

Спектрально-угловые плотности ПРИ и ДПИ релятивистских электронов в периодической слоистой среде

Бардакова И. Н. 

(Статья представлена членом редакционной коллегии Носковым А. В.)
Белгородский государственный национальный исследовательский университет,
Россия, 308015, г. Белгород, ул. Победы, 85
bardakova@bsuedu.ru

Аннотация. Развита динамическая теория когерентного рентгеновского излучения релятивистских электронов, пересекающих мишень конечной толщины из периодической слоистой среды с тремя слоями в периоде в геометрии рассеяния Лауэ. Получены выражения, описывающие спектрально-угловые плотности параметрического рентгеновского излучения и дифрагированного переходного излучения. Показано, что изменение отношения значений действительных частей диэлектрических восприимчивостей материалов слоев и изменение отношения толщин слоев существенно влияет на спектрально-угловые характеристики когерентного рентгеновского излучения. Установлено, что при некоторых режимах ослабление фотопоглощения в составе второго слоя периода многослойной среды ведёт к заметному увеличению плотностей излучения, дифференцированных по частотам и направлениям распространения.

Ключевые слова: периодическая слоистая среда, динамическая дифракция, когерентное рентгеновское излучение

Для цитирования: Бардакова И.Н. Спектрально-угловые плотности ПРИ и ДПИ релятивистских электронов в периодической слоистой среде. *Прикладная математика & Физика*. 2026;58(3):307–317.
DOI 10.52575/2687-0959-2026-58-3-307-317 EDN UIFBQZ

Original Research

Spectral-angular Densities of Parametric X-ray Radiation and Diffraction Transition Radiation from Relativistic Electrons in a Periodic Layered Medium

Irina N. Bardakova 

(Article submitted by a member of the editorial board Noskov A. V.)
Belgorod National Research University,
85 Pobedy St., Belgorod 308015, Russia,
bardakova@bsuedu.ru

Abstract. A dynamic theory of coherent X-ray radiation from relativistic electrons traversing a finite-thickness target made of a periodic layered medium with three layers per period in Laue scattering geometry is developed. Expressions describing the spectral-angular densities of parametric X-ray radiation and diffracted transition radiation are derived. It is shown that changing the ratio of the real parts of the dielectric susceptibilities of the layer materials and changing the ratio of the layer thicknesses significantly affects the spectral-angular characteristics of the coherent X-ray emission. It is established that, under certain conditions, weakening of photoabsorption within the second layer of the multilayer medium period leads to a noticeable increase in the radiation densities differentiated by frequencies and propagation directions.

Keywords: Periodic Layered Medium, Dynamic Diffraction, Coherent X-ray Radiation

For citation: Bardakova IN. Spectral-angular Densities of Parametric X-ray Radiation and Diffraction Transition Radiation from Relativistic Electrons in a Periodic Layered Medium. *Applied Mathematics & Physics*. 2026;58(3):307–317. (In Russ.)
DOI 10.52575/2687-0959-2026-58-3-307-317 EDN UIFBQZ

1. Введение. В рамках динамической теории дифракции когерентное рентгеновское излучение (КРИ) релятивистских электронов, пересекающих мишень из периодической слоистой среды, впервые рассматривалось в работе [1]. В этой работе КРИ рассматривалось как суммарное параметрическое рентгеновское излучение (ПРИ) и дифрагированное переходное излучение (ДПИ). ПРИ генерируется в направлении рассеяния Брэгга в результате рассеяния псевдофотонов кулоновского поля релятивистских электронов на слоях периодической среды, аналогично рассеянию в монокристалле на системе параллельных атомных плоскостей монокристалла [2, 3]. ДПИ возникает вследствие дифракции на слоях мишени переходного излучения, генерируемого вблизи передней поверхности мишени, аналогично генерации ДПИ в монокристалле [4, 5]. Как показывают сопоставительные расчёты, формулы, фигурирующие в работе [1], хорошо описывают данные эксперимента по излучению релятивистских электронов в периодической слоистой среде [6]. Когерентное рентгеновское излучение релятивистского электрона

в периодической слоистой среде для общего случая асимметричного отражения поля электрона относительно поверхности мишени в геометрии рассеяния Лауэ впервые рассматривалось в работе [7], а в геометрии рассеяния Брэгга – в работе [8]. В работах [7, 8] было показано, что в периодической слоистой среде интенсивность КРИ релятивистских электронов должна быть в несколько раз выше, чем КРИ релятивистского электрона в монокристалле в аналогичных условиях. Это связано с тем, что когерентное рентгеновское излучение в периодической слоистой среде имеет более широкий спектр, чем в монокристалле, так как в периодической слоистой среде электрон пересекает меньшее число границ неоднородностей, чем в монокристалле при одинаковом пути электрона в мишени. В работе [9] развита динамическая теория КРИ пучка релятивистских электронов, пересекающих периодическую слоистую среду в геометрии рассеяния Брэгга с учетом многократного рассеяния электронов на атомах мишени, показана возможность проявления эффектов динамической дифракции. Необходимо отметить большой интерес, в последнее время, к теоретическому и экспериментальному исследованию рентгеновского излучения мягкого рентгеновского диапазона в периодических слоистых средах при небольших энергиях релятивистских электронов [10, 11, 12, 13, 14].

Во всех цитируемых работах излучение релятивистских электронов рассматривалось в периодической слоистой среде с двумя различными слоями на периоде. КРИ релятивистских электронов, пересекающих пластину конечной толщины из периодической слоистой среды в геометрии рассеяния Брэгга с тремя слоями на периоде, впервые рассматривалось в работе [15], а с учетом расходимости электронного пучка – в работе [16]. В работе [15] были получены выражения, описывающие спектрально-угловые плотности ПРИ и ДПИ в такой структуре, было выявлено, что, меняя параметры слоев, можно влиять на параметры динамического рассеяния рентгеновского излучения. В работах [17, 18, 19] исследовалась возможность проявления эффектов динамической дифракции в ПРИ и ДПИ релятивистских электронов в трехслойной структуре.

В настоящей работе впервые рассматривается когерентное рентгеновское излучение релятивистских электронов, пересекающих периодическую слоистую среду с тремя различными слоями на периоде в геометрии рассеяния Лауэ, когда ПРИ и ДПИ выходят через заднюю границу мишени. Получены и исследованы выражения, описывающие спектрально-угловые плотности ПРИ и ДПИ.

2. Геометрия процесса излучения. Рассмотрим излучение релятивистского электрона в пластине из периодической слоистой среды с тремя слоями в периоде в геометрии рассеяния Лауэ (рис. 1). В этом случае рентгеновское излучение выходит через заднюю границу мишени и распространяется в направлении рассеяния Брэгга.

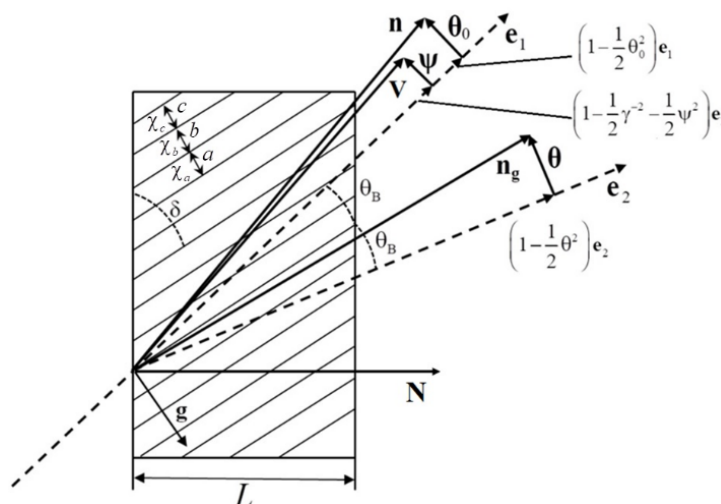


Рис. 1. Геометрия процесса излучения

Fig. 1. Geometry of the radiation process

Пластина образована тремя аморфными слоями различного типа, периодически расположенными, с толщинами, равными a , b и c . Период периодической слоистой среды составляет $T = a + b + c$, тогда как толщина самой пластины равна L . Диэлектрические восприимчивости атомов данных слоев заданы величинами χ_a , χ_b и χ_c . Рассматривается случай асимметричного отражения псевдофотонов, порождаемых кулоновским полем релятивистского электрона, относительно поверхности мишени, при условии, что отражающие слои ориентированы под некоторым углом δ к этой поверхности. В том случае, когда угол между поверхностью мишени и слоями принимает значение $\delta = \pi/2$, данная конфигурация отвечает симметричному отражению поля электрона.

Направление движения оси пучка релятивистских электронов задается единичным вектором e_1 , а отклонение скорости V произвольного электрона пучка относительно оси пучка e_1 определяется

вектором $\psi(\psi_{\perp}, \psi_{\parallel})$. Направление псевдофотона кулоновского поля релятивистского электрона и фотона когерентного рентгеновского излучения вблизи направления оси пучка определяется углом $\theta_0(\theta_{0\perp}, \theta_{0\parallel})$, волновой вектор этих фотонов равен: $\mathbf{k} = \omega \mathbf{n}$. В результате рассеяния псевдофотонов кулоновского поля релятивистского электрона, а также фотонов переходного излучения на системе параллельных атомных плоскостей монокристалла вблизи направления рассеяния Брэгга $\mathbf{e}_2$ генерируются параметрическое рентгеновское излучение и дифрагированное переходное излучение, с волновым вектором $\mathbf{k}_g = \omega \mathbf{n}_g$. Векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{n}$ и $\mathbf{n}_g$ являются единичными векторами.

Угол когерентного излучения, отсчитываемый относительно оси детектора $\mathbf{e}_2$, определяется вектором $\theta(\theta_{\perp}, \theta_{\parallel})$. Для дальнейшего анализа представим рассматриваемые угловые векторы в виде составляющих:

$$\theta_0 = \theta_{0\perp} + \theta_{0\parallel}, \quad \theta = \theta_{\perp} + \theta_{\parallel}, \quad \psi = \psi_{\perp} + \psi_{\parallel}.$$

Векторы $\theta_{\perp}, \theta_{0\perp}$ и $\psi_{\perp}$ ортогональны плоскости, образованной векторами $\mathbf{k}$ и $\mathbf{k}_g$. Векторы $\theta_{\parallel}, \theta_{0\parallel}$ и $\psi_{\parallel}$ параллельны плоскости векторов $\mathbf{k}$ и $\mathbf{k}_g$. Для решения задачи рассматриваемые углы и вектора свяжем соотношениями:

$$\mathbf{V} = \left(1 - \frac{1}{2}\gamma^{-2} - \frac{1}{2}\psi^2\right) \mathbf{e}_1 + \psi, \quad \mathbf{n}_g = \left(1 - \frac{1}{2}\theta^2\right) \mathbf{e}_2 + \theta, \quad \mathbf{n} = \left(1 - \frac{1}{2}\theta_0^2\right) \mathbf{e}_1 + \theta_0, \quad (1)$$

где $\mathbf{e}_1 \cdot \psi = 0, \mathbf{e}_1 \cdot \theta_0 = 0, \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = \cos 2\theta_B, \mathbf{e}_2 \cdot \theta = 0, |\mathbf{e}_1| = |\mathbf{e}_2| = |\mathbf{n}| = |\mathbf{n}_g| = 1$.

Использование указанных соотношений допустимо вследствие выполнения условий: $\gamma^{-2} \ll 1, \psi \ll 1, \theta \ll 1, \theta_0 \ll 1$, из которых следуют приближенные равенства: $V^2 \approx 1, n_g^2 \approx 1$ и $n^2 \approx 1$. $\gamma = 1/\sqrt{1 - V^2}$ – Лоренц-фактор релятивистского электрона.

Вектор $\mathbf{g}$ (рис. 1) перпендикулярный слоям мишени, его длина равна $g = 2\pi/Tn, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ и он является аналогом вектора обратной решетки монокристалла. С другой стороны, модуль вектора обратной решетки определяется выражением: $g = \frac{2\omega_B \sin \theta_B}{V}$, где ω_B – частота Брэгга, θ_B – угол Брэгга. Тогда частота Брэгга может быть записана в виде: $\omega_B = \frac{\pi n}{T \sin \theta_B}$. В случае дифракции Брэгга волновые векторы падающей $\mathbf{k}$ и дифрагированной волны $\mathbf{k}_g$ связаны соотношением: $\mathbf{k}_g = \mathbf{k} + \mathbf{g}$.

3. Спектрально-угловая плотность излучения. В работе [20] исследовалась угловая плотность ПРИ в трехслойной структуре без учета ДПИ. Проведя вычисления, аналогичные вычислениям работы [20], в рамках двухволнового приближения динамической теории дифракции рентгеновского излучения в периодической слоистой среде с тремя слоями в периоде получены выражения, описывающие спектрально-угловую плотность ПРИ и ДПИ:

$$\omega \frac{d^3 N_{\text{ПРИ}}^{(s)}}{d\omega d\theta_{\perp} d\theta_{\parallel}} = \frac{e^2}{4\pi^2} \frac{\Omega^{(s)^2}}{(\Gamma - \chi'_0)^2} R_{\text{ПРИ}}^{(s)}, \quad (2)$$

$$R_{\text{ПРИ}}^{(s)} = \left(1 - \frac{\xi^{(s)}}{\sqrt{(\xi^{(s)})^2 + \varepsilon}}\right)^2 \frac{1 + \exp(-2b^{(s)} \rho^{(s)} \Delta^{(s)}) - 2 \exp(-b^{(s)} \rho^{(s)} \Delta^{(s)}) \cos\left(b^{(s)} \left(\sigma^{(s)} + \frac{\xi^{(s)} - \sqrt{(\xi^{(s)})^2 + \varepsilon}}{\varepsilon}\right)\right)}{\left(\sigma^{(s)} + \frac{\xi^{(s)} - \sqrt{(\xi^{(s)})^2 + \varepsilon}}{\varepsilon}\right)^2 + \rho^{(s)^2} \Delta^{(s)^2}}, \quad (3)$$

$$\omega \frac{d^3 N_{\text{ДПИ}}^{(s)}}{d\omega d\theta_{\perp} d\theta_{\parallel}} = \frac{e^2}{4\pi^2} \Omega^{(s)^2} \left(\frac{1}{\Gamma} - \frac{1}{\Gamma - \chi'_0}\right)^2 R_{\text{ДПИ}}^{(s)}, \quad (4)$$

$$R_{\text{ДПИ}}^{(s)} = \frac{\varepsilon^2}{\xi^{(s)^2} + \varepsilon} \left[\exp(-2b^{(s)} \rho^{(s)} \Delta^{(1)}) + \exp(-2b^{(s)} \rho^{(s)} \Delta^{(2)}) - 2 \exp\left(-b^{(s)} \rho^{(s)} \frac{1 + \varepsilon}{\varepsilon}\right) \cos\left(\frac{2b^{(s)} \sqrt{(\xi^{(s)})^2 + \varepsilon}}{\varepsilon}\right) \right], \quad (5)$$

где введены обозначения: $\Omega^{(1)} = \theta_{\perp} - \psi_{\perp}, \Omega^{(2)} = \theta_{\parallel} + \psi_{\parallel}, \Gamma = \gamma^{-2} + (\theta_{\perp} - \psi_{\perp})^2 + (\theta_{\parallel} + \psi_{\parallel})^2,$

$$\Delta^{(s)} = \frac{\varepsilon + 1}{2\varepsilon} - \frac{1 - \varepsilon}{2\varepsilon} \frac{\xi^{(s)}}{\sqrt{(\xi^{(s)})^2 + \varepsilon}} - \frac{\kappa^{(s)}}{\sqrt{(\xi^{(s)})^2 + \varepsilon}}, b^{(s)} = \frac{1}{2 \sin(\delta - \theta_B)} \frac{L}{L_{\text{ext}}^{(s)}}, \sigma^{(s)} = \frac{1}{v^{(s)} |\chi'_0|} (\gamma^{-2} + (\theta_{\perp} - \psi_{\perp})^2 + (\theta_{\parallel} + \psi_{\parallel})^2 + |\chi'_0|),$$

$$\chi'_0 = \chi'_b \left(\delta'_{ab} I_1 + I_2 + \frac{\delta'_{ab}}{\delta'_{ac}} I_3 \right), \xi^{(s)}(\omega) = \eta^{(s)}(\omega) + \frac{1 - \varepsilon}{2v^{(s)}}, \varepsilon = \frac{\sin(\delta + \theta_B)}{\sin(\delta - \theta_B)},$$

$$\eta^{(s)}(\omega) = \frac{2\pi^2 n^2 L_{\text{ext}}^{(s)}}{T^2 \omega_B} \left(\frac{\omega}{\omega_B} \left(1 - \theta_{\parallel} \sqrt{\frac{T^2 \omega_B^2}{n^2 \pi^2} - 1} \right) - 1 \right), L_{\text{ext}}^{(s)} = \frac{n\pi}{C^{(s)} \omega |\chi'_b| I^*},$$

$$\begin{aligned}
I^* &= \sqrt{(1 - \delta'_{ab})\delta'_1 \sin^2(n\pi I_1) + (\delta'_{ab} - 1)\delta'_2 \sin^2(n\pi I_2) + \delta'_1 \delta'_2 \sin^2(n\pi I_3)}, \\
I_1 &= \left(1 + \left(\frac{a}{c}\right)^{-1} + \left(\frac{a}{b}\right)^{-1}\right)^{-1}, \quad I_2 = \left(1 + \frac{a}{b} + \frac{a}{b} \left(\frac{a}{c}\right)^{-1}\right)^{-1}, \quad I_3 = \left(1 + \frac{a}{c} + \frac{a}{c} \left(\frac{a}{b}\right)^{-1}\right)^{-1}, \\
\delta'_1 &= \frac{\delta'_{ab}}{\delta'_{ac}} - \delta'_{ab}, \quad \delta'_2 = \frac{\delta'_{ab}}{\delta'_{ac}} - 1, \quad \delta'_{ab} = \frac{\chi'_a}{\chi'_b}, \quad \delta'_{ac} = \frac{\chi'_a}{\chi'_c}.
\end{aligned} \tag{6}$$

Параметры динамического рассеяния:

$$v^{(s)} = \frac{C^{(s)}}{n\pi} \frac{I^*}{I_2 \left| \frac{a}{b} \delta'_{ab} + 1 + \frac{a}{b} \left(\frac{a}{c}\right)^{-1} \frac{\delta'_{ab}}{\delta'_{ac}} \right|}, \tag{7}$$

$$\rho^{(s)} = \frac{n\pi}{C^{(s)}} \frac{I_2 \left| \frac{a}{b} \rho_a + \rho_b + \frac{a}{b} \left(\frac{a}{c}\right)^{-1} \rho_c \right|}{I^*}, \tag{8}$$

$$\kappa^{(s)} = \frac{C^{(s)}}{n\pi} \frac{\sqrt{\rho_1 \sin^2(n\pi I_1) + \rho_2 \sin^2(n\pi I_2) + \rho_3 \sin^2(n\pi I_3)}}{I_2 \left| \frac{a}{b} \rho_a + \rho_b + \frac{a}{b} \left(\frac{a}{c}\right)^{-1} \rho_c \right|}, \tag{9}$$

где $\rho_1 = (\rho_a - \rho_b)(\rho_a - \rho_c)$, $\rho_2 = (\rho_b - \rho_a)(\rho_b - \rho_c)$, $\rho_3 = (\rho_c - \rho_a)(\rho_c - \rho_b)$, $\rho_a = \frac{\chi''_a}{|\chi'_b|}$, $\rho_b = \frac{\chi''_b}{|\chi'_b|}$, $\rho_c = \frac{\chi''_c}{|\chi'_b|}$.

Так как в рентгеновском диапазоне частот излучения выполняется неравенство: $\frac{2\pi^2 L_{\text{ext}}^{(s)} n^2}{T^2 \omega_B} \gg 1$, то величина $\eta^{(s)}(\omega)$ является быстро изменяющейся функцией с изменением частоты излучения ω в окрестности частоты Брэгга ω_B . $L_{\text{ext}}^{(s)}$ – длина экстинкции рентгеновских волн в рассматриваемой периодической слоистой среде с тремя слоями на периоде.

Параметр $b^{(s)}$, характеризующий толщину мишени L , соответствует половине длины пути электрона внутри мишени $L_e = L/\sin(\delta - \theta_B)$, выраженной в длине экстинкции $L_{\text{ext}}^{(s)}$.

4. Численные расчеты и анализ. Используя полученные в настоящей работе выражения, проведем численные расчеты при определенных параметрах и проведем анализ результатов вычислений.

Рассмотрим излучение релятивистского электрона движущегося вдоль оси электронного пучка $\mathbf{e}_1$, когда: $\psi_{\perp} = 0$, $\psi_{\parallel} = 0$. Период периодической слоистой среды примем равным: $T = a + b + c = 0.002$ мкм, в этом случае отношения толщин слоев: a/b и a/c , определяют толщины всех слоев. Возьмем угол Брэгга равным: $\theta_B = 2.25^\circ$, который является углом между осью пучка релятивистских электронов и отражающими слоями. В этом случае частота Брэгга принимает значение: $\omega_B = 8$ кэВ. Действительную часть диэлектрической восприимчивости второго слоя, положим при рассматриваемой частоте излучения как у углерода: $\chi'_b = -2.25 \cdot 10^{-5}$, при этом отношения: $\delta'_{ab} = \chi'_a/\chi'_b$, $\delta'_{ac} = \chi'_a/\chi'_c$, будут определять реальные части диэлектрических восприимчивостей первого и третьего слоев. Расчеты выполним для σ -поляризованных волн, когда: $s = 1$.

Рассмотрим спектрально-угловую плотность ПРИ релятивистского электрона с Лоренц-фактором равным $\gamma = 500$. Большие энергии электрона рассматривать смысла нет, так как спектрально-угловая плотность ПРИ насыщается при этой энергии для рассматриваемых параметров. В расчетах будем полагать $\theta_{\parallel} = 0$, при этом угол максимума угловой плотности ПРИ меняется в зависимости от параметров слоев согласно выражению:

$$\theta_{\perp \max} = \sqrt{\gamma^{-2} - \chi'_0} = \sqrt{\gamma^{-2} + |\chi'_b| \left(\delta'_{ab} I_1 + I_2 + \frac{\delta'_{ab}}{\delta'_{ac}} I_3 \right)}.$$

Так как при вычислениях параметры слоев будут изменяться, то $\theta_{\perp \max}$ также будет изменяться. Расчеты выполним для значения угла наблюдения $\theta_{\perp} = 10$ mrad.

На рис. 2 представлены кривые, построенные по формуле (2), описывающие спектрально-угловые плотности ПРИ для разных значений параметра δ'_{ac} , при фиксированных других параметрах.

Из рисунка следует, что при уменьшении параметра δ'_{ac} увеличивается спектрально-угловая плотность ПРИ, также как и значения параметра $v^{(1)}$, а также что частота излучения меняется, так как резонансное условие:

$$\sigma^{(s)} + \frac{\xi^{(s)} - \sqrt{(\xi^{(s)})^2 + \varepsilon}}{\varepsilon} \approx 0$$

зависит от интерференционного параметра $v^{(1)}$.

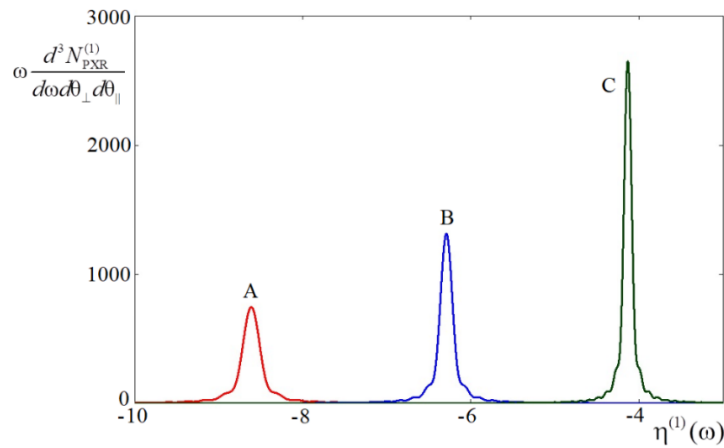


Рис. 2. Спектрально-угловые плотности ПРИ при различных значениях параметра $\delta'_a = \chi'_a/\chi'$.

Обозначения: A ($\delta'_a = 0.4$), B ($\delta'_a = 0.3$), C ($\delta'_a = 0.2$).

Параметры: $\delta'_{ab} = 2$, $a/b = 0.5$, $a/c = 1$, $\rho_a = 0.3$, $\rho_b = 0.1$, $\rho_c = 0.2$, $L = 2\mu\text{m}$

Fig. 2. Spectral-angular densities of PXR at different values of the parameter $\delta'_a = \chi'_a/\chi'$.

Designations: A ($\delta'_a = 0.4$), B ($\delta'_a = 0.3$), C ($\delta'_a = 0.2$).

Parameters: $\delta'_{ab} = 2$, $a/b = 0.5$, $a/c = 1$, $\rho_a = 0.3$, $\rho_b = 0.1$, $\rho_c = 0.2$, $L = 2\mu\text{m}$

На рис. 3 представлены кривые, построенные по формуле (2), описывающие спектрально-угловые плотности ПРИ для разных значений отношений толщины первого и второго слоев: a/b , при фиксированных других параметрах.

Из рисунка следует, что при уменьшении отношения a/b увеличивается спектрально-угловая плотность ПРИ, так же, как и параметр $\nu^{(1)}$.

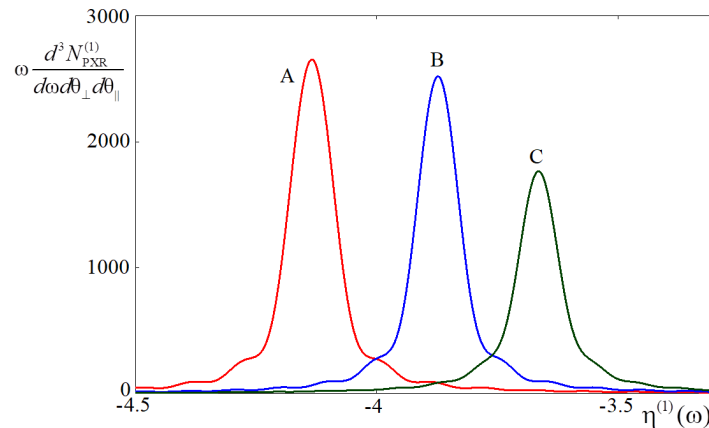


Рис. 3. Спектрально-угловые плотности ПРИ при различных отношениях слоев a/b .

Обозначения: A ($a/b = 0.5$), B ($a/b = 0.7$), C ($a/b = 2$).

Параметры: $\delta'_{ab} = 2$, $\delta'_a = 0.2$, $a/c = 1$, $\rho_a = 0.3$, $\rho_b = 0.1$, $\rho_c = 0.2$, $L = 2\mu\text{m}$

Fig. 3. Spectral-angular densities of PXR at different layer ratios a/b .

Designations: A ($a/b = 0.5$), B ($a/b = 0.7$), C ($a/b = 2$).

Parameters: $\delta'_{ab} = 2$, $\delta'_a = 0.2$, $a/c = 1$, $\rho_a = 0.3$, $\rho_b = 0.1$, $\rho_c = 0.2$, $L = 2\mu\text{m}$

Рассмотрим возможность проявления динамического эффекта аномально низкого фотопоглощения в рассматриваемой периодической слоистой среде с тремя слоями в периоде. Этот эффект впервые наблюдался в монокристаллической пластине при рассеянии свободных рентгеновских лучей и получил названия эффекта Бормана [21]. Он заключается в том, что при динамической дифракции рентгеновского излучения падающая и дифрагированная волна образуют стоячую волну. Можно подобрать условия, чтобы пучности одной стоячей волны находились между атомными плоскостями, где электронная плотность, а следовательно, и фотопоглощение минимальны. При этом для другой стоячей волны пучности находятся на атомных плоскостях, где электронная плотность и фотопоглощение максимальны.

Для рассматриваемой в настоящей работе периодической слоистой среды с тремя слоями на периоде схема с двумя стоячими волнами показана на рис. 4. Положим, что слой с минимальным фотопоглощением будет второй на периоде, с диэлектрической восприимчивостью χ_b и толщиной b . В этом случае стоячая волна, которая поглощается аномально низко, на рис. 4 изображена сплошной линией, а стоячая волна, которая значительно поглощается, изображена пунктирной линией. Значение параметра $\kappa^{(s)}$

определяет расположение в слоистой среде стоячей волны относительно слоев мишени. Параметр $\kappa^{(s)}$ принимает значения из промежутка $0 < \kappa^{(s)} < 1$. Если максимумы пучностей стоячей волны лежат на слое с большей электронной плотностью, то значение параметра $\kappa^{(s)}$ ближе к нулю, если максимумы пучности лежат на слое с меньшей плотностью электронов, то значение параметра $\kappa^{(s)}$ ближе к единице.

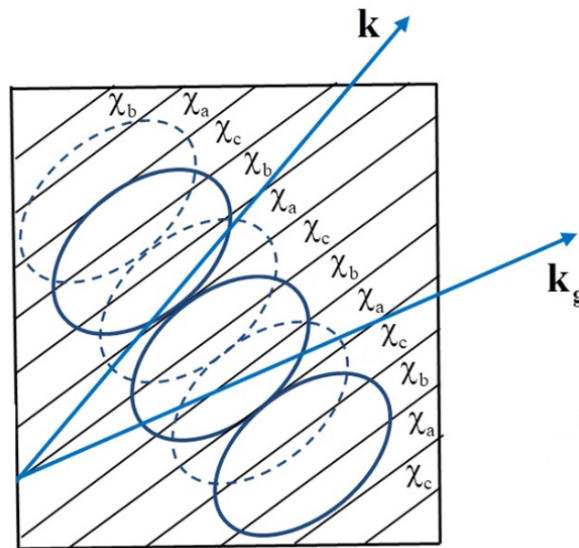


Рис. 4. Расположение двух стоячих волн в периодической слоистой среде с тремя слоями на периоде

Fig. 4. Arrangement of two standing waves in a periodic layered medium with three layers per period

На рис. 5 представлены кривые, построенные по формуле (9), описывающие значения параметра $\kappa^{(1)}$ в зависимости от отношения толщин первого и второго слоев a/b при фиксированном отношении a/c . Кривые построены для различных значений фотопоглощения второго слоя, которое определяется параметром: $\rho_b = \chi_b''/|\chi_b'|$, при этом фотопоглощение первого и третьего слоев фиксированы.

Из рис. 5 следует, что расположение пучности стоячей волны на слое с минимальным фотопоглощением будет определяться отношением a/b при фиксированном a/c . Также можно менять отношения a/b и a/c одновременно, в этом случае период слоистой структуры T должен сохраняться.

Также из рис. 5 следует, что при рассматриваемых параметрах максимальное значение параметра $\kappa^{(1)}$ будет при $a/b \approx 0.2$. Уменьшение фотопоглощения второго слоя ρ_b приводит к значительному увеличению параметра $\kappa^{(1)}$.

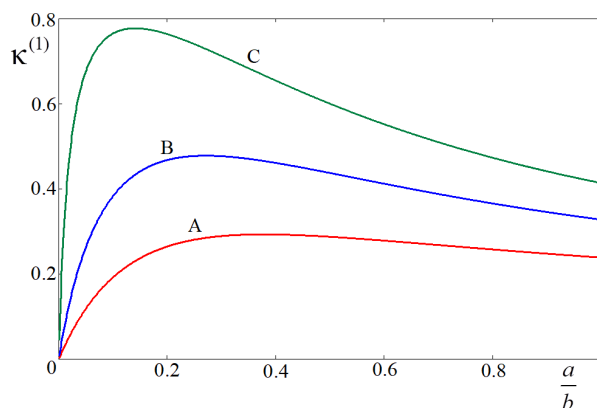


Рис. 5. Зависимость параметра, определяющего anomalously low фотопоглощение рентгеновского излучения в периодической среде, от соотношения слоев a/b при различных значениях фотопоглощения второго слоя

$\rho_b = \chi_b''/|\chi_b'|$.
Обозначения: A ($\rho_b = 0.1$), B ($\rho_b = 0.05$), C ($\rho_b = 0.01$).

Параметры: $\rho_a = 0.3$, $\rho_c = 0.2$, $a/c = 1$

Fig. 5. Dependence of the parameter determining anomalously low photoabsorption of X-ray radiation in a periodic medium on the layer ratio a/b at different values of photoabsorption of the second layer $\rho_b = \chi_b''/|\chi_b'|$.

Designations: A ($\rho_b = 0.1$), B ($\rho_b = 0.05$), C ($\rho_b = 0.01$).

Parameters: $\rho_a = 0.3$, $\rho_c = 0.2$, $a/c = 1$

Рассмотрим влияние эффекта anomalously low фотопоглощения, аналогичного эффекту Бормана, на спектрально-угловую плотность ПРИ.

На рис. 6 представлены зависимости, полученные по формуле (2), характеризующие спектрально-угловые плотности параметрического рентгеновского излучения при различных значениях параметра фотопоглощения рентгеновского излучения $\rho_b = \chi_b''/|\chi_b'|$ в условиях асимметрии отражения, соответствующей параметру $\varepsilon = 3$.

Из рисунка следует значительный рост амплитуды спектра ПРИ в случае уменьшения фотопоглощения второго слоя, при этом общий параметр фотопоглощения $\rho^{(s)}$ всего слоя (8) изменяется незначительно: $\rho^{(1)} = 0.1$ ($\rho_b = 0.107$), $\rho^{(1)} = 0.080$ ($\rho_b = 0.05$) и $\rho^{(1)} = 0.059$ ($\rho_b = 0.01$).

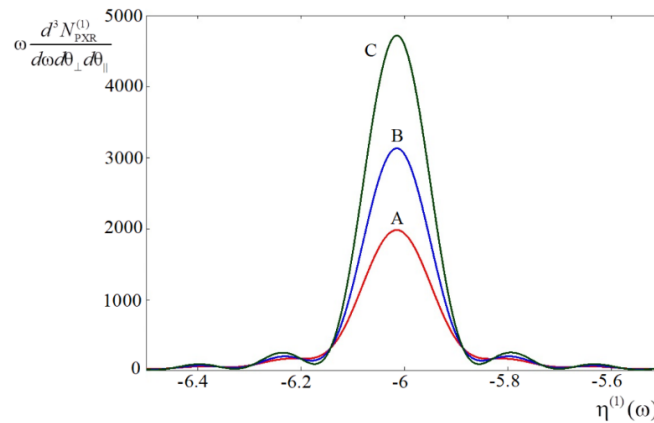


Рис. 6. Спектрально-угловые плотности ПРИ при различных значениях фотопоглощения второго слоя $\rho_b = \chi_b''/|\chi_b'|$. Обозначения: А ($\rho_b = 0.1$), В ($\rho_b = 0.05$), С ($\rho_b = 0.01$).

Параметры: $\delta'_{ab} = 2$, $\delta'_a = 0.2$, $a/b = 0.2$, $a/c = 1$, $\rho_a = 0.3$, $\rho_c = 0.2$, $L = 2\mu\text{m}$, $L_e = 50\mu\text{m}$, $L_{ph} = 17\mu\text{m}$, $\varepsilon = 3$, $\delta = \pi/40$

Fig. 6. Spectral-angular densities of PXR at different values of photoabsorption of the second layer $\rho_b = \chi_b''/|\chi_b'|$.

Designations: А ($\rho_b = 0.1$), В ($\rho_b = 0.05$), С ($\rho_b = 0.01$).

Parameters: $\delta'_{ab} = 2$, $\delta'_a = 0.2$, $a/b = 0.2$, $a/c = 1$, $\rho_a = 0.3$, $\rho_c = 0.2$, $L = 2\mu\text{m}$, $L_e = 50\mu\text{m}$, $L_{ph} = 17\mu\text{m}$, $\varepsilon = 3$, $\delta = \pi/40$

Таким образом, в случае, когда пучности стоячей волны находятся на слое с малой электронной плотностью, где фотопоглощение наименьшее, интенсивность ПРИ может значительно возрасти. Можно сделать вывод, что если периодическая слоистая среда с тремя слоями в периоде будет состоять из слоев, состоящих из тяжелых и легких элементов, то интенсивное ПРИ будет генерироваться из-за резкой неоднородности электронной плотности в периоде, а распространяться излучение может таким образом, чтобы поглощение было минимальным. Это будет происходить, когда пучности стоячей волны, которые переносят практически всю энергию излучения, находятся на слое с малой электронной плотностью. Разработка и оптимизация таких мишеней позволит существенно увеличить интенсивность ПРИ за счет уменьшения фотопоглощения излучения. Интенсивность ПРИ насыщается с увеличением энергии релятивистских электронов из-за эффекта плотности, когда поле электрона перестает расти в монокристалле из-за поляризации большого числа атомов. Поэтому уменьшение фотопоглощения рентгеновского излучения в мишени является не только важным, но и единственным способом для увеличения интенсивности ПРИ.

Исследуем спектрально-угловую плотность дифрагированного переходного излучения в рассматриваемой периодической слоистой среде с тремя слоями на периоде. Так как ДПИ не насыщается с повышением энергии релятивистских электронов, то рассмотрим излучение релятивистского электрона с Лоренц-фактором $\gamma = 1000$. Расчеты выполним для угла наблюдения: $\theta_{\perp\text{max}} = 1\text{ mrad}$, $\theta_{\parallel} = 0$, который соответствует максимуму угловой плотности ДПИ.

На рис. 7 представлены результаты расчета спектрально-угловой плотности ДПИ для разных значений параметра $\delta'_{ac} = \chi'_a/\chi'_c$, при фиксированных остальных параметрах структуры. Расчеты выполнены на основе выражения (4).

На рис. 8 представлены кривые, построенные по формуле (4), описывающие спектрально-угловые плотности ДПИ для разных значений отношений: a/b . Из рисунка следует, что при уменьшении a/b значительно увеличивается спектрально-угловая плотность ДПИ.

На рис. 9 представлены кривые, построенные по формуле (4), описывающие спектрально-угловые плотности ДПИ для различных значений параметра фотопоглощения рентгеновского излучения второго слоя: $\rho_b = \chi_b''/|\chi_b'|$, в случае асимметрии отражения соответствующей параметру: $\varepsilon = 3$. При этом максимальная длина пути фотона в мишени: $L_{ph} = 17\text{ мкм}$. Из рисунка следует значительный рост амплитуды спектрально-угловой плотности ДПИ в случае уменьшения фотопоглощения второго слоя. Рост связан с увеличением параметра $\kappa^{(1)}$, определяющего проявления эффекта, аналогичного эффекту Бормана: А ($\kappa^{(1)} \approx 0.29$), В ($\kappa^{(1)} \approx 0.44$), С ($\kappa^{(1)} \approx 0.6$).

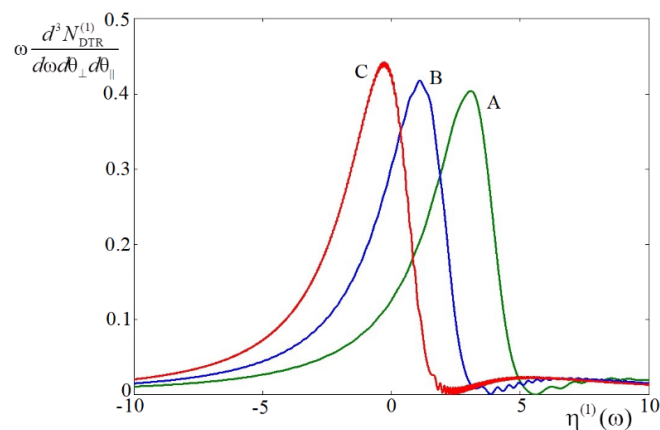


Рис. 7. Спектрально-угловые плотности ДПИ при различных значениях параметра $\delta'_a = \chi'_a/\chi'$. Обозначения: А ($\delta'_a = 1$), В ($\delta'_a = 0.5$), С ($\delta'_a = 0.1$). Параметры: $\delta'_{ab} = 2$, $a/b = 0.5$, $a/c = 1$, $\rho_a = 0.3$, $\rho_b = 0.1$, $\rho_c = 0.2$, $L = 2\mu\text{m}$, $\varepsilon = 3$, $\delta = \pi/40$

Fig. 7. Spectral-angular densities of DTR at different values of the parameter $\delta'_a = \chi'_a/\chi'$. Designations: А ($\delta'_a = 1$), В ($\delta'_a = 0.5$), С ($\delta'_a = 0.1$). Parameters: $\delta'_{ab} = 2$, $a/b = 0.5$, $a/c = 1$, $\rho_a = 0.3$, $\rho_b = 0.1$, $\rho_c = 0.2$, $L = 2\mu\text{m}$, $\varepsilon = 3$, $\delta = \pi/40$

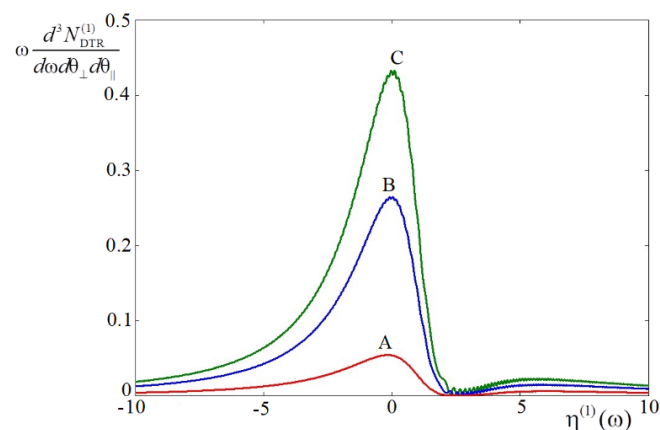


Рис. 8. Спектрально-угловые плотности ДПИ при различных отношениях слоев a/b . Обозначения: А ($a/b = 2$), В ($a/b = 0.7$), С ($a/b = 0.5$).

Параметры: $\delta'_{ab} = 2$, $\delta'_a = 0.2$, $a/c = 1$, $\rho_a = 0.3$, $\rho_b = 0.1$, $\rho_c = 0.2$, $L = 2\mu\text{m}$, $\varepsilon = 3$, $\delta = \pi/40$

Fig. 8. Spectral-angular densities of DTR at different layer ratios a/b .

Designations: А ($a/b = 2$), В ($a/b = 0.7$), С ($a/b = 0.5$).

Parameters: $\delta'_{ab} = 2$, $\delta'_a = 0.2$, $a/c = 1$, $\rho_a = 0.3$, $\rho_b = 0.1$, $\rho_c = 0.2$, $L = 2\mu\text{m}$, $\varepsilon = 3$, $\delta = \pi/40$

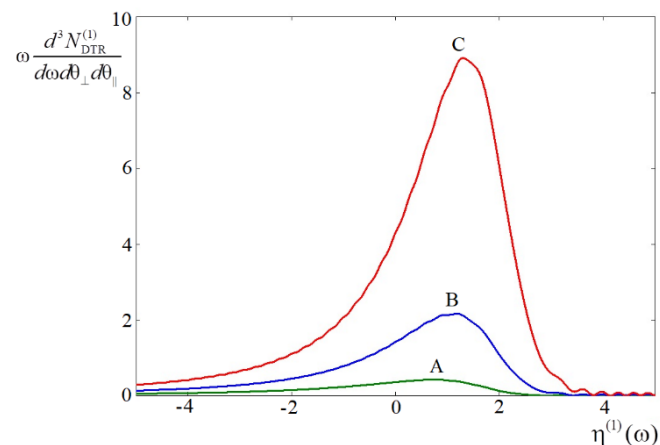


Рис. 9. Влияние эффекта anomalously низкого фотопоглощения на спектрально-угловую плотность ДПИ.

Параметры: $L = 2\mu\text{m}$, $L_e = 50\mu\text{m}$, $L_{ph} = 17\mu\text{m}$, $\varepsilon = 3$, $\delta = \pi/40$.

Обозначения: А ($\rho_b = 0.1$), В ($\rho_b = 0.05$), С ($\rho_b = 0.01$)

Fig. 9. Influence of the anomalously low photoabsorption effect on the spectral-angular density of DTR.

Parameters: $L = 2\mu\text{m}$, $L_e = 50\mu\text{m}$, $L_{ph} = 17\mu\text{m}$, $\varepsilon = 3$, $\delta = \pi/40$.

Designations: А ($\rho_b = 0.1$), В ($\rho_b = 0.05$), С ($\rho_b = 0.01$)

Таким образом, динамический эффект anomalно низкого фотопоглощения фотонов ДПИ, аналогичный эффекту Бормана в монокристалле, может проявиться очень ярко в периодической слоистой среде с тремя слоями на периоде. Используя такие структуры в источниках квазимонохроматического, перестраиваемого по частоте рентгеновского излучения, можно в десятки раз увеличить интенсивность рентгеновского излучения.

5. Заключение. Развита динамическая теория когерентного рентгеновского излучения релятивистских электронов, пересекающих периодическую слоистую мишень с тремя слоями на периоде в геометрии рассеяния Лауэ, когда когерентное рентгеновское излучение выходит через заднюю границу мишени в направлении рассеяния Брэгга. Когерентное рентгеновское излучение рассматривается в геометрии рассеяния Лауэ в рамках двухволнового приближения динамической теории дифракции в виде суммы вкладов параметрического рентгеновского излучения и дифрагированного переходного излучения с учетом их интерференции. Получены выражения, спектрально-угловые плотности ПРИ и ДПИ.

На основе полученных выражений проведены численные расчеты спектрально-угловых плотностей параметрического рентгеновского и дифрагированного переходного излучений при фиксированном угле наблюдения. Установлено, что изменение отношения действительных частей диэлектрических восприимчивостей материалов, образующих слои периодической структуры, существенно влияет на спектрально-угловое распределение ПРИ. Показано также, что варьирование относительных толщин слоёв приводит к заметному изменению спектрально-угловых плотностей как параметрического рентгеновского, так и дифрагированного переходного излучений.

Исследовано влияние фотопоглощения в отдельных слоях периодической структуры на характеристики когерентного рентгеновского излучения. Установлено, что при определённых соотношениях параметров уменьшение фотопоглощения во втором слое периода сопровождается существенным увеличением спектрально-угловых плотностей ПРИ и ДПИ. Полученный результат аналогичен проявлению эффекта anomalно низкого фотопоглощения (эффекта Бормана) в монокристаллах и обусловлен преимущественной локализацией максимумов пучностей стоячей электромагнитной волны во втором слое трёхслойной периодической структуры.

Список литературы

1. Nasonov N.N., Kaplin V.V., Uglov S.R., Piestrup M.A. and Gary C.K. X rays from relativistic electrons in a multilayer structure. *Physical Review E*. 2023;68:036504. DOI:10.1103/PhysRevE.68.036504
2. Garibian G.M. and Yang C. Quantum microscopic theory of radiation by a charged particle moving uniformly in a crystal. *Soviet Physics JETP*. 1972;34:495.
3. Baryshevsky V.G., Feranchuk I.D. Transition radiation of γ -rays in a crystal. *Soviet Physics JETP*. 1972;34:502.
4. Caticha A. Transition-diffracted radiation and the Čerenkov emission of X-rays. *Physical Review A*. 1989;40:4322. DOI:10.1103/PhysRevA.40.4322
5. Nasonov N.N. Influence of the density effect upon the parametric x-rays of high energy particles. *Physics Letters A*. 1998;246:148. DOI:10.1016/S0375-9601(98)00544-8
6. Kaplin V.V. et al. Observation of bright monochromatic x rays generated by relativistic electrons passing through a multilayer mirror. *Appl. Phys. Lett.* 2000;76(24):3647-3649. DOI:10.1063/1.126735
7. Blazhevich S.V., Kolosova I.V. and Noskov A.V. Coherent x-ray radiation generated by a relativistic electron in an artificial periodic structure. *Journal of Experimental and Theoretical Physics*. 2012;114:547-554. DOI:10.1134/S1063776112030187
8. Blazhevich S.V., Noskov A.V. Dynamic theory of coherent X-radiation of relativistic electron within a periodic layered medium in Bragg scattering geometry. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section B*. 2013;309:70-75. DOI:10.1016/j.nimb.2013.01.074
9. Blazhevich S., Noskov A., Shevchuk O. Coherent X-ray radiation excited by a beam of relativistic electrons in a layered periodic structure. *Journal of Instrumentation*. 2020;15:C05075. DOI:10.1088/1748-0221/15/05/C05075
10. Uglov S.R., Kaplin V.V., Kubankin A.S. et.al. Cr/Sc multilayer radiator for parametric EUV radiation in “water-window” spectral range. *Journal of Physics: Conference Series*. 2016;732(1):012017. DOI:10.1088/1742-6596/732/1/012017
11. Shevelev M.V., Uglov S.R., Vukolov A.V. Spectrum of coherent VUV radiation generated by 5.7 MeV electrons in a multilayer X-ray mirror. *Journal of Instrumentation*. 2024;19(4):C04049. DOI:10.1088/1748-0221/19/04/C04049
12. Huang S., Duan R., Pramanik N., Herrin J.S., Boothroyd C., Liu Z. & Wong L.J. Quantum recoil in free-electron interactions with atomic lattices. *Nature Photonics*. 2023;17(3):224-230. DOI:10.1038/s41566-022-01131-z
13. Huang S., Duan R., Pramanik N., Boothroyd C., Liu Z., Wong L.J. Enhanced Versatility of Table-Top X-Rays from Van der Waals Structures. *Advanced Science*. 2022;9(16):2105401. DOI:10.1002/advs.202105401
14. Shi X., Kurman Y., Shentcis M., Wong L.J., Javier Garcia de Abajo F. and Kaminer I. Free-electron interactions with van der Waals heterostructures: a source of focused X-ray radiation. *Light: Science & Applications*. 2023;12(1):148. DOI:10.1038/s41377-023-01189-0

15. Noskov A.V., Blazhevich S.V. Coherent X-ray radiation excited by a relativistic electron in a periodic layered medium. *Journal of Instrumentation*. 2024;19:P07007. DOI:10.1088/1748-0221/19/07/P07007
16. Noskov A.V., Blazhevich S.V., Pronina E.D. Influence of the divergence of relativistic electron beam on spectral-angular densities of PXR and DTR in a periodic layered medium with three layers on a period. *Journal of Instrumentation*. 2025;20:P06014. DOI:10.1088/1748-0221/20/06/P06014
17. Noskov A.V., Blazhevich S.V. Effects of dynamic diffraction in coherent X-ray radiation from a beam of relativistic electrons in a periodic layered medium with three layers in a period. *Physics Letters A*. 2024;525:129835. DOI:10.1016/j.physleta.2024.129835
18. Носков А.В., Блажевич С.В., Чуева А.И., Мачукаев Д.Д., Киперша В.К. Влияние асимметрической дифракции на спектрально-угловую плотность КРИ релятивистского электрона в трехслойной структуре. *Прикладная математика & Физика*. 2025;57(1):59-67.
19. Носков А.В., Мачукаев Д.Д., Киперша В.К., Пугина П.Д., Пирматова М.Д. Влияние расходимости электронного пучка на КРИ в периодической слоистой среде с тремя слоями на периоде. *Прикладная математика & Физика*. 2025;57(4):279-289.
20. Носков А.В., Пирматова М.Д., Мачукаев Д.Д., Бардакова И.Н., Блажевич С.В. Угловая плотность ПРИ в периодической слоистой среде с тремя слоями в периоде в геометрии рассеяния Лауэ. *Прикладная математика & Физика*. 2026;58(1):78-87. DOI:10.52575/2687-0959-2026-58-1-78-87
21. Borrmann G. Über Extinktionsdiagramme der Röntgenstrahlen von Quarz. *Zeitschrift für Physik*. 1941;42:157.

References

1. Nasonov NN., Kaplin VV., Uglov SR., Piestrup MA. and Gary CK. X rays from relativistic electrons in a multilayer structure. *Physical Review E*. 2023;68:036504.
2. Garibian GM. and Yang C. Quantum microscopic theory of radiation by a charged particle moving uniformly in a crystal. *Soviet Physics JETP*. 1972;34:495.
3. Baryshevsky VG., Feranchuk ID. Transition radiation of γ -rays in a crystal. *Soviet Physics JETP*. 1972;34:502.
4. Caticha A. Transition-diffracted radiation and the Čerenkov emission of X-rays. *Physical Review A*. 1989;40:4322.
5. Nasonov NN. Influence of the density effect upon the parametric x-rays of high energy particles. *Physics Letters A*. 1998;246:148.
6. Kaplin VV. et al. Observation of bright monochromatic x rays generated by relativistic electrons passing through a multilayer mirror. *Appl. Phys. Lett.* 2000;76(24):3647-3649.
7. Blazhevich SV., Kolosova IV. and Noskov AV. Coherent x-ray radiation generated by a relativistic electron in an artificial periodic structure. *Journal of Experimental and Theoretical Physics*. 2012;114:547-554.
8. Blazhevich SV., Noskov AV. Dynamic theory of coherent X-radiation of relativistic electron within a periodic layered medium in Bragg scattering geometry. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section B*. 2013;309:70-75.
9. Blazhevich S., Noskov A., Shevchuk O. Coherent X-ray radiation excited by a beam of relativistic electrons in a layered periodic structure. *Journal of Instrumentation*. 2020;15:C05075.
10. Uglov SR., Kaplin VV., Kubankin AS. et.al. Cr/Sc multilayer radiator for parametric EUV radiation in "water-window"spectral range. *Journal of Physics: Conference Series*. 2016;732(1):012017.
11. Shevelev MV., Uglov SR., Vukolov AV. Spectrum of coherent VUV radiation generated by 5.7 MeV electrons in a multilayer X-ray mirror. *Journal of Instrumentation*. 2024;19(4):C04049.
12. Huang S., Duan R., Pramanik N., Herrin J.S., Boothroyd C., Liu Z. and Wong L.J. Quantum recoil in free-electron interactions with atomic lattices. *Nature Photonics*. 2023;17(3):224-230.
13. Huang S., Duan R., Pramanik N., Boothroyd C., Liu Z., Wong L.J. Enhanced Versatility of Table-Top X-Rays from Van der Waals Structures. *Advanced Science*. 2022;9(16):2105401.
14. Shi X., Kurman Y., Shentcis M., Wong LJ., Javier Garcia de Abajo F. and Kaminer I. Free-electron interactions with van der Waals heterostructures: a source of focused X-ray radiation. *Light: Science & Applications*. 2023;12(1):148.
15. Noskov AV., Blazhevich SV. Coherent X-ray radiation excited by a relativistic electron in a periodic layered medium. *Journal of Instrumentation*. 2024;19:P07007.
16. Noskov AV., Blazhevich SV., Pronina ED. Influence of the divergence of relativistic electron beam on spectral-angular densities of PXR and DTR in a periodic layered medium with three layers on a period. *Journal of Instrumentation*. 2025;20:P06014.
17. Noskov AV., Blazhevich SV. Effects of dynamic diffraction in coherent X-ray radiation from a beam of relativistic electrons in a periodic layered medium with three layers in a period. *Physics Letters A*. 2024;525:129835.
18. Noskov AV., Blazhevich SV., Chueva AI., Machukaev DD., Kipersha VK. The influence of asymmetric diffraction on the spectral-angular density of the CRI of a relativistic electron in a three-layer structure. *Applied Mathematics & Physics*. 2025;57(1):59-67. (In Russ.)

19. Noskov AV., Machukaev DD., Kipersha VK., Pugina PD., Pirmatova MD. The Influence of Electron Beam Divergence on the CXR in a Periodic Layered Medium With Three Layers Per Period. *Applied Mathematics & Physics*. 2025;57(4):279–289. (In Russ.)
20. Noskov AV., Pirmatov MD., Machukaev DD., Bardakova IN., Blazhevich SV. Angular Density of the PXR in a Periodic Layered Medium with Three Layers in a Period in Laue Scattering Geometry. *Applied Mathematics & Physics*. 2026;58(1):78–87. (In Russ.)
21. Borrmann G. Über Extinktionsdiagramme der Röntgenstrahlen von Quarz. *Zeitschrift für Physik*. 1941;42:157.

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 04.06.2026

Received June 4, 2026

Поступила после рецензирования 20.07.2026

Revised July 20, 2026

Принята к публикации 30.07.2026

Accepted July 30, 2026

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Бардакова Ирина Николаевна – аспирант кафедры теоретической и экспериментальной физики, Белгородский государственный национальный исследовательский университет, г. Белгород, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Irina N. Bardakova – Graduate Student of the Department of Theoretical and Experimental Physics, Belgorod National Research University, Belgorod, Russia

[К содержанию](#)