

Условия существования слабых решений эллиптического уравнения с p -лапласианом и нелинейным источником

Кожевникова Л. М. , Малышева В. А. 

(Статья представлена членом редакционной коллегии Васильевым В. Б.)

Уфимский университет науки и технологий,
Россия, 450077, г. Уфа, ул. Карла Маркса, 12
kosul@mail.ru, viktoria21135@yandex.ru

Аннотация. В статье исследуется существование слабых решений нелинейного эллиптического уравнения с p -лапласианом и степенным источником с показателем q в ограниченной области Ω . Для случая $p - 1 \leq q < p^* - 1$ найдены условия малости на меру области и коэффициенты уравнения, достаточные для существования решения задачи Дирихле. Проведены численные эксперименты методом простой итерации: для задачи в круге при $p - 1 < q < p^* - 1$ исследованы критические значения радиуса и свободного члена (m), начиная с которых решение отсутствует, в зависимости от показателя p . Для случая $0 < q < p - 1$ подтверждено существование решения без ограничений малости, а при $q = p - 1$ установлено отсутствие зависимости от параметра m . Также проанализировано влияние геометрии области (круг и квадрат) на порог существования решения.

Ключевые слова: p -лапласиан, нелинейное эллиптическое уравнение, слабое решение, нелинейный источник, существование решения, условия малости, метод простой итерации

Для цитирования: Кожевникова Л.М., Малышева В.А. Условия существования слабых решений эллиптического уравнения с p -лапласианом и нелинейным источником. *Прикладная математика & Физика*. 2026;58(3):248–261. DOI 10.52575/2687-0959-2026-58-3-248-261 EDN DBQQDO

Original Research

Conditions for the Existence of Weak Solutions of an Elliptic Equation with the p -Laplacian and a Nonlinear Source

Larisa M. Kozhevnikova , Viktoria A. Malysheva 

(Article submitted by a member of the editorial board Vasiliev V. B.)

Ufa University of Science and Technology,
12 Karl Marx St., Ufa 450077, Russia
kosul@mail.ru, viktoria21135@yandex.ru

Abstract. This paper studies the existence of weak solutions for a nonlinear elliptic equation with the p -Laplacian and a power-law source with exponent q in a bounded domain Ω . For the case $p - 1 \leq q < p^* - 1$, smallness conditions on the domain measure and the coefficients of the equation, sufficient for the existence of a solution to the Dirichlet problem, are obtained. Numerical experiments using the simple iteration method are carried out: for the problem in a circle with $p - 1 < q < p^* - 1$, critical values of the radius and the free term (m) beyond which no solution exists are studied depending on the exponent p . For the case $0 < q < p - 1$, the existence of a solution without smallness restrictions is confirmed, and for $q = p - 1$, the absence of dependence on the parameter m is established. The influence of the domain geometry (circle and square) on the existence threshold is also analyzed.

Keywords: p -Laplacian, Nonlinear Elliptic Equation, Weak Solution, Nonlinear Source, Existence of a Solution, Smallness Conditions, Simple Iteration Method

For citation: Kozhevnikova LM., Malysheva VA. Conditions for the Existence of Weak Solutions of an Elliptic Equation with the p -Laplacian and a Nonlinear Source. *Applied Mathematics & Physics*. 2026;58(3):248–261. (In Russ.) DOI 10.52575/2687-0959-2026-58-3-248-261 EDN DBQQDO

1. Введение. В последние десятилетия значительное внимание уделяется изучению краевых задач для эллиптических уравнений с оператором p -лапласиана $-\Delta_p u = -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$. Такие уравнения возникают в различных прикладных областях: при моделировании течений неньютоновских жидкостей, в теории фильтрации, в гляциологии, а также в задачах нелинейной диффузии и теории упругости [1, 2]. Особый интерес представляют случаи, когда правая часть содержит нелинейный источник, что приводит к конкуренции между вырожденным оператором и младшим членом.

Для пояснения роли показателя нелинейности рассмотрим модельную задачу

$$-\Delta_p u = \lambda |u|^{q-1} u + mg \quad \text{в } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{на } \partial\Omega,$$

где $\lambda \geq 0$ и $g \in L^{p'}(\Omega)$. Если $m = 0$, то однородная задача всегда имеет тривиальное решение $u = 0$; поэтому сама по себе она не может служить примером отсутствия решения. При наличии ненулевого внешнего источника априорные оценки обнаруживают качественное различие между диапазонами показателя q : при $0 < q < p - 1$ инвариантный шар для оператора неподвижной точки можно построить без условия малости данных, тогда как при $q \geq p - 1$ для такого построения требуется согласованное условие малости коэффициента нелинейного источника, внешнего воздействия и констант вложения, зависящих от области.

Для уравнений с p -лапласианом и правой частью вида $f(x)|u|^q + \mu$, где μ — мера Радона, важные результаты получены Н. Гренон [3, 4]. В этих работах доказано существование ренормализованных решений при условии малости данных, причём мера области $|\Omega|$ влияет на это условие через константы, зависящие от $|\Omega|$. Однако в явном виде зависимость от $|\Omega|$ в работах Н. Гренон не выписана. Кроме того, в указанных работах рассматривается более слабое понятие решения (ренормализованное), тогда как во многих прикладных задачах требуется классическое слабое решение из пространства $W_0^{1,p}(\Omega)$. Настоящая работа посвящена восполнению указанных пробелов.

Работа организована следующим образом. В разделе 1 приведены основные предположения, определение слабого решения и сформулирована теорема 1 о существовании решения. В разделе 2 изложено доказательство данной теоремы. Раздел 3 содержит описание численных экспериментов и их результаты. В заключении подведены итоги и сформулированы выводы.

1. Формулировка результата. Рассмотрим краевую задачу:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a(x, \nabla u)) = h(x, u) + mg & \text{в } \Omega, \\ u = 0 & \text{на } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1)$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, — ограниченная область.

Предположим, что выполнены следующие условия:

- (A1) $a : \Omega \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ — функция Каратеодори, и существуют константы $\alpha > 0$, $d > 0$ и неотрицательная функция $b \in L^p(\Omega)$, $p > 1$, такие, что для почти всех $x \in \Omega$ и всех $\xi, \xi' \in \mathbb{R}^N$ справедливы неравенства:

$$\begin{aligned} a(x, \xi) \cdot \xi &\geq \alpha |\xi|^p, \\ |a(x, \xi)| &\leq d(b(x) + |\xi|)^{p-1}, \\ (a(x, \xi) - a(x, \xi')) \cdot (\xi - \xi') &> 0 \quad \text{при } \xi \neq \xi'; \end{aligned}$$

- (A2) $h : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — функция Каратеодори, и существуют неотрицательная функция $f \in L^r(\Omega)$ и число $q > 0$, удовлетворяющие одному из следующих условий:

$$\begin{aligned} 1 < p < N : \quad & 0 < q < p^* - 1, \quad r \in \left[\frac{(q+1)p^*}{p^* - q - 1}, \infty \right], \quad p^* = \frac{Np}{N-p}, \\ p = N : \quad & r \in (q+1, \infty], \\ p > N : \quad & r \in [q+1, \infty], \end{aligned}$$

такие, что для почти всех $x \in \Omega$ и всех $t \in \mathbb{R}$ справедливо неравенство:

$$|h(x, t)| \leq f(x)|t|^q;$$

- (A3) $g \in L^{p'}(\Omega)$, где $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, и $m \in \mathbb{R}$.

Положим

$$\sigma = \begin{cases} p^*, & 1 < p < N, \\ \frac{r(q+1)}{r-q-1}, & p = N, r < \infty, \\ q+1, & p = N, r = \infty, \\ \infty, & p > N, \end{cases} \quad \delta = 1 - \left(\frac{1}{r} + \frac{q}{q+1} + \frac{1}{\sigma} \right) \geq 0, \quad (2)$$

где принято $1/\infty = 0$. Через C_s обозначим постоянную непрерывного вложения

$$\|w\|_s \leq C_s \|\nabla w\|_p, \quad W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^s(\Omega). \quad (3)$$

В частности, далее используются C_σ и C_{q+1} . Вложение в $L^{q+1}(\Omega)$ при указанных ограничениях на q является компактным. Постоянную в неравенстве Фридрихса обозначим через C_F :

$$\|w\|_p \leq C_F \|\nabla w\|_p. \quad (4)$$

Определение 1. Функция $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ называется слабым решением задачи (1), если для любой пробной функции $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$ выполняется:

$$\int_{\Omega} a(x, \nabla u) \cdot \nabla \varphi \, dx = \int_{\Omega} (h(x, u) + tg) \varphi \, dx. \quad (5)$$

Теорема 1. При выполнении условий (A1)–(A3) справедливы следующие утверждения:

- 1) если $0 < q < p - 1$, то существует слабое решение задачи (1) без дополнительных условий на параметры;
- 2) если $q = p - 1$, то слабое решение существует при условии

$$\|f\|_r |\Omega|^{\delta} C_{\sigma} C_p^{p-1} < \alpha; \quad (6)$$

- 3) если $q > p - 1$ (и дополнительно $q < p^* - 1$ при $p < N$), то слабое решение существует при условии

$$\|f\|_r |\Omega|^{\delta} C_{\sigma} C_{q+1}^q (\|m\| \|g\|_{p'} C_F)^{\frac{q-p+1}{p-1}} \leq C_*(\alpha, p, q), \quad (7)$$

где

$$C_*(\alpha, p, q) = \alpha^{\frac{q}{p-1}} \frac{p-1}{q} \left(\frac{q-p+1}{q} \right)^{\frac{q-p+1}{p-1}},$$

а постоянные вложений определены в (3) и (4).

Замечание 1. Поясним отдельно критический по размерности случай $p = N$. Условие $r > q + 1$ позволяет выбрать конечное σ из (2) и применить вложение $W_0^{1,N}(\Omega) \hookrightarrow L^{\sigma}(\Omega)$ (см. [5, гл. II, §2, теорема 2.1]). Предельное значение $r = q + 1$ здесь не включается: оно потребовало бы вложения $W_0^{1,N}(\Omega) \hookrightarrow L^{\infty}(\Omega)$, которое в общем случае неверно. При $p > N$ такое вложение справедливо, поэтому допускается $r = q + 1$.

Замечание 2. Пусть $1 < p < N$. Оценим константы C_F , $C_{\sigma} = C_{p^*}$ и C_{q+1} через $|\Omega|$.

Для любой $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ справедливо неравенство Фридрихса (4). Известно, что

$$C_F \leq C_1(N, p) |\Omega|^{1/N}. \quad (8)$$

Для вложения Соболева $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)$ имеем:

$$\|v\|_{p^*} \leq C_{p^*}(N, p) \|\nabla v\|_p. \quad (9)$$

Кроме того, для $q + 1 < p^*$ неравенство с показателем $s = q + 1$ содержится в (3). Используя вложение между $L^{q+1}(\Omega)$ и $L^{p^*}(\Omega)$, можно показать, что

$$C_{q+1} \leq C_2(N, p, q) |\Omega|^{\frac{1}{q+1} - \frac{1}{p^*}}. \quad (10)$$

Если $q > p - 1$, то, подставляя оценки (8), (10) в (7), получаем достаточное условие

$$\|f\|_r |\Omega|^{\Delta} (\|m\| \|g\|_{p'})^{\frac{q-p+1}{p-1}} \leq C(\alpha, p, q, N), \quad \Delta = \delta + \frac{q-p+1}{N(p-1)} + q \left(\frac{1}{q+1} - \frac{1}{p^*} \right) > 0, \quad (11)$$

которое заведомо выполнено для областей с малой мерой. Для $q = p - 1$ из (6) аналогично получается строгое условие малости

$$\|f\|_r |\Omega|^{\delta+(p-1)/N} < C(\alpha, p, N).$$

2. Доказательство теоремы 1. Идея доказательства основана на методе неподвижной точки и априорных оценках, которые Н. Гренон использовала при доказательстве существования ренормализованных решений в работах [3, 4]. Теорема 1 является адаптацией этих результатов к случаю слабых решений при $q \in L^{p'}(\Omega)$.

Лемма 1 (Шаудера о неподвижной точке). Пусть выполнены условия:

1. E – непустое выпуклое замкнутое ограниченное подмножество банахова пространства V ;
2. $T : E \rightarrow E$ – непрерывный оператор;
3. образ $T(E)$ предкомпактен в V .

Тогда существует хотя бы одна неподвижная точка $x \in E$ оператора T , т. е. $T(x) = x$ (см. [6, гл. VIII, §35.3]).

Лемма 2. Пусть V – рефлексивное сепарабельное банахово пространство, и пусть оператор $A : V \rightarrow V'$ обладает следующими свойствами: оператор A ограничен, семинепрерывен, монотонен и коэрцитивен. Тогда

отображение $A : V \rightarrow V'$ сюръективно, т. е. для всякого $F \in V'$ существует $x \in V$ такой, что $A(x) = F$ (см. [1, гл. II, теорема 2.1]).

Доказательство теоремы 1. Шаг 1. Определение оператора T . Для заданного $v \in L^{q+1}(\Omega)$ рассмотрим вспомогательную задачу:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a(x, \nabla u)) = h(x, v) + mg & \text{в } \Omega, \\ u = 0 & \text{на } \partial\Omega. \end{cases} \quad (12)$$

Функция $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ называется слабым решением задачи (12), если для любой пробной функции $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$ выполняется тождество:

$$\int_{\Omega} a(x, \nabla u) \cdot \nabla \varphi \, dx = \int_{\Omega} (h(x, v) + mg) \varphi \, dx. \quad (13)$$

Покажем, что $h(x, v) + mg$ принадлежит пространству $W^{-1,p'}(\Omega)$. Для любого $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$ в силу (A2) и обобщённого неравенства Гёльдера имеем:

$$\left| \int_{\Omega} h(x, v) \varphi \, dx \right| \leq \int_{\Omega} f(x) |v|^q |\varphi| \, dx \leq \|f\|_r \|v\|_{q+1}^q \|\varphi\|_{\sigma} |\Omega|^{\delta}. \quad (14)$$

Применяя вложение (3) с $s = \sigma$, из (14) выводим:

$$\left| \int_{\Omega} h(x, v) \varphi \, dx \right| \leq \|f\|_r C_{\sigma} |\Omega|^{\delta} \|v\|_{q+1}^q \|\nabla \varphi\|_p. \quad (15)$$

Далее, применяя неравенство Гельдера и Фридрихса (4), получаем:

$$\left| m \int_{\Omega} g \varphi \, dx \right| \leq |m| \|g\|_{p'} \|\varphi\|_p \leq |m| \|g\|_{p'} C_F \|\nabla \varphi\|_p. \quad (16)$$

Из оценок (15) и (16) следует, что функционал $F_v(\varphi) = \int_{\Omega} (h(x, v) + mg) \varphi \, dx$ непрерывен на $W_0^{1,p}(\Omega)$, т. е. $F_v \in W^{-1,p'}(\Omega)$.

В силу условий (A1) оператор $A(u) = -\operatorname{div}(a(x, \nabla u))$ строго монотонен, семинепрерывен, коэрцитивен и ограничен. Согласно лемме 2 для каждого v существует единственное слабое решение $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ задачи (12). Определим оператор $T : L^{q+1}(\Omega) \rightarrow L^{q+1}(\Omega)$, $T(v) = u$, где $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ — слабое решение задачи (12). Вложение $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{q+1}(\Omega)$ (см. (3)) гарантирует, что T действует в $L^{q+1}(\Omega)$.

Шаг 2. Априорные оценки. Пусть $v \in L^{q+1}(\Omega)$ и $u = T(v)$. Подставим $\varphi = u$ в (13):

$$\int_{\Omega} a(x, \nabla u) \cdot \nabla u \, dx = \int_{\Omega} h(x, v) u \, dx + m \int_{\Omega} g u \, dx.$$

Используя условие коэрцитивности из (A1) и оценки (15) и (16) с $\varphi = u$, получим:

$$\alpha \|\nabla u\|_p^p \leq (\|f\|_r C_{\sigma} |\Omega|^{\delta} \|v\|_{q+1}^q + |m| \|g\|_{p'} C_F) \|\nabla u\|_p.$$

Сокращая на $\|\nabla u\|_p$ (случай $u = 0$ тривиален), получаем:

$$\|\nabla u\|_p \leq \left(\frac{1}{\alpha} (\|f\|_r C_{\sigma} |\Omega|^{\delta} \|v\|_{q+1}^q + |m| \|g\|_{p'} C_F) \right)^{\frac{1}{p-1}}. \quad (17)$$

Теперь оценим норму u в $L^{q+1}(\Omega)$. Применяя (3) с $s = q + 1$, из (17) выводим оценку:

$$\|u\|_{q+1} \leq C_{q+1} \left(\frac{1}{\alpha} (\|f\|_r C_{\sigma} |\Omega|^{\delta} \|v\|_{q+1}^q + |m| \|g\|_{p'} C_F) \right)^{\frac{1}{p-1}}. \quad (18)$$

Шаг 3. Существование инвариантного шара. Найдём $R > 0$ такое, что из $\|v\|_{q+1} \leq R$ следует $\|T(v)\|_{q+1} \leq R$. В силу (18) достаточно выполнения неравенства:

$$C_{q+1} \left(\frac{1}{\alpha} (\|f\|_r C_{\sigma} |\Omega|^{\delta} R^q + |m| \|g\|_{p'} C_F) \right)^{\frac{1}{p-1}} \leq R. \quad (19)$$

Введём обозначения:

$$A := \|f\|_r C_{\sigma} |\Omega|^{\delta}, \quad B := |m| \|g\|_{p'} C_F, \quad K := \frac{C_{q+1}^{p-1}}{\alpha}.$$

Возводя (19) в степень $p - 1$, получим эквивалентное неравенство:

$$AR^q + B \leq \frac{1}{K}R^{p-1}. \quad (20)$$

Рассмотрим три случая.

Случай 1: $0 < q < p - 1$. Левая часть (20) растёт как R^q , правая – как R^{p-1} . Поскольку $q < p - 1$, при достаточно больших R неравенство выполняется. Таким образом, оператор T отображает шар $B_R \subset L^{q+1}(\Omega)$ в себя.

Случай 2: $q = p - 1$. Тогда (20) принимает вид

$$AR^{p-1} + B \leq \frac{1}{K}R^{p-1} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{K} - A\right)R^{p-1} \geq B.$$

Если $A < 1/K$, то можно выбрать R достаточно большим, чтобы неравенство выполнялось. Условие $A < 1/K$ записывается как

$$\|f\|_{rC_\sigma|\Omega|^\delta} < \frac{\alpha}{C_p^{p-1}},$$

что соответствует условию (6).

Случай 3: $q > p - 1$ (и $q < p^* - 1$ при $p < N$). Функция $\psi(R) = \frac{1}{K}R^{p-1} - AR^q$ достигает максимума в точке

$$R_0 = \left(\frac{p-1}{AqK}\right)^{\frac{1}{q-p+1}}.$$

Максимальное значение равно

$$\psi(R_0) = \frac{1}{K}R_0^{p-1} \cdot \frac{q-p+1}{q}.$$

Условие существования $R > 0$, удовлетворяющего (20), есть $B \leq \psi(R_0)$. Подставляя выражение для R_0^{p-1} , получим

$$B \leq \frac{q-p+1}{qK} \left(\frac{p-1}{AqK}\right)^{\frac{p-1}{q-p+1}}.$$

Возвращаясь к обозначениям A, B, K и возводя обе части последнего неравенства в степень $(q-p+1)/(p-1)$, после алгебраических преобразований получаем

$$AB^{\frac{q-p+1}{p-1}} C_{q+1}^q \leq \alpha^{\frac{q}{p-1}} \frac{p-1}{q} \left(\frac{q-p+1}{q}\right)^{\frac{q-p+1}{p-1}}.$$

Это и есть условие (7).

Шаг 4. Компактность оператора T . Пусть $\{v_n\} \subset L^{q+1}(\Omega)$ – ограниченная последовательность, $\|v_n\|_{q+1} \leq M$. Положим $u_n = T(v_n)$. Из оценки (17) следует, что $\{u_n\}$ ограничена в $W_0^{1,p}(\Omega)$. Поскольку вложение $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{q+1}(\Omega)$ компактно, из $\{u_n\}$ можно выделить подпоследовательность, сходящуюся в $L^{q+1}(\Omega)$. Значит, оператор T компактен.

Шаг 5. Сходимость h . Пусть $v_n \rightarrow v$ в $L^{q+1}(\Omega)$. Обозначим через σ' показатель, сопряжённый к σ , и введём $t \geq 1$ равенством

$$\frac{1}{t} = \frac{1}{r} + \frac{q}{q+1}.$$

Из определения δ следует $t \geq \sigma'$. Докажем, что

$$h(\cdot, v_n) \rightarrow h(\cdot, v) \quad \text{в } L^{\sigma'}(\Omega). \quad (21)$$

Рассмотрим произвольную подпоследовательность $\{v_{n_{j_k}}\}$. Из сильной сходимости в $L^{q+1}(\Omega)$ можно выделить подпоследовательность $\{v_{n_{j_k}}\}$ и найти $w \in L^{q+1}(\Omega)$ такие, что $v_{n_{j_k}} \rightarrow v$ почти всюду и $|v_{n_{j_k}}| \leq w$ почти всюду. Существование такой функции w следует из выбора подпоследовательности, для которой

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|v_{n_{j_k}} - v\|_{q+1} < \infty.$$

Свойство Каратеодори даёт поточечную сходимость $h(x, v_{n_{j_k}}) \rightarrow h(x, v)$, а условие (A2) – оценку

$$|h(x, v_{n_{j_k}}) - h(x, v)| \leq f(x)(w^q + |v|^q).$$

Правая часть принадлежит $L^t(\Omega)$ по неравенству Гёльдера. Поэтому по теореме Лебега $h(\cdot, v_{n_{j_k}}) \rightarrow h(\cdot, v)$ в $L^t(\Omega)$, а в силу $t \geq \sigma'$ и $|\Omega| < \infty$ – также в $L^{\sigma'}(\Omega)$. Так как это рассуждение применимо к любой подпоследовательности, справедлива сходимость всей последовательности в (21). Следовательно,

$$\|F_{v_n} - F_v\|_{W^{-1,p'}(\Omega)} \leq C_\sigma \|h(\cdot, v_n) - h(\cdot, v)\|_{\sigma'} \rightarrow 0. \quad (22)$$

Шаг 6. Непрерывность оператора T . Пусть $v_n \rightarrow v$ в $L^{q+1}(\Omega)$ и $u_n = T(v_n)$. Из оценки (17) следует ограниченность $\{u_n\}$ в $W_0^{1,p}(\Omega)$. Выделим подпоследовательность, для которой

$$u_{n_k} \rightharpoonup \tilde{u} \text{ в } W_0^{1,p}(\Omega), \quad u_{n_k} \rightarrow \tilde{u} \text{ в } L^{q+1}(\Omega).$$

Для любого $z \in W_0^{1,p}(\Omega)$ монотонность оператора A даёт

$$\langle Au_{n_k} - Az, u_{n_k} - z \rangle \geq 0.$$

Учитывая $Au_{n_k} = F_{v_{n_k}}$, сходимость (22) и слабую сходимость u_{n_k} , переходим к пределу и получаем

$$\langle F_v - Az, \tilde{u} - z \rangle \geq 0 \quad \text{для всех } z \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Полагая в последнем неравенстве $z = \tilde{u} - \lambda w$, где $w \in W_0^{1,p}(\Omega)$ и $\lambda > 0$, а затем устремляя λ к нулю, из семинепрерывности A получаем $A\tilde{u} = F_v$ (аргумент Минти). Вспомогательная задача имеет единственное решение, поэтому $\tilde{u} = T(v)$. Таким образом, из любой подпоследовательности $\{u_n\}$ можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к $T(v)$ в $L^{q+1}(\Omega)$. Критерий сходимости по подпоследовательностям даёт $u_n \rightarrow T(v)$ в $L^{q+1}(\Omega)$, то есть оператор T непрерывен.

Шаг 7. Применение теоремы Шаудера. В случае $0 < q < p - 1$ оператор T отображает некоторый шар $\bar{B}_R \subset L^{q+1}(\Omega)$ в себя без дополнительного условия. При $q = p - 1$ существование инвариантного шара гарантирует (6), а при $q > p - 1$ – условие (7). Оператор T непрерывен и компактен. По теореме Шаудера существует неподвижная точка $u \in \bar{B}_R$, $T(u) = u$, которая является слабым решением задачи (1).

3. Численные эксперименты. Проведены вычислительные эксперименты для исследования: зависимости критических значений R_{crit} и m_{crit} от p , докритического случая, случая $q = p - 1$ и влияния геометрии на критические значения.

Численный метод. Программы реализованы на языке Python с использованием библиотек NumPy, SciPy (функция `spsolve` для решения разреженных линейных систем) и Matplotlib (для визуализации)¹. Решается уравнение:

$$-\text{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) = f(x)|u|^{q-1}u + m,$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^2$; в экспериментах 1–3 область Ω представляет собой круг радиуса R , а в эксперименте 4 дополнительно рассматривается квадрат той же площади. Это уравнение является частным случаем задачи (1) при

$$a(x, \xi) = |\xi|^{p-2}\xi, \quad h(x, s) = f(x)|s|^{q-1}s, \quad g \equiv 1.$$

В частности, при $f(x) \equiv \lambda$ оно совпадает с модельной задачей, рассмотренной во введении. Таким образом, показатели p, q и параметры f, m в численных экспериментах имеют тот же смысл, что и в теоретической части. Уравнение дискретизировано на равномерной прямоугольной сетке методом конечных разностей [7]. Нелинейная задача решалась методом простой итерации (методом замороженных коэффициентов) [8, 9]. Линейные системы решались методом `spsolve` из библиотеки SciPy.

Эксперимент 1 (исследование пороговых значений в зависимости от p). Фиксированы параметры: $q = 1.9$, $f(x) = 20.0$, $m = 2.1$. Параметр p последовательно принимает значения: 1.3; 1.4; 1.5; 1.6; 1.7; 1.8. Для каждого p область Ω – круг радиуса R , который последовательно увеличивается, и определяется критический радиус R_{crit} , начиная с которого решение отсутствует. Полученные результаты представлены в таблице 1.

Таблица 1

Table 1

Зависимость критического радиуса R_{crit} от показателя p
Dependence of the critical radius R_{crit} on the exponent p

p	R_{crit}
1.3	1.3150
1.4	1.0400
1.5	0.8560
1.6	0.7650
1.7	0.7020
1.8	0.6600

¹Программный код доступен в открытом репозитории: <https://doi.org/10.5281/zenodo.22059908>

На примере $p = 1.8$ показано, как определялся критический радиус (рис. 1).

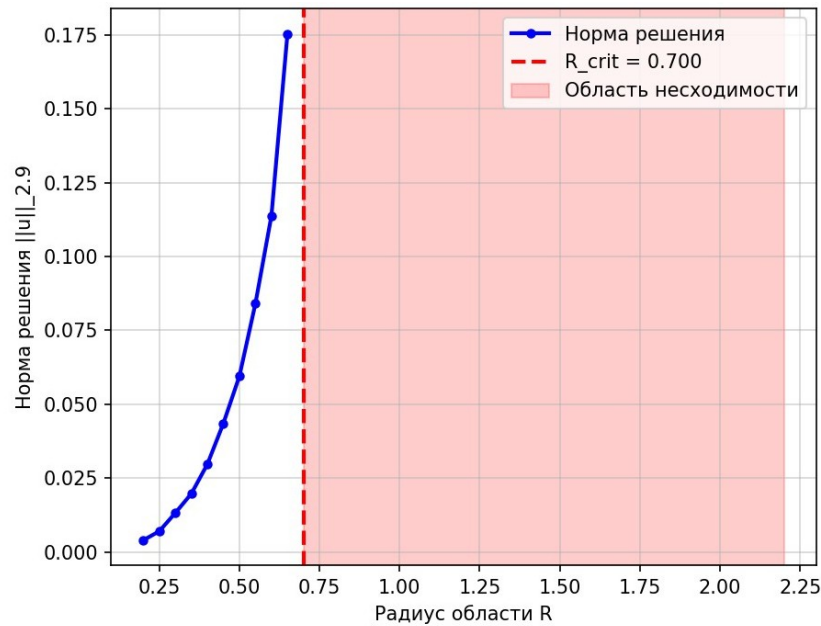


Рис. 1. Зависимость нормы решения от радиуса (для $p = 1.8$)

Fig. 1. Dependence of the solution norm on the radius (for $p = 1.8$)

На рис. 2 показана эволюция 3D-поверхностей решения с ростом радиуса области.

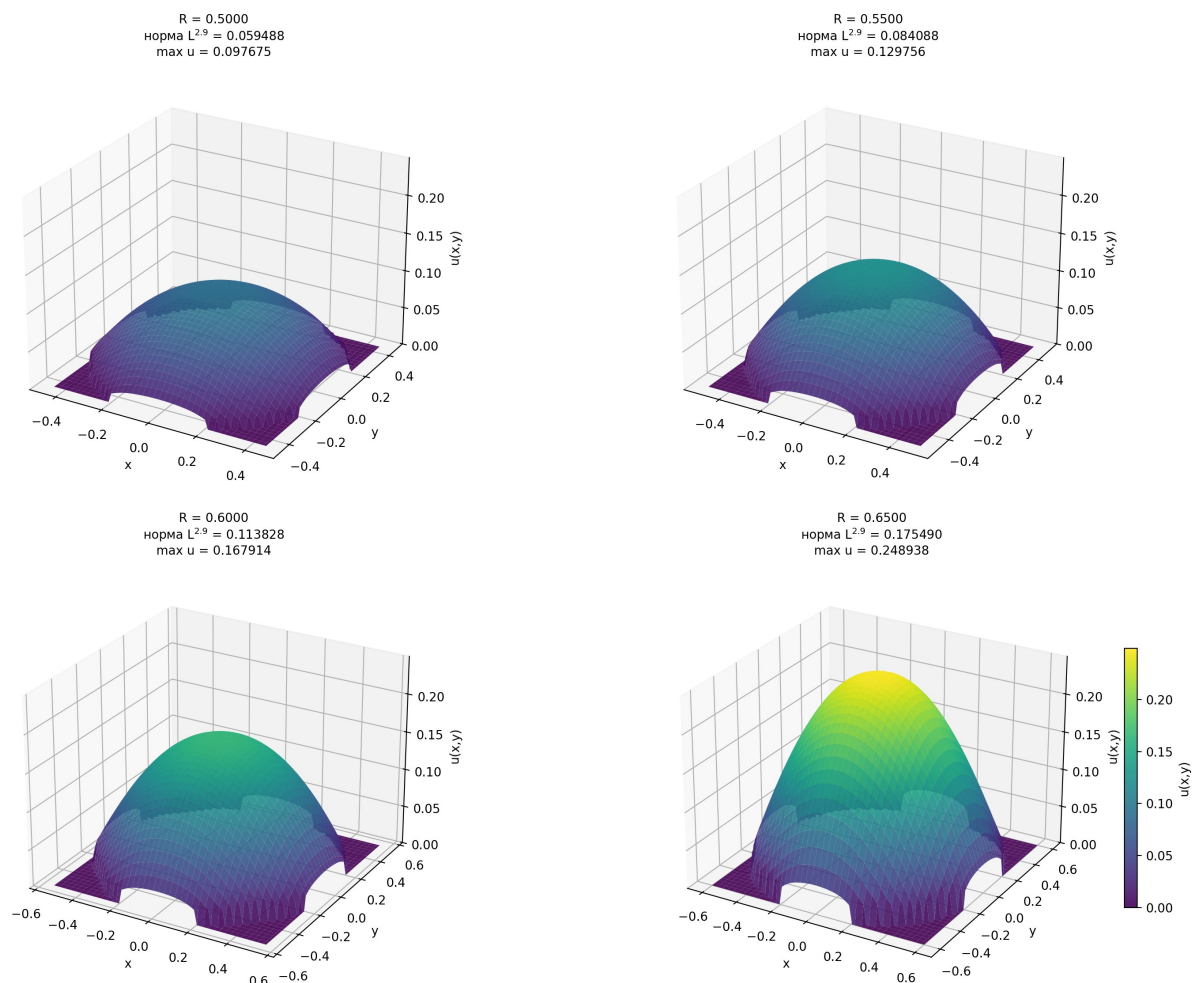


Рис. 2. 3D-визуализация решения для различных радиусов области (для $p = 1.8$)

Fig. 2. 3D visualization of the solution for different domain radii (for $p = 1.8$)

Для уточнения критического радиуса область бифуркации исследована с меньшим шагом. Уточнённое значение составило $R_{\text{crit}} = 0.6600$ (рис. 3).

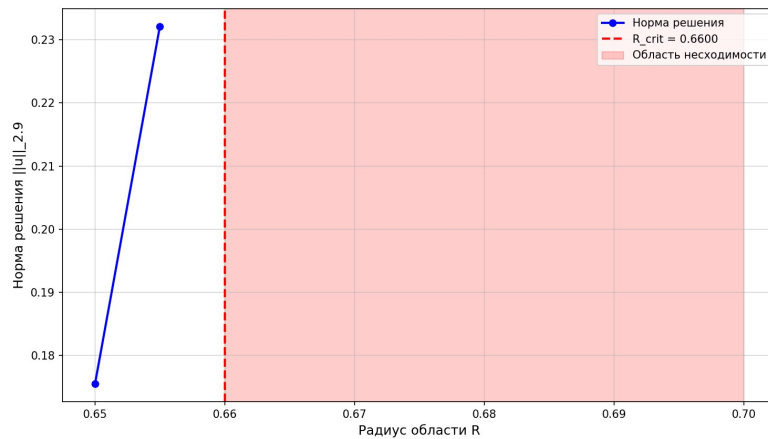


Рис. 3. Поведение нормы решения вблизи критического радиуса (для $p = 1.8$)

Fig. 3. Behavior of the solution norm near the critical radius (for $p = 1.8$)

Для $p = 1.6$ рассмотрена зависимость нормы решения от номера итерации для $R = 0.75$ и $R = 0.80$ ($R_{\text{crit}} = 0.7650$). При $R = 0.75$ (до критического значения) норма решения стабилизируется после нескольких итераций, выходя на постоянное плато, что свидетельствует о существовании решения (рис. 4).

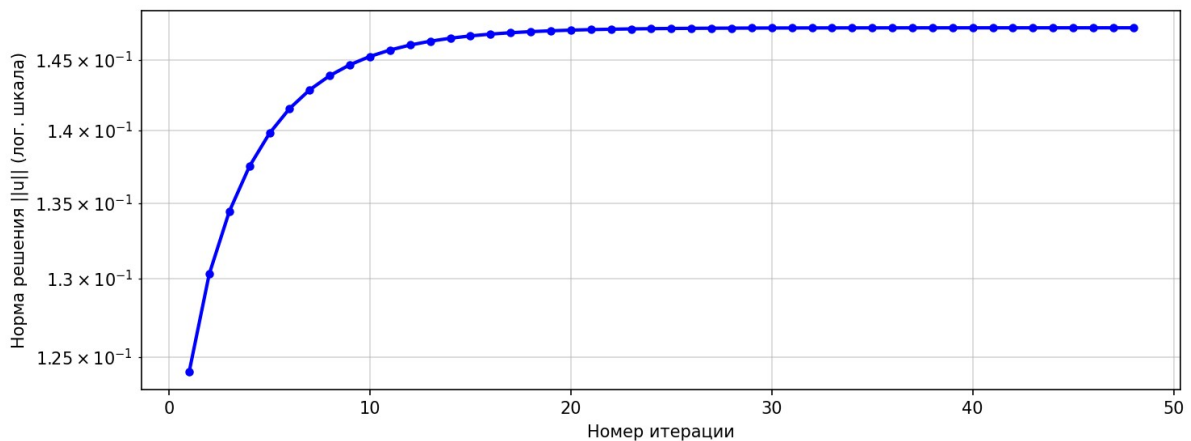


Рис. 4. Сходимость метода при $R = 0.75$ (решение существует)

Fig. 4. Convergence of the method for $R = 0.75$ (solution exists)

При $R = 0.80$ (после критического значения) норма решения неограниченно растет, итерационный процесс расходится, что указывает на отсутствие решения (рис. 5).

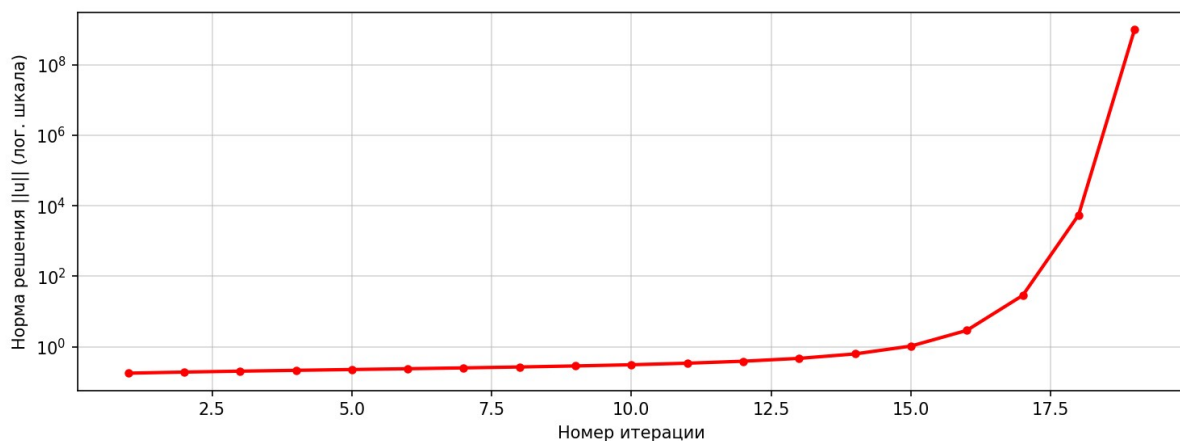


Рис. 5. Расходимость метода при $R = 0.80$ (решения нет)

Fig. 5. Divergence of the method for $R = 0.80$ (no solution exists)

Результаты, представленные на рис. 4 и рис. 5, подтверждают существование бифуркации.

Далее рассматривается зависимость критического значения параметра m от p . Фиксированы параметры: $q = 1.9$, $f(x) = 50.0$, $R = 1.5$. Для каждого p параметр m последовательно увеличивается, и определяется критическое значение m_{crit} , начиная с которого решение отсутствует. Полученные результаты представлены в таблице 2.

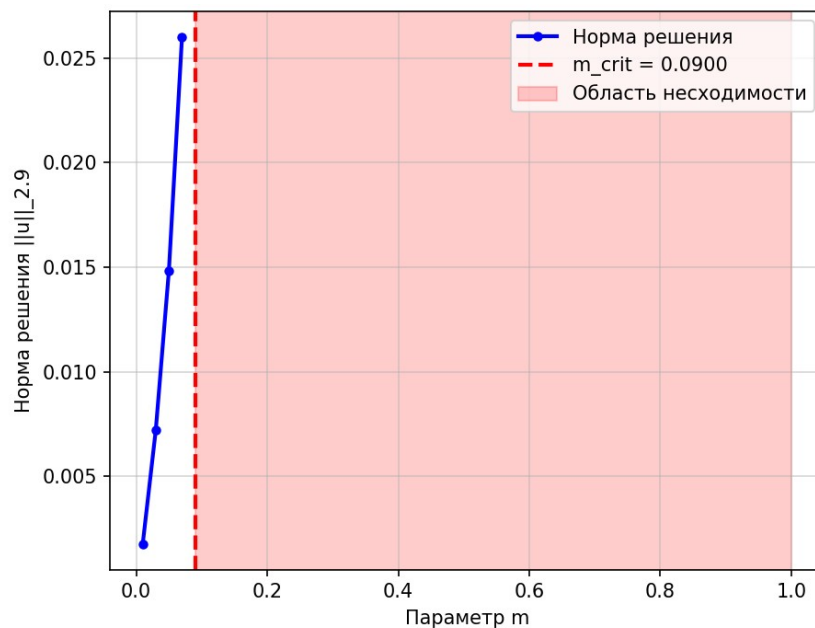
Таблица 2

Table 2

Зависимость критического значения m_{crit} от показателя p
Dependence of the critical value m_{crit} on the exponent p

p	m_{crit}
1.3	1.4050
1.4	0.8400
1.5	0.4988
1.6	0.2931
1.7	0.1620
1.8	0.0860

На примере $p = 1.8$ показано, как определялось критическое значение параметра m (рис. 6).

Рис. 6. Зависимость нормы решения от m (для $p = 1.8$)Fig. 6. Dependence of the solution norm on m (for $p = 1.8$)

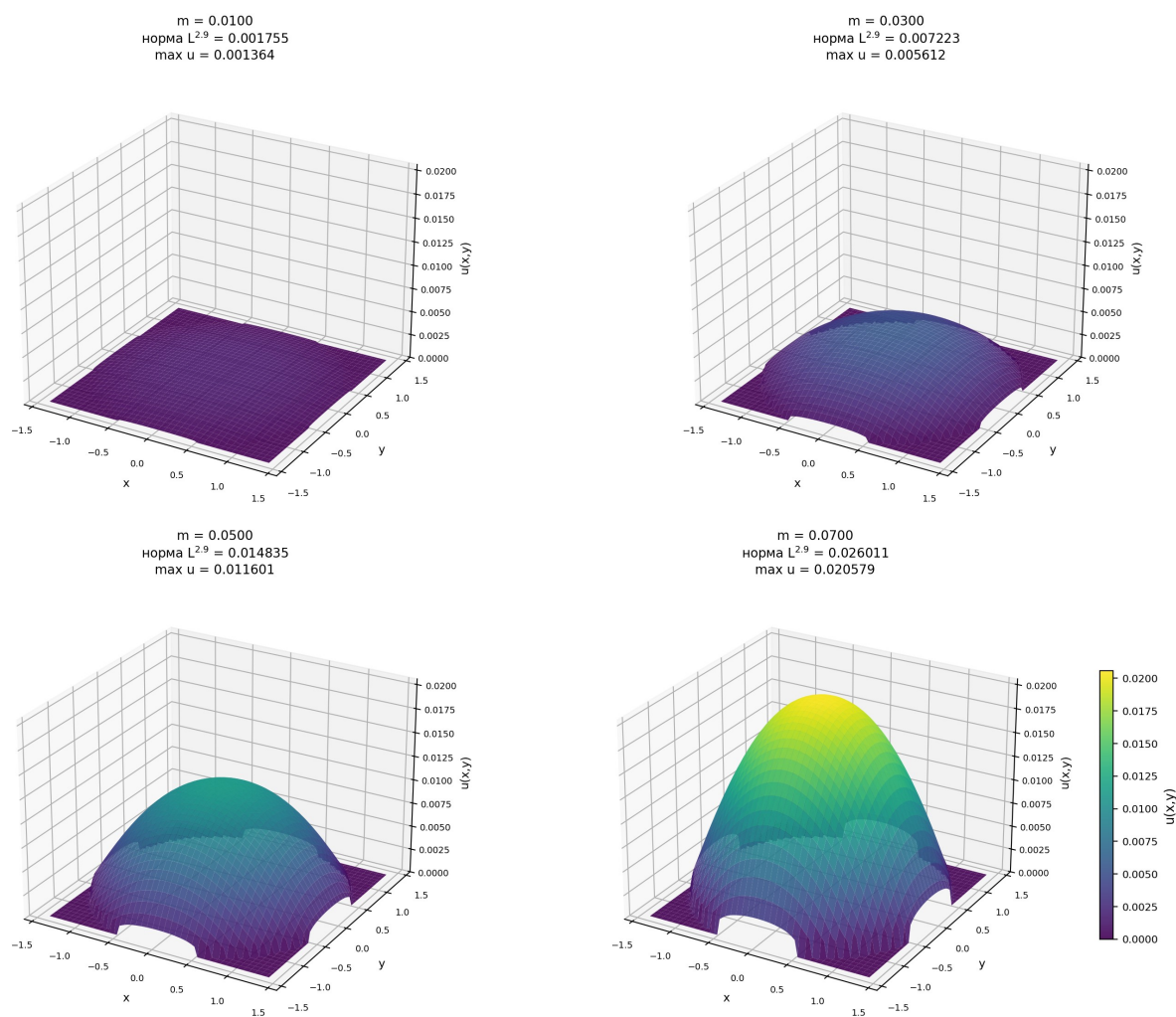
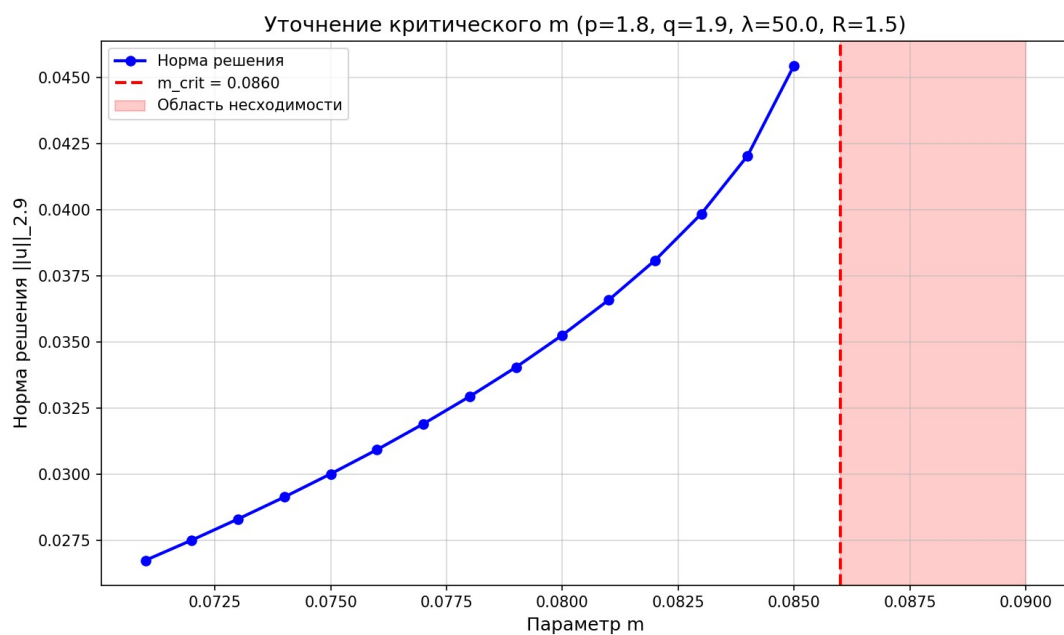
Эволюция 3D-поверхностей решения с ростом m показана на рис. 7.

Для поиска уточненного критического значения параметра m область бифуркации была исследована с меньшим шагом. Уточненное значение составило $m_{\text{crit}} = 0.0860$ (рис. 8).

Таким образом, из табл. 1 и табл. 2 видно, что с ростом показателя p наблюдается монотонное убывание значений R_{crit} и m_{crit} .

Эксперимент 2 (докритический случай). Фиксированы параметры: $p = 1.8$, $q = 0.5$, $f(x) = 0.1$. Согласно теореме 1, при $q < p - 1$ (так как $0.5 < 0.8$) решение существует при любых значениях радиуса области R и параметра m . Численные эксперименты подтверждают сходимость метода во всех исследованных случаях. Сначала при $m = 0.1$ последовательно увеличивали радиус. Во всех случаях итерационный процесс сошелся (рис. 9).

Затем при фиксированном $R = 1.5$ увеличивали параметр m ; сходимость также наблюдалась при всех исследуемых значениях (рис. 10).

Рис. 7. 3D-визуализация решения для различных параметров m (для $p = 1.8$)Fig. 7. 3D visualization of the solution for different m parameters (for $p = 1.8$)Рис. 8. Поведение нормы решения вблизи m_{crit} (для $p = 1.8$)Fig. 8. Behavior of the solution norm near m_{crit} (for $p = 1.8$)

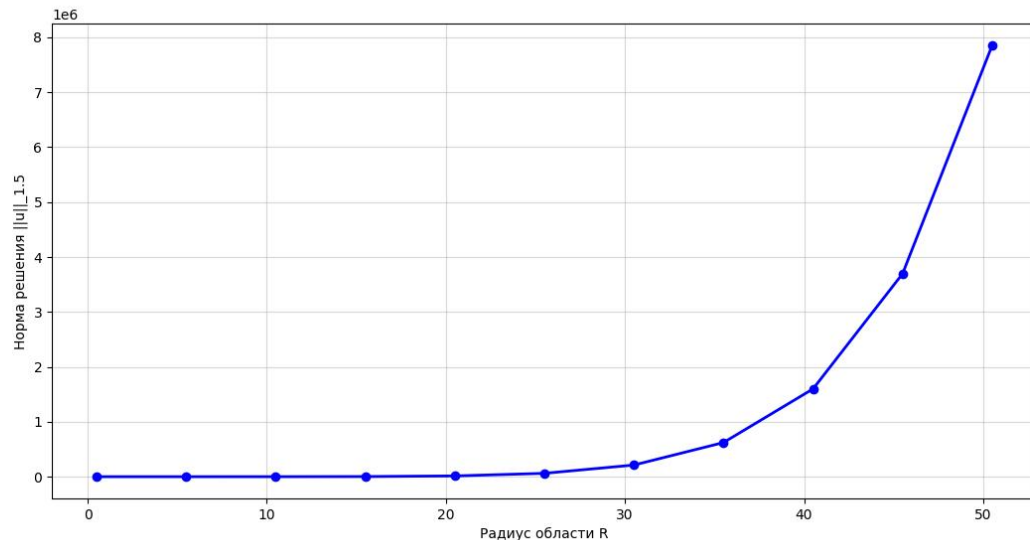
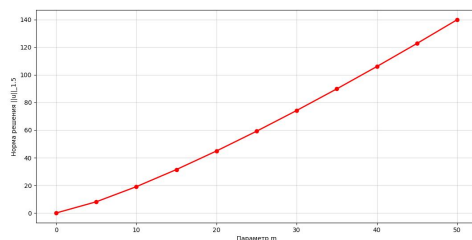
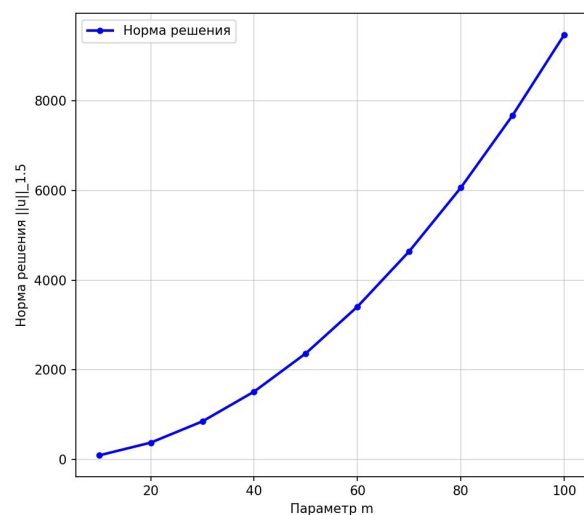


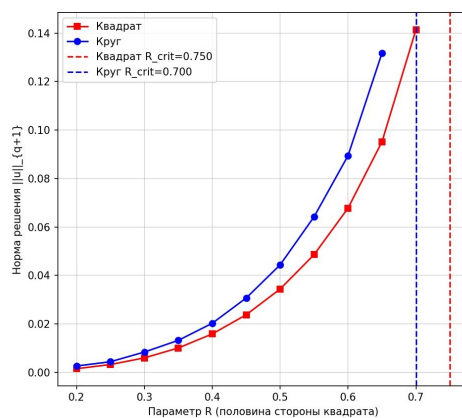
Рис. 9. Зависимость нормы решения от радиуса для докритического случая

Fig. 9. Dependence of the solution norm on the radius for the subcritical case

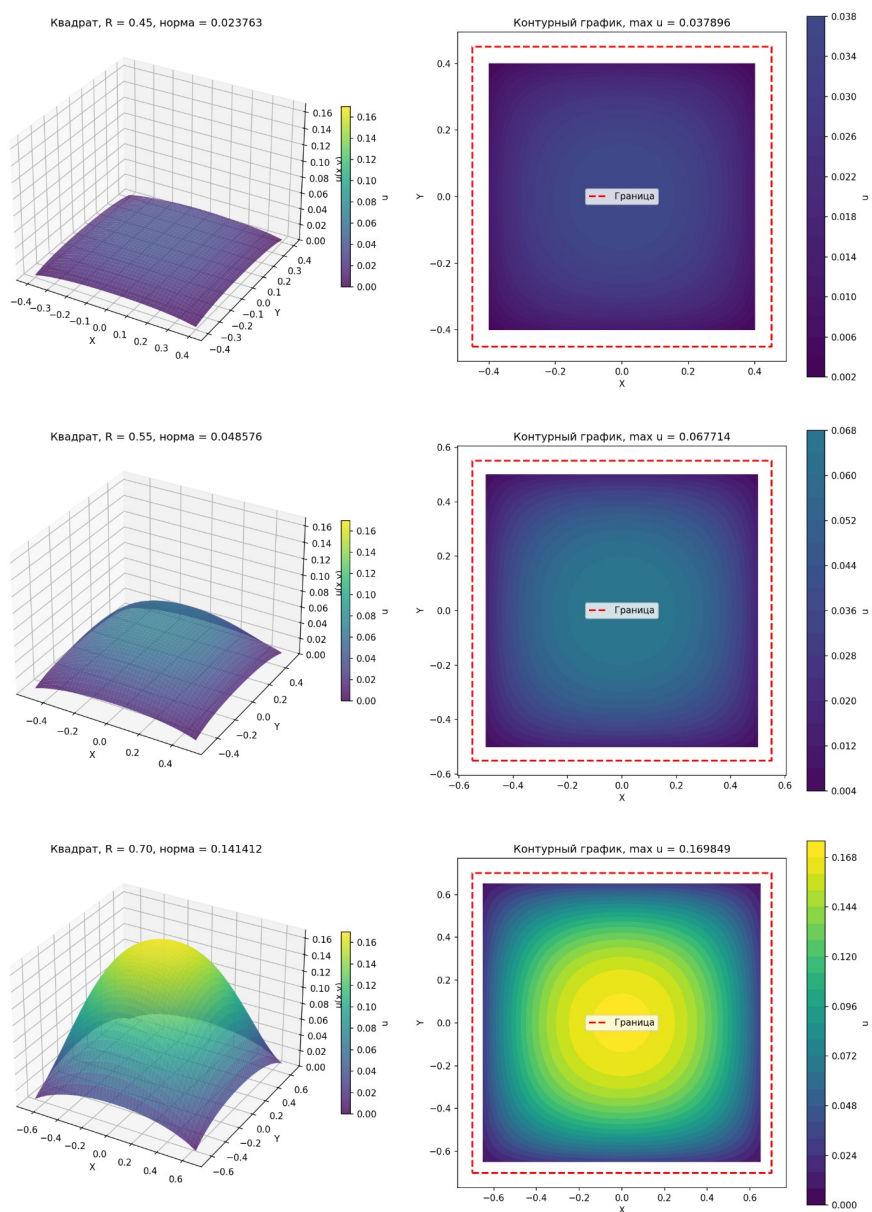
Эксперимент 3 (исследование критического случая $q = p - 1$). Фиксированы параметры: $p = 1.5$, $q = 0.5$, $f(x) = 15.0$, $R = 0.5$. Из оценки (3) видно, что при $q = p - 1$ нет зависимости от m . Это подтверждают численные эксперименты, из результатов которых видно, что метод сходится при любых m (рис. 11).

Рис. 10. Зависимость нормы решения от m для докритического случаяFig. 10. Dependence of the solution norm on m for the subcritical caseРис. 11. Зависимость нормы решения от m для случая $q = p - 1$ Fig. 11. Dependence of the solution norm on m for the case $q = p - 1$

Эксперимент 4 (сравнение критических размеров круга и квадрата при равной площади). Фиксированы параметры: $p = 1.6$, $q = 1.9$, $f(x) = 20.0$, $m = 2.1$. Исследуется влияние формы области на порог существования решения. Для этого сравниваются две области одинаковой площади: квадрат со стороной $2R$ (площадь $4R^2$) и круг, радиус которого подобран так, чтобы его площадь также равнялась $4R^2$. Из равенства площадей получено, что радиус круга $R_{\text{круга}} = 2R/\sqrt{\pi}$. Параметр R служит общей переменной, определяющей размер обеих фигур. На рис. 12 показана зависимость нормы решения от R (половины стороны квадрата).

Рис. 12. Зависимость нормы решения от R для круга и квадрата при равных площадяхFig. 12. Dependence of the solution norm on R for a circle and a square with equal areas

На рис. 13 показана эволюция 3D-поверхностей и контурных графиков решения для квадрата с ростом R .

Рис. 13. 3D-визуализация и контурный график решения для квадрата при различных R Fig. 13. 3D visualization and contour plot of the solution for the square for various R

На рис. 14 показана эволюция 3D-поверхностей и контурных графиков решения для круга с ростом R . Таким образом, получено, что для круга $R_{\text{crit}} = 0.700$, а для квадрата $R_{\text{crit}} = 0.750$, то есть для круга критическое значение радиуса меньше, чем для квадрата при равных площадях.

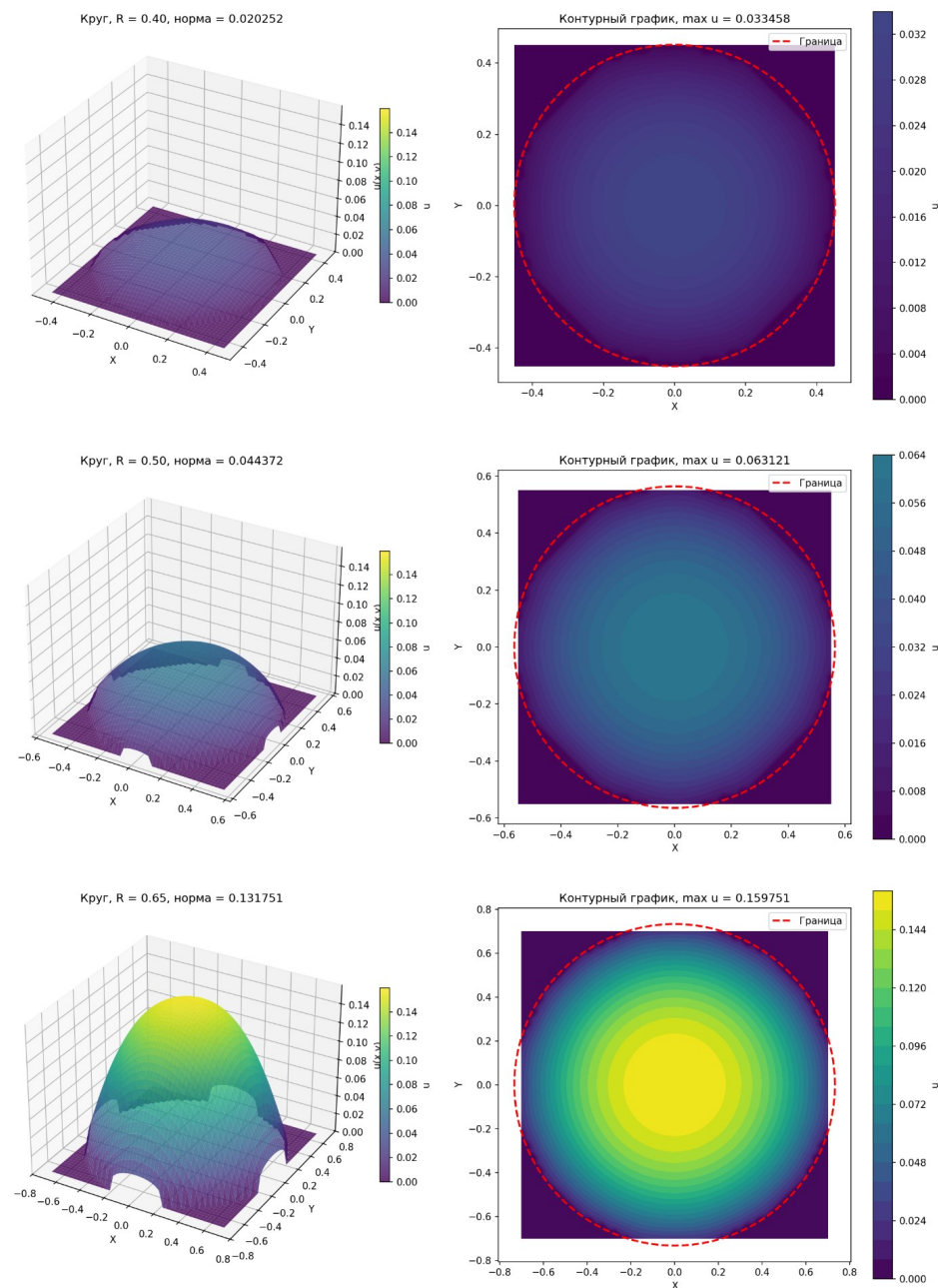


Рис. 14. 3D-визуализация и контурный график решения для круга при различных R

Fig. 14. 3D visualization and contour plot of the solution for the circle for various R

Полученные численные результаты позволяют дать следующую физическую интерпретацию. В задачах с нелинейным источником и p -лапласианом ключевую роль играет концентрация источника. У круга при той же площади периметр меньше, следовательно, меньше утечка энергии через границу. Это облегчает накопление энергии внутри области, и разрушение (бифуркация) наступает быстрее – при меньшем характерном размере. У квадрата периметр больше, утечка больше, поэтому требуется дополнительная «подкачка» энергией, то есть больший размер области, чтобы запустить нелинейный рост. Данное явление аналогично реактору с отражающими стенками: чем лучше изоляция (меньше утечка), тем меньше критический размер. Круг является более эффективным «реактором», поэтому он взрывается при меньших размерах. Таким образом, численное сравнение R_{crit} для круга (0.700) и квадрата (0.750) подтверждает, что более компактные области теряют устойчивость при меньших размерах.

Закключение. В работе исследовано существование слабых решений краевой задачи для эллиптического уравнения с p -лапласианом и нелинейным источником. Для случая $q \geq p - 1$ (при $1 < p < N$ дополнительно $q < p^* - 1$) найдены достаточные условия малости на меру области и коэффициенты

уравнения, обеспечивающие существование решения. Для случая $0 < q < p - 1$ (докритический случай) существование решения доказано без каких-либо ограничений. Численные эксперименты подтверждают теоретические результаты: в докритическом случае решение существует всегда; в случае $p - 1 < q < p^* - 1$ наблюдается порог существования по радиусу области R и интенсивности постоянного источника m , причем с ростом p происходит монотонное убывание пороговых значений; а при $q = p - 1$ получено отсутствие зависимости от m . Сравнение круга и квадрата одинаковой площади показало, что для более компактной области (круг) критические значения меньше, что объясняется меньшей утечкой энергии через границу.

Список литературы

1. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972. 588 с.
2. DiBenedetto E. *Degenerate Parabolic Equations*. New York: Springer, 1993. 387 p.
3. Grenon N. Existence results for semilinear elliptic equations with small measure data. *Ann. Inst. H. Poincaré C, Anal. Non Linéaire*, 2002,19(1):1–11.
4. Grenon N. L^r estimates for degenerate elliptic problems. *Potential Analysis*, 2002,16:387–392.
5. Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука; 1973. 576 с.
6. Треногин В.А. Функциональный анализ. М.: Наука; 1980. 496 с.
7. Годунов С.К., Рябенский В.С. Разностные схемы. М.: Наука; 1977. 440 с.
8. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. М.: Наука; 1989. 432 с.
9. Калиткин Н.Н. Численные методы. М.: Наука; 1978. 512 с.

References

1. Lions J.-L. *Some methods for solving nonlinear boundary value problems*. Paris: Dunod, 1969. 554 p. (In Russ.)
2. DiBenedetto E. *Degenerate Parabolic Equations*. New York: Springer, 1993. 387 p.
3. Grenon N. Existence results for semilinear elliptic equations with small measure data. *Ann. Inst. H. Poincaré C, Anal. Non Linéaire*, 2002,19(1):1–11.
4. Grenon N. L^r estimates for degenerate elliptic problems. *Potential Analysis*, 2002,16:387–392.
5. Ladyzhenskaya O.A., Ural'tseva N.N. *Linear and Quasilinear Elliptic Equations*. New York: Academic Press; 1968. 495 p. (In Russ.)
6. Trenogin V.A. *Functional Analysis*. Moscow: Nauka; 1980. 496 p. (In Russ.)
7. Godunov S.K., Ryaben'kii V.S. *Difference Schemes*. Moscow: Nauka; 1977. 440 p. (In Russ.)
8. Samarsky A.A., Gulín A.V. *Numerical Methods*. Moscow: Nauka; 1989. 432 p. (In Russ.)
9. Kalitkin N.N. *Numerical Methods*. Moscow: Nauka; 1978. 512 p. (In Russ.)

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 18.05.2026

Received May 18, 2026

Поступила после рецензирования 06.07.2026

Revised July 6, 2026

Принята к публикации 11.07.2026

Accepted July 11, 2026

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Кожевникова Лариса Михайловна – доктор физико-математических наук, профессор кафедры искусственного интеллекта и перспективных математических исследований, Уфимский университет науки и технологий, г. Уфа, Россия

Малышева Виктория Андреевна – студент бакалавриата кафедры искусственного интеллекта и перспективных математических исследований, Уфимский университет науки и технологий, г. Уфа, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Larisa M. Kozhevnikova – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Department of Artificial Intelligence and Advanced Mathematical Research, Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia

Viktoria A. Malysheva – Bachelor's Student of the Department of Artificial Intelligence and Advanced Mathematical Research, Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia

К содержанию