

## ФИЗИКА. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 519.85  
MSC 49K27.

DOI 10.52575/2687-0959-2021-53-1-40-45

### ОПТИМАЛЬНЫЙ ВЫБОР ИСТОЧНИКОВ СВЕТОВОГО ПОЛЯ

А. Г. Брусенцев, С. И. Епифанов

(Статья представлена членом редакционной коллегии И. П. Половинкиным)

Белгородский государственный технологический университет им. В. Г. Шухова,  
Белгород, 308012, Россия

E-mail: [brusentsev@mail.ru](mailto:brusentsev@mail.ru)

E-mail: [epif-sergey@yandex.ru](mailto:epif-sergey@yandex.ru)

**Аннотация.** Ставится и решается задача оптимального выбора источников света на светящейся поверхности по критерию минимальности энергетических затрат. Разрабатывается метод решения задачи, основанный на сведении ее к задаче линейного программирования. Описана программная система, реализующая решение задачи, и приведены результаты численных экспериментов.

**Ключевые слова:** Математическая модель светового поля; оптимальное распределение источников света; задача линейного программирования; двойственный симплекс метод.

**Для цитирования:** Брусенцев А. Г., Епифанов С. И. 2020. Оптимальный выбор источников светового поля. Прикладная математика & Физика. 53(1): 40–45. DOI 10.52575/2687-0959-2021-53-1-40-45.

---

---

### OPTIMAL CHOICE OF LIGHT FIELD SOURCES

A. Brusentsev, S. Epifanov

(Article submitted by a member of the editorial board I. P. Polovinkin)

Belgorod State Technological University named after V. G. Shukhov,  
Belgorod, 308012, Russia

E-mail: [brusentsev@mail.ru](mailto:brusentsev@mail.ru)

E-mail: [epif-sergey@yandex.ru](mailto:epif-sergey@yandex.ru)

Received December, 27, 2020

**Abstract.** The problem of optimal choice of light source on luminous surface is posed and solved according to the criterion of minimum energy consumption. A method for solving the problem is being developed, based on reducing it to a linear programming problem. A software system for solving problem is described, and the results of numerical experiments are presented.

**Key words:** Mathematical model of the light field; optimal distribution of light sources; linear programming problem; dual simplex method.

**For citation:** Brusentsev A. G., Epifanov S. I. 2020. Optimal choice of light field sources. Applied Mathematics & Physics. 53(1): 40–45 (in Russian). DOI 10.52575/2687-0959-2021-53-1-40-45.

---

**1. Введение.** В повседневной жизни людей большое значение имеют физические поля. Они создаются искусственно, и должны обладать рядом эксплуатационных свойств, которые достигаются особым распределением их источников. При этом возникает задача выбора такой системы источников, которая обеспечивала бы заданные свойства поля при минимальных затратах энергии, или каких-нибудь других ресурсов. Подобные задачи называют задачами оптимального распределения источников физических полей, и их решение существенно зависит от природы рассматриваемого поля. Наибольшее практическое значение имеют тепловое и световое поля. Оптимальный выбор источников тепла рассматривался в ряде работ [1, 3, 6, 4], а аналогичные задачи для полей естественной освещенности – в [2, 5].

В настоящей работе мы, опираясь на модель светового поля светящейся поверхности, ставим и решаем задачу оптимального выбора источников света по критерию минимума энергетических затрат.

**2. Постановка задачи и описание алгоритма ее решения.** Под световым полем мы подразумеваем поле плотности светового потока, то есть вектор-функцию  $\vec{\epsilon}(N)$  точки  $N$  пространства такую, что для

каждой элементарной площадке площадью  $dS$  с центром в точке  $N$  световой поток в направлении единичного вектора нормали  $\vec{v}(N)$  к площадке равен:

$$(\vec{\varepsilon}(N) \cdot \vec{v}(N))_+ dS. \tag{1}$$

Если скалярное произведение отрицательно, то этот световой поток считается равным нулю.

При математическом моделировании светового поля стремятся получить выражение для вектор-функции  $\vec{\varepsilon}(N)$  в зависимости от расположения источников света. Мы рассмотрим такую модель для случая, когда поле порождается испускающей поверхностью  $\sigma$ , светящейся с яркостью, задаваемой функцией  $\gamma(M)$  ( $M \in \sigma$ ). При этом  $\gamma(M)dS_M$  есть энергия, испускаемая элементарной площадкой площадью  $dS_M$  поверхности  $\sigma$  в единицу времени в направлении единичного вектора нормали  $\vec{n}(M)$  к поверхности  $\sigma$  в точке  $M$ .

Обозначим через  $\varphi_M$  угол между векторами  $\vec{n}(M)$  и  $\overrightarrow{MN}$ . Тогда получим следующее выражение для  $\vec{\varepsilon}(N)$  в виде поверхностного интеграла по испускающей поверхности  $\sigma$  (ср. с [5]):

$$\vec{\varepsilon}(N) = \iint_{\sigma} \gamma(M) \frac{(\cos\varphi_M)_+}{|\overrightarrow{MN}|^3} \cdot \overrightarrow{MN} dS_M. \tag{2}$$

Обозначим воспринимающую поверхность внутри помещения через  $\sigma_1$ . В дальнейшем она называется также рабочей поверхностью. В каждой ее точке  $N$  определен единичный вектор нормали  $\vec{v}(N)$ , направленный в сторону неосвещаемой стороны поверхности  $\sigma_1$ . Общая постановка задачи состоит в нахождении функции  $\gamma(M)$ , минимизирующей общую мощность источников:

$$J\{\gamma\} = \iint_{\sigma} \gamma(M) \cdot dS_M \rightarrow \min, \tag{3}$$

при условиях:

$$\begin{aligned} (\vec{\varepsilon}(N) \cdot \vec{v}(N))_+ &\geq \beta(N), N \in \sigma_1 \\ \gamma(M) &\geq 0; M \in \sigma, \end{aligned} \tag{4}$$

где  $\beta(N)$  – некоторая нормативная функция освещенности рабочей поверхности. Таким образом, задача сводится к получению освещенности рабочей поверхности не меньшей нормативной при наименьших энергетических затратах.

В такой постановке задача имеет бесконечное число степеней свободы и должна быть подвергнута дискретизации. Но сначала преобразуем условие (4), используя модель (2). Обозначим через  $\psi_N$  угол между векторами  $\overrightarrow{MN}$  и  $\vec{v}(N)$ . Тогда условие (4) запишется в виде:

$$\iint_{\sigma} \gamma(M) \frac{(\cos\varphi_M)_+ (\cos\psi_N)_+}{|\overrightarrow{MN}|^2} dS_M \geq \beta(N), N \in \sigma_1. \tag{4a}$$

Приближенную дискретизацию задачи (3), (4) произведем следующим образом. Разобьем поверхность  $\sigma$  на  $m$  равных частей площади  $\Delta S$ . Будем задавать поверхность  $\sigma$  центрами элементарных площадок  $M_1, M_2, \dots, M_m$  и векторами нормали в них:  $\vec{n}(M_1), \vec{n}(M_2), \dots, \vec{n}(M_m)$ . Точно так же зададим поверхность  $\sigma_1$ , то есть разобьем ее на площадки той же площади  $\Delta S$  с центрами  $N_1, N_2, \dots, N_n$  и нормальными  $\vec{v}(N_1), \vec{v}(N_2), \dots, \vec{v}(N_n)$ . Точки задаются своими координатами  $M_j(x_j^{(1)}, y_j^{(1)}, z_j^{(1)}); N_i(x_i^{(2)}, y_i^{(2)}, z_i^{(2)})$ , где  $j=1, 2, \dots, m; i=1, 2, \dots, n$ . Далее функции  $\gamma(M)$  и  $\beta(N)$  заменяются последовательностями  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m$  и  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ , где  $\gamma_j = \gamma(M_j), \beta_i = \beta(N_i)$ . Введем переменные  $\mu_j = \gamma_j \cdot \Delta S$ , где  $j = 1, 2, \dots, m$ . Заменяя в задаче (3), (4) условие (4) на (4a), и интегралы интегральными суммами, легко видеть, что наша задача превратится в задачу линейного программирования:

$$J\{\vec{\mu}\} = \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_m \rightarrow \min, \tag{5}$$

$$\sum_{j=1}^m a_{ij} \mu_j \geq \beta_i, i = 1, 2, \dots, n, \tag{6}$$

где

$$a_{ij} = \frac{(\cos(\overrightarrow{M_j N_i} \wedge \vec{n}(M_j)))_+ \cdot (\cos(\overrightarrow{M_j N_i} \wedge \vec{v}(N_i)))_+}{|\overrightarrow{M_j N_i}|^2}. \tag{7}$$

Симплекс методом удобнее решать двойственную задачу, по отношению к задаче (5) – (7):

$$z(\vec{\delta}) = \sum_{i=1}^n \beta_i \delta_i \rightarrow \max, \quad (8)$$

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} \delta_i, j = 1, 2, \dots, m; \quad (9)$$

$$\delta_i \geq 0, i = \overline{1, n}.$$

Согласно двойственному симплекс методу, ответ исходной задачи прочитывается в последней строке последней симплекс таблицы задачи (8), (9) с использованием соответствия переменных. Таким образом, решение поставленной задачи не представляет особых трудностей. Центральной частью является формирование по массивам точек и нормальных векторов, то есть по четырем трехмерным массивам, матрицы  $(a_{ij})$ .

В нашем случае поверхность  $\sigma$  является частью потолка и, возможно, стен помещения. Рабочая поверхность может быть произвольной, но в случае, когда  $\sigma$  уже выбрана, для некоторых рабочих поверхностей задача может не иметь решения, поскольку какую-то часть  $\sigma_1$ , возможно, нельзя осветить в достаточной степени. В этом случае задача (8), (9) по первой теореме двойственности не будет иметь решения по причине неограниченности целевой функции на области допустимых значений, и машина должна это показать.

**3. Описание программной системы, реализующей оптимальный выбор источников и результаты численных экспериментов.** На основании описанной модели была создана программная система для нахождения оптимального распределения источников света на поверхности  $\sigma$  при заданных рабочей поверхности  $\sigma_1$  и нормативной освещенности  $\beta(N)$  на ней. Блок-схема программной системы представлена на рисунке 1.



Рис. 1. Блок-схема основного алгоритма

Fig. 1. Main algorithm flowchart

Рассмотрим подробнее каждый этап алгоритма, начиная с блоков, предполагающих взаимодействие с пользователем, а именно блоки ввода и вывода. Значения нормативной освещенности и желаемой точности считываются из отдельного текстового файла. Для задания геометрических поверхностей предлагается построить 3d-модель помещения в формате obj, выделив на ней необходимые полигоны с помощью материалов, которые будут представлены в формате mtl. Достаточно дать материалам правильные имена, чтобы программная система могла их распознать. Выходные данные тоже будут представлены в формате obj с сопутствующим файлом mtl. Эти форматы являются одними из самых популярных и поддерживаются большинством редакторов.

Вторым этапом является построение системы ограничений. Обозначим его функцией discrete, ведь по сути этот этап соответствует этапу дискретизации в описанной математической модели. Блок-схема функции discrete изображена на рисунке 2.

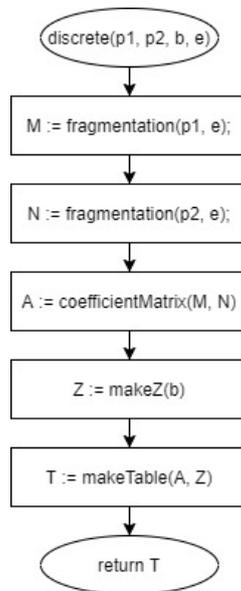


Рис. 2. Функция discrete  
Fig. 2. Function discrete

Сначала, обе поверхности разбиваются на элементарные площадки. Размер площадки зависит от параметра точности, введенного пользователем. Разбиение производится функцией fragmentation, которая принимает на вход поверхность в виде массива полигонов и длину стороны одной площадки. Функция возвращает массив элементарных площадок. Реализована она достаточно просто – вокруг каждого полигона строится сетка с заданным шагом, если центр ячейки сетки находится внутри исходного полигона, такую ячейку включаем в результирующий массив. Далее по полученным массивам строится матрица коэффициентов системы ограничений. Расчет отдельного коэффициента ведется согласно формуле (7). Однако, здесь мы можем построить систему ограничений сразу для двойственной задачи. Матрицу коэффициентов можно транспонировать и уравнивать неравенства «на ходу», в столбец свободных членов вносить единицы, а в целевую функцию значения  $\beta_i$ . После таких преобразований, сформировать первую симплекс таблицу не составляет труда. Она и станет возвращаемым значением из функции discrete.

Теперь, можно переходить к этапу решения задачи оптимизации. Обозначим его функцией solve. Блок-схема изображена на рисунке 3. Применив симплекс метод к полученной на предыдущем шаге таблице, вычисляем последнюю симплекс таблицу. В строке целевой функции прочитывается решение двойственной задачи.

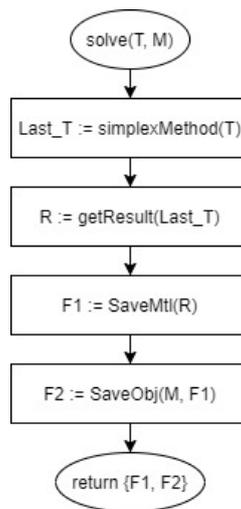


Рис. 3. Функция solve  
Fig. 3. Function solve

Исходным (искомым) переменным соответствуют переменные, добавленные в двойственную задачу для уравнивания неравенств. Таким образом, значения в столбцах, соответствующих добавленным переменным, и являются ответом на исходную задачу. Сохраним эти значения в массиве R. Осталось лишь

привести ответ к виду, удобному для графического представления. Как и говорилось, будет сформирован файл obj и соответствующий ему файл mtl. В файле obj будет сохранена освещающая поверхность, где каждая элементарная площадка станет отдельным полигоном. Сохранять рабочую поверхность нет необходимости, ее можно получить из файла исходных данных. В файле mtl будут сохранены материалы для каждого полигона результирующей модели. Чтобы показать разницу в яркости источников света используем желтый цвет разной интенсивности. Пользуясь тем, что цвета записываются в формате rgb со значениями параметров от 0 до 1, где желтому цвету соответствует комбинация (1, 1, 0), цвет  $i$ -го полигона определим комбинацией  $(a_i, a_i, 0)$ , где  $a_i = R_i/\max(R)$ . Так самая яркая площадка будет обозначена желтым цветом, а самая тусклая, не светящаяся совсем, черным. Результатом работы функции solve станут два файла с расширениями obj и mtl.

Программная система была реализована с помощью языка C++, что позволило получить высокую производительность, сократив как время работы программы, так и количество используемой оперативной памяти устройства. Возможность программной системы работать с форматом obj позволяет использовать практически любой современный 3d редактор для формирования входных данных и просмотра результатов работы программы. В данном случае использовался Blender.

Результаты работы программы изображены на рисунках 4, 5.

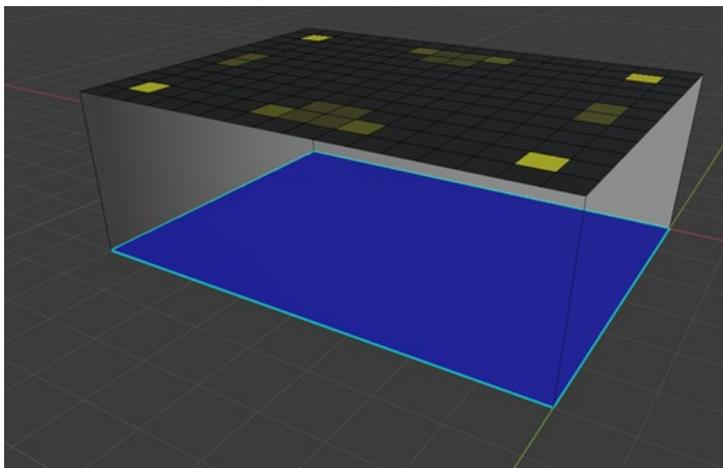


Рис. 4. Результаты работы (рабочая поверхность – пол)

Fig. 4. Results of work (working surface is floor)

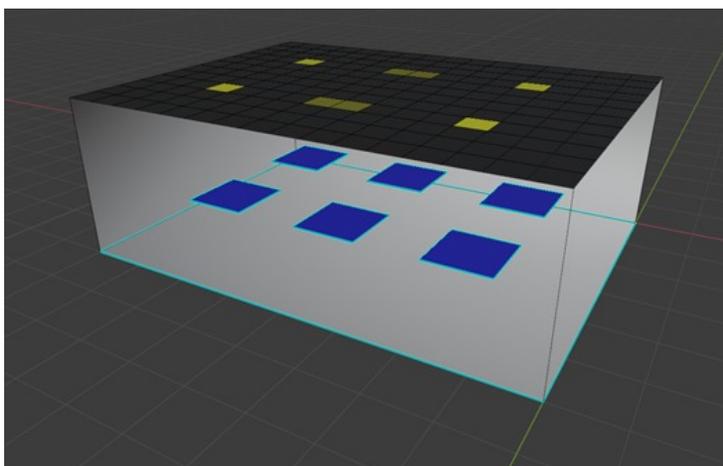


Рис. 5. Результаты работы (рабочая поверхность – столы)

Fig. 5. Results of work (working surface is tables)

Рабочая поверхность обозначена синим цветом. Для примеров выбраны два различных случая. В первом случае (рисунок 4) предлагается осветить все помещение, т. е. в качестве рабочей поверхности выбран пол помещения. Во втором случае (рисунок 5) рабочая поверхность находится на некоторой высоте относительно пола помещения и представляет собой отдельные участки – это пример, в котором рабочей поверхностью является поверхность, например, столов.

**4. Заключение.** Отметим, что построенная выше модель не учитывает вклад в световое поле отражения от стен помещения и других предметов. Мы считаем этот вклад незначительным. Однако в ряде

случаев это может быть не так. Авторы надеются рассмотреть вопрос об учете отражения в будущих публикациях.

### Список литературы

1. Брусенцев А. Г., Брусенцева В. С. 2010. Задача об оптимальном выборе источников тепла. Сборник трудов XXIII международной конференции «Математические методы в технике и технологиях» Саратов, 2: 43–46.
2. Брусенцев А. Г., Гордица Д. Д. 1982. Расчет оптимальной формы, площади и места расположения зенитных светопроемов одноэтажных производственных зданий. Сб. «Физико-математические методы в исследовании свойств строительных материалов и в их производстве». Сб. трудов МИСИ – БТИСМ, 184–189.
3. Брусенцев А. Г., Осипов О. В. 2012. Приближенное решение задачи об оптимальном выборе источников тепла. Научные ведомости Белгородского государственного университета, 5(26): 60–69.
4. Брусенцев А. Г., Осипов О. В. 2019. Оптимальное расположение источников тепла внутри областей сложной геометрической формы. Математическое моделирование, 31(4): 3–16.
5. Брусенцев А. Г., Чернышева К. Ю. 2017. Оптимизация естественной освещенности помещений произвольной формы. Вестник БГТУ им. В.Г. Шухова, 1: 181–184.
6. Brusentsev A. G., Osipov O. V. 2019. Optimal Location of Heat Sources Inside Areas with Complex Geometric Shapes. Mathematical Models and Computer Simulations, 11(6): 905–913. ISSN 2070-0482.

### References

1. Brusentsev A. G., Brusentseva V. S. 2010. Zadacha ob optimal'nom vybore istochnikov tepla [The problem of the optimal choice of heat sources]. Sbornik trudov XXIII mezhdunarodnoy konferentsii «Matematicheskie metody v tekhnike i tekhnologiyakh» Saratov, 2: 43–46.
2. Brusentsev A. G., Gorditsa D. D. 1982. Raschet optimal'noy formy, ploshchadi i mesta raspolozheniya zenitnykh svetoproemov odnoetazhnykh proizvodstvennykh zdaniy [Calculation of the optimal shape, area and location of zenith light openings in one-story industrial buildings]. Sb. «Fiziko-matematicheskie metody v issledovanii svoystv stroitel'nykh materialov i v ikh proizvodstve». Sb. trudov MISI – BTISM, 184–189.
3. Brusentsev A. G., Osipov O. V. 2012. Priblizhennoe reshenie zadachi ob optimal'nom vybore istochnikov tepla [An approximate solution to the problem of the optimal choice of heat sources]. Nauchnye vedomosti Belgorodskogo gosudarstvennogo universiteta, 5(26): 60–69.
4. Brusentsev A. G., Osipov O. V. 2019. Optimal'noe raspolozhenie istochnikov tepla vnutri oblastey slozhnoy geometricheskoy formy [Optimal location of heat sources inside areas with complex geometric shapes]. Matematicheskoe modelirovanie, 31(4): 3–16.
5. Brusentsev A. G., Chernysheva K. Yu. 2017. Optimizatsiya estestvennoy osveshchennosti pomeshcheniy proizvol'noy formy [Optimization of natural illumination in rooms of any shape]. Vestnik BGTU im. V.G. Shukhova, 1: 181–184.
6. Brusentsev A. G., Osipov O. V. 2019. Optimal Location of Heat Sources Inside Areas with Complex Geometric Shapes. Mathematical Models and Computer Simulations, 11(6): 905–913. ISSN 2070-0482.

Получена 27.12.2020

---

**Брусенцев Александр Григорьевич** – доктор физико-математических наук, доцент, профессор Белгородского государственного технологического университета им. В. Г. Шухова

 <http://orcid.org/0000-0002-2287-4353>

ул. Костюкова, 46, Белгород, 308012, Россия

E-mail: [brusentsev@mail.ru](mailto:brusentsev@mail.ru)

**Епифанов Сергей Игоревич** – студент Белгородского государственного технологического университета им. В. Г. Шухова

 <http://orcid.org/0000-0003-2854-175X>

ул. Костюкова, 46, Белгород, 308012, Россия

E-mail: [epif-sergey@yandex.ru](mailto:epif-sergey@yandex.ru)