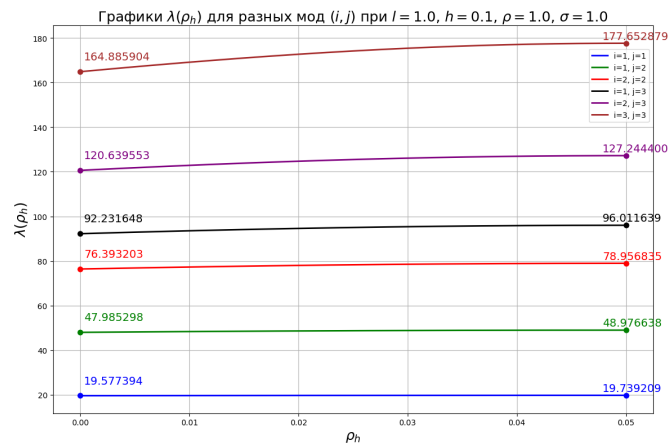
$$A \sin^2 \alpha + 4\rho_h(\cos \alpha + 1) \cos \alpha = (\cos \alpha + 1)(A(1 - \cos \alpha) + 4\rho_h \cos \alpha) = (\cos \alpha + 1)(A - B \cos \alpha),$$

где $A = \rho h + 2\rho_h$, $B = \rho h - 2\rho_h$.

Известно, что $\cos \alpha + 1 > 0$, $A - B \cos \alpha > 0$, $\sin \alpha > 0$. Таким образом, получаем оценку $D(\alpha) > 0$ для $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$. Отсюда следует, что $D(\alpha) > 0$ на всей области определения. ■

Из утверждений 3, 4 следует, что выражение (14), а следовательно, и производная (13) положительны. Это говорит о том, что $\lambda_{ij}(\rho_h)$ является монотонно возрастающей функцией.

Весь проведённый анализ подтверждается и численными исследованиями. Ниже приведены графики функции $\lambda_{ij}(\rho_h)$, построенные непосредственно из выражения (8). Расчёты выполнялись на языке программирования Python с использованием библиотек NumPy и Matplotlib; для численных вычислений использовался метод Брента, встроенный в библиотеку SciPy.

Рис. 4. Графики функций $\lambda_{ij}(\rho_h)$, полученные численным методом БрентаFig. 4. Graphs of the functions $\lambda_{ij}(\rho_h)$ obtained by Brent's numerical method

Графики функции $\lambda_{ij}(\rho_h)$ наглядно иллюстрируют монотонность низкочастотного спектра задачи (1)–(3) при изменении линейной плотности струн ρ_h . Кроме того, можно увидеть, что область значений $\lambda_{ij}(\rho_h)$ заключена между значениями, которые соответствуют спектру разностного лапласиана и значениями спектра для задачи (6)–(7) с погрешностью, квадратично зависящей от h . Для кратных мод ($i = j$) погрешность отсутствует, что было обнаружено и в ходе исследования. Анализ и численные эксперименты полностью согласованы.

3. Связь с MOR эффектом. Задача (1)–(3) связана с методом понижения порядка системы (Model order reduction), который позволяет перейти от высокоразмерных задач к задачам с меньшей размерностью. Данный метод значительно уменьшает вычислительную сложность, но при этом сохраняет ключевые свойства изначальной системы, что упрощает её анализ. Подробное описание метода и области его применения можно найти, например, в [5].

В работе [6] метод понижения порядка был применён к задаче о колебаниях прямоугольной мембраны на упругом основании. В качестве объекта меньшей размерности, но со схожими физическими свойствами, была выбрана сетка из струн, содержащая в узлах пружины, которая моделировалась с помощью специального геометрического графа.

Было показано, что решения изначальной и редуцированной задачи требуют разных вычислительных затрат. Применение метода конечных разностей с параметром разбиения n к задаче о колебаниях струн требует в $\frac{n^3}{8}$ меньше операций, чем применение этого же метода непосредственно к мембранной задаче.

С помощью численных экспериментов авторы обнаружили, что редуциционная модель не только требует меньше вычислений, но и даёт хорошее приближение к точным значениям. Однако строгое теоретическое обоснование этого вычислительного эффекта в статье отсутствует.

В данной же работе в качестве исследуемой задачи можно рассматривать (6)–(7), а в качестве редуцированных моделей не одну сетку из струн, а целое семейство, так как разная пропорция в распределении между m_h и ρ_h на самом деле описывает континуальное количество случаев. Физическую схожесть мембраны и сетки из струн гарантируют условия (4), (5).

Поведение спектра задачи (1)–(3) в зависимости от распределения линейной плотности и массы было подробно изучено в разделе 2 настоящей работы. Анализ показал, что весь спектр этой задачи заключён между двумя известными выражениями, стремящимися к точному собственному значению мембранной задачи $\lambda_{\text{разн.}} \leq \lambda(\rho_h) \leq \lambda_{\text{мембр.}} + O(h^2)$.

Это означает, что $\lambda(\rho_h) \rightarrow \lambda_{\text{мембр.}}$ при $h \rightarrow 0$ со скоростью не хуже $O(h^2)$, причём для любого распределения масс, что показывает состоятельность выбора струнной сетки в качестве редуциционной модели для мембраны. Выявленная монотонность указывает на то, что для большей точности следует выбирать распределение $\rho_h = \frac{\rho h}{2}$, что соответствует случаю, когда вся масса распределена по струнам.

Ввиду того, что и в задаче из [6], и в данной работе ключевую роль занимает оператор Лапласа (на графе и классический), проведённый здесь анализ может быть применён и для объяснения возникновения вычислительного эффекта, который был обнаружен в [6].

Список литературы

1. Покорный Ю.В., Пенкин О.М., Прядиев В.Л., Боровских А.В., Лазарев К.П., Шабров С.А. Дифференциальные уравнения на геометрических графах. М.: Физматлит; 2005. 272 с.
2. Пенкин О.М. Некоторые вопросы качественной теории краевых задач на графах: автореф. дис. канд. физ.-мат. наук. М.; 1988. 28 с.

3. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. Т. 1. Пер. с нем. Ю. Рабиновича и Э. Либина. М.; Л.: Гостехиздат; 1951. 476 с.
4. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем. М.: Наука; 1971. 552 с.
5. Шильдерс В., Ван дер Ворст Х., Роммес Я. Model Order Reduction: Theory, Research Aspects and Applications. Heidelberg: Springer; 2008. 471 с.
6. Калдыбекова Б.К., Решетова Г.В. A numerical solution of the membrane eigenproblem by the model order reduction. *Сибирские электронные математические известия* [Siberian Electronic Mathematical Reports]. 2017;14:1088–1099.
7. Бахвалов Н.С. Численные методы. Т. 1: Анализ, алгебра, обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука; 1973. 631 с.
8. Годунов С.К., Рябенский В.С. Разностные схемы. Введение в теорию. М.: Наука; 1973. 400 с.
9. Калдыбекова Б.К., Пенкин О.М. Низкая частота собственных колебаний специальной сетки из струн. *Вестник КазНПУ имени Абая. Серия «Физико-математические науки»*. 2017;1(57):28–33.
10. Кулешов П.А., Диаб А.Т., Пенкин О.М. Оценка первого собственного значения лапласиана на графе. *Математические заметки* [Mathematical Notes]. 2014;96(6):885–895.
11. Рихтмайер Р., Мортон К. Разностные методы решения краевых задач. М.: Мир; 1972. 418 с.

References

1. Pokornyi YuV, Penkin OM, Pryadiev VL, Borovskikh AV, Lazarev KP, Shabrov SA. Differentsial'nye uravneniya na geometricheskikh grafakh [Differential equations on geometric graphs]. Moscow: Fizmatlit; 2005. 272 p. (In Russ.)
2. Penkin OM. Nekotorye voprosy kachestvennoi teorii kraevykh zadach na grafakh [Some questions of the qualitative theory of boundary value problems on graphs]: avtoref. dis. kand. fiz.-mat. nauk. Moscow; 1988. 28 p. (In Russ.)
3. Courant R, Hilbert D. Metody matematicheskoi fiziki [Methods of Mathematical Physics]. Vol. 1. Transl. from German by Yu Rabinovich and E Libin. Moscow; Leningrad: Gostekhizdat; 1951. 476 p. (In Russ.)
4. Samarskii AA. Vvedenie v teoriyu raznostnykh skhem [Introduction to the Theory of Difference Schemes]. Moscow: Nauka; 1971. 552 p. (In Russ.)
5. Schilders WHA, van der Vorst HA, Rommes J. Model Order Reduction: Theory, Research Aspects and Applications. Heidelberg: Springer; 2008. 471 p.
6. Kaldybekova BK, Reshetova GV. A numerical solution of the membrane eigenproblem by the model order reduction. *Sibirskie elektronnye matematicheskie izvestiya* [Siberian Electronic Mathematical Reports]. 2017;14:1088–1099. (In Russ.)
7. Bakhvalov NS. Chislennyye metody. T. 1: Analiz, algebra, obyknovennyye differentsial'nye uravneniya [Numerical Methods. Vol. 1: Analysis, Algebra, Ordinary Differential Equations]. Moscow: Nauka; 1973. 631 p. (In Russ.)
8. Godunov SK, Ryabenkii VS. Raznostnye skhemy. Vvedenie v teoriyu [Difference Schemes. An Introduction to the Theory]. Moscow: Nauka; 1973. 400 p. (In Russ.)
9. Kaldybekova BK, Penkin OM. Nizkaya chastota sobstvennykh kolebaniy spetsial'noi setki iz strun [On the low frequencies of natural oscillations of a special grid of strings]. *Vestnik KazNPU imeni Abaya. Seriya «Fiziko-matematicheskie nauki»*. 2017;1(57):28–33. (In Russ.)
10. Kuleshov PA, Diab AT, Penkin OM. Otsenka pervogo sobstvennogo znacheniya laplasiana na grafe [Estimate of the first eigenvalue of the Laplacian on a graph]. *Matematicheskie zametki* [Mathematical Notes]. 2014;96(6):885–895. (In Russ.)
11. Richtmyer R, Morton K. Raznostnye metody resheniya kraevykh zadach [Difference Methods for Initial-Value Problems]. Moscow: Mir; 1972. 418 p. (In Russ.)

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 26.02.2026

Поступила после рецензирования 10.03.2026

Принята к публикации 14.03.2026

Received February 26, 2026

Revised March 10, 2026

Accepted March 14, 2026

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Поздняков Андрей Александрович – бакалавр 4 года обучения направления подготовки «Прикладная математика», Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Andrey A. Pozdnyakov – 4-year Bachelor's Degree in Applied Mathematics, Voronezh State University, Voronezh, Russia

[К содержанию](#)