

ФИЗИКА. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ PHYSICS. MATHEMATICAL MODELING

УДК 519.218

MSC 60G50

Оригинальное исследование

DOI 10.52575/2687-0959-2026-58-2-183-194

EDN DXVMBI

Модель случайного блуждания с сильной памятью

Зенюк Д. А. 

(Статья представлена членом редакционной коллегии Вирченко Ю. П.)

Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН,

Россия, 125047, г. Москва, Миусская пл., д. 4

eldrich@yandex.ru

Аннотация. В статье рассматривается случайное блуждание, в котором стандартный диффузионный механизм конкурирует со случайным возвратом к предыдущим значениям. Предложен полуаналитический подход к отысканию характеристических функций введенного процесса. Для случая равномерного распределения сдвигов во времени получены точные выражения для моментов первых двух порядков, а также установлено предельное распределение процесса. Для усеченного геометрического распределения найдены асимптотические оценки моментов. Для еще двух рассмотренных распределений, где получение даже таких асимптотических оценок затруднено, приведены результаты вычислительного эксперимента. На примере биномиального распределения показано, что медленно убывающие распределения сдвигов не обязательно приводят к формированию степенной асимптотики дисперсии, которая характерна для аномальной диффузии.

Ключевые слова: случайные блуждания, немарковские процессы

Для цитирования: Зенюк Д.А. Модель случайного блуждания с сильной памятью. *Прикладная математика & Физика*. 2026;58(2):183–194. DOI 10.52575/2687-0959-2026-58-2-183-194 EDN DXVMBI

Original Research

A Random Walk with Strong Memory

Dmitry A. Zenyuk 

Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences,

4 Miusskaya Sq., Moscow 125047, Russia

eldrich@yandex.ru

Abstract. In this paper we study a particular random walk model where the walker can randomly revert to its previous positions. We propose a general semi-analytical approach to the calculation of the characteristic functions of the process. It is shown that under the uniform distribution of lags equations for the moments of the first two orders can be solved explicitly and the process itself has the limiting standard normal distribution after normalization. If the lags have exponential distribution with a small base, only some asymptotical estimations are available for the moments. Under other studied lag distributions, which do not allow even for such simple asymptotical analysis, direct numerical simulations have been performed. The study shows that the lag distribution with heavy tails and divergent expectation does not necessarily imply that the dispersion has power-law asymptotics, which is typical of anomalous diffusion.

Keywords: Random Walks, Non-markovian Processes

For citation: Zenyuk DA. A Random Walk with Strong Memory. *Applied Mathematics & Physics*. 2026;58(2):183–194. (In Russ.). DOI 10.52575/2687-0959-2026-58-2-183-194 EDN DXVMBI

1. Введение. Известно несколько классов стохастических немарковских процессов, которые характеризуются сильной зависимостью от всей предыстории. Например, к ним относятся случайные блуждания без самопересечений. В простейшем случае это случайное блуждание на двумерной решетке, в котором запрещено занимать положения, которые ранее уже посещались. Здесь зависимость от предыстории процесса является неявной и связана с сокращением допустимых будущих состояний после каждого шага. Несмотря на достаточно простую формулировку, полное описание вероятностных и комбинаторных свойств этих процессов остается все еще нерешенной задачей. Хорошо разработана теория процессов с дальними зависимостями (*long-range dependencies*, LRD), см. [1, 2]. Изначально характеристическое свойство, выделяющее этот класс, было связано с асимптотическим поведением дисперсии или поведением спектральной плотности в окрестности нуля. Позже эти подходы были обобщены на случай процессов, у

которых вторые моменты расходятся. Но даже в современной трактовке LRD-процессы должны быть стационарными, хотя бы в широком смысле, что ограничивает область применимости этой теории.

Более важный с точки зрения дальнейшего изложения пример стохастического процесса с памятью известен под названием «слоновье» случайного блуждания (*elephant random walk*, ERW). Модель была предложена в [3] и на сегодняшний день изучена достаточно подробно, см. [4] и цитированную там литературу. ERW стала первой моделью, допускающей аналитическое решение, на которой удалось наглядно продемонстрировать переход к аномальной диффузии. Аномальные диффузионные режимы в последние десятилетия привлекают большой интерес, поскольку считаются более адекватными для описания многих физико-химических процессов и позволяют более точно воспроизводить экспериментальные данные, см., например, обзор [5].

ERW конструируется следующим образом:

$$X_{n+1} = X_n + \eta_{n+1}, \quad X_0 = 0. \quad (1)$$

На первом шаге приращение принимает значения ± 1 , причем $\mathbb{P}(\eta_0 = 1) = s$. На каждом последующем шаге реализуется действие одного из двух стохастических механизмов: либо с вероятностью $1-p$ разыгрывается обычное случайное блуждание, когда значение может измениться на единицу с равными вероятностями, либо с вероятностью p наудачу выбирается и повторяется одно из предыдущих приращений. Поэтому для приращений процесса справедливо представление

$$\eta_{n+1} = \epsilon_{n+1}\xi_{n+1} + (1 - \epsilon_{n+1})\eta_{U_{n+1}},$$

где ϵ_n — бинарная случайная величина с $\mathbb{P}(\epsilon_n = 0) = p$, ξ_n — случайная величина с симметричным распределением Радемахера, т. е. $\mathbb{P}(\xi_n = 1) = \mathbb{P}(\xi_n = -1) = 1/2$, а U_{n+1} — дискретная случайная величина с равномерным распределением на $\{1, \dots, n\}$. Последовательности случайных величин $\{\epsilon_n\}$, $\{\xi_n\}$ и $\{U_n\}$ независимы в совокупности, а также независимы друг от друга. Заметим, что оригинальная модель ERW выглядела несколько иначе, но в [6] было продемонстрировано, что указанная выше конструкция ей стохастически эквивалентна. Дисперсия X_n имеет вид

$$D[X_n] = \frac{n}{2p-1} \left[\frac{\Gamma(n+2p)}{\Gamma(2p)\Gamma(n+1)} - 1 \right] - \left[\frac{(2s-1)\Gamma(n+p)}{\Gamma(p+1)\Gamma(n)} \right]^2.$$

Значение $p = 1/2$ является критическим: если $p < 1/2$, то дисперсия растет асимптотически линейно, так же, как и для обычного случайного блуждания, но для $p > 1/2$ при больших n выполняется $D[X_n] \sim n^{2p}$, что характерно для супердиффузионных режимов. В [7] эта модель была расширена за счет возможности с некоторой вероятностью сохранить текущую позицию на каждом шаге, что позволило получить и субдиффузионный режим, когда $D[X_n] \sim n^\gamma$ с $\gamma < 1$.

В [8], среди прочего, был рассмотрен стохастический процесс, для которого случайно выбранные прошлые значения явным образом определяют его значения на каждом шаге:

$$X_{n+1} = X_n + X_{U_n}, \quad X_0 = 1,$$

где U_n имеет равномерное распределение на $\{0, \dots, n\}$. Затем в [9] были получены точные выражения для первых двух начальных моментов этого процесса, а также продемонстрировано, что эти моменты имеют логарифмическую асимптотику. Однако сразу после публикации этих двух исследований в 1969 г. модель была забыта почти на полвека. Лишь в начале 2000-х гг. появилась серия работ, где изучались другие свойства этого процесса и обсуждались некоторые другие модели, построенные по тому же принципу — их реферативный обзор можно найти в [10].

Если использовать терминологию обучения с подкреплением, то значения случайного блуждания можно считать состояниями (*states*), а приращения — решениями (*actions*). С этой точки зрения ERW описывает поведение актора, который может случайным образом повторять ранее принятые решения. Но возможен и другой подход, когда память ассоциирована не с решениями, а с внутренними состояниями актора, подобно тому как это было сделано в [8]. Можно предложить разные прикладные задачи, в которых тот или иной механизм является более адекватным исходя из специфики предметной области. Так, при моделировании социокультурных процессов (например, динамики и поляризации мнений в сообществах) память о решениях кажется более подходящей, поскольку изменение мнения важного для нас человека с большей вероятностью приведет к изменению нашей собственной позиции. А при работе с моделями популяционной динамики и демографии, напротив, подход с припоминанием состояний представляется более удачным.

Настоящая работа посвящена изучению модели, максимально приближенной к ERW, но использующей второй механизм памяти — с припоминанием прошлых состояний. Понятно, что между двумя такими моделями есть существенные математические отличия: распределения приращений ERW-процесса всегда имеют одинаковый носитель, а для процесса с припоминанием состояний приращения формально

ограничены лишь предшествующими экстремальными значениями самого процесса, поэтому его поведение должно быть менее регулярным, чем ERW. Помимо упомянутых выше, необходимо отметить еще несколько работ, где возникали конструкции, тесно связанные с концепцией припоминания состояний. Так, в [11] рассматривались процессы, названные случайно-возвратными (*occasionally reverting processes*). Исследованная там модель очень похожа на ту, что будет рассмотрена здесь, и некоторые их результаты будут непосредственно нами использованы. Однако там рассматривалось только равномерное распределение величин U_n , определяющих действие механизма памяти. Еще один дискретный стохастический процесс, порождаемый конкуренцией диффузии и случайного припоминания, был рассмотрен в [12] — там он возникает в результате дискретизации одного уравнения с производными нецелого порядка.

2. Модель и ее общие свойства. Будем рассматривать следующий случайный процесс с дискретным временем:

$$X_{n+1} = \epsilon_{n+1} (X_n + \xi_{n+1}) + (1 - \epsilon_{n+1}) X_{U_n}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2)$$

Здесь ϵ_n — независимые в совокупности случайные величины с распределением Бернулли, такие что $\mathbb{P}(\epsilon_n = 1) = p$, ξ_n — независимые в совокупности дискретные случайные величины с конечными математическим ожиданием μ и дисперсией σ^2 , а U_n — независимые в совокупности дискретные случайные величины с носителем $\{0, 1, \dots, n\}$. Все три порождающие последовательности также независимы друг от друга. Начальное значение считается заданной дискретной случайной величиной X_0 , возможно вырожденной, которая независима от $\{\epsilon_n\}$, $\{\xi_n\}$ и $\{U_n\}$. Не ограничивая общности рассмотрения, будем всюду далее считать $X_0 = 0$. Распределения ξ_n и U_n являются свободными параметрами.

Случайный процесс (2) формируется конкуренцией двух базовых механизмов: диффузионного и эредитарного. Диффузия здесь принимает вид обычного случайного блуждания с шагами ξ_n . Механизм памяти реализован как явное возвращение к одному из ранее принимавшихся значений. Параметр p определяет удельную значимость диффузионного механизма. На каждом шаге процесса реализуется действие лишь одного из этих механизмов. В этом заключается основное отличие от модели из [11] — там рассматривался процесс, который в принятых нами обозначениях имеет вид $V_n = \epsilon_n n + (1 - \epsilon_n) U_n$, $X_{n+1} = X_{V_n} + \xi_{n+1}$. Другими словами, диффузионное смещение там прибавляется всегда, даже если действует эредитарный механизм.

Мы будем рассматривать лишь некоторое подмножество всех возможных распределений лагов, которое можно задать в виде

$$\mathbb{P}(U_n = s) = \frac{u_s}{w_n}, \quad w_n = \sum_{s=0}^n u_s, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Это достаточно большое семейство включает в себя многие известные распределения. Например, при $u_s = 1$ лаги U_n будут иметь равномерные распределения. Легко убедиться, однако, что не всякое распределение может быть представлено в таком виде. К примеру, пусть разрешено возвращаться лишь к двум предыдущим значениям с равными вероятностями, так что

$$\mathbb{P}(U_n = s) = \frac{\delta_{s,n} + \delta_{s,n-1}}{2}, \quad n \geq 1.$$

Понятно, что такое распределение не может быть порождено единственной последовательностью u_s — мы не можем «расцепить» здесь связь между s и n , возникающую из-за того, что носитель U_n постоянно увеличивается.

Между моментами возврата к прошлым значениям процесс (2) представляет собой простое случайное блуждание. Если бы возврат осуществлялся к какому-то фиксированному значению (например, к нулю), то X_n представлял бы собой пример процесса восстановления, свойства которого хорошо изучены. Более того, если бы даже возврат выполнялся к какому-нибудь случайному значению, независимому от предыстории самого процесса, то эта конструкция все равно была бы процессом восстановления. Именно возврат к случайно выбранному из когда-либо ранее принимавшихся значению отличает этот случайный процесс от других стохастических моделей.

Введем некоторые вспомогательные величины. Пусть

$$L_n = \max \left\{ k : \sum_{s=1}^k (1 - \epsilon_s) = n - 1 \right\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Другими словами, L_n равен последнему индексу n -й «диффузионной серии» — непрерывной последовательности диффузионных шагов. Или, что то же самое, индексу непосредственно перед n -м припоминанием. Легко видеть, что L_n является суммой независимых в совокупности случайных величин Y_k с геометрическим распределением, причем Y_k имеет смысл длительности k -й диффузионной серии. Мы будем считать, что диффузионная серия всегда начинается с момента возврата ($\epsilon_n = 0$), так что $Y_k \geq 1$. Сам

L_n как сумма независимых случайных величин с геометрическим распределением имеет отрицательное биномиальное распределение. Для примера на рис. 1 показана одна выборочная траектория процесса, когда диффузионные смещения имеют симметричное распределение Радемахера. Здесь $U_4 = 2$ и $U_9 = 6$, $Y_1 = 3$ (начальное значение не принадлежит первой диффузионной серии) и $Y_2 = 5$.

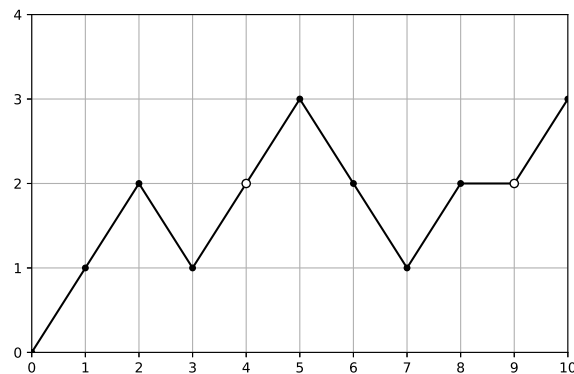


Рис. 1. Пример выборочной траектории процесса (2). Точки, в которых действует механизм памяти, показаны как выколотые

Fig. 1. Sample trajectory of the process (2). Points where reversions occur are depicted as punctured

Следуя [11], можно показать, что процесс стохастически эквивалентен (в широком смысле, т. е. совпадают все конечномерные функции распределения) случайной сумме слагаемых типа ξ_n . Продолжим рассмотрение примера с рис. 1. На первом шаге $X_1 = X_0 + \xi_1$, затем $X_2 = X_0 + \xi_1 + \xi_2$, аналогично для X_3 . Когда в первый раз действует механизм памяти ($n = 4$), процесс возвращается к своему прошлому значению при $n = 2$, которое равно $X_0 + \xi_1 + \xi_2$. На следующем шаге получим $X_5 = X_0 + \xi_1 + \xi_2 + \xi_5$. Понятно, что продолжая далее, мы всегда будем получать сумму X_0 и некоторых ξ_n . Таким образом, справедливо представление

$$X_n = X_0 + \sum_{k=1}^{T_n} \xi_k^* \quad (3)$$

где $\{\xi_k^*\}$ — вспомогательная последовательность независимых в совокупности случайных величин, имеющих то же самое распределение, что и ξ_n . При $T_n = 0$ будем считать, что сумма в правой части обращается в ноль. Важно, что ξ_k^* и T_n не зависят друг от друга при любых n и k . Управляющий процесс T_n может быть записан в виде

$$T_n = \epsilon_n(1 + T_{n-1}) + (1 - \epsilon_n)T_{U_n}, \quad T_0 = 0 \quad (4)$$

и принимает значения в диапазоне $\{0, \dots, n\}$. Фактически T_n сам является процессом типа (2) с вырожденными диффузионными смещениями. Отметим также, что введенный здесь процесс T_n отличается от использованного в п. 3.2 [11] лишь сдвигом индекса на единицу.

3. Распределения и характеристические функции.

Положим $\mathbb{P}(X_n = k) = P_{k,n}$, где $k \in \mathbb{Z}$. Тогда уравнение, описывающее эволюцию распределений процесса, принимает вид

$$P_{k,n+1} = p \sum_r v_r P_{k-r,n} + \frac{q}{w_n} \sum_{s=0}^n u_s P_{k,s}. \quad (5)$$

Здесь $v_r = \mathbb{P}(\xi_{n+1} = r)$ задают распределение диффузионного смещения ξ_{n+1} . Само уравнение следует из теоремы о полной вероятности. Действительно, попасть в k за счет диффузии можно, если на предыдущем шаге процесс находился в $k - r$ и был реализован шаг, в точности равный r . Либо попасть в k можно за счет механизма памяти, если на s -м шаге процесс также находился в том состоянии и был реализован сдвиг, в точности равный s . Поскольку все упомянутые события являются несовместными, выражение в правой части (5) является суммой с соответствующими коэффициентами.

Легко можно убедиться, что уравнение (5) сохраняет нормировочное условие: при любом n сумма $P_{k,n}$ по k всегда равна единице. Уравнение сохраняет также и симметрию: если распределения начального значения X_0 симметричны относительно k' , а распределение диффузионных шагов симметрично относительно нуля, т. е.

$$P_{k'+m,0} = P_{k'-m,0}, \quad v_m = v_{-m} \quad \forall m \neq 0,$$

то $P_{k,n}$ также остается симметричным относительно k' при любом $n > 0$ независимо от распределения U_n . Доказательство проводится индукцией по n . Пусть уже известно, что при $n = 0, 1, \dots, n'$ распределение

симметрично, тогда для произвольного m

$$\begin{aligned} P_{k'+m,n'+1} &= p \left\{ \sum_{r=1}^{+\infty} v_{-r} P_{k'+m+r,n'} + v_0 P_{k'+m,n'} + \sum_{r=1}^{+\infty} v_r P_{k'+m-r,n'} \right\} + \frac{q}{w_n} \sum_{s=0}^{n'} u_s P_{k'+m,s} = \\ &= p \left\{ \sum_{r=1}^{+\infty} v_r P_{k'-(m+r),n'} + v_0 P_{k'-m,n'} + \sum_{r=1}^{+\infty} v_{-r} P_{k'-(m-r),n'} \right\} + \frac{q}{w_n} \sum_{s=0}^{n'} u_s P_{k'-m,s} = P_{k'-m,n'+1}. \end{aligned}$$

Соотношение (5) представляет собой уравнение в частных разностях, но зависимость от одного из дискретных аргументов можно устранить, переходя от распределений к характеристическим функциям. Фактически такой переход означает выполнение преобразования Фурье – Стильеса:

$$\begin{aligned} \phi_{n+1}(\omega) &= \mathbb{E}[e^{i\omega X_{n+1}}] = \sum_k P_{k,n+1} e^{i\omega k} = p \sum_k \sum_r v_r P_{k-r,n} e^{i\omega k} + \frac{q}{w_n} \sum_{s=0}^n u_s \phi_s(\omega) = \\ &= p \sum_r v_r e^{i\omega r} \sum_k P_{k-r,n} e^{i\omega(k-r)} + \frac{q}{w_n} \sum_{s=0}^n u_s \phi_s(\omega) = p\psi(\omega)\phi_n(\omega) + \frac{q}{w_n} \sum_{s=0}^n u_s \phi_s(\omega). \end{aligned}$$

Здесь $\psi(\omega)$ – характеристическая функция ξ_{n+1} . Для удобства нотации далее будем опускать зависимость от ω . Введем также обозначение $x = p\psi$. Если распределения ξ_{n+1} симметричны относительно нуля, то ψ является вещественнозначной четной функцией – всюду далее мы будем предполагать выполнение этого требования.

Уравнение для характеристических функций можно переписать без суммирования, как обычное разностное уравнение второго порядка. Действительно, если в

$$(\phi_{n+1} - x\phi_n)w_n = q \sum_{s=0}^n u_s \phi_s$$

увеличить индекс n на единицу, получим

$$(\phi_{n+2} - x\phi_{n+1})w_{n+1} = q \sum_{s=0}^{n+1} u_s \phi_s = q \sum_{s=0}^n u_s \phi_s + qu_{n+1}\phi_{n+1} = (\phi_{n+1} - x\phi_n)w_n + qu_{n+1}\phi_{n+1}.$$

Выполнив несложные преобразования, окончательно приходим к

$$\phi_{n+2} - \left(x + q + p \frac{w_n}{w_{n+1}} \right) \phi_{n+1} + x \frac{w_n}{w_{n+1}} \phi_n = 0. \quad (6)$$

Здесь мы воспользовались очевидным равенством $w_{n+1} = w_n + u_{n+1}$. Видно, что вся зависимость от распределения диффузионного смещения реализуется через параметр x , поэтому некоторые общие утверждения можно сделать, не выбирая какое-нибудь определенное распределение смещений. Но, разумеется, чтобы восстановить по характеристической функции само распределение, зависимость x от ω нужно будет некоторым образом конкретизировать. В простейшем случае, для симметричного распределения Радемахера, $x = p \cos \omega$.

Уравнение (6) является функционально-разностным и линейным по ϕ_n . Легко показать, что если $\phi_0(x) = 1$ (это соответствует $X_0 = 0$), то ϕ_n являются приведенными полиномами n -й степени по x . Рекуррентная зависимость (6) похожа на ту, что вводится для последовательности Шеффера (см. гл. 2 в [13]) – разница заключается в последнем слагаемом, где появляется умножение на x . Тем не менее не удалось найти работ, где такие полиномиальные последовательности уже были бы исследованы.

Зная, что решения являются приведенными полиномами n -й степени, мы можем редуцировать зависимость от x , перейдя к системе связанных разностных уравнений для коэффициентов этих полиномов. Положим

$$\phi_n(x) = A_{n,0}x^n + A_{n,1}x^{n-1} + \dots + A_{n,n-1}x + A_{n,n} = \sum_{k=0}^n A_{n,k}x^{n-k},$$

$A_{n,0} \equiv 1$ и будем считать $A_{n,k} = 0$, если $k > n$. Тогда после подстановки в (6), приравнявая выражения при одинаковых степенях, получим, что неопределенные коэффициенты подчиняются системе уравнений

$$A_{n+2,k} = (q + p\alpha_n)A_{n+1,k-1} + A_{n+1,k} - \alpha_n A_{n,k-1}, \quad \alpha_n = \frac{w_n}{w_{n+1}}, \quad n \geq 0, \quad k = 1, 2, \dots, n+2.$$

Введем также обозначение $f_{n,k} = (q + p\alpha_n)A_{n+1,k} - \alpha_n A_{n,k}$. Для коэффициентов при второй старшей степени получим

$$A_{n+2,1} - A_{n+1,1} = f_{n,0} \iff A_{n,1} - A_{1,1} = \sum_{s=0}^{n-2} f_{s,0} = q \sum_{s=0}^{n-2} (1 - \alpha_s).$$

Коэффициент $A_{1,1}$ равен q , т. к. $\phi_1(x) = x + q$ — это легко установить напрямую. Теперь, зная $A_{n,1}$, мы можем определить $f_{n,1}$, а значит, найти $A_{n,2}$ и т. д. Уравнение для свободного члена $A_{n,n}$ и его общее решение выглядят несколько иначе:

$$A_{n+2,n+2} = (q + p\alpha_n)A_{n+1,n+1} \iff A_{n,n} = q \prod_{s=0}^{n-2} (q + p\alpha_s), \quad n \geq 2.$$

Формально, зная характеристическую функцию, мы можем вычислить все остальные представляющие интерес величины. Пусть диффузионные смещения имеют асимметричное распределение Радемахера, т. е. $\mathbb{P}(\xi_n = 1) = r$, $\mathbb{P}(\xi_n = -1) = 1 - r$, где $0 < r < 1$. В этом случае $\psi = re^{i\omega} + (1-r)e^{-i\omega}$. Тогда справедливо

$$\phi_n = \sum_{k=0}^n A_{n,n-k} p^k (re^{i\omega} + (1-r)e^{-i\omega})^k = \sum_{k=0}^n A_{n,n-k} p^k \sum_{s=0}^k \binom{k}{s} r^s (1-r)^{k-s} e^{i\omega(2s-k)}, \quad (7)$$

что позволяет вычислить вероятности $P_{k,n}$ — они будут коэффициентами при $e^{i\omega k}$ в итоговом выражении для ϕ_n . К примеру,

$$P_{0,n} = \sum_{m=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} A_{n,n-2m} p^{2m} \binom{2m}{m} r^m (1-r)^m,$$

суммирование выполняется по четным индексам, поскольку во внутренней сумме в (7) при нечетных k нет членов, пропорциональных единице.

4. Уравнения для начальных моментов первого и второго порядков. Моменты X_n могут быть найдены с помощью дифференцирования характеристической функции, однако уже даже для второго порядка это приводит к достаточно громоздким и утомительным вычислениям. Поэтому для их исследования удобнее работать непосредственно с рекуррентными соотношениями. В первую очередь заметим, что моменты процесса X_n можно выразить через моменты управляющего процесса T_n . Введем обозначения $\theta_n = E[T_n]$ и $\Delta_n = E[T_n^2]$. Тогда из представления (3) и известных тождеств Вальда и Гиршика следует

$$E[X_n] = E[X_0] + \mu\theta_n, \quad D[X_n] = D[X_0] + \sigma^2\theta_n + \mu^2\Delta_n.$$

Уравнение для θ_n принимает вид

$$\theta_{n+1} = p(1 + \theta_n) + \frac{q}{w_n} \sum_{s=0}^n u_s \theta_s. \quad (8)$$

При выводе его мы сначала взяли условное ожидание относительно ϵ_n , а потом относительно U_n и воспользовались тем, что все порождающие процесс случайные величины независимы друг от друга. Так же как и в уравнениях для распределений и характеристических функций, здесь можно избавиться от суммирования в правой части, используя тот же самый прием, что приводит к

$$\theta_{n+2} - \beta_n \theta_{n+1} + p\alpha_n = p\gamma_{n+1}, \quad \beta_n = 1 + p\alpha_n, \quad \gamma_n = \frac{u_n}{w_n}. \quad (9)$$

Возводя определение (4) в квадрат, формально получим

$$T_{n+1}^2 = \epsilon_{n+1}^2 [1 + T_n]^2 + (1 - \epsilon_{n+1})^2 T_{U_n}^2 + 2\epsilon_n(1 - \epsilon_n)(1 + T_n)T_{U_n}.$$

Легко проверить, что $E[\epsilon_n^2] = p$ и $E[\epsilon_n(1 - \epsilon_n)] = 0$ при любых n . Тогда, пользуясь тем же самым приемом с условным математическим ожиданием и учитывая независимость порождающих процесс случайных величин друг от друга, приходим к

$$\Delta_{n+1} = p(1 + 2\theta_n + \Delta_n) + \frac{q}{w_n} \sum_{s=0}^n u_s \Delta_s. \quad (10)$$

Укажем и второе уравнение для Δ_n , не содержащее суммы в правой части:

$$\Delta_{n+2} - \beta_n \Delta_{n+1} + p\alpha_n = p\gamma_n + 2p(\theta_{n+1} - \alpha_n \theta_n). \quad (11)$$

Уравнения в разностной форме удобнее для вычислений, поскольку не нужно хранить все предыдущие значения, а форма с суммированием, как будет показано далее, в некоторых случаях удобнее для поиска аналитических решений.

5. Результаты для равномерного распределения сдвигов. Простейшим случаем является равномерное распределение U_n , порожденное последовательностью $u_s = 1$. Здесь $w_n = n + 1$, $\alpha_n = 1 - 1/(n + 2)$, и

$$A_{n,1} = q + q \sum_{s=0}^{n-2} \frac{1}{s+2} = qH_n, \quad A_{n,n} = q \prod_{s=0}^{n-2} \left(1 - \frac{p}{s+2}\right) = \frac{(1-p)(2-p) \dots (n-p)}{n!},$$

где H_n — гармонические числа. Получить выражения для других коэффициентов в замкнутом виде, который мог бы быть полезен для дальнейшего анализа, не удалось.

Для моментов управляющего процесса T_n будем отталкиваться от уравнения с суммированием (8) и введем производящую функцию $M(t) = \sum \theta_n t^n$. Эту функцию нужно трактовать как формальный степенной ряд, т. е. вопросы его сходимости нас интересовать не будут. Вводные замечания о формальных степенных рядах см., например, в [14]. Умножим обе части уравнения на t^n и суммируем по n . Все возникающие при этом ряды могут быть выражены через функцию M и ее производные, например,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\theta_n t^n = \theta_0 + 2\theta_1 t + 3\theta_2 t^2 + \dots = M + tM' = (tM)'. \quad (9)$$

Здесь штрих означает дифференцирование по переменному t . Для слагаемого, отвечающего за эрдитарный механизм, группируя в другом порядке, получим

$$\sum_{n=0}^{+\infty} t^n \sum_{s=0}^n \theta_s = \sum_{n=0}^{+\infty} \theta_n \sum_{s=n}^{+\infty} t^s = \frac{1}{1-t} \sum_{n=0}^{+\infty} \theta_n t^n = \frac{M}{1-t}.$$

Таким образом, производящая функция M должна удовлетворять неоднородному линейному дифференциальному уравнению первого порядка

$$M' = p \left[t \left(M + \frac{1}{1-t} \right) \right]' + \frac{q}{1-t} M$$

с начальным условием $M(0) = \theta_0 = 0$. Его решение имеет вид

$$M(t) = \frac{A}{1-t} \ln F(t), \quad A = \frac{p}{q}, \quad F(t) = \frac{1-pt}{1-t}.$$

Заметим теперь, что производящая функция $\ln F$ соответствует последовательности $(1-p^n)/n$ — чтобы убедиться в этом, достаточно представить ее как разность логарифмов, каждый из которых затем разложить по степеням t . Умножение производящей функции на $(1-t)^{-1}$ соответствует суммированию исходной последовательности. Окончательно, математические ожидания T_n имеют вид

$$\theta_n = A \sum_{k=1}^n v_k = A \left(H_n - \sum_{k=1}^n \frac{p^k}{k} \right), \quad v_k = \frac{1-p^k}{k}. \quad (12)$$

Несмотря на кажущуюся простоту, замкнутое выражение для конечной суммы в правой части неизвестно. Но легко видеть, что она представляет собой частичную сумму разложения Маклорена для $\ln(1-x)$ в точке p . Отсюда следует, что при больших n математическое ожидание ведет себя как $A \ln n$.

Перейдем теперь к моментам второго порядка. Работать снова будем с производящей функцией $D(t) = \sum \Delta_n t^n$. Из (10), с использованием тех же приемов, что и при выводе уравнения для производящей функции ожиданий, следует дифференциальное уравнение

$$(1-pt)D' - \left(p + \frac{q}{1-t}\right)D = 2p(tM)' + \frac{p}{(1-t)^2},$$

где M — уже известная нам функция. Начальное условие имеет вид $D(0) = \Delta_0 = 0$. После несложных, но весьма утомительных преобразований, общее решение принимает вид

$$D(t) = \frac{1}{1-t} \left[A^2 \ln^2 F(t) + A(1+2A) \ln F(t) - \frac{2pAt}{1-pt} \right].$$

Производящая функция $\ln F$ нам уже встречалась при анализе математического ожидания. Основную трудность представляет первое слагаемое, $\ln^2 F$. Используем тот факт, что произведению производящих функций соответствует свертка исходных последовательностей. Тогда выражение для D можно представить в виде формального степенного ряда

$$A^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{n-1} v_k v_{n-k} t^n + A(1+2A) \sum_{n=1}^{+\infty} v_n t^n - 2pA \sum_{n=1}^{+\infty} p^n t^n.$$

Теперь необходимо снова использовать тот факт, что множитель $(1 - t)^{-1}$ соответствует суммированию, так что окончательно для вторых моментов получим весьма громоздкое выражение

$$\Delta_n = \sum_{s=1}^n \left[A(1 + 2A)v_s - 2Ap^{s+1} + A^2 \sum_{k=1}^{s-1} v_k v_{s-k} \right].$$

Получить удобное представление для суммы свертки в правой части здесь не так легко. Но асимптотическое поведение последовательности можно исследовать напрямую, используя только производящую функцию. Соответствующий инструментарий подробно описан в [14]. Заметим, что доминирующая особенность в нашем случае находится в точке $t = 1$ (поскольку $t = 1/p > 1$ в представляющих интерес случаях). Из таб. VI.5 в [14] следует, что ведущий асимптотический член для Δ_n имеет вид $A^2 \ln^2 n$.

В [11] с помощью предельной теоремы Добрушина для неоднородных марковских цепей было строго доказано, что их версия управляющего процесса подчиняется центральной предельной теореме. Поэтому и рассмотренный здесь процесс T_n , который отличается лишь индексацией, также ей удовлетворяет. Это позволяет воспользоваться предельной теоремой Роббинса [15], из которой следует, что $(X_n - E[X_n])/\sqrt{D[X_n]}$ сходится по распределению к стандартному нормальному закону. Заметим также, что [11] использует другой инструмент — предельную теорему Энскомба — чтобы прийти к тому же результату для изученного ими процесса.

Выполнение центральной предельной теоремы хорошо видно и в численном эксперименте: зная выражения для характеристической функции, полученные с помощью описанной в предыдущем разделе техники, мы легко можем сравнить их с характеристической функции стандартного нормального закона. Результаты для нескольких p и диффузионных смещений с симметричным распределением Радемахера (для которого $\mu = 0$ и $\sigma^2 = 1$) показаны на рис. 2. Поскольку характеристические функции в этом случае также симметричны, показана только правая часть графика. Дать теоретическую оценку скорости сходимости затруднительно, однако в экспериментах она была тем медленнее, чем меньше p . Локальная предельная теорема, которая позволила бы приближенно выразить вероятности $P_{n,k}$ через функцию плотности стандартного нормального закона, здесь не выполняется — это вполне естественно, поскольку даже для неслучайных сумм теоремы такого рода требуют соблюдения более тонких условий.

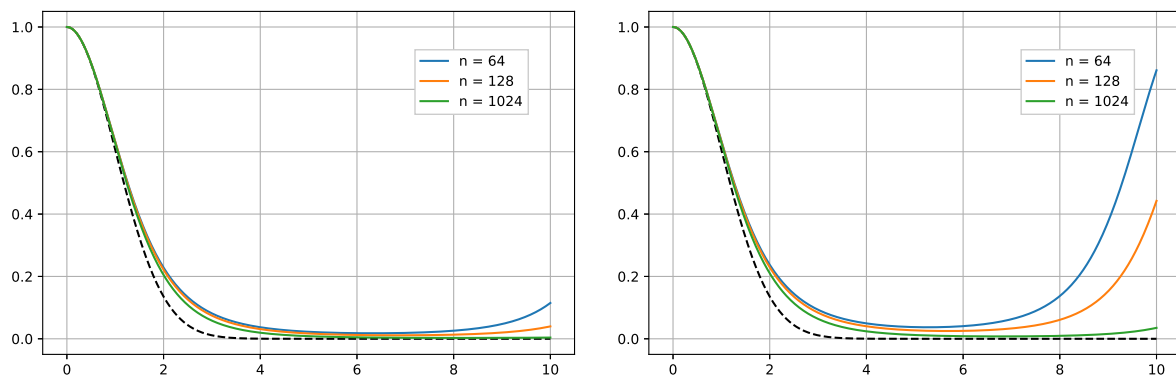


Рис. 2. Характеристические функции $X_n/\sqrt{\Delta_n}$ для случая равномерного распределения U_n и симметричного распределения Радемахера при нескольких n , $p = 0.5$ (слева) и $p = 0.4$ (справа). Характеристическая функция стандартного нормального закона показана пунктиром

Fig. 2. Characteristic functions of $X_n/\sqrt{\Delta_n}$ under the uniform distribution of U_n and symmetrical Rademacher distribution for several n values, $p = 0.5$ (left) and $p = 0.4$ (right). Characteristic function of the standard normal law is depicted as a dash line

6. Результаты для показательного распределения сдвигов. Пусть теперь $u_s = r^s$, $r > 0$ и $r \neq 1$. Формально такая последовательность дает два качественно отличных распределения: при $r < 1$ более вероятным является припоминание самых ранних шагов (а само распределение U_n будет усеченным геометрическим), а при $r > 1$ — наоборот, самым вероятным будет предыдущее значение. Случай $r = 1$ соответствует уже рассмотренному равномерному распределению.

Умножим соотношение (8) на t^n и суммируем по n . Возникающие ряды снова могут быть выражены через производящую функцию M , например:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \theta_{n+1} r^{n+1} t^n = \theta_1 r + \theta_2 r^2 t + \theta_3 r^3 t^2 + \dots = \frac{M(rt)}{t}.$$

Окончательно, получим для M функциональное уравнение

$$M(rt) = H(t)M(t) + F(t), \quad H(t) = \frac{(1-t)(1-prt)}{(1-rt)(1-pt)}, \quad F(t) = \frac{p(r-1)t}{(1-pt)(1-rt)^2}.$$

Общее решение этого уравнения известно, см. п. 2 гл. 8 [16], при условии, что $r < 1$ и функции F и H могут быть представлены в виде степенных рядов. В нашем случае они являются рациональными функциями t , так что могут быть разложены как суммы простейших дробей, для которых представления в виде рядов известны. Однако это решение имеет крайне сложную форму, в частности, оно содержит конечные произведения величин $H(r^k t)$ по k , которые не удастся выразить в замкнутом виде, что делает такое аналитическое решение непригодным для дальнейшего анализа.

Тем не менее асимптотическое поведение решений (9) можно описать и не имея аналитического решения — для этого будем использовать приемы гл. 8 из [17]. В первую очередь, необходимо преобразовать (8) в однородное уравнение. Для этого формально разделим обе части на γ_{n+1} , а затем в полученном уравнении увеличим все индексы на единицу, после чего вычтем из последнего первое. Это приводит к уравнению

$$\theta_{n+3} - C_{2,n}\theta_{n+2} + C_{1,n}\theta_{n+1} - C_{0,n}\theta_n = 0,$$

$$C_{2,n} = \beta_{n+1} + \frac{\gamma_{n+2}}{\gamma_{n+1}}, \quad C_{1,n} = p\alpha_{n+1} + \beta_n \frac{\gamma_{n+2}}{\gamma_{n+1}}, \quad C_{0,n} = p\alpha_n \frac{\gamma_{n+2}}{\gamma_{n+1}}.$$

Теперь заметим, что последовательности $C_{k,n}$ имеют конечные пределы, а значит, могут быть представлены в виде $c_k + E_{k,n}$, где $E_{k,n}$ — бесконечно малые последовательности (по n). Тогда мы можем использовать утверждение 8.27 из [17] при условии, что $E_{k,n}$ удовлетворяют некоторому дополнительному техническому требованию.

Пусть $r < 1$. Тогда $c_2 = 1 + p + r$, $c_1 = p + r + pr$ и $c_0 = pr$. Опорное характеристическое уравнение

$$\lambda^3 - c_2\lambda^2 + c_1\lambda - c_0 = 0$$

имеет корни 1, p и r . Дополнительное требование заключается в том, что ряды с членами $E_{k,n}$ должны абсолютно сходиться при всех k . Оно действительно выполняется. Например, для $E_{0,n}$:

$$E_{0,n} = p \frac{v_n u_{n+2}}{v_{n+2} u_{n+1}} - pr = p \frac{v_n u_{n+2} - r u_{n+1} v_{n+2}}{v_{n+2} u_{n+1}} = pr(1-r) \frac{r^{n+1} + r^{n+2}}{r^{n+2} - 1} \sim pr(r-1)r^{n+1},$$

значит, соответствующий ряд сходится. Для остальных коэффициентов выкладки более громоздки, но сводятся также к манипуляциям с геометрическими прогрессиями. Тогда в силу упомянутой теоремы ведущий член в асимптотическом представлении решения должен иметь вид $(1 + o(1))1^n$, т. к. p и r меньше единицы. Другими словами, ожидается, что при больших n решение должно сходиться к некоторой постоянной. Именно это и видно в результатах вычислительного эксперимента на рис. 3 слева.

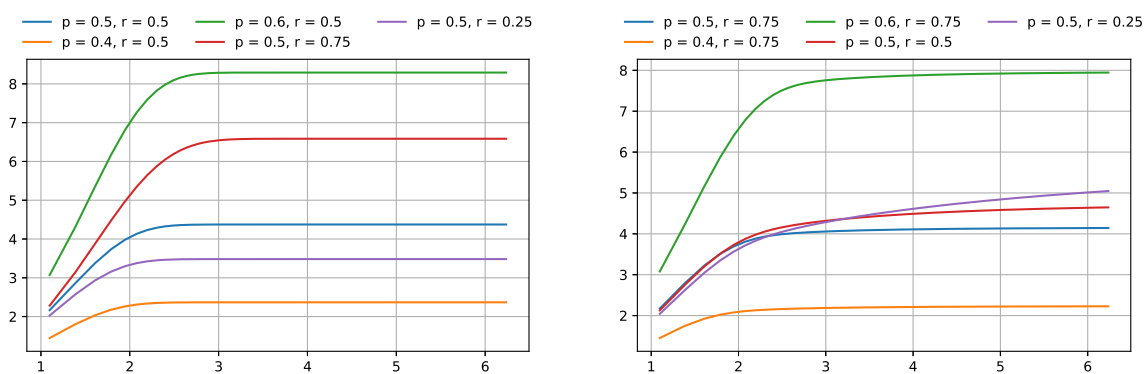


Рис. 3. Зависимости моментов второго порядка Δ_n от $\ln n$ для сценариев со стремлением к постоянным значениям: показательное распределение с $r < 1$ (слева) и биномиальное распределение с $r < 1$ (справа)

Fig. 3. Second order moments Δ_n versus $\ln n$ for cases when moments stabilize: exponential distribution with $r < 1$ (left) and binomial distribution with $r < 1$ (right)

Оценки скорости сходимости к решениям опорного разностного уравнения с соответствующими постоянными коэффициентами также известны (см. библиографию к гл. 8 [17]), но строятся достаточно сложным образом и потому не приводятся. В экспериментах относительная точность такого приближения для стационарных значений моментов варьировалась от 0.6% до 7% в зависимости от p и r . Кроме того, нужно иметь в виду, что при $p = r$ у опорного характеристического уравнения появляется кратный корень. Тем не менее вычисления показали, что и в этом случае математические ожидания стремятся к некоторому стационарному значению. Для моментов второго порядка ситуация аналогичная. Формально можно было бы применить ту же самую технику, но из-за наличия θ_n в правой части (11) итоговые выражения занимали бы слишком много места.

Стремление моментов первых порядков дает некоторые основания полагать, что возможно и распределения в этом случае стремятся к некоторому предельному закону. Установить этот факт строго с помощью каких-либо известных теорем для случайных сумм и указать форму этого предельного распределения пока не удалось. Однако в серии вычислительных экспериментов установление характеристических функций хорошо видно.

Пусть теперь $r > 1$. Пределы коэффициентов будут равны $c_2 = 2 + p/r$, $c_1 = 1 + 2p/r$ и $c_0 = p/r$. Опорное характеристическое уравнение имеет простой корень p/r и двукратный корень 1. В этом случае результаты раздела 8.4 из [17] неприменимы, как и другие инструменты, описанные там. Вычисления демонстрируют, что моменты первого порядка хорошо соответствуют линейной по n зависимости, в то время как моменты второго порядка растут по n быстрее, см. рис. 4.

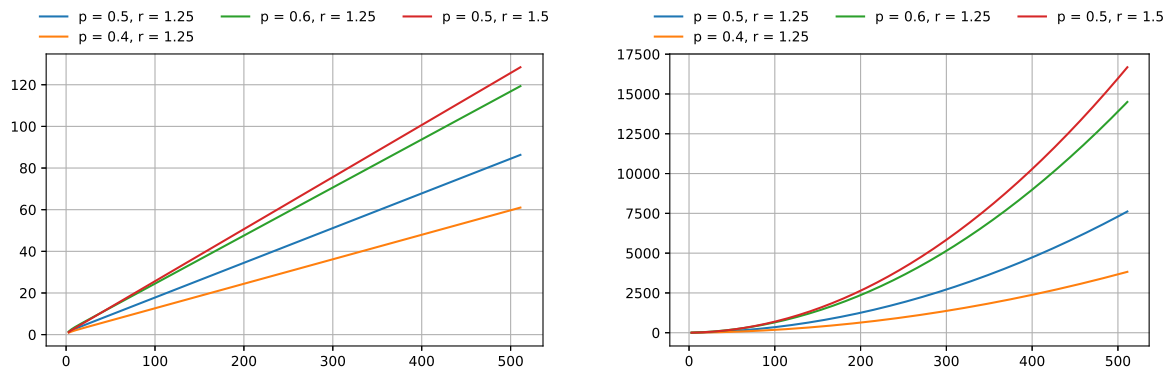


Рис. 4. Зависимости моментов первого (слева) и второго (справа) порядков от n для показательного распределения при некоторых значениях p и r

Fig. 4. First (left) and second (right) order moments versus n for exponential lag distribution with $r > 1$

7. Результаты для биномиального распределения сдвигов. Теперь рассмотрим пример, который упоминался во введении — схему из [12]. Сразу же заметим, что основным объектом исследования там был не случайный процесс с сильной памятью, а дискретная схема, полученная из детерминированного уравнения с производными нецелого порядка, которой формально был поставлен в соответствие случайный процесс. Кроме того, важно, что распределение сдвигов для механизма памяти, введенное там, не может быть представлено с помощью одной последовательности u_s . В принятых здесь обозначениях, там рассматривался сценарий, при котором

$$\mathbb{P}(U_n = s) = (-1)^{s-1} \binom{r}{s} = \left| \frac{\Gamma(r+1)}{s! \Gamma(r-s)} \right|, \quad s = 1, 2, \dots, n, \quad \mathbb{P}(U_n = 0) = 1 - \sum_{s=1}^n \mathbb{P}(U_n = s), \quad 0 < r \leq 1.$$

Фундаментальные решения задачи Коши для исследовавшегося там уравнения имеют смысл плотностей некоторых абсолютно непрерывных распределений и демонстрируют характерный субдиффузионный режим: дисперсия асимптотически ведет себя как t^r .

Введем в рассмотрение следующие последовательности:

$$u_0 = 1, \quad u_s = (-1)^{s-1} \binom{r}{s}, \quad w_n = 2 - \binom{n-r}{n}, \quad 0 < r < 1.$$

Выражение для w_n см. в п. 4.2.1 в [18]. Основное отличие схемы [12] заключается в вычислении вероятности $\mathbb{P}(U_n = 0)$, однако именно из-за этого меняются и нормировочные коэффициенты w_n . Кроме того, при некоторых сочетаниях r и n распределение там не является монотонным, т. к. $\mathbb{P}(U_n = 0) < \mathbb{P}(U_n = 1)$.

Точные решения для моментов при таком выборе u_s найти весьма трудно, но можно попробовать использовать ту же самую технику асимптотического анализа, что и для показательных распределений. Пределы коэффициентов равны $c_2 = 2 + p$, $c_1 = 1 + 2p$ и $c_0 = p$. Опорное характеристическое уравнение имеет корни p (простой) и 1 (двукратный), что снова препятствует использованию результатов из [17]. Впрочем, прямые вычисления показали, что и в этом случае, несмотря на гораздо более медленное убывание вероятностей, происходит установление моментов на некоторых постоянных значениях, см. рис. 3 справа. Характеристические функции здесь также сходятся к некоторой предельной функции, но как и в случае с показательным распределением, доказать это строго пока весьма затруднительно.

8. Заключение. Рассмотренная модель является одной из наиболее простых в семействе дискретных процессов с явным припоминанием прошлых состояний. Тем не менее точные выражения удалось получить лишь в самом простом случае, когда сдвиги имеют равномерное распределение. Ситуация здесь сильно отличается от модели ERW, поведение которой на сегодняшний день изучено максимально

подробно. Более интересно, однако, что в этой модели пока не удалось наблюдать аномальной диффузии (которая характеризуется степенной асимптотикой дисперсии), хотя в ERW формирование таких режимов возможно уже при равномерном распределении случайных сдвигов. Даже специальный выбор медленно убывающего биномиального распределения, для которого математическое ожидание расходится, не привел к такому результату. Это еще раз подчеркивает, что формальное соответствие дискретной схемы некоторой непрерывной интегродифференциальной модели (как в [12]) вовсе не гарантирует сохранение характерных свойств последней. Впрочем, авторы [12] и не утверждали, что описанный ими случайный процесс должен демонстрировать степенную асимптотику моментов. Приведенные результаты также позволяют указать, что одного только лишь механизма памяти недостаточно для объяснения возникновения аномальных диффузионных режимов: многое зависит от конкретной реализации этого механизма и его тонкого взаимодействия с другими элементами, управляющими динамикой процесса. С другой стороны, логарифмическое поведение моментов тоже не соответствует нормальной диффузии, так что, возможно, требование именно степенной асимптотики является излишне ограничивающим.

Стохастические модели с явным припоминанием прошлых состояний пока изучены слабо. Даже в простейшем случае, вроде рассмотренного здесь, многие вопросы остаются пока открытыми: например, точные распределения (здесь удалось лишь предложить способ вычисления характеристических функций при некоторых дополнительных предположениях), автокорреляционные функции, поведение экстремумов, времена первого достижения и т. п. Еще одним направлением исследований могло бы стать изучение моделей вида

$$X_{n+k} = a_1 X_{n+k-1} + \dots + a_k X_n + b X_{U_n},$$

где случайное возвращение к предыдущим значениям конкурирует с более сложной детерминированной динамикой. Такие конструкции по форме похожи на хорошо известные модели авторегрессии ARIMA, с той разницей, что в последних случайность вводится с помощью аддитивного возмущения, независимого от предыстории процесса. Наконец, интересным представляется и поведение классических нелинейных дискретных отображений (например, кусочно-линейного отображения тента или квадратичного отображения Фейгенбаума), если у них в правой части будут использованы случайно выбираемые из прошлого значения. Решение указанных задач может заложить основу для построения систематической теории функционально-разностных уравнений со случайно отклоняющимися аргументами. Такого рода конструкции могут найти свое применение в задачах оптимального управления для систем, где невозможно гарантировать постоянную задержку сигнала, или при исследовании алгоритмов, принадлежащих классу «разделяй и властвуй» — в связи с последним см. [19]. Других содержательных примеров приложения подобных уравнений к моделированию реальных физико-химических, демографических или социальноэкономических процессов пока найти не удалось, что дает еще одно важное направление для будущих исследований в этой области.

Список литературы

1. Samorodnitsky G. Stochastic processes and long range dependence. Springer International; 2016. 415 p.
2. Beran J., Feng Y., Ghosh S., Kulik R. Long-memory processes. Springer-Verlag Berlin; 2013. 884 p.
3. Schütz GM., Trimper S. Elephants can always remember: Exact long-range memory effects in a non-Markovian random walk. *Physical Review E*. 2004;70(4):045101.
4. Laulin L. About the elephant random walk. PhD thesis. Université de Bordeaux; 2022. 154 p.
5. Metzler R., Jeon J-H., Cherstvy AG., Barkai E. Anomalous diffusion models and their properties: non-stationarity, non-ergodicity, and ageing at the centenary of single particle tracking. *Physical Chemistry & Chemical Physics*, 2014;16(44):24128–24164.
6. Kürsten R. Comment on «Anomalous diffusion induced by enhancement of memory». arXiv:1503.03302. 2015. 3 p.
7. Kumar N., Harbola U., Lindenberg K. Memory-induced anomalous dynamics: Emergence of diffusion, subdiffusion, and superdiffusion from a single random walk model. *Physical Review E*. 2010;82(2):021101.
8. Beyer WA., Schrandt RG., Ulam SM. Computer studies of some history-dependent random processes. Technical report. Los Alamos National Lab; 1969. 9 p.
9. Кас М. A history-dependent random sequence defined by Ulam. Technical report. Los Alamos National Lab; 1969. 5 p.
10. Зенюк Д.А. Дискретные динамические системы со случайным запаздыванием. *Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша*. 2024;70. 35 с.
11. Clifford P., Stirzaker D. Reverting processes. arXiv:1911.07269. 2019. 15 p.
12. Gorenflo R., Mainardi F., Moretti D., Pagnini G., Paradisi P. Discrete random walk models for space-time fractional diffusion. *Chemical Physics*. 2002;284(1–2):521–541.
13. Roman S. The umbral calculus. Academic Press; 1984. 193 p.

14. Flajolet P., Sedgewick R. Analytic combinatorics. Cambridge University Press; 2009. 810 p.
15. Robbins H. The asymptotic distribution of the sum of a random number of random variables. *Bulletin of the American Mathematical Society*. 1948;54(12):1151–1161.
16. Kuczma M. Functional equations in a single variable. PWN Warszawa; 1968. 383 p.
17. Elaydi S. An introduction to difference equations. Springer New York; 2005. 562 p.
18. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Элементарные функции. М.: Наука; 1981. 800 с.
19. Karp RM. Probabilistic recurrence relations. *Journal of the ACM*. 1994;41(6):1136–1150.

References

1. Samorodnitsky G. Stochastic processes and long range dependence. Springer International; 2016. 415 p.
2. Beran J., Feng Y., Ghosh S, Kulik R. Long-memory processes. Springer-Verlag Berlin; 2013. 884 p.
3. Schütz GM., Trimper S. Elephants can always remember: Exact long-range memory effects in a non-Markovian random walk. *Physical Review E*. 2004;70(4):045101.
4. Laulin L. About the elephant random walk. PhD thesis. Université de Bordeaux; 2022. 154 p.
5. Metzler R., Jeon J-H., Cherstvy AG., Barkai E. Anomalous diffusion models and their properties: non-stationarity, non-ergodicity, and ageing at the centenary of single particle tracking. *Physical Chemistry & Chemical Physics*. 2014;16(44):24128–24164.
6. Kürsten R. Comment on «Anomalous diffusion induced by enhancement of memory». arXiv:1503.03302. 2015. 3 p.
7. Kumar N., Harbola U., Lindenberg K. Memory-induced anomalous dynamics: Emergence of diffusion, subdiffusion, and superdiffusion from a single random walk model. *Physical Review E*. 2010;82(2):021101.
8. Beyer WA., Schrandt RG., Ulam SM. Computer studies of some history-dependent random processes. Technical report. Los Alamos National Lab; 1969. 9 p.
9. Кас М. А history-dependent random sequence defined by Ulam. Technical report. Los Alamos National Lab; 1969. 5 p.
10. Zenyuk DA. Discrete dynamical systems with random delays. *Preprinty IPM im. M.V. Keldysha*. 2024;70. 35 p. (In Russ.)
11. Clifford P., Stirzaker D. Reverting processes. arXiv:1911.07269. 2019. 15 p.
12. Gorenflo R., Mainardi F., Moretti D., Pagnini G, Paradisi P. Discrete random walk models for space-time fractional diffusion. *Chemical Physics*. 2002;284(1–2):521–541.
13. Roman S. The umbral calculus. Academic Press; 1984. 193 p.
14. Flajolet P., Sedgewick R. Analytic combinatorics. Cambridge University Press; 2009. 810 p.
15. Robbins H. The asymptotic distribution of the sum of a random number of random variables. *Bulletin of the American Mathematical Society*. 1948;54(12):1151–1161.
16. Kuczma M. Functional equations in a single variable. PWN Warszawa; 1968. 383 p.
17. Elaydi S. An introduction to difference equations. Springer New York; 2005. 562 p.
18. Karp RM. Probabilistic recurrence relations. *Journal of the ACM*. 1994;41(6):1136–1150.

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 12.12.2025

Поступила после рецензирования 05.05.2026

Принята к публикации 11.05.2026

Received December 12, 2025

Revised May 5, 2026

Accepted May 11, 2026

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Зенюк Дмитрий Алексеевич – кандидат физико-математических наук, научный сотрудник отдела нелинейной динамики, Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, г. Москва, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Dmitry A. Zenyuk – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Research Fellow at the Nonlinear Dynamics Department, Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

[К содержанию](#)