

Однозначная разрешимость задачи Дирихле для линейного эллиптического уравнения второго порядка наиболее общего вида

Алхутов Ю. А.¹ , Чечкин Г. А.² 

¹ Владимирский государственный университет им. А. Г. и Н. Г. Столетовых,
Россия, 600024, г. Владимир, пр. Строителей, 11
yurij-alkhutov@yandex.ru

² Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,
Россия, 119991, г. Москва, Ленинские Горы, 1
chekchin@mech.math.msu.su

Аннотация. В работе рассмотрена однородная задача Дирихле для линейного эллиптического уравнения второго порядка общего вида с предельными показателями суммируемости младших коэффициентов в ограниченной области из $\mathbb{R}^n$. Для этой задачи доказаны теоремы существования и единственности в случае $n > 2$.

Ключевые слова: строго липшицева область, линейное эллиптическое уравнение, однозначная разрешимость, предельный показатель Соболева

Финансирование: работа выполнена при поддержке РФФ (проект 25-11-00133).

Для цитирования: Алхутов Ю.А., Чечкин Г.А. Однозначная разрешимость задачи Дирихле для линейного эллиптического уравнения второго порядка наиболее общего вида. *Прикладная математика & Физика*. 2026;58(3):270–276. DOI 10.52575/2687-0959-2026-58-3-270-276 EDN GNUGNJ

Original Research

Unique Solvability of the Dirichlet Problem for a Second Order Linear Elliptic Equation of the Most General Form

Yurij A. Alkhutov , Gregory A. Chechkin 

¹ A. G. and N. G. Stoletov Vladimir State University,
11 Stroitelej Ave., Vladimir, 600024, Russia
yurij-alkhutov@yandex.ru

² Lomonosov Moscow State University,
1 Leninskie Gory, Moscow 119991, Russia
yurij-alkhutov@yandex.ru

Abstract. In this paper, we consider the homogeneous Dirichlet problem for a general second-order linear elliptic equation with limit integrability exponents of the lower-order coefficients in a bounded domain in $\mathbb{R}^n$. The existence and uniqueness theorems are proved for this problem in the case $n > 2$.

Keywords: Strictly Lipschitz Domain, Linear Elliptic Equation, Unique Solvability, Sobolev Limit Exponent

Financing: This work was supported by the Russian Science Foundation (project 25-11-00133).

For citation: Alkhutov YuA., Chechkin GA. Unique Solvability of the Dirichlet Problem for a Second Order Linear Elliptic Equation of the Most General Form. *Applied Mathematics & Physics*. 2026;58(3):270–276. (In Russ.). DOI 10.52575/2687-0959-2026-58-3-270-276 EDN GNUGNJ

1. Введение. В данной работе обсуждаются вопросы однозначной разрешимости эллиптических уравнений второго порядка общего вида в случае, когда коэффициенты младших членов уравнения удовлетворяют предельным показателям интегрируемости по Соболеву.

Эта работа предворяет исследования по повышенной суммируемости градиентов решений краевых задач различного типа для таких уравнений. О повышенной суммируемости см. [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16].

В настоящей работе мы рассматриваем линейный эллиптический оператор второго порядка общего вида

$$\mathcal{L}u := \operatorname{div} (A(x) \nabla u) + \operatorname{div} (a(x) u) + b(x) \cdot \nabla u + c(x) u,$$

рассматриваемый в ограниченной области $D \subset \mathbb{R}^n$, где $n > 2$. Здесь $A(x) = \{A_{ij}(x)\}$ – измеримая симметричная матрица, удовлетворяющая условию равномерной эллиптичности

$$\alpha |\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n A_{ij}(x) \xi_i \xi_j \leq \alpha^{-1} |\xi|^2 \quad \text{для почти всех } x \in D \text{ и всех } \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \alpha = \operatorname{const} > 0. \quad (1)$$

Вектор-функции $a(x) = (a^1(x), \dots, a^n(x))$, $b(x) = (b^1(x), \dots, b^n(x))$ и коэффициент $c(x)$ удовлетворяют следующим условиям:

$$a_j(x) \in L_n(D), \quad b_j(x) \in L_n(D), \quad j = 1, \dots, n, \quad c(x) \in L_{\frac{n}{2}}(D). \quad (2)$$

Введем соболевское пространство функций $\overset{\circ}{W}_2^1(D)$, как пополнение финитных бесконечно дифференцируемых в ограниченной области D функций по норме

$$\|u\|_{\overset{\circ}{W}_2^1(D)} = \left(\int_D |\nabla u|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Данное выражение является нормой в силу хорошо известного неравенства Фридрихса. В настоящей работе изучается задача Дирихле

$$\mathcal{L}u = \operatorname{div} f, \quad f = (f_1, \dots, f_n), f_j \in L_2(D), u \in \overset{\circ}{W}_2^1(D), \quad (3)$$

в ограниченной области $D \subset \mathbb{R}^n$, где $n > 2$.

Под решением задачи (3) понимается функция $u \in \overset{\circ}{W}_2^1(D)$, для которой выполнено интегральное тождество

$$\int_D (A(x) \nabla u \cdot \nabla \varphi) dx + \int_D (a(x) \cdot \nabla \varphi) u dx - \int_D (b(x) \cdot \nabla u) \varphi dx - \int_D c(x) u \varphi dx = \int_D (f \cdot \nabla \varphi) dx \quad (4)$$

для всех пробных функций $\varphi \in \overset{\circ}{W}_2^1(D)$. При рассмотрении вопроса об однозначной разрешимости задачи Дирихле (3) нам потребуется дополнительное условие вида

$$\int_D (c(x) \varphi - (a(x) \cdot \nabla \varphi)) dx \leq 0, \quad (5)$$

выполненное на неотрицательных функциях $\varphi \in \overset{\circ}{W}_2^1(D)$. В доказательстве единственности решений задачи (3) при выполнении условий (1), (2) и (5) мы опираемся на оценку из теоремы 1 (см. [17]) вида

$$\left(\int_D |\nabla u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq C(\alpha, n, \|a\|_{L_n(D)}, \|b\|_{L_n(D)}, D) \left(\int_D |f|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (6)$$

в которой постоянная $C(\alpha, n, \|a\|_{L_n(D)}, \|b\|_{L_n(D)}, D)$ из (6) представлена явно.

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. Если выполнены условия (1), (2), (5) и $f \in (L_2(D))^n$, то задача Дирихле (3) однозначно разрешима и для решения справедлива оценка (6).

Будем пользоваться следующим представлением младших коэффициентов $a, b \in (L_n(D))^n$ и $c \in (L_{\frac{n}{2}}(D))^n$ рассматриваемого уравнения

$$\begin{aligned} a &= \check{a} + \widehat{a}, \quad \check{a} \in (L_\infty(D))^n, \quad \widehat{a} \in (L_n(D))^n, \quad \|\widehat{a}\|_{L_n(D)} \leq \theta_1, \\ b &= \check{b} + \widehat{b}, \quad \check{b} \in (L_\infty(D))^n, \quad \widehat{b} \in (L_n(D))^n, \quad \|\widehat{b}\|_{L_n(D)} \leq \theta_1, \\ c &= \check{c} + \widehat{c}, \quad \check{c} \in (L_\infty(D))^n, \quad \widehat{c} \in (L_{\frac{n}{2}}(D))^n, \quad \|\widehat{c}\|_{L_{\frac{n}{2}}(D)} \leq \theta_2 \end{aligned} \quad (7)$$

с достаточно малыми постоянными $\theta_1, \theta_2 \in (0, 1)$, которые определяются в дальнейших рассуждениях.

2. Однозначная разрешимость поставленной задачи. В этом разделе однозначная разрешимость задачи Дирихле (3) доказывается в произвольной ограниченной области D .

Доказательство существования решения задачи Дирихле (3) основано на вспомогательных утверждениях, которые устанавливаются ниже. Сначала нам потребуются оценки билинейной формы, связанной с оператором $\mathcal{L}$ из (3), имеющую вид

$$\mathcal{L}(u, v) = \int_D (A \nabla u \cdot \nabla v) dx + \int_D (a \cdot \nabla v) u dx - \int_D (b \cdot \nabla u) v dx - \int_D c u v dx \quad (8)$$

и определенную на функциях $u, v \in \overset{\circ}{W}_2^1(D)$.

Лемма 1. Если коэффициенты оператора $\mathcal{L}$ из (3) удовлетворяют условиям (1) и (2), то

$$\mathcal{L}(u, u) \geq \frac{\alpha}{2} \int_D |\nabla u|^2 dx - C \int_D u^2 dx, \quad (9)$$

где $C = C(\alpha, a, b, c, n)$.

Доказательство. В силу условия равномерной эллиптичности (1) имеем

$$\mathcal{L}(u, u) \geq \alpha \int_D |\nabla u|^2 dx - \left| \int_D (a \cdot \nabla u) u dx \right| - \left| \int_D (b \cdot \nabla u) u dx \right| - \left| \int_D cu^2 dx \right|. \quad (10)$$

Сначала оценим второе и третье слагаемые в правой части тождества (8). Оба слагаемых оцениваются одинаково и мы приведем только оценку первого из них. Из (7) имеем

$$\int_D (a \cdot \nabla u) u dx = \int_D (\check{a} \cdot \nabla u) u dx + \int_D (\widehat{a} \cdot \nabla u) u dx. \quad (11)$$

Для первого интеграла из правой части в (11) имеем

$$\left| \int_D (\check{a} \cdot \nabla u) u dx \right| \leq C \|\check{a}\|_{L_\infty(D)} \int_D |\nabla u| |u| dx$$

и из неравенства Коши с $\varepsilon > 0$ найдем

$$\left| \int_D (\check{a} \cdot \nabla u) u dx \right| \leq \varepsilon \int_D |\nabla u|^2 dx + C(\varepsilon) \|\check{a}\|_{L_\infty(D)}^2 \int_D u^2 dx. \quad (12)$$

Второй интеграл в правой части (11) оценим с помощью неравенства Гёльдера, в силу которого

$$\left| \int_D (\widehat{a} \cdot \nabla u) u dx \right| \leq \|\widehat{a}\|_{L_n(D)} \left(\int_D |\nabla u|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_D |u|^{\frac{2n}{n-2}} dx \right)^{\frac{n-2}{2n}}. \quad (13)$$

По неравенству Соболева

$$\left(\int_D |u|^{\frac{2n}{n-2}} dx \right)^{\frac{n-2}{2n}} \leq C(n) \left(\int_D |\nabla u|^2 dx \right)^{1/2}. \quad (14)$$

Отсюда и из (13) с учетом (7) получим

$$\left| \int_D (\widehat{a} \cdot \nabla u) u dx \right| \leq C(n) \theta_1 \int_D |\nabla u|^2 dx. \quad (15)$$

Из (12) и (15) найдем

$$\left| \int_D (a \cdot \nabla u) u dx \right| \leq \varepsilon \int_D |\nabla u|^2 dx + C(\varepsilon) \|\check{a}\|_{L_\infty(D)}^2 \int_D u^2 dx + C(n) \theta_1 \int_D |\nabla u|^2 dx. \quad (16)$$

Аналогично для третьего слагаемого

$$\left| \int_D (b \cdot \nabla u) u dx \right| \leq \varepsilon \int_D |\nabla u|^2 dx + C(\varepsilon) \|\check{b}\|_{L_\infty(D)}^2 \int_D u^2 dx + C(n) \theta_1 \int_D |\nabla u|^2 dx. \quad (17)$$

Теперь перейдем к оценке последнего слагаемого в (10). В силу (7) имеем

$$\int_D cu^2 dx = \int_D \check{c}u^2 dx + \int_D \widehat{c}u^2 dx. \quad (18)$$

Ясно, что

$$\left| \int_D \check{c}u^2 dx \right| \leq \|\check{c}\|_{L_\infty(D)} \int_D u^2 dx. \quad (19)$$

Второй интеграл в правой части (18) оценим с помощью неравенства Гёльдера и Соболева (14), в силу которых

$$\left| \int_D \widehat{c} u^2 dx \right| \leq \|\widehat{c}\|_{L_{\frac{n}{2}}(D)} \left(\int_D |u|^{\frac{2n}{n-2}} dx \right)^{\frac{n-2}{n}} \leq C(n) \theta_2 \int_D |\nabla u|^2 dx. \quad (20)$$

В итоге, после соответствующего выбора ε , θ_1 и θ_2 из (10), (16), (17), (19) и (20) приходим к оценке (9). Лемма доказана.

Лемма 2. Если коэффициенты оператора $\mathcal{L}$ из (3) удовлетворяют условиям (1) и (2), то для фиксированного $u \in \overset{\circ}{W}_2^1(D)$ отображение $v \mapsto \mathcal{L}(u, v)$, где форма $\mathcal{L}(u, v)$ определена в (8), является ограниченным линейным функционалом на $\overset{\circ}{W}_2^1(D)$ и справедлива оценка

$$|\mathcal{L}(u, v)| \leq C \|u\|_{\overset{\circ}{W}_2^1(D)} \|v\|_{\overset{\circ}{W}_2^1(D)}, \quad (21)$$

где $C = C(\alpha, a, b, c, n)$.

Доказательство. В силу условия равномерной эллиптичности (1) имеем

$$\left| \int_D (A \nabla u \cdot \nabla v) dx \right| \leq \alpha^{-1} \|u\|_{\overset{\circ}{W}_2^1(D)} \|v\|_{\overset{\circ}{W}_2^1(D)}. \quad (22)$$

Исходя из условий (2) и (5), второе и третье слагаемые формы (8) оценим по неравенству Гёльдера:

$$\begin{aligned} \left| \int_D (a \cdot \nabla v) u dx \right| &\leq \|v\|_{\overset{\circ}{W}_2^1(D)} \int_D |a|^2 u^2 dx \leq \\ &\leq \|v\|_{\overset{\circ}{W}_2^1(D)} \left(\int_D |a|^n dx \right)^{2/n} \left(\int_D |u|^{\frac{2n}{n-2}} dx \right)^{\frac{n-2}{2n}} \end{aligned} \quad (23)$$

и

$$\begin{aligned} \left| \int_D (b \cdot \nabla u) v dx \right| &\leq \|u\|_{\overset{\circ}{W}_2^1(D)} \int_D |b|^2 v^2 dx \leq \\ &\leq \|u\|_{\overset{\circ}{W}_2^1(D)} \left(\int_D |b|^n dx \right)^{2/n} \left(\int_D |v|^{\frac{2n}{n-2}} dx \right)^{\frac{n-2}{2n}}. \end{aligned} \quad (24)$$

Поступая аналогично с четвёртым слагаемым, получаем

$$\left| \int_D c u v dx \right| \leq \left(\int_D |c|^{\frac{n}{2}} dx \right)^{2/n} \left(\int_D |u|^{\frac{2n}{n-2}} dx \right)^{\frac{n-2}{2n}} \left(\int_D |v|^{\frac{2n}{n-2}} dx \right)^{\frac{n-2}{2n}}. \quad (25)$$

По теореме вложения Соболева (14) из (22), (23), (24) и (25) приходим к (21). Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1.

Определим для $\sigma > \sigma_0 > 0$ оператор $\mathcal{L}_\sigma$ формулой $\mathcal{L}_\sigma u = \mathcal{L}u - \sigma u$. Из оценки (9) леммы 1 следует, что соответствующая оператору $\mathcal{L}_\sigma$ форма

$$\mathcal{L}_\sigma(u, u) = \int_D (A \nabla u \cdot \nabla u) dx + \int_D (a \cdot \nabla u) u dx - \int_D (b \cdot \nabla u) u dx - \int_D c u^2 dx + \sigma \int_D u^2 dx$$

при достаточно большом σ будет коэрцитивной, то есть

$$\mathcal{L}_{\sigma_0}(u, u) \geq \alpha/2 \int_D |\nabla u|^2 dx.$$

Здесь $\sigma_0 = \sigma_0(\alpha, a, b, c, n)$.

Отметим, что при таком выборе $\sigma = \sigma_0$ билинейная форма

$$\mathcal{L}_{\sigma_0}(u, v) = \int_D (A \nabla u \cdot \nabla v) dx + \int_D (a \cdot \nabla v) u dx - \int_D (b \cdot \nabla u) v dx - \int_D c u v dx + \sigma_0 \int_D u v dx \quad (26)$$

является ограниченной. Это следует из оценки (21) и оценки

$$\int_D uv \, dx \leq \|u\|_{L_2(D)} \|v\|_{L_2(D)} \leq C(n, D) \|u\|_{W_2^1(D)} \|v\|_{W_2^1(D)},$$

вытекающей из неравенства Фридрихса. Таким образом, оператор $\mathcal{L}_{\sigma_0}$ является ограниченным и коэрцитивным в гильбертовом пространстве $H = W_2^1(D)$.

Пусть H^{-1} — сопряженное пространство к H . Определим оператор $\mathfrak{Z}_u : H \rightarrow H^{-1}$ равенством

$$\mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}_u v = \int_D uv \, dx, \quad v \in H. \quad (27)$$

Покажем, что отображение $\mathfrak{Z}_u$ является компактным. Для этого заметим, что отображение $\mathfrak{Z}_u$ можно представить в виде композиции

$$\mathfrak{Z}_u = \mathfrak{Z}_1 \circ \mathfrak{Z}_2. \quad (28)$$

Здесь $\mathfrak{Z}_2 : H \rightarrow L_2(D)$ — естественное вложение. По теореме о компактности вложения Кондрашова–Соболева [18, Теорема 7.22] оператор $\mathfrak{Z}_2$ является компактным, а отображение $\mathfrak{Z}_1 : L_2(D) \rightarrow H^{-1}$ определено формулами (27) и (28). Из того, что оператор $\mathfrak{Z}_1$ непрерывен и оператор $\mathfrak{Z}_2$ компактен, следует компактность оператора $\mathfrak{Z}$.

Уравнение $\mathcal{L}u = l$ для $u \in H$, где l -функционал в пространстве H^{-1} , сопряженном к $H = W_2^1(D)$, эквивалентно уравнению $\mathcal{L}_{\sigma_0} u + \sigma_0 \mathfrak{Z}_u u = l$. По лемме Лакса – Мильграма (см. [19]) обратный оператор $\mathcal{L}_{\sigma_0}^{-1}$ задает непрерывное взаимно однозначное отображение H^{-1} на H . Поэтому, применяя этот оператор к предыдущему уравнению, получаем эквивалентное уравнение

$$u + \sigma_0 \mathcal{L}_{\sigma_0}^{-1} \mathfrak{Z}_u u = \mathcal{L}_{\sigma_0}^{-1} l. \quad (29)$$

Отображение $T = -\sigma_0 \mathcal{L}_{\sigma_0}^{-1} \mathfrak{Z}_u$ в силу компактности $\mathfrak{Z}$ также компактно. Следовательно, по альтернативе Фредгольма (см., например, теорема 5.3 [18, §5.3]) существование функции $u \in H$, удовлетворяющей уравнению (29), является следствием единственности в H тривиального решения уравнения $\mathcal{L}u = 0$.

Однозначная разрешимость задачи Дирихле (3) вытекает из априорной оценки (6), в силу которой решение единственно. Теорема доказана.

Список литературы

1. Боярский Б.В. Обобщенные решения системы дифференциальных уравнений первого порядка эллиптического типа с разрывными коэффициентами. *Математический сборник*. 1957;43(85,4):451–503.
2. Meyers N.G. An L^p -estimate for the gradient of solutions of second order elliptic divergence equations. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3-e serie*. 1963;17(3):189–206.
3. Zhikov V.V. On some Variational Problems. *Russian Journal of Mathematical physics*. 1997;5(1):105–116.
4. Alkhutov Yu.A., Chechkin G.A. Increased Integrability of the Gradient of the Solution to the Zaremba Problem for the Poisson Equation. *Russian Academy of Sciences. Doklady Mathematics*, 2021;103(2): 69–71.
5. Alkhutov Yu.A., Chechkin G.A. The Meyer’s Estimate of Solutions to Zaremba Problem for Second-order Elliptic Equations in Divergent Form. *C R Mécanique*. 2021;349(2):299–304.
6. Alkhutov Yu.A., Chechkin G.A., Maz’ya V.G. On the Bojarski–Meyers Estimate of a Solution to the Zaremba Problem, *Arch Rational Mech Anal*. 2022;245(2):1197–1211.
7. Чечкин Г.А., Чечкина Т.П. Оценка Боярского–Мейерса для дивергентных эллиптических уравнений второго порядка. Два пространственных примера. *Проблемы математического анализа*. 2022;119:107–116.
8. Alkhutov Yu.A., Chechkin G.A. On Higher Integrability of the Gradient of a Solution to the Zaremba Problem for $p(\cdot)$ -Laplace Equation in a Plane Domain. *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2023;44(8):3197–3206.
9. Чечкина А.Г. О задаче Зарембы для p -эллиптического уравнения. *Математический сборник*. 2023;214(9):144–160.
10. Chechkin G.A. The Meyers Estimates for Domains Perforated along the Boundary. *Mathematics*. 2021;9(23):#3015.
11. Chechkin G.A., Chechkina T.P. On Higher Integrability of Solutions to Poisson Equation with Drift in Domains Perforated Along the Boundary. *Russian Journal of Mathematical Physics*. 2024;31(3):407–417.
12. Alkhutov Yu.A., Chechkin G.A. On the Bojarski–Meyers Estimate for the Solution of the Dirichlet Problem for a Second-Order Linear Elliptic Equation with Drift. *Journal of Mathematical Sciences*. 2024;286(1):1–13.
13. Alkhutov Yu.A., Chechkin G.A. Bojarski–Meyers estimate for a solution to the Zaremba problem for Poisson’s equations with drift. *Sbornik: Mathematics*. 2025;216(8):1021–1036.

14. Alkhutov Yu.A., Surnachev M.D., Chechkin A.G. On the Zaremba Problem for Inhomogeneous p -Laplace Equation with Drift. *Doklady Mathematics*. 2025;111(1):1–5.
15. Alkhutov Yu.A., Chechkin G.A. The Boyarsky–Meyers Inequality for Solutions to p -Elliptic Equation with Lower Order Terms and Dirichlet Boundary Condition. *Journal of Mathematical Sciences*. 2025;291(4):433–440.
16. Алиев М.Д., Алхутов Ю.А., Чечкин Г.А. Об оценке Боярского–Мейерса решения задачи Дирихле для линейного эллиптического уравнения второго порядка с дивергентным сносом. *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2026;66(6):1278–1284.
17. Chicco M. An a priori inequality concerning elliptic second order partial differential equations of variational type. *Matematiche (Catania)*. 1971;26(1):173–182.
18. Гилбарт Д., Трудингер Н.С. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. М.: Наука; 1989.
19. Lax P.D., Milgram A. Parabolic equations, in Contributions to the Theory of Partial Differential Equations. *Ann. Math. Studies*. Princeton University Press: Princeton, 33. 1954:167–190.

References

1. Boyarskii BV. Generalized solutions of a system of differential equations of first order and of elliptic type with discontinuous coefficients (Russian) *Matematicheskii Sbornik. Novaya Seriya*. 1957;43(85,4):451–503. MR0106324 (In Russ.)
2. Meyers NG. An L^p -estimate for the gradient of solutions of second order elliptic divergence equations. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3-e serie*. 1963;17(3):189–206.
3. Zhikov VV. On some Variational Problems. *Russian Journal of Mathematical physics*. 1997;5(1):105–116.
4. Alkhutov Yu.A., Chechkin GA. Increased Integrability of the Gradient of the Solution to the Zaremba Problem for the Poisson Equation. *Russian Academy of Sciences. Doklady Mathematics*, 2021;103(2): 69–71.
5. Alkhutov Yu.A., Chechkin GA. The Meyer’s Estimate of Solutions to Zaremba Problem for Second-order Elliptic Equations in Divergent Form. *C R Mécanique*. 2021;349(2):299–304.
6. Alkhutov Yu.A., Chechkin GA., Maz’ya VG. On the Bojarski–Meyers Estimate of a Solution to the Zaremba Problem, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. 2022;245(2):1197–1211.
7. Chechkin GA., Chechkin TP. The Boyarsky–Meyers Estimate for Divergent Elliptic Operators of the Second Order. Two Spacial Examples. *Journal of Mathematical Sciences*. 2022;268(4):523–534 (Translated from *Problemy Mat. Analiza*. 2022;119:107–116). (In Russ.)
8. Alkhutov Yu.A., Chechkin GA. On Higher Integrability of the Gradient of a Solution to the Zaremba Problem for $p(\cdot)$ -Laplace Equation in a Plane Domain. *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2023;44(8):3197–3206.
9. Chechkin AG. On the Zaremba problem for the p -elliptic equation. *Sbornik: Mathematics*. 2023;214(9):1321–1336. (In Russ.)
10. Chechkin GA. The Meyers Estimates for Domains Perforated along the Boundary. *Mathematics*. 2021;9(23):#3015.
11. Chechkin GA., Chechkin TP. On Higher Integrability of Solutions to Poisson Equation with Drift in Domains Perforated Along the Boundary. *Russian Journal of Mathematical Physics*. 2024;31(3):407–417.
12. Alkhutov Yu.A., Chechkin GA. On the Boyarsky–Meyers Estimate for the Solution of the Dirichlet Problem for a Second-Order Linear Elliptic Equation with Drift. *Journal of Math Sci*. 2024;286(1):1–13.
13. Alkhutov Yu.A., Chechkin GA. Bojarski–Meyers estimate for a solution to the Zaremba problem for Poisson’s equations with drift. *Sb. Math*. 2025;216(8):1021–1036.
14. Alkhutov Yu.A., Surnachev MD., Chechkin AG. On the Zaremba Problem for Inhomogeneous p -Laplace Equation with Drift. *Dokl. Math*. 2025;111(1):1–5.
15. Alkhutov Yu.A., Chechkin GA. The Boyarsky–Meyers Inequality for Solutions to p -Elliptic Equation with Lower Order Terms and Dirichlet Boundary Condition. *J Math Sci*. 2025;291(4):433–440.
16. Aliyev MJ., Alkhutov Yu.A., Chechkin GA. Boyarsky–Meyers Estimate of the Solution to the Dirichlet Problem for a Second-Order Linear Elliptic Equation with Divergent Drift. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2026;66(8):1445–1451. (In Russ.)
17. Chicco M. An a priori inequality concerning elliptic second order partial differential equations of variational type. *Matematiche (Catania)*. 1971;26(1):173–182.
18. Gilbarg D., Trudinger NS. Elliptic Partial Differential Equations of Second Order Second Edition. New York (NY)–Berlin–Heidelberg–London–Paris–Tokyo–Hong Kong–Barcelona–Budapest: Springer-Verlag; 1983. (In Russ.)
19. Lax PD., Milgram A. Parabolic equations, in Contributions to the Theory of Partial Differential Equations. *Ann. Math. Studies*. Princeton University Press: Princeton, 33. 1954:167–190.

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 01.06.2026

Поступила после рецензирования 10.07.2026

Принята к публикации 14.07.2026

Received June 1, 2026

Revised July 10, 2026

Accepted July 14, 2026

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Алхутов Юрий Александрович – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры физико-математического образования и информационных технологий (ФМОиИТ), Владимирский государственный университет им. А. Г. и Н. Г. Столетовых, г. Владимир, Россия

Чечкин Григорий Александрович – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры дифференциальных уравнений, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, г. Москва, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Yurij A. Alkhutov – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Professor of the Department of Physics and Mathematics Education and Information Technologies (FMOiIT), A. G. and N. G. Stoletov Vladimir State University, Vladimir, Russia

Gregory A. Chechkin – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Professor of the Department of Differential Equations, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

[К содержанию](#)