

Теоретические основы задачи нахождения пространственных координат подвижного объекта

Иванова М. С. 

(Статья представлена членом редакционной коллегии Половинкиным И. П.)

Воронежский государственный университет,
Россия, 394018, г. Воронеж, Университетская пл., 1
Marliberty123@gmail.com

Аннотация. В работе рассматривается задача определения пространственных координат подвижного объекта по азимутально-угломерным измерениям в его системе координат относительно трех наземных реперных точек. Использован подход, разбивающий задачу на два этапа: на первом — находится расстояние от реперных точек до подвижного объекта, а на втором — осуществляется трилатерация. Поведение математической модели задачи описывается расположением кривых пересечения тороидальных поверхностей. Сформулированы и доказаны достаточные условия существования и единственности решения задачи. Разработанный метод не требует измерения дальности и глобальной временной синхронизации, что делает его перспективным для применения в условиях деградации или отсутствия спутниковых навигационных сигналов. Результаты подтверждены численным моделированием и могут быть использованы в задачах навигации и 3D-реконструкции.

Ключевые слова: азимутально-угломерный метод, трилатерация, замкнутый тор

Для цитирования: Иванова М.С. Теоретические основы задачи нахождения пространственных координат подвижного объекта. *Прикладная математика & Физика*. 2026;58(2):157–167. DOI 10.52575/2687-0959-2026-58-2-157-167 EDN KYVHR

Original Research

Theoretical Foundations of the Problem of Determining Spatial Coordinates of a Moving Object

Mariia S. Ivanova 

(Article submitted by a member of the editorial board Polovinkin I. P.)

Voronezh State University,
1 Universitetskaya Sq., Voronezh 394018, Russia
Marliberty123@gmail.com

Abstract. The paper deals with the problem of determining the spatial coordinates of a moving object using azimuth–elevation measurements in its local coordinate system relative to three ground-based reference points. The proposed approach splits the problem into two stages: first, the estimation of the distances from the reference points to the moving object; second, the application of trilateration. The behavior of the mathematical model is described via the geometry of intersection curves of toroidal surfaces. Sufficient conditions for the existence and uniqueness of a solution to the problem are formulated and rigorously proved. The developed method does not require range measurements or global time synchronization. This makes it promising for use under conditions of degradation or denial of satellite navigation signals. The theoretical results are validated through numerical simulations and can be applied in navigation and 3D reconstruction tasks.

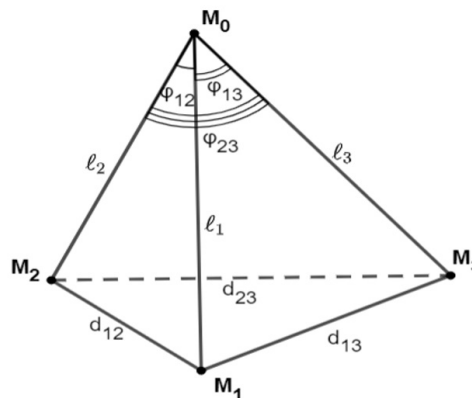
Keywords: Azimuth-Elevation Method, Trilateration, Closed Torus

For citation: Ivanova MS. Theoretical Foundations of the Problem of Determining Spatial Coordinates of a Moving Object. *Applied Mathematics & Physics*. 2026;58(2):157–167. (In Russ.). DOI 10.52575/2687-0959-2026-58-2-157-167 EDN KYVHR

1. Введение. Определение пространственных координат и угловой ориентации подвижных объектов представляет собой ключевую задачу в современных навигационных системах. Традиционные методы, основанные на спутниковых радионавигационных технологиях, используют дальномерно-угломерный принцип, требующий высокой точности временной синхронизации, описываемой общей теорией относительности. Однако в условиях возможного подавления или деградации спутниковых сигналов возникает необходимость разработки альтернативных методов навигации. Одним из таких подходов является азимутально-угломерный метод, который позволяет определять координаты объекта без измерения дальности. Несмотря на значительный вклад научных исследований заслуженного изобретателя России А. Д. Виноградова и его научной группы (Л. А. Минин, С. Н. Ушаков, Е. Ю. Морозов) [1, 2], многие вопросы остаются открытыми. Классические работы М. Н. Маркова [3] и А. И. Куприянова с

А. В. Сахаровым [4] заложили основы многопозиционных радиотехнических систем, однако трёхмерная геометрическая интерпретация задачи на основе тороидальных поверхностей требует дополнительного исследования. В данной работе рассматривается детерминированный подход (число входных данных совпадает с числом выходных) при моделировании задачи нахождения координат и угловой ориентации подвижного объекта с использованием азимутально-углового метода. Основное внимание уделено восполнению теоретических пробелов и повышению корректности алгоритма за счёт поиска условий существования решения при определении координат. В частности, предложен метод анализа кривых пересечения двух торов, образованных вращением семейства окружностей относительно сторон треугольника, что развивает идеи, представленные в [5]. Это позволяет наглядно представить геометрическую схему возникновения всех возможных решений, включая теорему, описывающую достаточные условия существования и единственности решения, сформулированные ранее в [6] и обобщённые в [7]. Подход согласуется с методами инженерной геодезии, где триангуляция и анализ геометрии реперов играют ключевую роль [8].

2. Постановка задачи. В исходной задаче в декартовой системе координат заданы три стационарных источника радиоизлучения (репера), расположенных в точках пространства с известными координатами $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$. Подвижный объект M_0 с неизвестными координатами (x, y, z) осуществляет пеленгование каждого репера, получая три пары угловых измерений в своей системе координат: азимуты α_i (углы в горизонтальной плоскости собственной системы координат подвижного объекта) и углы места ε_i (углы между проекцией приходящего луча в M_0 и горизонтальной плоскостью подвижной системы координат), где $i = 1, 2, 3$ [3].

Рис. 1. Пирамида $M_0M_1M_2M_3$ Fig. 1. Pyramid $M_0M_1M_2M_3$

В работах [1, 2] было предложено разбить решение задачи на отдельные этапы: сначала найти координаты объекта, затем его ориентацию. По трём парам углов азимута и места ищутся три угла ориентации подвижного объекта, находящегося в точке M_0 , а также трёхмерные координаты самой точки, то есть по шести входным параметрам ищутся шесть выходных значений. В настоящей статье рассматривается только первый этап. Он осуществляется переходом от пар углов места и азимута к плоским углам при вершине пирамиды $M_0M_1M_2M_3$ (рис. 1). Геометрическая конфигурация задачи на рис. 1 характеризуется ℓ_i — расстоянием от объекта до i -го репера, d_{ij} — расстоянием между реперами, φ_{ij} — углом между направлениями. Таким образом, в системе координат подвижного объекта известны направляющие векторы $\vec{s}_i$ лучей M_0M_i , определяемые формулами:

$$\vec{s}_i = (\cos \alpha_i \cos \varepsilon_i, \sin \alpha_i \cos \varepsilon_i, \sin \varepsilon_i), \quad i = 1, 2, 3.$$

Косинусы плоских углов φ_{ij} при вершине M_0 тетраэдра $M_0M_1M_2M_3$ задаются скалярными произведениями, то есть

$$\cos \varphi_{ij} = \vec{s}_i \cdot \vec{s}_j = \cos \varepsilon_i \cos \varepsilon_j \cos(\alpha_i - \alpha_j) + \sin \varepsilon_i \sin \varepsilon_j, \quad 1 \leq i < j \leq 3.$$

Система уравнений для поиска расстояний ℓ_i выводится из теоремы косинусов для трёх треугольников:

$$\begin{cases} \ell_1^2 + \ell_2^2 - 2\ell_1\ell_2 \cos \varphi_{12} = d_{12}^2, \\ \ell_1^2 + \ell_3^2 - 2\ell_1\ell_3 \cos \varphi_{13} = d_{13}^2, \\ \ell_2^2 + \ell_3^2 - 2\ell_2\ell_3 \cos \varphi_{23} = d_{23}^2. \end{cases} \quad (1)$$

Замечание 1. Дополнительными условиями задачи являются неотрицательность расстояний $\ell_i \geq 0$ и ограничения на углы $0 \leq \varphi_{ij} \leq \pi$. Ребро ℓ_i может быть равно 0, если M_0 совпадает с одной из вершин

$\triangle M_1 M_2 M_3$. Если M_0 лежит на стороне $\triangle M_1 M_2 M_3$, то один из $\angle \varphi_{ij} = \pi$; если на продолжении стороны – то $\varphi_{ij} = 0$. Перейдём к этапу нахождения координат точки M_0 . Рассмотрим систему уравнений для определения координат $M_0(x, y, z)$ подвижного объекта на основе заданных параметров ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 при условии, что точки $M_i(x_i, y_i, z_i)$, $i = 1, 2, 3$ и не лежат на одной прямой. Итак

$$\begin{cases} (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = \ell_1^2, \\ (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2 = \ell_2^2, \\ (x - x_3)^2 + (y - y_3)^2 + (z - z_3)^2 = \ell_3^2. \end{cases} \quad (2)$$

Если от точек M_i описать сферы с соответствующими радиусами ℓ_i , $i = 1, 2, 3$, то решением системы (2) будет являться точка пересечения этих сфер. Не для каждой тройки неотрицательных чисел ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 система (2) имеет решение. Для определения необходимого и достаточного условия существования решения системы (2) обратимся к геометрической интерпретации задачи, поскольку аналитический подход в общем виде не дает простых критериев и четкого понимания структуры математической модели. Анализ вырожденных случаев, а именно положение точки M_0 в плоскости $M_1 M_2 M_3$ и на сторонах $\triangle M_1 M_2 M_3$, и условий совместности систем уравнений может быть дополнен общими методами линейной алгебры.

Лемма 1. Пусть точки $M_i(x_i, y_i, z_i)$, где $i = 1, 2, 3$, не лежат на одной прямой. Тогда для существования решения системы (2) относительно неизвестных x, y, z необходимо и достаточно либо выполнения системы неравенств

$$|\ell_j - \ell_i| \leq d_{ij} \leq \ell_i + \ell_j, \quad 1 \leq i < j \leq 3, \quad (3)$$

где $d_{ij} = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}$, причём равенство в (3) достигается не более чем в одном из шести неравенств, либо выполнения одной из трёх систем равенств:

$$\begin{cases} \ell_1 = 0, \\ d_{12} = \ell_2, \\ d_{13} = \ell_3, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \ell_2 = 0, \\ d_{12} = \ell_1, \\ d_{23} = \ell_3, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \ell_3 = 0, \\ d_{13} = \ell_1, \\ d_{23} = \ell_2. \end{cases} \quad (4)$$

Доказательство.

Необходимость. Предположим, что система (2) имеет решение $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$. Обозначим расстояния от M_0 до M_i :

$$\ell_i = M_0 M_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Рассмотрим три возможных геометрических случая.

Случай 1. M_0 не лежит ни на одной из сторон $\triangle M_1 M_2 M_3$ (рис. 2).

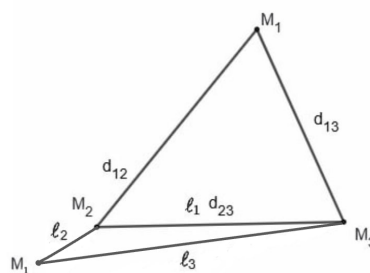


Рис. 2. M_0 вне плоскости $\triangle M_1 M_2 M_3$
Fig. 2. M_0 outside the plane of $\triangle M_1 M_2 M_3$

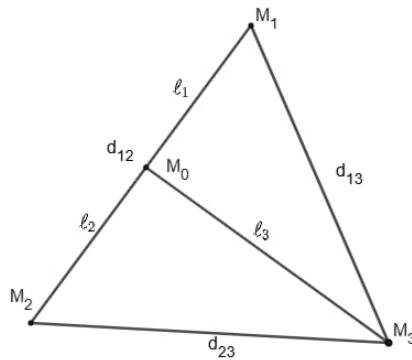
Тогда точки M_0, M_i, M_j образуют невырожденные треугольники для каждой пары $1 \leq i < j \leq 3$. В силу неравенства треугольника выполняются строгие неравенства (3).

Случай 2. Без ограничения общности, пусть $M_0 = M_1$. Тогда

$$\ell_1 = 0, \quad \ell_2 = d_{12}, \quad \ell_3 = d_{13}.$$

Для пары (1, 2) имеем $d_{12} = \ell_1 + \ell_2$, то есть верхняя граница в неравенстве (3) достигается как равенство. Аналогично для пары (1, 3). Для пары (2, 3) неравенство $|\ell_2 - \ell_3| \leq d_{23} \leq \ell_2 + \ell_3$ выполняется, поскольку M_1, M_2, M_3 образуют треугольник. Аналогично для остальных вершин.

Случай 3. M_0 лежит на стороне (рис. 3), например, на отрезке $M_1 M_2$.

Рис. 3. M_0 лежит на стороне $\triangle M_1M_2M_3$ Fig. 3. M_0 lies on the side of $\triangle M_1M_2M_3$

Тогда

$$\ell_1 + \ell_2 = d_{12}, \quad \ell_3 > 0,$$

и треугольники $M_0M_1M_3$ и $M_0M_2M_3$ невырождены. Для пары (1, 2) достигается равенство в верхней границе неравенства (3); для остальных пар — строгие неравенства.

Достаточность. Предположим, что выполнены неравенства (3).

Случай 1. Все неравенства (3) строгие. Тогда существуют четыре треугольника со сторонами $\{\ell_1, \ell_2, d_{12}\}$, $\{\ell_2, \ell_3, d_{23}\}$, $\{\ell_1, \ell_3, d_{13}\}$, $\{d_{12}, d_{13}, d_{23}\}$, из которых можно собрать два тетраэдра (симметричных относительно плоскости $\triangle M_1M_2M_3$) или плоскую фигуру. Их вершины и являются решениями системы (2).

Случай 2. Выполняется одно из равенств в (3). Тройки $\{\ell_1, \ell_2, d_{12}\}$ и т. д. образуют два треугольника и один отрезок. Это соответствует случаю, когда M_0 лежит на стороне основания.

Случай 3. Выполняется одна из систем (2). Тогда достаточно взять $M_0 = M_1$, $M_0 = M_2$ или $M_0 = M_3$ соответственно.

Следствие. Если тройка ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 является решением системы (1) с известными значениями d_{12}, d_{13}, d_{23} и углами $\varphi_{12}, \varphi_{13}, \varphi_{23}$, и существуют точки $M_i(x_i, y_i, z_i)$ такие, что $d_{ij} = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}$, то система (2) имеет хотя бы одно решение.

3. Формулировка результатов.

Предложение 1. Пусть заданы длины сторон d_{12}, d_{13}, d_{23} треугольника $\triangle M_1M_2M_3$ и три угла $\varphi_{12}, \varphi_{13}, \varphi_{23}$ при вершине M_0 . Тогда для существования решения системы (1) необходимо выполнение либо следующих условий:

$$\begin{cases} \varphi_{12} \leq \varphi_{13} + \varphi_{23}, \\ \varphi_{13} \leq \varphi_{12} + \varphi_{23}, \\ \varphi_{23} \leq \varphi_{12} + \varphi_{13}, \\ \varphi_{12} + \varphi_{13} + \varphi_{23} \leq 2\pi, \end{cases} \quad (5)$$

либо альтернативного условия:

$$\begin{cases} \varphi_{12} = \angle M_1M_3M_2, \\ \varphi_{13} = \angle M_1M_2M_3, \\ \varphi_{23} = \angle M_2M_1M_3. \end{cases}$$

Замечание 3. Предложение 1 является необходимым, но не достаточным условием, что демонстрируется следующим примером.

Пример. Согласно Предложению 1 угол φ_{23} может принимать любые значения от 0 до π . Рассмотрим частный случай, когда $\varphi_{12} = \varphi_{13} = \frac{\pi}{2}$. Система (1) принимает вид:

$$\begin{cases} \ell_1^2 + \ell_2^2 = 1, \\ \ell_1^2 + \ell_3^2 = 1, \\ \ell_2^2 - 2\ell_2\ell_3 \cos \varphi_{23} + \ell_3^2 = 1. \end{cases}$$

Из первых двух уравнений следует $\ell_2 = \ell_3$ и $\ell_2^2 \leq 1$. Тогда система сводится к:

$$\begin{cases} 2\ell_2^2(1 - \cos \varphi_{23}) = 1, \\ \ell_2^2 \leq 1. \end{cases}$$

Отсюда получаем ограничение на угол φ_{23} :

$$\frac{\pi}{3} \leq \varphi_{23} \leq \pi.$$

Теорема 1. Пусть заданы длины сторон d_{12}, d_{13}, d_{23} треугольника $\triangle M_1 M_2 M_3$ и три угла $\varphi_{12}, \varphi_{13}, \varphi_{23}$ при вершине M_0 . Тогда достаточным условием существования и единственности решения системы (2) является выполнение следующих неравенств:

$$\begin{cases} \frac{\pi}{2} < \varphi_{12} < \pi, \\ \frac{\pi}{2} < \varphi_{13} < \pi, \\ \angle M_1 M_2 M_3 \leq \varphi_{23} \leq 2\pi - (\varphi_{12} + \varphi_{13}). \end{cases}$$

Доказательство. Для заданных углов φ_{12} и φ_{13} необходимо определить такие конфигурации, при которых система (2) имеет решения. Рассмотрим случай, когда подвижный объект находится в вершине M_1 , то есть M_1 совпадает с точкой M_0 . В этом случае система (2) имеет тривиальное решение:

$$\ell_1 = 0, \quad \ell_2 = d_{12}, \quad \ell_3 = d_{13}.$$

В плоскости $\triangle M_1 M_2 M_3$ множества точек, из которых ребро $M_1 M_2$ видно под углом φ_{12} , а ребро $M_1 M_3$ — под углом φ_{13} , образуют соответственно две меньшие дуги окружностей (так как оба угла тупые):

$$\smile M_1 M_2 \quad \text{и} \quad \smile M_1 M_3,$$

описанных вокруг треугольников $\triangle M_0 M_1 M_2$ и $\triangle M_0 M_1 M_3$ с радиусами:

$$R_{12} = \frac{d_{12}}{2 \sin \varphi_{12}}, \quad R_{13} = \frac{d_{13}}{2 \sin \varphi_{13}}.$$

Пусть M' — точка пересечения этих дуг. Она будет единственной, если выполняется условие:

$$\angle M_2 M_1 M_3 = 2\pi - (\varphi_{12} + \varphi_{13}).$$

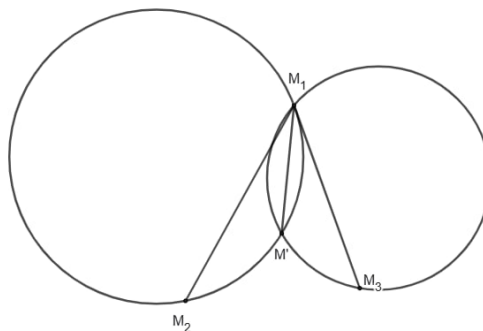


Рис. 4. Условия пересечения двух меньших дуг в двух точках
Fig. 4. Conditions for intersection of two minor arcs at two points

Для анализа случаев, когда дуги пересекаются в двух точках, рассмотрим рис. 4. В этом случае при:

$$\begin{cases} \angle M_2 M_1 M' < \frac{1}{2} \smile M_2 M' M_1, \\ \angle M_3 M_1 M' < \frac{1}{2} \smile M_3 M' M_1, \end{cases}$$

где $\smile M_2 M' M_1 = \pi - \varphi_{12}$ и $\smile M_3 M' M_1 = \pi - \varphi_{13}$, окружности могут иметь не более двух точек пересечения. Следовательно:

$$\angle M_2 M_1 M_3 < 2\pi - \varphi_{12} - \varphi_{13}.$$

Третья точка пересечения невозможна, так как меньшие дуги лежат внутри областей, ограниченных большими дугами, которые не пересекаются. Кроме того, выполняются неравенства:

$$M_1 M' < M_1 M_2 \quad \text{и} \quad M_1 M' < M_1 M_3.$$

Для системы (2) решения существуют в точках M' и M_1 . В точке M_1 решение возникает при $\angle M_3 M_1 M_2$, а в точке M' — при $\angle M_3 M' M_2$. По формулам (6) с учетом, что длины ребер неотрицательные числа, а углы φ_{12} и φ_{13} тупые:

$$\begin{aligned} \ell_2 &= \ell_1 \cos \varphi_{12} + \sqrt{d_{12}^2 - \ell_1^2 \sin^2 \varphi_{12}}, \\ \ell_3 &= \ell_1 \cos \varphi_{13} + \sqrt{d_{13}^2 - \ell_1^2 \sin^2 \varphi_{13}}. \end{aligned}$$

Функции $\ell_2(\ell_1)$ и $\ell_3(\ell_1)$ непрерывны на отрезке $\ell_1 \in [0, M_1 M']$, где:

$$\ell_1 \leq \min(2R_{12}, 2R_{13}).$$

Далее введём функцию:

$$f(\ell_1) = \frac{\ell_2^2(\ell_1) + \ell_3^2(\ell_1) - d_{23}^2}{2\ell_2(\ell_1)\ell_3(\ell_1)},$$

которая соответствует $\cos \varphi_{23}$. Функция $f(\ell_1)$ непрерывна на отрезке $[0, M_1 M']$ и принимает все значения между $f(0)$ и $f(M_1 M')$. Согласно теореме Больцано – Коши, для любого φ_{23} , удовлетворяющего условиям теоремы, существует решение ℓ_1 , при котором $f(\ell_1) = \cos \varphi_{23}$. Таким образом, утверждение теоремы доказано.

Следствие о единственности. Если в условиях теоремы 1 все три угла $\varphi_{12}, \varphi_{13}, \varphi_{23}$ являются тупыми и выполняются дополнительные ограничения:

$$\begin{cases} \varphi_{12} \neq \angle M_1 M' M_2, \\ \varphi_{13} \neq \angle M_1 M' M_3, \end{cases}$$

то система (2) имеет единственное решение.

Доказательство. Производные функций $\ell_2(\ell_1)$ и $\ell_3(\ell_1)$:

$$\begin{aligned} \ell_2'(\ell_1) &= \cos \varphi_{12} - \frac{\ell_1 \sin^2 \varphi_{12}}{\sqrt{d_{12}^2 - \ell_1^2 \sin^2 \varphi_{12}}}, \\ \ell_3'(\ell_1) &= \cos \varphi_{13} - \frac{\ell_1 \sin^2 \varphi_{13}}{\sqrt{d_{13}^2 - \ell_1^2 \sin^2 \varphi_{13}}}, \end{aligned}$$

являются отрицательными для тупых углов $\varphi_{12}, \varphi_{13}$, что свидетельствует о монотонном убывании ℓ_2 и ℓ_3 по ℓ_1 . Следовательно, выражение $\ell_2^2 - 2\ell_2 \ell_3 \cos \varphi_{23} + \ell_3^2$ также монотонно убывает, что гарантирует единственность решения.

4. Геометрическая интерпретация. Треугольная пирамида $M_0 M_1 M_2 M_3$ характеризуется основанием $M_1 M_2 M_3$ и вершиной M_0 . Для каждой боковой грани $M_0 M_i M_j$ ($1 \leq i < j \leq 3$) известны длина стороны d_{ij} и $\angle \varphi_{ij}$, что позволяет определить радиус R_{ij} описанной окружности около $\triangle M_0 M_i M_j$. Если вокруг ребра $M_i M_j$ описать множество окружностей радиуса $R_{ij} = \frac{d_{ij}}{2 \sin \varphi_{ij}}$ с центрами, находящимися в плоскости перпендикулярной ребру $M_i M_j$, на окружности с радиусом $\sqrt{R_{ij}^2 - d_{ij}^2/4}$ и центром в середине $M_i M_j$, то образуется поверхность вращения — замкнутый тор. Он отличается от стандартного тора отсутствием отверстия в центре.

Множество точек, из которых ребро $M_i M_j$ видно под углом φ_{ij} , в случае острого угла образует внешнюю часть замкнутого тора, тупого — внутреннюю, а если φ_{ij} прямой, то — сферу, в которую вырождается замкнутый тор. Так как в основании пирамиды $M_0 M_1 M_2 M_3$ лежат три ребра, то положение точки M_0 можно определить по пересечению трех тороидальных поверхностей, описанных выше. Это позволяет сформулировать следующие ограничения на искомые длины ребер:

$$\begin{cases} \ell_1 \leq \min(2R_{12}, 2R_{13}), \\ \ell_2 \leq \min(2R_{12}, 2R_{23}), \\ \ell_3 \leq \min(2R_{13}, 2R_{23}). \end{cases}$$

Из системы (1) выразим рёбра через ℓ_1 :

$$\ell_2 = \ell_1 \cos \varphi_{12} \pm \sqrt{d_{12}^2 - \ell_1^2 \sin^2 \varphi_{12}}, \quad \ell_3 = \ell_1 \cos \varphi_{13} \pm \sqrt{d_{13}^2 - \ell_1^2 \sin^2 \varphi_{13}}. \quad (6)$$

Ограничения на ℓ_1 :

$$\ell_1 \leq \min \left(\frac{d_{12}}{\sin \varphi_{12}}, \frac{d_{13}}{\sin \varphi_{13}} \right).$$

Эти ограничения позволяют проверять корректность входных данных при численных экспериментах, как это сделано в [7]. Необходимые тригонометрические тождества и формулы для анализа геометрии поверхностей можно найти в справочнике Г. Корна и Т. Корна [10].

Анализ условий о существовании решений систем (1) и (2) по известным углам $\varphi_{12}, \varphi_{13}$ удобно проводить геометрическим образом. Строится множество точек, из которого сторона $M_1 M_2$ видна под углом φ_{12} , а $M_1 M_3$ — под углом φ_{13} соответственно. Как было указано в первом абзаце текущего пункта,

это множество может быть описано как кривая пересечения частей двух торов. Кривая пересечения определяет возможные положения точки M_0 при неизвестном третьем угле φ_{23} . Это дает наглядный инструмент для изучения системы (2), впервые предложенный в [5]. В рамках настоящей статьи приведены примеры только для равностороннего $\triangle M_1 M_2 M_3$, так как это наиболее используемый на практике вариант. Для анализа количества и характера решений проведено численное моделирование, результаты которого представлены на рис. 5–рис. 10.

На рис. 5 изображена кривая пересечения двух торов при $\varphi_{13} = \varphi_{12} = 2\pi/3$. При пересечении этой кривой тороидальной поверхностью, образованной вращением семейства окружностей вокруг ребра $M_2 M_3$, существует до одного решения у системы (1), и до двух решений у (2) (выше плоскости треугольника и ниже). рис. 5 иллюстрирует общий случай, когда углы $\varphi_{12}, \varphi_{13}$ при вершине M_0 — тупые. Эти наблюдения позволили сформулировать достаточные условия существования и единственности решения в п. 3.

В случае рис. 6–рис. 7 структура возможных положений точки M_0 существенно усложняется и соответствует двум замкнутым кривым. Кривые пересечения пар торов допускают до восьми возможных положений точки M_0 . Наличие нескольких решений свидетельствует о принципиальной неоднозначности обратной задачи в такой геометрической конфигурации.

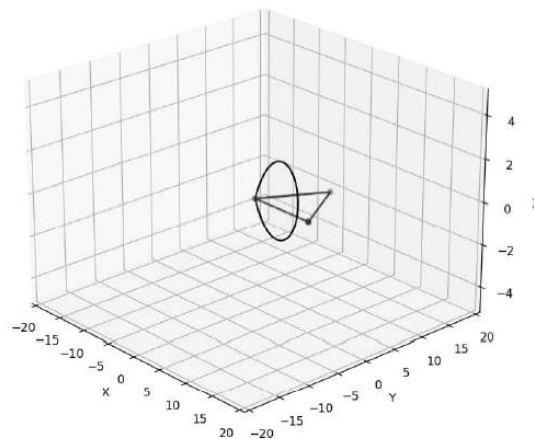


Рис. 5. Кривая пересечения двух торов в треугольнике с углами $\varphi_{13} = \varphi_{12} = 2\pi/3$

Fig. 5. Intersection curve of two torus in a triangle with angles $\varphi_{13} = \varphi_{12} = 2\pi/3$

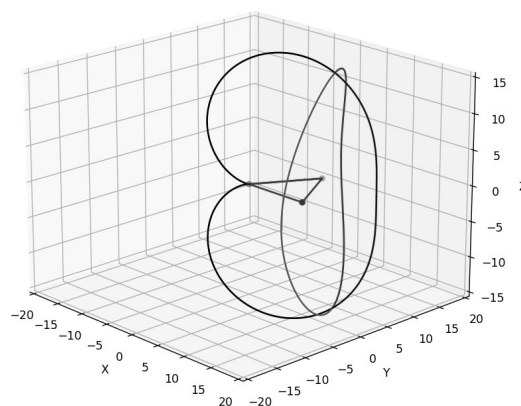


Рис. 6. Кривая пересечения двух торов в треугольнике с углами $\varphi_{13} = \varphi_{12} = \pi/6$

Fig. 6. The intersection curve of two torus in a triangle with angles $\varphi_{13} = \varphi_{12} = \pi/6$

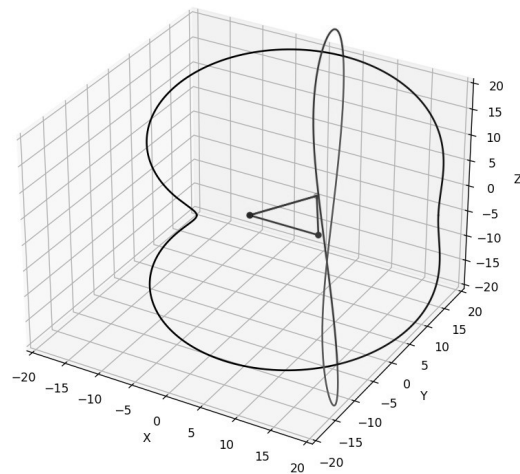


Рис. 7. Кривая пересечения двух торов в треугольнике с углами $\varphi_{13} = \varphi_{12} = \pi/10$

Fig. 7. The intersection curve of two torus in a triangle with angles $\varphi_{13} = \varphi_{12} = \pi/10$

В случае рис. 8 углы $\varphi_{12}, \varphi_{13}$ при вершине M_0 — прямые, кривая пересечения двух торов превращается в окружность.

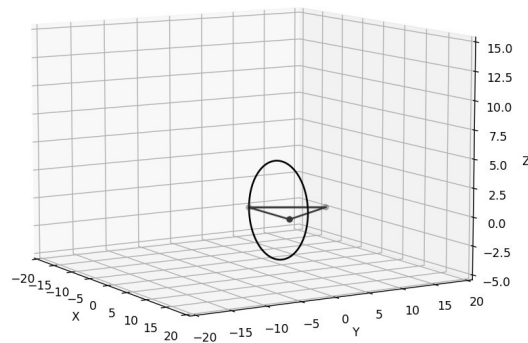


Рис. 8. Кривая пересечения двух торов в треугольнике с углами $\varphi_{13} = \varphi_{12} = \pi/2$

Fig. 8. The intersection curve of two torus in a triangle with angles $\varphi_{13} = \varphi_{12} = \pi/2$

На рис. 9 представлено, что не всегда кривая пересечения двух тороидальных поверхностей является замкнутой. На рис. 10 кривая не является плоской.

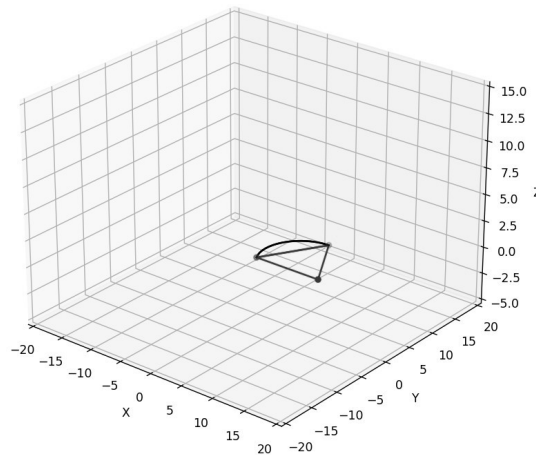
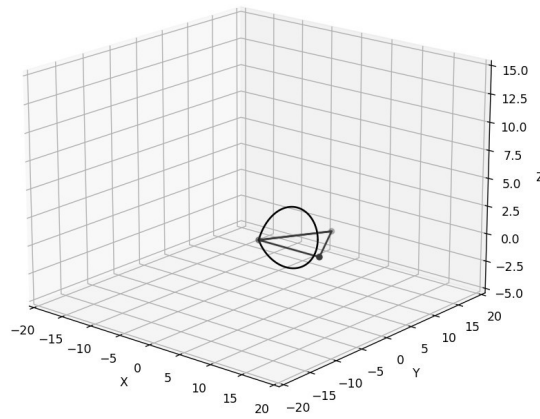


Рис. 9. Кривая пересечения двух торов в треугольнике с углами $\varphi_{12} = 2\pi/3, \varphi_{13} = \pi/3$

Fig. 9. The intersection curve of two torus in a triangle with angles $\varphi_{12} = 2\pi/3, \varphi_{13} = \pi/3$

Рис. 10. Кривая пересечения двух торов в треугольнике с углами $\varphi_{12} = \pi/2$, $\varphi_{13} = 2\pi/3$ Fig. 10. The intersection curve of two torus in a triangle with angles $\varphi_{12} = \pi/2$, $\varphi_{13} = 2\pi/3$

Для исследования поведения решений задачи о поиске координат подвижного объекта по трем углам φ_{13} , φ_{12} , φ_{23} и известным положениям точек M_1 , M_2 , M_3 был создан алгоритм и разработана программа. С помощью нее, на первом шаге по косинусам трех углов φ_{13} , φ_{12} , φ_{23} ищется решение системы (1) методом Ньютона. На втором шаге по известным длинам ребер ℓ_1 , ℓ_2 , ℓ_3 и координатам точек M_1 , M_2 , M_3 ищется решение системы (2).

На рис. 11(а, б) построен $\triangle M_1 M_2 M_3$ с координатами вершин $M_1(0, 0, 0)$, $M_2(1, \sqrt{3}/3, 0)$, $M_3(2, 0, 0)$. Моделируется последовательность точек $\{M_0^k\}$ с координатами $(1, \sqrt{3}/3, 0.1 \cdot k)$. На левом рисунке $k = 0, \dots, 9$, а на правом — $k = 0, \dots, 29$. Для каждой точки из $\{M_0^k\}$ ищутся косинусы трех углов φ_{13} , φ_{12} , φ_{23} , затем разработанная программа на основе этих данных ищет возможные положения точки M_0 . В силу симметрии задачи относительно плоскости $\triangle M_1 M_2 M_3$ решения системы (2) отображаются и сверху, и снизу. При численном моделировании было замечено, что пока косинусы углов при вершине пирамиды $M_0 M_1 M_2 M_3$ остаются меньше $1/2$, задача имеет два решения, как показано на рис. 11(а). При прохождении этого значения возникает до 8 решений системы (2), что видно на рис. 11(б).

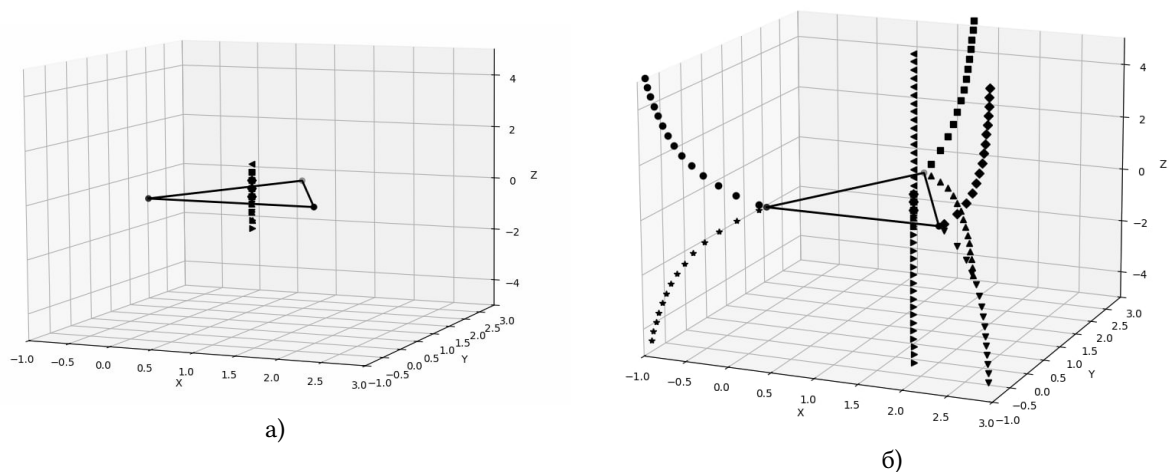


Рис. 11. Возможные положения точек при одинаковых входных данных

Fig. 11. Possible positions of points with the same input data

Метод Ньютона, используемый для решения системы (1), особенно в случае неоднозначности решения чувствителен к выбору стартовой точки алгоритма. Для начального приближения выбирается расстояние от точки пересечения медиан $\triangle M_1 M_2 M_3$ до его вершин. В случае, когда решений несколько, дополнительно выбираются последовательно три набора расстояний от каждой из вершин M_1 , M_2 , M_3 до остальных трех вершин этого же треугольника. Такой «наивный» подход, в общем случае, не всегда дает все возможные решения системы (1). Для поиска всех решений этой системы помогает геометрическая интерпретация. В случае, если не найдены все решения, то есть их меньше четырех, дополнительно запускается метод Ньютона, где в качестве начального приближения выбирается расстояние от точки на винтовой траектории цилиндра с основанием, вписанной в $\triangle M_1 M_2 M_3$ окружностью, до вершин этого треугольника. «Истинным» решением является положение точки, проекция которой падает внутрь

$\Delta M_1 M_2 M_3$. Но при уменьшении углов $\varphi_{13}, \varphi_{12}, \varphi_{23}$, начиная с некоторого момента, проекции всех решений попадают в плоскость $\Delta M_1 M_2 M_3$.

5. Заключение. Проведенное исследование позволило разработать и теоретически обосновать новый метод определения пространственных координат подвижного объекта, основанный на азимутально-угломестных измерениях относительно системы наземных реперных точек. Принципиальное отличие предложенного подхода от традиционных спутниковых систем навигации заключается в исключении требования глобальной временной синхронизации, что открывает перспективы для его применения в условиях недоступности или преднамеренного подавления сигналов глобальных навигационных спутниковых систем. Основным научным результатом работы является построение комплексной математической модели задачи. В рамках исследования была проанализирована проблема неоднозначности решений. Главным стало доказательство теоремы, устанавливающей условия существования и единственности решения системы уравнений для произвольной конфигурации реперных точек, впервые сформулированной в [6] и обобщенной в [7]. Геометрическая интерпретация задачи через построение торов в пространстве решений предоставила аналитический инструмент, позволивший визуализировать и формализовать условия возникновения нескольких решений [5]. Опираясь на доказанную Теорему 1 о существовании решений, удалось повысить устойчивость алгоритма, предложенного в [1, 2]. Благодаря знанию о числе всех возможных положений искомой точки, разработанная программа численно обнаружила их все, несмотря на использование приближенных численных методов. Метод представляет значительный интерес для приложений в робототехнике, автономной навигации и 3D-реконструкции, где требуется альтернативная или резервная система позиционирования, особенно в условиях, рассмотренных в работах [1, 2]. Подход может быть интегрирован в гибридные навигационные системы, сочетающие угловые и дальномерные данные, как описано в работах по основам навигации [12].

Список литературы

1. Виноградов А.Д., Минин Л.А., Морозов Е.Ю., Ушаков С.Н. Детерминированный подход к решению задачи определения координат и угловой ориентации бортовой пеленгаторной антенны по результатам радиопеленгования радиоориентиров. Информационно-измерительные и управляющие системы. 2019;17(2):5-23.
2. Виноградов А.Д., Минин Л.А., Морозов Е.Ю., Ушаков С.Н. Анализ детерминированного подхода к определению координат и угловой ориентации бортовых пеленгаторных антенн на основе экспериментальных данных. Сборник трудов XXVI Международной научно-технической конференции «Радиолокация, навигация, связь». 2020;4:150-155.
3. Марков М.Н. Многопозиционные радиотехнические системы. М.: Советское радио; 1972. 288 с.
4. Куприянов А.И., Сахаров А.В. Теоретические основы радиотехнических систем определения местоположения. Учебное пособие. М.: МГТУ им. Н.Э.Баумана; 2010. 328 с.
5. Иванова М.С. Алгоритм построения линий пересечения закрытых торов, образованных вращением двух семейств окружностей около сторон треугольника. Сборник VIII-ой международной молодежной научной школы «Актуальные направления математического анализа и смежные вопросы», посвящённой 100-летию Н.Ф.Неклюдовой. 2024;14:68-70.
6. Иванова М.С., Ушаков С.Н. Достаточные условия существования решения в задаче определения местоположения подвижного объекта по трем реперным точкам при помощи азимутально-угломестного метода. Сборник материалов международной Воронежской весенней математической школы «Современные методы теории краевых задач. Понtryгинские чтения». 2024:148-150.
7. Иванова М.С., Минин Л.А., Ушаков С.Н. Об условиях существования решения в задаче определения местоположения подвижного объекта по трем реперным точкам при помощи азимутально-угломестного метода. Сборник трудов XXX Международной научно-технической конференции «Радиолокация, навигация, связь». 2024;2:442-449.
8. Шеховцов А.Н. Инженерная геодезия. Ростов-на-Дону: Феникс; 2016. 448 с.
9. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. 5-е изд. М.: Физматлит; 2010. 560 с.
10. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука; 1974. 832 с.
11. Лейк А. Спутниковая геодезия. Пер. с англ. Под ред. В.В.Болотина. М.: Маркетинг; 2003. 464 с.
12. Голован А.А., Паркин П.А. Основы навигации и навигационные системы. М.: МГУ; 2018. 272 с.

References

1. Vinogradov AD, Minin LA, Morozov EYu, Ushakov SN. A deterministic approach to solving the problem of determining the position and angular orientation of an onboard direction-finding antenna based on radio direction finding of radio beacons. Information-Measuring and Control Systems. 2019;17(2):5-23. (In Russ.)
2. Vinogradov AD, Minin LA, Morozov EYu, Ushakov SN. Analysis of a deterministic approach to determining the position and angular orientation of onboard direction-finding antennas based on experimental data. Proceedings of the XXVI International Scientific and Technical Conference "Radar, Navigation, and Communications". 2020;4:150-155. (In Russ.)

3. Markov MN. Multistatic Radio Engineering Systems. M.: Soviet Radio; 1972. 288 p.(In Russ.)
4. Kupriyanov AI, Sakharov AV. Theoretical Foundations of Radio Engineering Positioning Systems. M.: Bauman Moscow State Technical University; 2010. 328 p. (In Russ.)
5. Ivanova MS. An algorithm for constructing intersection curves of closed tori formed by rotating two families of circles about the sides of a triangle. Proceedings of the VIII International Youth Scientific School "Current Trends in Mathematical Analysis and Related Topics" Dedicated to the 100th Anniversary of N.F.Neklyudova. 2024;14:68-70.(In Russ.)
6. Ivanova MS, Ushakov SN. Sufficient conditions for the existence of a solution in the problem of determining the position of a moving object using three reference points by the azimuth-elevation method. Proceedings of the International Voronezh Spring Mathematical School "Modern Methods in Boundary Value Problem Theory. Pontryagin Readings". 2024;148-150.(In Russ.)
7. Ivanova MS, Minin LA, Ushakov SN. On the conditions for the existence of a solution in the problem of determining the position of a moving object using three reference points by the azimuth-elevation method. Proceedings of the XXX International Scientific and Technical Conference "Radar, Navigation, and Communications". 2024;2:442-449. (In Russ.)
8. Shekhovtsov AN. Engineering Geodesy. Rostov-on-Don: Fenix; 2016. 448 p. (In Russ.)
9. Gantmacher FR. The Theory of Matrices. 5th ed. M.: Fizmatlit; 2010. 560 p. (In Russ.)
10. Korn G, Korn T. Mathematical Handbook for Scientists and Engineers. M.: Nauka; 1974. 832 p. (In Russ.)
11. Leick A. GPS Satellite Surveying. Translated from English. Edited by V.V.Bolotin. M.: Marketing; 2003. 464 p. (In Russ.)
12. Golovan AA, Parkin PA. Fundamentals of Navigation and Navigation Systems. M.: Lomonosov Moscow State University; 2018. 272 p. (In Russ.)

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 23.02.2026

Поступила после рецензирования 15.04.2026

Принята к публикации 24.04.2026

Received February 23, 2026

Revised April 15, 2026

Accepted April 24, 2026

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Иванова Мария Сергеевна – аспирантка, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Mariia S. Ivanova – Graduate Student, Voronezh State University, Voronezh, Russia

[К содержанию](#)