

Об усреднении аттракторов двумерной системы Навье – Стокса в периодическом слое с мелкими препятствиями

Бекмаганбетов К. А.^{1, 2} , Чепыжов В. В.³ , Чечкин Г. А.⁴ 
(Статья представлена членом редакционной коллегии Алхутым Ю.А.)

¹ Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Казахстанский филиал,
Казахстан, 010010, г. Астана, ул. Кажимукана, 11

² Институт математики и математического моделирования,
Казахстан, 050010, г. Алматы, ул. Пушкина, 125

³ Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича РАН,
Россия, 127051, г. Москва, Большой Каретный пер., 19с1

⁴ Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,
Россия, 119991, г. Москва, Ленинские Горы, 1
chekkin@mech.math.msu.su

Аннотация. В работе рассмотрена периодическая задача для двумерной системы Навье – Стокса в слое с мелкими препятствиями около дна. Предполагая, что на границе препятствий выставлено условие прилипания, а на дне условие непротекания, а также третье краевое условие на горизонтальную компоненту, мы исследуем асимптотическое поведение траекторных аттракторов. В этих предположениях доказана слабая сходимость траекторных аттракторов этой системы к траекторным аттракторам усредненной системы Навье – Стокса с условием прилипания на всей границе.

Ключевые слова: система Навье – Стокса, траекторный аттрактор, усреднение, область, перфорированная в окрестности границы

Финансирование: Работа выполнена при поддержке РФ (проект 25-11-00133).

Для цитирования: Бекмаганбетов К.А., Чепыжов В.В., Чечкин Г.А. Об усреднении аттракторов двумерной системы Навье – Стокса в периодическом слое с мелкими препятствиями. *Прикладная математика & Физика*. 2026;58(2):147–156. DOI 10.52575/2687-0959-2026-58-2-147-156 EDN KNJLLL

Original Research

On Homogenization of Attractors to Two-Dimensional Navier – Stokes System in Periodic Layer with Small Obstacles

Kuanys A. Bekmaganbetov^{1, 2} , Vladimir V. Chepyzhov³ , Gregory A. Chechkin⁴ 
(Article submitted by a member of the editorial board Alkhutov Yu. A.)

¹ Lomonosov Moscow State University, Kazakhstan Branch,
11 Kazhimukan St., Astana 010010, Kazakhstan

² Institute of Mathematics and Mathematical Modeling,
125 Pushkin St., Almaty 050010, Kazakhstan

³ Kharkevich Institute for Information Transmission Problems, Russian Academy of Sciences,
19c1 Bol'shoi Karetny, Moscow 127051, Russia

⁴ Lomonosov Moscow State University,
1 Leninskie Gory, Moscow 119991, Russia
chekkin@mech.math.msu.su

Abstract. This paper considers a periodic problem for a two-dimensional Navier-Stokes system in a layer with small obstacles near the bottom. Assuming a no-slip condition at the obstacle boundary and a no-flow condition at the bottom, as well as a third boundary condition on the horizontal component, we investigate the asymptotic behavior of the trajectory attractors. Under these assumptions, we prove weak convergence of the trajectory attractors of this system to the trajectory attractors of the averaged Navier-Stokes system with a no-slip condition on the entire boundary.

Keywords: Navier – Stokes System, Trajectory Attractor, Homogenization, Domain Perforated in the Vicinity of the Boundary

Funding: The work was supported by the Russian Science Foundation (project 25-11-00133)

For citation: Bekmaganbetov KA., Chepyzhov VV., Chechkin GA. On Homogenization of Attractors to Two-Dimensional Navier – Stokes System in Periodic Layer with Small Obstacles. *Applied Mathematics & Physics*. 2026;58(2):147–156. (In Russ.) DOI 10.52575/2687-0959-2026-58-2-147-156 EDN KNJLLL

1. Введение. Аттракторы используются для описания поведения решений диссипативных эволюционных уравнений в течение длительного времени. В частности, аттракторы содержат устойчивые

или неустойчивые предельные режимы соответствующих динамических систем, которые являются бесконечномерными для дифференциальных уравнений в частных производных. Аттракторы позволяют наблюдать наиболее существенные предельные множества траекторий, которые характеризуют динамику сложной модели, описываемой эволюционными уравнениями (см., например, монографии [1, 2, 3] и ссылки в них).

Задачи усреднения в областях, перфорированных вдоль многообразий, являются интересными с точки зрения теории и важными в прикладных моделях. Отметим некоторые работы [4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12]. Усреднение систем Навье – Стокса в микронеоднородных средах рассмотрены в [13, 14]. Также см. работы об усреднении аттракторов в микронеоднородных средах [15, 16, 17, 18].

2. Постановка задачи и предварительные замечания. Начнем постановку задачи с описания области определения в $\mathbb{R}^2$. Пусть область $D = (-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}) \times (-\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$ с координатами $x = (x_1, x_2)$. Ее граница $\partial D = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$, где $\Gamma_1 = \{x : x_1 \in [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}], x_2 = -\frac{1}{2}\}$, $\Gamma_2 = \{x : x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 \in [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]\}$, $\Gamma_3 = \{x : x_1 \in [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}], x_2 = \frac{1}{2}\}$, $\Gamma_4 = \{x : x_1 = \frac{1}{2}, x_2 \in [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]\}$. Везде ниже $\varepsilon = \frac{1}{2N+1}$ – малый параметр, N – натуральное число, $N \gg 1$.

Мы также будем использовать следующие обозначения. Пусть B – произвольная двумерная область с гладкой границей, лежащая в круге $K = \{\xi : \xi_1^2 + (\xi_2 - \frac{1}{2})^2 < a^2\}$, $0 < a < \frac{1}{2}$. Обозначим $B_\varepsilon^j = \{x \in D : \varepsilon^{-1}(x_1 - \varepsilon j, x_2 + \frac{1}{2}) \in B\}$, $j \in \mathbb{Z}$, $B_\varepsilon = \bigcup_j B_\varepsilon^j$, $\Gamma_\varepsilon = \partial B_\varepsilon$. Определим область D_ε как $D \setminus \overline{B_\varepsilon}$. Пусть также $Q_\varepsilon = D_\varepsilon \times (0, +\infty)$, $Q = D \times (0, +\infty)$.

Введем следующие обозначения для пространств

$$\mathbf{H} := \{u = (u^1, u^2) \in [L_2(D)]^2, \nabla \cdot u = 0\},$$

$$\mathbf{H}_\varepsilon := \{u = (u^1, u^2) \in [L_2(D_\varepsilon)]^2, \nabla \cdot u = 0\},$$

$$\mathbf{V} := \{u \in [H^1(D)]^2, \nabla \cdot u = 0, u(-1/2, x_2, t) = u(1/2, x_2, t), u|_{\Gamma_3} = 0, u^2|_{\Gamma_1} = 0\},$$

$$\mathbf{V}_\varepsilon := \{u \in [H^1(D_\varepsilon)]^2, \nabla \cdot u = 0, u(-1/2, x_2, t) = u(1/2, x_2, t), u|_{\Gamma_3 \cup \Gamma_\varepsilon} = 0, u^2|_{\Gamma_1} = 0\}$$

(множество вектор-функций из $[H^1(D_\varepsilon)]^2$ с нулевым следом на $\Gamma_3 \cup \Gamma_\varepsilon$ и нулевым следом второй компоненты u^2 вектор-функции $u(x) = (u^1(x), u^2(x))$ на Γ_1). Здесь $y_1 \cdot y_2$ обозначает скалярное произведение векторов $y_1, y_2 \in \mathbb{R}^2$. Нормы в этих пространствах определяются, соответственно, следующим образом:

$$\begin{aligned} \|v\|^2 &:= \int_D \sum_{i=1}^2 |v^i(x)|^2 dx, \quad \|v\|_\varepsilon^2 := \int_{D_\varepsilon} \sum_{i=1}^2 |v^i(x)|^2 dx, \\ \|v\|_1^2 &:= \int_D \sum_{i=1}^2 |\nabla v^i(x)|^2 dx, \quad \|v\|_{1\varepsilon}^2 := \int_{D_\varepsilon} \sum_{i=1}^2 |\nabla v^i(x)|^2 dx. \end{aligned}$$

Обозначим через $\mathbf{V}'$ и $\mathbf{V}'_\varepsilon$ двойственные пространства к пространствам $\mathbf{V}$ и $\mathbf{V}_\varepsilon$, соответственно.

Заметим, что эквивалентную постановку задачи можно сделать в полосе $\mathbb{R} \times (-\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$ если периодически продолжить области D и D_ε вдоль оси x_1 с периодом и рассмотреть функции, 1-периодические по этой оси.

Рассмотрим следующую задачу для 2D системы Навье – Стокса:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} - \nu \Delta u_\varepsilon + (u_\varepsilon \cdot \nabla) u_\varepsilon + \nabla p = g(x, \frac{x}{\varepsilon}), & x = (x_1, x_2) \in D_\varepsilon, t > 0, \\ \nabla \cdot u_\varepsilon = 0, & x \in D_\varepsilon, t > 0, \\ \nu \frac{\partial u_\varepsilon^1}{\partial n} + \alpha u_\varepsilon^1 = 0, \quad u_\varepsilon^2 = 0, & x \in \Gamma_1, t > 0, \\ u_\varepsilon = 0, & x \in \Gamma_3 \cup \Gamma_\varepsilon, t > 0, \\ u(-1/2, x_2, t) = u(1/2, x_2, t), & x \in \Gamma_2 \cup \Gamma_4, \\ u_\varepsilon = U(x), & x \in D_\varepsilon, t = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь $u_\varepsilon = u_\varepsilon(x, t) = (u_\varepsilon^1, u_\varepsilon^2)$ – неизвестная вектор-функция скорости, $p = p(x, t)$ – неизвестная скалярная функция давления, $g = g(x) = (g^1, g^2) \in \mathbf{H}$ – известная внешняя сила, $n = (0, -1)$ – вектор внешней нормали к части границы Γ_1 и коэффициенты $\nu > 0, \alpha > 0$.

Предполагается, что вектор-функция $g : D \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ является функцией Каратеодори, т. е., отображение $x \rightarrow g(x, \xi)$ измеримо по Лебегу при всех $\xi \in \mathbb{R}^2$, а отображение $\xi \rightarrow g(x, \xi)$ непрерывно для почти всех $x \in D$. Тогда отображение $x \rightarrow g(x, \frac{x}{\varepsilon})$ корректно задано и измеримо.

Для вектор-функции g будем предполагать, что функции $g_\varepsilon(x) \equiv g(x, \frac{x}{\varepsilon}) \in \mathbf{H}$ для любого $\varepsilon > 0$ и имеют среднее $\bar{g}(x)$ в пространстве $\mathbf{H}$ при $\varepsilon \rightarrow 0+$, то есть

$$g\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \rightharpoonup \bar{g}(x) \quad (\varepsilon \rightarrow 0+) \text{ слабо в } \mathbf{H}. \quad (2)$$

В силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега, из условия (2) получаем

$$\int_{D_\varepsilon} g\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \cdot \varphi(x) dx \rightarrow \int_D \bar{g}(x) \cdot \varphi(x) dx \quad (3)$$

для любой функции $\varphi \in \mathbf{H}$ при $\varepsilon \rightarrow 0+$.

Известно, что если $U \in \mathbf{H}$, то существует единственное слабое решение $u(s)$ начально-краевой задачи (1), которое принадлежит пространству $L_{2,w}^{loc}(\mathbb{R}_+; \mathbf{V}_\varepsilon) \cap L_{\infty,*w}^{loc}(\mathbb{R}_+; \mathbf{H}_\varepsilon)$, такое, что $u(0) = U$. При этом, $\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} \in L_{2,w}^{loc}(\mathbb{R}_+; \mathbf{V}'_\varepsilon)$. Для доказательства смотри, например, [1, 2], где изучен классический случай нулевого условия Дирихле на всей границе области. Аналогично доказывается для граничного условия 3-го рода для компоненты вектора скорости u^2 на части границы Γ_1 .

Исходя из вышесказанного, будем исследовать слабые решения начально-краевой задачи (1), то есть функции

$$u_\varepsilon(x, s) \in L_{2,w}^{loc}(\mathbb{R}_+; \mathbf{V}_\varepsilon) \cap L_{\infty,*w}^{loc}(\mathbb{R}_+; \mathbf{H}_\varepsilon) \cap \left\{ v : \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} \in L_{2,w}^{loc}(\mathbb{R}_+; \mathbf{V}'_\varepsilon) \right\}$$

которые удовлетворяют задаче (1) в смысле обобщенных функций, то есть

$$\begin{aligned} - \int_{Q_\varepsilon} u_\varepsilon \cdot \frac{\partial \psi}{\partial t} dx dt + \nu \int_{Q_\varepsilon} \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla \psi dx dt + \int_{Q_\varepsilon} (u_\varepsilon \cdot \nabla) u_\varepsilon \cdot \psi dx dt + \\ + \alpha \int_{\Gamma_1 \times (0, +\infty)} u_\varepsilon^1 \psi^1 dx_1 dt = \int_{Q_\varepsilon} g_\varepsilon(x) \cdot \psi dx dt \end{aligned} \quad (4)$$

для любых функций $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+; \mathbf{H}_\varepsilon)$. Здесь $\eta_1 \cdot \eta_2$ означает скалярное произведение векторов $\eta_1, \eta_2 \in \mathbb{R}^2$.

Покажем, что так выбранные граничные условия для части границы Γ_1 обеспечивают выполнение свойства ортогональности для нелинейного члена, т. е.,

$$(u_\varepsilon \cdot \nabla) u_\varepsilon \cdot u_\varepsilon = 0, \forall u_\varepsilon \in \mathbf{V}_\varepsilon. \quad (5)$$

Имеем

$$\begin{aligned} (u_\varepsilon \cdot \nabla) u_\varepsilon \cdot u_\varepsilon &= (u_\varepsilon^1 \partial_{x_1} + u_\varepsilon^2 \partial_{x_2}) u_\varepsilon \cdot u_\varepsilon = \sum_{i,j=1}^2 u_\varepsilon^i \partial_{x_i} u_\varepsilon^j \cdot u_\varepsilon^j = \sum_{i,j=1}^2 \int_{D_\varepsilon} u_\varepsilon^i \partial_{x_i} u_\varepsilon^j u_\varepsilon^j dx = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 \int_{D_\varepsilon} u_\varepsilon^i \partial_{x_i} (u_\varepsilon^j)^2 dx = -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 \int_{D_\varepsilon} \partial_{x_i} u_\varepsilon^i (u_\varepsilon^j)^2 dx + \int_{\Gamma_1} u_\varepsilon^2 \left(\sum_{j=1}^2 (u_\varepsilon^j)^2 \right) ds = \\ &= -\frac{1}{2} \int_{D_\varepsilon} \left(\sum_{i=1}^2 \partial_{x_i} u_\varepsilon^i \right) \left(\sum_{j=1}^2 (u_\varepsilon^j)^2 \right) dx = -\frac{1}{2} \int_{D_\varepsilon} (\partial_{x_1} u_\varepsilon^1 + \partial_{x_2} u_\varepsilon^2) \left(\sum_{j=1}^2 (u_\varepsilon^j)^2 \right) dx = 0 \end{aligned}$$

В средней строке применяется формула Грина интегрирования по частям, причем последний интеграл по Γ_1 равен нулю в силу нулевых граничных условий на u_ε^2 . В последней строке $\partial_{x_1} u_\varepsilon^1 + \partial_{x_2} u_\varepsilon^2 = 0$ в силу равенства нулю дивергенции вектора скорости.

Покажем также, что для таких краевых условий оператор Стокса является симметричным и отрицательным. Имеем для достаточно гладких вектор-функций $u_\varepsilon, v_\varepsilon \in \mathbf{V}_\varepsilon$, применяя формулу интегрирования по частям,

$$\begin{aligned} u_\varepsilon \cdot \Delta v_\varepsilon &= \sum_{i=1}^2 \int_{D_\varepsilon} u_\varepsilon^i(x) \Delta v_\varepsilon^i(x) dx = - \sum_{i,j=1}^2 \int_{D_\varepsilon} \frac{\partial u_\varepsilon^i}{\partial x_j}(x) \frac{\partial v_\varepsilon^j}{\partial x_j}(x) dx + \sum_{i=1}^2 \int_{\Gamma_1} u_\varepsilon^i(x) \frac{\partial v_\varepsilon^i}{\partial n}(x) ds = \\ &= -\nabla u_\varepsilon \cdot \nabla v_\varepsilon + \int_{\Gamma_1} u_\varepsilon^1(x) \frac{\partial v_\varepsilon^1}{\partial x_2}(x) ds = -\nabla u_\varepsilon \cdot \nabla v_\varepsilon - \alpha \nu^{-1} \int_{\Gamma_1} u_\varepsilon^1(x) v_\varepsilon^1(x) ds = \sum_{i=1}^2 \int_{D_\varepsilon} \Delta u_\varepsilon^i(x) v_\varepsilon^i(x) dx = \Delta u_\varepsilon \cdot v_\varepsilon. \end{aligned}$$

Мы проверили симметричность. Одновременно при $v_\varepsilon = u_\varepsilon$ получили формулу

$$u_\varepsilon \cdot \Delta u_\varepsilon = -\nabla u_\varepsilon \cdot \nabla u_\varepsilon - \alpha \nu^{-1} \int_{\Gamma_1} (u_\varepsilon^1(x))^2 ds, \quad (6)$$

из которой следует отрицательность оператора Стокса.

Следующая лемма имеет ключевое значение при выводе основных априорных оценок для решения задачи (1), а также при доказательстве теоремы существования и единственности слабого решения этой задачи. При ее доказательстве существенно используется свойство ортогональности (5), а также тождество (6). Аналогичное утверждение для нулевых условий Дирихле доказано в [3, предложение XV.3.1].

Лемма 2.1. Пусть $u_\varepsilon(x, t)$ – слабое решение задачи (1). Тогда

(i) $u_\varepsilon \in C(\mathbb{R}_+; \mathbf{H}_\varepsilon)$;

(ii) функция $\|u_\varepsilon(\cdot, t)\|^2$ является абсолютно непрерывной на $\mathbb{R}_+$, и выполнено следующее дифференциальное тождество

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_\varepsilon(\cdot, t)\|_\varepsilon^2 + \nu \int_{D_\varepsilon} |\nabla u_\varepsilon(x, t)|^2 dx + \alpha \int_{\Gamma_1} (u_\varepsilon^1(x, t))^2 ds = \int_{D_\varepsilon} g_\varepsilon(x) \cdot u_\varepsilon(x, t) dx.$$

При описании пространства траекторий $\mathcal{K}_\varepsilon^+$ для задачи (1) будем следовать общей схеме из [3] и определим банаховы пространства для каждого отрезка $[t_1, t_2] \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{F}_{t_1, t_2} := \mathbf{L}_{2, w}^{loc}(t_1, t_2; \mathbf{V}_\varepsilon) \cap \mathbf{L}_{\infty, *w}^{loc}(t_1, t_2; \mathbf{H}_\varepsilon) \cap \left\{ v : \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} \in \mathbf{L}_{2, w}^{loc}(t_1, t_2; \mathbf{V}'_\varepsilon) \right\} \quad (7)$$

с нормой

$$\|v\|_{\mathcal{F}_{t_1, t_2}} := \|v\|_{\mathbf{L}_2(t_1, t_2; \mathbf{V})} + \|v\|_{\mathbf{L}_\infty(t_1, t_2; \mathbf{H})} + \left\| \frac{\partial v}{\partial t} \right\|_{\mathbf{L}_2(t_1, t_2; \mathbf{V}')} . \quad (8)$$

Пусть $S(h)$ для $h \in \mathbb{R}$ обозначает оператор сдвига

$$S(h)f(t) = f(h + t).$$

Положив $\mathcal{D}_{t_1, t_2} = \mathbf{L}_2(t_1, t_2; \mathbf{V})$ получаем, что $\mathcal{F}_{t_1, t_2} \subseteq \mathcal{D}_{t_1, t_2}$, а если $u(s) \in \mathcal{F}_{t_1, t_2}$, тогда $A(u(s)) \in \mathcal{D}_{t_1, t_2}$. Далее можно рассматривать слабые решения задачи (1) как решение системы уравнений из общей схемы (см. [19, 20], а также [3]).

Определим следующие пространства

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_+^{loc} &= \mathbf{L}_2^{loc}(\mathbb{R}_+; \mathbf{V}) \cap \mathbf{L}_\infty^{loc}(\mathbb{R}_+; \mathbf{H}) \cap \left\{ v \mid \frac{\partial v}{\partial t} \in \mathbf{L}_2^{loc}(\mathbb{R}_+; \mathbf{V}') \right\}, \\ \mathcal{F}_{\varepsilon, +}^{loc} &= \mathbf{L}_2^{loc}(\mathbb{R}_+; \mathbf{V}_\varepsilon) \cap \mathbf{L}_\infty^{loc}(\mathbb{R}_+; \mathbf{H}_\varepsilon) \cap \left\{ v \mid \frac{\partial v}{\partial t} \in \mathbf{L}_2^{loc}(\mathbb{R}_+; \mathbf{V}'_\varepsilon) \right\}. \end{aligned}$$

Обозначим через $\mathcal{K}_\varepsilon^+$ множество всех слабых решений задачи (1). Напомним, что для любой функции $U \in \mathbf{H}$ существует траектория $u(\cdot) \in \mathcal{K}_\varepsilon^+$ такая, что $u(0) = U(x)$. Следовательно, пространство траекторий $\mathcal{K}_\varepsilon^+$ задачи (1) не пусто и достаточно велико.

Ясно, что $\mathcal{K}_\varepsilon^+ \subset \mathcal{F}_+^{loc}$ и пространство траекторий $\mathcal{K}_\varepsilon^+$ является трансляционно-инвариантным, то есть, если $u(t) \in \mathcal{K}_\varepsilon^+$, тогда и $u(h + t) \in \mathcal{K}_\varepsilon^+$ для любых $h \geq 0$. Следовательно, $S(h)\mathcal{K}_\varepsilon^+ \subseteq \mathcal{K}_\varepsilon^+$, $\forall h \geq 0$.

Далее, используя норму пространства $\mathbf{L}_2(t_1, t_2; \mathbf{H})$, определим метрики $\rho_{t_1, t_2}(\cdot, \cdot)$ в пространствах $\mathcal{F}_{t_1, t_2}$ следующим образом

$$\rho_{0, M}(u, v) = \left(\int_0^M \|u(t) - v(t)\|^2 dt \right)^{1/2}, \quad \forall u(\cdot), v(\cdot) \in \mathcal{F}_{0, M}.$$

Эти метрики порождают топологию Θ_+^{loc} в пространстве $\mathcal{F}_+^{loc}$ (соответственно $\Theta_{\varepsilon, +}^{loc}$ в $\mathcal{F}_{\varepsilon, +}^{loc}$). Напомним, что последовательность $\{v_k\} \subset \mathcal{F}_+^{loc}$ сходится к функции $v \in \mathcal{F}_+^{loc}$ при $k \rightarrow \infty$ в Θ_+^{loc} , если $\|v_k(\cdot) - v(\cdot)\|_{\mathbf{L}_2(0, M; \mathbf{H})} \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$) для любого $M > 0$. Топология Θ_+^{loc} метризуема и соответствующее метрическое пространство является полным. Мы рассматриваем топологию в пространстве траекторий $\mathcal{K}_\varepsilon^+$ задачи (1). Полугруппа сдвигов $\{S(h)\}$, действующая на $\mathcal{K}_\varepsilon^+$, непрерывна в рассматриваемой топологии Θ_+^{loc} .

Следуя общей схеме, определим ограниченные множества в $\mathcal{K}_\varepsilon^+$, используя банаховы пространства $\mathcal{F}_+^b$. Ясно, что

$$\mathcal{F}_+^b = \mathbf{L}_2^b(\mathbb{R}_+; \mathbf{V}) \cap \mathbf{L}_\infty(\mathbb{R}_+; \mathbf{H}) \cap \left\{ v \mid \frac{\partial v}{\partial t} \in \mathbf{L}_2^b(\mathbb{R}_+; \mathbf{V}') \right\}. \quad (9)$$

и $\mathcal{F}_+^b$ – подпространство пространства $\mathcal{F}_+^{loc}$.

Рассмотрим полугруппу сдвигов $\{S(h)\}$ на $\mathcal{K}_\varepsilon^+$, $S(h) : \mathcal{K}_\varepsilon^+ \rightarrow \mathcal{K}_\varepsilon^+$, $h \geq 0$.

Пусть $\mathcal{K}_\varepsilon$ означает ядро задачи (1), которое состоит из всех слабых решений $u(t)$, $t \in \mathbb{R}$ ограниченных в пространстве

$$\mathcal{F}^b = L_2^b(\mathbb{R}; \mathbf{V}) \cap L_\infty(\mathbb{R}; \mathbf{H}) \cap \left\{ v \mid \frac{\partial v}{\partial t} \in L_2^b(\mathbb{R}; \mathbf{V}') \right\}$$

Предложение 2.1. Задача (1) имеет траекторные аттракторы $\mathfrak{A}_\varepsilon$ в топологическом пространстве Θ_+^{loc} . Множество $\mathfrak{A}_\varepsilon$ равномерно (по $\varepsilon \in (0, 1)$) ограничено в $\mathcal{F}_+^b$ и компактно в Θ_+^{loc} . Более того,

$$\mathfrak{A}_\varepsilon = \Pi_+ \mathcal{K}_\varepsilon,$$

ядро $\mathcal{K}_\varepsilon$ – непусто и равномерно (по $\varepsilon \in (0, 1)$) ограничено в $\mathcal{F}^b$. Напомним, что пространства $\mathcal{F}_+^b$ и Θ_+^{loc} зависят от ε .

Доказательство этого предложения практически полностью совпадает с доказательством, приведенным в [3] для нулевых условий Дирихле на всей границе.

3. Вспомогательные утверждения. В данном разделе приводятся результаты из работы [5], которые будут использованы ниже.

Рассмотрим вспомогательную задачу

$$\begin{cases} -v\Delta w_\varepsilon = g^1(x, \frac{x}{\varepsilon}), & x \in D_\varepsilon, \\ v\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial n} + \alpha w_\varepsilon = 0, & x \in \Gamma_1, \\ w_\varepsilon = 0, & x \in \Gamma_3 \cup \Gamma_\varepsilon. \end{cases} \quad (10)$$

Также предполагается, что у нас выполнено периодическое условие на решение w_ε по x_1 . Задача для второй компоненты g^2 вектор-функции g будет иметь однородные условия Дирихле на Γ_1 . В дальнейшем будем опускать верхний индекс у функции g^1 .

3.1 Априорные оценки. Для того, чтобы перейти к рассмотрению вопросов усреднения, предварительно мы должны получить априорные оценки решений задачи (10). Имеет место следующая теорема.

Теорема 3.1. Решение u^ε задачи (10) удовлетворяет неравенству

$$\|w_\varepsilon\|_{W_2^1(D_\varepsilon, \Gamma_3 \cup \Gamma_\varepsilon)} \leq K_1 \|g\|_{L_2(D)} \leq K, \quad (11)$$

где константы K_1 и $K > 0$ не зависят от ε .

Доказательство. Используя стандартную технику интегральных оценок, учитывая неравенство типа Фридрихса

$$\int_{D_\varepsilon} w_\varepsilon^2 dx \leq C \int_{D_\varepsilon} |\nabla w_\varepsilon|^2 dx,$$

неравенство для следов

$$\int_{\Gamma_1} w_\varepsilon^2 dx_1 \leq C \int_{D_\varepsilon} |\nabla w_\varepsilon|^2 dx$$

и неравенство Коши – Буняковского, из интегрального тождества задачи (10) с пробной функцией равной w_ε получаем первую оценку. Воспользовавшись условием (2), получим и вторую оценку. Теорема доказана.

3.2 Усреднение линейной вспомогательной задачи. Этот раздел посвящён изучению асимптотического поведения решений задачи (10).

Замечание. В дальнейших рассуждениях будем отождествлять функции из пространства $W_2^1(D_\varepsilon, \Gamma_3 \cup \Gamma_\varepsilon)$ с функциями из $W_2^1(D, \Gamma_3)$, равными нулю в B_ε , а функции из пространства $L_2(D_\varepsilon)$ с функциями из $L_2(D)$, равными нулю в B_ε . С другой стороны, для сужения функций из $L_2(D)$ на D_ε будем сохранять их обозначения.

Имеет место утверждение.

Теорема 3.2. Пусть $g \in L_2(D)$. Тогда для решения краевой задачи (10) имеет место сходимость

$$\|w_\varepsilon - w_0\|_{W_2^1(D)} \rightarrow 0 \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0, \quad (12)$$

где w_0 – решение предельной (усреднённой) краевой задачи

$$\begin{cases} -v\Delta w_0 = g & \text{в } D, \\ w_0 = 0 & \text{на } \Gamma_1 \cup \Gamma_3. \end{cases} \quad (13)$$

Обозначим через $H_{per}^1(D)$ пространство 1-периодических по x_1 функций из $H^1(D, \Gamma_1 \cup \Gamma_3)$. Для доказательства теоремы будем использовать следующее утверждение (см. [5]). Аналогично введём определение пространства $H_{per}^1(D_\varepsilon)$ – пространство 1-периодических по x_1 функций из $H^1(D_\varepsilon, \Gamma_\varepsilon \cup \Gamma_3)$.

Лемма 3.1. Пусть $v_\varepsilon \in H_{per}^1(D_\varepsilon)$ и $v_\varepsilon \rightharpoonup v^*$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ слабо в $H_{per}^1(D)$. Тогда $v^* \in H_{per}^1(D)$.

Доказательство теоремы. Пусть $\{\varepsilon_k\}$ – произвольная последовательность, сходящаяся к нулю при $k \rightarrow +\infty$. По теореме 3.1 из равномерной ограниченности семейства $\{w_\varepsilon\}$ следует, что существует подпоследовательность индексов $\{k'\}$, такая что на этой подпоследовательности при $k' \rightarrow +\infty$ имеет место сходимость

$$w_{\varepsilon_{k'}} \rightarrow w^* \quad \text{сильно в } L_2(D) \text{ и слабо в } H_{per}^1(D). \quad \text{при } \varepsilon_{k'} \rightarrow 0. \quad (14)$$

При этом $w^* \in H_{per}^1(D)$ в силу леммы 3.1.

Умножая уравнение задачи (10) на $v \in C_{per}^\infty(D, \Gamma_1 \cup \Gamma_3)$ и интегрируя по частям по области D , при достаточно малых ε получаем интегральное тождество. Переходя в этом тождестве к пределу, в силу (14) и леммы 3.1 получаем новое интегральное тождество

$$v \int_D \nabla w^* \cdot \nabla v \, dx = \int_D \bar{g} v \, dx,$$

которое совпадает с интегральным тождеством предельной задачи в D . Из плотности вложения $C_{per}^\infty(D, \Gamma_1 \cup \Gamma_3)$ в $H_{per}^1(D)$ и единственности решения предельной задачи (13) получаем, что $w^* = w_0$, а из произвола в выборе исходной последовательности $\{\varepsilon_k\}$ и сходимости (14) вытекает следующая сходимость:

$$w_\varepsilon \rightarrow w_0 \quad \text{сильно в } L_2(D) \text{ и слабо в } W_2^1(D) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (15)$$

Осталось усилить сходимость (15) до сходимости (12). Умножим уравнение предельной задачи на w_0 и проинтегрируем по частям по области D . Вычитая это равенство из интегрального тождества задачи (10) с пробной функцией w_ε и учитывая (15), а также используя неравенство Коши – Буняковского и рассуждения в конце доказательства леммы 3.1, получаем

$$\begin{aligned} \|\nabla w_\varepsilon\|_{L_2(D)}^2 - \|\nabla w_0\|_{L_2(D)}^2 &= \int_D (g w_\varepsilon - \bar{g} w_0) \, dx + \alpha \|w_\varepsilon\|_{L_2(\Gamma_1)}^2 = \int_D (g - \bar{g}) w_0 \, dx + \\ &+ \int_D g (w_\varepsilon - w_0) \, dx + \alpha \|w_\varepsilon\|_{L_2(\Gamma_1)}^2 \leq \|g - \bar{g}\|_{L_2(D)} \|w_0\|_{L_2(D)} + \\ &+ \|g\|_{L_2(D)} \|w_\varepsilon - w_0\|_{L_2(D)} + \alpha \|w_\varepsilon\|_{L_2(\Gamma_1)}^2 \rightarrow 0 \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Из (15) и (16) следует (12). Действительно, в силу (15) и (16)

$$\|\nabla (w_\varepsilon - w_0)\|_{L_2(D)}^2 = \|\nabla w_\varepsilon\|_{L_2(D)}^2 + \|\nabla w_0\|_{L_2(D)}^2 - 2 \int_D \nabla w_\varepsilon \cdot \nabla w_0 \, dx \rightarrow 0$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$. Из этой сходимости и сходимости (15) вытекает сходимость (12). Теорема доказана.

Таким образом, усредненная задача имеет вид (13).

4. Усреднение исходной задачи. В этом разделе изучается предельное поведение аттракторов $\mathfrak{A}_\varepsilon$ для системы уравнений Навье – Стокса (1) при $\varepsilon \rightarrow 0+$ и их сходимость к траекторному аттрактору соответствующего усредненного уравнения.

Усреднённая (предельная) задача имеет следующий вид (см. предыдущий раздел):

$$\begin{cases} \frac{\partial u_0}{\partial t} - \nu \Delta u_0 + (u_0 \cdot \nabla) u_0 + \nabla p = \bar{g}(x), & x \in D, t > 0, \\ \nabla \cdot u_0 = 0, & x \in D, t > 0, \\ u_0 = 0, & x \in \Gamma_1 \cup \Gamma_3, t > 0, \\ u(-1/2, x_2, t) = u(1/2, x_2, t), & x \in \Gamma_2 \cup \Gamma_4, \\ u_0 = U(x), & x \in D, t = 0. \end{cases} \quad (17)$$

Рассматриваются слабые 1-периодические по x_1 решения начально-краевой задачи (17), то есть функции

$$u_0(x, t) \in L_{2,w}^{loc}(\mathbb{R}_+; \mathbf{V}) \cap L_{\infty,*w}^{loc}(\mathbb{R}_+; \mathbf{H}) \cap \left\{ v : \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} \in L_{2,w}^{loc}(\mathbb{R}_+; \mathbf{V}') \right\}.$$

которые удовлетворяют задаче (17) в смысле обобщенных функций, то есть

$$-\int_Q u_0 \cdot \frac{\partial \psi}{\partial t} dxdt + \nu \int_Q \nabla u_0 \cdot \nabla \psi dxdt + \int_Q (u_0 \cdot \nabla) u_0 \cdot \psi dxdt = \int_Q \bar{g}(x) \cdot \psi dxdt \quad (18)$$

для любых функций $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+; \mathbf{H})$.

Как известно, при любом $U \in \mathbf{H}$ задача (17) имеет единственное слабое решение (см. [1, 2]).

Следующая лемма доказывается аналогично лемме 2.1 (см. также [3]).

Лемма 4.1. Пусть $u(x, t)$ – слабое решение задачи (17). Тогда

(i) $u \in C(\mathbb{R}_+; \mathbf{H})$;

(ii) функция $\|u(\cdot, t)\|^2$ является абсолютно непрерывной на $\mathbb{R}_+$, и более того

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(\cdot, t)\|^2 + \nu \int_Q |\nabla u(x, t)|^2 dx = \int_D \bar{g}(x) \cdot u(x, t) dx.$$

Задача (17) имеет траекторный аттрактор $\bar{\mathfrak{A}}$ в пространстве траекторий $\bar{\mathcal{K}}^+$, соответствующем задаче (17), причем

$$\bar{\mathfrak{A}} = \Pi_+ \bar{\mathcal{K}},$$

где $\bar{\mathcal{K}}$ – ядро задачи (17) в $\mathcal{F}^b$.

Определение. Будем говорить, что траекторные аттракторы $\mathfrak{A}_\varepsilon$ сходятся к траекторному аттрактору $\bar{\mathfrak{A}}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ в топологическом пространстве Θ_+^{loc} , если для любой окрестности $O(\bar{\mathfrak{A}})$ в Θ_+^{loc} найдется $\varepsilon_1 \geq 0$ такое, что $\mathfrak{A}_\varepsilon \subseteq O(\bar{\mathfrak{A}})$ при любом $\varepsilon < \varepsilon_1$, то есть для любого $M > 0$

$$\text{dist}_{\Theta_{0,M}}(\Pi_{0,M} \mathfrak{A}_\varepsilon, \Pi_{0,M} \bar{\mathfrak{A}}) \rightarrow 0 \quad (\varepsilon \rightarrow 0).$$

Сформулируем основную теорему об усреднении систем уравнений Навье – Стокса.

Теорема 4.1. В топологическом пространстве Θ_+^{loc} справедливо предельное соотношение

$$\mathfrak{A}_\varepsilon \rightarrow \bar{\mathfrak{A}} \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0+. \quad (19)$$

Кроме того,

$$\mathcal{K}_\varepsilon \rightarrow \bar{\mathcal{K}} \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0+ \text{ в } \Theta^{loc}. \quad (20)$$

Замечание. Функции из множеств $\mathfrak{A}_\varepsilon$ и $\mathcal{K}_\varepsilon$ заданы на перфорированных областях D_ε . Однако все эти функции можно продолжить нулем внутрь отверстий, и при этом нормы продолженных функций в пространствах $\mathbf{H}$ и $\mathbf{V}$ (определенных без перфорации), очевидно, совпадают с соответствующими нормами в перфорированных пространствах $\mathbf{H}_\varepsilon$ и $\mathbf{V}_\varepsilon$. Поэтому в теореме все расстояния измеряются в пространствах без перфорации с учетом нулевого продолжения внутрь отверстий.

Доказательство теоремы. Ясно, что (20) влечет (19). Поэтому достаточно доказать (20), то есть показать, что для любой окрестности $O(\bar{\mathcal{K}})$ в Θ^{loc} найдется число $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(O) > 0$ такое, что

$$\mathcal{K}_\varepsilon \subset O(\bar{\mathcal{K}}) \quad \text{для всех } \varepsilon < \varepsilon_1. \quad (21)$$

Предположим, что (21) неверно. Тогда найдется окрестность $O'(\bar{\mathcal{K}})$ в Θ^{loc} , последовательности $\varepsilon_k \rightarrow 0+$ ($k \rightarrow \infty$) и $u_{\varepsilon_k}(\cdot) = u_{\varepsilon_k}(s) \in \mathcal{K}_{\varepsilon_k}$ такие, что

$$u_{\varepsilon_k} \notin O'(\bar{\mathcal{K}}) \quad \text{для всех } k \in \mathbb{N}. \quad (22)$$

Из условия (2) вытекает, что последовательность $\left\{g\left(x, \frac{x}{\varepsilon_n}\right)\right\}$ ограничена в $\mathbf{H}$. Следовательно, используя дифференциальное тождество из леммы 2.1 и неравенство Коши – Буняковского, заключаем, что последовательность решений $\{u_{\varepsilon_n}\}$ ограничена в $\mathcal{F}^b$. Переходя к подпоследовательности, мы можем предположить, что

$$u_{\varepsilon_n} \rightarrow u_0 \quad (n \rightarrow \infty) \quad \text{в } \Theta^{loc}.$$

Утверждается, что $u_0 \in \bar{\mathcal{K}}$. Функции $u_{\varepsilon_n}(x, t)$ удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial u_{\varepsilon_n}}{\partial t} - \nu \Delta u_{\varepsilon_n} + (u_{\varepsilon_n} \cdot \nabla) u_{\varepsilon_n} + \nabla p = g_0\left(x, \frac{x}{\varepsilon_n}\right), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (23)$$

с условием

$$v \frac{\partial u_{\varepsilon_n}^1}{\partial n} + \alpha u_{\varepsilon_n}^1 = 0, \quad u_{\varepsilon_n}^2 = 0, \quad x \in \Gamma_1,$$

и энергетическому тождеству

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} \int_{-M}^M \|u_{\varepsilon_n}(t)\|_{\mathbf{H}}^2 \psi'(t) dt + v \int_{-M}^M \|u_{\varepsilon_n}(t)\|_{\mathbf{V}}^2 \psi(t) dt + \\ & + \alpha \int_{-M}^M \int_{\Gamma_1} u_{\varepsilon_n}^1(x, t) \psi(t) dx_1 dt = \int_{-M}^M g\left(x, \frac{x}{\varepsilon_n}\right) \cdot u_{\varepsilon_n}(t) \psi(t) dt \end{aligned} \quad (24)$$

при любом $M > 0$ и для любой функции $\psi \in C_0^\infty([-M, M])$, $\psi \geq 0$. Кроме того, $u_{\varepsilon_n}(t) \rightharpoonup u_0(t)$ ($n \rightarrow \infty$) слабо в $L_2(-M, M; \mathbf{V})$, $*$ -слабо в $L_\infty(-M, M; \mathbf{H})$ и $\frac{\partial u_{\varepsilon_n}(t)}{\partial t} \rightharpoonup \frac{\partial u_0(t)}{\partial t}$ ($n \rightarrow \infty$) слабо в $L_2(-M, M; \mathbf{V}')$. По теореме о компактности заключаем, что $u_{\varepsilon_n}(t) \rightarrow u_0(t)$ ($n \rightarrow \infty$) сильно в $L_2(-M, M; \mathbf{H})$ и $u_{\varepsilon_n}(x, t) \rightarrow u_0(x, t)$ ($n \rightarrow \infty$) при почти всех $(x, t) \in D \times (-M, M)$. В частности, $u_{\varepsilon_n}(t) \rightarrow u_0(t)$ ($n \rightarrow \infty$) сильно в $\Theta_+^{loc} = L_2^{loc}(\mathbb{R}; \mathbf{H})$.

Для предельного перехода в нелинейном члене, заметим, что

$$(u_{\varepsilon_n} \cdot \nabla) u_{\varepsilon_n} = \sum_{i=1}^2 u_{\varepsilon_n}^i \partial_{x_i} u_{\varepsilon_n} = \sum_{i=1}^2 \partial_{x_i} (u_{\varepsilon_n}^i u_{\varepsilon_n}) - \left(\sum_{i=1}^2 \partial_{x_i} u_{\varepsilon_n}^i \right) u_{\varepsilon_n} = \sum_{i=1}^2 \partial_{x_i} (u_{\varepsilon_n}^i u_{\varepsilon_n}), \quad (25)$$

поскольку $\sum_{i=1}^2 \partial_{x_i} u_{\varepsilon_n}^i = \nabla \cdot u_{\varepsilon_n} = 0$. Выше было установлено, что $u_{\varepsilon_n}(x, t) \rightarrow u_0(x, t)$ ($n \rightarrow \infty$) при почти всех $(x, t) \in D \times (-M, M)$. Следовательно, в силу того, что $u_{\varepsilon_n}^i u_{\varepsilon_n} \rightarrow u_0^i u_0$ при почти всех $(x, t) \in D \times (-M, M)$, а из неравенства Ладыженской вытекает, что $u_{\varepsilon_n}^i u_{\varepsilon_n}$ ограничено в $L_2(-M, M; \mathbf{H})$. Поэтому, $u_{\varepsilon_n}^i u_{\varepsilon_n} \rightarrow u_0^i u_0$ слабо в $L_2(-M, M; \mathbf{H})$ (см. [3, Lemma II.1.2]), и, значит, $\partial_{x_i} u_{\varepsilon_n}^i u_{\varepsilon_n} \rightarrow \partial_{x_i} u_0^i u_0$ слабо в $L_2(-M, M; \mathbf{V}')$. Следовательно, из (25) получаем, что

$$(u_{\varepsilon_n} \cdot \nabla) u_{\varepsilon_n} \rightharpoonup (u_0 \cdot \nabla) u_0 \quad (n \rightarrow \infty) \quad \text{слабо в } L_2(-M, M; \mathbf{V}'). \quad (26)$$

В силу (2) имеем, что $g\left(x, \frac{x}{\varepsilon_n}\right) \rightharpoonup \bar{g}(x)$ ($n \rightarrow \infty$) слабо в пространстве $\mathbf{H}_w$ и, следовательно, слабо в $L_2(-M, M; \mathbf{H})$. Теперь, имея в виду теорему 3.2 и сходимости (26), переходим к пределу в (23) и (24) при $\varepsilon \rightarrow 0$, используя стандартное рассуждение (смотри подробное доказательство в [3, 19, 20]). Следовательно, $u_0 \in \bar{\mathcal{K}}$, то есть, u_0 – решение (17), удовлетворяющее соответствующему тождеству (24) с внешней силой $\bar{g}(x)$. В то же время мы установили, что $u_{\varepsilon_n}(s) \rightarrow u_0(s)$ ($n \rightarrow \infty$) в Θ_+^{loc} и, следовательно, $u_{\varepsilon_n}(s) \in \mathcal{O}'(u_0(s)) \subset \mathcal{O}'(\bar{\mathcal{K}})$ при $\varepsilon_n \ll 1$. Это противоречит (22). Теорема доказана.

Список литературы

1. Temam R. Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics. Applied Mathematics Series, 68. New York (NY)–Berlin–Heidelberg–London–Paris–Tokyo–Hong Kong–Barcelona–Budapest: Springer-Verlag; 1988. 500 p.
2. Бабин А.В., Вишик М.И. Аттракторы эволюционных уравнений. М.: Наука; 1989. 294 с.
3. Chepyzhov V.V., Vishik M.I. Attractors for equations of mathematical physics, American Mathematical Society Colloquium Publications, 49. Providence, RI: American Mathematical Society; 2002. 363 с.
4. Lobo M., Oleinik O.A., Pérez ME., Shaposhnikova TA. On homogenization of solutions of boundary value problems in domains perforated along manifolds. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa. Classe di Scienze. Serie IV.* 1997;25(3–4):611–629.
5. Гадылышин Р.Р., Королева Ю.О., Чечкин Г.А. О сходимости решений и собственных элементов краевой задачи в области, перфорированной вдоль границы. *Дифференциальные уравнения.* 2010;46(5):665–677.
6. Гадылышин Р.Р., Королева Ю.О., Чечкин Г.А. Об асимптотике простого собственного значения краевой задачи в области, перфорированной вдоль границы. *Дифференциальные уравнения.* 2011;47(6):819–828.
7. Chechkin G.A., Koroleva Y.O., Persson L-E., Wall P. On Spectrum of the Laplacian in a Circle Perforated Along the Boundary: Application to a Friedrichs–Type Inequality. *International Journal of Differential Equations.* 2011;2011:Art.No 619623.
8. Chechkin G.A., Koroleva Y.O., Persson L-E., Wall P. A new Weighted Friedrichs–type Inequality for a Perforated Domain with a Sharp Constant. *Eurasian Mathematical Journal.* 2011;2(1):81–103.
9. Amirat Y., Bodart O., Chechkin G.A., Piatnitski A.L. Asymptotics of a spectral-sieve problem. *J. Math. Anal. Appl.* 2016;435(2):1652–1671. DOI: 10.1016/j.jmaa.2015.11.014

10. Chechkin G.A., D'Apice C., De Maio U., Gadyl'shin RR. On Singularly Perturbed Steklov problem in Domain Perforated Along the Boundary. *Comptes Rendus Mécanique*. 2016;344(1):12–18.
11. Chechkin G.A., D'Apice C., De Maio U., Gadyl'shin RR. On the Steklov problem in a Domain Perforated Along a Part of the Boundary. *Modélisation Mathématique et Analyse Numérique (M²AN)*. 2017;51(4)1317–1342. DOI: 10.1051/m2an/2016063
12. Chechkin G.A. The Meyers Estimates for Domains Perforated Along the Boundary. *Mathematics*. 2021;9(23):Art.No 3015.
13. Bekmaganbetov K.A., Chechkin G.A., Chepyzhov V.V., Goritsky A.Yu. Homogenization of Trajectory Attractors of 3D Navier–Stokes system with Randomly Oscillating Force. *Discrete and Continuous Dynamical Systems. Series A (DCDS-A)*. 2017;37(5):2375–2393.
14. Bekmaganbetov K.A., Chechkin G.A., Toleubay A.M. Attractors of 2D Navier–Stokes system of equations in a locally periodic porous medium. *Bull. Karaganda Univ. Math. Ser.* 2022;3:35–50. DOI: 10.31489/2022M3/35-50
15. Chechkin G.A., Chepyzhov V.V., Pankratov L.S. Homogenization of Trajectory Attractors of Ginzburg–Landau equations with Randomly Oscillating Terms. *Discrete and Continuous Dynamical Systems. Series B (DCDS-B)*. 2018;23(3):1133–1154.
16. Bekmaganbetov K.A., Chechkin G.A., Chepyzhov V.V. Weak Convergence of Attractors of Reaction–Diffusion Systems with Randomly Oscillating Coefficients. *Applicable Analysis*. 2019;98(1-2):256–271.
17. Bekmaganbetov K.A., Chechkin G.A., Chepyzhov V.V. “Strange Term” in Homogenization of Attractors of Reaction–Diffusion Equation in Perforated Domain. *Chaos, Solitons & Fractals*. 2020;140:Art.No 110208.
18. Bekmaganbetov K.A., Chechkin G.A., Chepyzhov V.V., Tolemis AA. Homogenization of attractors to Ginzburg–Landau equations in media with locally periodic obstacles: sub- and supercritical cases. *Bull. Karaganda Univ. Math. Ser.* 2024;(2):40–56.
19. Chepyzhov V.V., Vishik M.I. Trajectory attractors for the 3D Navier-Stokes system and some generalizations, *Top. Meth. Nonlin. Anal. J. Julius Schauder Center*. 1996;8:217–243.
20. Chepyzhov V.V., Vishik M.I. Evolution equations and their trajectory attractors. *J. Math. Pures Appl.* 1997;76(10):913–964.

References

1. Temam R. Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics. Applied Mathematics Series, 68. New York (NY)–Berlin–Heidelberg–London–Paris–Tokyo–Hong Kong–Barcelona–Budapest: Springer-Verlag; 1988. 500 p.
2. Babin AV., Vishik MI. Attractors of evolution equations. Amsterdam: North–Holland Publishing Co.; 1992. 300 p.
3. Chepyzhov VV., Vishik MI. Attractors for equations of mathematical physics, American Mathematical Society Colloquium Publications, 49. Providence, RI: American Mathematical Society; 2002. 363 p.
4. Lobo M., Oleinik OA., Pérez ME., Shaposhnikova TA. On homogenization of solutions of boundary value problems in domains perforated along manifolds. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa. Classe di Scienze. Serie IV*. 1997;25(3–4):611–629.
5. Gadyl'shin RR., Koroleva YuO., Chechkin GA. On the Convergence of Solutions and Eigenelements of a Boundary Value Problem in a Domain Perforated Along the Boundary. *Differential Equations*. 2010;46(5):667–680.
6. Gadyl'shin RR., Koroleva YuO., Chechkin GA. On the Asymptotics of a Simple Eigenvalue to Boundary Value Problem in a Domain Perforated Along the Boundary. *Differential Equations*. 2011;47(6):822–831.
7. Chechkin GA., Koroleva YO., Persson L-E., Wall P. On Spectrum of the Laplacian in a Circle Perforated Along the Boundary: Application to a Friedrichs–Type Inequality. *International Journal of Differential Equations*. 2011;2011:Art.No 619623.
8. Chechkin GA., Koroleva YO., Persson L-E., Wall P. A new Weighted Friedrichs–type Inequality for a Perforated Domain with a Sharp Constant. *Eurasian Mathematical Journal*. 2011;2(1):81–103.
9. Amirat Y., Bodart O., Chechkin GA., Piatnitski AL. Asymptotics of a spectral-sieve problem. *J. Math. Anal. Appl.* 2016;435(2):1652–1671. DOI: 10.1016/j.jmaa.2015.11.014
10. Chechkin GA., D'Apice C., De Maio U., Gadyl'shin RR. On Singularly Perturbed Steklov problem in Domain Perforated Along the Boundary. *Comptes Rendus Mécanique*. 2016;344(1):12–18.
11. Chechkin GA., D'Apice C., De Maio U., Gadyl'shin RR. On the Steklov problem in a Domain Perforated Along a Part of the Boundary. *Modélisation Mathématique et Analyse Numérique (M²AN)*. 2017;51(4)1317–1342. DOI: 10.1051/m2an/2016063
12. Chechkin G.A. The Meyers Estimates for Domains Perforated Along the Boundary. *Mathematics*. 2021;9(23):Art.No 3015.
13. Bekmaganbetov KA., Chechkin GA., Chepyzhov VV., Goritsky AYU. Homogenization of Trajectory Attractors of 3D Navier–Stokes system with Randomly Oscillating Force. *Discrete and Continuous Dynamical Systems. Series A (DCDS-A)*. 2017;37(5):2375–2393.
14. Bekmaganbetov KA., Chechkin GA., Toleubay AM. Attractors of 2D Navier–Stokes system of equations in a locally periodic porous medium. *Bull. Karaganda Univ. Math. Ser.* 2022;3:35–50. DOI: 10.31489/2022M3/35-50
15. Chechkin GA., Chepyzhov VV., Pankratov LS. Homogenization of Trajectory Attractors of Ginzburg–Landau equations with Randomly Oscillating Terms. *Discrete and Continuous Dynamical Systems. Series B (DCDS-B)*. 2018;23(3):1133–1154.
16. Bekmaganbetov KA., Chechkin GA., Chepyzhov VV. Weak Convergence of Attractors of Reaction–Diffusion Systems with Randomly Oscillating Coefficients. *Applicable Analysis*. 2019;98(1-2):256–271.

17. Bekmaganbetov KA., Chechkin GA., Chepyzhov VV. "Strange Term" in Homogenization of Attractors of Reaction–Diffusion Equation in Perforated Domain. *Chaos, Solitons & Fractals*. 2020;140:Art.No 110208.
18. Bekmaganbetov KA., Chechkin GA., Chepyzhov VV., Tolemis AA. Homogenization of attractors to Ginzburg–Landau equations in media with locally periodic obstacles: sub- and supercritical cases. *Bull. Karaganda Univ. Math. Ser.* 2024;(2):40–56.
19. Chepyzhov VV. , Vishik MI. Trajectory attractors for the 3D Navier-Stokes system and some generalizations, *Top. Meth. Nonlin. Anal. J. Julius Schauder Center*. 1996;8:217–243.
20. Chepyzhov VV. , Vishik MI. Evolution equations and their trajectory attractors. *J. Math.Pures Appl.* 1997;76(10):913–964.

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 30.01.2026

Received January 30, 2026

Поступила после рецензирования 20.03.2026

Revised March 20, 2026

Принята к публикации 23.03.2026

Accepted March 23, 2026

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Бекмаганбетов Куаныш Абдрахманович – доктор физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой фундаментальной и прикладной математики, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Казахстанский филиал, г. Астана; Институт математики и математического моделирования, г. Алматы, Казахстан

Чепыжов Владимир Викторович – доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник, Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича РАН, г. Москва, Россия

Чечкин Григорий Александрович – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры дифференциальных уравнений, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, г. Москва, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Kuanysh A. Bekmaganbetov – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Head of the Department of Fundamental and Applied Mathematics, Lomonosov Moscow State University, Kazakhstan Branch, Astana; Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan

Vladimir V. Chepyzhov – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Chief Researcher, Kharkevich Institute for Information Transmission Problems, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

Gregory A. Chechkin – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Professor of the Department of Differential Equations, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

К содержанию