Прикладная математика & Физика, 2021, том 53, №1. С. 13–30.

УДК 519.179
MSC 35L05.

DOI 10.52575/2687-0959-2021-53-1-13-30

ОБЩАЯ ФОРМУЛА ОБРАЩЕНИЯ ВЕСОВОГО СФЕРИЧЕСКОГО СРЕДНЕГО

Э. Л. Шишкина

Воронежский Государственный Университет,
Воронеж, 394018, Россия

E-mail: ilina_dico@mail.ru

Аннотация. В статье представлены формулы обращения весового сферического среднего. Мы рассматриваем обобщение классического сферического среднего на случай, когда вместо обычного сдвига действует обобщенный сдвиг, порожденный оператором Бесселя. Обратный оператор к рассматриваемому обобщенному сферическому среднему построен при помощи смешанного гиперболического −потенциала Рисса. Кроме того, в статье приводится общая формула обращения классического сферического среднего вне зависимости от четности или нечетности размерности пространства, полученная применением гиперболического потенциала Рисса. Также приводятся различные частные случаи и примеры.

Ключевые слова: сферическое среднее, гиперболический потенциал Рисса, обобщенный сдвиг, весовое сферическое среднее, смешанный гиперболический B−потенциал Рисса.

Для цитирования: Шишкина Э. Л. 2021. Общая формула обращения весового сферического среднего. Прикладная математика & Физика. 53(1): 13–30. DOI 10.52575/2687-0959-2021-53-1-13-30.

GENERAL FORMULA OF INVERSION OF WEIGHTED SPHERICAL MEAN

E. Shishkina

Voronezh State University,
Voronezh, 394018, Russia
E-mail: ilina_dico@mail.ru
Received February, 04, 2021

Abstract. The article presents formulas for inversion of the weighted spherical mean. We consider a generalization of the classical spherical mean to the case when the generalized translation generated by the Bessel operator acts instead of the usual shift. The inverse operator to the considered generalized spherical mean is constructed using the mixed hyperbolic Riesz B-potential. In addition, the article provides a general inversion formula for the classical spherical mean, regardless of the evenness or oddness of the dimension of the space, obtained by using the Riesz hyperbolic potential. Various special cases and examples are also given.

Key words: spherical mean, hyperbolic Riesz potential, generalized translation, weighted spherical mean, mixed hyperbolic Riesz B−potential.

For citation: Shishkina E. 2021. General formula of inversion of weighted spherical mean. Applied Mathematics & Physics. 53(1): 13–30 (in Russian). DOI 10.52575/2687-0959-2021-53-1-13-30.

1. Введение. Интерес к восстановлению функции с помощью ее интеграла по сфере, стимулируемый целым рядом новых задач и методов восстановления изображения, чрезвычайно вырос за последние шесть десятилетий. Восстановление функции по известному подмножеству ее сферических средних – есть широко распространенная задача как в чистой, так и в прикладной математике. Связь этой задачи с получением фотоакустического изображения заключается в следующем. Пусть скорость распространения звука в среде будет постоянной величиной. Тогда давление в определенный момент времени выражается через среднее сферическое давление и его производную по времени в некоторый предыдущий момент времени [21]. Следовательно, этот метод визуализации требует обращения сферических средних.

Задача восстановления функции f с носителем в шаре $B \in \mathbb{R}^n$, если сферические средние f известны по всем геодезическим сферам с центром на границе ∂B, была решена без использования гиперболических потенциалов [16, 17, 21, 26, 27, 29, 30, 31]. Примечательно, что формулы восстановления в [16, 17, 21, 26, 27, 29, 30, 31] различны для четной и нечетной размерностей евклидова пространства n. В статье [18] получены формулы обращения сферического среднего для любой четности n и любого пространства постоянной кривизны без применения гиперболических потенциалов Рисса.

Сферическое среднее M_t, $t > 0$, действующее на интегрируемую по сфере в пространстве $\mathbb{R}^n$ радиуса t с центром в точке $x \in \mathbb{R}^n$ функцию $f(x)$, сплетает оператор Лапласа и одномерный оператор Бесселя с индексом $(n-1)$:

$$(M_t(\Delta)_x f)(x) = \left(\frac{d^2}{dt^2} + \frac{n-1}{t}\frac{d}{dt}\right)(M_t f)(x), \qquad (\Delta)_x = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}. \tag{1}$$

В формуле (1) на функцию f налагается дополнительное условие: она должна быть дважды непрерывно дифференцируемой.

Большой интерес у различных исследователей вызывает обобщение сферического среднего M_t. В статье [36] рассматривалось сферическое среднее в пространстве с отрицательной кривизной, в [22] и [20] изучалось обобщение сферического среднего, порожденное оператором преобразования Дункла. В этой статье мы рассматриваем весовое сферическое среднее (см. (33)), которое является оператором преобразования, сплетающим многомерный оператор

$$(\Delta_\gamma)_x = \sum_{i=1}^{n} (B_{\gamma_i})_{x_i}, \qquad (B_{\gamma_i})_{x_i} = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{\gamma_i}{x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}, \qquad \gamma_i \geq 0, \qquad i = 1, ..., n \tag{2}$$

и одномерный оператор Бесселя с индексом $n + |\gamma| - 1$ вида

$$(B_{n+|\gamma|-1})_t = \frac{d^2}{dt^2} + \frac{n+|\gamma|-1}{t}\frac{d}{dt}, \qquad t > 0, \qquad |\gamma| = \gamma_1 + \ldots + \gamma_n. \tag{3}$$

Такое сферическое среднее тесно связано с $B-$ультрагиперболическим уравнением вида (см. [9, 10, 33])

$$\sum_{j=1}^{n} (B_{\gamma_i})_{x_j} u = \sum_{j=1}^{n} (B_{\gamma_i})_{y_j} u, \qquad u = u(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n). \tag{4}$$

Задача восстановления функции по ее сферическому среднему или обобщенному сферическому среднему является обратной задачей. Отметим здесь, что обратными задачами, в том числе и с оператором Бесселя, занимается В. В. Кравченко (см. [24, 54, 23, 70]).

Статья содержит формулы обращения для классического сферического среднего M_t (см. (1)) и весового сферического среднего M_t^γ (см. (33)), основанные на свойствах гиперболического потенциала Рисса (см. (11)) и смешанного гиперболического $B-$потенциала Рисса (см. (15)), а также, как частный случай, формулу обращения обобщенного сдвига (см. (44)).

2. Основные определения. В этом разделе мы приведем основные обозначения, термины и результаты, которые будут использоваться в статье.

Пусть $\mathbb{R}^{n+1}$ – $n+1-$мерное евклидово пространство,

$$\mathbb{R}^{n+1}_+ = \{(t,x) = (t, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}, \ \ x_1 > 0, \ldots, x_n > 0\},$$

$\gamma = (\gamma_1, ..., \gamma_n)$ – мультииндекс, состоящий из фиксированных действительных чисел $\gamma_i \geq 0$, $i = 1, ..., n$, и $|\gamma| = \gamma_1 + \ldots + \gamma_n$. Пусть Ω – конечное или бесконечное открытое множество в $\mathbb{R}^{n+1}$, симметрично относительно каждой гиперплоскости $x_i = 0$, $i = 1, ..., n$, $\Omega_+ = \Omega \cap \mathbb{R}^{n+1}_+$ и $\widetilde{\Omega}_+ = \Omega \cap \overline{\mathbb{R}}^{n+1}_+$, где

$$\overline{\mathbb{R}}^{n+1}_+ = \{(t,x) = (t, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}, x_1 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0\}.$$

Мы будем иметь дело с классом $C^m(\Omega_+)$, состоящим из m раз дифференцируемых на Ω_+ функций. Обозначим через $C^m(\widetilde{\Omega}_+)$ подмножество функций из $C^m(\Omega_+)$ таких, что все существующие производные этих функций по x_i для любого $i = 1, ..., n$ непрерывны до $x_i = 0$, а все существующие производные по t непрерывны для $t \in \mathbb{R}$.

Класс $C^m_{ev}(\widetilde{\Omega}_+)$ состоит из всех функций из $C^m(\widetilde{\Omega}_+)$, таких что $\left.\frac{\partial^{2k+1} f}{\partial x_i^{2k+1}}\right|_{x=0} = 0$ для всех неотрицательных целых чисел $k \leq \frac{m-1}{2}$ и для $i = 1, ..., n$ (см. [2] и [5], стр. 21). В дальнейшем мы будем обозначать $C^m_{ev}(\overline{\mathbb{R}}^{N+1}_+)$ через C^m_{ev}.

Положим

$$C^\infty_{ev}(\widetilde{\Omega}_+) = \bigcap C^m_{ev}(\widetilde{\Omega}_+),$$

с пересечением, взятым по всем конечным m. Пусть $C^\infty_{ev}(\overline{\mathbb{R}}^{n+1}_+) = C^\infty_{ev}$. Пусть $\overset{\circ}{C}{}^\infty_{ev}(\widetilde{\Omega}_+)$ пространство функций $f \in C^\infty_{ev}(\widetilde{\Omega}_+)$ с компактным носителем. Мы будем использовать обозначения $\overset{\circ}{C}{}^\infty_{ev}(\widetilde{\Omega}_+) = \mathcal{D}_+(\widetilde{\Omega}_+)$.

Пусть $\mathcal{L}_p^\gamma(\Omega_+)$, $1\leq p<\infty$ – пространство всех измеримых в Ω_+ функций таких, что

$$\int\limits_{\Omega_+} |f(t,x)|^p x^\gamma dtdx < \infty,$$

здесь и далее

$$x^\gamma = \prod_{i=1}^n x_i^{\gamma_i}.$$

Для вещественного $p\geq 1$ определим $\mathcal{L}_p^\gamma(\Omega_+)$ – норму функции f формулой

$$||f||_{\mathcal{L}_p^\gamma(\Omega_+)} = \left(\int\limits_{\Omega_+} |f(t,x)|^p x^\gamma dtdx\right)^{1/p}.$$

Пусть $\mathcal{L}_p^\gamma = \mathcal{L}_p^\gamma(\mathbb{R}_{n+1}^+)$.

Мы будем использовать обобщенную свертку, определяемую формулой

$$(f*g)_\gamma(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}} f(\tau,y)({}^\gamma\mathbf{T}_x^y g)(t-\tau,x)y^\gamma d\tau dy, \tag{5}$$

где ${}^\gamma\mathbf{T}_x^y$ – многомерный обобщенный сдвиг

$$({}^\gamma\mathbf{T}_x^y f)(t,x)=({}^{\gamma_1}T_{x_1}^{y_1}\ldots{}^{\gamma_n}T_{x_n}^{y_n} f)(t,x). \tag{6}$$

Каждый из одномерных обобщенных сдвигов ${}^{\gamma_i}T_{x_i}^{y_i}$ определяется для $i=1,\ldots,n$ следующей формулой (см. [8], стр. 122, формула (5.19))

$$({}^{\gamma_i}T_{x_i}^{y_i} f)(t,x)=\frac{\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\gamma_i}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int\limits_0^\pi \sin^{\gamma_i-1}\varphi_i\times$$
$$\times f\left(t,x_1,\ldots,x_{i-1},\sqrt{x_i^2+y_i^2-2x_iy_i\cos\varphi_i},x_{i+1},\ldots,x_n\right)\,d\varphi_i,$$

$\gamma_i>0$, $i=1,\ldots,n$ и при $\gamma_i=0$ обобщенный сдвиг ${}^{\gamma_i}T_{x_i}^{y_i}$ имеет вид (см. [35])

$${}^0T_{x_i}^{y_i} = \frac{f(x+y)+f(x-y)}{2}.$$

Мы будем использовать подпространство быстро убывающих функций:

$$S_{ev}(\mathbb{R}_+^{n+1}) = S_{ev} = \left\{f\in C_{ev}^\infty : \sup_{(t,x)\in R_+^{n+1}}\left|t^{\alpha_0}x^\alpha D^\beta f(t,x)\right|<\infty\right\},$$

где $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$, $\beta=(\beta_0,\beta_1,\ldots,\beta_n)$, $\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\beta_0,\beta_1,\ldots,\beta_n$ – произвольные целые неотрицательные числа, $x^\alpha=x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\ldots x_n^{\alpha_n}$, $D^\beta=D_t^{\beta_0}D_{x_1}^{\beta_1}\ldots D_{x_n}^{\beta_n}$, $D_t=\frac{\partial}{\partial t}$, $D_{x_j}=\frac{\partial}{\partial x_j}$, $j=1,\ldots,n$.

Нормированная функция Бесселя j_ν, имеет вид (см. [5], стр. 10, [8])

$$j_\nu(x) = \frac{2^\nu\Gamma(\nu+1)}{x^\nu}\,J_\nu(x),\qquad \nu\geq-\frac{1}{2}, \tag{7}$$

где J_ν – функция Бесселя первого рода. Для этой функции справедливо соотношение $j_\nu(0)=1$.

Многомерное преобразование Фурье – Бесселя функции $f\in\mathcal{L}_1^\gamma(\mathbb{R}_+^{n+1})$ определяется формулой

$$\mathcal{F}_\gamma[f](\tau,\xi) = \widehat{f}(\tau,\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}} f(t,x)\,e^{-it\tau}\,\mathbf{j}_\gamma(x;\xi)x^\gamma dtdx,$$

где

$$\mathbf{j}_\gamma(x;\xi) = \prod_{i=1}^n j_{\frac{\gamma_i-1}{2}}(x_i\xi_i),\qquad \gamma_1\geq 0,\ldots,\gamma_n\geq 0. \tag{8}$$

Пусть $\nu>0$. Одномерный оператор Пуассона определяется для интегрируемой функции g равенством

$$\mathcal{P}_r^\nu g(r) = \frac{2C(\nu)}{r^{\nu-1}}\int\limits_0^r \left(r^2-t^2\right)^{\frac{\nu}{2}-1} g(t)\,dt,\qquad C(\nu)=\frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}, \tag{9}$$

или

$$\mathcal{P}_r^\nu g(r) = 2C(\nu)\int\limits_0^1 \left(1-t^2\right)^{\frac{\nu}{2}-1} g(rt)\,dt. \tag{10}$$

Константа $C(\nu)$ выбрана так, чтобы $\mathcal{P}_x^\nu[1]=1$. При $\nu=0$ одномерный оператор Пуассона вместо оператора Пуассона будет использоваться тождественный оператор: $\mathcal{P}_x^0 = I$ (см. [35]).

3. Гиперболический потенциал Рисса и смешанный гиперболический B–потенциал Рисса. Приведенная в этом разделе информация будет использована в 4-м разделе, где представлены основные результаты.

Пусть $n\in\mathbb{N}$, $t\in\mathbb{R}$, $x=(x_1,...,x_n)\in\mathbb{R}^n$, $|x|=\sqrt{x_1^2+...+x_n^2}$. Гиперболический потенциал Рисса вида

$$(I_\square^\alpha f)(t,x) = \frac{1}{H_n(\alpha)}\int\limits_{\tau^2\geq|y|^2,\tau\geq 0} (\tau^2-|y|^2)^{\frac{\alpha-n-1}{2}} f(t-\tau,x-y)d\tau dy, \tag{11}$$

где $n-1<\alpha<n+1$,

$$H_n(\alpha) = 2^{\alpha-1}\pi^{\frac{n-1}{2}}\Gamma\left(\frac{\alpha-n+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

изучался в [11, 12].

Интеграл (11) сходится абсолютно при $n-1<\alpha$ для интегрируемых по части конуса $t^2\geq|y|^2$, $t\geq 0$, $y\in\mathbb{R}$, $0<\tau$ функций $f(\tau,y)$ (см. [11, 12]). Для $0\leq\alpha\leq n-1$ гиперболический потенциал Рисса определим формулой

$$(I_\square^\alpha f)(t,x) = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\sum_{k=1}^n\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}\right)^w (I_\square^{\alpha+2w}f)(t,x),$$

где $w=\left[\frac{n-\alpha+1}{2}\right]$.

Потенциал $I_\square^{2\alpha}$ реализует отрицательные степени волнового оператора $\square_{t,x}=\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\sum\limits_{k=1}^n\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\sum_{k=1}^n\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}\right)^\alpha = I_\square^{2\alpha}.$$

В частности, для подходящей функции $f(t,x)$ справедливо равенство при $\alpha=2m$, $m\in\mathbb{N}$ (см.)

$$\square_{t,x}^m (I_\square^{2m} f)(t,x) = f(t,x). \tag{12}$$

В случае, когда $f(t,x)=h(t)F(x)$, получим

$$(I_\square^\alpha f)(t,x) = \frac{1}{H_n(\alpha)}\int\limits_0^\infty h(t-\tau)d\tau\int\limits_{\tau^2\geq|y|^2}(\tau^2-|y|^2)^{\frac{\alpha-n-1}{2}}F(x-y)dy = \{y=\tau\xi\} =$$

$$= \frac{1}{H_n(\alpha)}\int\limits_0^\infty \tau^{\alpha-1}h(t-\tau)d\tau\int\limits_{|\xi|^2\leq 1}(1-|\xi|^2)^{\frac{\alpha-n-1}{2}}F(x-\tau\xi)d\xi. \tag{13}$$

Справедлива теорема 3.1 об ограниченности $I_\square^\alpha$ из L_p в L_r (см. [12], теорема 2.1) и теорема 3.2 об обратном к $I_\square^\alpha$ операторе (см. [12], теорема 2.4).

Теорема 3.1. *Пусть $n-1<\alpha<n+1$, $1<p<\frac{n+1}{\alpha}$, $r=\frac{(n+1)p}{n+1-\alpha p}$. Тогда справедлива оценка*

$$||I_\square^\alpha f||_r \leq c_{n,p}||f||_p, \qquad f\in S.$$

Константа $c_{n,p}$ не зависит от f. Здесь S – пространство Шварца.

Теорема 3.2. *Пусть $n-1<\alpha<n+1$, $1<p<\frac{n}{\alpha}$ с дополнительным ограничением $p<\frac{2n(n+1)}{n+1+2\alpha n}$ при $n-1<\alpha<n$ и четном n. Тогда*

$$((I_\square^\alpha)^{-1}I_\square^\alpha f)(t,x) = f(t,x), \qquad f\in L_p, \tag{14}$$

где

$$(I_\square^\alpha)^{-1}f(t,x) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}} g_{\alpha,\varepsilon}(\tau,y)f(t-\tau,x-y)d\tau dy,$$

$$g_{\alpha,\varepsilon}(t,x)=\frac{1}{(2\pi)^{n+1}}\int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}}\frac{1}{q}\,|\tau^2-|y|^2|^{\frac{\alpha}{2}}e^{-\varepsilon(|\tau|+|y|)-it\tau-i\langle x,y\rangle}d\tau dy,$$

$$q=\begin{cases} e^{\frac{\alpha\pi i}{2}\operatorname{sgn}\tau} & \text{при } \tau^2>|y|^2;\\ 1 & \text{при } \tau^2\le|y|^2.\end{cases}$$

Известно [12], что функция $g_{\alpha,\varepsilon}(t,x)$ представима в виде

$$g_{\alpha,\varepsilon}(t,x)=\frac{\Gamma(n+1+\alpha)}{2^n\pi^{\frac{n}{2}+1}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int\limits_0^\infty\rho^{n-1}|1-\rho^2|^{\frac{\alpha}{2}}\times$$

$$\times\left[\frac{e^{-\frac{\alpha\pi i}{2}\theta(1-\rho)}}{(\varepsilon+\varepsilon\rho+it)^{n+1+\alpha}}\,{}_2F_1\left(\frac{n+1+\alpha}{2},\frac{n+2+\alpha}{2};\frac{n}{2};-\frac{\rho^2|x|^2}{(\varepsilon+\varepsilon\rho+it)^2}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{e^{\frac{\alpha\pi i}{2}\theta(1-\rho)}}{(\varepsilon+\varepsilon\rho-it)^{n+1+\alpha}}\,{}_2F_1\left(\frac{n+1+\alpha}{2},\frac{n+2+\alpha}{2};\frac{n}{2};-\frac{\rho^2|x|^2}{(\varepsilon+\varepsilon\rho-it)^2}\right)\right]d\rho,$$

где $\theta(x)=\begin{cases}1 & x\ge 0;\\ 0 & x<0\end{cases}$ – функция Хевисайда.

Функция $g_{\alpha,\varepsilon}(t,x)$ принадлежит пространству L_r, $1<r<\infty$, с дополнительным ограничением $\frac{2n}{2n-1}<r$ при $n-1<\alpha<n$ и нечетном n.

Рассмотрим теперь смешанный гиперболический B-потенциал Рисса.

$$(I^\alpha_{\square,\gamma}f)(t,x)=\frac{1}{N(\alpha,\gamma,n)}\int\limits_{\tau^2\ge|y|^2,\tau\ge0,y\in\mathbb{R}^n}(\tau^2-|y|^2)^{\frac{\alpha-n-|\gamma|-1}{2}}({}^\gamma\mathbf{T}^y_x)f(t-\tau,x)y^\gamma d\tau dy, \tag{15}$$

где $n+|\gamma|-1<\alpha<n+|\gamma|+1$,

$$N(\alpha,\gamma,n)=\frac{2^{\alpha-n-1}}{\sqrt{\pi}}\prod_{i=1}^n\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha-n-|\gamma|+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right). \tag{16}$$

Такой потенциал изучался в [32, 34, 35].

Интеграл (15) сходится абсолютно при $n{+}|\gamma|{-}1{<}\alpha$ для интегрируемых по части конуса $t^2{\ge}|y|^2$, $t\ge0$, $y\in\mathbb{R}^n$, $0<\tau$ с весом y^γ функций $f(\tau,y)$.

Для $0\le\alpha\le n+|\gamma|-1$ имеем

$$(I^\alpha_{\square,\gamma}f)(t,x)=\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\sum_{i=1}^n(B_{\gamma_i})_{x_i}\right)^w(I^{\alpha+2w}_{\square,\gamma}f)(t,x),$$

где $w=\left[\frac{n+|\gamma|-\alpha+1}{2}\right]$.

Потенциал $I^{2\alpha}_{\square,\gamma}$ реализует отрицательные степени сингулярного волнового оператора $\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\sum\limits_{i=1}^n(B_{\gamma_i})_{x_i}$:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\sum_{i=1}^n(B_{\gamma_i})_{x_i}\right)^\alpha=I^{2\alpha}_{\square,\gamma}.$$

В частности, для подходящей функции $f(t,x)$ справедливо равенство при $\alpha=2m<n+1$, $m\in\mathbb{N}$ (см. [34, 35])

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\sum_{i=1}^n(B_{\gamma_i})_{x_i}\right)^m(I^{2m}_{\square,\gamma}f)(t,x)=f(t,x). \tag{17}$$

Справедлива теорема 3.3 об ограниченности $I^\alpha_{\square,\gamma}$ из L_p в L_r (см. [32], теорема 1) и теорема 3.4 об обратном к $I^\alpha_{\square,\gamma}$ операторе (см. [32], теорема 7).

Теорема 3.3. *Пусть $n+|\gamma|-1{<}\alpha{<}n+|\gamma|+1$, $1\le p{<}\frac{n+|\gamma|+1}{\alpha}$. Для выполнения оценки*

$$||I^\alpha_{\square,\gamma}f||_{q,\gamma}\le M_{n,\gamma,p}||f||_{p,\gamma},\qquad f\in S_{ev} \tag{18}$$

необходимо и достаточно, чтобы $q=\frac{(n+|\gamma|+1)p}{n+|\gamma|+1-\alpha p}$. Константа $M_{n,\gamma,p}$ не зависит от f.

Замечание 1. *В силу (18) существует единственное продолжение* $I^{\alpha}_{\square,\gamma}$ *на все* $\mathcal{L}^{\gamma}_{p}$, $1 < p < \frac{n+|\gamma|+1}{\alpha}$ *с сохранением ограниченности при* $n+|\gamma|-1 < \alpha < n+|\gamma|$. *Отсюда следует, что это продолжение вводится интегралом (15) в случае, когда он сходится абсолютно.*

Теорема 3.4. *Пусть* $n+|\gamma|-1 < \alpha < n+1+|\gamma|$, $1 < p < \frac{n+1+|\gamma|}{\alpha}$ *с дополнительным ограничением*

$$p < \frac{2(n+1+|\gamma|)(n+|\gamma|)}{n+1+|\gamma|+2\alpha(n+|\gamma|)}$$

при $n+|\gamma|-1 < \alpha < n+|\gamma|$ *и при* $n+1+|\gamma|$ *– нечетное число. Тогда*

$$((I^{\alpha}_{\square,\gamma})^{-1} I^{\alpha}_{\square,\gamma} f)(t,x) = f(t,x), \qquad f(t,x) \in L^{\gamma}_{p},$$

где

$$(I^{\alpha}_{\square,\gamma})^{-1} f = \lim_{\varepsilon\to 0} (I^{\alpha}_{\square,\gamma})^{-1}_{\varepsilon} f, \tag{19}$$

$$(I^{\alpha}_{\square,\gamma})^{-1}_{\varepsilon} f = \left(\mathcal{F}^{-1}_{\gamma}(q|\tau^2-|\xi|^2|^{\frac{\alpha}{2}} e^{-\varepsilon|\tau|-\varepsilon|\xi|}) * f\right)_{\gamma},$$

$$g_{\alpha,\gamma,\varepsilon}(t,x) = \mathcal{F}^{-1}_{\gamma}(q^{-1}|\tau^2-|\xi|^2|^{\frac{\alpha}{2}} e^{-\varepsilon|\tau|-\varepsilon|\xi|})(t,x),$$

$$q = \begin{cases} 1, & |\xi|^2 \geq \tau^2; \\ e^{-\frac{\alpha\pi}{2}i}, & |\xi|^2 < \tau^2, \ \tau \geq 0; \\ e^{\frac{\alpha\pi}{2}i}, & |\xi|^2 < \tau^2, \ \tau < 0. \end{cases}$$

В случае, когда $f(t,x) = h(t)F(x)$, получим

$$(I^{\alpha}_{\square,\gamma} hF)(t,x) =$$

$$= \frac{1}{N(\alpha,\gamma,n)} \int\limits_{0}^{\infty} h(t-\tau)d\tau \int\limits_{\tau\geq|y|,\, y\in\mathbb{R}^n_+} (\tau^2-|y|^2)^{\frac{\alpha-n-|\gamma|-1}{2}} ({}^{\gamma}\mathbf{T}^{y}_{x})F(x) y^{\gamma} dy. \tag{20}$$

4. Сферическое среднее. Классическое сферическое среднее имеет вид (см. [3], стр. 72, формула 4.1)

$$(M_t f)(x) = \frac{1}{|S_n(1)|} \int\limits_{S_n(1)} f(x+\beta t) dS, \qquad x = (x_1,\ldots,x_n), \qquad |S_n(1)| = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}, \tag{21}$$

где $n \geq 2$. При $n \geq 3$ здесь $S_n(1)$ – единичная сфера с центром в начале координат, β – координата сферы $S_n(1)$. При $n = 2$ здесь $S_2(1)$ – единичная окружность с центром в начале координат, β – координата окружности $S_2(1)$. При $n = 1$ положим

$$(M_t f)(x) = \frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}. \tag{22}$$

По определению функция M_t является четной функций t.

Пусть $t \geq 0$, $\Delta_x = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$. Известно [3], что сферическое среднее (21) является единственным решение задачи Коши

$$\Delta_x u(t,x) = (B_{n-1})_t u(t,x),$$

$$u(0,x) = f(x), \qquad u_t(0,x) = 0.$$

В силу четности по t функции M_t запишем (21) в виде

$$u(t,x) = (M_t f)(x) = \frac{1}{|S_n(1)|} \int\limits_{S_n(1)} f(x-\beta t) dS. \tag{23}$$

Замечание 2. *Заметим, что (см. [24], стр. 124, Теорема 4.1) дважды непрерывно дифференцируемое при* $t > 0$ *решение* u=$u(t,x)$ *уравнения*

$$\Delta_x u(t,x) = (B_k)_t u(t,x), \qquad x = (x_1,\ldots,x_n), \quad t > 0,$$

связано с дважды непрерывно дифференцируемым решением уравнения

$$\Delta_x w(t,x) = w_{tt}(t,x), \qquad x = (x_1,\ldots,x_n), \quad t \in \mathbb{R},$$

формулой

$$u(t,x)=\mathcal{P}_t^k w(t,x),$$

где $\mathcal{P}_t^k$ *оператор Пуассона* (9)*, действующий по переменной* t*. Тогда сферическое среднее связано с решением задачи Коши для волнового уравнения с условиями* $w(0,x)=f(x)$, $w_t(0,x)=0$ *равенством*

$$(M_t f)(x)=\mathcal{P}_t^k w(t,x), \tag{24}$$

Пример 1. Пусть $f(x)=e^{i\langle a,x\rangle}$, $a=(a_1,...,a_n)$, $x=(x_1,...,x_n)$, $\langle a,x\rangle=a_1x_1+...a_nx_n$. Для его сферического среднего имеем

$$M_t e^{i\langle a,x\rangle}=\frac{e^{i\langle a,x\rangle}}{|S_n(1)|}\int\limits_{S_n(1)} e^{it\langle a,\beta\rangle}dS.$$

Используя формулу для интеграла, взятого по единичной сфере, от функции типа плоской волны (см. формулу 1.2 из [3]) вида

$$\int\limits_{S_n(1)} g(\langle x,y\rangle)dS=|S_{n-1}(1)|\int\limits_{-1}^{1}(1-p^2)^{\frac{n-3}{2}}g(|y|p)dp,$$

получим

$$M_t e^{i\langle a,x\rangle}=\frac{|S_{n-1}(1)|}{|S_n(1)|}e^{i\langle a,x\rangle}\int\limits_{-1}^{1}(1-p^2)^{\frac{n-3}{2}}e^{it|a|p}dp.$$

Применяя формулу 2.3.5.3 из [13] вида

$$\int\limits_{-a}^{a}(a^2-x^2)^{\beta-1}e^{i\lambda x}dx=\frac{\sqrt{\pi}\Gamma(\beta)(2a)^{\beta-\frac12}}{\lambda^{\beta-\frac12}}J_{\beta-\frac12}(a\lambda),\qquad \operatorname{Re}\beta>0,$$

будем иметь

$$M_t e^{i\langle a,x\rangle}=\frac{|S_{n-1}(1)|}{|S_n(1)|}e^{i\langle a,x\rangle}\frac{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{n-1}{2})2^{\frac n2-1}}{(|a|t)^{\frac n2-1}}J_{\frac n2-1}(|a|t)=$$

$$=\frac{\Gamma(\frac n2)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{n-1}{2})}\frac{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{n-1}{2})2^{\frac n2-1}}{(|a|t)^{\frac n2-1}}J_{\frac n2-1}(|a|t)\,e^{i\langle a,x\rangle}=\Gamma\left(\frac n2\right)\left(\frac{2}{|a|t}\right)^{\frac n2-1}J_{\frac n2-1}(|a|t)\,e^{i\langle a,x\rangle}.$$

Таким образом,

$$M_t e^{i\langle a,x\rangle}=\Gamma\left(\frac n2\right)\left(\frac{2}{|a|t}\right)^{\frac n2-1}J_{\frac n2-1}(|a|t)\,e^{i\langle a,x\rangle}. \tag{25}$$

5. Обращение сферического среднего. В этом пункте восстановим функцию f, по ее сферическому среднему $M_\rho f$.

Единственным решением задачи Коши

$$\Delta_x u(t,x)=B_k u(t,x),\qquad n-1<k\in\mathbb{R},$$

$$u(0,x)=f(x),\qquad u_t(0,x)=0.$$

будет

$$u(t,x)=\frac{|S_{k-n+1}(1)|}{|S_{k+1}(1)|}\int\limits_{|\xi|^2\le 1}(1-|\xi|^2)^{\frac{k-n-1}{2}}f(x-\xi t)d\xi,\qquad |S_n(1)|=\frac{2\pi^{\frac n2}}{\Gamma\left(\frac n2\right)},\qquad \xi=(\xi_1,...,\xi_n). \tag{26}$$

Функция $u(t,x)$ – четная по t. Преобразуем интеграл в выражении (26), используя сферическое среднее (21) и оператор Пуассона (10):

$$\int\limits_{|\xi|^2\le 1}(1-|\xi|^2)^{\frac{k-n-1}{2}}f(x-\xi t)d\xi=\{\xi=r\sigma\}=$$

$$=\int\limits_0^1(1-r^2)^{\frac{k-n-1}{2}}r^{n-1}dr\int\limits_{S_n(1)}f(x-rt\sigma)dS=|S_n(1)|\int\limits_0^1(1-r^2)^{\frac{k-n-1}{2}}r^{n-1}(M_{rt}f)(x)dr=$$

$$= \frac{|S_n(1)|t^{1-n}}{2C\,(k-n+1)} \mathcal{P}_t^{k-n+1}[t^{n-1}(M_t f)(x)].$$

Получим

$$\int\limits_{|\xi|^2\le 1} (1-|\xi|^2)^{\frac{k-n-1}{2}} f(x-\xi t)d\xi = \frac{|S_n(1)|t^{1-n}}{2C\,(k-n+1)} \mathcal{P}_t^{k-n+1}[t^{n-1}(M_t f)(x)].$$

В полученном равенстве заменим t на τ, домножим обе части на $\frac{1}{H_n(k)}\tau^{k-1}e^{t-\tau}$ и проинтегрируем от 0 до ∞ по τ, тогда с учетом (13), получим

$$I_{\square}^k e^t f(x) = \frac{1}{H_n(k)} \int\limits_0^\infty e^{t-\tau}\tau^{k-1}d\tau \int\limits_{|\xi|^2\le 1} (1-|\xi|^2)^{\frac{k-n-1}{2}} f(x-\tau\xi)d\xi =$$

$$= \frac{|S_n(1)|e^t}{2H_n(k)C\,(k-n+1)} \int\limits_0^\infty e^{-\tau}\tau^{k-n}\mathcal{P}_\tau^{k-n+1}[\tau^{n-1}(M_\tau f)(x)]d\tau.$$

Применяя формулу (14), найдем общую формулу восстановления функции по ее сферическому среднему:

$$f(x) = e^{-t}\,A(n,k)\,(I_{\square}^k)^{-1}e^t \int\limits_0^\infty e^{-\tau}\tau^{k-n}\mathcal{P}_\tau^{k-n+1}[\tau^{n-1}(M_\tau f)(x)]d\tau, \tag{27}$$

где $k \in (n-1, n+1)$, $k \in \mathbb{R}$,

$$A(n,k) = \frac{\pi 2^{1-k}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k-n}{2}+1\right)}.$$

Формула (27) содержит вещественный параметр k, который выбирается произвольно из интервала $(n-1, n+1)$.

Выбрав в (27) число $k = 2m > n-1$, $m \in \mathbb{N}$, применяя формулу (12), получим получим более простую формулу для обращения сферического среднего вида:

$$f(x) = e^{-t}\,A(n,2m)\,\square_{t,x}^m e^t \int\limits_0^\infty e^{-\tau}\tau^{2m-n}\mathcal{P}_\tau^{2m-n+1}[\tau^{n-1}(M_\tau f)(x)]d\tau, \qquad m\in\mathbb{N}, \qquad 2m > n-1 \tag{28}$$

или, поскольку

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta_x\right)^m e^t F(x) = e^t\,(I-\Delta_x)^m\,F(x), \qquad \Delta_x = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_k^2},$$

где I – тождественный оператор, то

$$f(x) = A(n,2m)\;(I-\Delta)^m \int\limits_0^\infty e^{-\tau}\tau^{2m-n}\mathcal{P}_\tau^{2m-n+1}[\tau^{n-1}(M_\tau f)(x)]d\tau, \qquad m\in\mathbb{N}, \qquad 2m > n-1. \tag{29}$$

Замечание 3. *Наиболее простая формула (29) получается при четной размерности пространства $n = 2m$, $m \in \mathbb{N}$. В этом случае выбрав $k = n = 2m$, $m \in \mathbb{N}$, получим*

$$f(x) = A(2m,2m)\;(I-\Delta_x)^m \int\limits_0^\infty e^{-\tau}\mathcal{P}_\tau^1[\tau^{2m-1}(M_\tau f)(x)]d\tau, \tag{30}$$

где

$$A(2m,2m) = \frac{\pi 2^{1-2m}}{\Gamma^2\,(m)}.$$

В случае, когда размерность пространства нечетная, $n = 2m-1$, $m \in \mathbb{N}$ в (27) в качестве k также можно выбрать $k = 2m$, $m \in \mathbb{N}$. Тогда формула (29) приобретает вид

$$f(x) = A(2m-1,2m)\;(I-\Delta)^m \int\limits_0^\infty e^{-\tau}\tau\,\mathcal{P}_\tau^2[\tau^{2m-2}(M_\tau f)(x)]d\tau, \qquad m\in\mathbb{N}, \qquad 2m > n-1, \tag{31}$$

где

$$A(2m-1,2m)=\frac{1}{\Gamma\left(2m-1\right)}.$$

Замечание 4. *Отметим, что поскольку сферическое среднее связано с решением волнового уравнения формулой* (24), *то наличие разных формул* (30) *и* (31) *восстановления функции по ее сферическому среднему для четной и нечетной размерности пространства отвечает такому хорошо известному свойству фундаментального решения* $\Phi(t,x)$ *задачи Коши*

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\Delta_x\right)\Phi(t,x)=0,$$

$$\Phi(0,x)=0,\qquad \Phi_t(0,x)=\delta(x),$$

как принцип Гюйгенса. А именно, (см. [1]), возмущение $\Phi(t,x)$ *от точечного, мгновенно действующего источника в пространстве нечетной размерности к моменту времени* $t>0$ *будет сосредоточено на сфере радиуса* t *с центром в точке* $x=0$*, то есть такое возмущение распространяется в виде сферической волны* $|x|=t$*, причем после прохождения этой волны через любую точку пространства в ней опять наступает покой. При четной размерности пространства носителем фундаментального решения* $\Phi(t,x)$ *является вся внутренность светового конуса, так что соответствующее волновое возмущение при* $t>0$ *будет сосредоточено внутри замкнутого шара радиуса* t *с центром* $x=0$.

Пример 2. Рассмотрим случай $n=1$:

$$(M_tf)(x)=\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}.$$

Пусть $k=2$, тогда $m=1$ и

$$\mathcal{P}_\tau^2[(M_\tau f)(x)]=\frac{2C(2)}{\tau}\int\limits_0^\tau (M_rf)(x)\,dr=\frac{1}{2\tau}\int\limits_0^\tau (f(x+r)+f(x-r))\,dr,$$

$$C(2)=\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}=\frac{1}{2}.$$

По формуле (28) получим

$$f(x)=e^{-t}A(1,2)\,\Box_{t,x}e^t\int\limits_0^\infty e^{-\tau}\tau\mathcal{P}_\tau^2[(M_\tau f)(x)]d\tau=$$

$$=\frac{e^{-t}}{2}\Box_{t,x}e^t\int\limits_0^\infty e^{-\tau}d\tau\int\limits_0^\tau (f(x+r)+f(x-r))\,dr=$$

$$=\frac{e^{-t}}{2}\Box_{t,x}e^t\int\limits_0^\infty (f(x+r)+f(x-r))\,dr\int\limits_r^\infty e^{-\tau}d\tau=\frac{e^{-t}}{2}\Box_{t,x}e^t\int\limits_0^\infty e^{-r}(f(x+r)+f(x-r))\,dr=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\int\limits_0^\infty e^{-r}(f(x+r)+f(x-r))\,dr-\frac{d^2}{dx^2}\int\limits_0^\infty e^{-r}(f(x+r)+f(x-r))\,dr\right).$$

Окончательно будем иметь

$$f(x)=\left(\int\limits_0^\infty e^{-r}(M_rf)(x)\,dr-\frac{d^2}{dx^2}\int\limits_0^\infty e^{-r}(M_rf)(x)\,dr\right).$$

Например, если $f(x)=x^2$, то

$$M_tx^2=\frac{(x+t)^2+(x-t)^2}{2}=x^2+t^2.$$

Тогда

$$\int\limits_0^\infty e^{-r}(M_rf)(x)\,dr=\int\limits_0^\infty e^{-r}(x^2+r^2)\,dr=x^2\int\limits_0^\infty e^{-r}\,dr+\int\limits_0^\infty e^{-r}\,r^2\,dr=x^2+2$$

и

$$\left(\int_0^\infty e^{-r}(M_r f)(x)\,dr - \frac{d^2}{dx^2}\int_0^\infty e^{-r}(M_r f)(x)\,dr\right) = x^2 + 2 - \frac{d^2}{dx^2}(x^2+2) = x^2.$$

Рассмотрим случай

$$M_t \sin(x^2) = \frac{\sin(x+t)^2 + \sin(x-t)^2}{2},$$

(см. Рис. 1, a)). Тогда имеем равенство

$$\frac{1}{2}\left(\int_0^\infty e^{-r}\left(\sin(x+r)^2+\sin(x-r)^2\right)\,dr - \frac{d^2}{dx^2}\int_0^\infty e^{-r}\left(\sin(x+r)^2+\sin(x-r)^2\right)\,dr\right) = \sin x^2.$$

Таким образом, $f(x) = \sin x^2$ (см. Рис. 1, b)).

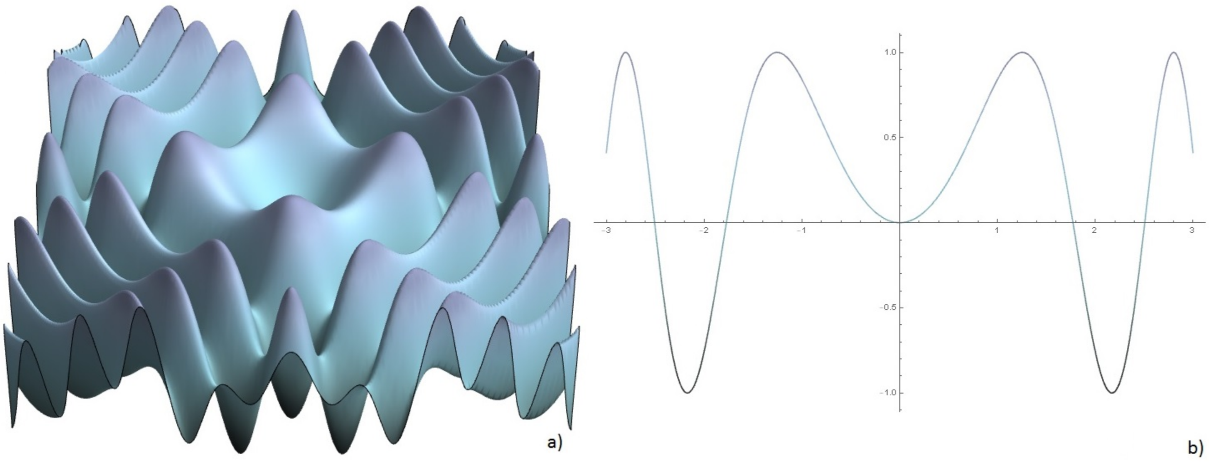

Рис. 1. a) Сферическое среднее $M_t \sin(x^2) = \frac{\sin(x+t)^2+\sin(x-t)^2}{2}$. b) Функция $f(x) = \sin x^2$

Fig. 1. a) Spherical mean $M_t \sin(x^2) = \frac{\sin(x+t)^2+\sin(x-t)^2}{2}$. b) Function $f(x) = \sin x^2$

Пример 3. Рассмотрим сферическое среднее вида

$$M_t f(x) = \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{2}{|a|t}\right)^{\frac{n}{2}-1} J_{\frac{n}{2}-1}(|a|t)\, e^{i\langle a,x\rangle}.$$

Получим $f(x)$ по формуле (30). Сначала найдем $\mathcal{P}_\tau^{2m-n+1}[\tau^{n-1}(M_\tau f)(x)]$. Используя формулу 2.12.4.6 из [14]

$$\int_0^a (a^2-x^2)^{\beta-1}x^{\nu+1}J_\nu(cx)dx = \frac{2^{\beta-1}a^{\beta+\nu}}{c^\beta}\Gamma(\beta)J_{\beta+\nu}(ac), \tag{32}$$

$$a>0, \qquad \operatorname{Re}\beta>0, \qquad \operatorname{Re}\nu>-1,$$

получим

$$\mathcal{P}_\tau^{2m-n+1}[\tau^{n-1}(M_\tau f)(x)] =$$

$$= 2C(2m-n+1)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{2}{|a|}\right)^{\frac{n}{2}-1}\tau^{\frac{n}{2}}\,e^{i\langle a,x\rangle}\int_0^1 \left(1-t^2\right)^{\frac{2m-n+1}{2}-1} t^{\frac{n}{2}}J_{\frac{n}{2}-1}(|a|\tau t)\,dt =$$

$$= 2C(2m-n+1)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{2}{|a|}\right)^{\frac{n}{2}-1}\tau^{\frac{n}{2}}\frac{2^{\frac{2m-n-1}{2}}}{(|a|\tau)^{\frac{2m-n+1}{2}}}\Gamma\left(\frac{2m-n+1}{2}\right)J_{m-\frac{1}{2}}(|a|\tau)\,e^{i\langle a,x\rangle} =$$

$$= 2C(2m-n+1)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{2}{|a|}\right)^{\frac{n}{2}-1}\tau^{\frac{n}{2}}\frac{2^{\frac{2m-n-1}{2}}}{(|a|\tau)^{\frac{2m-n+1}{2}}}\Gamma\left(\frac{2m-n+1}{2}\right)J_{m-\frac{1}{2}}(|a|\tau)\,e^{i\langle a,x\rangle} =$$

$$= \frac{2^{m-\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2m-n}{2}+1\right)}{\sqrt{\pi}|a|^{m-\frac{1}{2}}}\tau^{n-m-\frac{1}{2}}J_{m-\frac{1}{2}}(|a|\tau)\,e^{i\langle a,x\rangle}.$$

Теперь, применяя формулу 2.12.8.4 из [14] вида

$$\int\limits_0^\infty x^\nu e^{-px} J_\nu(cx)dx = \frac{(2c)^\nu}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)(p^2+c^2)^{-\nu-\frac{1}{2}}, \qquad \mathrm{Re}\,\nu > -1/2,$$

будем иметь

$$\int\limits_0^\infty e^{-\tau}\tau^{2m-n}\mathcal{P}_\tau^{2m-n+1}[\tau^{n-1}(M_\tau f)(x)]d\tau = \frac{2^{m-\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2m-n}{2}+1\right)}{\sqrt{\pi}|a|^{m-\frac{1}{2}}}\, e^{i\langle a,x\rangle}\int\limits_0^\infty e^{-\tau}\,\tau^{m-\frac{1}{2}}\,J_{m-\frac{1}{2}}(|a|\tau)d\tau =$$

$$= \frac{2^{m-\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2m-n}{2}+1\right)}{\sqrt{\pi}|a|^{m-\frac{1}{2}}}\, e^{i\langle a,x\rangle}\frac{(2|a|)^{m-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(m)\,(1+|a|^2)^{-m} =$$

$$= \frac{2^{2m-1}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2m-n}{2}+1\right)\Gamma(m)}{\pi(1+|a|^2)^m}\, e^{i\langle a,x\rangle}.$$

Поскольку

$$\square_{t,x}^m e^t\, e^{i\langle a,x\rangle} = (1+|a|^2)^m e^t\, e^{i\langle a,x\rangle},$$

то по формуле (30) получим $f(x) = e^{i\langle a,x\rangle}$, что согласуется с примером 1. Для случая $n = 1$, $a = i$ построены соответствующие графики см. Рис 2.

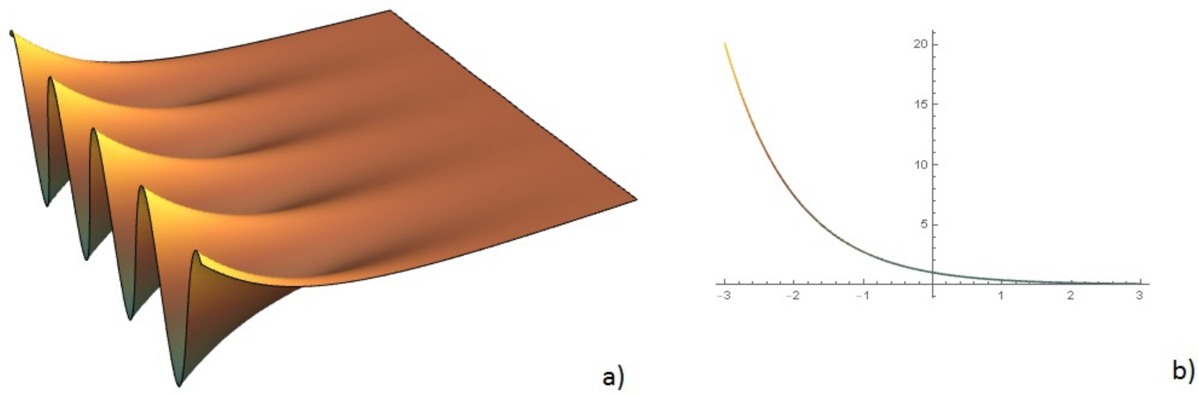

Рис. 2. a) Сферическое среднее $M_t e^{-x} = \sqrt{\frac{\pi t}{2}}J_{-\frac{1}{2}}(t)e^{-x} = \cos t e^{-x}$. b) Функция $f(x) = e^{-x}$

Fig. 2.a) Spherical mean $M_t e^{-x} = \sqrt{\frac{\pi t}{2}}J_{-\frac{1}{2}}(t)e^{-x} = \cos t e^{-x}$. b) Function $f(x) = e^{-x}$

6. Весовое сферическое среднее. Определим весовое сферическое среднее. При построении весового сферического среднего вместо обычного сдвига используется многомерный обобщенный сдвиг (6).

Весовое сферическое среднее (см. [9, 10, 33, 35]) функции $f(x)$, $x \in \overline{\mathbb{R}}^n_+$ при $n \geq 2$ задается формулой

$$(M_t^\gamma f)(x) = (M_t^\gamma)_x[f(x)] = \frac{1}{|S_1^+(n)|_\gamma}\int\limits_{S_1^+(n)} {}^\gamma\mathbf{T}_x^{t\theta} f(x)\theta^\gamma dS, \tag{33}$$

где $\theta^\gamma = \prod\limits_{i=1}^n \theta_i^{\gamma_i}$, $S_1^+(n) = \{\theta{:}|\theta|=1, \theta\in\mathbb{R}_+^n\}$ – часть сферы в $\mathbb{R}_+^n$, а $|S_1^+(n)|_\gamma$ определяется формулой

$$|S_1^+(n)|_\gamma = \int\limits_{S_1^+(n)} x^\gamma dS = \frac{\prod\limits_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{2^{n-1}\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)}. \tag{34}$$

При $n = 1$ положим $M_t^\gamma[f(x)] = {}^\gamma T_x^t f(x)$.

Пусть $\mathbf{j}_\gamma(x,\xi)$ определена формулой (8), j_ν определена формулой (7), $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n)$. Справедливо равенство (см. [35], стр. 162, формула 3.190)

$$M_r^\gamma[\mathbf{j}_\gamma(x,\xi)] = \mathbf{j}_\gamma(x,\xi)\; j_{\frac{n+|\gamma|}{2}-1}(r|\xi|). \tag{35}$$

7. Обращение весового сферического среднего. В этом разделе мы рассмотрим восстановление функции f по ее весовому сферическому среднему $M_\rho^\gamma f$.

Пусть $f = f(x) \in C^2_{ev}(\mathbb{R}^n_+)$. Весовое сферическое среднее $M_t^\gamma f$ – это оператор, сплетающий $(\Delta_\gamma)_x$ и $(B_{n+|\gamma|-1})_t$ (см. [35], стр. 159, Теорема 36):

$$(B_{n+|\gamma|-1})_t(M_t^\gamma f)(x) = (M_t^\gamma (\Delta_\gamma)_x f)(x). \tag{36}$$

Рассмотрим интегральный оператор

$$(\mathscr{M}_t^{\gamma,k} f)(x) = \frac{1}{|S_1^+(n)|_\gamma} \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} ({}^\gamma\mathbf{T}_x^y f(x))(t^2-|y|^2)_+^{\frac{k-n-|\gamma|-1}{2}} y^\gamma dy. \tag{37}$$

Оператор $t^{1-k}\mathscr{M}_t^{\gamma,k}$ сплетает $(\Delta_\gamma)_x$ и $(B_k)_t$ при $k > n+|\gamma|-1$:

$$(B_k)_t(t^{1-k}\mathscr{M}_t^{\gamma,k} f)(x) = (t^{1-k}\mathscr{M}_t^{\gamma,k}(\Delta_\gamma)_x f)(x). \tag{38}$$

Перейдем к сферическим координатам в (37) при $k > n+|\gamma|-1$, тогда, используя (9) запишем

$$(\mathscr{M}_t^{\gamma,k} f)(x) =$$

$$= \frac{1}{|S_1^+(n)|_\gamma} \int\limits_{\{|y|<t\}^+} ({}^\gamma\mathbf{T}_x^y f(x))(t^2-|y|^2)^{\frac{k-n-|\gamma|-1}{2}} y^\gamma dy = \{y=\rho\theta\} =$$

$$= \frac{1}{|S_1^+(n)|_\gamma} \int\limits_0^t (t^2-\rho^2)^{\frac{k-n-|\gamma|-1}{2}} \rho^{n+|\gamma|-1} d\rho \int\limits_{S_1^+(n)} ({}^\gamma\mathbf{T}_x^{\rho\theta} f(x))\theta^\gamma dS =$$

$$= \int\limits_0^t (t^2-\rho^2)^{\frac{k-n-|\gamma|-1}{2}} \rho^{n+|\gamma|-1} (M_\rho^\gamma f)(x) d\rho =$$

$$= \frac{t^{k-n-|\gamma|}}{2C(k-n-|\gamma|+1)} \mathcal{P}_t^{k-n-|\gamma|+1} \left(t^{n+|\gamma|-1}(M_t^\gamma f)(x)\right).$$

Теперь найдем обратный оператор для $\mathscr{M}^{\gamma,k}$. Умножим (37) на $h(t-\tau)$ и проинтегрируем по τ от 0 до ∞. Функция $h(t)$ следует выбирать так, чтобы функция $h(t-\tau)(\mathscr{M}_\tau^{\gamma,k} f)(x)$ была бы интегрируема по τ от 0 до ∞.

Получим

$$\int\limits_0^\infty h(t-\tau)(\mathscr{M}_\tau^{\gamma,k} f)(x) d\tau =$$

$$= \frac{1}{|S_1^+(n)|_\gamma} \int\limits_0^\infty h(t-\tau) d\tau \int\limits_{\{|y|<\tau\}^+} (\tau^2-|y|^2)^{\frac{k-n-|\gamma|-1}{2}} ({}^\gamma\mathbf{T}_x^y f)(x) y^\gamma dy.$$

Принимая во внимание (20), будем иметь

$$\frac{|S_1^+(n)|_\gamma}{N(k,\gamma,n)} \int\limits_0^\infty h(t-\tau)(\mathscr{M}_\tau^{\gamma,k} f)(x) d\tau = (I_{s,\gamma}^k hf)(t,x),$$

где $N(k,\gamma,n)$ определено через (16) и $I_{\square,\gamma}^k$ – смешанный гиперболический –потенциал Рисса (15) порядка k, действующий на функцию $h(t)f(x)$. Следовательно, используя теорему 14, получим

$$h(t)f(x) = \frac{|S_1^+(n)|_\gamma}{N(k,\gamma,n)} \left((I_{\square,\gamma}^k)_{\phi,y}^{-1} \int\limits_0^\infty h(\phi-\tau)(\mathscr{M}_\tau^{\gamma,k} f)(y) d\tau \right)(t,x), \tag{39}$$

где $n+|\gamma|-1 < k < n+1+|\gamma|$ и оператор $(I_{\square,\gamma}^k)^{-1}$ определен формулой (19). В формуле (39) мы имеем произвольный параметр $k \in (n+|\gamma|-1, n+1+|\gamma|)$ и произвольную ненулевую функцию h (такую, что функция $h(t-\tau)(\mathscr{M}_\tau^{\gamma,k} f)(x)$ является интегрируемой по τ от 0 до ∞), зависящую от одной переменной.

Для нахождения функции по ее весовому сферическому среднему формула (39) может быть упрощена. Мы можем взять $k=2m>n+|\gamma|-1$, $m\in\mathbb{N}$. В этом случае

$$(I^{2m}_{s,\gamma})^{-1}=\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\Delta_\gamma\right)^m$$

и

$$h(t)f(x)=\frac{|S_1^+(n)|_\gamma}{N(2m,\gamma,n)}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\Delta_\gamma\right)^m\int\limits_0^\infty h(t-\tau)(\mathscr{M}^{\gamma,2m}_\tau f)(x)d\tau. \tag{40}$$

Итак, мы получаем основное утверждение.

Теорема 7.1. *Пусть $f=f(x)\in C^2(\mathbb{R}^n_+)$, такая что $\left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{x_i=0}=0$, $i=1,...,n$, $k=2m>n+|\gamma|-1$, $m\in\mathbb{N}$ и*

$$(\mathscr{M}^{\gamma,k}_t f)(x)=\frac{t^{k-n-|\gamma|}}{2C(k-n-|\gamma|+1)}\mathcal{P}_t^{k-n-|\gamma|+1}\left(t^{n+|\gamma|-1}(M_t^\gamma f)(x)\right),$$

где $M_\rho^\gamma f$ – весовое сферическое среднее (33) функции f, $\mathcal{P}_t^\nu$ – одномерный оператор Пуассона (9), $C(\nu)$ – константа, определенная формулой (9). Тогда функция f может быть восстановлена с помощью его весового сферического среднего по формуле

$$f(x)=\frac{|S_1^+(n)|_\gamma}{h(t)N(2m,\gamma,n)}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\Delta_\gamma\right)^m\int\limits_0^\infty h(t-\tau)(\mathscr{M}^{\gamma,2m}_\tau f)(x)d\tau, \tag{41}$$

где $h(t)$ произвольная такая, что функция $h(t-\tau)(\mathscr{M}^{\gamma,k}_\tau f)(x)$ интегрируема по τ от 0 до ∞, $|S_1^+(n)|_\gamma$ определяется формулой (34), $N(2m,\gamma,n)$ определяется формулой (16).

Замечание 5. *Если в условиях Теоремы 7.1 есть возможность выбрать $h(t)=e^t$, то функция f может быть восстановлена с помощью его весового сферического среднего по формуле*

$$f(x)=\frac{|S_1^+(n)|_\gamma}{N(2m,\gamma,n)}\left(I-\Delta_\gamma\right)^m\int\limits_0^\infty e^{-\tau}(\mathscr{M}^{\gamma,2m}_\tau f)(x)d\tau, \tag{42}$$

где $2m>n+|\gamma|-1$, $m\in\mathbb{N}$, I – тождественный оператор.

Пример 4. Пусть $h(t)=e^t$, $(M_\rho^\gamma f)(x)=\mathbf{j}_\gamma(x,\xi)\ j_{\frac{n+|\gamma|}{2}-1}(\rho|\xi|)$, $2m>n+|\gamma|-1$, где $\xi=(\xi_1,...,\xi_n)$ – некоторый вектор. Тогда

$$(\mathscr{M}^{\gamma,2m}_\tau f)(x)=\int\limits_0^\tau(\tau^2-\rho^2)^{\frac{2m-n-|\gamma|-1}{2}}\rho^{n+|\gamma|-1}(M_\rho^\gamma f)(x)d\rho=$$

$$=\mathbf{j}_\gamma(x,\xi)\int\limits_0^\tau(\tau^2-\rho^2)^{\frac{2m-n-|\gamma|-1}{2}}\rho^{n+|\gamma|-1}\ j_{\frac{n+|\gamma|}{2}-1}(\rho|\xi|)d\rho=$$

$$=2^{\frac{n+|\gamma|}{2}-1}\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)|\xi|^{1-\frac{n+|\gamma|}{2}}\mathbf{j}_\gamma(x,\xi)\times$$

$$\times\int\limits_0^\tau\left(\tau^2-\rho^2\right)^{\frac{2m-n-|\gamma|-1}{2}}\rho^{\frac{n+|\gamma|}{2}}J_{\frac{n+|\gamma|}{2}-1}(\rho|\xi|)\,d\rho.$$

Используя формулу 2.12.4.6 из [14], получим

$$(\mathscr{M}^{\gamma,2m}_\tau f)(x)=$$

$$=2^{\frac{n+|\gamma|}{2}-1}\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)|\xi|^{1-\frac{n+|\gamma|}{2}}\mathbf{j}_\gamma(x,\xi)\frac{2^{\frac{2m-n-|\gamma|-1}{2}}\tau^{m-\frac12}}{|\xi|^{\frac{2m-n-|\gamma|+1}{2}}}\times$$

$$\times\Gamma\left(\frac{2m-n-|\gamma|+1}{2}\right)J_{m-\frac12}(|\xi|\tau)=$$

$$=\frac{2^{m-\frac32}\tau^{m-\frac12}}{|\xi|^{m-\frac12}}\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2m-n-|\gamma|+1}{2}\right)\mathbf{j}_\gamma(x,\xi)J_{m-\frac12}(|\xi|\tau).$$

Принимая во внимание, что $h(t) = e^t$, будем иметь

$$\int\limits_0^\infty h(t-\tau)(\mathscr{M}_\tau^{\gamma,2m} f)(x)d\tau =$$

$$= e^t \frac{2^{m-\frac{3}{2}}}{|\xi|^{m-\frac{1}{2}}} \Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right) \Gamma\left(\frac{2m-n-|\gamma|+1}{2}\right) \times$$

$$\times \mathbf{j}_\gamma(x,\xi) \int\limits_0^\infty e^{-\tau} \tau^{m-\frac{1}{2}} J_{m-\frac{1}{2}}(|\xi|\tau)d\tau$$

$$= e^t \frac{2^{m-\frac{3}{2}}}{|\xi|^{m-\frac{1}{2}}} \Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right) \Gamma\left(\frac{2m-n-|\gamma|+1}{2}\right) \times$$

$$\times \mathbf{j}_\gamma(x,\xi) \frac{2^{m-\frac{1}{2}} |\xi|^{m-\frac{1}{2}} \left(|\xi|^2+1\right)^{-m} \Gamma(m)}{\sqrt{\pi}} =$$

$$= \frac{\Gamma(m)\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2m-n-|\gamma|+1}{2}\right)}{2^{2-2m}\sqrt{\pi}\,(1+|\xi|^2)^m} e^t \mathbf{j}_\gamma(x,\xi).$$

Вычислим константу

$$\frac{|S_1^+(n)|_\gamma}{N(2m,\gamma,n)} =$$

$$= \frac{\prod\limits_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{2^{n-1}\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)} \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2m-n-1} \prod\limits_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{2m-n-|\gamma|+1}{2}\right) \Gamma(m)} =$$

$$= \frac{2^{2-2m}\sqrt{\pi}}{\Gamma(m)\,\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2m-n-|\gamma|+1}{2}\right)}.$$

Следовательно,

$$\frac{|S_1^+(n)|_\gamma}{N(2m,\gamma,n)} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta_\gamma\right)^m \int\limits_0^\infty h(t-\tau)(\mathscr{M}_\tau^{\gamma,2m} f)(x)d\tau =$$

$$= \frac{1}{(1+|\xi|^2)^m} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta_\gamma\right)^m e^t \mathbf{j}_\gamma(x,\xi) = e^t \mathbf{j}_\gamma(x,\xi), \tag{43}$$

что по формуле (41) дает $f(x) = \mathbf{j}_\gamma(x,\xi)$. В формуле (43) мы использовали тот факт, что $\Delta_\gamma \mathbf{j}_\gamma(x;\xi) = -|\xi| \mathbf{j}_\gamma(x;\xi)$ [9, 33].

Этот результат подтверждается формулой (35). Примеры графиков при $n = 1$ и $\xi = 1$ приведены на Рис. 3 и 4.

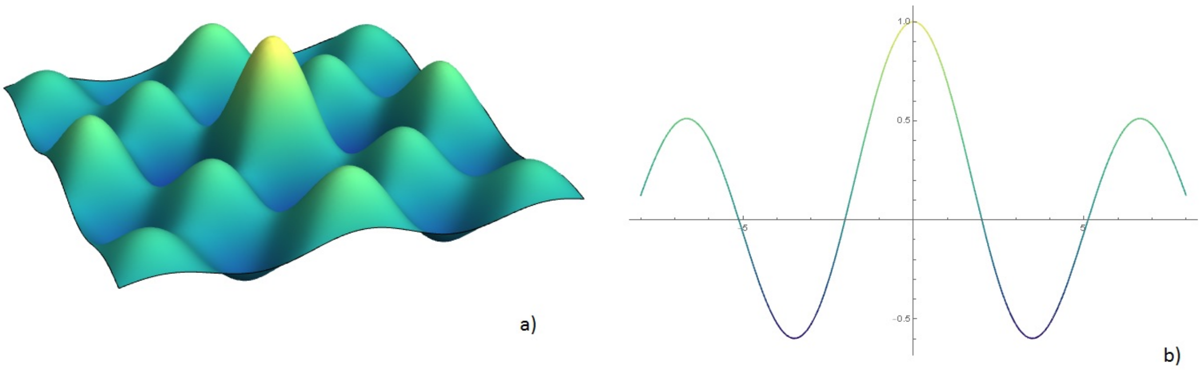

Рис. 3. a) Сферическое среднее $(M_\rho^\gamma)_x j_\gamma(x,\xi) = j_{\frac{\gamma-1}{2}}(x)\, j_{\frac{\gamma-1}{2}}(\rho)$ при $\gamma = \frac{1}{2}$. b) Функция $f(x) = j_\gamma(x,\xi)$ при $\gamma = \frac{1}{2}$

Fig. 3. a) Spherical mean $(M_\rho^\gamma)_x j_\gamma(x,\xi) = j_{\frac{\gamma-1}{2}}(x)\, j_{\frac{\gamma-1}{2}}(\rho)$ for $\gamma = \frac{1}{2}$. b) Function $f(x) = j_\gamma(x,\xi)$ for $\gamma = \frac{1}{2}$

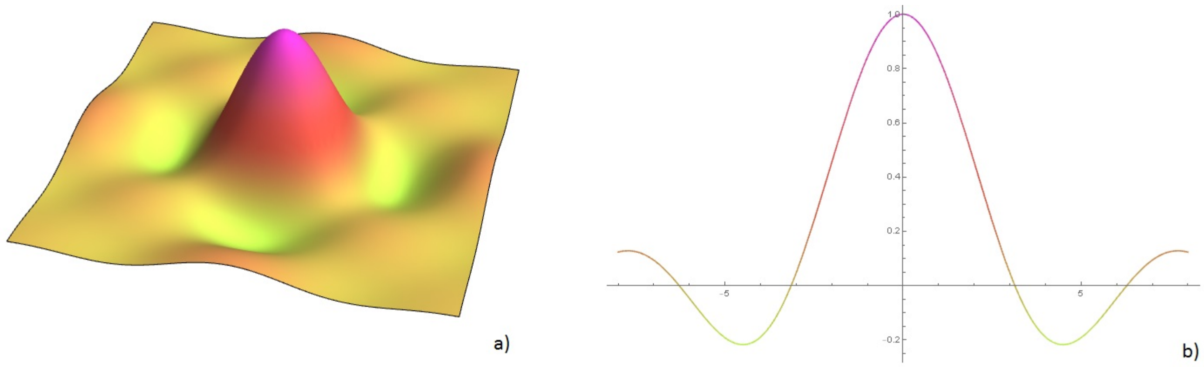

Рис. 4. a) Сферическое среднее $(M^{\gamma}_{\rho})_x j_{\gamma}(x,\xi) = j_{\frac{\gamma-1}{2}}(x)\, j_{\frac{\gamma-1}{2}}(\rho)$ при $\gamma = \frac{1}{2}$. b) Функция $f(x) = j_{\gamma}(x,\xi)$ при $\gamma = 2$

Fig. 4. a) Spherical mean $(M^{\gamma}_{\rho})_x j_{\gamma}(x,\xi) = j_{\frac{\gamma-1}{2}}(x)\, j_{\frac{\gamma-1}{2}}(\rho)$ for $\gamma = \frac{1}{2}$. b) Function $f(x) = j_{\gamma}(x,\xi)$ for $\gamma = 2$

В заключении приведем формулу обращения обобщенного сдвига, которая получается при $n = 1$. Пусть $2m > \gamma > 0$, $m \in \mathbb{N}$, I – тождественный оператор, тогда для функции f, удовлетворяющей условиям теоремы 7 при возможном выборе $h(t) = e^t$, получим

$$f(x) = \frac{|S_1^+(1)|_{\gamma}}{2C(2m-\gamma)N(2m,\gamma,1)} \left(I - B_{\gamma}\right)^m \int\limits_0^{\infty} e^{-\tau}\tau^{2m-1-\gamma}\mathcal{P}_{\tau}^{2m-\gamma}\left(\tau^{\gamma}\cdot {}^{\gamma}T_x^{\tau} f(x)\right) d\tau. \tag{44}$$

Пусть $0 < \gamma < 2$, тогда в (44) можно взять $k = 2$, $m = 1$. Получим

$$f(x) = \frac{|S_1^+(1)|_{\gamma}}{2C(2-\gamma)N(2,\gamma,1)} \left(I - B_{\gamma}\right) \int\limits_0^{\infty} e^{-\tau}\tau^{1-\gamma}\mathcal{P}_{\tau}^{2-\gamma}\left(\tau^{\gamma}\cdot {}^{\gamma}T_x^{\tau} f(x)\right) d\tau.$$

Следует отметить, что в рассмотренных задачах основную роль играли специальные операторы преобразования и связанные с ними сплетающие соотношения. Это ещё раз подтверждает фундаментальную роль теории операторов преобразования в задачах для различных классов дифференциальных уравнений, см. [4, 24, 35].

Список литературы

1. Берест Ю. Ю., Веселов А. П. 1994. Принцип Гюйгенса и интегрируемость. Успехи математических наук, 49(6(300)): 7–78.

2. Житомирский Я. И. 1955. Задача Коши для систем линейных уравнений в частных производных с дифференциальными операторами типа Бесселя. Матем. сб., 36(78)(2): 299–310.

3. Йон Ф. 1958. Плоские волны и сферические средние в применении к диференциальным уравнениям с частными производными. М., Изд.-во иностр. лит., 158.

4. Катрахов В. В., Ситник С. М. 2018. Метод операторов преобразования и краевые задачи для сингулярных эллиптических уравнений. Современная математика. Фундаментальные направления, 64(2): 211–426.

5. Киприянов И. А. 1997. Сингулярные эллиптические краевые задачи. М., Наука. Физматлит, 204.

6. Киприянов И. А. 2000. Преобразование Фурье – Бесселя и дробные степени дифференциальных операторов. ДАН, 373(1): 17–20.

7. Киприянов И. А. 1998. Весовые потенциалы Рисса. Сингулярные задачи. ДАН, 363(6): 738–740.

8. Левитан Б. М. 1951. Разложения по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье. М., УМН. 6:2(42): 102–143.

9. Ляхов Л. Н., Половинкин И. П., Шишкина Э. Л. 2014. Об одной задаче И.А. Киприянова для сингулярного ультрагиперболического уравнения. Дифференц. уравнения, 50(4): 516–528.

10. Ляхов Л. Н., Половинкин И. П., Шишкина Э. Л. 2014. Формулы решения задачи Коши для сингулярного волнового уравнения с оператором Бесселя по времени. Доклады Академии наук, 459(5): 533–538.

11. Ногин В. А., Сухинин Е. В. 1993. Обращение и описание гиперболических потенциалов с L_p−плотностями. Докл. РАН 329(5): 550–552.

12. Ногин В. А., Сухинин Е. В. 1992. Обращение и описание гиперболических потенциалов с L_p−плотностями. Депонирована в ВИНИТИ. Москва. 1992. № 2512-92: 234–249.

13. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И., 2003. Интегралы и ряды, Том 1. Элементарные функции. Физматлит, 632.

14. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И., 2003. Интегралы и ряды, Том 2. Специальные функции. Физматлит, 664.

15. Ситник С. М., Шишкина Э. Л. 2019. Метод операторов преобразования для дифференциальных уравнений с операторами Бесселя. Физматлит, Москва, 224.

16. Agranovsky M., Finch D., Kuchment P. 2009. Range conditions for a spherical mean transform. Inverse Probl. Imaging, 3(3): 373–382.

17. Agranovsky M., Kuchment P., Kunyansky L. 2009 On reconstruction formulas and algorithms for the thermoacoustic tomography. In Photoacoustic imaging and spectroscopy, ed. by L. Wang, CRC Press, 89–102.

18. Antipov Yu. A., Estrada R., Rubin B. 2012. Method of analytic continuation for the inverse spherical mean transform in constant curvature spaces. Journal D'analyse Mathématique, 118: 623–656.

19. Delgado B. B., Khmelnytskaya K. V., Kravchenko V. V. 2019. The transmutation operator method for efficient solution of the inverse Sturm – Liouville problem on a half-line. Mathematical Methods in the Applied Sciences. Mathematical Methods in the Applied Sciences. 42(18): 7359–7366.

20. Elouadih S., Daher R. 2019. Generalization of Titchmarsh's Theorem for the Dunkl Transform in the Space $L^p(\mathbb{R}^d, \omega_l(x)dx)$. International Journal of Mathematical Modelling & Computations, 6(4): 261–267.

21. Finch D., Patch S., Rakesh K. 2004. Determining a function from its mean values over a family of spheres. SIAM J. Math. Anal., 35(5): 1213-–1240.

22. Hamma M. E., Daher R. 2014. Estimate of K-functionals and modulus of smoothness constructed by generalized spherical mean operator. Pro Indian Acad. Sci. Math. Sci., 124(2): 235–242.

23. Karapetyants A. N., Khmelnytskaya K. V., Kravchenko V. V. 2019. A practical method for solving the inverse quantum scattering problem on a half line. Journal of Physics: Conference Series. 1540(1): 012007 1–8.

24. Kravchenko V. V. 2019. On a method for solving the inverse scattering problem on the line. Mathematical Methods in the Applied Sciences. 42(4): 1321–1327.

25. Kravchenko V. V. 2019. On a method for solving the inverse Sturm – Liouville problem. Journal of Inverse and Ill-posed Problems. 27: 401–407.

26. Kuchment P. 2014. The Radon Transform and Medical Imaging. Society for Industrial and Applied Mathematics Philadelphia, PA, USA, 260.

27. Kunyansky L. 2007. Explicit inversion formulae for the spherical mean Radon transform. Inverse Problems, 23: 373–383.

28. Li Z., Song F. 2009. Inversion Formulas for the Spherical Radon-Dunkl Transform. SIGMA, 5(25): 1–15.

29. Rubin B. 1996. Fractional Integrals and Potentials. Addison-Wesley, Essex, 424.

30. Rubin B. 2015. Introduction to Radon Transforms: With Elements of Fractional Calculus and Harmonic Analysis. Cambridge University Press, UK, 596.

31. Rubin B. 2008. Inversion formulae for the spherical mean in odd dimensions and the Euler–Poisson–Darboux equation. Inverse Problems, 24(2): 1–10.

32. Shishkina E. L. 2017. Inversion of the mixed Riesz hyperbolic B–potentials. International Journal of Applied Mathematics. 30(6): 487–500.

33. Shishkina E. L., Sitnik S. M. 2017. General form of the Euler–Poisson–Darboux equation and application of the transmutation method. Electron. J. Differential Equations. 177: 1–20.

34. Shishkina E. L. 2019. General Euler–Poisson–Darboux equation and hyperbolic B-potentials. Partial differential equations, CMFD, PFUR, M. 65(2): 157–338.

35. Shishkina E. L., Sitnik S. M. 2020. Transmutations, singular and fractional differential equations with applications to mathematical physics. Elsevier, Amsterdam, 564.

36. Weinstein A. 1962. Spherical means in spaces of constant curvature. Annali di Matematica Pura ed Applicata, 4(60): 87–91.

References

1. Berest Yu. Yu., Veselov A. P. 1994. Huygens' principle and integrability", Russian Math. Surveys, 49(6): 5–77.

2. Zhitomirskii Ya. I. 1955. Cauchy's problem for systems of linear partial differential equations with differential operators of Bessel type. Mat. Sb. (N.S.), 36(78)(2): 299–310.

3. John F. 1981. Plane Waves and Spherical Means Applied to Partial Differential Equations. Springer-Verlag New York, 172.

4. Katrakhov V. V., Sitnik S. M. 2018. The transmutation method and boundary-value problems for singular elliptic equations, Singular differential equations, CMFD, Moscow, Peoples' Friendship University of Russia, 64(2): 211–426.

5. Kipriyanov I. A. 1997. Singular Elliptic Boundary Value Problems. M.: Nauka-Fizmtlit, 1997.

6. Kipriyanov I. A. 2000. Fourier–Bessel transform and fractional powers of differential operators. DAN, 373 (1): 17-20.

7. Kipriyanov I. A. 1998. Weight Riesz Potentials. Singular problems. DAN, 363 (6): 738-740.

8. Levitan B. M. 1951. Expansion in Fourier series and integrals with Bessel functions. Uspekhi Mat. Nauk, 6:2(42): 102–143.

9. Lyakhov L. N., Polovinkin I. P., Shishkina E. L. 2014. On a Kipriyanov problem for a singular ultrahyperbolic equation. Differ. Equ., 50(4): 513–525.

10. Lyakhov L. N., Polovinkin I. P., Shishkina E. L. 2014. Formulas for the solution of the Cauchy problem for a singular wave equation with Bessel time operator. Doklady Mathematics of the Russian Academy of Sciences, 90(3): 737–742.

11. Nogin V. A., Sukhinin E. V. 1993. Inversion and characterization of hyperbolic potentials in L_p−spaces. Dokl. Acad. Nauk, 329(5): 550–552.

12. Nogin V. A., Sukhinin E. V. 1992. Inversion and characterization of hyperbolic potentials in L_p−spaces. Deponierted in VINITI, 2512:92: 1–50.

13. Prudnikov A. P., Brychkov Yu. A., Marichev O. I. 1992. Integrals and series. 1, Elementary Functions. Gordon & Breach Sci. Publ., New York, 632.

14. Prudnikov A. P., Brychkov Yu. A., Marichev O. I. 1990. Integrals and Series, Vol. 2, Special Functions. Gordon & Breach Sci. Publ., New York, 664.

15. Sitnik S. M., Shishkina E. L., 2019. Transmutation operators method for differential equations with Bessel operator. Moscow. Fizmathlit, 224.

16. Agranovsky M., Finch D., Kuchment P. 2009. Range conditions for a spherical mean transform. Inverse Probl. Imaging, 3(3): 373–382.

17. Agranovsky M., Kuchment P., Kunyansky L. 2009 On reconstruction formulas and algorithms for the thermoacoustic tomography. In Photoacoustic imaging and spectroscopy, ed. by L. Wang, CRC Press, 89–102.

18. Antipov Yu. A., Estrada R., Rubin B. 2012. Method of analytic continuation for the inverse spherical mean transform in constant curvature spaces. Journal D'analyse Mathématique, 118: 623–656.

19. Delgado B. B., Khmelnytskaya K. V., Kravchenko V. V. 2019. The transmutation operator method for efficient solution of the inverse Sturm – Liouville problem on a half-line. Mathematical Methods in the Applied Sciences. Mathematical Methods in the Applied Sciences. 42(18): 7359–7366.

20. Elouadih S., Daher R. 2019. Generalization of Titchmarsh's Theorem for the Dunkl Transform in the Space $L^p(\mathbb{R}^d, \omega_l(x)dx)$. International Journal of Mathematical Modelling & Computations, 6(4): 261–267.

21. Finch D., Patch S., Rakesh K. 2004. Determining a function from its mean values over a family of spheres. SIAM J. Math. Anal., 35(5): 1213-–1240.

22. Hamma M. E., Daher R. 2014. Estimate of K-functionals and modulus of smoothness constructed by generalized spherical mean operator. Pro Indian Acad. Sci. Math. Sci., 124(2): 235–242.

23. Karapetyants A. N., Khmelnytskaya K. V., Kravchenko V. V. 2019. A practical method for solving the inverse quantum scattering problem on a half line. Journal of Physics: Conference Series. 1540(1): 012007 1–8.

24. Kravchenko V. V. 2019. On a method for solving the inverse scattering problem on the line. Mathematical Methods in the Applied Sciences. 42(4): 1321–1327.

25. Kravchenko V. V. 2019. On a method for solving the inverse Sturm – Liouville problem. Journal of Inverse and Ill-posed Problems. 27: 401–407.

26. Kuchment P. 2014. The Radon Transform and Medical Imaging. Society for Industrial and Applied Mathematics Philadelphia, PA, USA, 260.

27. Kunyansky L. 2007. Explicit inversion formulae for the spherical mean Radon transform. Inverse Problems, 23: 373–383.

28. Li Z., Song F. 2009. Inversion Formulas for the Spherical Radon-Dunkl Transform. SIGMA, 5(25): 1–15.

29. Rubin B. 1996. Fractional Integrals and Potentials. Addison-Wesley, Essex, 424.

30. Rubin B. 2015. Introduction to Radon Transforms: With Elements of Fractional Calculus and Harmonic Analysis. Cambridge University Press, UK, 596.

31. Rubin B. 2008. Inversion formulae for the spherical mean in odd dimensions and the Euler–Poisson–Darboux equation. Inverse Problems, 24(2): 1–10.

32. Shishkina E. L. 2017. Inversion of the mixed Riesz hyperbolic B–potentials. International Journal of Applied Mathematics. 30(6): 487–500.

33. Shishkina E. L., Sitnik S. M. 2017. General form of the Euler–Poisson–Darboux equation and application of the transmutation method. Electron. J. Differential Equations. 177: 1–20.

34. Shishkina E. L. 2019. General Euler–Poisson–Darboux equation and hyperbolic B–potentials. Partial differential equations, CMFD, PFUR, M. 65(2): 157–338.

35. Shishkina E. L., Sitnik S. M. 2020. Transmutations, singular and fractional differential equations with applications to mathematical physics. Elsevier, Amsterdam, 564.

36. Weinstein A. 1962. Spherical means in spaces of constant curvature. Annali di Matematica Pura ed Applicata, 4(60): 87–91.

Получена 04.02.2021

Шишкина Элина Леонидовна – доктор физико-математических наук, доцент, профессор Воронежского Государственного Университета

http://orcid.org/0000-0003-4083-1207
Университетская пл., д. 1, Воронеж, 394018, Россия
E-mail: ilina_dico@mail.ru