

МАТЕМАТИКА MATHEMATICS

УДК 517.925.5
MSC 34C11
Оригинальное исследование

DOI 10.52575/2687-0959-2026-58-3-217-225
EDN MLUGYH

Функционалы Ляпунова – Красовского и частичная эквиограниченность в пределе решений с частичным контролем предысторий

Лапин К. С.^{1b}, Кистенев К. Д.^{2b}

(Статья представлена членом редакционной коллегии Половинкиным И. П.)

Мордовский государственный педагогический университет имени М. Е. Евсевьева,
Россия, 430007, г. Саранск, ул. Студенческая, 11 А
klapin@mail.ru, kistenev.kir@yandex.ru

Аннотация. Для решений функционально-дифференциальных уравнений запаздывающего типа введены понятия эквиограниченности решений, частичной эквиограниченности решений с частичным контролем предысторий, эквиограниченности в пределе решений и частичной эквиограниченности в пределе решений с частичным контролем предысторий. С использованием функционалов Ляпунова – Красовского получены достаточные условия указанных выше видов эквиограниченности решений и эквиограниченности в пределе решений. Полученные результаты могут быть использованы для анализа поведения решений сложных функционально-дифференциальных уравнений запаздывающего типа в различных задачах качественной теории дифференциальных уравнений, теоретической механики и математической физики.

Ключевые слова: функционально-дифференциальное уравнение, эквиограниченность в пределе решений, функционал Ляпунова – Красовского

Финансирование: Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда № 25-21-00830.

Для цитирования: Лапин К.С., Кистенев К.Д. Функционалы Ляпунова – Красовского и частичная эквиограниченность в пределе решений с частичным контролем предысторий. *Прикладная математика & Физика*. 2026;58(3):217–225. DOI 10.52575/2687-0959-2026-58-3-217-225 EDN MLUGYH

Original Research

Lyapunov – Krasovsky Functionals and Partial Ultimate Equiboundedness of Solutions with Partial Control of Prehistories

Kirill S. Lapin^{1b}, Kirill D. Kistenev^{2b}

(Article submitted by a member of the editorial board Polovinkin I. P.)

Mordovian State Pedagogical University named after M. E. Evsevieva,
11 A Studencheskaya St., Saransk 430007, Russia
klapin@mail.ru, kistenev.kir@yandex.ru

Abstract. For solutions of functional differential equations of delay type, the concepts of equiboundedness of solutions, partial equiboundedness of solutions with partial control of their prehistories, ultimate equiboundedness of solutions, and partial ultimate equiboundedness of solutions with partial control of their prehistories are introduced. Using Lyapunov-Krasovsky functionals, sufficient conditions for the above-mentioned types of equiboundedness of solutions and ultimate equiboundedness of solutions are obtained. The results obtained can be used to analyze the behavior of solutions of complex retarded functional differential equations in various problems in the qualitative theory of differential equations, theoretical mechanics, and mathematical physics.

Keywords: Functional Differential Equation, Ultimate Equiboundedness of Solutions, Lyapunov – Krasovsky functional

Funding: This work was supported by the Russian Science Foundation grant № 25-21-00830.

For citation: Lapin KS., Kistenev KD. Lyapunov – Krasovsky Functionals and Partial Ultimate Equiboundedness of Solutions with Partial Control of Prehistories. *Applied Mathematics & Physics*. 2026;58(3):217–225. (In Russ.)
DOI 10.52575/2687-0959-2026-58-3-217-225 EDN MLUGYH

1. Введение. В работе Т. Йосидзавы [1] на основе метода функционалов Ляпунова – Красовского [2] была создана теория ограниченности решений функционально-дифференциальных уравнений запаздывающего типа. Эта теория является аналогом классической теории Т. Йосидзавы ограниченности решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений [3] в том смысле, что в этой теории

вместо конечномерного пространства начальных положений решений используется бесконечномерное функциональное пространство предыстории решений. Основные трудности развития данной теории ограниченности решений, как это было показано в [1] (см. также [4]), возникают именно в связи с бесконечномерностью функционального пространства предыстории решений. С другой стороны, в работах К. С. Лапина (см., например, [5]–[8]) с использованием прямого метода Ляпунова была разработана теория частичной ограниченности решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений с частичным контролем начальных условий. Весьма значимой частью данной теории является подраздел этой теории, связанный с изучением различных видов ограниченности в пределе решений или, как еще говорят, финальной ограниченности решений. Наиболее общим видом такой ограниченности решений является частичная эквиограниченность в пределе решений с частичным контролем начальных условий. Теория ограниченности, развитая К. С. Лапиным, обобщает указанную выше теорию Йосидзавы ограниченности решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений в том смысле, что если часть переменных, относительно которых изучается ограниченность решений, совпадает с полным набором переменных и, кроме того, контролируемая часть координат начальных условий совпадает с полным набором координат начальных условий, то теория ограниченности, развитая в работах К. С. Лапина, становится теорией ограниченности Йосидзавы. При анализе соотношений между указанными выше теориями ограниченности решений естественным образом возникает интересная и важная для приложений задача построения на основе метода функционалов Ляпунова – Красовского теории частичной ограниченности решений функционально-дифференциальных уравнений запаздывающего типа с частичным контролем предыстории. Естественное требование к построению такой теории ограниченности состоит в том, чтобы эта теория, с одной стороны, обобщала теорию Йосидзавы ограниченности решений для функционально-дифференциальных уравнений, а с другой стороны, являлась бы в указанном выше смысле аналогом развитой в работах К. С. Лапина теории частичной ограниченности решений с частичным контролем начальных условий. Важной частью построения указанной выше теории ограниченности является введение различных видов понятия эквиограниченности и эквиограниченности в пределе решений функционально-дифференциальных уравнений запаздывающего типа и получение с использованием функционалов Ляпунова – Красовского достаточных условий этих видов эквиограниченности и эквиограниченности в пределе решений.

В настоящей работе для решений функционально-дифференциальных уравнений запаздывающего типа введены понятия эквиограниченности решений и частичной эквиограниченности решений с частичным контролем предыстории. С использованием функционалов Ляпунова – Красовского получено достаточное условие частичной эквиограниченности решений функционально-дифференциальных уравнений запаздывающего типа с частичным контролем предыстории (теорема 1). Как следствие (следствие 1) в терминах Ляпунова – Красовского получено достаточное условие эквиограниченности решений функционально-дифференциальных уравнений запаздывающего типа. Далее для решений функционально-дифференциальных уравнений запаздывающего типа введены понятия эквиограниченности в пределе решений и частичной эквиограниченности в пределе решений с частичным контролем предыстории. С использованием функционалов Ляпунова – Красовского получено достаточное условие частичной эквиограниченности в пределе решений функционально-дифференциальных уравнений запаздывающего типа с частичным контролем предыстории (теорема 2). Как следствие (следствие 2) в терминах функционалов Ляпунова – Красовского получено достаточное условие эквиограниченности в пределе решений функционально-дифференциальных уравнений запаздывающего типа.

2. Предварительные сведения. Напомним сначала необходимые понятия и конструкции (см., например, [1], [4]), которые требуются для рассмотрения функционально-дифференциальных уравнений запаздывающего типа.

Пусть $h > 0$ – фиксированная постоянная, и пусть $C([-h; 0], \mathbb{R}^n)$ – линейное пространство всех непрерывных отображений вида $\varphi : [-h; 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, рассматриваемое вместе с нормой $\|\varphi\| = \max_{(-h \leq \vartheta \leq 0)} \|\varphi(\vartheta)\|$, где $\|\varphi(\vartheta)\|$ – евклидова норма в $\mathbb{R}^n$ вектора $\varphi(\vartheta) \in \mathbb{R}^n$. Несложно видеть, что любое непрерывное отображение $x : [-h; A) \rightarrow \mathbb{R}^n$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $-h \leq t < A$, где $A > 0$ или $A = +\infty$, определяет непрерывное отображение $\bar{x} : [0; A) \rightarrow C([-h; 0], \mathbb{R}^n)$, $\bar{x}(t) = x_t \in C([-h; 0], \mathbb{R}^n)$, $0 \leq t < A$, где отображение $x_t : [-h; 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$ задается формулой $x_t(\vartheta) = x(t + \vartheta)$, $-h \leq \vartheta \leq 0$. Из этой формулы видно, что $x_t(0) = x(t)$ и $x_t(-h) = x(t - h)$. Далее указанное семейство отображений $x_t : [-h; 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$, где $0 \leq t < A$, будем называть параметризованной $C([-h; 0], \mathbb{R}^n)$ -траекторией или, более кратко, h -траекторией отображения $x : [-h; A) \rightarrow \mathbb{R}^n$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $-h \leq t < A$.

Рассмотрим функционально-дифференциальное уравнение запаздывающего типа

$$\dot{x}(t) = F(t, x_t), \quad t \in \mathbb{R}^+ \equiv [0; +\infty), \quad (1)$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $-h \leq t < +\infty$, $F : \mathbb{R}^+ \times C([-h; 0], \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^n$ – любое непрерывное отображение, $\dot{x}(t)$ – правосторонняя производная отображения $x(t)$ и семейство отображений $x_t : [-h; 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}^+$, определяется указанным выше способом по отображению $x(t)$, $-h \leq t < +\infty$. При $n \geq 2$ для уравнения (1) также используется название функционально-дифференциальная система запаздывающего типа.

Напомним, что решением $x(t, t_0, \varphi_0)$ уравнения (1) с начальными условиями $(t_0, \varphi_0) \in [0, A) \times C([-h; 0], \mathbb{R}^n)$, где $A > 0$ или $A = +\infty$, называется отображение $x(-, t_0, \varphi_0) : [t_0 - h; A) \rightarrow \mathbb{R}^n$, $x(t, t_0, \varphi_0) \in \mathbb{R}^n$, $t_0 - h \leq t < A$, для которого выполнены следующие условия:

- 1) $x(t, t_0, \varphi_0)$, $t_0 \leq t < A$ удовлетворяет уравнению (1), т. е. при $t_0 \leq t < A$ справедливо равенство $\dot{x}(t, t_0, \varphi_0) = F(t, x_t(t_0, \varphi_0))$, где $x_t(t_0, \varphi_0) = x(-, t_0, \varphi_0)_t$;
- 2) $x_{t_0}(t_0, \varphi_0) = \varphi_0$, т. е. $x_{t_0}(t_0, \varphi_0)(\vartheta) = x(t_0 + \vartheta, t_0, \varphi_0) = \varphi_0(\vartheta)$, $-h \leq \vartheta \leq 0$. Отображение $\varphi_0 : [-h; 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$ называется предисторией решения $x(t, t_0, \varphi_0)$ от момента времени $t_0 - h$ до момента времени t_0 или, более кратко, предисторией этого решения.

Далее всегда будем предполагать, что для непрерывного отображения $F(t, \varphi)$, при помощи которого определяется правая часть уравнения (1), выполнено локальное условие Липшица по переменной φ . Хорошо известно [4], что непрерывность отображения $F(t, \varphi)$ и выполнение указанного условия Липшица для этого отображения обеспечивают, соответственно, существование и единственность решения $x(t, t_0, \varphi_0)$ уравнения (1) с любыми заданными начальными условиями $(t_0, \varphi_0) \in \mathbb{R}^+ \times C([-h; 0], \mathbb{R}^n)$.

Многочисленные примеры функционально-дифференциальных уравнений запаздывающего типа вида (1) дают дифференциальные уравнения с положительным постоянным запаздыванием по времени. В самом деле, рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t-h)), \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad (2)$$

с постоянным запаздыванием $h > 0$, где $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $-h \leq t < +\infty$, и отображение $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ – любое непрерывное отображение. При $n \geq 2$ для уравнения (2) также используется название дифференциальная система с постоянным запаздыванием. Легко видеть, что каждое дифференциальное уравнение (2) с постоянным запаздыванием $h > 0$ определяет функционально-дифференциальное уравнение запаздывающего типа $\dot{x}(t) = F(t, x_t)$, $t \in \mathbb{R}^+$, где непрерывное отображение $F : \mathbb{R}^+ \times C([-h; 0], \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^n$ задается по следующей формуле:

$$F(t, \varphi) = f(t, \varphi(0), \varphi(-h)).$$

Напомним (см., например, [9]), что верхней правой производной непрерывной функции $f : [a; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ называется отображение $f'^+ : [a; +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, определяемое по следующей формуле:

$$f'^+(t) = \overline{\lim}_{\delta \rightarrow +0} \frac{1}{\delta} (f(t+\delta) - f(t)).$$

Хорошо известно [9], что непрерывная функция $f : [a; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ является невозрастающей тогда и только тогда, когда $f'^+(t) \leq 0$ при всех $t \geq a$. Ясно, что если непрерывная функция $f : [a; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ является дифференцируемой в обычном смысле, то $f'^+(t) = f'(t)$, $t \geq a$, где $f'(t)$ – обычная производная функции $f(t)$.

Рассмотрим теперь для любого непрерывного функционала $V(t, \varphi)$ и решения $x(\tau, t, \varphi)$ уравнения (1) с любыми начальными условиями (t, φ) непрерывную функцию $v(\tau) = V(\tau, x_\tau(t, \varphi))$, $\tau \geq t$. При помощи этой непрерывной функции $v(\tau)$ производная непрерывного функционала $V : \mathbb{R}^+ \times C([-h; 0], \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ в силу уравнения (1) определяется как отображение $\dot{V} : \mathbb{R}^+ \times C([-h; 0], \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, задаваемое по следующей формуле:

$$\dot{V}(t, \varphi) = v'^+(\tau)|_{\tau=t} = v'^+(t) = \overline{\lim}_{\delta \rightarrow +0} \frac{1}{\delta} \{V(t+\delta, x_{t+\delta}(t, \varphi)) - V(t, \varphi)\}. \quad (3)$$

3. Полученные результаты. Перейдем теперь к введению различных видов эквиограниченности решений функционально-дифференциального уравнения (1).

Введем сначала понятие эквиограниченности решений для функционально-дифференциальных уравнений запаздывающего типа, которое является аналогом понятия эквиограниченности решений для систем обыкновенных дифференциальных уравнений [1].

Определение 1. Будем говорить, что решения (имеется в виду все решения) функционально-дифференциального уравнения (1) эквиограничены, если для произвольных $\alpha \geq 0$ и $t_0 \geq 0$ существует такое число $\beta = \beta(t_0, \alpha) > \alpha$, что для h -траектории $x_t(t_0, \varphi_0)$ любого решения $x(t, t_0, \varphi_0)$ уравнения (1) с предисторией φ_0 , удовлетворяющей условию $\|\varphi_0\| \leq \alpha$, справедливо следующее неравенство:

$$\|x_t(t_0, \varphi_0)\| \leq \beta, \quad t \geq t_0.$$

Несложно видеть, что понятие эквиограниченности решений функционально-дифференциального уравнения (1) эквивалентно тому, что для любых $\alpha \geq 0$ и $t_0 \geq 0$ существует такое число $\beta = \beta(t_0, \alpha) > \alpha$, что для каждого решения $x(t, t_0, \varphi_0)$ уравнения (1) с предисторией φ_0 , удовлетворяющей условию $\|\varphi_0\| \leq \alpha$, справедливо неравенство $\|x(t, t_0, \varphi_0)\| \leq \beta$ при всех $t \geq t_0$.

Далее для произвольной точки $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, и любого фиксированного числа $k \in \mathbb{Z}$, удовлетворяющего условию $1 \leq k \leq n$, будем использовать обозначение $y = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k$. Кроме того,

для произвольного непрерывного отображения $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) \in C([-h; 0], \mathbb{R}^n)$ и любого фиксированного числа $k \in \mathbb{Z}$, удовлетворяющего условию $1 \leq k \leq n$, далее будем использовать обозначение $\varphi^{(k)} = (\varphi_1, \dots, \varphi_s) \in C([-h; 0], \mathbb{R}^k)$. Таким образом, для каждой точки $\varphi(\vartheta) = (\varphi_1(\vartheta), \dots, \varphi_n(\vartheta)) \in \mathbb{R}^n$, $\vartheta \in [-h; 0]$, имеем $\varphi^{(k)}(\vartheta) = (\varphi_1(\vartheta), \dots, \varphi_k(\vartheta)) \in \mathbb{R}^k$. Наконец, для любого решения $x(t, t_0, \varphi_0)$ уравнения (1) семейство отображений $y_t : [-h; 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$, где $y_t(t_0, \varphi_0) = x_t(t_0, \varphi_0)^{(k)}$, далее будем называть y - h -траекторией решения $x(t, t_0, \varphi_0)$.

Введем теперь понятие частичной эквиограниченности решений с частичным контролем предыстории для функционально-дифференциальных уравнений запаздывающего типа, которое является аналогом понятия частичной эквиограниченности решений с частичным контролем начальных условий для систем обыкновенных дифференциальных уравнений [8].

Определение 2. Будем говорить, что решения (имеется в виду все решения) функционально-дифференциального уравнения (1) эквиограничены по части переменных $y = (x_1, \dots, x_k)$, $1 \leq k \leq n$, с частичным контролем предыстории $\varphi_0^{(k)} = ((\varphi_0)_1, \dots, (\varphi_0)_k) \in C([-h; 0], \mathbb{R}^k)$ или, более кратко, y -эквиограничены с $\varphi_0^{(k)}$ -контролем, если для произвольных $\alpha \geq 0$ и $t_0 \geq 0$ существует такое число $\beta = \beta(t_0, \alpha) > \alpha$, что для y - h -траектории $y_t(t_0, \varphi_0)$ любого решения $x(t, t_0, \varphi_0)$ уравнения (1) с предысторией φ_0 , удовлетворяющей условию $\|\varphi_0^{(k)}\| \leq \alpha$, справедливо следующее неравенство:

$$\|y_t(t_0, \varphi_0)\| \leq \beta, \quad t \geq t_0.$$

Легко видеть, что если в определении 2 положить $k = n$, то получим определение 1 эквиограниченности решений функционально-дифференциального уравнения (1).

Нетрудно проверить, что понятие y -эквиограниченности с $\varphi_0^{(k)}$ -контролем решений функционально-дифференциального уравнения (1) эквивалентно тому, что для любых чисел $\alpha \geq 0$ и $t_0 \geq 0$ существует такое число $\beta = \beta(t_0, \alpha) > \alpha$, что для каждого решения $x(t, t_0, \varphi_0)$ уравнения (1) с предысторией φ_0 , удовлетворяющей условию $\|\varphi_0^{(k)}\| \leq \alpha$, справедливо неравенство $\|y(t, t_0, \varphi_0)\| \leq \beta$ при всех $t \geq t_0$.

Далее для каждого числа $R_0 > 0$ и любого целого $1 \leq k \leq n$ будем через $C^{(k)}(R_0)$ обозначать подмножество $\{\varphi \in C([-h; 0], \mathbb{R}^n) \mid \|\varphi^{(k)}\| \geq R_0\}$ множества $C([-h; 0], \mathbb{R}^n)$. При $k = n$ подмножество $C^{(k)}(R_0)$ будем обозначать через $C(R_0)$. Кроме того, для произвольных функций $a(t, r)$ и $b(r)$, где $t, r \in \mathbb{R}^+$, далее будем использовать запись $a(t, r) \in \mathcal{K}$ и $b(r) \in \mathcal{K}$, если эти функции удовлетворяют, соответственно, следующим требованиям:

- 1) функция $a(t, r) \geq 0$ является при каждом фиксированном значении $t \in \mathbb{R}^+$ неубывающей по r функцией;
- 2) функция $b(r) \geq 0$ является неубывающей функцией, для которой выполнено условие $b(r) \rightarrow +\infty$ при $r \rightarrow +\infty$.

Получим теперь с использованием функционалов Ляпунова – Красовского следующее достаточное условие y -эквиограниченности с $\varphi_0^{(k)}$ -контролем решений функционально-дифференциального уравнения (1).

Теорема 1. Предположим, что для уравнения (1) существуют непрерывный функционал $V : \mathbb{R}^+ \times C([-h; 0], \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ (функционал Ляпунова – Красовского), функции $b(r) \in \mathcal{K}$, $a(t, r) \in \mathcal{K}$, число $R_0 > 0$ и целое число $1 \leq k \leq n$, для которых выполнены следующие условия:

- 1) для любых $(t, \varphi) \in \mathbb{R}^+ \times C^{(k)}(R_0)$ справедливо двойное неравенство

$$b(\|\varphi^{(k)}(0)\|) \leq V(t, \varphi) \leq a(t, \|\varphi^{(k)}\|);$$

- 2) для любых $(t, \varphi) \in \mathbb{R}^+ \times C^{(k)}(R_0)$ справедливо неравенство

$$\dot{V}(t, \varphi) \leq 0.$$

Тогда решения функционально-дифференциального уравнения (1) являются y -эквиограниченными с $\varphi_0^{(k)}$ -контролем.

Доказательство. Найдем для любых $\alpha \geq 0$ и $t_0 \geq 0$ такое $\beta = \beta(t_0, \alpha) > \alpha$, что для y - h -траектории $y_t(t_0, \varphi_0)$ каждого решения $x(t, t_0, \varphi_0)$ уравнения (1) с предысторией φ_0 , удовлетворяющей условию $\|\varphi_0^{(k)}\| \leq \alpha$, справедливо неравенство $\|y_t(t_0, \varphi_0)\| \leq \beta$ при всех $t \geq t_0$. Несложно видеть, что доказательство достаточно провести для случая, когда y - h -траектория $y_t(t_0, \varphi_0)$ решения $x(t, t_0, \varphi_0)$ удовлетворяют условию $\|y_t(t_0, \varphi_0)\| \geq R_0$ при любых $t \geq t_0$. Это следует из того, что если $\|y_{t_1}(t_0, \varphi_0)\| < R_0$ для некоторого $t_1 \geq t_0$, то либо $\|y_t(t_0, \varphi_0)\| < R_0$ при всех $t \geq t_0$, либо найдется такое $t_2 \geq t_1$, что $\|y_{t_2}(t_0, \varphi_0)\| = R_0$. Поэтому далее будем рассматривать только случай, когда $\|y_t(t_0, \varphi_0)\| \geq R_0$ при любых $t \geq t_0$. Из условия 1) теоремы получаем, что в рассматриваемом случае для y - h -траектории $y_t(t_0, \varphi_0)$ и h -траектории $x_t(t_0, \varphi_0)$ любого решения $x(t, t_0, \varphi_0)$ уравнения (1) справедливо неравенство

$$b(\|y_t(t_0, \varphi_0)(0)\|) \leq V(t, x_t(t_0, \varphi_0)), \quad t \geq t_0.$$

Из условия 2) теоремы и формулы (3) получаем, что в рассматриваемом случае для h -траектории $x_t(t_0, \varphi_0)$ любого решения $x(t, t_0, \varphi_0)$ уравнения (1) функция $V(t, x_t(t_0, \varphi_0))$ от переменной $t \geq t_0$ является невозрастающей и, следовательно, имеем неравенство

$$V(t, x_t(t_0, \varphi_0)) \leq V(t_0, \varphi_0), \quad t \geq t_0.$$

Из условия 1) теоремы получаем неравенство $V(t_0, \varphi_0) \leq a(t_0, \|\varphi_0^{(k)}\|)$. Так как функция $a(t, r)$ удовлетворяет условию $a(t, r) \in \mathcal{K}$, то при $\|\varphi_0^{(k)}\| \leq \alpha$ имеем

$$V(t_0, \varphi_0) \leq a(t_0, \|\varphi_0^{(k)}\|) \leq a(t_0, \alpha)$$

и, следовательно, для y - h -траектории $y_t(t_0, \varphi_0)$ и h -траектории $y_t(t_0, \varphi_0)$ любого решения $x(t, t_0, \varphi_0)$, где $\|\varphi_0^{(k)}\| \leq \alpha$, уравнения (1) получаем при всех $t \geq t_0$ неравенства

$$b(\|y_t(t_0, \varphi_0)(0)\|) \leq V(t, x_t(t_0, \varphi_0)) \leq V(t_0, \varphi_0) \leq a(t_0, \alpha).$$

Пользуясь теперь тем, что функция $b(r)$ удовлетворяет условию $b(r) \in \mathcal{K}$, выберем некоторое число $\beta = \beta(t_0, \alpha) > \alpha$, для которого справедливо неравенство $a(t_0, \alpha) \leq b(\beta)$. При помощи этого неравенства получаем неравенство

$$b(\|y_t(t_0, \varphi_0)(0)\|) \leq b(\beta), \quad t \geq t_0.$$

Так как $b(r) \in \mathcal{K}$, то из последнего неравенства следует справедливость неравенства $\|y_t(t_0, \varphi_0)(0)\| \leq \beta$ при всех $t \geq t_0$. Из этого, пользуясь равенством $y_t(t_0, \varphi_0)(0) = y(t, t_0, \varphi_0)$ для всех $t \geq t_0$, получаем $\|y(t, t_0, \varphi_0)\| \leq \beta$ для всех $t \geq t_0$, что эквивалентно справедливости неравенства $\|y_t(t_0, \varphi_0)\| \leq \beta$ при всех $t \geq t_0$. Таким образом, показано, что решения функционально-дифференциального уравнения (1) являются y -эквиограниченными с $\varphi_0^{(k)}$ -контролем.

Если теорему 1 рассмотреть для случая, когда $k = n$, то эта теорема превращается в следующее достаточное условие эквиограниченности решений функционально-дифференциального уравнения (1) в терминах функционалов Ляпунова – Красовского.

Следствие 1. Пусть для уравнения (1) существуют непрерывный функционал $V: \mathbb{R}^+ \times C([-h; 0], \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ (функционал Ляпунова – Красовского), функции $b(r) \in \mathcal{K}$, $a(t, r) \in \mathcal{K}$ и число $R_0 > 0$, для которых выполнены следующие условия:

1) для любых $(t, \varphi) \in \mathbb{R}^+ \times C(R_0)$ справедливо двойное неравенство

$$b(\|\varphi(0)\|) \leq V(t, \varphi) \leq a(t, \|\varphi\|);$$

2) для любых $(t, \varphi) \in \mathbb{R}^+ \times C(R_0)$ справедливо неравенство

$$\dot{V}(t, \varphi) \leq 0.$$

Тогда решения функционально-дифференциального уравнения (1) являются эквиограниченными.

Перейдем теперь к введению различных видов эквиограниченности в пределе решений функционально-дифференциального уравнения (1).

Начнём с введения понятия эквиограниченности в пределе решений для функционально-дифференциальных уравнений запаздывающего типа, которое является аналогом понятия эквиограниченности в пределе решений для систем обыкновенных дифференциальных уравнений [1].

Определение 3. Будем говорить, что решения (имеется в виду все решения) функционально-дифференциального уравнения (1) эквиограничены в пределе, если для этого уравнения найдется такое число $B > 0$, и для произвольных $\alpha \geq 0$ и $t_0 \geq 0$ существует такое число $T = T(t_0, \alpha) \geq 0$, что для h -траектории $x_t(t_0, \varphi_0)$ любого решения $x(t, t_0, \varphi_0)$ уравнения (1) с предысторией φ_0 , удовлетворяющей условию $\|\varphi_0\| \leq \alpha$, справедливо следующее неравенство:

$$\|x_t(t_0, \varphi_0)\| < B, \quad t \geq t_0 + T.$$

Несложно видеть, что понятие эквиограниченности в пределе решений функционально-дифференциального уравнения (1) эквивалентно тому, что для этого уравнения найдется такое число $B > 0$, и для произвольных $\alpha \geq 0$ и $t_0 \geq 0$ существует такое число $T = T(t_0, \alpha) \geq 0$, что для любого решения $x(t, t_0, \varphi_0)$ уравнения (1) с предысторией φ_0 , удовлетворяющей условию $\|\varphi_0\| \leq \alpha$, справедливо неравенство $\|x(t, t_0, \varphi_0)\| < B$ при всех $t \geq t_0 + T - h$.

Введем теперь для функционально-дифференциальных уравнений запаздывающего типа понятие частичной эквиограниченности в пределе решений с частичным контролем предысторий, которое является аналогом понятия частичной эквиограниченности в пределе решений с частичным контролем начальных условий для систем обыкновенных дифференциальных уравнений [5].

Определение 4. Будем говорить, что решения (имеется в виду все решения) функционально-дифференциального уравнения (1) эквиограничены в пределе по части переменных $y = (x_1, \dots, x_k)$, $1 \leq k \leq n$, с

частичным контролем предисторий $\varphi_0^{(k)} \in C([-h; 0], \mathbb{R}^k)$ или, более кратко, y -эквиограниченны в пределе с $\varphi_0^{(k)}$ -контролем, если для этого уравнения найдется такое число $B > 0$, и для произвольных чисел $\alpha \geq 0$ и $t_0 \geq 0$ существует такое число $T = T(t_0, \alpha) \geq 0$, что для y -траектории $y_t(t_0, \varphi_0)$ любого решения $x(t, t_0, \varphi_0)$ уравнения (1) с предисторией φ_0 , удовлетворяющей условию $\|\varphi_0^{(k)}\| \leq \alpha$, справедливо следующее неравенство:

$$\|y_t(t_0, \varphi_0)\| < B, \quad t \geq t_0 + T.$$

Легко видеть, что если в определении 4 положить $k = n$, то получим определение 3 эквиограниченности в пределе решений функционально-дифференциального уравнения (1).

Нетрудно проверить, что понятие y -эквиограниченности в пределе с $\varphi_0^{(k)}$ -контролем решений функционально-дифференциального уравнения (1) эквивалентно тому, что для этого уравнения найдется такое число $B > 0$, и для произвольных чисел $\alpha \geq 0$ и $t_0 \geq 0$ существует такое число $T = T(t_0, \alpha) \geq 0$, что для любого решения $x(t, t_0, \varphi_0)$ уравнения (1) с предисторией φ_0 , удовлетворяющей условию $\|\varphi_0^{(k)}\| \leq \alpha$, справедливо неравенство $\|y(t, t_0, \varphi_0)\| < B$ при всех $t \geq t_0 + T - h$.

Далее для произвольного фиксированного числа $R_0 > 0$ и любой непрерывной функции $c(r)$, где $r \in \mathbb{R}^+$, будем использовать запись $c(r) \in \mathcal{K}(R_0)$, если для этой функции выполнено условие $c(r) > 0$ при $r > R_0$.

Получим теперь с использованием функционалов Ляпунова – Красовского следующее достаточное условие y -эквиограниченности в пределе с $\varphi_0^{(k)}$ -контролем решений функционально-дифференциального уравнения (1).

Теорема 2. Предположим, что для уравнения (1) существуют непрерывный функционал $V : \mathbb{R}^+ \times C([-h; 0], \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ (функционал Ляпунова – Красовского), число $R_0 > 0$, функции $b(r) \in \mathcal{K}$, $a(t, r) \in \mathcal{K}$, $c(r) \in \mathcal{K}(R_0)$ и целое число $1 \leq k \leq n$, для которых выполнены следующие условия:

1) для любых $(t, \varphi) \in \mathbb{R}^+ \times C^{(k)}(R_0)$ справедливо двойное неравенство

$$b(\|\varphi^{(k)}(0)\|) \leq V(t, \varphi) \leq a(t, \|\varphi^{(k)}\|);$$

2) для любых $(t, \varphi) \in \mathbb{R}^+ \times C^{(k)}(R_0)$ справедливо неравенство

$$\dot{V}(t, \varphi) \leq -c(\|\varphi^{(k)}(0)\|);$$

3) существуют числа $R > R_0$ и $\gamma > 0$, для которых справедливо неравенство $a(t, R) \leq \gamma$ при всех $t \geq 0$.

Тогда решения функционально-дифференциального уравнения (1) являются y -эквиограниченными в пределе с $\varphi_0^{(k)}$ -контролем.

Доказательство. Так же, как в доказательстве теоремы 1, несложно видеть, что доказательство достаточно провести для случая, когда y -траектория $y_t(t_0, \varphi_0)$ решения $x(t, t_0, \varphi_0)$ уравнения (1) удовлетворяют при любых $t \geq t_0$ условию $\|y_t(t_0, \varphi_0)\| \geq R_0$. Поэтому далее будем рассматривать только этот случай. Очевидно, что при выполнении условий теоремы решения уравнения (1) y -эквиограничены с $\varphi_0^{(k)}$ -контролем, поскольку из выполнения условий теоремы следует выполнение условий теоремы 1. Покажем теперь, что при выполнении условий доказываемой теоремы решения уравнения (1) являются y -эквиограниченными в пределе с $\varphi_0^{(k)}$ -контролем. Для этого нужно найти для уравнения (1) такое число $B > 0$ и, кроме того, для произвольных чисел $\alpha \geq 0$ и $t_0 \geq 0$ найти такое число $T = T(t_0, \alpha) \geq 0$, что для y -траектории $y_t(t_0, \varphi_0)$ любого решения $x(t, t_0, \varphi_0)$ уравнения (1) с предисторией φ_0 , удовлетворяющей условию $\|\varphi_0^{(k)}\| \leq \alpha$, будет справедливо неравенство $\|y_t(t_0, \varphi_0)\| < B$ при всех $t \geq t_0 + T$ или, что эквивалентно, будет справедливо неравенство $\|y(t, t_0, \varphi_0)\| < B$ при всех $t \geq t_0 + T - h$. Для нахождения указанных выше чисел B и $T = T(t_0, \alpha)$ исследуем по отдельности следующие случаи:

$$1) \|\varphi_0^{(k)}\| \leq \alpha \leq R \text{ или } \|\varphi_0^{(k)}\| \leq R \leq \alpha; \quad 2) R < \|\varphi_0^{(k)}\| \leq \alpha.$$

Исследуем сначала случай 1). Из условия 1) данной теоремы получаем, что для h -траектории $x_t(t_0, \varphi_0)$ любого решения $x(t, t_0, \varphi_0)$ уравнения (1) при всех $t \geq t_0$ имеет место неравенство $b(\|(x_t(t_0, \varphi_0))^{(k)}(0)\|) \leq V(t, x_t(t_0, \varphi_0))$. Так как $x_t(t_0, \varphi_0)(0) = x(t, t_0, \varphi_0)$, то $(x_t(t_0, \varphi_0))^{(k)}(0) = y(t, t_0, \varphi_0)$ и, следовательно, при всех $t \geq t_0$ получаем неравенство $b(\|y(t, t_0, \varphi_0)\|) \leq V(t, x_t(t_0, \varphi_0))$. Из условия 2) теоремы следует, что для h -траектории $x_t(t_0, \varphi_0)$ любого решения $x(t, t_0, \varphi_0)$ уравнения (1) при всех $t \geq t_0$ справедливо неравенство $\dot{V}(t, x_t(t_0, \varphi_0)) \leq 0$. Из этого неравенства и формулы (3) следует, что для h -траектории $x_t(t_0, \varphi_0)$ любого решения $x(t, t_0, \varphi_0)$ уравнения (1) функция $V(t, x_t(t_0, \varphi_0))$ от переменной $t \geq t_0$ является невозрастающей и, поэтому, при всех $t \geq t_0$ получаем неравенство $V(t, x_t(t_0, \varphi_0)) \leq V(t_0, \varphi_0)$. Из условия 1) теоремы имеем неравенство $V(t_0, \varphi_0) \leq a(t_0, \|\varphi_0^{(k)}\|)$ и, следовательно, при всех $t \geq t_0$ имеем неравенство $b(\|y(t, t_0, \varphi_0)\|) \leq a(t_0, \|\varphi_0^{(k)}\|)$. Так как $a(t, r) \in \mathcal{K}$ и $\|\varphi_0^{(k)}\| \leq R$, то получаем для любых $t \geq t_0$ неравенство $b(\|y(t, t_0, \varphi_0)\|) \leq a(t_0, R)$. Из этого неравенства и условия 3) теоремы следует, что при всех $t \geq t_0$ справедливо неравенство $b(\|y(t, t_0, \varphi_0)\|) \leq \gamma$. Пользуясь теперь тем, что $b(r) \in \mathcal{K}$, выберем такое число $B > 0$, что $\gamma < b(B)$. При

помощи неравенства $\gamma < b(B)$ получаем при всех $t \geq t_0$ неравенство $b(\|y(t, t_0, \varphi_0)\|) < b(B)$. Так как $b(r) \in \mathcal{K}$, то из последнего неравенства для всех $t \geq t_0$ имеем неравенство $\|y(t, t_0, \varphi_0)\| < B$, т. е. имеем неравенство $\|y(t, t_0, \varphi_0)\| < B$ при всех $t \geq t_0 + T - h$, где $T = h$. Последнее неравенство эквивалентно тому, что для y - h -траектории $y_t(t_0, \varphi_0)$ решения $x(t, t_0, \varphi_0)$ справедливо неравенство $\|y_t(t_0, \varphi_0)\| < B$ при всех $t \geq t_0 + T$. Таким образом, в случае 1), т. е. в случае, когда предыстория φ_0 решения $x(t, t_0, \varphi_0)$ удовлетворяет неравенству $\|\varphi_0^{(k)}\| \leq \alpha \leq R$ или неравенству $\|\varphi_0^{(k)}\| \leq R \leq \alpha$, в качестве искомых чисел $B > 0$ и $T = T(t_0, \alpha) \geq 0$ можно взять, соответственно, выбранное выше число $B > 0$ и число $T = h$. Отметим, что проведенные выше рассуждения говорят о том, что для любого решения $x(t, t_0, \varphi_0)$ уравнения (1) с предысторией φ_0 , удовлетворяющей условию $\|\varphi_0^{(k)}\| \leq R$, справедливо неравенство $\|y(t, t_0, \varphi_0)\| < B$ при всех $t \geq t_0$.

Исследуем теперь случай 2), т. е. случай, когда для предыстории φ_0 решения $x(t, t_0, \varphi_0)$ уравнения (1) справедливо двойное неравенство $R < \|\varphi_0^{(k)}\| \leq \alpha$. Покажем, что в этом случае найдется такое число $T = T(t_0, \alpha) \geq 0$, что при всех $t \geq t_0 + T - h$ справедливо неравенство $\|y(t, t_0, \varphi_0)\| < B$, где число $B > 0$ является ранее выбранным числом, удовлетворяющим условию $\gamma < b(B)$. Как было отмечено выше, из выполнения условий доказываемой теоремы следует, что решения уравнения (1) являются y -эквиограниченными с $\varphi_0^{(k)}$ -контролем. Поэтому для любых чисел $\alpha > R$ и $t_0 \geq 0$ имеется такое число $\beta = \beta(t_0, \alpha) > 0$, что для каждого решения $x(t, t_0, \varphi_0)$ уравнения (1) с предысторией φ_0 , удовлетворяющей условию $R < \|\varphi_0^{(k)}\| \leq \alpha$, справедливо неравенство $\|y(t, t_0, \varphi_0)\| \leq \beta$ при всех $t \geq t_0$. Для доказательства существования указанного выше числа $T = T(t_0, \alpha)$ покажем, что для любого решения $x(t, t_0, \varphi_0)$ уравнения (1) с предысторией φ_0 , удовлетворяющей условию $R < \|\varphi_0^{(k)}\| \leq \alpha$, всегда найдется такое $t' > t_0$, что $\|y(t', t_0, \varphi_0)\| \leq R$. Предположим от противного, что для любого $t \geq t_0$ выполнено условие $\|y(t, t_0, \varphi_0)\| > R$. Тогда имеем $R < \|y(t, t_0, \varphi_0)\| \leq \beta$ при всех $t \geq t_0$. Из условия 2) получаем, что для числа $\mu = \min_{(R \leq r \leq \beta)} c(r) > 0$ справедливо неравенство $\dot{V}(t, \varphi) \leq -\mu$ при любых $t \geq t_0$ и любых $\varphi \in C^{(k)}(R_0)$, для которых $R \leq \|\varphi^{(k)}(0)\| \leq \beta$. Так как для решения $x(t, t_0, \varphi_0)$ при всех $t \geq t_0$ имеется равенство $\dot{V}(t, x_t(t_0, \varphi_0)) = V'^+(t, x_t(t_0, \varphi_0))$, то из указанного выше неравенства $\dot{V}(t, \varphi) \leq -\mu$ получаем при всех $t \geq t_0$ неравенство $V'^+(t, x_t(t_0, \varphi_0)) < -\mu$. Из этого следует, что справедливо неравенство $V(t, x_t(t_0, \varphi_0)) - V(t_0, \varphi_0) \leq -\mu(t - t_0)$ для всех $t \geq t_0$. Из последнего неравенства получаем, что при достаточно больших $t \geq t_0$ будем иметь неравенство $V(t, x_t(t_0, \varphi_0)) < 0$, что противоречит условию $0 \leq b(\|x_t(t_0, \varphi_0)^{(k)}(0)\|) \leq V(t, x_t(t_0, \varphi_0))$ при всех $t \geq t_0$. Таким образом, предположение о том, что для любого $t \geq t_0$ выполнено условие $\|y(t, t_0, \varphi_0)\| > R$, неверно и, следовательно, для любого решения $x(t, t_0, \varphi_0)$ уравнения (1) с предысторией φ_0 , удовлетворяющей условию $R < \|\varphi_0^{(k)}\| \leq \alpha$, всегда найдется такое $t' > t_0$, что $\|y(t', t_0, \varphi_0)\| \leq R$. Из этого получаем, что для решения $x(t, t', x_{t'}(t_0, \varphi_0))$ уравнения (1) справедливо неравенство $\|y(t, t', x_{t'}(t_0, \varphi_0))\| < B$ при всех $t \geq t'$, поскольку $\|y_{t'}(t_0, \varphi_0)\| \leq R$. Так как $x(t, t_0, \varphi_0) = x(t, t', x_{t'}(t_0, \varphi_0))$ при всех $t \geq t'$, то для любого решения $x(t, t_0, \varphi_0)$ уравнения (1) с предысторией φ_0 , удовлетворяющей условию $R < \|\varphi_0^{(k)}\| \leq \alpha$, имеем $\|y(t, t_0, \varphi_0)\| = \|y(t, t', x_{t'}(t_0, \varphi_0))\| < B$ при всех $t \geq t'$. Для того, чтобы найти нужное число $T = T(t_0, \alpha) \geq 0$, сделаем оценку сверху числа $t' > t_0$. Из условия 2) доказываемой теоремы получаем, что для числа $\mu_1 = \min_{(R_1 \leq r \leq \beta)} c(r) > 0$, где $R_1 = R_1(t_0, \alpha) = \|y_{t'}(t_0, \varphi_0)\|$, справедливо неравенство $V(t, x_t(t_0, \varphi_0)) - V(t_0, \varphi_0) \leq -\mu_1(t - t_0)$ при всех $t \geq t_0$. Если последнее неравенство рассмотреть при $t = t'$, то получим неравенство $t' \leq t_0 + ((V(t_0, \varphi_0) - V(t', x_{t'}(t_0, \varphi_0)))/\mu_1)$. При помощи этого неравенства, а также неравенств $V(t_0, \varphi_0) \leq a(t_0, \alpha)$ и $b(R_1) = b(\|y_{t'}(t_0, \varphi_0)\|) \leq V(t', x_{t'}(t_0, \varphi_0))$, получаем неравенство $t' \leq t_0 + ((a(t_0, \alpha) - b(R_1))/\mu_1)$. Из этого неравенства следует, что для любого решения $x(t, t_0, \varphi_0)$ уравнения (1) с предысторией φ_0 , удовлетворяющей условию $R < \|\varphi_0^{(k)}\| \leq \alpha$, справедливо неравенство $\|y(t, t_0, \varphi_0)\| < B$ при всех $t \geq t_0 + T - h$, где $T = h + ((a(t_0, \alpha) - b(R_1))/\mu_1)$. Последнее неравенство эквивалентно тому, что для y - h -траектории $y_t(t_0, \varphi_0)$ этого решения $x(t, t_0, \varphi_0)$ выполнено условие $\|y_t(t_0, \varphi_0)\| < B$ при всех $t \geq t_0 + T$. Ясно, что число $T \geq 0$ зависит от α и t_0 , поскольку $\mu_1 = \mu_1(R_1(t_0, \alpha), \beta(t_0, \alpha))$ и $b(R_1) = b(R_1(t_0, \alpha))$. Таким образом, в случае 2), т. е. в случае, когда предыстория φ_0 решения $x(t, t_0, \varphi_0)$ удовлетворяет двойному неравенству $R < \|\varphi_0^{(k)}\| \leq \alpha$, в качестве искомых чисел $B > 0$ и $T = T(t_0, \alpha) \geq 0$ можно взять, соответственно, выбранное ранее число $B > 0$ и число $T = h + ((a(t_0, \alpha) - b(R_1))/\mu_1)$. Суммируя результаты исследований случаев 1) и 2), получаем, что при выполнении условий доказываемой теоремы решения функционально-дифференциального уравнения (1) являются y -эквиограниченными в пределе с $\varphi_0^{(k)}$ -контролем.

Если теорему 2 рассмотреть для случая, когда $k = n$, то эта теорема превращается в следующее достаточное условие эквиограниченности в пределе решений функционально-дифференциального уравнения (1) в терминах функционалов Ляпунова – Красовского.

Следствие 2. Пусть для уравнения (1) существуют непрерывный функционал $V : \mathbb{R}^+ \times C([-h; 0], \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ (функционал Ляпунова – Красовского), число $R_0 > 0$ и функции $b(r) \in \mathcal{K}$, $a(t, r) \in \mathcal{K}$, $c(r) \in \mathcal{K}(R_0)$, для которых выполнены следующие условия: 1) для любых $(t, \varphi) \in \mathbb{R}^+ \times C(R_0)$ справедливо двойное неравенство

$$b(\|\varphi(0)\|) \leq V(t, \varphi) \leq a(t, \|\varphi\|);$$

2) для любых $(t, \varphi) \in \mathbb{R}^+ \times C(R_0)$ справедливо неравенство

$$\dot{V}(t, \varphi) \leq -c(\|\varphi(0)\|);$$

3) существуют числа $R > R_0$ и $\gamma > 0$, для которых справедливо неравенство $a(t, R) \leq \gamma$ при всех $t \geq 0$. Тогда решения функционально-дифференциального уравнения (1) являются эквиограниченными в пределе.

В заключение работы рассмотрим пример на применение теоремы 2. Пусть задана дифференциальная система

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -3x_1(t) + x_1(t-h) + x_1(t) \sin^2(x_2(t-h)) - e^t x_1(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t) + x_1^2(t-h) + x_2(t) + x_2^2(t-h) \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}^+,$$

с постоянным запаздыванием $h > 0$. Покажем при помощи теоремы 2, что решения этой системы (x_1) -эквиограничены в пределе с $\varphi_0^{(1)}$ -контролем. Определим для данной дифференциальной системы функционал Ляпунова – Красовского $V : \mathbb{R}^+ \times C([-h; 0], \mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}$, полагая

$$V(t, \varphi) = \varphi_1^2(0) + e^{-t} + \int_{-h}^0 \varphi_1^2(\vartheta) d\vartheta, \quad \varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in C([-h; 0], \mathbb{R}^2).$$

Очевидно, что для любых $(t, \varphi) \in \mathbb{R}^+ \times C([-h; 0], \mathbb{R}^2)$ справедливы неравенства $\|\varphi^{(1)}(0)\|^2 \leq V(t, \varphi) \leq (1+h)\|\varphi^{(1)}\|^2 + e^{-t}$, поскольку $\varphi_1(0)^2 = \|\varphi^{(1)}(0)\|^2 \leq \|\varphi^{(1)}\|^2$ и $\max_{(-h \leq \vartheta \leq 0)} \varphi_1^2(\vartheta) = \max_{(-h \leq \vartheta \leq 0)} \|\varphi^{(1)}(\vartheta)\|^2 = \|\varphi^{(1)}\|^2$. Поэтому, если в качестве функций $b(r)$, $a(t, r) \in \mathcal{K}$ взять функции $b(r) = r^2$ и $a(t, r) = (1+h)r^2 + e^{-t}$, то условие 1) теоремы 2 выполнено при любом $R_0 > 0$. Рассмотрим теперь производную $\dot{V}(t, \varphi) = v'(\tau)|_{\tau=t} = v'(t)$ в силу заданной системы, где

$$v(\tau) = V(\tau, x_\tau) = x_1^2(\tau) + e^{-\tau} + \int_{-h}^0 x_1^2(\tau + \vartheta) d\vartheta = x_1(\tau)^2 + e^{-\tau} + \int_{\tau-h}^{\tau} x_1^2(s) ds$$

и $x(\tau, t, \varphi) = (x_1(\tau), x_2(\tau))$ – решение заданной системы с начальными условиями (t, φ) . Для производной $v'(t)$ имеем

$$\begin{aligned} v'(t) &= 2x_1(t)\dot{x}_1(t) + x_1^2(t) - x_1^2(t-h) = \\ &= 2x_1(t)(-3x_1(t) + x_1(t-h) + x_1(t) \sin^2(x_2(t-h)) - e^t x_1(t)) - e^{-t} + x_1^2(t) - x_1^2(t-h) = \\ &= -6x_1^2(t) + 2x_1(t)x_1(t-h) + 2x_1^2(t) \sin^2(x_2(t-h)) - 2e^t x_1^2(t) - e^{-t} + x_1^2(t) - x_1^2(t-h). \end{aligned}$$

Так как $2x_1(t)x_1(t-h) \leq x_1^2(t) + x_1^2(t-h)$ и $x_1^2(t) \sin^2(x_2(t-h)) \leq x_1^2(t)$ для любых $t \in \mathbb{R}^+$, то получаем

$$v'(t) \leq -2x_1^2(t) - 2e^t x_1^2(t) - e^{-t} \leq -4x_1^2(t) = -4\varphi_1(0)^2 = -4\|\varphi^{(1)}(0)\|^2, \quad t \in \mathbb{R}^+.$$

Из этого следует, что для всех $(t, \varphi) \in \mathbb{R}^+ \times C([-h; 0], \mathbb{R}^2)$ справедливо неравенство $\dot{V}(t, \varphi) \leq -4\|\varphi^{(1)}(0)\|^2$. Поэтому, если в качестве функции $c(r) \in \mathcal{K}(R_0)$ взять функцию $c(r) = 4r^2$, то получим, что условие 2) теоремы 2 выполнено при любом $R_0 > 0$. Ясно, что условие 3) теоремы 2 также выполнено, поскольку для любого числа $R > R_0$ справедливо неравенство $a(t, R) = (1+h)R^2 + e^{-t} \leq \gamma$ при всех $t \geq 0$, где $\gamma = (1+h)R^2 + 1$. Таким образом, для заданной дифференциальной системы с постоянным запаздыванием все условия теоремы 2 выполнены и, следовательно, решения этой системы (x_1) -эквиограничены в пределе с $\varphi_0^{(1)}$ -контролем.

Список литературы

1. Yoshizawa T. Stability Theory by Liapunov's Second Method. *Publications of the Mathematical Society of Japan* 9. Tokyo: Math. Soc. of Japan; 1966. 223 p.
2. Красовский Н.Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Гостехиздат; 1959. 211 с.
3. Йосидзава Т. Функция Ляпунова и ограниченность решений. *Математика*. 1965;5:95-127.
4. Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир; 1984. 421 с.
5. Лапин К.С. Ограниченность в пределе решений систем дифференциальных уравнений по части переменных с частично контролируемыми начальными условиями. *Дифференциальные уравнения*. 2013; 49(10):1281-1286. DOI: 10.1134/S0374064113100051.
6. Лапин К.С. Частичная равномерная ограниченность решений систем дифференциальных уравнений с частично контролируемыми начальными условиями. *Дифференциальные уравнения*. 2014;50(3):309-316. DOI: 10.1134/S0374064114030042.
7. Лапин К.С. Ограниченность по Пуассону решений систем дифференциальных уравнений. Саранск: РИЦ МГПУ; 2022. 163 с.
8. Лапин К.С. Высшие производные функций Ляпунова и частичная ограниченность решений с частично контролируемыми начальными условиями. *Математические заметки*. 2017;101(6):883-893. DOI: 10.4213/mzm11156

9. Руш Н., Абетс П., Лалуа М. Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. М.: Мир; 1980. 300 с.

References

1. Yoshizawa T. Stability Theory by Liapunov's Second Method. *Publications of the Mathematical Society of Japan* 9. Tokyo: Math. Soc. of Japan; 1966. 223 p.
2. Krasovskii NN. Nekotorye zadachi teorii ustoichivosti dvizheniya [Some problems of the theory of stability of motion]. Moscow: Gostekhizdat; 1959. 211 p.
3. Yoshizawa T. Liapunovs function and boundedness of solutions. *Funkcialaj Ekvacioj*. 1959;2:95–142. (In Russ.)
4. Hale JK. Theory of Functional Differential Equations. New York: Springer-Verlag; 1977. 365 p. (In Russ.)
5. Lapin KS. Ultimate Boundedness with Respect to Part of the Variables of Solutions of Systems of Differential Equations with Partly Controlled Initial Conditions. *Differential Equations*. 2013;49(10):1246–1251. DOI: 10.1134/S0012266113100054. (In Russ.)
6. Lapin KS. Partial Uniform Boundedness of Solutions of Systems of Differential Equations with Partly Controlled Initial Conditions. *Differential Equations*. 2014;50(3):305–311. DOI: 10.1134/S0012266114030045. (In Russ.)
7. Lapin KS. Ogranichennost' po Puassonu resheniy sistem differentsial'nykh uravnenii [Poisson boundedness of solutions to systems of differential equations.] Saransk: RITS MGPU; 2022. 163 p.
8. Lapin KS. Higher-Order Derivatives of Lyapunov Functions and Partial Boundedness of Solutions with Partially Controllable Initial Conditions. *Mathematical Notes*. 2017;101(6):1000–1008. DOI:10.1134/S0001434617050273 (In Russ.)
9. Rouche N., Habets P. Laloy M. Stability Theory by Liapunov's Direct Method. New York: Springer-Verlag; 1977. 396 p. (In Russ.)

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 05.02.2026

Received February 5, 2026

Поступила после рецензирования 20.03.2026

Revised March 20, 2026

Принята к публикации 24.03.2026

Accepted March 24, 2026

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Лапин Кирилл Сергеевич – доктор физико-математических наук, доцент кафедры математики, экономики и методик обучения, Мордовский государственный педагогический университет имени М. Е. Евсевьева, г. Саранск, Россия

Кистенев Кирилл Дмитриевич – аспирант кафедры математики, экономики и методик обучения, Мордовский государственный педагогический университет имени М. Е. Евсевьева, г. Саранск, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Kirill S. Lapin – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Mathematics, Economics and Educational Methods, Mordovian State Pedagogical University named after M. E. Evseviev, Saransk, Russia

Kirill D. Kistenev – Graduate Student of the Department of Mathematics, Economics and Educational Methods, Mordovian State Pedagogical University named after M. E. Evseviev, Saransk, Russia

К содержанию