Прикладная математика & Физика, 2021, том 53, №3. С. 171–204.

МАТЕМАТИКА

УДК 512.542
MSC 20D10, 20F17

DOI 10.52575/2687-0959-2021-53-3-171-204

Посвящается моим дорогим родителям —
Владимиру Ивановичу Щербине и
Нине Ефимовне Щербине

ЧАСТИЧНО КОМПОЗИЦИОННЫЕ ФОРМАЦИИ С ЗАДАННОЙ СТРУКТУРОЙ. I

В. В. Щербина

(*Статья представлена членом редакционной коллегии В. Б. Васильевым*)

г. Минск, 220136, Республика Беларусь

E-mail: shcherbinavv@tut.by

Аннотация. Пусть ω — непустое множество простых чисел, n — целое неотрицательное число и τ — подгрупповой функтор в смысле А. Н. Скибы. Через τ_{sn} обозначим также подгрупповой функтор такой, что $\tau_{sn}(G)$ — множество всех субнормальных подгрупп из G для любой группы G. В работе исследуются связи между различными решетками формаций. Получены достаточные условия, при которых решетка формаций H^{ω_l} является полной подрешеткой решетки формаций Θ^{ω_c}, где H и Θ — некоторые полные решетки формаций. В частности, доказано, что для любого подгруппового функтора τ такого, что $\tau \leq \tau_{sn}$, решетка всех τ-замкнутых n-кратно (тотально) ω-насыщенных формаций является полной подрешеткой решетки всех τ-замкнутых n-кратно (соответственно тотально) ω-композиционных формаций. Кроме того, установлено, что если $|\omega| > 1$, $m > n \geq 0$, где m и n — целые числа, и $\tau \leq \tau_{sn}$, то решетка всех τ-замкнутых m-кратно ω-композиционных формаций не является подрешеткой решетки всех τ-замкнутых n-кратно ω-композиционных формаций.

Ключевые слова: конечная группа, формация групп, подгрупповой функтор, τ-замкнутая формация, n-кратно ω-насыщенная формация, тотально ω-насыщенная формация, n-кратно ω-композиционная формация, тотально ω-композиционная формация, полная решетка формаций, полная подрешетка.

Для цитирования: Щербина В. В. 2021. Частично композиционные формации с заданной структурой. I. Прикладная математика & Физика. 53(3): 171–204. DOI 10.52575/2687-0959-2021-53-3-171-204.

PARTIALLY COMPOSITION FORMATIONS WITH A GIVEN STRUCTURE. I

Vladimir Shcherbina

(*Article submitted by a member of the editorial board V. B. Vasiliev*)

Minsk, 220136, Republic of Belarus

E-mail: shcherbinavv@tut.by
Received April, 19, 2021

Abstract. All groups under consideration are finite. Let ω be a non-empty set of primes, n be a non-negative integer, and τ be a subgroup functor in the sense of A. N. Skiba. We also denote by τ_{sn} the subgroup functor such that for every group G the set $\tau_{sn}(G)$ coincides with the set of all subnormal subgroups of the group G . Recall that a formation is a class of groups that is closed under taking homomorphic images and finite subdirect products. The paper studies the connections between different lattices of formations. We obtain sufficient conditions under which the lattice of formations H^{ω_l} is complete sublattice of the lattice of formations Θ^{ω_c} for some complete lattices of formations H and Θ. In particular, we show that the lattice of all τ-closed n-multiply (totally) ω-saturated formations is complete sublattice of the lattice of all τ-closed n-multiply (respectively, totally) ω-composition formations for every subgroup functor τ such that $\tau \leq \tau_{sn}$. Furthemore, we prove that if $|\omega| > 1$, $m > n \geq 0$ be integers, and $\tau \leq \tau_{sn}$, then the lattice of all τ-closed m-multiply ω-composition formations is not sublattice of the lattice of all τ-closed n-multiply ω-composition formations.

Key words: finite group, formation of groups, subgroup functor, τ-closed formation, n-multiply ω-saturated formation, totally ω-saturated formation, n-multiply ω-composition formation, totally ω-composition formation, complete lattice of formations, complete sublattice.

For citation: Shcherbina Vladimir. 2021. Partially composition formations with a given structure. I. Applied Mathematics & Physics. 53(3): 171–204. (in Russian) DOI 10.52575/2687-0959-2021-53-3-171-204.

1. Введение. Все рассматриваемые в работе группы предполагаются конечными. Мы будем использовать стандартные обозначения и определения [6, 11, 16, 26, 27]. Напомним, что *формацией* называется класс групп, замкнутый относительно взятия гомоморфных образов и конечных подпрямых произведений. В различных приложениях теории формаций наиболее полезными оказались локальные и композиционные (или разрешимо насыщенные, локальные в смысле Р. Бэра) формации, а также их обобщения — частично локальные и частично композиционные формации (см. [1, 5, 6, 11, 15, 16, 18, 19, 26, 27]).

В дальнейшем ω обозначает некоторое непустое множество простых чисел, p и q — некоторые простые числа. Для каждого множества простых чисел π через π' обозначается множество $\mathbb{P} \setminus \pi$, где $\mathbb{P}$ — множество всех простых чисел. Символ $\pi(G)$ обозначает множество всех различных простых делителей порядка группы G, $\pi(\mathfrak{X})$ — объединение множеств $\pi(G)$ для всех групп G из $\mathfrak{X}$. Символом (1) обозначается класс всех единичных групп. Для произвольного класса групп $\mathfrak{F} \supseteq (1)$ символ $G^{\mathfrak{F}}$ обозначает пересечение всех таких нормальных подгрупп N, что $G/N \in \mathfrak{F}$, символ $G_{\mathfrak{F}}$ — произведение всех нормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп группы G.

Символы $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}_\pi$, $\mathfrak{N}_p$, $\mathfrak{S}_\pi$ и $\mathfrak{N}_\pi$ обозначают класс всех групп, π-групп, p-групп, разрешимых π-групп и нильпотентных π-групп соответственно. Если $\pi = \varnothing$, то, по определению, $\mathfrak{G}_\varnothing = \mathfrak{N}_\varnothing = \mathfrak{S}_\varnothing = (1)$. Следуя [26], символом $\mathfrak{G}_{\omega d}$ мы обозначаем класс всех тех групп, у которых каждый композиционный фактор является ωd-группой.

Полагают

$$G_{\omega d} = G_{\mathfrak{G}_{\omega d}}, \quad F_p(G) = G_{\mathfrak{G}_{p'}\mathfrak{N}_p}, \quad R_\omega(G) = G_{\mathfrak{S}_\omega}, \quad O_p(G) = G_{\mathfrak{N}_p}, \quad O_\pi(G) = G_{\mathfrak{G}_\pi}.$$

Как и в [16], символ $C^p(G)$ обозначает пересечение централизаторов всех тех главных факторов группы G, чьи композиционные факторы имеют простой порядок p (если в группе G нет таких факторов, то полагают $C^p(G) = G$). Для произвольной совокупности групп $\mathfrak{X}$ символ $(\mathfrak{X})$ обозначает абстрактное замыкание $\mathfrak{X}$, т. е. класс всех групп, изоморфных группам из $\mathfrak{X}$. Символы $\mathcal{K}(\mathfrak{X})$ и $\mathrm{Com}(\mathfrak{X})$ обозначают класс всех тех простых групп и соответственно класс всех тех простых *абелевых* групп, которые встречаются в качестве композиционных факторов некоторых групп из $\mathfrak{X}$.

Класс всех простых групп мы обозначаем символом $\mathfrak{I}$. Для произвольного подкласса $\mathfrak{L}$ из $\mathfrak{I}$ полагают $\mathfrak{L}' = \mathfrak{I} \setminus \mathfrak{L}$, $\mathfrak{L}^+$ — класс всех абелевых групп из $\mathfrak{L}$ и $\mathfrak{L}^- = \mathfrak{L} \setminus \mathfrak{L}^+$.

Для произвольного класса простых групп $\mathfrak{T}$ символ $E(\mathfrak{T})$ обозначает класс всех таких групп G, что $\mathcal{K}(G) \subseteq \mathfrak{T}$. По определению, единичные группы принадлежат $E(\mathfrak{T})$.

Всякая функция вида

$$f\colon \omega \cup \{\omega'\} \to \{\text{формации групп}\} \tag{1}$$

называется *формационной ω-функцией.*

Следуя работам А. Н. Скибы и Л. А. Шеметкова [26, 27], соответственно, сопоставим функции f два класса групп

$$LF_\omega(f) = \big(G \mid G/G_{\omega d} \in f(\omega') \text{ и } G/F_p(G) \in f(p) \\ \text{для всех } p \in \pi(G) \cap \omega\big)$$

и

$$CF_\omega(f) = \big(G \mid G/R_\omega(G) \in f(\omega') \text{ и } G/C^p(G) \in f(p) \\ \text{для всех } p \in \pi\big(\mathrm{Com}(G)\big) \cap \omega\big).$$

Для любой функции f вида (1) классы групп $LF_\omega(f)$ и $CF_\omega(f)$ являются формациями.

Если формация $\mathfrak{F}$ такова, что $\mathfrak{F} = LF_\omega(f)$ для некоторой функции f вида (1), то $\mathfrak{F}$ называется *ω-насыщенной* или *ω-локальной формацией* с *ω-локальным спутником* f [26]. Если при этом все значения f лежат в $\mathfrak{F}$, то f называется *внутренним* (или *приведенным*) *ω-локальным спутником* формации $\mathfrak{F}$. Согласно замечанию 1 [26], всякая ω-насыщенная формация $\mathfrak{F}$ имеет такой единственный ω-локальный спутник F, что $F(\omega') = \mathfrak{F}$ и $F(p) = \mathfrak{N}_p F(p) \subseteq \mathfrak{F}$ для всех $p \in \omega$. Такой спутник называется *каноническим ω-локальным спутником* формации $\mathfrak{F}$.

Если формация $\mathfrak{F}$ такова, что $\mathfrak{F} = CF_\omega(f)$ для некоторой функции вида (1), то $\mathfrak{F}$ называется *ω-композиционной* или *разрешимо ω-насыщенной формацией* с *ω-композиционным спутником* f [27]. При этом если все значения f лежат в $\mathfrak{F}$, то f называется *внутренним* (или *приведенным*) *ω-композиционным спутником* формации $\mathfrak{F}$. Согласно замечанию 1 [27], любая ω-композиционная формация $\mathfrak{F}$ имеет такой единственный ω-композиционный спутник F, что $F(\omega') = \mathfrak{F}$ и $F(p) = \mathfrak{N}_p F(p) \subseteq \mathfrak{F}$ для всех $p \in \omega$. Такой спутник называется *каноническим ω-композиционным спутником* формации $\mathfrak{F}$.

Отметим, что класс локальных формаций совпадает с классом $\mathbb{P}$-локальных формаций, а класс композиционных формаций совпадает с классом $\mathbb{P}$-композиционных формаций (см. [26, 27]).

Всякая формация считается 0-*кратно ω-насыщенной*, а при $n \geq 1$ формация $\mathfrak{F}$ называется *n-кратно ω-насыщенной*, если $\mathfrak{F} = LF_\omega(f)$, где все (непустые) значения спутника f являются $(n-1)$-кратно ω-насыщенными формациями [26]. Формация $\mathfrak{F}$ называется *тотально ω-насыщенной*, если она n-кратно ω-насыщенна для всех натуральных n. n-кратно ω-композиционные и тотально ω-композиционные формации определяются аналогично [27].

Сопоставим со всякой группой G некоторую систему ее подгрупп $\tau(G)$. Говорят, что τ — *подгрупповой функтор* (в смысле А. Н. Скибы [6], с. 16), если выполняются следующие условия:

1) $G \in \tau(G)$ для любой группы G;

2) для всякого эпиморфизма $\varphi\colon A \to B$ и любых групп $H \in \tau(A)$, $T \in \tau(B)$ имеет место $H^\varphi \in \tau(B)$ и $T^{\varphi^{-1}} \in \tau(A)$.

Через $\mathrm{S}(G)$ обозначают совокупность всех подгрупп группы G, а через $\mathrm{S}_n(G)$ — совокупность всех нормальных подгрупп группы G. Подгрупповой функтор τ называется *тривиальным*, если $\tau(G) = \{G\}$, и *единичным*, если $\tau(G) = \mathrm{S}(G)$. Формация $\mathfrak{F}$ называется *τ-замкнутой*, если $\tau(G) \subseteq \mathfrak{F}$ для любой группы $G \in \mathfrak{F}$.

В дальнейшем символом τ_{sn} мы обозначаем подгрупповой функтор такой, что множество $\tau_{sn}(G)$ совпадает с множеством всех субнормальных подгрупп из G для каждой группы G.

Напомним, что непустая совокупность формаций Θ называется *полной решеткой формаций* (см. [6], с. 151), если пересечение любой совокупности формаций из Θ снова принадлежит Θ и во множестве Θ имеется такая формация $\mathfrak{F}$, что $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$ для любой формации $\mathfrak{H} \in \Theta$.

Пусть Θ — полная решетка формаций. Формационная функция вида (1) называется *Θ-значной*, если все ее значения принадлежат решетке Θ. Символом $\Theta^{\omega l}$ мы обозначаем совокупность всех формаций, обладающих ω-локальным Θ-значным спутником (см. [26]), а символом Θ^{ω_c} — совокупность всех формаций, обладающих ω-композиционным Θ-значным спутником (см. [27]).

Символами $l^\tau_{\omega_n}$ и $l^\tau_{\omega_\infty}$ обозначены совокупность всех τ-замкнутых n-кратно ω-насыщенных формаций и совокупность всех τ-замкнутых тотально ω-насыщенных формаций соответственно. Аналогично символы $c^\tau_{\omega_n}$ и $c^\tau_{\omega_\infty}$ используются для обозначения совокупности всех τ-замкнутых n-кратно ω-композиционных формаций и совокупности всех τ-замкнутых тотально ω-композиционных формаций соответственно. Каждая из совокупностей $l^\tau_{\omega_n}$ и $l^\tau_{\omega_\infty}$, а также $c^\tau_{\omega_n}$ и $c^\tau_{\omega_\infty}$, частично упорядоченная по включению, образует полную решетку формаций (см. [1], теоремы 1.5.3, 1.5.4, 1.6.3 и 1.6.4 на сс. 52, 54, 68 и 70 соответственно). Будем также использовать символы $\mathcal{F}$ и $\mathcal{F}^\tau$ для обозначения решетки всех формаций и решетки всех τ-замкнутых формаций соответственно (см. [28, 38]).

Известно, что подрешетка полной решетки L может быть полной решеткой, в то же время не являясь полной подрешеткой решетки L. Подрешетка H полной решетки L называется *полной*, если для любого непустого подмножества $X \subseteq H$ имеет место $\sup_L X \in H$ и $\inf_L X \in H$. В таком случае имеем $\sup_H X = \sup_L X$ и $\inf_H X = \inf_L X$.

Полные подрешетки формаций исследовались в работах В. Г. Сафонова, Л. А. Шеметкова и других авторов [4, 13, 28, 38, 39, 40], а также книгах А. Н. Скибы, Н. Н. Воробьева и Го Вэньбиня [1, 6, 19]. При этом важным этапом в установлении полноты подрешеток насыщенных и разрешимо насыщенных формаций явилось развитие функторных методов исследования формаций [6]. Так, А. Н. Скибой (см. [6], следствие 4.1.14, с. 158) было показано, что решетка l^τ_n всех τ-замкнутых n-кратно насыщенных формаций является полной подрешеткой решетки l_n всех n-кратно насыщенных формаций. В. Г. Сафонов и Л. А. Шеметков [4] доказали полноту подрешетки l^τ_∞ всех τ-замкнутых тотально насыщенных формаций в решетке l_∞ всех тотально насыщенных формаций, а в работе автора и В. Г. Сафонова [13] данный результат был распространен на аналогичные структуры, рассмотренные в свете теории частично насыщенных формаций.

В совместной работе [28] А. Н. Скибой и Н. Н. Воробьевым установлено, что решетка l всех насыщенных формаций является полной подрешеткой решетки c всех композиционных формаций. Позднее Н. Н. Воробьевым в работах [38, 39], соответственно, данный результат был обобщен на пары решеток (первая — полная подрешетка второй): всех τ-замкнутых насыщенных формаций l^τ, τ-замкнутых композиционных формаций c^τ и всех ω-насыщенных формаций l^ω, ω-композиционных формаций c^ω.

В упомянутой выше работе [28] также были сформулированы следующие вопросы.

Вопрос 1 ([28], вопрос 5.3). Верно ли, что решетка l_n всех n-кратно насыщенных формаций является полной подрешеткой решетки c_n всех n-кратно разрешимо насыщенных формаций (n — произвольное целое неотрицательное число)?

Вопрос 2 ([28], вопрос 5.4). Верно ли, что решетка l_∞ всех тотально насыщенных формаций является полной подрешеткой решетки c_∞ всех тотально разрешимо насыщенных формаций?

Целью настоящей работы является получение достаточных условий, при которых решетка формаций вида $\mathrm{H}^{\omega l}$ оказывается полной подрешеткой решетки формаций вида Θ^{ω_c}, где $\mathrm{H}^{\omega l}$ и Θ^{ω_c} — некоторые полные решетки формаций (см. теорема 1). В качестве следствия полученного результата мы даем положительные ответы на указанные вопросы 1 и 2 (см. следствия 16 и 31 соответственно). Кроме того, мы укажем также решение вопроса 5.4 [36], предложенного А. А. Царевым и Н. Н. Воробьевым, и покажем, что если $|\omega| > 1$, $m > n \geq 0$, где m и n — целые числа, и $\tau \leq \tau_{sn}$, то решетка $c^{\tau}_{\omega_m}$ всех τ-замкнутых m-кратно ω-композиционных формаций не является подрешеткой решетки $c^{\tau}_{\omega_n}$ всех τ-замкнутых n-кратно ω-композиционных формаций (см. следствие 36). Заметим, что теоремы, леммы, определения, утверждения, предложения, примеры и замечания имеют самостоятельную нумерацию.

2. Вспомогательные результаты. В дальнейшем для произвольной полной решетки формаций Θ символом $\mathfrak{M}_{\Theta}$ мы будем обозначать ее *наибольший элемент* (*единицу*). *Наименьшим элементом* (*нулем*) всех рассматриваемых решеток формаций всегда будем считать пустую формацию $\varnothing$ (если нуль решетки Θ не совпадает с $\varnothing$, то, как следует из определения полной решетки формаций, решетку Θ можно вложить естественным образом в решетку $\tilde{\Theta}$, которая получается присоединением $\varnothing$ к Θ.)

Напомним, что для любой полной решетки формаций Θ и любой совокупности групп $\mathfrak{X}$ такой, что $(\mathfrak{X}) \subseteq \mathfrak{M}_{\Theta}$, через $\Theta\mathrm{form}(\mathfrak{X})$ обозначается пересечение всех тех формаций из Θ, которые содержат все группы из $\mathfrak{X}$. В частности, если $\mathfrak{X} = \{G\}$, то используется обозначение $\Theta\mathrm{form}(G)$. В случае, когда $\Theta = \mathcal{F}$ — решетка всех формаций, знак Θ опускают. Если $\Theta = \mathcal{F}^{\tau}$ — решетка всех τ-замкнутых формаций, то вместо $\Theta\mathrm{form}(\mathfrak{X})$ пишут $\tau\mathrm{form}(\mathfrak{X})$.

Для любой совокупности формаций $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ из Θ полагают $\vee_{\Theta}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I) = \Theta\mathrm{form}\big(\bigcup_{i\in I}\mathfrak{F}_i\big)$. Пусть $\{f_i \mid i \in I\}$ — произвольная совокупность Θ-значных формационных ω-функций. Тогда символом $\vee_{\Theta}(f_i \mid i \in I)$ обозначают формационную ω-функцию f такую, что $f(a) = \Theta\mathrm{form}\big(\bigcup_{i\in I} f_i(a)\big)$ для всех $a \in \omega \cup \{\omega'\}$.

Напомним также, что если Θ является полной решеткой формаций, то каждая из совокупностей Θ^{ω_l} и Θ^{ω_c} также является полной решеткой формаций (подробнее см. [26, 27]).

Лемма 1. *Для произвольного простого числа p цоколь $\mathrm{Soc}(G)$ группы G содержится в подгруппе $C^p(G)$, причем последняя является характеристической подгруппой в G. В частности, если $G \neq 1$, то $C^p(G) \neq 1$.*

Доказательство. Зафиксируем произвольное простое число p. Если $G = 1$, то утверждение леммы очевидно. Поэтому в дальнейшем считаем, что $G \neq 1$. Вследствие леммы 1.2 работы [23] $C^p(G) = G_{\mathfrak{G}_{cp}}$, где $\mathfrak{G}_{cp}$ — класс всех таких групп, все главные p-факторы которых центральны. Заметим, что в силу леммы 1.1 [23] класс $\mathfrak{G}_{cp}$ является классом Фиттинга (подробнее см. лемма 3 [31], а также лемма 3.1 [20]). Отсюда и из определений следует, что подгруппа $C^p(G)$ — характеристическая. (То, что $C^p(G)$ является характеристической подгруппой в G, может быть также установлено из того замечания, что ввиду определения подгруппы $C^p(G)$ для любого эпиморфизма θ группы G справедливо включение $\theta\big(C^p(G)\big) \subseteq C^p\big(\theta(G)\big)$.)

Пусть L — минимальная нормальная подгруппа группы G. Тогда если $Z_p \notin \mathcal{K}(L)$, то вследствие леммы 1 [27] (см. также лемма 3.2 [20]) получаем $L \subseteq C^p(G)$. Если же $Z_p \in \mathcal{K}(L)$, то L — p-группа, и, учитывая лемму 3.9 [9], с. 26 (см. также [16], лемма 13.6, с. 45) и определение группы $C^p(G)$, имеем $L \subseteq F_p(G) \subseteq C^p(G)$. Таким образом, в каждом из рассмотренных случаев $L \subseteq C^p(G)$, и следовательно, $\mathrm{Soc}(G) \subseteq C^p(G)$. Лемма доказана.

Лемма 2 ([30], лемма 3.2; [32], лемма 2.4). *Пусть p — простое число, и пусть $\mathfrak{F}$ — разрешимо p-насыщенная формация, содержащая $\mathfrak{N}_p$. Предположим также, что N — элементарная абелева нормальная p-подгруппа из G такая, что $G/N \in \mathfrak{F}$ и $[N]\big(G/C_G(N)\big) \in \mathfrak{F}$. Тогда $G \in \mathfrak{F}$.*

Лемма 3. *Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ — непустые формации, причем формация $\mathfrak{H}$ — разрешимо p-насыщенна, и G — группа минимального порядка из $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H}$. Тогда G — монолитическая группа и ее монолит $\mathrm{Soc}(G)$ совпадает с $G^{\mathfrak{H}}$. Если при этом $G^{\mathfrak{H}}$ — p-группа, то*

$$G^{\mathfrak{H}} = C_G(G^{\mathfrak{H}}) = C^p(G) = F_p(G) = F_{\nu}(G) = F(G) = O_p(G),$$

где ν — произвольное непустое множество простых чисел такое, что $p \in \nu$.

Доказательство. Поскольку $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ — формации, то G — монолитическая группа с монолитом $P = \mathrm{Soc}(G) = G^{\mathfrak{H}}$. Пусть P — p-группа для некоторого простого $p \in \omega$, ν — множество из условия леммы. И пусть $T = [P]\big(G/C_G(P)\big)$. Так как $G \in \mathfrak{F}$, то ввиду предложения 1.5 [16], с. 335 имеет место $T \in \mathfrak{F}$.

Предположим, что $|T| < |G|$. Тогда $T \in \mathfrak{H}$ в силу выбора группы G. Ясно, что в таком случае $p \in \pi\big(\mathrm{Com}(\mathfrak{H})\big)$, и следовательно, ввиду замечания 1 [27] $\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{H}$. Учитывая также, что по тем же соображениям группа $G/P \in \mathfrak{H}$, вследствие леммы 2 имеем $G \in \mathfrak{H}$. Противоречие.

Поэтому $|T| = |G|$. В таком случае $P = C_G(P)$. Последнее равенство ввиду включений $F_p(G) \subseteq C^p(G) \subseteq C_G(P)$ (см. [9], лемма 3.9, с. 26; [16], лемма 13.6, с. 45), а также включений

$$P \subseteq O_p(G) \subseteq \prod_{q\in\pi(G)}^{\times} O_q(G) = F(G) = \bigcap_{q\in\mathbb{P}} F_q(G) \subseteq \bigcap_{q\in\nu} F_q(G) = F_{\nu}(G) \subseteq F_p(G)$$

(см. [16], теорема 13.4(g), с. 44) влечет справедливость равенств из условия леммы. Лемма доказана.

Пусть π — некоторое непустое множество простых чисел.

Определение 1. Полную решетку формаций Θ назовем *π-частичной алгеброй формаций*, если для любого простого числа $p \in \pi$ и для любой формации $\mathfrak{F} \in \Theta$ имеет место $\mathfrak{N}_p\mathfrak{F} \in \Theta$. В случае, когда $\pi = \mathbb{P}$, условимся опускать символ π и говорить просто о *частичной алгебре формаций* (см. [6]).

Лемма 4. *Пусть* H *— полная решетка формаций такая, что* $\mathrm{H}^{\omega_l} \subseteq \mathrm{H}$. *И пусть* $\mathfrak{F} = LF_\omega(f) \in \mathrm{H}^{\omega_l}$, *где* f *— произвольный внутренний* ω*-локальный* H*-значный спутник формации* $\mathfrak{F}$. *Тогда* $\mathfrak{F} = CF_\omega(h) \in \mathrm{H}^{\omega_c}$, *где* h *—* ω*-композиционный спутник такой, что* $h(p) = f(p)$ *для любого* $p \in \omega$ *и* $h(\omega') = \mathfrak{F}$. *Если, кроме того,* H *является* ω*-частичной алгеброй формаций, то канонический* ω*-композиционный спутник формации* $\mathfrak{F}$ H*-значен и совпадает с ее каноническим* ω*-локальным спутником.*

Доказательство. Заметим, что если формация $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{G}_{\omega'}$, то утверждение леммы следует из примера 1 [26] и примера 1 [27]. В частности, лемма верна, если $\mathfrak{F} = \varnothing$. Поэтому в дальнейшем можно считать, что формация $\mathfrak{F} \neq \varnothing$. Пусть $\mathfrak{H} = CF_\omega(h)$, где h — спутник из условия. Очевидно, что в таком случае формация $\mathfrak{H} \neq \varnothing$. Из условия и определений следует, что $\mathfrak{H} \in \mathrm{H}^{\omega_c}$. Покажем, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$.

Предположим, что $\mathfrak{H} \not\subseteq \mathfrak{F}$ и G — группа минимального порядка из $\mathfrak{H} \setminus \mathfrak{F}$. Тогда G — монолитическая группа с монолитом $R = G^{\mathfrak{F}}$.

Если $R_\omega(G) = 1$, то $G \cong G/1 = G/R_\omega(G) \in h(\omega') = \mathfrak{F}$. Противоречие. Следовательно, $R_\omega(G) \neq 1$, и R — абелева p-группа для некоторого простого $p \in \omega$. Так как формация $\mathfrak{F}$ ω-насыщенна, то $\mathfrak{F}$ — разрешимо ω-насыщенна. Следовательно, вследствие леммы 3 справедливы равенства $R = O_p(G) = C^p(G)$. Ввиду того, что спутник f — внутренний, последнее влечет

$$G/O_p(G) = G/R = G/C^p(G) \in h(p) = f(p) = f(p) \cap \mathfrak{F}.$$

Применяя лемму 4 [26], заключаем, что $G \in \mathfrak{F}$. Вновь полученное противоречие показывает, что $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$.

Покажем теперь, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$. Предоложим, что это неверно, и G — группа минимального порядка из $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H}$. Тогда G — монолитическая группа и $R = G^{\mathfrak{H}}$ — ее монолит.

Предположим, что $R_\omega(G) = 1$. Тогда R — неабелева или абелева ω'-группа, и следовательно, $\pi\big(\mathrm{Com}(G)\big) \cap \omega = \pi\big(\mathrm{Com}(G/R)\big) \cap \omega$.

Пусть $q \in \pi\big(\mathrm{Com}(G)\big) \cap \omega$. Тогда ввиду леммы 1 [27] (см. также лемма 3.2 [20]) $C^q(G/R) = C^q(G)/R$. Следовательно, так как $G/R \in \mathfrak{H}$ и $q \in \pi\big(\mathrm{Com}(G/R)\big) \cap \omega$, имеем

$$G/C^q(G) \cong (G/R)/(C^q(G)/R) = (G/R)/C^q(G/R) \in h(q).$$

Таким образом, $G/C^q(G) \in h(q)$ для всех $q \in \pi\big(\mathrm{Com}(G)\big) \cap \omega$. Кроме того,

$$G/R_\omega(G) = G/1 \cong G \in \mathfrak{F} = h(\omega').$$

Следовательно, $G \in \mathfrak{H}$. Противоречие.

Значит, $R_\omega(G) \neq 1$ и R — абелева p-группа для некоторого $p \in \omega$. Поскольку $\mathfrak{H}$ — непустая ω-композиционная формация, то ввиду леммы 3 имеют место равенства $R = O_p(G) = F_p(G)$. Поэтому

$$G/O_p(G) = G/R = G/F_p(G) \in f(p) = h(p).$$

Кроме того, поскольку $R = G^{\mathfrak{H}}$, то $G/O_p(G) = G/R \in \mathfrak{H}$. Значит,

$$G/O_p(G) \in h(p) \cap \mathfrak{H}.$$

Применяя теперь лемму 4 [27], видим, что $G \in \mathfrak{H}$. Вновь полученное противоречие показывает, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$. Значит, $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$. Таким образом, $\mathfrak{F} = CF_\omega(h) \in \mathrm{H}^{\omega_c}$.

Предположим, что H — ω-частичная алгебра формаций. И пусть $\mathfrak{F} = LF_\omega(F)$ (F — канонический ω-локальный спутник формации $\mathfrak{F}$). Напомним, что ввиду замечания 1 [26] $F(p) = \mathfrak{N}_p\mathfrak{F}(F_p)$ для каждого $p \in \omega$ и $F(\omega') = \mathfrak{F}$. Учитывая, что по условию $\mathfrak{F} \in \mathrm{H}^{\omega_l} \subseteq \mathrm{H}$, из леммы 8 [26] получаем, что спутник F является H-значным. По доказанному $\mathfrak{F} = CF_\omega(F) \in \mathrm{H}^{\omega_c}$. Так как при этом $F(p) = \mathfrak{N}_pF(p)$ и $F(\omega') = \mathfrak{F}$ для всех $p \in \omega$, то ввиду замечания 1 [27] заключаем, что спутник F — канонический ω-композиционный спутник формации $\mathfrak{F}$. Лемма доказана.

Непосредственно из леммы 11 [24] и доказательства леммы 11 [26] вытекает следующее утверждение (см. также следствие 9 [26] и лемма 11 [13]).

Лемма 5. *Для любого подгруппового функтора* τ *и всякого целого неотрицательного числа* n *каждая из решеток* $l^\tau_{\omega_n}$ *и* $l^\tau_{\omega_\infty}$ *является частичной алгеброй формаций.*

Аналогично ввиду леммы 11 [24] и доказательства теоремы 3 [27] получаем следующий результат (см. также следствие 4 [27] и лемма 2.1 [12]).

Лемма 6. *Для любого подгруппового функтора* τ *и всякого целого неотрицательного числа* n *каждая из решеток* $c^\tau_{\omega_n}$ *и* $c^\tau_{\omega_\infty}$ *является частичной алгеброй формаций.*

Следствие 1. *Пусть* $\mathfrak{F} = LF_\omega(f)$ *—* τ*-замкнутая* n*-кратно* ω*-насыщенная формация, где* f *— произвольный внутренний* ω*-локальный* $l^\tau_{\omega_{n-1}}$*-значный спутник* $\mathfrak{F}$, $n \in \mathbb{N}$. *И пусть* h *— формационная* ω*-функция такая, что* $h(p) = f(p)$ *для любого* $p \in \omega$ *и* $h(\omega') = \mathfrak{F}$. *Тогда* $\mathfrak{F} = CF_\omega(h)$ *—* τ*-замкнутая* n*-кратно* ω*-композиционная формация, причем спутник* h $c^\tau_{\omega_{n-1}}$*-значен. В частности, канонический* ω*-композиционный спутник формации* $\mathfrak{F}$ $l^\tau_{\omega_{n-1}}$*-значен и совпадает с ее каноническим* ω*-локальным спутником.*

Доказательство. Проведем индукцию по n. Для $n = 1$ утверждение леммы следует из леммы 4 для решетки $\mathrm{H} = l^{\tau}_{\omega_0} = c^{\tau}_{\omega_0} = \mathcal{F}^{\tau}$) ввиду леммы 1.5.11 [1], с. 60, леммы 1.6.8 [1], с. 71 и доказательства леммы 1.5.6 [1], с. 58 с учетом леммы 5.

Пусть теперь $n > 1$ и утверждение при $n-1$ верно. Пусть $\mathfrak{F}$ — формация, а f и h — формационные ω-функции из условия. Положим в лемме 4 $\mathrm{H} = l^{\tau}_{\omega_{n-1}}$. Учитывая, что ввиду леммы 1.5.11 [1], с. 60 (см. также лемма 2 [34]) $\mathrm{H}^{\omega_l} = (l^{\tau}_{\omega_{n-1}})^{\omega_l} = l^{\tau}_{\omega_n}$, имеем $\mathfrak{F} = LF_{\omega}(f) \in l^{\tau}_{\omega_n} \subseteq l^{\tau}_{\omega_{n-1}}$. Применяя лемму 4, видим, что $\mathfrak{F} = CF_{\omega}(h)$.

Из предположения индукции следует, что $l^{\tau}_{\omega_{n-1}} \subseteq c^{\tau}_{\omega_{n-1}}$. Следовательно, так как $h(p) = f(p) \in l^{\tau}_{\omega_{n-1}}$ для всех $p \in \omega$ и $h(\omega') = \mathfrak{F} \in l^{\tau}_{\omega_{n-1}}$, то спутник h является $c^{\tau}_{\omega_{n-1}}$-значным.

Последняя часть следствия вытекает из соответствующей части леммы 4 ввиду леммы 5. Лемма доказана.

Из следствия 1 с учетом леммы 5 вытекает следующий результат.

Следствие 2. *Пусть $\mathfrak{F} = LF_{\omega}(f)$ — τ-замкнутая тотально ω-насыщенная формация, где f — произвольный внутренний ω-локальный $l^{\tau}_{\omega_\infty}$-значный спутник $\mathfrak{F}$. И пусть h — формационная ω-функция такая, что $h(p) = f(p)$ для любого $p \in \omega$ и $h(\omega') = \mathfrak{F}$. Тогда $\mathfrak{F} = CF_{\omega}(h)$ — τ-замкнутая тотально ω-композиционная формация, причем спутник h $c^{\tau}_{\omega_\infty}$-значен. В частности, канонический ω-композиционный спутник формации $\mathfrak{F}$ $l^{\tau}_{\omega_\infty}$-значен и совпадает с ее каноническим ω-локальным спутником.*

Следующая лемма является простым следствием теоремы 1 [26].

Лемма 7. *Пусть $\mathfrak{F}$ — ω-насыщенная формация. Тогда $\pi(\mathrm{Com}(\mathfrak{F})) \cap \omega = \pi(\mathfrak{F}) \cap \omega$.*

Утверждение 1. *Пусть H — ω-частичная алгебра формаций такая, что $\mathrm{H}^{\omega_l} \subseteq \mathrm{H}$. И пусть $\mathfrak{F}$ — H^{ω_l}-формация, g — минимальный ω-локальный H-значный спутник формации $\mathfrak{F}$. Тогда $\mathfrak{F} = LF_{\omega}(f)$, где f — ω-локальный H-значный спутник такой, что $f(p) = \mathrm{H}\mathrm{form}(\mathfrak{F}(C^p))$ для всех $p \in \omega$ и $f(\omega') = \mathfrak{F}$. Кроме того, для любого $p \in \omega$ справедливо равенство $f(p) = g(p)$.*

Доказательство. Прежде всего, заметим, что ввиду леммы 4 $\mathfrak{F}$ является H^{ω_c}-формацией и $\mathfrak{F} = LF_{\omega}(F) = CF_{\omega}(F)$, причем канонический спутник F H-значен. Обозначим через h минимальный ω-композиционный H-значный спутник формации $\mathfrak{F}$.

Так как формация $\mathfrak{F}$ ω-насыщенна, то вследствие леммы 7 справедливо равенство $\pi(\mathrm{Com}(\mathfrak{F})) \cap \omega = \pi(\mathfrak{F}) \cap \omega$. Из последнего ввиду леммы 5 [27] имеем $h(p) = \mathrm{H}\mathrm{form}(\mathfrak{F}(C^p))$ для всех $p \in \omega$ и $h(\omega') = \mathrm{H}\mathrm{form}(G/R_{\omega}(G) \mid G \in \mathfrak{F})$. В силу же леммы 5 [26] $g(p) = \mathrm{H}\mathrm{form}(\mathfrak{F}(F_p))$ для каждого $p \in \omega$ и $g(\omega') = \mathrm{H}\mathrm{form}(G/G_{\omega d}(G) \mid G \in \mathfrak{F})$. Далее, поскольку $\mathrm{H}^{\omega_l} \subseteq \mathrm{H}$, спутники h и g являются внутренними спутниками формации $\mathfrak{F}$. Поэтому в силу замечания 2 [27] и замечания 2 [26] $F(p) = \mathfrak{N}_p h(p) = \mathfrak{N}_p g(p)$ для любого $p \in \omega$.

Если $p \in \omega \setminus \pi(\mathfrak{F})$, то в силу равенства $\pi(\mathrm{Com}(\mathfrak{F})) \cap \omega = \pi(\mathfrak{F}) \cap \omega$ имеем $f(p) = \varnothing$. Ясно также, что $g(p) = \varnothing$.

Пусть $\pi(\mathfrak{F}) \cap \omega \neq \varnothing$ и $p \in \pi(\mathfrak{F}) \cap \omega$. Учитывая, что спутник F — внутренний, а также принимая во внимание включение $F_p(G) \subseteq C^p(G)$, справедливое для любой группы G (см. лемма 3.9 [9], с. 26), вследствие леммы 5 [26] имеем

$$\begin{aligned} g(p) &= \mathrm{H}\mathrm{form}(G \mid G \in F(p),\ O_p(G) = 1) = \mathrm{H}\mathrm{form}(G \mid G \in \mathfrak{N}_p h(p),\ O_p(G) = 1) = \\ &= \mathrm{H}\mathrm{form}(G \mid G \in h(p),\ O_p(G) = 1) = \mathrm{H}\mathrm{form}(G \mid G \in \mathrm{H}\mathrm{form}(\mathfrak{F}(C^p)),\ O_p(G) = 1) \subseteq \\ &\subseteq \mathrm{H}\mathrm{form}\Big(\mathrm{H}\mathrm{form}(\mathfrak{F}(C^p))\Big) = \mathrm{H}\mathrm{form}(\mathfrak{F}(C^p)) = \mathrm{H}\mathrm{form}(G/C^p(G) \mid G \in \mathfrak{F}) = f(p) \subseteq \\ &\subseteq \mathrm{H}\mathrm{form}(G/F_p(G) \mid G \in \mathfrak{F}) = \mathrm{H}\mathrm{form}(\mathfrak{F}(F^p)) = g(p). \end{aligned}$$

Из последних включений следует, что $f(p) = g(p)$ для всякого $p \in \pi(\mathfrak{F}) \cap \omega$.

Таким образом, $f(p) = g(p)$ для всех $p \in \omega$. Снова применяя лемму 5 [26], заключаем, что $\mathfrak{F} = LF_{\omega}(f)$. Утверждение доказано.

Полагая в утверждении 1 $\mathrm{H} = l^{\tau}_{\omega_{n-1}}$, где $n \in \mathbb{N}$ и τ — произвольный подгрупповой функтор, ввиду леммы 5 и леммы 1.5.11 [1], с. 60 (см. также лемма 2 [34]) получаем

Утверждение 2. *Пусть $\mathfrak{F}$ — $l^{\tau}_{\omega_n}$-формация и g — минимальный ω-локальный $l^{\tau}_{\omega_{n-1}}$-значный спутник формации $\mathfrak{F}$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда $\mathfrak{F} = LF_{\omega}(f)$, где f — ω-локальный спутник такой, что $f(p) = l^{\tau}_{\omega_{n-1}}\mathrm{form}(\mathfrak{F}(C^p))$ для всех $p \in \omega$ и $f(\omega') = \mathfrak{F}$. Кроме того, для любого $p \in \omega$ справедливо равенство $f(p) = g(p)$.*

Для тривиального подгруппового функтора τ и $n = 1$ из утверждения 2 с учетом п. (2.10) [30] вытекает следующий результат.

Следствие 3 ([32], теорема 4.6; [30], теорема 3.1(b)). *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая ω-насыщенная формация и h — минимальный композиционный спутник формации $\mathrm{c}\mathrm{form}(\mathfrak{F})$. Тогда $\mathfrak{F} = LF_{\omega}(f)$, где f — такой ω-локальный спутник, что $f(p) = h(p)$ для любого $p \in \omega$ и $f(\omega') = \mathfrak{F}$.*

Полагая теперь в утверждении 1 $\mathrm{H} = l^{\tau}_{\omega_\infty}$, где τ — произвольный подгрупповой функтор, вследствие леммы 5 и леммы 17 [13] устанавливаем следующее

Утверждение 3. *Пусть* $\mathfrak{F}$ — $l^{\tau}_{\omega_\infty}$*-формация и* g — *минимальный* ω*-локальный* $l^{\tau}_{\omega_\infty}$*-значный спутник формации* $\mathfrak{F}$*. Тогда если* f — ω*-локальный спутник такой, что* $f(p) = l^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}\big(\mathfrak{F}(C^p)\big)$ *для всех* $p \in \omega$ *и* $f(\omega') = \mathfrak{F}$*, то* $\mathfrak{F} = LF_\omega(f)$*. Кроме того, для любого* $p \in \omega$ *справедливо равенство* $f(p) = g(p)$*.*

Лемма 8. *Пусть* Θ — *полная решетка формаций,* $\mathfrak{H}$ — *непустая* S_n*-замкнутая формация, такая, что для любой формации* $\mathfrak{F} \in \Theta$ *имеет место* $\mathfrak{H}\mathfrak{F} \in \Theta$*. Тогда для любого набора* $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ *формаций* $\mathfrak{F}_i \in \Theta$ *имеет место включение*

$$\vee_\Theta(\mathfrak{H}\mathfrak{F}_i \mid i \in I) \subseteq \mathfrak{H}\big(\vee_\Theta(\mathfrak{F}_i \mid i \in I)\big).$$

Доказательство. Поскольку для любого $i \in I$ выполняется включение $\mathfrak{F}_i \subseteq \vee_\Theta(\mathfrak{F}_i \mid i \in I)$, то, учитывая, что $\mathfrak{H}$ — S_n-замкнутая формация, имеем $\mathfrak{H}\mathfrak{F}_i \subseteq \mathfrak{H}\big(\vee_\Theta(\mathfrak{F}_i \mid i \in I)\big)$. Поэтому

$$\bigcup_{i\in I}\mathfrak{H}\mathfrak{F}_i \subseteq \mathfrak{H}\big(\vee_\Theta(\mathfrak{F}_i \mid i \in I)\big).$$

По условию формация $\mathfrak{H}\big(\vee_\Theta(\mathfrak{F}_i \mid i \in I)\big) \in \Theta$. Следовательно,

$$\vee_\Theta(\mathfrak{H}\mathfrak{F}_i \mid i \in I) = \Theta\mathrm{form}\,\big(\bigcup_{i\in I}\mathfrak{H}\mathfrak{F}_i\big) \subseteq \mathfrak{H}\big(\vee_\Theta(\mathfrak{F}_i \mid i \in I)\big).$$

Лемма доказана.

Напомним, что полная решетка формаций Θ^{ω_l} называется *индуктивной* (см. [6], с. 151), если для любого набора $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ формаций $\mathfrak{F}_i \in \Theta^{\omega_l}$ и для всякого набора $\{f_i \mid i \in I\}$ внутренних Θ-значных ω-локальных спутников, где $\mathfrak{F}_i = LF_\omega(f_i)$, имеет место

$$\vee_{\Theta^{\omega_l}}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I) = LF_\omega\big(\vee_\Theta(f_i \mid i \in I)\big).$$

Аналогично, полная решетка формаций Θ^{ω_c} называется *индуктивной* (см. [6], с. 151; [1], с. 220), если для любого набора $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ формаций $\mathfrak{F}_i \in \Theta^{\omega_c}$ и для всякого набора $\{f_i \mid i \in I\}$ внутренних Θ-значных ω-композиционных спутников, где $\mathfrak{F}_i = CF_\omega(f_i)$, имеем

$$\vee_{\Theta^{\omega_c}}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I) = CF_\omega\big(\vee_\Theta(f_i \mid i \in I)\big).$$

Предложение 1. *Пусть* $\Theta^{\omega_c} = \Theta$ — *индуктивная решетка формаций,* $\mathfrak{F}_i \in \Theta$*, где* $i \in I$*, и* π — *такое непустое множество простых чисел, что* $\pi \subseteq \omega$*. Тогда если для любой формации* $\mathfrak{F} \in \Theta$ *формация* $\mathfrak{N}_\pi\mathfrak{F} \in \Theta$*, то*

$$\vee_\Theta\big(\mathfrak{N}_\pi\mathfrak{F}_i \mid i \in I\big) = \mathfrak{N}_\pi\big(\vee_\Theta(\mathfrak{F}_i \mid i \in I)\big).$$

Доказательство. Пусть $\mathfrak{X}_1 = \vee_\Theta\big(\mathfrak{N}_\pi\mathfrak{F}_i \mid i \in I\big)$, $\mathfrak{X}_2 = \mathfrak{N}_\pi\big(\vee_\Theta(\mathfrak{F}_i \mid i \in I)\big)$. Утверждение леммы очевидно, если $\mathfrak{F}_i = \varnothing$ для каждого $i \in I$. Поэтому в дальнейшем считаем, что $\mathfrak{F}_{i_0} \neq \varnothing$ для некоторого $i_0 \in I$ и, следовательно, каждая из формаций $\mathfrak{X}_1$ и $\mathfrak{X}_2$ не является пустой. Полагая, далее, в лемме 8 $\mathfrak{H} = \mathfrak{N}_\pi$ и учитывая, что $\mathfrak{N}_\pi$ — S-замкнутая формация, имеем $\mathfrak{X}_1 \subseteq \mathfrak{X}_2$.

Прежде чем доказать обратное включение, заметим следующее. Нетрудно видеть (см. лемма 11 [27]), что формация $\mathfrak{N}_\pi$ имеет такой внутренний (минимальный) ω-композиционный спутник n, что $n(q) = (1)$ для любого $q \in \pi$, $n(q) = \varnothing$ для всех $q \in \omega \setminus \pi$ и $n(\omega') = (1)$. Ввиду условия формация $\mathfrak{F}_i \in \Theta = \Theta^{\omega_c}$. Пусть $\mathfrak{F}_i = CF_\omega(f_i)$, где $i \in I$, причем спутник f_i является внутренним. Согласно теореме 6 [27], формация $\mathfrak{N}_\pi\mathfrak{F}_i$ имеет такой внутренний ω-композиционный спутник $\tilde{f_i}$, что $\tilde{f_i}(q) = \mathfrak{F}_i$ для каждого $q \in \pi$, $\tilde{f_i}(q) = f_i(q)$ для всякого $q \in \omega\setminus\pi$ и $\tilde{f_i}(\omega') = \mathfrak{N}_\pi\mathfrak{F}_i$. По условию $\Theta^{\omega_c} = \Theta$ — индуктивная решетка формаций. Следовательно, $\vee_\Theta(\mathfrak{F}_i \mid i \in I) = \vee_{\Theta^{\omega_c}}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I) = CF_\omega\big(\vee_\Theta(f_i \mid i \in I)\big)$. Применяя теперь теорему 6 [27], заключаем, что формация $\mathfrak{X}_2$ имеет такой ω-композиционный спутник x_2, что $x_2(q) = \vee_\Theta(\mathfrak{F}_i \mid i \in I)$ для любого $q \in \pi$, $x_2(q) = \vee_\Theta(f_i \mid i \in I)(q) = \vee_\Theta(f_i(q) \mid i \in I)$ для всех $q \in \omega \setminus \pi$ и $x_2(\omega') = \mathfrak{N}_\pi\big(\vee_\Theta(\mathfrak{F}_i \mid i \in I)\big) = \mathfrak{X}_2$. Проводя аналогичные рассуждения с учетом равенств $\mathfrak{N}_\pi\mathfrak{F}_i = CF_\omega(\tilde{f_i})$ $(i \in I)$, видим, что формация $\mathfrak{X}_1$ имеет такой ω-композиционный спутник x_1, что $x_1(q) = \vee_\Theta(\mathfrak{F}_i \mid i \in I)$ для каждого $q \in \pi$, $x_1(q) = \vee_\Theta(f_i(q) \mid i \in I)$ для всякого $q \in \omega \setminus \pi$ и $x_1(\omega') = \mathfrak{X}_1$. Сравнивая спутники x_1 и x_2, заключаем, что $x_1(q) = x_2(q)$ для любого $q \in \omega$. Заметим также, что спутники x_1 и x_2 — внутренние.

Перейдем теперь непосредственно к доказательству включения $\mathfrak{X}_2 \subseteq \mathfrak{X}_1$. Допустим, что $\mathfrak{X}_2 \setminus \mathfrak{X}_1 \neq \varnothing$, и пусть A — группа минимального порядка из $\mathfrak{X}_2\setminus\mathfrak{X}_1$. Тогда A — монолитическая группа и $P = \mathrm{Soc}(A) = A^{\mathfrak{X}_1}$.

Если P — неабелева группа или абелева π'-группа, то $A \in \vee_\Theta(\mathfrak{F}_i \mid i \in I) \subseteq \vee_\Theta\big(\mathfrak{N}_\pi\mathfrak{F}_i \mid i \in I\big) = \mathfrak{X}_1$. Противоречие. Значит, P — абелева p-группа для некоторого простого числа $p \in \pi \subseteq \omega$. Тогда, так как $\varnothing \neq \mathfrak{X}_1$ — ω-композиционная формация и по условию $\Theta^{\omega_c} = \Theta$, вследствие леммы 3 имеем $P = C^p(A) = O_p(A)$.

Выше было установлено, что $x_1(q) = x_2(q)$ для любого $q \in \omega$. Учитывая, что $A \in \mathfrak{X}_2$ и $p \in \omega$, получаем

$$A/O_p(A) = A/P = A/C^p(A) \in x_2(p) = x_1(p).$$

Поскольку спутник x_1 является внутренним, то, применяя лемму 4 [27], заключаем, что $A \in \mathfrak{X}_1$. Противоречие. Следовательно, $\mathfrak{X}_2 \subseteq \mathfrak{X}_1$. Таким образом, $\mathfrak{X}_1 = \mathfrak{X}_2$. Предложение доказано.

Предложение 2. *Пусть* $\Theta^{\omega_c} = \Theta$ — *индуктивная решетка формаций,* $\pi \subseteq \omega$ — *непустое множество простых чисел, и для любой любой формации* $\mathfrak{H} \in \Theta$ *имеет место* $\mathfrak{N}_\pi\mathfrak{H} \in \Theta$. *И пусть* $v(x_1, \ldots, x_n)$ — *терм сигнатуры* $\{\cap, \vee_\Theta\}$, $\mathfrak{F}_i$ — Θ*-формация для каждого* $i = 1, \ldots, n$. *Тогда*

$$v(\mathfrak{N}_\pi\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{N}_\pi\mathfrak{F}_n) = \mathfrak{N}_\pi v(\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_n).$$

Доказательство. Проведем индукцию по числу t вхождений символов из $\{\cap, \vee_\Theta\}$ в терм v.

При $t = 0$ утверждение леммы очевидно.

При $t = 1$ лемма верна ввиду леммы 13 [3] (с учетом радикальности формации $\mathfrak{N}_\pi$) и предложения 1.

Предположим теперь, что терм v имеет $t > 1$ вхождений символов из $\{\cap, \vee_\Theta\}$. Пусть терм v имеет вид

$$v(x_1, \ldots, x_n) = v_1(x_{i_1}, \ldots, x_{i_r})\Delta v_2(x_{j_1}, \ldots, x_{j_s}),$$

где $\Delta \in \{\cap, \vee_\Theta\}$, r, $s \in \mathbb{N}$,

$$\{x_{i_1}, \ldots, x_{i_r}\} \cup \{x_{j_1}, \ldots, x_{j_s}\} = \{x_1, \ldots, x_n\},$$

и лемма для термов v_1 и v_2 верна. Тогда

$$v_1(\mathfrak{N}_\pi\mathfrak{F}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{N}_\pi\mathfrak{F}_{i_r}) = \mathfrak{N}_\pi v_1(\mathfrak{F}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{i_r}),$$
$$v_2(\mathfrak{N}_\pi\mathfrak{F}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{N}_\pi\mathfrak{F}_{j_s}) = \mathfrak{N}_\pi v_2(\mathfrak{F}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{j_s}).$$

Следовательно, по индукции

$$\begin{aligned} v(\mathfrak{N}_\pi\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{N}_\pi\mathfrak{F}_n) &= v_1(\mathfrak{N}_\pi\mathfrak{F}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{N}_\pi\mathfrak{F}_{i_r})\Delta v_2(\mathfrak{N}_\pi\mathfrak{F}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{N}_\pi\mathfrak{F}_{j_s}) = \\ &= \mathfrak{N}_\pi v_1(\mathfrak{F}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{i_r})\Delta\mathfrak{N}_\pi v_2(\mathfrak{F}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{j_s}) = \\ &= \mathfrak{N}_\pi\big(v_1(\mathfrak{F}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{i_r})\Delta v_2(\mathfrak{F}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{j_s})\big) = \mathfrak{N}_\pi v(\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_n). \end{aligned}$$

Предложение доказано.

Предложение 3. *Пусть* $\mathrm{H}^{\omega_l} = \mathrm{H}$ — *индуктивная решетка формаций,* $\mathfrak{F}_i \in \mathrm{H}$, *где* $i \in I$, *и* π — *такое непустое множество простых чисел, что* $\pi \subseteq \omega$. *Тогда если для любой формации* $\mathfrak{H} \in \mathrm{H}$ *формация* $\mathfrak{N}_\pi\mathfrak{H} \in \mathrm{H}$, *то*

$$\vee_\mathrm{H}\big(\mathfrak{N}_\pi\mathfrak{F}_i \mid i \in I\big) = \mathfrak{N}_\pi\big(\vee_\mathrm{H}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I)\big).$$

Доказательство в целом дословно повторяет доказательство предложения 1. Используя лемму 1.5.2 [1], с. 61, теорему 7 [26] и лемму 4 [26] вместо леммы 8 [35], теоремы 6 [27] и леммы 4 [27] соответственно, заменяя каждое вхождение символов Θ, Θ^{ω_c} на символы H, H^{ω_l} соответственно и рассматривая вместо ω-композиционных спутников ω-локальные с учетом того, что каждая ω-насыщенная формация является ω-композиционной, получаем требуемое. Предложение доказано.

Предложение 4. *Пусть* $\mathrm{H}^{\omega_l} = \mathrm{H}$ — *индуктивная решетка формаций,* $\pi \subseteq \omega$ — *непустое множество простых чисел, и для любой формации* $\mathfrak{H} \in \mathrm{H}$ *имеет место* $\mathfrak{N}_\pi\mathfrak{H} \in \mathrm{H}$. *Предположим также, что* $v(x_1, \ldots, x_n)$ — *терм сигнатуры* $\{\cap, \vee_\mathrm{H}\}$, $\mathfrak{F}_i$ — H*-формация для каждого* $i = 1, \ldots, n$. *Тогда*

$$v(\mathfrak{N}_\pi\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{N}_\pi\mathfrak{F}_n) = \mathfrak{N}_\pi v(\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_n).$$

Доказательство совершенно аналогично доказательству предложения 2. Необходимо лишь заменить каждое вхождение символов Θ, Θ^{ω_c} на символы H, H^{ω_l} соответственно (т. е. рассмотреть соответствующие решетки формаций) и применить предложение 3 вместо предложения 1. Предложение доказано.

Лемма 9 (см. [26], теоремы 7 и 8; [31], теорема 3). *Пусть* $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{H}$, *где* $\mathfrak{M} = LF_\omega(m)$ *для некоторого внутреннего спутника* m. *Тогда если* $\mathfrak{H}$ — *такая непустая формация, что* $\pi(\mathfrak{H}) \cap \omega \subseteq \pi(\mathfrak{M})$, *то* $\mathfrak{F} = LF_\omega(f)$, *где* $f(\omega') = m(\omega')\mathfrak{H}$ *и*

$$f(p) = \begin{cases} m(p)\mathfrak{H}, & \text{если } p \in \pi(\mathfrak{M}) \cap \omega, \\ \varnothing, & \text{если } p \in \omega \setminus \pi(\mathfrak{M}). \end{cases}$$

Доказательство. Пусть $\mathfrak{M}_1 = LF_\omega(f)$. Покажем, что $\mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{F}$. Предположим, что это неверно, и пусть G — группа минимального порядка из $\mathfrak{M}_1 \setminus \mathfrak{F}$. Тогда G монолитична, и $L = G^\mathfrak{F}$ — ее монолит. Ввиду включения $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{M}\mathfrak{H} = \mathfrak{F}$ имеем $G^\mathfrak{H} \neq 1$. Поэтому $L \subseteq G^\mathfrak{H}$. Кроме того, поскольку $G/L \in \mathfrak{F}$, имеем $(G/L)^\mathfrak{H} = G^\mathfrak{H}/L$ и, следовательно, $G^\mathfrak{H}/L \in \mathfrak{M}$.

Предположим, что $G_{\omega d} = 1$. Тогда, учитывая, что $G \in \mathfrak{M}_1$, получаем

$$G \cong G/1 = G/G_{\omega d} \in f(\omega') = m(\omega')\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{M}\mathfrak{H} = \mathfrak{F}.$$

Противоречие. Следовательно, $G_{\omega d} \neq 1$ и L является ωd-группой (L — монолит G). Пусть $p \in \pi(L) \cap \omega$. Тогда если L — неабелева группа, то, очевидно, $F_p(G) = 1$ и

$$G \cong G/1 = G/F_p(G) \in f(p) = m(p)\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{M}\mathfrak{H} = \mathfrak{F}.$$

Противоречие. Значит, L является p-группой и, так как $G/F_p(G) \in f(p) = m(p)\mathfrak{H}$ и $p \in \pi(L) \cap \omega \subseteq \pi(G^{\mathfrak{H}}) \cap \omega$, то

$$(G/F_p(G))^{\mathfrak{H}} = G^{\mathfrak{H}}F_p(G)/F_p(G) \cong G^{\mathfrak{H}}/(G^{\mathfrak{H}} \cap F_p(G)) = G^{\mathfrak{H}}/F_p(G^{\mathfrak{H}}) \in m(p).$$

Выше было показано, что $G^{\mathfrak{H}}/L \in \mathfrak{M}$. Так как L — p-группа, то из последнего для любого $q \in \big(\pi(G^{\mathfrak{H}}) \cap \omega\big)\setminus\{p\}$ имеем $F_q(G^{\mathfrak{H}}/L) = F_q(G^{\mathfrak{H}})/L$, и следовательно,

$$G^{\mathfrak{H}}/F_q(G^{\mathfrak{H}}) \cong (G^{\mathfrak{H}}/L)/(F_q(G^{\mathfrak{H}})/L) = (G^{\mathfrak{H}}/L)/F_q(G^{\mathfrak{H}}/L) \in m(q).$$

Таким образом, для любого $r \in \pi(G^{\mathfrak{H}}) \cap \omega$ имеет место $G^{\mathfrak{H}}/F_r(G^{\mathfrak{H}}) \in m(r)$. Кроме того, очевидно, $(G^{\mathfrak{H}}/L)_{\omega d} = (G^{\mathfrak{H}})_{\omega d}/L$. Поэтому

$$G^{\mathfrak{H}}/(G^{\mathfrak{H}})_{\omega d} \cong (G^{\mathfrak{H}}/L)/((G^{\mathfrak{H}})_{\omega d}/L) = (G^{\mathfrak{H}}/L)/(G^{\mathfrak{H}}/L)_{\omega d} \in m(\omega').$$

Значит, $G^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{M}$, или $G \in \mathfrak{M}\mathfrak{H} = \mathfrak{F}$. Полученное противоречие показывает, что $\mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{F}$.

Предположим теперь, что $\mathfrak{F} \nsubseteq \mathfrak{M}_1$, и G — группа минимального порядка из $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{M}_1$. Тогда группа G является монолитической, и $L = G^{\mathfrak{M}_1}$ — ее монолит. Предположим, что $G^{\mathfrak{H}} = 1$. Тогда $G \in \mathfrak{H} \subseteq m(\omega')\mathfrak{H} = f(\omega')$ и $G/F_p(G) \in \mathfrak{H} \subseteq m(p)\mathfrak{H} = f(p)$ для всех $p \in \pi(G) \cap \omega$. Следовательно, $G \in \mathfrak{M}_1$. Получили противоречие. Следовательно, $G^{\mathfrak{H}} \neq 1$. Так как $G \in \mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{H}$, то $G^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{M}$, и следовательно, $G^{\mathfrak{H}}/(G^{\mathfrak{H}})_{\omega d} \in m(\omega')$.

Поскольку при этом

$$G^{\mathfrak{H}}/(G^{\mathfrak{H}})_{\omega d} = G^{\mathfrak{H}}/(G^{\mathfrak{H}} \cap G_{\omega d}) \cong G^{\mathfrak{H}}G_{\omega d}/G_{\omega d} = (G/G_{\omega d})^{\mathfrak{H}},$$

то

$$G/G_{\omega d} \in m(\omega')\mathfrak{H} = f(\omega').$$

Далее, несложно видеть, что $\pi(G^{\mathfrak{H}}) \cap \omega = \pi(G) \cap \omega$. Действительно, последнее имеет место в силу очевидного равенства $\pi(G^{\mathfrak{H}}) \cup \pi(G/G^{\mathfrak{H}}) = \pi(G)$, а также включения $\pi(G/G^{\mathfrak{H}}) \cap \omega \subseteq \pi(G^{\mathfrak{H}})$, которое непосредственно следует из условия. Следовательно, если $p \in \pi(G) \cap \omega$, имеем

$$(G/F_p(G))^{\mathfrak{H}} = G^{\mathfrak{H}}F_p(G)/F_p(G) \cong G^{\mathfrak{H}}/(G^{\mathfrak{H}} \cap F_p(G)) = G^{\mathfrak{H}}/F_p(G^{\mathfrak{H}}) \in m(p).$$

Из последнего следует, что $G/F_p(G) \in m(p)\mathfrak{H} = f(p)$ для всех $p \in \pi(G) \cap \omega$. Значит, $G \in LF_\omega(f) = \mathfrak{M}_1$. Противоречие. Следовательно, $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{M}_1$. Таким образом, $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}_1$. Лемма доказана.

В дальнейшем для любой непустой формации $\mathfrak{F}$ мы полагаем $\mathfrak{F}^0 = (1)$, где (1) — класс (формация) единичных групп.

Лемма 10. *Пусть $\mathfrak{H}$ — произвольная τ-замкнутая формация, π — такое множество простых чисел, что $\pi(\mathfrak{H}) \cap \omega \subseteq \pi$, n — целое неотрицательное число. И пусть f — такая формационная ω-функция, что $f(q) = \mathfrak{N}_\pi^{n-1}\mathfrak{H}$ для каждого $q \in \pi \cap \omega$, $f(q) = \varnothing$ для всякого $q \in \omega \setminus \pi$ и $f(\omega') = \mathfrak{N}_{\pi\setminus\omega}\mathfrak{N}_\pi^{n-1}\mathfrak{H}$, где $n \geq 1$. Тогда формация $\mathfrak{N}_\pi^n\mathfrak{H}$ является τ-замкнутой n-кратно (разрешимо) ω-насыщенной. Кроме того, если $n \geq 1$, то $\mathfrak{N}_\pi^n\mathfrak{H} = LF_\omega(f) = CF_\omega(f)$, причем формационная функция f $l^\tau_{\omega_{n-1}}$-значна ($c^\tau_{\omega_{n-1}}$-значна). В частности, если формация $\mathfrak{H}$ такова, что $\pi(\mathfrak{H}) \cap \omega \subseteq \{p\}$ для некоторого простого числа p, то формация $\mathfrak{N}_p\mathfrak{H}$ является τ-замкнутой тотально (разрешимо) ω-насыщенной.*

Доказательство. Если $\mathfrak{H} = \varnothing$, то утверждение леммы тривиально. Поэтому в дальнейшем считаем, что $\mathfrak{H}$ — непустая формация.

Предположим, что $\pi = \varnothing$. Тогда $\mathfrak{H}$ является, очевидно, $\mathfrak{G}_{\omega'}$-формацией. Следовательно, так как $\mathfrak{G}_{\omega'} \subseteq E(\mathfrak{L}')$, где $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}^+$ — такой непустой класс абелевых простых групп, что $\omega = \pi(\mathfrak{L})$ (см. замечание 3 [27]), то ввиду примера 1 [26] и примера 1 [27] заключаем, что формация $\mathfrak{N}_\pi^n\mathfrak{H} = \mathfrak{N}_\varnothing^n\mathfrak{H} = (1)^n\mathfrak{H} = \mathfrak{H}$ является тотально (разрешимо) ω-насыщенной. (В этом случае $\mathfrak{H} = LF_\omega(f) = CF_\omega(f)$, где $f(q) = \varnothing$ для всех $q \in \omega = \omega \setminus \pi$ и $f(\omega') = \mathfrak{H} = \mathfrak{N}_{\pi\setminus\omega}\mathfrak{N}_\pi^{n-1}\mathfrak{H}$, $n \geq 1$.) Значит, поскольку $\mathfrak{H}$ τ-замкнута, в рассматриваемом случае утверждение леммы верно.

Пусть теперь $\pi \neq \varnothing$. Заметим, что поскольку для любого натурального n формация $\mathfrak{N}_\pi^n$ наследственна, а формация $\mathfrak{H}$ τ-замкнута, то ввиду леммы 11 [24] формация $\mathfrak{N}_\pi^n\mathfrak{H}$ τ-замкнута.

Индукцией по n покажем, что $\mathfrak{N}_\pi^n\mathfrak{H}$ является n-кратно (разрешимо) ω-насыщенной формацией и, кроме того, если $n \geq 1$, то $\mathfrak{N}_\pi^n\mathfrak{H} = LF_\omega(f) = CF_\omega(f)$, где f — спутник из условия леммы.

При $n = 0$ утверждение тривиально.

Пусть $n = 1$. Заметим, что согласно лемме 10 [26] и лемме 11 [27], $\mathfrak{N}_\pi = LF_\omega(m) = CF_\omega(m)$, где m — такая формационная ω-функция, что $m(q) = (1)$ для всякого $q \in \pi \cap \omega$, $m(q) = \varnothing$ для любого $q \in \omega \setminus \pi$ и $m(\omega') = \mathfrak{N}_{\pi\setminus\omega}$ (здесь мы воспользовались тем, что для произвольной нильпотентной группы G нормальная подгруппа $G_{\omega d}$ совпадает с $O_\omega(G)$ и является холловой в G; в этой связи см. также определение ω-насыщенной формации, предложенное В. А. Ведерниковым и М. М. Сорокиной [37]). Несложно также видеть, что формационная ω-функция m является минимальной. Далее, из условия следует, что $\pi\big(\mathrm{Com}(\mathfrak{H})\big) \cap \omega \subseteq \pi(\mathfrak{H}) \cap \omega \subseteq \pi = \pi(\mathfrak{N}_\pi) = \pi\big(\mathrm{Com}(\mathfrak{N}_\pi)\big)$. Следовательно, вследствие леммы 9 и леммы 4.5 [21] (см. также теорема 2 [31]) $\mathfrak{N}_\pi\mathfrak{H} = LF_\omega(f) = CF_\omega(f)$, где для формационной функции f имеет место $f(q) = m(q)\mathfrak{H} = (1)\mathfrak{H} = \mathfrak{H} = \mathfrak{N}_\pi^0\mathfrak{H}$ для каждого $q \in \pi \cap \omega$, $f(q) = \varnothing$ для всякого $q \in \omega \setminus \pi$ и $f(\omega') = m(\omega')\mathfrak{H} = \mathfrak{N}_{\pi\setminus\omega}\mathfrak{H} = \mathfrak{N}_{\pi\setminus\omega}\mathfrak{N}_\pi^0\mathfrak{H}$. Таким образом, $\mathfrak{N}_\pi\mathfrak{H}$ — (разрешимо) ω-насыщенная формация. Кроме того, поскольку формация $\mathfrak{N}_{\pi\setminus\omega}$ наследственна, а $\mathfrak{H}$ τ-замкнута, то ввиду леммы 11 [24] формация $\mathfrak{N}_{\pi\setminus\omega}\mathfrak{H}$ τ-замкнута. Следовательно, формационная ω-функция f τ-значна.

Предположим, что $n > 1$ и утверждение справедливо для $n-1$. Так как по условию $\pi(\mathfrak{H}) \cap \omega \subseteq \pi$, то

$$\pi\big(\mathrm{Com}(\mathfrak{N}_\pi^{n-1}\mathfrak{H})\big) \cap \omega \subseteq \pi(\mathfrak{N}_\pi^{n-1}\mathfrak{H}) \cap \omega \subseteq \big(\pi(\mathfrak{N}_\pi^{n-1}) \cup \pi(\mathfrak{H})\big) \cap \omega = (\pi(\mathfrak{N}_\pi^{n-1}) \cap \omega) \cup (\pi(\mathfrak{H}) \cap \omega) =$$
$$= (\pi \cap \omega) \cup (\pi(\mathfrak{H}) \cap \omega) \subseteq (\pi \cap \omega) \cup \pi = \pi = \pi(\mathfrak{N}_\pi) = \pi\big(\mathrm{Com}(\mathfrak{N}_\pi)\big).$$

Далее, применяя лемму 9 и лемму 4.5 [21], видим, что $\mathfrak{N}_\pi^n\mathfrak{H} = \mathfrak{N}_\pi(\mathfrak{N}_\pi^{n-1}\mathfrak{H}) = LF_\omega(f) = CF_\omega(f)$, где $f(q) = m(q)(\mathfrak{N}_\pi^{n-1}\mathfrak{H}) = (1)(\mathfrak{N}_\pi^{n-1}\mathfrak{H}) = \mathfrak{N}_\pi^{n-1}\mathfrak{H}$ для любого $q \in \pi \cap \omega$, $f(q) = \varnothing$ для каждого $q \in \omega \setminus \pi$ и $f(\omega') = m(\omega')(\mathfrak{N}_\pi^{n-1}\mathfrak{H}) = \mathfrak{N}_{\pi\setminus\omega}(\mathfrak{N}_\pi^{n-1}\mathfrak{H}) = \mathfrak{N}_{\pi\setminus\omega}\mathfrak{N}_\pi^{n-1}\mathfrak{H}$. По индуктивному предположению формация $\mathfrak{N}_\pi^{n-1}\mathfrak{H}$ — $(n-1)$-кратно (разрешимо) ω-насыщенна. Кроме того, так как формация $\mathfrak{N}_{\pi\setminus\omega}$ является, очевидно, тотально (разрешимо) ω-насыщенной, то ввиду следствия 9 [26] и следствия 4 [27] формация $\mathfrak{N}_{\pi\setminus\omega}(\mathfrak{N}_\pi^{n-1}\mathfrak{H}) = \mathfrak{N}_{\pi\setminus\omega}\mathfrak{N}_\pi^{n-1}\mathfrak{H}$ — $(n-1)$-кратно (разрешимо) ω-насыщенна. Следовательно, $\mathfrak{N}_\pi^n\mathfrak{H}$ — n-кратно (разрешимо) ω-насыщенная формация. Кроме того, поскольку формация $\mathfrak{N}_{\pi\setminus\omega}$ наследственна, а $\mathfrak{N}_\pi^{n-1}\mathfrak{H}$ τ-замкнута (см. выше), то ввиду леммы 11 [24] формация $\mathfrak{N}_{\pi\setminus\omega}\mathfrak{N}_\pi^{n-1}\mathfrak{H}$ является τ-замкнутой. Таким образом, все значения формационной ω-функции f являются τ-замкнутыми $(n-1)$-кратно (разрешимо) ω-насыщенными формациями.

Если для формации $\mathfrak{H}$ имеет место $\pi(\mathfrak{H}) \cap \omega \subseteq \{p\}$ для некоторого простого p, то, полагая $\pi = \{p\}$, ввиду доказанного получаем, что для любого $m \geq 1$ формация $\mathfrak{N}_p\mathfrak{H} = (\mathfrak{N}_p)^m\mathfrak{H}$ является τ-замкнутой m-кратно (разрешимо) ω-насыщенной. Следовательно, $\mathfrak{N}_p\mathfrak{H}$ — τ-замкнутая тотально (разрешимо) ω-насыщенная формация. Лемма доказана.

Следствие 4. *Пусть $\mathfrak{H}$ — произвольная τ-замкнутая формация. Тогда для любого простого p формация $\mathfrak{N}_p\mathfrak{H}$ является τ-замкнутой тотально (разрешимо) p-насыщенной.*

Доказательство следующей леммы аналогично доказательству леммы 10 и использует в своем рассуждении, в отличие от последнего, только пример 1 [27], лемму 11 [24], лемму 11 [27], лемму 4.5 [21] (см. также теорема 2 [31]) и следствие 4 [27].

Лемма 11. *Пусть $\mathfrak{H}$ — произвольная τ-замкнутая формация, π — такое множество простых чисел, что $\pi\big(\mathrm{Com}(\mathfrak{H})\big) \cap \omega \subseteq \pi$, n — целое неотрицательное число. И пусть f — такой ω-композиционный спутник, что $f(q) = \mathfrak{N}_\pi^{n-1}\mathfrak{H}$ для каждого $q \in \pi \cap \omega$, $f(q) = \varnothing$ для всякого $q \in \omega \setminus \pi$ и $f(\omega') = \mathfrak{N}_{\pi\setminus\omega}\mathfrak{N}_\pi^{n-1}\mathfrak{H}$, где $n \geq 1$. Тогда формация $\mathfrak{N}_\pi^n\mathfrak{H}$ является τ-замкнутой n-кратно ω-композиционной. Кроме того, если $n \geq 1$, то $\mathfrak{N}_\pi^n\mathfrak{H} = CF_\omega(f)$, причем спутник f $c^\tau_{\omega_{n-1}}$-значен. В частности, если формация $\mathfrak{H}$ такова, что $\pi\big(\mathrm{Com}(\mathfrak{H})\big) \cap \omega \subseteq \{p\}$ для некоторого простого числа p, то формация $\mathfrak{N}_p\mathfrak{H}$ является τ-замкнутой тотально ω-композиционной.*

Лемма 12 ([12], лемма 3.1). *Пусть $\mathfrak{H}$ — произвольная τ-замкнутая формация, π — такое множество простых чисел, что $\pi\big(\mathrm{Com}(\mathfrak{H})\big) \cap \omega \subseteq \pi$. Тогда формация $\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{H}$ является τ-замкнутой тотально ω-композиционной. Кроме того, $\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{H} = CF_\omega(f)$, где f — такой (канонический) ω-композиционный спутник, что $f(q) = \mathfrak{S}_\pi\mathfrak{H}$ для любого $q \in \pi \cap \omega$, $f(q) = \varnothing$ для каждого $q \in \omega \setminus \pi$ и $f(\omega') = \mathfrak{S}_\pi\mathfrak{H}$.*

Доказательство. Поскольку для $\mathfrak{H} = \varnothing$ утверждение леммы тривиально, в дальнейшем считаем, что формация $\mathfrak{H}$ не является пустой.

Если $\pi = \varnothing$, то $\mathfrak{H}$ является, очевидно, $E(\mathfrak{L}')$-формацией, где $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}^+$ — такой непустой класс абелевых простых групп, что $\omega = \pi(\mathfrak{L})$ (см. замечание 3 [27]). Следовательно, ввиду примера 1 [27] $\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{H} = \mathfrak{S}_\varnothing\mathfrak{H} = (1)\mathfrak{H} = \mathfrak{H}$ — тотально ω-композиционная формация, поскольку $\mathfrak{H} = CF_\omega(f)$, где $f(q) = \varnothing$ для каждого $q \in \omega = \omega \setminus \pi$ и $f(\omega') = \mathfrak{H}$. Теперь вследствие τ-замкнутости $\mathfrak{H}$ заключаем, что утверждение леммы в данном случае верно.

Предположим, что $\pi \neq \varnothing$. Покажем, что формация $\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{H}$ является тотально разрешимо ω-насыщенной. Пусть $\mathfrak{X} = (Z_p \mid p \in \pi)$, где Z_p — группа простого порядка p. Тогда, очевидно, $\mathfrak{S}_\pi = E(\mathfrak{X})$. Заметим также, что $\pi\big(\mathrm{Com}(\mathfrak{X})\big) = \pi\big(\mathrm{Com}(\mathfrak{S}_\pi)\big) = \pi$. В таком случае ввиду леммы 2.6 [12] $\mathfrak{S}_\pi = CF_\omega(m)$, где $m(q) = \mathfrak{S}_\pi$ для любого $q \in \pi \cap \omega$, $m(q) = \varnothing$ для каждого $q \in \omega \setminus \pi$ и $m(\omega') = \mathfrak{S}_\pi$. Несложно видеть, что спутник m является каноническим; более того, ввиду насыщенности формации $\mathfrak{S}_\pi$ из следствия 2 вытекает, что также имеет место $\mathfrak{S}_\pi = LF_\omega(m)$. Далее, из условия следует, что $\pi\big(\mathrm{Com}(\mathfrak{H})\big) \cap \omega \subseteq \pi = \pi\big(\mathrm{Com}(\mathfrak{S}_\pi)\big)$. Применяя теперь лемму 4.5 [21], заключаем, что формация $\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{H}$ имеет такой ω-композиционный спутник f (очевидно, канонический), что $f(q) = m(q)\mathfrak{H} = \mathfrak{S}_\pi\mathfrak{H}$ для каждого $q \in \pi \cap \omega$, $f(q) = \varnothing$ для всякого $q \in \omega \setminus \pi$ и

$f(\omega') = m(\omega')\mathfrak{H} = \mathfrak{S}_\pi\mathfrak{H}$. Поэтому формация $\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{H}$ является n-кратно разрешимо ω-насыщенной для любого натурального n. Следовательно, $\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{H}$ — тотально разрешимо ω-насыщенная формация.

Поскольку формация $\mathfrak{S}_\pi$ наследственна, а $\mathfrak{H}$ τ-замкнута, то ввиду леммы 11 [24] формация $\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{H}$ является τ-замкнутой. Таким образом, $\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{H}$ — τ-замкнутая тотально ω-композиционная формация, и, кроме того, $\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{H} = LF_\omega(f) = CF_\omega(f)$, где f — формационная функция из условия леммы. Лемма доказана.

Предложение 5 (см. [3], лемма 11). *Пусть $\mathfrak{H}$ — произвольная τ-замкнутая формация, π — такое множество простых чисел, что $\pi(\mathfrak{H}) \cap \omega \subseteq \pi$. Тогда формация $\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{H}$ является τ-замкнутой тотально (разрешимо) ω-насыщенной. Кроме того, $\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{H} = LF_\omega(f) = CF_\omega(f)$, где f — такая (каноническая) формационная ω-функция, что $f(q) = \mathfrak{S}_\pi\mathfrak{H}$ для любого $q \in \pi \cap \omega$, $f(q) = \varnothing$ для всякого $q \in \omega \setminus \pi$ и $f(\omega') = \mathfrak{S}_\pi\mathfrak{H}$.*

Доказательство. Ввиду тривиальности утверждения для $\mathfrak{H} = \varnothing$, считаем, что $\mathfrak{H}$ — непустая формация. Далее, предполагая, как и при доказательстве леммы 10, что $\pi = \varnothing$, видим, что $\mathfrak{H}$ является $\mathfrak{G}_{\omega'}$-формацией. Поэтому, учитывая включение $\mathfrak{G}_{\omega'} \subseteq E(\mathfrak{L}')$, где $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}^+$ — такой непустой класс абелевых простых групп, что $\omega = \pi(\mathfrak{L})$ (см. замечание 3 [27]), вследствие примера 1 [26] и примера 1 [27] заключаем, что формация $\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{H} = \mathfrak{S}_\varnothing\mathfrak{H} = (1)\mathfrak{H} = \mathfrak{H}$ является тотально (разрешимо) ω-насыщенной. (В данном случае $\mathfrak{H} = LF_\omega(f) = CF_\omega(f)$, где $f(q) = \varnothing$ для всякого $q \in \omega = \omega \setminus \pi$ и $f(\omega') = \mathfrak{H}$.) Ввиду τ-замкнутости формации $\mathfrak{H}$ видим, что в рассматриваемом случае утверждение леммы верно.

Пусть теперь $\pi \neq \varnothing$. Заметим, что так как формация $\mathfrak{S}_\pi$ наследственна, а $\mathfrak{H}$ τ-замкнута, то ввиду леммы 11 [24] формация $\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{H}$ является τ-замкнутой.

Покажем, что $\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{H}$ является тотально (разрешимо) ω-насыщенной формацией, и, кроме того, $\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{H} = LF_\omega(f) = CF_\omega(f)$, где f — формационная функция из условия леммы.

Из докательства леммы 12 следует, что $\mathfrak{S}_\pi = LF_\omega(m) = CF_\omega(m)$, где m — такая (каноническая) формационная ω-функция, что $m(q) = \mathfrak{S}_\pi$ для любого $q \in \pi \cap \omega$, $m(q) = \varnothing$ для всех $q \in \omega \setminus \pi$ и $m(\omega') = \mathfrak{S}_\pi$. Кроме того, из условия вытекает, что $\pi\big(\mathrm{Com}(\mathfrak{H})\big) \cap \omega \subseteq \pi(\mathfrak{H}) \cap \omega \subseteq \pi = \pi(\mathfrak{S}_\pi) = \pi\big(\mathrm{Com}(\mathfrak{S}_\pi)\big)$. Следовательно, ввиду леммы 9 и леммы 4.5 [21] $\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{H} = LF_\omega(f) = CF_\omega(f)$, где для формационной функции f (очевидно, канонической) имеет место $f(q) = m(q)\mathfrak{H} = \mathfrak{S}_\pi\mathfrak{H}$ для каждого $q \in \pi \cap \omega$, $f(q) = \varnothing$ для всякого $q \in \omega \setminus \pi$ и $f(\omega') = m(\omega')\mathfrak{H} = \mathfrak{S}_\pi\mathfrak{H}$. Поэтому формация $\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{H}$ является n-кратно (разрешимо) ω-насыщенной для любого натурального n. Следовательно, $\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{H}$ — тотально (разрешимо) ω-насыщенная формация. Предложение доказано.

Пример 1. Пусть $\mathfrak{H}$ — такая непустая τ-замкнутая формация, что $\big(\pi(\mathfrak{H}) \setminus \pi\big(\mathrm{Com}(\mathfrak{H})\big)\big) \cap \omega \neq \varnothing$ и $p \in \big(\pi(\mathfrak{H}) \setminus \pi\big(\mathrm{Com}(\mathfrak{H})\big)\big) \cap \omega$ (например, $\mathfrak{H} = \mathrm{form}(A)$, где A — простая неабелева группа такая, что $p \in \pi(A) \cap \omega$, $\tau \leq \tau_{sn}$). И пусть π — такое множество простых чисел, что $\pi\big(\mathrm{Com}(\mathfrak{H})\big) \cap \omega \subseteq \pi$, причем $p \notin \pi$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Тогда формация $\mathfrak{N}_\pi^n\mathfrak{H} \in c_{\omega_n}^\tau \setminus l^\omega$, а формация $\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{H} \in c_{\omega_\infty}^\tau \setminus l^\omega$. Действительно, ввиду леммы 11 формация $\mathfrak{N}_\pi^n\mathfrak{H} \in c_{\omega_n}^\tau$, а ввиду леммы 12 формация $\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{H} \in c_{\omega_\infty}^\tau$. Предположим, что $\mathfrak{N}_\pi^n\mathfrak{H} \in l^\omega$. Тогда, в частности, так как $p \in \omega$, формация $\mathfrak{N}_\pi^n\mathfrak{H}$ является p-насыщенной. Поскольку $p \notin \pi = \pi(\mathfrak{N}_\pi^n)$ и $\mathfrak{N}_\pi^n$ — насыщенная формация, то из последнего вследствие теоремы 8 [26] следует, что формация $\mathfrak{H}$ является p-насыщенной. Учитывая, что $\mathfrak{H} \neq \varnothing$ и $p \in \pi(\mathfrak{H})$, ввиду теоремы 1 [26] заключаем, что $\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{H}$, и следовательно, $p \in \pi\big(\mathrm{Com}(\mathfrak{H})\big)$; противоречие. Значит, $\mathfrak{N}_\pi^n\mathfrak{H} \notin l^\omega$. Аналогично доказывается, что формация $\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{H} \notin l^\omega$. Таким образом, формация $\mathfrak{N}_\pi^n\mathfrak{H} \in c_{\omega_n}^\tau \setminus l^\omega$, а формация $\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{H} \in c_{\omega_\infty}^\tau \setminus l^\omega$. Из последнего, в частности, следует, что $\mathfrak{N}_\pi^n\mathfrak{H} \in c_{\omega_n}^\tau \setminus l_{\omega_m}^{\tau_1}$, а также $\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{H} \in c_{\omega_\infty}^\tau \setminus l_{\omega_m}^{\tau_1}$, где τ_1 — произвольный подгрупповой функтор, $m \in \mathbb{N}$ или $m = \infty$.

В связи с рассмотрением примера 1 укажем на формацию $\mathfrak{N}^*$ всех квазинильпотентных групп, которая является разрешимо насыщенной, однако не является насыщенной (см. пример 1.2.27 [1], с. 27). Напомним, что группа G называется *квазинильпотентной*, если для любого главного фактора H/K группы G каждый автоморфизм, индуцируемый произвольным элементом из G, является внутренним, или, что равносильно, если для любого главного фактора H/K группы G справедливо равенство $C_G(H/K)H = G$ (см. определение 13.2 [22], с. 124; [11], с. 155). Из последнего, в частности, следует, что $\mathfrak{N}^* = CF(f)$, где f — такой композиционный спутник, что $f(p) = (1)$ (см. также [32]).

3. Индексы ω-локальности и ω-композиционности: определения, основные свойства и примеры. Для дальнейшего изложения нам понадобятся следующие определения.

Определение 1. Для произвольной формации $\mathfrak{F}$ *индексом ω-локальности* назовем такое неотрицательное целое число n, для которого формация $\mathfrak{F}$ является n-кратно ω-насыщенной, но не является $(n+1)$-кратно ω-насыщенной. Если же формация $\mathfrak{F}$ является тотально ω-насыщенной, то будем говорить, что $\mathfrak{F}$ имеет *бесконечный индекс ω-локальности.*

Индекс ω-локальности формации $\mathfrak{F}$ будем обозначать через $\mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{F})$. При этом если $\omega = \{p\}$, то вместо символа $\mathrm{Ind}_{\{p\}_l}(\mathfrak{F})$ мы условимся использовать символ $\mathrm{Ind}_{p_l}(\mathfrak{F})$. Если же $\omega = \mathbb{P}$ — множество всех простых чисел, то вместо символа $\mathrm{Ind}_{\mathbb{P}_l}(\mathfrak{F})$ будем использовать символ $\mathrm{Ind}_l(\mathfrak{F})$ и говорить просто об *индексе локальности*, что согласуется с введенным в гл. 1 книги [6] определением (см. [6], с. 27).

Аналогично введем следующее понятие *индекса ω-композиционности* формации $\mathfrak{F}$.

Определение 2. Для всякой формации $\mathfrak{F}$ *индексом ω-композиционности* назовем такое неотрицательное целое число n, для которого формация $\mathfrak{F}$ является n-кратно ω-композиционной, но не является

$(n+1)$-кратно ω-композиционной. Для тотально ω-композиционной формации $\mathfrak{F}$ будем считать, что $\mathfrak{F}$ имеет *бесконечный индекс ω-композиционности.*

Индекс ω-композиционности формации $\mathfrak{F}$ условимся обозначать через $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{F})$.

Обозначения для индекса ω-композиционности формации $\mathfrak{F}$ в случаях, когда $\omega = \{p\}$ и $\omega = \mathbb{P}$, как и его название в последнем случае, совершенно аналогичны рассмотренным выше для индекса ω-локальности формации $\mathfrak{F}$.

Следующая лемма обобщает лемму 1.3.1 [6], с. 27 на случай частично насыщенных формаций.

Лемма 13. *Пусть $\mathfrak{F} = LF_\omega(F)$, где спутник F является каноническим, и $n \in \mathbb{N}$. Тогда в том и только в том случае* $\mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{F}) = n$, *когда найдется такое $p \in \pi(\mathfrak{F}) \cap \omega$, что* $\mathrm{Ind}_{\omega_l}\big(F(p)\big) = n-1$, *а для всех $q \in \big(\pi(\mathfrak{F}) \cap \omega\big) \setminus \{p\}$ имеет место* $\mathrm{Ind}_{\omega_l}\big(F(q)\big) \geq n-1$.

Доказательство. Необходимость. Предположим, что $\mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{F}) = n$. Тогда $\mathfrak{F}$ является l_n^ω-формацией, и ввиду леммы 11 [26] спутник F l_{n-1}^ω-значен. Следовательно, $\mathrm{Ind}_{\omega_l}\big(F(q)\big) \geq n-1$ для любого $q \in \pi(\mathfrak{F}) \cap \omega$. С другой стороны, условие $\mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{F}) = n$ влечет существование такого простого $p \in \pi(\mathfrak{F}) \cap \omega$, что $\mathrm{Ind}_{\omega_l}\big(F(p)\big) \leq n-1$. (Последнее имеет место также для любого ω-локального спутника формации $\mathfrak{F}$.) Следовательно, $\mathrm{Ind}_{\omega_l}\big(F(p)\big) = n-1$.

Достаточность. Предположим, что $\mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{F}) > n$. Тогда в силу доказанного выше $\mathrm{Ind}_{\omega_l}\big(F(q)\big) \geq \mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{F}) - 1 \geq n$ для каждого $q \in \pi(\mathfrak{F}) \cap \omega$. Полученное противоречие показывает, что $\mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{F}) = n$. Лемма доказана.

Аналогичные рассуждения (с использованием теоремы 3 [27] вместо леммы 11 [26]) приводят к следующему утверждению.

Лемма 14. *Пусть $\mathfrak{F} = CF_\omega(F)$, где спутник F является каноническим, и $n \in \mathbb{N}$. Тогда в том и только в том случае* $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{F}) = n$, *когда найдется такое $p \in \pi\big(\mathrm{Com}(\mathfrak{F})\big) \cap \omega$, что* $\mathrm{Ind}_{\omega_c}\big(F(p)\big) = n-1$, *а для всех $q \in \big(\pi\big(\mathrm{Com}(\mathfrak{F})\big) \cap \omega\big) \setminus \{p\}$ имеет место* $\mathrm{Ind}_{\omega_c}\big(F(q)\big) \geq n-1$.

Лемма 15. *Пусть $\mathfrak{F}$ — произвольная формация. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) если $\mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{F}) < \infty$, *то* $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{F}) \geq \mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{F})$. *В частности, если $\mathfrak{F}$ является l_n^ω-формацией и* $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{F}) = n$, *то* $\mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{F}) = n$;

2) если $\mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{F}) = \infty$, *то* $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{F}) = \infty$.

Доказательство. 1) Пусть $\mathfrak{H}$ — произвольная формация и $\mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{H}) = m$, где $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Тогда $\mathfrak{H}$ является l_m^ω-формацией. Учитывая следствие 1 (для тривиального подгруппового функтора τ), а также равенства $l_0^\omega = c_0^\omega = \mathcal{F}$, видим, что $\mathfrak{H}$ является также c_m^ω-формацией. Последнее ввиду определения индекса ω-композиционности влечет $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{H}) \geq m = \mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{H})$. Отметим, что в рассматриваемом случае, как следует из примера 1, $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{H})$ может быть равен ∞ (см. также пример 3). Понятно, что если $\mathfrak{H} \in l_n^\omega$ и $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{H}) = n$, то $\mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{H}) \geq n$ и, ввиду доказанного, $\mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{H}) \leq n$, что влечет $\mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{H}) = n$.

2) Данное утверждение следует из утверждения 1) и определений (см. также следствие 2). Лемма доказана.

Непосредственно из лемм 5 и 6 и определений вытекает следующая

Лемма 16. *Предположим, что $\mathfrak{F}$ — формация и $p \in \mathbb{P}$. Тогда имеют место следующие утверждения:*

1) если $\mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{F}) < \infty$, *то* $\mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{N}_p\mathfrak{F}) \geq \mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{F})$. *Если* $\mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{F}) = \infty$, *то* $\mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{N}_p\mathfrak{F}) = \infty$;

2) если $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{F}) < \infty$, *то* $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{N}_p\mathfrak{F}) \geq \mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{F})$. *Если* $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{F}) = \infty$, *то* $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{N}_p\mathfrak{F}) = \infty$.

Отметим, что в предыдущей лемме в случае, когда $\mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{F}) < \infty$ ($\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{F}) < \infty$), значение $\mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{N}_p\mathfrak{F})$ (соответственно $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{N}_p\mathfrak{F})$) может быть равным ∞. В самом деле, с учетом теоремы 1 [27], леммы 15 и леммы 5 для формации $\mathfrak{F} = \mathfrak{A}_p\mathfrak{N}_q$, где $\mathfrak{A}_p = \mathfrak{N}_p \cap \mathfrak{A}$ — формация всех абелевых p-групп, $q \in \mathbb{P} \setminus \{p\} = p'$, причем $\omega \ni p$, имеем $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{F}) = \mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{F}) = 0$, но в то же время $\mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{N}_p\mathfrak{F}) = \mathrm{Ind}_{\omega_l}\big(\mathfrak{N}_p(\mathfrak{A}_p\mathfrak{N}_q)\big) = \mathrm{Ind}_{\omega_l}\big((\mathfrak{N}_p\mathfrak{A}_p)\mathfrak{N}_q\big) = \mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{N}_p\mathfrak{N}_q) = \mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{N}_p\mathfrak{N}_q) = \infty$.

Замечание 1. Предположим, что $\mathfrak{F}$ является l_ω^τ-формацией (c_ω^τ-формацией) и $|\pi(\mathfrak{F}) \cap \omega| \leq 1$ (соответственно $|\pi\big(\mathrm{Com}(\mathfrak{F})\big) \cap \omega| \leq 1$), где τ — произвольный подгрупповой функтор. Тогда $\mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{F}) = \infty$ (соответственно $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{F}) = \infty$). Действительно, если $|\pi(\mathfrak{F}) \cap \omega| = 0$ (соответственно $|\pi\big(\mathrm{Com}(\mathfrak{F})\big) \cap \omega| = 0$), то $\pi(\mathfrak{F}) \cap \omega = \varnothing$ и $\mathfrak{F} \in \mathfrak{G}_{\omega'}$ (соответственно $\pi\big(\mathrm{Com}(\mathfrak{F})\big) \cap \omega = \varnothing$ и $\mathfrak{F} \in E(\mathfrak{L}')$, где $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}^+$ — такой непустой класс абелевых простых групп, что $\omega = \pi(\mathfrak{L})$). Следовательно, ввиду примера 1 [26] (соответственно замечания 3 [27] и примера 1 [27]) формация $\mathfrak{F}$ является тотально ω-насыщенной (соответственно тотально ω-композиционной). Пусть теперь $|\pi(\mathfrak{F}) \cap \omega| = 1$ (соответственно $|\pi\big(\mathrm{Com}(\mathfrak{F})\big) \cap \omega| = 1$). Тогда $\pi(\mathfrak{F}) \cap \omega = \{p\}$ (соответственно $\pi\big(\mathrm{Com}(\mathfrak{F})\big) \cap \omega = \{p\}$) для некоторого простого $p \in \omega$. Учитывая замечание 1 [26] и лемму 1.5.5 [1], с. 55] (соответственно замечание 1 [27] и лемму 1.6.2 [1], с. 66; см. также доказательство леммы 2.1 [40]), видим, что формация $\mathfrak{F}$ имеет такой канонический ω-локальный (соответственно ω-композиционный) τ-значный спутник F, что $F(q) = \mathfrak{N}_q\mathfrak{F}(F_q)$ (соответственно $F(q) = \mathfrak{N}_q\mathfrak{F}(C^q)$) для любого $q \in \omega$ и $F(\omega') = \mathfrak{F}$. Из условия следует, что $\mathfrak{F}(F_q) \neq \varnothing$ (соответственно $\mathfrak{F}(C^q) \neq \varnothing$), если $q = p$, и $\mathfrak{F}(F_q) = \varnothing$ для каждого $q \in \omega \setminus \big(\pi(\mathfrak{F}) \cap \omega\big) = \omega \setminus \{p\}$ (соответственно $\mathfrak{F}(C^q) = \varnothing$ для каждого $q \in \omega \setminus \big(\pi\big(\mathrm{Com}(\mathfrak{F})\big) \cap \omega\big) = \omega \setminus \{p\}$). Таким образом, спутник F таков, что $F(p) = \mathfrak{N}_p\mathfrak{F}(F_p) \neq \varnothing$ (соответственно $F(p) = \mathfrak{N}_p\mathfrak{F}(C^p) \neq \varnothing$), $F(q) = \varnothing$ для любого $q \in \omega \setminus \{p\}$ и $F(\omega') = \mathfrak{F}$. Так как $\mathfrak{F}(F_p) \subseteq \mathfrak{F}$ (соответственно $\mathfrak{F}(C^p) \subseteq \mathfrak{F}$), то, снова учитывая условие, имеем $\pi\big(\mathfrak{F}(F_p)\big) \cap \omega \subseteq \pi(\mathfrak{F}) \cap \omega = \{p\}$ (соответственно $\pi\big(\mathrm{Com}(\mathfrak{F}(C^p))\big) \cap \omega \subseteq \pi\big(\mathrm{Com}(\mathfrak{F})\big) \cap \omega = \{p\}$). Применяя теперь лемму 10) (соответственно лемму 11), видим, что $\mathfrak{N}_p\mathfrak{F}(F_p) = F(p) \in l^{\omega}_{\infty}$ (соответственно $\mathfrak{N}_p\mathfrak{F}(C^p) = F(p) \in c^{\omega}_{\infty}$). Поэтому все значения спутника F являются $l^{\tau}_{\omega_\infty}$-формациями (соответственно $c^{\tau}_{\omega_\infty}$-формациями), и следовательно, $\mathfrak{F}$ является $l^{\tau}_{\omega_\infty}$-формацией (соответственно $c^{\tau}_{\omega_\infty}$-формацией). Итак, в каждом из рассмотренных случаев $\mathfrak{F} \in l^{\tau}_{\omega_\infty}$ (соответственно $\mathfrak{F} \in c^{\tau}_{\omega_\infty}$). Последнее, как несложно видеть, равносильно равенству $\mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{F}) = \infty$ (соответственно $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{F}) = \infty$). Отметим, что в случае, когда $\mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{F}) = \infty$, ввиду леммы 15 также имеем $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{F}) = \infty$.

Замечание 2. Для любого простого числа p, натурального n и всякого подгруппового функтора τ имеют место следующие равенства: $l^{\tau}_{p_n} = l^{\tau}_{p} = l^{\tau}_{p_\infty}$, $c^{\tau}_{p_n} = c^{\tau}_{p} = c^{\tau}_{p_\infty}$. В частности, $l^{\tau}_{p_m} = l^{\tau}_{p_n}$, $c^{\tau}_{p_m} = c^{\tau}_{p_n}$ для любых натуральных чисел m, n и произвольного подгруппового функтора τ. В самом деле, пусть $\mathfrak{F}$ — произвольная l^{τ}_{p}-формация (соответственно c^{τ}_{p}-формация). Полагая в замечании 1 $\omega = \{p\}$, видим, что $\mathfrak{F}$ является $l^{\tau}_{p_\infty}$-формацией (соответственно $c^{\tau}_{p_\infty}$-формацией), и следовательно, $l^{\tau}_{p} \subseteq l^{\tau}_{p_\infty}$ (соответственно $c^{\tau}_{p} \subseteq c^{\tau}_{p_\infty}$). Поскольку в силу определений для каждого натурального n справедливы включения $l^{\tau}_{p_\infty} \subseteq l^{\tau}_{p_n} \subseteq l^{\tau}_{p_1} = l^{\tau}_{p}$ (соответственно $c^{\tau}_{p_\infty} \subseteq c^{\tau}_{p_n} \subseteq c^{\tau}_{p_1} = c^{\tau}_{p}$), заключаем, что $l^{\tau}_{p_n} = l^{\tau}_{p} = l^{\tau}_{p_\infty}$ (соответственно $c^{\tau}_{p_n} = c^{\tau}_{p} = c^{\tau}_{p_\infty}$). Кроме того, из последних равенств и включения $l^p \subseteq c^p$ (см. также лемма 15) следует, что для произвольной формации $\mathfrak{F}$ имеет место $\mathrm{Ind}_{p_l}(\mathfrak{F}) = 0$, если $\mathfrak{F} \notin l^p$, и $\mathrm{Ind}_{p_l}(\mathfrak{F}) = \mathrm{Ind}_{p_c}(\mathfrak{F}) = \infty$, если $\mathfrak{F} \in l^p$ (соответственно $\mathrm{Ind}_{p_c}(\mathfrak{F}) = \mathrm{Ind}_{p_l}(\mathfrak{F}) = 0$, если $\mathfrak{F} \notin c^p$, и $\mathrm{Ind}_{p_c}(\mathfrak{F}) = \infty$, если $\mathfrak{F} \in c^p$).

Лемма 17 (см. [10]; [11], лемма 7.16). *Пусть $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ — формации, причем $\mathfrak{M} \neq \varnothing$. Тогда если формация $\mathfrak{M}\mathfrak{H}$ является p-насыщенной (p-композиционной) для некоторого простого p и $p \notin \pi(\mathrm{Com}(\mathfrak{M}))$, то и формация $\mathfrak{H}$ является p-насыщенной (соответственно p-композиционной).*

Доказательство. Действительно, утверждение тривиально, если $\mathfrak{H} = \varnothing$. Предположим, что $\mathfrak{H} \neq \varnothing$, и пусть $G/O_p(\Phi(G)) \in \mathfrak{H}$ (или $G/\Phi(O_p(G)) \in \mathfrak{H}$). Тогда, так как $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{M}\mathfrak{H}$, то $G/O_p(\Phi(G)) \in \mathfrak{M}\mathfrak{H}$ (соответственно $G/\Phi(O_p(G)) \in \mathfrak{M}\mathfrak{H}$), и в силу p-насыщенности (p-композиционности соответственно) формации $\mathfrak{M}\mathfrak{H}$ заключаем, что $G \in \mathfrak{M}\mathfrak{H}$. Последнее влечет $G^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{M}$. С другой стороны, поскольку $G/O_p(\Phi(G)) \in \mathfrak{H}$ (соответственно $G/\Phi(O_p(G)) \in \mathfrak{H}$), то $G^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{N}_p$. Таким образом, $G^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}_p$. По условию $p \notin \pi(\mathrm{Com}(\mathfrak{M}))$. Следовательно, $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}_p = (1)$, и мы получаем, что $G^{\mathfrak{H}} = 1$, т. е. $G \in \mathfrak{H}$. Таким образом, формация $\mathfrak{H}$ является p-насыщенной (p-композиционной). Лемма доказана.

Непосредственно из леммы 17 и замечания 1 [27] вытекает

Следствие 5. *Пусть $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ — формации, причем $\mathfrak{M} \neq \varnothing$. Тогда если формация $\mathfrak{M}\mathfrak{H}$ является p-композиционной для некоторого простого p и $p \notin \pi(\mathrm{Com}(\mathfrak{M}))$, то $\mathfrak{N}_p\mathfrak{H}(C^p) \subseteq \mathfrak{H}$.*

Следующее утверждение является простым следствием леммы 17, а также лемм 5 и 6.

Утверждение 4. *Пусть $\mathfrak{F}$ — произвольная формация, $p \in \mathbb{P}$. Тогда в том и только в том случае для любого $q \in p' = \mathbb{P} \setminus \{p\}$ формация $\mathfrak{N}_q\mathfrak{F}$ является p-насыщенной (p-композиционной), когда p-насыщенной (соответственно p-композиционной) является формация $\mathfrak{F}$.*

Из утверждения 4 с учетом замечания 2 получаем следующий результат.

Следствие 6. *Пусть $\mathfrak{F}$ — произвольная формация и $p \in \mathbb{P}$. Тогда для каждого $q \in p' = \mathbb{P} \setminus \{p\}$ имеют место равенства $\mathrm{Ind}_{p_l}(\mathfrak{N}_q\mathfrak{F}) = \mathrm{Ind}_{p_l}(\mathfrak{F})$, $\mathrm{Ind}_{p_c}(\mathfrak{N}_q\mathfrak{F}) = \mathrm{Ind}_{p_c}(\mathfrak{F})$.*

Замечание 3. Если для некоторого простого p равенство $\mathrm{Ind}_{p_l}(\mathfrak{N}_q\mathfrak{F}) = \mathrm{Ind}_{p_l}(\mathfrak{F})$ (равенство $\mathrm{Ind}_{p_c}(\mathfrak{N}_q\mathfrak{F}) = \mathrm{Ind}_{p_c}(\mathfrak{F})$) имеет место для каждой формации $\mathfrak{F}$, то необходимо $q \in p'$. Действительно, если $q = p$, то ввиду следствия 4 для всякой формации $\mathfrak{F}$ имеем $\mathrm{Ind}_{p_l}(\mathfrak{N}_p\mathfrak{F}) = \mathrm{Ind}_{p_c}(\mathfrak{N}_p\mathfrak{F}) = \infty$. С другой стороны, для любой не p-композиционной формации $\mathfrak{F}$ (например, в случае, когда $\mathfrak{F} = \mathfrak{A}$, где $\mathfrak{A}$ — формация всех абелевых групп) получаем $\mathrm{Ind}_{p_c}(\mathfrak{F}) = \mathrm{Ind}_{p_l}(\mathfrak{F}) = 0$. Поэтому равенство $\mathrm{Ind}_{p_l}(\mathfrak{N}_p\mathfrak{F}) = \mathrm{Ind}_{p_l}(\mathfrak{F})$ (соответственно равенство $\mathrm{Ind}_{p_c}(\mathfrak{N}_p\mathfrak{F}) = \mathrm{Ind}_{p_c}(\mathfrak{F})$) в общем случае неверно, откуда и получаем требуемое.

Следствие 7. *Пусть $|\omega| > 1$ и $\mathfrak{F}$ — произвольная формация. Тогда в том и только в том случае существуют такие различные простые q, $r \in \omega$, что имеет место $\mathrm{Ind}_{q_c}(\mathfrak{F}) = \mathrm{Ind}_{r_c}(\mathfrak{F}) = 0$, когда для любого $t \in \mathbb{P}$ выполнено $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{N}_t\mathfrak{F}) = 0$.*

Доказательство. Необходимость. Предположим, что $\mathrm{Ind}_{q_c}(\mathfrak{F}) = \mathrm{Ind}_{r_c}(\mathfrak{F}) = 0$ для некоторых q, $r \in \omega$. Тогда ввиду следствия 6 условие $\mathrm{Ind}_{q_c}(\mathfrak{F}) = 0$ влечет для любого $u \in q' = \mathbb{P} \setminus \{q\}$ выполнение равенства $\mathrm{Ind}_{q_c}(\mathfrak{N}_u\mathfrak{F}) = 0$. Аналогично из $\mathrm{Ind}_{r_c}(\mathfrak{F}) = 0$ следует, что для каждого $v \in r' = \mathbb{P} \setminus \{r\}$ имеет место $\mathrm{Ind}_{r_c}(\mathfrak{N}_v\mathfrak{F}) = 0$. Тогда, как несложно видеть, если $t \in \mathbb{P} = q' \cup r'$ $(q \neq r)$, то по крайней мере один из индексов $\mathrm{Ind}_{q_c}(\mathfrak{N}_t\mathfrak{F})$ или $\mathrm{Ind}_{r_c}(\mathfrak{N}_t\mathfrak{F})$ равен 0. Из последнего ввиду включения $\{q, r\} \subseteq \omega$ вытекает, что формация $\mathfrak{N}_t\mathfrak{F}$ не является ω-композиционной. Следовательно, $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{N}_t\mathfrak{F}) = 0$.

Достаточность. Предположим, что для каждого $t \in \mathbb{P}$ имеет место $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{N}_t\mathfrak{F}) = 0$. Фиксируем произвольное простое u. Так как $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{N}_u\mathfrak{F}) = 0$, то формация $\mathfrak{N}_u\mathfrak{F}$ не является ω-композиционной. Следовательно, $\mathfrak{N}_u\mathfrak{F}$ не является q-композиционной для некоторого $q \in \omega$. Поэтому $\mathrm{Ind}_{q_c}(\mathfrak{N}_u\mathfrak{F}) = 0$. Заметим, что в силу следствия 4 $q \neq u$. Применяя теперь следствие 6, видим, что $\mathrm{Ind}_{q_c}(\mathfrak{F}) = 0$. Далее, рассматривая равенство $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{N}_q\mathfrak{F}) = 0$ и рассуждая аналогично, заключаем, что найдется такое простое $r \in \omega$, $r \neq q$, что $\mathrm{Ind}_{r_c}(\mathfrak{F}) = 0$. Следствие доказано. Проводя совершенно аналогичные рассуждения, как и при обосновании следствия 7, из следствия 6 также получаем

Следствие 8. *Пусть $|\omega| > 1$ и $\mathfrak{F}$ — произвольная формация. Тогда в том и только в том случае существуют такие различные простые q, $r \in \omega$, что имеет место $\mathrm{Ind}_{q_l}(\mathfrak{F}) = \mathrm{Ind}_{r_l}(\mathfrak{F}) = 0$, когда для* *любого* $t \in \mathbb{P}$ *выполнено* $\mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{N}_t\mathfrak{F}) = 0$.

В дальнейшем нам понадобятся также следующие определения.

Определение 3. Для произвольной последовательности простых чисел $p_1, p_2, \ldots, p_n$ ($n \in \mathbb{N}$) и всякой совокупности групп $\mathfrak{X}$ рекурсивно определим класс групп $\mathfrak{X}^{p_1p_2\cdots p_n}_{(c)}$ следующим образом:

1) $\mathfrak{X}^{p_1}_{(c)} = \big(G/C^{p_1}(G) \mid G \in \mathfrak{X}\big)$;

2) $\mathfrak{X}^{p_1p_2\cdots p_n}_{(c)} = \big(\mathfrak{X}^{p_1p_2\cdots p_{n-1}}_{(c)}\big)^{p_n}_{(c)} = \big(G/C^{p_n}(G) \mid G \in \mathfrak{X}^{p_1p_2\cdots p_{n-1}}_{(c)}\big)$, если $n \geq 2$.

Определение 4. Для произвольной последовательности простых чисел $p_1, p_2, \ldots, p_n$ ($n \in \mathbb{N}$) и всякой совокупности групп $\mathfrak{X}$ рекурсивно определим также класс групп $\mathfrak{X}(C^{p_1p_2\cdots p_n})$:

1) $\mathfrak{X}(C^{p_1}) = \mathrm{form}\big(\mathfrak{X}^{p_1}_{(c)}\big) = \mathrm{form}\big(G/C^{p_1}(G) \mid G \in \mathfrak{X}\big)$, если $p_1 \in \pi\big(\mathrm{Com}(\mathfrak{X})\big)$, и $\mathfrak{X}(C^{p_1}) = \varnothing$, если $p_1 \notin \pi\big(\mathrm{Com}(\mathfrak{X})\big)$ (см. [27]);

2) $\mathfrak{X}(C^{p_1p_2\cdots p_n}) = \mathfrak{X}(C^{p_1p_2\cdots p_{n-1}})(C^{p_n})$, если $n \geq 2$.

Определение 5. Последовательность простых чисел $p_1, p_2, \ldots, p_n$ из ω назовем *c-подходящей для* $\mathfrak{X}$ *ω-последовательностью*, если $p_1 \in \pi\big(\mathrm{Com}(\mathfrak{X})\big) \cap \omega$ и для любого $i \in \{2, \ldots, n\}$ имеет место $p_i \in \pi\big(\mathrm{Com}(\mathfrak{X}(C^{p_1p_2\cdots p_{i-1}}))\big) \cap \omega$.

Предложение 6. *Пусть* $\mathfrak{X}$ *— непустая формация и* $p_1, p_2, \ldots, p_n$ *— некоторая последовательность простых чисел из* ω. *Тогда и только тогда последовательность* $p_1, p_2, \ldots, p_n$ *является c-подходящей для* $\mathfrak{X}$ *ω-последовательностью, когда* $p_1 \in \pi\big(\mathrm{Com}(\mathfrak{X})\big) \cap \omega$ *и для любого* $i \in \{2, \ldots, n\}$ *число* p_i *принадлежит* $\pi\big(\mathrm{Com}(\mathfrak{X}^{p_1p_2\cdots p_{i-1}}_{(c)})\big) \cap \omega$.

Доказательство. Достаточность. Предположим, что $p_1 \in \pi\big(\mathrm{Com}(\mathfrak{X})\big) \cap \omega$ и для каждого $i \in \{2, \ldots, n\}$ имеет место $p_i \in \pi\big(\mathrm{Com}(\mathfrak{X}^{p_1p_2\cdots p_{i-1}}_{(c)})\big) \cap \omega$. Если $n = 1$, то утверждение тривиально. Если $n > 1$, то элементарная индукция по j показывает справедливость включения $\mathfrak{X}^{p_1\cdots p_j}_{(c)} \subseteq \mathfrak{X}(C^{p_1\cdots p_j})$, где $j \in \{1, \ldots, n-1\}$, из которого и вытекает, что последовательность $p_1, \ldots, p_n$ является c-подходящей для $\mathfrak{X}$.

Необходимость. Предположим, что последовательность простых чисел $p_1, \ldots p_n$ является c-подходящей для $\mathfrak{X}$ ω-последовательностью. Тогда $p_1 \in \pi\big(\mathrm{Com}(\mathfrak{X})\big) \cap \omega$ и, кроме того, для каждого $i \in \{2, \ldots, n\}$ имеет место $p_i \in \pi\big(\mathrm{Com}(\mathfrak{X}(C^{p_1p_2\cdots p_{i-1}}))\big) \cap \omega$. Поэтому если $n = 1$, то доказываемое утверждение очевидно. Предположим теперь, что $n > 1$. Покажем, что тогда для всякого $j \in \{1, \ldots, n-1\}$ справедливо равенство

$$\mathfrak{X}(C^{p_1\cdots p_j}) = \mathrm{Q}\big(\mathfrak{X}^{p_1\cdots p_j}_{(c)}\big),$$

где для произвольной совокупности групп $\mathfrak{Y}$ через $\mathrm{Q}(\mathfrak{Y})$ нами обозначен класс всех гомоморфных образов всех групп из $\mathfrak{Y}$. Воспользуемся индукцией по j. Если $j = 1$, то

$$\mathfrak{X}(C^{p_1}) = \mathrm{form}\big(\mathfrak{X}^{p_1}_{(c)}\big) = \mathrm{Q}\big(\mathfrak{X}^{p_1}_{(c)}\big)$$

вследствие предложения 1.10 [16], с. 339.

Предположим теперь, что $j > 1$ и утверждение справедливо для $j-1$, т. е. $\mathfrak{X}(C^{p_1\cdots p_{j-1}}) = \mathrm{Q}\big(\mathfrak{X}^{p_1\cdots p_{j-1}}_{(c)}\big)$. Для доказательства шага индукции заметим, что для всякой группы G имеет место $\theta\big(C^p(G)\big) \subseteq C^p\big(\theta(G)\big)$, где θ — произвольный эпиморфизм G. Последнее влечет для любой совокупности групп $\mathfrak{Y}$ и произвольного простого числа p включение

$$\big(\mathrm{Q}(\mathfrak{Y})\big)^p_{(c)} \subseteq \mathrm{Q}\big(\mathfrak{Y}^p_{(c)}\big),$$

с учетом которого и в силу базы и предположения индукции имеем

$$\mathfrak{X}(C^{p_1\cdots p_j}) = \mathfrak{X}(C^{p_1\cdots p_{j-1}})(C^{p_j}) = \mathrm{Q}\Big(\big(\mathfrak{X}(C^{p_1\cdots p_{j-1}})\big)^{p_j}_{(c)}\Big) = \mathrm{Q}\Big(\big(\mathrm{Q}\big(\mathfrak{X}^{p_1\cdots p_{j-1}}_{(c)}\big)\big)^{p_j}_{(c)}\Big) \subseteq$$
$$\subseteq \mathrm{Q}\Big(\mathrm{Q}\big(\mathfrak{X}^{p_1\cdots p_{j-1}}_{(c)}\big)^{p_j}_{(c)}\Big) = \mathrm{Q}\Big(\big(\mathfrak{X}^{p_1\cdots p_{j-1}}_{(c)}\big)^{p_j}_{(c)}\Big) = \mathrm{Q}\big(\mathfrak{X}^{p_1\cdots p_j}_{(c)}\big),$$

т. е. $\mathfrak{X}(C^{p_1\cdots p_j}) \subseteq \mathrm{Q}\big(\mathfrak{X}^{p_1\cdots p_j}_{(c)}\big)$. В частности, $\pi\big(\mathrm{Com}(\mathfrak{X}(C^{p_1\cdots p_j}))\big) \cap \omega \subseteq \pi\Big(\mathrm{Com}\big(\mathrm{Q}\big(\mathfrak{X}^{p_1\cdots p_j}_{(c)}\big)\big)\Big) \cap \omega$, и следовательно, как вытекает из доказательства достаточности (см. выше), $\mathrm{Q}\big(\mathfrak{X}^{p_1\cdots p_j}_{(c)}\big) \subseteq \mathfrak{X}(C^{p_1\cdots p_j})$. Поэтому $\mathfrak{X}(C^{p_1\cdots p_j}) = \mathrm{Q}\big(\mathfrak{X}^{p_1\cdots p_j}_{(c)}\big)$. Итак, для любого $j \in \{1, \ldots, n-1\}$ имеет место равенство $\mathfrak{X}(C^{p_1\cdots p_j}) = \mathrm{Q}\big(\mathfrak{X}^{p_1\cdots p_j}_{(c)}\big)$. Теперь для для каждого $i \in \{2, \ldots, n\}$ мы получаем

$$p_i \in \pi\big(\mathrm{Com}(\mathfrak{X}(C^{p_1p_2\cdots p_{i-1}}))\big) \cap \omega = \pi\Big(\mathrm{Com}\big(\mathrm{Q}\big(\mathfrak{X}^{p_1\cdots p_{i-1}}_{(c)}\big)\big)\Big) \cap \omega = \pi\big(\mathrm{Com}\big(\mathfrak{X}^{p_1\cdots p_{i-1}}_{(c)}\big)\big) \cap \omega$$

(здесь мы воспользовались также очевидным для произвольного множества групп $\mathfrak{Y}$ соотношением $\mathrm{Com}\big(\mathrm{Q}(\mathfrak{Y})\big) = \mathrm{Com}(\mathfrak{Y})$). Предложение доказано.

Замечание 6. Из доказательства предложения 6 следует, что если $\mathfrak{X}$ — произвольная совокупность групп, то для того чтобы последовательность простых чисел $p_1, \ldots, p_n$ из ω являлась c-подходящей для $\mathfrak{X}$ ω-последовательностью, достаточно выполнения условий $p_1 \in \pi\big(\mathrm{Com}(\mathfrak{X})\big) \cap \omega$ и $p_i \in \pi\big(\mathrm{Com}\big(\mathfrak{X}^{p_1p_2\cdots p_{i-1}}_{(c)}\big)\big) \cap \omega$ для всех $i \in \{2, \ldots, n\}$.

Аналогично введем понятия классов групп $\mathfrak{X}^{p_1p_2\ldots p_n}_{(l)}$ и $\mathfrak{X}(F_{p_1p_2\ldots p_n})$, а также дадим определение l-подходящей для $\mathfrak{X}$ ω-последовательности.

Определение 6. Для произвольной последовательности простых чисел $p_1, p_2, \ldots, p_n$ $(n \in \mathbb{N})$ и любой совокупности групп $\mathfrak{X}$ класс групп $\mathfrak{X}^{p_1p_2\ldots p_n}_{(l)}$ рекурсивно определим следующим образом:

1) $\mathfrak{X}^{p_1}_{(l)} = \big(A/F_{p_1}(A) \mid A \in \mathfrak{X}\big)$;

2) $\mathfrak{X}^{p_1p_2\ldots p_n}_{(l)} = \big(\mathfrak{X}^{p_1p_2\ldots p_{n-1}}_{(l)}\big)^{p_n}_{(l)} = \big(A/F_{p_n}(A) \mid A \in \mathfrak{X}^{p_1p_2\ldots p_{n-1}}_{(l)}\big)$, если $n \geq 2$.

Определение 7. Для произвольной последовательности простых чисел $p_1, p_2, \ldots, p_n$ $(n \in \mathbb{N})$ и всякой совокупности групп $\mathfrak{X}$ рекурсивно определим также класс групп $\mathfrak{X}(F_{p_1p_2\ldots p_n})$:

1) $\mathfrak{X}(F_{p_1}) = \mathrm{form}\big(\mathfrak{X}^{p_1}_{(l)}\big) = \mathrm{form}\,\big(G/F_{p_1}(G) \mid G \in \mathfrak{X}\big)$, если $p_1 \in \pi(\mathfrak{X})$, и $\mathfrak{X}(F_{p_1}) = \varnothing$, если $p_1 \notin \pi(\mathfrak{X})$ (см. [26]);

2) $\mathfrak{X}(F_{p_1p_2\ldots p_n}) = \mathfrak{X}(F_{p_1p_2\ldots p_{n-1}})(F_{p_n})$, если $n \geq 2$.

Определение 8. Последовательность простых чисел $p_1, p_2, \ldots, p_n$ из ω назовем *l-подходящей для $\mathfrak{X}$ ω-последовательностью,* если $p_1 \in \pi(\mathfrak{X}) \cap \omega$ и для любого $i \in \{2, \ldots, n\}$ имеет место $p_i \in \pi\big(\mathfrak{X}(F_{p_1p_2\ldots p_{i-1}})\big) \cap \omega$.

Аналогично предложению 6 доказывается следующее

Предложение 7. *Пусть $\mathfrak{X}$ — непустая формация и $p_1, p_2, \ldots, p_n$ — некоторая последовательность простых чисел из ω. Тогда и только тогда последовательность $p_1, p_2, \ldots, p_n$ является l-подходящей для $\mathfrak{X}$ ω-последовательностью, когда $p_1 \in \pi(\mathfrak{X}) \cap \omega$ и для каждого $i \in \{2, \ldots, n\}$ число p_i принадлежит $\pi\big(\mathfrak{X}^{p_1p_2\ldots p_{i-1}}_{(l)}\big) \cap \omega$.*

Замечание 7. Подходящие для любой совокупности групп $\mathfrak{X}$ последовательности были введены А.Н. Скибой [6], с. 45. Напомним, что последовательность простых чисел $p_1, \ldots, p_n$ называется *подходящей для $\mathfrak{X}$*, если $p_1 \in \pi(\mathfrak{X})$ и для любого $i \in \{2, \ldots, n\}$ число p_i принадлежит $\pi\big(\mathfrak{X}^{p_1p_2\ldots p_{i-1}}_{(l)}\big)$. Если, кроме того, каждое из чисел $p_1, \ldots, p_n$ содержится во множестве ω, то такая последовательность естественным образом называется *подходящей для $\mathfrak{X}$ ω-последовательностью* (см. [3]). Для произвольной совокупности групп $\mathfrak{X}$ каждая подходящая для $\mathfrak{X}$ ω-последовательность простых чисел является l-подходящей для $\mathfrak{X}$ ω-последовательностью (ср. замечание 6). Кроме того, если совокупность групп $\mathfrak{X}$ такова, что класс $(\mathfrak{X})$ — формация, то, как следует из предложения 7, имеет место обратное утверждение, т. е. данные определения равносильны.

Представляется целесообразным отметить, что для произвольной совокупности групп $\mathfrak{X}$ каждая c-подходящая для $\mathfrak{X}$ ω-последовательность простых чисел является также l-подходящей для $\mathfrak{X}$ ω-последовательностью. Пример формации $\mathrm{form}(A)$ и простого $p_1 = p$ таких, что A — простая неабелева группа, причем $\varnothing \neq \pi(A) \cap \omega \ni p$, показывает, что обратное в общем случае неверно.

Нам будут полезны также следующие понятия C-подходящей и L-подходящей для произвольной совокупности групп $\mathfrak{X}$ ω-последовательностей.

Определение 9. Для любой совокупности групп $\mathfrak{X}$ и всякой последовательности простых чисел $p_1, p_2, \ldots, p_n$ $(n \in \mathbb{N})$ определим рекурсивно класс групп $\mathfrak{X}(NC^{p_1p_2\ldots p_n})$:

1) $\mathfrak{X}(NC^{p_1}) = \mathfrak{N}_{p_1}\mathfrak{X}(C^{p_1})$;

2) $\mathfrak{X}(NC^{p_1p_2\ldots p_n}) = \mathfrak{X}(NC^{p_1p_2\ldots p_{n-1}})(NC^{p_n})$, если $n \geq 2$.

Определение 10. Последовательность простых чисел $p_1, p_2, \ldots, p_n$ из ω назовем *C-подходящей для $\mathfrak{X}$ ω-последовательностью,* если $p_1 \in \pi\big(\mathrm{Com}(\mathfrak{X})\big) \cap \omega$ и для любого $i \in \{2, \ldots, n\}$ число

$$p_i \in \pi\big(\mathrm{Com}(\mathfrak{X}(NC^{p_1p_2\ldots p_{i-1}}))\big) \cap \omega.$$

Аналогично определению 9 введем также следующее

Определение 11. Для любой совокупности групп $\mathfrak{X}$ и всякой последовательности простых чисел $p_1, p_2, \ldots, p_n$ $(n \in \mathbb{N})$ класс групп $\mathfrak{X}(NF_{p_1p_2\ldots p_n})$ определим рекурсивно следующим образом:

1) $\mathfrak{X}(NF_{p_1}) = \mathfrak{N}_{p_1}\mathfrak{X}(F_{p_1})$;

2) $\mathfrak{X}(NF_{p_1p_2\ldots p_n}) = \mathfrak{X}(NF_{p_1p_2\ldots p_{n-1}})(NF_{p_n})$, если $n \geq 2$.

Определение 12. Последовательность простых чисел $p_1, p_2, \ldots, p_n$ из ω назовем *L-подходящей для $\mathfrak{X}$ ω-последовательностью,* если $p_1 \in \pi(\mathfrak{X}) \cap \omega$ и для любого $i \in \{2, \ldots, n\}$ имеет место $p_i \in \pi\big(\mathfrak{X}(NF_{p_1p_2\ldots p_{i-1}})\big) \cap \omega$.

Как следует из вышеприведенных определений, для любой совокупности групп $\mathfrak{X}$ всякая c-подходящая для $\mathfrak{X}$ ω-последовательность является C-подходящей для $\mathfrak{X}$ ω-последовательностью, а каждая l-подходящая для $\mathfrak{X}$ ω-последовательность — L-подходящей для $\mathfrak{X}$ ω-последовательностью, т. е. последние определения расширяют соответствующие первые. Простой пример формации $\mathfrak{N}$ всех нильпотентных групп и последовательности p_1, p_2, где $p_1 = p_2 = p$ для произвольного (фиксированного) простого $p \in \omega$, показывает, что утверждения, обратные указанным, вообще говоря, не имеют места.

Соотношения между L- и C-подходящими для произвольной совокупности групп $\mathfrak{X}$ ω-последовательностями также очевидны: каждая C-подходящая для $\mathfrak{X}$ ω-последовательность простых оказывается L-подходящей для $\mathfrak{X}$ ω-последовательностью, причем, как несложно видеть, обратное неверно.

Пример 2. Пусть A — такая простая неабелева группа, что $|\pi(A) \cap \omega| \geq 2$, и пусть $\mathfrak{F} = l^{\tau}_{\omega_n}\mathrm{form}(A)$, где τ — произвольный подгрупповой функтор, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Покажем, что $\mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{F}) = n$. Пусть $n = 0$, и предположим, что $\mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{F}) > 0$. Тогда $\mathfrak{F}$ является l^{τ}_{ω}-формацией. Пусть $p \in \pi(A) \cap \omega$. Тогда вследствие теоремы 1 [26] $\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{F} = l^{\tau}_{\omega_0}\mathrm{form}(A) = \tau\mathrm{form}(A) \subseteq s\mathrm{form}(A)$. Последнее противоречит лемме 3.1.5 [6], с. 100. (Ясно, что в данном случае для выполнения равенства $\mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{F}) = n$ достаточно, чтобы $|\pi(A) \cap \omega| \geq 1$; заметим также, что для указанного равенства вследствие примера 1 [26] последнее условие является и необходимым.) Следовательно, $\mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{F}) = 0$, и для $n = 0$ утверждение верно. Пусть теперь $n > 0$. Предположим, что $\mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{F}) > n$. Тогда формация $\mathfrak{F}$ является $l^{\tau}_{\omega_{n+1}}$-формацией, и если $\mathfrak{F} = LF_{\omega}(F)$ (F — канонический ω-локальный спутник), то ввиду леммы 1.5.6 [1], с. 58 спутник F $l^{\tau}_{\omega_n}$-значен. Отметим, что в силу леммы 1.5.12 [1], с. 61 $\pi(\mathfrak{F}) \cap \omega = \pi(A) \cap \omega$. Пусть $p \in \pi(A) \cap \omega$. Тогда, очевидно, $F_p(A) = 1$, и вследствие леммы 1.5.12 [1], с. 61 и замечания 2 [26] имеем $F(p) = \mathfrak{N}_p l^{\tau}_{\omega_{n-1}}\mathrm{form}(A/F_p(A)) = \mathfrak{N}_p l^{\tau}_{\omega_{n-1}}\mathrm{form}(A)$. Положим $n = 1$. Тогда $F(p) = \mathfrak{N}_p\tau\mathrm{form}(A) \in l^{\tau}_{\omega}$, и если $q \in \big(\pi(A) \cap \omega\big) \setminus \{p\}$ (такое простое существует, так как по условию $|\pi(A) \cap \omega| \geq 2$, и следовательно, $\big(\pi(A) \cap \omega\big) \setminus \{p\} \neq \varnothing$), то ввиду теоремы 1 [26] $\mathfrak{N}_q \subseteq \mathfrak{N}_p\tau\mathrm{form}(A)$. Последнее влечет $\mathfrak{N}_q \subseteq \tau\mathrm{form}(A) \subseteq s\mathrm{form}(A)$; вновь получаем противоречие с леммой 3.1.5 [6], с. 100. Значит, при $n = 1$ утверждение также справедливо. Поэтому считаем, что $n > 1$. Положим $s_1 = p$. Тогда $F(s_1) = \mathfrak{N}_{s_1} l^{\tau}_{\omega_{n-1}}\mathrm{form}(A) \in l^{\tau}_{\omega_n}$.

Предположим теперь, что для некоторого натурального $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ построена l-подходящая для $\mathfrak{F}$ ω-последовательность простых чисел $s_1, s_2, \dots, s_k$, каждое из которых принадлежит множеству $\pi(A)$, причем $s_i \neq s_{i-1}$ для всех $i \in \{2, \dots, k\}$, а также для каждого $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ построена формация $Fs_1s_2\dots s_{j-1}(s_j)$ такая, что $Fs_1s_2\dots s_{j-1}(s_j) = \mathfrak{N}_{s_j} l^{\tau}_{\omega_{n-j}}\mathrm{form}(A) \in l^{\tau}_{\omega_{n-j+1}}$, где $Fs_1s_2\dots s_{j-1}$ — канонический ω-локальный спутник формации $Fs_1s_2\dots s_{j-2}(s_{j-1})$ (при $j = 1$ мы считаем, что спутник $Fs_1s_2\dots s_{j-1}$ совпадает с F, а формация $Fs_1s_2\dots s_{j-2}(s_{j-1})$ — с формацией $\mathfrak{F}$). Возьмем в качестве s_{k+1} произвольное простое из $\big(\pi(A) \cap \omega\big) \setminus \{s_k\}$ (напомним, что $\big(\pi(A) \cap \omega\big) \setminus \{s_k\} \neq \varnothing$, так как в силу условия $|\pi(A) \cap \omega| \geq 2$). И пусть $Fs_1\dots s_{k-1}s_k$ — канонический ω-локальный спутник формации $Fs_1\dots s_{k-1}(s_k)$ (последняя является ω-насыщенной, так как по предположению $n > k$). Тогда, так как $Fs_1\dots s_{k-1}(s_k) \in l^{\tau}_{\omega_{n-k+1}}$, применяя лемму 1.5.6 [1], с. 58 видим, что спутник $Fs_1\dots s_{k-1}s_k$ является $l^{\tau}_{\omega_{n-k}}$-значным. Учитывая, что $s_{k+1} \in \pi(A) \cap \omega$, и следовательно, $F_{s_{k+1}}(A) = 1$, а также принимая во внимание, что $s_{k+1} \neq s_k$, вследствие теоремы 7 [26], леммы 1.5.12 [1], с. 61 и замечания 2 [26] заключаем, что $Fs_1\dots s_{k-1}s_k(s_{k+1}) = \mathfrak{N}_{s_{k+1}} l^{\tau}_{\omega_{n-(k+1)}}\mathrm{form}(A) \in l^{\tau}_{\omega_{n-(k+1)+1}}$. Кроме того, несложно видеть, что $(A) = (A)^{p_1p_2\dots p_k}_{(l)} \subseteq \mathfrak{F}^{p_1p_2\dots p_k}_{(l)}$. Значит, поскольку $s_{k+1} \in \pi(A) \cap \omega$, то $s_{k+1} \in \pi(\mathfrak{F}^{p_1p_2\dots p_k}_{(l)}) \cap \omega$. Тем самым нами описано правило, которое при выполнении условия $k < n$ для данной подходящей (т. е. l-подходящей, поскольку $\mathfrak{F}$ — формация; см. замечание 7) для $\mathfrak{F}$ ω-последовательности простых чисел $s_1, s_2, \dots, s_k$ и формации $Fs_1s_2\dots s_{k-1}(s_k) \in l^{\tau}_{\omega_{n-k+1}}$ позволяет найти ее новый член s_{k+1} и формацию $Fs_1\dots s_{k-1}s_k(s_{k+1}) \in l^{\tau}_{\omega_{n-(k+1)+1}}$. Таким образом, можно считать, что построена l-подходящая для $\mathfrak{F}$ ω-последовательность простых $s_1, s_2, \dots, s_n$, и наряду с формациями $Fs_1s_2\dots s_{j-1}(s_j) \in l^{\tau}_{\omega_{n-j+1}}$, где $j \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, также найдена формация $Fs_1\dots s_{n-1}(s_n) = \mathfrak{N}_{s_n} l^{\tau}_{\omega_0}\mathrm{form}(A) = \mathfrak{N}_{s_n}\tau\mathrm{form}(A) \in l^{\tau}_{\omega_1} = l^{\tau}_{\omega}$. Пусть r — произвольное простое из $\big(\pi(A) \cap \omega\big) \setminus \{s_n\}$. Тогда, поскольку $Fs_1\dots s_{n-1}(s_n) \in l^{\tau}_{\omega}$, вследствие теоремы 1 [26] $\mathfrak{N}_r \subseteq \mathfrak{N}_{s_n}\tau\mathrm{form}(A)$. Следовательно, $\mathfrak{N}_r \subseteq \tau\mathrm{form}(A) \subseteq s\mathrm{form}(A)$. Последнее противоречит лемме 3.1.5 [6], с. 100. Итак, исходное допущение неверно, и для любого целого неотрицательного n имеет место $\mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{F}) = n$, где $\mathfrak{F} = l^{\tau}_{\omega_n}\mathrm{form}(A)$, A — неабелева простая группа и $|\pi(A) \cap \omega| \geq 2$.

Отметим, что равенство $\mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{F}) = n$ можно доказать и индукцией по n. В связи с этим рассмотрим следующий

Пример 3. Пусть, как и в примере 2, A — простая неабелева группа и $\mathfrak{F} = l^{\tau}_{\omega_n}\mathrm{form}(A)$, где τ — произвольный подгрупповой функтор. И пусть $\mathrm{S}_{\bar{\tau}}(A) = \{A_1, \dots, A_t\}$ — совокупность всех $\bar{\tau}$-подгрупп группы A, где $\bar{\tau}$ — замыкание подгруппового функтора τ, $\tilde{A} = A_1 \times \ldots \times A_t$ ($t \in \mathbb{N}$). Кроме того, для заданного простого числа q через $\mathfrak{B}_{(q)}$ обозначим формацию $\mathfrak{N}_q\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_q l^{\tau}_{\omega_n}\mathrm{form}(A)$.

Пусть $n = 0$. Тогда вследствие леммы 1.2.22 [6], с. 24

$$\mathfrak{F} = l^{\tau}_{\omega_0}\mathrm{form}(A) = \tau\mathrm{form}(A) = \mathrm{form}\big(S_{\bar{\tau}}(A)\big) = \mathrm{form}(\tilde{A}).$$

Заметим, что $\pi(\mathfrak{F}) = \pi(\tilde{A}) = \pi\big(S_{\bar{\tau}}(A)\big) = \pi(A)$ и $\pi\big(\mathrm{Com}(\mathfrak{F})\big) = \pi\big(\mathrm{Com}(\tilde{A})\big) = \pi\big(\mathrm{Com}(S_{\bar{\tau}}(A))\big)$. Предположим, что $|\pi(A) \cap \omega| = 0$. В этом случае $\pi(\mathfrak{F}) \cap \omega = \pi(A) \cap \omega = \varnothing$, и из примера 1 [26] следует, что $\mathfrak{F}$ является l^{ω}_{∞}-формацией. Значит, $\mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{F}) = \infty$. Поэтому вследствие леммы 16 для любого $q \in \mathbb{P}$ имеет место $\mathrm{Ind}_{\omega_l}\big(\mathfrak{B}_{(q)}\big) = \infty$. Кроме того, согласно лемме 15, из последних равенств вытекают следующие $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{F}) = \mathrm{Ind}_{\omega_c}\big(\mathfrak{B}_{(q)}\big) = \infty$, причем последнее равенство имеет место также для любого $q \in \mathbb{P}$. Пусть теперь $|\pi(A) \cap \omega| \geq 1$. Тогда если $p \in \pi(A) \cap \omega = \pi(\mathfrak{F}) \cap \omega$, то, как следует из леммы 3.1.5 [6], с. 100 $\mathfrak{N}_p \nsubseteq \mathfrak{F} = \mathrm{form}\big(S_{\bar{\tau}}(A)\big) = \mathrm{form}(\tilde{A})$, и следовательно, в силу теоремы 1 [26] формация $\mathfrak{F}$ не является p-насыщенной. Поэтому $\mathrm{Ind}_{p_l}(\mathfrak{F}) = 0$, и следовательно, $\mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{F}) = 0$. Кроме того, если $|\pi(A) \cap \omega| = 1$ и $\pi(A) \cap \omega = \{p\}$, то ввиду следствия 6 для любого $q \in p' = \mathbb{P} \setminus \{p\}$ имеет место $\mathrm{Ind}_{p_l}\big(\mathfrak{B}_{(q)}\big) = \mathrm{Ind}_{p_l}(\mathfrak{F}) = 0$, и значит, $\mathrm{Ind}_{\omega_l}\big(\mathfrak{B}_{(q)}\big) = 0$; в силу же леммы ($\mathfrak{N}^n_{\omega}\mathfrak{F}$) с учетом равенства $\pi(A) \cap \omega = \pi(\mathfrak{F}) \cap \omega$ видим, что $\mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{B}_{(p)}) = \mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{N}_p\mathfrak{F}) = \infty$. Далее, если $|\pi(A) \cap \omega| \geq 2$, то, учитывая справедливость для всякого $p \in \pi(A) \cap \omega$ равенства $\mathrm{Ind}_{p_l}(\mathfrak{F}) = 0$, а также принимая во внимание следствие 8, заключаем, что для любого $q \in \mathbb{P}$ имеет место равенство $\mathrm{Ind}_{p_l}\big(\mathfrak{B}_{(q)}\big) = 0$, а потому и равенство $\mathrm{Ind}_{\omega_l}\big(\mathfrak{B}_{(q)}\big) = 0$.

Если, кроме того, $|\pi\big(\mathrm{Com}(\mathrm{S}_{\bar{\tau}}(A))\big) \cap \omega| = 0$, то $\pi\big(\mathrm{Com}(\mathfrak{F})\big) \cap \omega = \pi\big(\mathrm{Com}(S_{\bar{\tau}}(A))\big) \cap \omega = \varnothing$, и вследствие примера 1 [27] $\mathfrak{F}$ является c_{∞}^{ω}-формацией. Тогда $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{F}) = \infty$, и вследствие леммы 16 также имеем $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{B}_{(q)}) = \infty$ для всякого $q \in \mathbb{P}$. Пусть, далее, $|\pi(\mathrm{Com}(\mathrm{S}_{\bar{\tau}}(A))) \cap \omega| \geq 1$ (ясно, что в этом случае условие $|\pi(A) \cap \omega| \geq 1$ является необходимым). Тогда, выбирая произвольное простое число p из $\pi(\mathrm{Com}(\mathrm{S}_{\bar{\tau}}(A))) \cap \omega = \pi(\mathrm{Com}(\mathfrak{F})) \cap \omega$ и применяя лемму 3.1.5 [6], с. 100 видим, что $\mathfrak{N}_p \nsubseteq \mathfrak{F}$. Значит, ввиду теоремы 1 [27] формация $\mathfrak{F}$ не является p-композиционной, и значит, $\mathrm{Ind}_{p_c}(\mathfrak{F}) = 0$. Следовательно, $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{F}) = 0$. Продолжая далее рассуждения, аналогичные рассмотренному выше случаю, когда $|\pi(A) \cap \omega| \geq 1$, и используя следствия 6 и 7, а также лемму 11, заключаем, что если $|\pi(\mathrm{Com}(\mathrm{S}_{\bar{\tau}}(A))) \cap \omega| = 1$ и $\pi(\mathrm{Com}(\mathrm{S}_{\bar{\tau}}(A))) \cap \omega = \{p\}$, то $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{B}_{(q)}) = 0$, если $q \in p' = \mathbb{P} \setminus \{p\}$, и $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{B}_{(p)}) = \infty$; если же $|\pi(\mathrm{Com}(\mathrm{S}_{\bar{\tau}}(A))) \cap \omega| \geq 2$, то равенство $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{B}_{(q)}) = 0$ имеет место уже для любого $q \in \mathbb{P}$.

Пусть теперь $n > 0$. Тогда ввиду следствия 1 $\mathfrak{F} \in l_{\omega_n}^{\tau} \subseteq c_{\omega_n}^{\tau}$, и следовательно, вследствие леммы 7 и леммы 1.5.12 [1], с. 61 имеют место равенства $\pi(\mathrm{Com}(\mathfrak{F})) \cap \omega = \pi(\mathfrak{F}) \cap \omega = \pi(A) \cap \omega$. Отметим, что в силу очевидного неравенства $\mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{F}) \geq n$ из леммы 16 вытекает, что для всякого $q \in \mathbb{P}$ имеет место $\mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{B}_{(q)}) \geq n$. Из указанных неравенств вследствие леммы 15 получаем также неравенства $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{F}) \geq n$ и $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{B}_{(q)}) \geq n$. Далее, если $|\pi(A) \cap \omega| < 2$, то с учетом равенства $\pi(\mathfrak{F}) \cap \omega = \pi(A) \cap \omega$ и леммы 16 из замечания 1 следует, что $\mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{F}) = \infty$ и для любого $q \in \mathbb{P}$ $\mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{B}_{(q)}) = \infty$. Тогда, согласно лемме 15, имеем $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{F}) = \mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{B}_{(q)}) = \infty$ (последнее равенство имеет место, конечно, для любого $q \in \mathbb{P}$). Пусть $|\pi(A) \cap \omega| \geq 2$. Индукцией по n покажем, что $\mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{F}) = \mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{B}_{(q)}) = n$. Действительно, если $n = 0$, то, как установлено выше, $\mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{F}) = 0$ и, кроме того, для всякого $q \in \mathbb{P}$ $\mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{B}_{(q)}) = \mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{N}_q l_{\omega_0}^{\tau}\mathrm{form}(A)) = 0$. Пусть снова $n > 0$, и предположим, что $\mathrm{Ind}_{\omega_l}(l_{\omega_{n-1}}^{\tau}\mathrm{form}(A)) = \mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{N}_q l_{\omega_{n-1}}^{\tau}\mathrm{form}(A)) = n-1$, причем последнее равенство имеет силу для каждого $q \in \mathbb{P}$. Обозначим через F и $V_{(q)}$ канонические ω-локальные спутники формаций $\mathfrak{F} = l_{\omega_n}^{\tau}\mathrm{form}(A)$ и $\mathfrak{B}_{(q)} = \mathfrak{N}_q l_{\omega_n}^{\tau}\mathrm{form}(A)$ соответственно. Ясно, что поскольку A — неабелева простая группа, то для любого $p \in \pi(A) \cap \omega$ имеет место $F_p(A) = 1$. Учитывая последнее, а также применяя лемму 1.5.12 [1], с. 61 теорему 7 [26] и замечание 2 [26], видим, что $F(p) = \mathfrak{N}_p l_{\omega_{n-1}}^{\tau}\mathrm{form}(A)$ для любого $p \in \pi(A) \cap \omega$, $F(p) = \varnothing$ для всякого $p \in \omega \setminus \pi(A)$, $F(\omega') = \mathfrak{F}$, и если $q \in \omega$, то $V_{(q)}(q) = \mathfrak{N}_q l_{\omega_{n-1}}^{\tau}\mathrm{form}(A) = \mathfrak{B}_{(q)}$, $V_{(q)}(p) = \mathfrak{N}_p l_{\omega_{n-1}}^{\tau}\mathrm{form}(A) = F(p)$ для каждого $p \in (\pi(A) \cap \omega) \setminus \{q\}$, $V_{(q)}(\omega') = \mathfrak{B}_{(q)}$; если $q \notin \omega$, то $V_{(q)}(p) = F(p)$ для любого $p \in \omega$, $V_{(q)}(\omega') = \mathfrak{B}_{(q)}$. По индукции $\mathrm{Ind}_{\omega_l}(F(p)) = n-1$ для каждого $p \in \pi(A) \cap \omega = \pi(\mathfrak{F}) \cap \omega$. Следовательно, учитывая, что $|\pi(A) \cap \omega| \geq 2$ и $\mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{B}_{(q)}) \geq n$, ввиду леммы 13 заключаем, что $\mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{F}) = \mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{B}_{(q)}) = n$.

Предположим теперь, что наряду с условием $|\pi(A) \cap \omega| \geq 2$ имеет место также $|\pi(\mathrm{Com}(\mathrm{S}_{\bar{\tau}}(A))) \cap \omega| = 0$. Покажем, что тогда $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{F}) = \infty$ и для любого $q \in \mathbb{P}$ $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{B}_{(q)}) = \infty$. Здесь также воспользуемся индукцией по n. При $n = 0$ (база индукции) данное утверждение, как отмечено выше, верно. Пусть $n > 0$; при этом считаем, что утверждение справедливо для $n-1$. В силу следствия 1 $\mathfrak{F} = LF_{\omega}(F) = CF_{\omega}(F)$ и $\mathfrak{B}_{(q)} = LF_{\omega}(V_{(q)}) = CF_{\omega}(V_{(q)})$, причем каждый из канонических спутников F и $V_{(q)}$ соответственно формации $\mathfrak{F}$ и формации $\mathfrak{B}_{(q)}$ (см. выше) является $l_{\omega_{n-1}}^{\tau}$-значным, а следовательно, и $c_{\omega_{n-1}}^{\tau}$-значным. По индукции для любого $p \in \pi(A) \cap \omega = \pi(\mathrm{Com}(\mathfrak{F})) \cap \omega$ имеет место $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(F(p)) = \mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{N}_p l_{\omega_{n-1}}^{\tau}\mathrm{form}(A)) = \infty$. Следовательно, ввиду леммы 14 заключаем, что $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{F}) = \mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{B}_{(q)}) = \infty$, т. е. рассматриваемое утверждение верно и для n (последнее равенство, как следует из доказательства, имеет место для любого $q \in \mathbb{P}$). Таким образом, $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{F}) = \mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{B}_{(q)}) = \infty$, если только $|\pi(A) \cap \omega| \geq 2$, причем $|\pi(\mathrm{Com}(\mathrm{S}_{\bar{\tau}}(A))) \cap \omega| = 0$.

Наконец, рассмотрим случай, когда $|\pi(A) \cap \omega| \geq 2$ и, кроме того, $|\pi(\mathrm{Com}(\mathrm{S}_{\bar{\tau}}(A))) \cap \omega| \geq 1$. Предположим сначала, что выполнено одно из следующих условий: либо $|\pi(\mathrm{Com}(\mathrm{S}_{\bar{\tau}}(A))) \cap \omega| = 1$, причем $|\pi(A) \cap \omega| \geq 3$, либо $|\pi(\mathrm{Com}(\mathrm{S}_{\bar{\tau}}(A))) \cap \omega| \geq 2$ (ясно, что в последнем случае условие $|\pi(A) \cap \omega| \geq 2$ будет необходимым). Рассуждаем, как и в предыдущих случаях, по индукции. Напомним, что, как установлено выше, если $n = 0$, то для случая, когда $|\pi(\mathrm{Com}(\mathrm{S}_{\bar{\tau}}(A))) \cap \omega| = 1$, причем $\pi(\mathrm{Com}(\mathrm{S}_{\bar{\tau}}(A))) \cap \omega = \{p\}$, имеет место $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{B}_{(p)}) = \infty$ и $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{B}_{(q)}) = 0$ для всякого $q \in p' = \mathbb{P} \setminus \{p\}$; для случая $|\pi(\mathrm{Com}(\mathrm{S}_{\bar{\tau}}(A))) \cap \omega| \geq 2$ имеем $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{B}_{(q)}) = 0$ для любого $q \in \mathbb{P}$. Кроме того, в каждом из отмеченных случаев $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{F}) = 0$. Далее, снова считаем, что $n > 0$, а также выполнены равенства $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{N}_p l_{\omega_{n-1}}^{\tau}\mathrm{form}(A)) = \infty$, $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{N}_q l_{\omega_{n-1}}^{\tau}\mathrm{form}(A)) = \mathrm{Ind}_{\omega_c}(l_{\omega_{n-1}}^{\tau}\mathrm{form}(A)) = n-1$ для каждого $q \in p'$, если $n = 1$ и $|\pi(\mathrm{Com}(\mathrm{S}_{\bar{\tau}}(A))) \cap \omega| = 1$, причем $\pi(\mathrm{Com}(\mathrm{S}_{\bar{\tau}}(A))) \cap \omega = \{p\}$, и $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{N}_q l_{\omega_{n-1}}\mathrm{form}(A)) = \mathrm{Ind}_{\omega_c}(l_{\omega_{n-1}}\mathrm{form}(A)) = n-1$ для всякого $q \in \mathbb{P}$, в остальных случаях (т. е. если либо $n = 1$ и $|\pi(\mathrm{Com}(\mathrm{S}_{\bar{\tau}}(A))) \cap \omega| \geq 2$, либо $n \geq 2$). Тогда, как отмечено выше, $\mathfrak{F} = CF_{\omega}(F)$ и $\mathfrak{B}_{(q)} = CF_{\omega}(V_{(q)})$, причем каждый из канонических спутников F и $V_{(q)}$ $c_{\omega_{n-1}}^{\tau}$-значен. Фиксируем произвольное $q \in \mathbb{P}$. Выбирая теперь любое r с условием $r \in (\pi(A) \cap \omega) \setminus \{p, q\}$ — при $n = 1$ и $|\pi(\mathrm{Com}(\mathrm{S}_{\bar{\tau}}(A))) \cap \omega| = 1$, или $r \in (\pi(A) \cap \omega) \setminus \{q\}$ — в противном случае, видим, согласно предположению, что $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(V_{(q)}(r)) = \mathrm{Ind}_{\omega_c}(F(r)) = \mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{N}_r l_{\omega_{n-1}}^{\tau}\mathrm{form}(A)) = n-1$. Учитывая теперь, что $\pi(A) \cap \omega = \pi(\mathrm{Com}(\mathfrak{F})) \cap \omega$, $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{B}_{(q)}) \geq n$, а также принимая во внимание справедливое для $n = 1$ и $|\pi(\mathrm{Com}(\mathrm{S}_{\bar{\tau}}(A))) \cap \omega| = 1$ равенство $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{N}_p l_{\omega_{n-1}}^{\tau}\mathrm{form}(A)) = \infty$, вследствие леммы 14 заключаем, что $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{B}_{(q)}) = \mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{F}) = n$. Таким образом, если либо $|\pi(A) \cap \omega| \geq 3$, $|\pi(\mathrm{Com}(\mathrm{S}_{\bar{\tau}}(A))) \cap \omega| = 1$, либо $|\pi(A) \cap \omega| \geq 2$, $|\pi(\mathrm{Com}(\mathrm{S}_{\bar{\tau}}(A))) \cap \omega| \geq 2$, то $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{F}) = \mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{B}_{(q)}) = n$. Отметим, что из указанных равенств ввиду леммы 15 вытекают также равенства $\mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{F}) = \mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{B}_{(q)}) = n$, установленные ранее для более широкого случая, когда $|\pi(A) \cap \omega| \geq 2$.

Рассмотрим теперь последнюю оставшуюся возможность, когда $|\pi(\mathrm{Com}(\mathrm{S}_{\bar{\tau}}(A))) \cap \omega| = 1$ и $|\pi(A) \cap \omega| =$

2. Считаем, что $\pi(A)\cap\omega=\{p,q\}$ и $\pi\big(\mathrm{Com}(\mathrm{S}_{\bar\tau}(A))\big)\cap\omega=\{p\}$. Кроме того, в рассматриваемом случае для данного целого неотрицательного n и простого r условимся для обозначения формаций $l^{\tau}_{\omega_n}\mathrm{form}(A)$ и $\mathfrak{N}_r l^{\tau}_{\omega_n}\mathrm{form}(A)$ вместо символов соответственно $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{V}_{(r)}$ использовать соответственно символы $\tilde{\mathfrak{F}}_{(n)}$ и $\tilde{\mathfrak{V}}_{(n,r)}$; канонические спутники указанных формаций также обозначим соответствующим образом: $\tilde F_{(n)}$ и $\tilde{\mathfrak{V}}_{(n,q)}$. Тогда, как доказано выше, $\mathrm{Ind}_{\omega_c}\big(\tilde{\mathfrak{V}}_{(0,r)}\big)=\infty$, если $r=p$, и $\mathrm{Ind}_{\omega_c}\big(\tilde{\mathfrak{V}}_{(0,r)}\big)=0$, если $r\in p'$. Кроме того, $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\tilde{\mathfrak{F}}_{(0)})=0$. Далее, для $n>0$ будем иметь: если $r\in\{p,q\}=\pi(A)\cap\omega$, то $\tilde V_{(n,r)}(r)=\tilde V_{(n,r)}(\omega')=\tilde{\mathfrak{V}}_{(n,r)}$, $\tilde V_{(n,r)}(\bar r)=\mathfrak{N}_{\bar r} l^{\tau}_{\omega_{n-1}}\mathrm{form}(A)=\tilde{\mathfrak{V}}_{(n-1,\bar r)}=\tilde F_{(n)}(\bar r)$, где $\bar r\in\big(\pi(A)\cap\omega\big)\setminus\{r\}$; если $r\in\omega\setminus\pi(A)=\omega\setminus\big(\pi(A)\cap\omega\big)$ или $r\in\omega'$, то $\tilde V_{(n,r)}(\bar r)=\tilde{\mathfrak{V}}_{(n-1,\bar r)}=\tilde F_{(n)}(\bar r)$ для любого $\bar r\in\pi(A)\cap\omega$. Рассматривая вначале первый подслучай, когда $r\in\pi(A)\cap\omega$, с учетом единственности элемента $\bar r\in\big(\pi(A)\cap\omega\big)\setminus\{r\}$ и равенства $\tilde V_{(n,r)}(\bar r)=\tilde{\mathfrak{V}}_{(n-1,\bar r)}$, в силу леммы 14 заключаем, что $\mathrm{Ind}_{\omega_c}\big(\tilde{\mathfrak{V}}_{(n,r)}\big)=\mathrm{Ind}_{\omega_c}\big(\tilde{\mathfrak{V}}_{(n-1,\bar r)}\big)+1$, если $\mathrm{Ind}_{\omega_c}\big(\tilde{\mathfrak{V}}_{(n-1,\bar r)}\big)<\infty$, и $\mathrm{Ind}_{\omega_c}\big(\tilde{\mathfrak{V}}_{(n,r)}\big)=\infty$, если $\mathrm{Ind}_{\omega_c}\big(\tilde{\mathfrak{V}}_{(n-1,\bar r)}\big)=\infty$. Вследствие равенств $\mathrm{Ind}_{\omega_c}\big(\tilde{\mathfrak{V}}_{(0,p)}\big)=\infty$ и $\mathrm{Ind}_{\omega_c}\big(\tilde{\mathfrak{V}}_{(0,q)}\big)=0$, простая индукция по n показывает, что если n четно, то $\mathrm{Ind}_{\omega_c}\big(\tilde{\mathfrak{V}}_{(n,p)}\big)=\infty$, $\mathrm{Ind}_{\omega_c}\big(\tilde{\mathfrak{V}}_{(n,q)}\big)=n$; если n нечетно, то $\mathrm{Ind}_{\omega_c}\big(\tilde{\mathfrak{V}}_{(n,p)}\big)=n$, $\mathrm{Ind}_{\omega_c}\big(\tilde{\mathfrak{V}}_{(n,q)}\big)=\infty$. Но последние соотношения приводят нас также не только к рассмотрению второго подслучая, когда $r\in\big(\omega\setminus\pi(A)\big)\cup\omega'$, но и к нахождению общего для рассматриваемых подслучаев значения $\mathrm{Ind}_{\omega_c}\big(\tilde{\mathfrak{F}}_{(n)}\big)$ индекса ω-композиционности формации $\tilde{\mathfrak{F}}_{(n)}$. Действительно, для указанного (второго) подслучая, как отмечалось выше, для любого $\bar r\in\pi(A)\cap\omega=\{p,q\}$ имеет место $\tilde F_{(n)}(\bar r)=\tilde{\mathfrak{V}}_{(n-1,\bar r)}=\tilde V_{(n,r)}(\bar r)$, где $n>0$. По доказанному для каждого $\bar r\in\{p,q\}$ справедливо $\mathrm{Ind}_{\omega_c}\big(\tilde{\mathfrak{V}}_{(n-1,\bar r)}\big)\ge n-1$, причем $\mathrm{Ind}_{\omega_c}\big(\tilde{\mathfrak{V}}_{(n-1,\bar r_0)}\big)=n-1$, где $\bar r_0=p$, если n четно, и $\bar r_0=q$, если n нечетно. Из последнего в силу леммы 14 заключаем, что для всякого $r\in\big(\omega\setminus\pi(A)\big)\cup\omega'$ имеют место равенства $\mathrm{Ind}_{\omega_c}\big(\tilde{\mathfrak{F}}_{(n)}\big)=\mathrm{Ind}_{\omega_c}\big(\tilde{\mathfrak{V}}_{(n,r)}\big)=\mathrm{Ind}_{\omega_c}\big(\tilde{\mathfrak{V}}_{(n-1,\bar r_0)}\big)+1=(n-1)+1=n$.

Возвращаясь к прежним обозначениям, отметим, что из вышеприведенных рассуждений следует, в частности, что для данного целого неотрицательного числа n множество значений индексов формации $\mathfrak{F}$: индекса ω-локальности $\mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{F})$ и индекса ω-композиционности $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{F})$ — содержится во множестве $\{n,\infty\}$. Сказанное выше относится также и к формации $\mathfrak{V}_{(q)}$ для каждого простого числа q.

Таким образом, для формации $\mathfrak{F}=l^{\tau}_{\omega_n}\mathrm{form}(A)$, такой, что A — некоторая простая неабелева группа, n — целое неотрицательное число и τ — произвольный подгрупповой функтор, имеем:
если $n=0$, то

$|\pi(A)\cap\omega|=0\Longrightarrow \mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{F})=\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{F})=\infty$,

$|\pi(A)\cap\omega|\ge 1,\ |\pi\big(\mathrm{Com}(\mathrm{S}_{\bar\tau}(A))\big)\cap\omega|=0\Longrightarrow \mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{F})=n,\ \mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{F})=\infty$,

$|\pi(A)\cap\omega|\ge 1,\ |\pi\big(\mathrm{Com}(\mathrm{S}_{\bar\tau}(A))\big)\cap\omega|\ge 1\Longrightarrow \mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{F})=\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{F})=n$;

если $n>0$, то

$|\pi(A)\cap\omega|<2\Longrightarrow \mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{F})=\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{F})=\infty$,

$|\pi(A)\cap\omega|\ge 2,\ |\pi\big(\mathrm{Com}(\mathrm{S}_{\bar\tau}(A))\big)\cap\omega|=0\Longrightarrow \mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{F})=n,\ \mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{F})=\infty$,

$|\pi(A)\cap\omega|\ge 2,\ |\pi\big(\mathrm{Com}(\mathrm{S}_{\bar\tau}(A))\big)\cap\omega|\ge 1\Longrightarrow \mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{F})=\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{F})=n$,

где $\mathrm{S}_{\bar\tau}(A)=\{A_1,\dots,A_t\}$ — совокупность всех $\bar\tau$-подгрупп группы A ($t\in\mathbb{N}$), $\bar\tau$ — замыкание подгруппового функтора τ (здесь множества простых $\pi(A)$ и $\pi\big(\mathrm{Com}(S_{\bar\tau}(A)\big)$ могут быть заменены соответственно на $\pi(\tilde A)$ и $\pi\big(\mathrm{Com}(\tilde A)\big)$, если только $\tilde A=A_1\times\ldots\times A_t$).

Для формации $\mathfrak{V}_{(q)}=\mathfrak{N}_q l^{\tau}_{\omega_n}\mathrm{form}(A)$ получаем:
если $n=0$, то

$|\pi(A)\cap\omega|=0\Longrightarrow\forall q\in\mathbb{P}:\mathrm{Ind}_{\omega_l}\big(\mathfrak{V}_{(q)}\big)=\mathrm{Ind}_{\omega_c}\big(\mathfrak{V}_{(q)}\big)=\infty$,

$|\pi(A)\cap\omega|=1$, причем $\pi(A)\cap\omega=\{p\}$, и $|\pi\big(\mathrm{Com}(\mathrm{S}_{\bar\tau}(A))\big)\cap\omega|=0\Longrightarrow \mathrm{Ind}_{\omega_l}\big(\mathfrak{V}_{(p)}\big)=\infty$, $\forall q\in p':\mathrm{Ind}_{\omega_l}\big(\mathfrak{V}_{(q)}\big)=0$, $\forall r\in\mathbb{P}:\mathrm{Ind}_{\omega_c}\big(\mathfrak{V}_{(r)}\big)=\infty$,

$|\pi(A)\cap\omega|=|\pi\big(\mathrm{Com}(\mathrm{S}_{\bar\tau}(A))\big)\cap\omega|=1$, причем $\pi\big(\mathrm{Com}(\mathrm{S}_{\bar\tau}(A))\big)\cap\omega=\{p\}=\pi(A)\cap\omega\Longrightarrow \mathrm{Ind}_{\omega_l}\big(\mathfrak{V}_{(p)}\big)=\mathrm{Ind}_{\omega_c}\big(\mathfrak{V}_{(p)}\big)=\infty$, $\forall q\in p':\mathrm{Ind}_{\omega_l}\big(\mathfrak{V}_{(q)}\big)=\mathrm{Ind}_{\omega_c}\big(\mathfrak{V}_{(q)}\big)=0$,

$|\pi(A)\cap\omega|\ge 2$, $\pi\big(\mathrm{Com}(\mathrm{S}_{\bar\tau}(A))\big)\cap\omega|=0\Longrightarrow\forall q\in\mathbb{P}:\mathrm{Ind}_{\omega_l}\big(\mathfrak{V}_{(q)}\big)=0$, $\forall r\in\mathbb{P}:\mathrm{Ind}_{\omega_c}\big(\mathfrak{V}_{(r)}\big)=\infty$,

$|\pi(A)\cap\omega|\ge 2$, $|\pi\big(\mathrm{Com}(\mathrm{S}_{\bar\tau}(A))\big)\cap\omega|=1$, причем $\pi\big(\mathrm{Com}(\mathrm{S}_{\bar\tau}(A))\big)\cap\omega=\{p\}\Longrightarrow\forall q\in\mathbb{P}:\mathrm{Ind}_{\omega_l}\big(\mathfrak{V}_{(q)}\big)=0$, $\mathrm{Ind}_{\omega_c}\big(\mathfrak{V}_{(p)}\big)=\infty$, $\forall r\in p':\mathrm{Ind}_{\omega_c}\big(\mathfrak{V}_{(r)}\big)=0$,

$|\pi(A)\cap\omega|\ge 2$ и, кроме того, $|\pi\big(\mathrm{Com}(\mathrm{S}_{\bar\tau}(A))\big)\cap\omega|\ge 2\Longrightarrow\forall q\in\mathbb{P}:\mathrm{Ind}_{\omega_l}\big(\mathfrak{V}_{(q)}\big)=\mathrm{Ind}_{\omega_c}\big(\mathfrak{V}_{(q)}\big)=0$;

если $n>0$, то

$|\pi(A)\cap\omega|<2\Longrightarrow\forall q\in\mathbb{P}:\mathrm{Ind}_{\omega_l}\big(\mathfrak{V}_{(q)}\big)=\mathrm{Ind}_{\omega_c}\big(\mathfrak{V}_{(q)}\big)=\infty$,

$|\pi(A)\cap\omega|\ge 2$, $|\pi\big(\mathrm{Com}(\mathrm{S}_{\bar\tau}(A))\big)\cap\omega|=0\Longrightarrow\forall q\in\mathbb{P}:\mathrm{Ind}_{\omega_l}\big(\mathfrak{V}_{(q)}\big)=n$, $\mathrm{Ind}_{\omega_c}\big(\mathfrak{V}_{(q)}\big)=\infty$,

$|\pi(A)\cap\omega|=2$, $|\pi\big(\mathrm{Com}(\mathrm{S}_{\bar\tau}(A))\big)\cap\omega|=1$, причем $\pi(A)\cap\omega=\{p,q\}$ и $\pi\big(\mathrm{Com}(\mathrm{S}_{\bar\tau}(A))\big)\cap\omega=\{p\}\Longrightarrow\forall r\in\mathbb{P}:\mathrm{Ind}_{\omega_l}\big(\mathfrak{V}_{(r)}\big)=n$ и

если $s\in\pi(A)\cap\omega$, то $\mathrm{Ind}_{\omega_c}\big(\mathfrak{V}_{(s)}\big)=\infty$ — при $s=p$, и $\mathrm{Ind}_{\omega_c}\big(\mathfrak{V}_{(s)}\big)=n$ — при $s=q$, в случае, когда n четно, и $\mathrm{Ind}_{\omega_c}\big(\mathfrak{V}_{(s)}\big)=n$ — при $s=p$, и $\mathrm{Ind}_{\omega_c}\big(\mathfrak{V}_{(q)}\big)=\infty$ — при $s=q$, в случае нечетного n;

если $s\in\big(\omega\setminus\pi(A)\big)\cup\omega'$, то $\mathrm{Ind}_{\omega_c}\big(\mathfrak{V}_{(s)}\big)=n$,

$|\pi(A)\cap\omega|\ge 3$, $|\pi\big(\mathrm{Com}(\mathrm{S}_{\bar\tau}(A))\big)\cap\omega|\ge 1$ или $|\pi(A)\cap\omega|\ge 2$, $|\pi\big(\mathrm{Com}(\mathrm{S}_{\bar\tau}(A))\big)\cap\omega|\ge 2$ (т. е. $|\pi(A)\cap\omega|\ge 2$ и $|\pi\big(\mathrm{Com}(\mathrm{S}_{\bar\tau}(A))\big)\cap\omega|\ge 1$, причем равенства $|\pi(A)\cap\omega|=2$ и $|\pi\big(\mathrm{Com}(\mathrm{S}_{\bar\tau}(A))\big)\cap\omega|=1$ не выполняются одновременно) $\Longrightarrow\forall q\in\mathbb{P}:\mathrm{Ind}_{\omega_l}\big(\mathfrak{V}_{(q)}\big)=\mathrm{Ind}_{\omega_c}\big(\mathfrak{V}_{(q)}\big)=n$.

В частности, если τ — такой подгрупповой функтор, что $\mathrm{Com}(\mathrm{S}_{\bar{\tau}}(A)) = \varnothing$ (например, $\tau \leq \tau_{sn}$), $p \in \mathbb{P}$ и $|\pi(A) \cap \omega| \geq 2$, то для любого целого неотрицательного n имеем $\mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{F}) = \mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{B}_{(p)}) = n$, $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{F}) = \mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{B}_{(p)}) = \infty$, и следовательно, $\mathfrak{F} = l^{\tau}_{\omega_n}\mathrm{form}(A) \in c^{\tau}_{\omega_\infty} \setminus l^{\omega}_{m}$, а также $\mathfrak{B}_{(p)} = \mathfrak{N}_p l^{\tau}_{\omega_n}\mathrm{form}(A) \in c^{\tau}_{\omega_\infty} \setminus l^{\omega}_{m}$, где m — такое натуральное число, что $m > n$.

В заключение отметим, что если $|\omega| > 1$, то всегда найдется неабелевая простая группа $\hat{A}$ такая, что $|\pi(\hat{A}) \cap \omega| \geq 2$. Действительно, полагая $\hat{A} = A_5$, если $p \leq 5$, и $\hat{A} = A_p$, если $p > 5$, где $p = m(\omega \setminus \{m(\omega)\})$ (здесь через A_k обозначена знакопеременная группа степени k, $k \in \mathbb{N}$, а для произвольного непустого множества $\pi \subseteq \mathbb{P}$ через $m(\pi)$ обозначен его наименьший элемент), вследствие теоремы Галуа (см., например, [25], с. 44) убеждаемся, что это действительно так. Тогда по доказанному для формации $\hat{\mathfrak{F}} = l^{\tau}_{\omega_n}\mathrm{form}(\hat{A})$ имеем $\hat{\mathfrak{F}} \in l^{\tau}_{\omega_n} \setminus l^{\tau}_{\omega_{n+1}}$, где τ — произвольный подгрупповой функтор, n — целое неотрицательное число. На этом рассмотрение примера 3 мы оканчиваем.

Здесь целесообразно заметить, что рассуждения, использованные в примере 2, приводящие к построению L-подходящей (l-подходящей) или C-подходящей (c-подходящей) последовательности для (частично) кратно насыщенных или композиционных формаций соответственно, являются более общими (см. доказательство приводимой ниже теоремы 1) в отличие от примера 3, где существенно используются свойства порождающего множества (в данном случае — простой неабелевой группы).

В связи с примерами 2 и 3 рассмотрим также следующее утверждение, которое в известном смысле является обобщением примера 1.3.3 [6], с. 28.

Утверждение 5. *Пусть $\mathfrak{H}$ — непустая не ω-композиционная формация, π — множество простых чисел такое, что $\pi(\mathfrak{H}) \cap \omega \subseteq \pi$, причем $|\pi \cap \omega| > 1$, и n — целое неотрицательное число. И пусть $\mathfrak{F}_n = \mathfrak{N}^n_\pi\mathfrak{H}$. Тогда*

$$\mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{F}_n) = \mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{F}_n) = n.$$

Доказательство. Для произвольного целого неотрицательного n и всякого простого r обозначим через $\mathfrak{B}_{n,r}$ формацию $\mathfrak{N}_r\mathfrak{F}_n = \mathfrak{N}_r\mathfrak{N}^n_\pi\mathfrak{H}$. Заметим, что ввиду леммы 10 формация $\mathfrak{F}_n = \mathfrak{N}^n_\pi\mathfrak{H}$ является n-кратно (разрешимо) ω-насыщенной. Поэтому в силу леммы 5 и леммы 6 n-кратно (разрешимо) ω-насыщенной является и формация $\mathfrak{B}_{n,r} = \mathfrak{N}_r\mathfrak{N}^n_\pi\mathfrak{H}$ (то, что формация $\mathfrak{B}_{n,r}$ n-кратно ω-композиционна, вытекает также из следствия 1 и того, что $\mathfrak{B}_{n,r}$ n-кратно ω-насыщенна). Итак, обе формации $\mathfrak{F}_n$ и $\mathfrak{B}_{n,r}$ являются n-кратно (разрешимо) ω-насыщенными. Кроме того, обозначая через F_n и $V_{n,r}$ канонические ω-локальные спутники формаций $\mathfrak{F}_n = \mathfrak{N}^n_\pi\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{B}_{n,r} = \mathfrak{N}_r\mathfrak{N}^n_\pi\mathfrak{H}$ соответственно, где $n > 0$ и r — произвольное простое, в силу леммы 10 видим, что F_n и $V_{n,r}$ являются также каноническими ω-композиционными спутниками указанных формаций (см. также следствие 1). Вследствие леммы 10, теоремы 7 [26] и замечания 2 [26] находим, что $F_n(s) = \mathfrak{N}_s\mathfrak{N}^{n-1}_\pi\mathfrak{H}$ для всех $s \in \pi \cap \omega$, $F_n(s) = \varnothing$ для всякого $s \in \omega \setminus \pi$, $F_n(\omega') = \mathfrak{F}_n$, и если $r \in \omega$, то $V_{n,r}(r) = \mathfrak{N}_r\mathfrak{N}^n_\pi\mathfrak{H} = \mathfrak{B}_{n,r}$, $V_{n,r}(s) = \mathfrak{N}_s\mathfrak{N}^{n-1}_\pi\mathfrak{H} = \mathfrak{B}_{n-1,s}$ для каждого $s \in (\pi \cap \omega) \setminus \{r\}$, $V_{n,r}(s) = \varnothing$ для любого $s \in \omega \setminus (\pi \cup \{r\})$, $V_{n,r}(\omega') = \mathfrak{B}_{n,r}$; если $r \notin \omega$, то, как несложно видеть, $V_{n,r}(s) = F_n(s)$ для каждого $s \in \omega$, т. е. $V_{n,r}(s) = \mathfrak{N}_s\mathfrak{N}^{n-1}_\pi\mathfrak{H}$ для всех $s \in \pi \cap \omega$ и $V_{n,r}(s) = \varnothing$ для любого $s \in \omega \setminus \pi$, а также $V_{n,r}(\omega') = \mathfrak{B}_{n,r}$. Заметим, что вследствие леммы 15 для формаций $\mathfrak{F}_n$ и $\mathfrak{B}_{n,r}$ справедливы неравенства $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{F}_n) \geq \mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{F}_n) \geq n$, а также неравенства $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{B}_{n,r}) \geq \mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{B}_{n,r}) \geq n$. Несмотря на то, что в силу той же леммы 15 для доказательства равенства $\mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{F}_n) = n$ достаточно установить, что $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{F}_n) = n$, рассмотрим, тем не менее, общий случай, полезный для получения некоторых следствий рассматриваемого утверждения.

Проведем индукцию по n. Пусть $n = 0$. По условию формация $\mathfrak{H} = \mathfrak{N}^0_\pi\mathfrak{H} = \mathfrak{F}_0$ не является ω-композиционной. Поэтому с учетом примера 1 [27] найдется такое простое $p \in \pi(\mathrm{Com}(\mathfrak{H})) \cap \omega \subseteq \pi(\mathfrak{H}) \cap \omega$, что $\mathfrak{H}$ не является p-композиционной, а следовательно, и p-насыщенной формацией. Последнее равносильно соотношениям $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{F}_0) = \mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{F}_0) = 0$, а также $\mathrm{Ind}_{p_c}(\mathfrak{F}_0) = \mathrm{Ind}_{p_l}(\mathfrak{F}_0) = 0$. Отсюда и из следствия 6 вытекает, что для всех $r \in p' = \mathbb{P} \setminus \{p\}$ имеют место равенства $\mathrm{Ind}_{p_c}(\mathfrak{B}_{0,r}) = \mathrm{Ind}_{p_c}(\mathfrak{N}_r\mathfrak{F}_0) = \mathrm{Ind}_{p_c}(\mathfrak{N}_r\mathfrak{H}) = 0$ и, кроме того, равенства $\mathrm{Ind}_{p_l}(\mathfrak{B}_{0,r}) = \mathrm{Ind}_{p_l}(\mathfrak{N}_r\mathfrak{F}_0) = \mathrm{Ind}_{p_l}(\mathfrak{N}_r\mathfrak{H}) = 0$, что влечет для тех же r выполнение равенств $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{B}_{0,r}) = \mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{B}_{0,r}) = 0$. Таким образом, утверждение для $n = 0$ справедливо. Для дальнейших рассуждений введем также следующие обозначения: $i_c = \mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{B}_{0,p})$, $i_l = \mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{B}_{0,p})$.

Пусть теперь $n > 0$. Предположим сначала, что $|\pi \cap \omega| = 2$, причем $\pi \cap \omega = \{p, q\}$. Если $r \in \pi \cap \omega$ (первый подслучай), то для канонического ω-композиционного (ω-локального) спутника $V_{n,r}$ формации $\mathfrak{B}_{n,r}$, как отмечено выше, будем иметь $V_{n,r}(r) = \mathfrak{B}_{n,r}$ и $V_{n,r}(\bar{r}) = \mathfrak{B}_{n-1,\bar{r}} = F_n(\bar{r})$, где $\bar{r} \in (\pi \cap \omega) \setminus \{r\}$; при $r \in (\omega \setminus \pi) \cup \omega'$ (второй подслучай) имеем $V_{n,r}(r) = \mathfrak{B}_{n,r}$, если только $r \in \omega \setminus \pi$, и $V_{n,r}(\bar{r}) = \mathfrak{B}_{n-1,\bar{r}} = F_n(\bar{r})$ для любого $\bar{r} \in (\pi \cap \omega) \setminus \{r\} = \pi \cap \omega$. Индукцией по n покажем, что в первом подслучае, когда $r \in \pi \cap \omega$, для индекса ω-композиционности $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{B}_{n,r})$ формации $\mathfrak{B}_{n,r}$ имеет место:

если n четно, то

$$\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{B}_{n,r}) = \begin{cases} i_c(n), & \text{если } r = p, \\ n, & \text{если } r = q; \end{cases}$$

если n нечетно, то

$$\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{B}_{n,r}) = \begin{cases} n, & \text{если } r = p, \\ i_c(n), & \text{если } r = q, \end{cases}$$

где $i_c(n) = i_c + n$ — при $i_c < \infty$, и $i_c(n) = \infty$ — при $i_c = \infty$.

Действительно, для $n = 0$ ввиду нашего определения $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{V}_{0,p}) = i_c$, а вследствие ранее доказанного $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{V}_{(0,q)}) = 0$, и следовательно, утверждение верно. Вновь считая, что $n > 0$, а также предполагая справедливость данного утверждения для $n - 1$, с учетом единственности элемента $\bar{r} \in (\pi \cap \omega) \setminus \{r\}$, соотношения $\pi\big(\mathrm{Com}(\mathfrak{V}_{n,r})\big) \cap \omega = \pi \cap \omega$, равенств $V_{n,r}(r) = \mathfrak{V}_{n,r}$ и $V_{n,r}(\bar{r}) = \mathfrak{V}_{n-1,\bar{r}}$, а также неравенства $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{V}_{n,r}) \geq n$, в силу леммы 14 заключаем, что $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{V}_{n,r}) = \mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{V}_{n-1,\bar{r}}) + 1$, если $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{V}_{n-1,\bar{r}}) < \infty$, и $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{V}_{n,r}) = \infty$, если $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{V}_{n-1,\bar{r}}) = \infty$. Из последнего непосредственно вытекает требуемое, т. е. справедливость данного утверждения для любого целого неотрицательного n.

Проводя аналогичные рассуждения для индекса ω-локальности $\mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{V}_{n,r})$ формации $\mathfrak{V}_{n,r}$, учитывая равенство $\mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{V}_{0,p}) = i_l$, соотношение $\pi(\mathfrak{V}_{n,r}) \cap \omega = \pi \cap \omega$ и неравенство $\mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{V}_{n,r}) \geq n$, а также принимая во внимание теорему 13, имеем:

если n четно, то

$$\mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{V}_{n,r}) = \begin{cases} i_l(n), & \text{если } r = p, \\ n, & \text{если } r = q; \end{cases}$$

если n нечетно, то

$$\mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{V}_{n,r}) = \begin{cases} n, & \text{если } r = p, \\ i_l(n), & \text{если } r = q, \end{cases}$$

где $i_l(n) = i_l + n$ — при $i_l < \infty$, и $i_l(n) = \infty$ — при $i_l = \infty$.

Рассмотрим теперь второй подслучай, когда $r \in (\omega \setminus \pi) \cup \omega'$. Как отмечалось выше, $V_{n,r}(r) = \mathfrak{V}_{n,r}$, если только $r \in \omega \setminus \pi$, $V_{n,r}(\bar{r}) = \mathfrak{V}_{n-1,\bar{r}}$ для любого $\bar{r} \in \pi \cap \omega = \{p, q\}$, $V_{n,r}(\bar{r}) = \varnothing$ для всякого $\bar{r} \in \omega \setminus (\pi \cup \{r\})$ и $V_{n,r}(\omega') = \mathfrak{V}_{n,r}$. По доказанному для каждого $\bar{r} \in \{p, q\}$ справедливо неравенство $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{V}_{n-1,\bar{r}}) \geq n - 1$, причем $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{V}_{n-1,\bar{r}_0}) = n - 1$, где $\bar{r}_0 = p$, если n четно, и $\bar{r}_0 = q$, если n нечетно. Тогда в силу леммы 14 заключаем, что для любого $r \in (\omega \setminus \pi) \cup \omega'$ имеют место равенства $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{V}_{n,r}) = \mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{V}_{n-1,\bar{r}_0}) + 1 = (n-1) + 1 = n$. Аналогичное рассуждение для $\mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{V}_{n,r})$ (с использованием леммы 13 вместо леммы 14) показывает справедливость для данного подслучая также равенства $\mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{V}_{n,r}) = n$. Вспоминая, наконец, что для каждого $\bar{r} \in \pi \cap \omega = \{p, q\}$ имеет место $F_n(\bar{r}) = \mathfrak{V}_{n-1,\bar{r}} = V_{n,r}(\bar{r})$, приходим к выводу, что для двух рассматриваемых подслучаев (т. е. для всего случая $|\pi \cap \omega| = 2$) для формации $\mathfrak{F}_n$ верны равенства $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{F}_n) = \mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{F}_n) = n$.

Пусть теперь $|\pi \cap \omega| \geq 3$. Предположим, что $n > 0$ и выполнены равенства $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{V}_{n-1,p}) = i_c$, $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{V}_{n-1,t}) = n - 1$ для любого $t \in p'$, если $n = 1$, и $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{V}_{n-1,t}) = n - 1$ для всякого $t \in \mathbb{P}$, если $n \geq 2$. Зафиксируем произвольное простое q. Выбирая теперь произвольное r с условием $r \in (\pi \cap \omega) \setminus \{p, q\}$, если $q \neq p$, $q \in \omega$, и $r \in (\pi \cap \omega) \setminus \{p\}$, если $q \neq p$, $q \in \omega'$ или $q = p$, — при $n = 1$, и $r \in (\pi \cap \omega) \setminus \{q\}$, если $q \in \omega$, и $r \in \pi \cap \omega$, если $q \notin \omega$, — при $n \geq 2$, видим, согласно предположению, что $\mathrm{Ind}_{\omega_c}\big(V_{n,q}(r)\big) = \mathrm{Ind}_{\omega_c}\big(\mathfrak{V}_{n-1,r}\big) = \mathrm{Ind}_{\omega_c}\big(F_n(r)\big) = n - 1$. Учитывая теперь базу индукции, равенство $\pi\big(\mathrm{Com}(\mathfrak{V}_{n,q})\big) \cap \omega = \pi \cap \omega$ или $\pi\big(\mathrm{Com}(\mathfrak{V}_{n,q})\big) \cap \omega = (\pi \cap \omega) \cup \{q\}$ — в зависимости от того, принадлежит ли q множеству $(\pi \cap \omega) \cup \omega'$ или $\omega \setminus \pi$ соответственно, принимая во внимание также равенство $\pi\big(\mathrm{Com}(\mathfrak{F}_n)\big) \cap \omega = \pi \cap \omega$ и неравенство $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{V}_{n,q}) \geq n$ (последнее — только при $q \in \omega$), из леммы 14 получаем, что $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{V}_{n,q}) = \mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{F}_n) = n$. Таким образом, для любого натурального n и всякого простого q имеют место равенства $\mathrm{Ind}_{\omega_c}\big(\mathfrak{V}_{n,q}\big) = \mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{F}_n) = n$.

Аналогичные рассуждения, но уже с применением леммы 13, приводят нас также к равенствам $\mathrm{Ind}_{\omega_l}\big(\mathfrak{V}_{n,q}\big) = \mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{F}_n) = n$, справедливым для всякого натурального числа n и произвольного простого q.

Итак, для любого целого неотрицательного n справедливы равенства $\mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{F}_n) = \mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{F}_n) = n$. Утверждение доказано.

Из доказательства утверждения 5 в силу следствия 7 и следствия 8 вытекает следующее

Утверждение 6. *Пусть ω — множество простых чисел с $|\omega| > 1$, q — произвольное простое, а n — произвольное целое неотрицательное число. И пусть $\mathfrak{F}_n = \mathfrak{N}_\pi^n \mathfrak{H}$, $\mathfrak{V}_{n,q} = \mathfrak{N}_q \mathfrak{N}_\pi^n \mathfrak{H}$, где $\mathfrak{H}$ — непустая формация, которая не является p-композиционной ни при каком $p \in \{r, s\}$, где r, s — некоторые различные простые числа из ω, π — такое множество простых чисел, что $\pi(\mathfrak{H}) \cap \omega \subseteq \pi$. Тогда*

$$\mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{F}_n) = \mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{F}_n) = \mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{V}_{n,q}) = \mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{V}_{n,q}) = n.$$

Следующие четыре утверждения также следуют из доказательства утверждения 5, при этом рассматриваются либо только насыщенные формации и соответствующие им спутники (утверждения 7 и 8), либо только композиционные (утверждения 9 и 10). Сообразно с этим в утверждениях 9 и 10 вместо леммы 10 в базе индукции используется лемма 11. Аналогично теорема 7 и замечание 2 работы [26] заменяются на теорему 6 и замечание 2 работы [27] соответственно. Отметим также, что обоснование утверждения 8 опирается также на следствие 8, а обоснование утверждения 10 — на следствие 7.

Утверждение 7. *Пусть $\mathfrak{H}$ — непустая не ω-насыщенная формация, π — такое множество простых чисел, что $\pi(\mathfrak{H}) \cap \omega \subseteq \pi$, причем $|\pi \cap \omega| > 1$, и n — целое неотрицательное число. И пусть $\mathfrak{F}_n = \mathfrak{N}_\pi^n \mathfrak{H}$. Тогда*

$$\mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{F}_n) = n.$$

Утверждение 8. *Пусть ω — множество простых чисел с $|\omega| > 1$, q — произвольное простое, а n — произвольное целое неотрицательное число. И пусть $\mathfrak{F}_n = \mathfrak{N}_\pi^n \mathfrak{H}$, $\mathfrak{B}_{n,q} = \mathfrak{N}_q \mathfrak{N}_\pi^n \mathfrak{H}$, где $\mathfrak{H}$ — непустая формация, которая не является p-насыщенной ни для какого $p \in \{r, s\}$, где r, s — некоторые различные простые числа из ω, π — такое множество простых чисел, что $\pi(\mathfrak{H}) \cap \omega \subseteq \pi$. Тогда*

$$\mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{F}_n) = \mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{B}_{n,q}) = n.$$

Утверждение 9. *Пусть $\mathfrak{H}$ — непустая не ω-композиционная формация, π — такое множество простых чисел, что $\pi\big(\mathrm{Com}(\mathfrak{H})\big) \cap \omega \subseteq \pi$, причем $|\pi \cap \omega| > 1$, и n — целое неотрицательное число. И пусть $\mathfrak{F}_n = \mathfrak{N}_\pi^n \mathfrak{H}$. Тогда*

$$\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{F}_n) = n.$$

Утверждение 10. *Пусть ω — множество простых чисел с $|\omega| > 1$, q — произвольное простое, а n — произвольное целое неотрицательное число. И пусть $\mathfrak{F}_n = \mathfrak{N}_\pi^n \mathfrak{H}$, $\mathfrak{B}_{n,q} = \mathfrak{N}_q \mathfrak{N}_\pi^n \mathfrak{H}$, где $\mathfrak{H}$ — непустая формация, которая не является p-композиционной ни при каком $p \in \{r, s\}$, где r, s — некоторые различные простые числа из ω, π — такое множество простых чисел, что $\pi\big(\mathrm{Com}(\mathfrak{H})\big) \cap \omega \subseteq \pi$. Тогда*

$$\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{F}_n) = \mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{B}_{n,q}) = n.$$

3. Условия вложимости решетки H^{ω_l} в решетку Θ^{ω_c}. Основной результат работы предварим определением и небольшим числом лемм.

Определение 13. *Пусть Θ — такая полная решетка формаций, что $\Theta \subseteq \Theta^{\omega_c}$, причем для любой Θ-формации ее канонический ω-композиционный спутник Θ-значен. И пусть для формации $\mathfrak{F}$ имеет место $\mathfrak{F} = CF_\omega(F) \in \Theta$. Для любой последовательности простых чисел $p_1, p_2 \dots, p_n$ ($n \in \mathbb{N}$) из ω определим ω-композиционный Θ-значный спутник $Fp_1p_2 \dots p_n$ следующим образом:*

1) Fp_1 — канонический ω-композиционный спутник Θ-формации $F(p_1)$;

2) $Fp_1p_2 \dots p_n$ — канонический ω-композиционный спутник Θ-формации $Fp_1p_2 \dots p_{n-1}(p_n)$, если $n \geq 2$.

Лемма 18. *Пусть Θ — такая полная решетка формаций, что $\Theta \subseteq \Theta^{\omega_c}$, причем для любой Θ-формации ее канонический ω-композиционный спутник Θ-значен. И пусть $\mathfrak{F} = CF_\omega(F) \in \Theta$, $p_1, p_2, \dots, p_n$ — некоторая последовательность простых чисел из ω ($n \in \mathbb{N}$). Тогда и только тогда последовательность $p_1, p_2, \dots, p_n$ является C-подходящей для $\mathfrak{F}$ ω-последовательностью, когда $p_1 \in \pi\big(\mathrm{Com}(\mathfrak{F})\big) \cap \omega$ и для любого $k \in \{2, \dots, n\}$ имеет место $p_k \in \pi\big(\mathrm{Com}(Fp_1 \dots p_{k-2}(p_{k-1}))\big) \cap \omega$ (при $k = 2$ мы отождествляем запись (спутник) $Fp_1 \dots p_{k-2}(a)$ с $F(a)$, где $a \in \omega \cup \{\omega'\}$).*

Доказательство. Если $n = 1$, то утверждение леммы очевидно. При $n > 1$ требуемое утверждение следует, как несложно видеть, из справедливого для всякого $k \in \{1, \dots, n\}$ равенства $Fp_1 \dots p_{k-1}(p_k) = \mathfrak{F}(NC^{p_1 \cdots p_k})$. Последнее соотношение докажем индукцией по k.

Пусть $k = 1$. Заметим, что вследствие замечания 1 [27] для любой ω-композиционной формации $\mathfrak{H}$ такой, что $\mathfrak{H} = CF_\omega(H)$, имеет место $H(p) = \mathfrak{N}_p \mathfrak{H}(C^p) = \mathfrak{H}(NC^p)$ для всех $p \in \omega$. По условию $\mathfrak{F} = CF_\omega(F) \in \Theta$ и, кроме того, спутник F Θ-значен. Следовательно, так как $p_1 \in \omega$, имеем $F(p_1) = \mathfrak{F}(NC^{p_1})$. Итак, при $k = 1$ рассматриваемое равенство верно.

Пусть теперь $k > 1$ и предположим, что $Fp_1 \dots p_{k-2}(p_{k-1}) = \mathfrak{F}(NC^{p_1 \cdots p_{k-1}})$. Учитывая базу индукции, а также принимая во внимание, что $Fp_1p_2 \dots p_{k-2}(p_{k-1}) = CF_\omega(Fp_1p_2 \dots p_{k-1}) \in \Theta$, причем спутник $Fp_1p_2 \dots p_{k-1}$ является Θ-значным, в силу предположения и условия $p_k \in \omega$ имеем

$$Fp_1p_2 \dots p_{k-1}(p_k) = Fp_1 \dots p_{k-2}(p_{k-1})(NC^{p_k}) = \mathfrak{F}(NC^{p_1 \cdots p_{k-1}})(NC^{p_k}) = \mathfrak{F}(NC^{p_1 p_2 \cdots p_k}).$$

Итак, для любого $k \in \{1, \dots, n\}$ имеет место $Fp_1 \dots p_{k-1}(p_k) = \mathfrak{F}(NC^{p_1 \cdots p_k})$. Лемма доказана.

Лемма 19. *Пусть H и Θ — такие ω-частичные алгебры формаций, что $\mathrm{H} \subseteq \Theta$, $\mathrm{H}^{\omega_l} \subseteq \mathrm{H}$ и $\Theta^{\omega_c} \subseteq \Theta$, причем решетка Θ^{ω_c} индуктивна. Предположим также, что для всякого $i \in I$ формация $\mathfrak{F}_i = LF_\omega(F_i) \in \mathrm{H}^{\omega_l}$, где спутник F_i — канонический, $\mathfrak{H} = \vee_{\Theta^{\omega_c}}\big(\mathfrak{F}_i \mid i \in I\big)$, $\mathfrak{F} = \vee_{\mathrm{H}^{\omega_l}}\big(\mathfrak{F}_i \mid i \in I\big)$. Тогда*

1) $\pi\big(\mathrm{Com}(\mathfrak{H})\big) \cap \omega = \pi(\mathfrak{F}) \cap \omega$;

2) спутник $H = \vee_\Theta\big(F_i \mid i \in I\big)$ является внутренним ω-композиционным спутником формации $\mathfrak{H}$, а спутник $F = \vee_\mathrm{H}\big(F_i \mid i \in I\big)$ — внутренним ω-локальным спутником формации $\mathfrak{F}$;

3) предположим также, что $\mathrm{H}^{\omega_l} = \mathrm{H}$, $\Theta^{\omega_c} = \Theta$, и пусть, кроме того, $p_1, \dots, p_n$ — некоторая C-подходящая для $\mathfrak{F}$ ω-последовательность простых чисел ($n \in \mathbb{N}$). Тогда последовательность простых чисел $p_1, \dots, p_n$ является C-подходящей для $\mathfrak{H}$ ω-последовательностью, спутники $H = \vee_\Theta\big(F_i \mid i \in I\big)$, $Hp_1 = \vee_\Theta\big(F_ip_1 \mid i \in I\big), \dots, Hp_1 \dots p_n = \vee_\Theta\big(F_ip_1 \dots p_n \mid i \in I\big)$ являются каноническими ω-композиционными спутниками формаций $\mathfrak{H}$, $H(p_1), \dots, Hp_1 \dots p_{n-1}(p_n)$ соответственно, а спутники $F = \vee_\mathrm{H}\big(F_i \mid i \in I\big)$, $Fp_1 = \vee_\mathrm{H}\big(F_ip_1 \mid$

$i \in I), \ldots, Fp_1 \ldots p_n = \vee_{\mathrm{H}}(F_i p_1 \ldots p_n \mid i \in I)$ — каноническими ω-локальными спутниками формаций $\mathfrak{F}$, $F(p_1), \ldots, Fp_1 \ldots p_{n-1}(p_n)$ соответственно.

Доказательство. 1) Заметим прежде всего, что ввиду леммы 4 и условия имеют место включения $\mathrm{H}^{\omega_l} \subseteq \mathrm{H}^{\omega_c} \subseteq \Theta^{\omega_c}$. Следовательно, $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$. Поэтому с учетом леммы 7 имеем $\pi\big(\mathrm{Com}(\mathfrak{H})\big) \cap \omega \subseteq \pi\big(\mathrm{Com}(\mathfrak{F})\big) \cap \omega = \pi(\mathfrak{F}) \cap \omega$. Значит, если $\pi(\mathfrak{F}) \cap \omega = \varnothing$, то утверждение верно. Пусть $\pi(\mathfrak{F}) \cap \omega \neq \varnothing$ и $p \in \pi(\mathfrak{F}) \cap \omega$. Так как $\mathfrak{F} = \vee_{\mathrm{H}^{\omega_l}}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I) = \mathrm{H}^{\omega_l}\mathrm{form}\big(\bigcup\limits_{i\in I}\mathfrak{F}_i\big)$, то вследствие леммы 5 [26] $\pi(\mathfrak{F}) \cap \omega = \pi\big(\bigcup\limits_{i\in I}\mathfrak{F}_i\big) \cap \omega$. Следовательно, $p \in \pi\big(\bigcup\limits_{i\in I}\mathfrak{F}_i\big) \cap \omega = \big(\bigcup\limits_{i\in I}\pi(\mathfrak{F}_i)\big) \cap \omega = \bigcup\limits_{i\in I}\big(\pi(\mathfrak{F}_i) \cap \omega\big)$. Из последнего вытекает существование такого $j \in I$, что $p \in \pi(\mathfrak{F}_j) \cap \omega$. Поскольку $\mathfrak{F}_j \in H^{\omega_l}$, то ввиду леммы 7 $\pi(\mathfrak{F}_j) \cap \omega = \pi\big(\mathrm{Com}(\mathfrak{F}_j)\big) \cap \omega$. Значит, $p \in \pi\big(\mathrm{Com}(\mathfrak{F}_j)\big) \cap \omega$. Поскольку $\mathfrak{H} = \vee_{\Theta^{\omega_c}}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I) = \Theta^{\omega_c}\mathrm{form}\big(\bigcup\limits_{i\in i}\mathfrak{F}_i\big)$, заключаем, что $p \in \pi\big(\mathrm{Com}(\mathfrak{H})\big) \cap \omega$. Итак, $\pi\big(\mathrm{Com}(\mathfrak{F})\big) \cap \omega \subseteq \pi\big(\mathrm{Com}(\mathfrak{H})\big) \cap \omega$. Таким образом, $\pi\big(\mathrm{Com}(\mathfrak{H})\big) \cap \omega = \pi\big(\mathrm{Com}(\mathfrak{F})\big) \cap \omega$.

2) Поскольку $\mathfrak{F}_i$ — H^{ω_l}-формация ($i \in I$) и H — ω-частичная алгебра формаций, то вследствие леммы 4 $\mathfrak{F}_i = LF_\omega(F_i) = CF_\omega(F_i)$, причем все значения спутника F_i принадлежат структуре $\mathrm{H} \subseteq \Theta$. В силу условия из леммы 21 [13] следует, что решетка H^{ω_l} является индуктивной. Учитывая также индуктивность решетки Θ^{ω_c}, видим, что спутник $H = \vee_\Theta\big(F_i \mid i \in I\big)$ является ω-композиционным спутником формации $\mathfrak{H} = \vee_{\Theta^{\omega_c}}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I)$, а спутник $F = \vee_{\mathrm{H}}\big(F_i \mid i \in I\big)$ — ω-локальным спутником формации $\mathfrak{F} = \vee_{\mathrm{H}^{\omega_l}}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I)$. Из включений $\Theta^{\omega_c} \subseteq \Theta$ и $\mathrm{H}^{\omega_l} \subseteq \mathrm{H}$ следует, что спутники H и F — внутренние.

3) Предположим теперь, что $\mathrm{H}^{\omega_l} = \mathrm{H}$, $\Theta^{\omega_c} = \Theta$. И пусть $p_1, \ldots, p_n$ — произвольная C-подходящая для $\mathfrak{F}$ ω-последовательность простых чисел ($n \in \mathbb{N}$). Заметим, что так как H — ω-частичная алгебра формаций, то вследствие леммы 4 имеет место $\mathrm{H} = \mathrm{H}^{\omega_l} \subseteq \mathrm{H}^{\omega_c}$, причем для любой H-формации ее канонический ω-композиционный спутник (совпадающий с каноническим ω-локальным спутником) H-значен. Последнее обстоятельство делает корректным наряду со спутниками H и F формаций $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F}$ соответственно также определение формаций $H(p_1), \ldots, Hp_1 \ldots p_{n-1}(p_n)$ и $F(p_1), \ldots, Fp_1 \ldots p_{n-1}(p_n)$ и соответствующих им спутников $Hp_1, \ldots, Hp_1 \ldots p_n$ и $Fp_1, \ldots, Fp_1 \ldots p_n$. Напомним, что, как отмечено в 2), решетка $\mathrm{H}^{\omega_l} = \mathrm{H}$ индуктивна.

Доказательство утверждения проведем индукцией по n.

Пусть $n = 1$. Из условия вследствие леммы 7 имеем $p_1 \in \pi\big(\mathrm{Com}(\mathfrak{F})\big) \cap \omega = \pi(\mathfrak{F}) \cap \omega$. Ввиду 1) $\pi\big(\mathrm{Com}(\mathfrak{H})\big) \cap \omega = \pi(\mathfrak{F}) \cap \omega$, и следовательно, $p_1 \in \pi\big(\mathrm{Com}(\mathfrak{H})\big) \cap \omega$. Далее, из 2) вытекает, что спутник $H = \vee_\Theta\big(F_i \mid i \in I\big)$ является внутренним ω-композиционным спутником формации $\mathfrak{H}$, а спутник $F = \vee_{\mathrm{H}}\big(F_i \mid i \in I\big)$ — внутренним ω-локальным спутником формации $\mathfrak{F}$ (поскольку формация $\mathfrak{F}_i \in \mathrm{H} = \mathrm{H}^{\omega_l}$ для каждого $i \in I$, то, как отмечено выше, $\mathfrak{F}_i = LF_\omega(F_i) = CF_\omega(F_i)$ и спутник F_i H-значен). Применяя теперь предложение 1 и предложение 3 и учитывая условие и определение канонического спутника, для любого $p \in \omega$ имеем

$$H(p) = \vee_\Theta(F_i(p) \mid i \in I) = \vee_\Theta(\mathfrak{N}_p F_i(p) \mid i \in I) = \mathfrak{N}_p\big(\vee_\Theta(F_i(p) \mid i \in I)\big) = \mathfrak{N}_p H(p),$$
$$F(p) = \vee_{\mathrm{H}}(F_i(p) \mid i \in I) = \vee_{\mathrm{H}}(\mathfrak{N}_p F_i(p) \mid i \in I) = \mathfrak{N}_p\big(\vee_{\mathrm{H}}(F_i(p) \mid i \in I)\big) = \mathfrak{N}_p F(p).$$

Кроме того,

$$H(\omega') = \vee_\Theta(F_i(\omega') \mid i \in I) = \vee_\Theta(\mathfrak{F}_i \mid i \in I) = \vee_{\Theta^{\omega_c}}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I) = \mathfrak{H},$$
$$F(\omega') = \vee_{\mathrm{H}}(F_i(\omega') \mid i \in I) = \vee_{\mathrm{H}}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I) = \vee_{\mathrm{H}^{\omega_l}}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I) = \mathfrak{F}.$$

Следовательно, H — канонический ω-композиционный спутник формации $\mathfrak{H}$, а F — канонический ω-локальный спутник формации $\mathfrak{F}$.

По доказанному $H(p_1) = \vee_\Theta(F_i(p_1) \mid i \in I) = \vee_{\Theta^{\omega_c}}(F_i(p_1) \mid i \in I)$, $F(p_1) = \vee_{\mathrm{H}}(F_i(p_1) \mid i \in I) = \vee_{\mathrm{H}^{\omega_l}}(F_i(p_1) \mid i \in I)$ и, кроме того, $F_i(p_1) \in \mathrm{H} = \mathrm{H}^{\omega_l}$ для любого $i \in I$. Последнее, как отмечено выше (см. лемма 4) влечет $F_i(p_1) = LF_\omega(F_i p_1) = CF_\omega(F_i p_1)$, причем все значения спутника $F_i p_1$ принадлежат решетке $\mathrm{H} \subseteq \Theta$. Тогда ввиду индуктивности решеток $\Theta^{\omega_c} = \Theta$ и $\mathrm{H}^{\omega_l} = \mathrm{H}$ заключаем, что $Hp_1 = \vee_\Theta(F_i p_1 \mid i \in I)$ — внутренний ω-композиционный спутник формации $H(p_1)$, а $Fp_1 = \vee_{\mathrm{H}}(F_i p_1 \mid i \in I)$ — внутренний ω-локальный спутник формации $F(p_1)$.

Применяя предложение 1 и предложение 3 с учетом условия и определения канонического спутника, для любого $q \in \omega$ получаем

$$Hp_1(q) = \vee_\Theta(F_i p_1(q) \mid i \in I) = \vee_\Theta(\mathfrak{N}_q F_i p_1(q) \mid i \in I) = \mathfrak{N}_q\big(\vee_\Theta(F_i p_1(q) \mid i \in I)\big) = \mathfrak{N}_q Hp_1(q),$$
$$Fp_1(q) = \vee_{\mathrm{H}}(F_i p_1(q) \mid i \in I) = \vee_{\mathrm{H}}(\mathfrak{N}_q F_i p_1 \mid i \in I) = \mathfrak{N}_q\big(\vee_{\mathrm{H}}(F_i p_1(q) \mid i \in I)\big) = \mathfrak{N}_q Fp_1(q).$$

Несложно видеть также, что

$$Hp_1(\omega') = \vee_\Theta(F_i p_1(\omega') \mid i \in I) = \vee_\Theta(F_i(p_1) \mid i \in I) = \vee_{\Theta^{\omega_c}}(F_i(p_1) \mid i \in I) = H(p_1),$$
$$Fp_1(\omega') = \vee_{\mathrm{H}}(F_i p_1(\omega') \mid i \in I) = \vee_{\mathrm{H}}(F_i(p_1) \mid i \in I) = \vee_{\mathrm{H}^{\omega_l}}(F_i(p_1) \mid i \in I) = F(p_1).$$

Таким образом, Hp_1 — канонический ω-композиционный спутник формации $H(p_1)$, а Fp_1 — канонический ω-локальный спутник формации $F(p_1)$. Тем самым доказано, что рассматриваемое утверждение для случая $n = 1$ справедливо.

Пусть теперь $n > 1$ и предположим, что данное утверждение верно для $n - 1$, т. е. ω-последовательность простых чисел $p_1, \dots, p_{n-1}$ является C-подходящей для формации $\mathfrak{H}$ и, помимо этого, для всех $j \in \{1, \dots, n-1\}$ спутники H и $Hp_1 \dots p_j = \vee_\Theta\big(F_i p_1 \dots p_j \mid i \in I\big)$ являются каноническими ω-композиционными спутниками формаций $\mathfrak{H}$ и $Hp_1 \dots p_{j-1}(p_j)$ соответственно, а спутники F и $Fp_1 \dots p_j = \vee_{\mathrm{H}}\big(F_i p_1 \dots p_j \mid i \in I\big)$ — каноническими ω-локальными спутниками формаций $\mathfrak{F}$ и $Fp_1 \dots p_{j-1}(p_j)$ соответственно (при $j = 1$ мы отождествляем запись (спутник) $Hp_1 \dots p_{j-1}(a)$ с $H(a)$, а запись (спутник) $Fp_1 \dots p_{j-1}(a)$ — с $F(a)$, где $a \in \omega \cup \{\omega'\}$; упомянутое относится также к записи (спутнику) $F_i p_1 \dots p_{j-1}(a)$ для каждого $i \in I$).

Так как последовательность $p_1, \dots, p_n$ C-подходит для $\mathfrak{F}$, то с учетом леммы 18 и леммы 7 $p_n \in \pi\big(\mathrm{Com}(Fp_1 \dots p_{n-2}(p_{n-1}))\big) \cap \omega = \pi\big(Fp_1 \dots p_{n-2}(p_{n-1})\big) \cap \omega$. Согласно нашему предположению,

$$Hp_1 \dots p_{n-2}(p_{n-1}) = \vee_\Theta(F_i p_1 \dots p_{n-2}(p_{n-1}) \mid i \in I) = \vee_{\Theta^{\omega_c}}(F_i p_1 \dots p_{n-2}(p_{n-1}) \mid i \in I),$$
$$Fp_1 \dots p_{n-2}(p_{n-1}) = \vee_{\mathrm{H}}(F_i p_1 \dots p_{n-2}(p_{n-1}) \mid i \in I) = \vee_{\mathrm{H}^{\omega_l}}(F_i p_1 \dots p_{n-2}(p_{n-1}) \mid i \in I).$$

Кроме того, ясно, что $F_i p_1 \dots p_{n-2}(p_{n-1}) \in \mathrm{H} = \mathrm{H}^{\omega_l}$ для каждого $i \in I$. Теперь в силу 1) имеем

$$\pi\big(\mathrm{Com}(Hp_1 \dots p_{n-2}(p_{n-1}))\big) \cap \omega = \pi\big(Fp_1 \dots p_{n-2}(p_{n-1})\big) \cap \omega.$$

Последнее влечет $p_n \in \pi\big(\mathrm{Com}(Hp_1 \dots p_{n-2}(p_{n-1}))\big) \cap \omega$, откуда с учетом леммы 18 и предположения получаем, что $p_1, \dots, p_n$ — C-подходящая для $\mathfrak{H}$ ω-последовательность простых чисел.

Далее, поскольку спутник $Hp_1 \dots p_{n-1}$ является каноническим ω-композиционным спутником формации $Hp_1 \dots p_{n-2}(p_{n-1})$, а спутник $Fp_1 \dots p_{n-1}$ — каноническим ω-локальным спутником формации $Fp_1 \dots p_{n-2}(p_{n-1})$, то

$$Hp_1 \dots p_{n-1}(p_n) = \vee_\Theta(F_i p_1 \dots p_{n-1}(p_n) \mid i \in I) = \vee_{\Theta^{\omega_c}}(F_i p_1 \dots p_{n-1}(p_n) \mid i \in I),$$
$$Fp_1 \dots p_{n-1}(p_n) = \vee_{\mathrm{H}}(F_i p_1 \dots p_{n-1}(p_n) \mid i \in I) = \vee_{\mathrm{H}^{\omega_l}}(F_i p_1 \dots p_{n-1}(p_n) \mid i \in I),$$

причем формация $F_i p_1 \dots p_{n-1}(p_n) \in \mathrm{H} = \mathrm{H}^{\omega_l}$ для любого $i \in I$. Имеем (см. лемма 4)

$$F_i p_1 \dots p_{n-1}(p_n) = LF_\omega(F_i p_1 \dots p_n) = CF_\omega(F_i p_1 \dots p_n),$$

где все значения спутника $F_i p_1 \dots p_n$ принадлежат решетке $\mathrm{H} \subseteq \Theta$. Следовательно, в силу индуктивности решеток $\Theta^{\omega_c} = \Theta$ и $\mathrm{H}^{\omega_l} = \mathrm{H}$ спутник $Hp_1 \dots p_n = \vee_\Theta(F_i p_1 \dots p_n \mid i \in I)$ является внутренним ω-композиционным спутником формации $Hp_1 \dots p_{n-1}(p_n)$, а спутник $Fp_1 \dots p_n = \vee_{\mathrm{H}}(F_i p_1 \dots p_n \mid i \in I)$ — внутренним ω-локальным спутником формации $Fp_1 \dots p_{n-1}(p_n)$.

Применяя теперь предложение 1 и предложение 3 с учетом условия и определений, для любого $r \in \omega$ получаем

$$\begin{aligned} Hp_1 \dots p_n(r) &= \vee_\Theta(F_i p_1 \dots p_n(r) \mid i \in I) = \vee_\Theta(\mathfrak{N}_r F_i p_1 \dots p_n(r) \mid i \in I) = \\ &= \mathfrak{N}_r\big(\vee_\Theta(F_i p_1 \dots p_n(r) \mid i \in I)\big) = \mathfrak{N}_r H p_1 \dots p_n(r), \\ Fp_1 \dots p_n(r) &= \vee_{\mathrm{H}}(F_i p_1 \dots p_n(r) \mid i \in I) = \vee_{\mathrm{H}}(\mathfrak{N}_r F_i p_1 \dots p_n \mid i \in I) = \\ &= \mathfrak{N}_r\big(\vee_{\mathrm{H}}(F_i p_1 \dots p_n(r) \mid i \in I)\big) = \mathfrak{N}_r F p_1 \dots p_n(r). \end{aligned}$$

Ясно также, что

$$\begin{aligned} Hp_1 \dots p_n(\omega') &= \vee_\Theta(F_i p_1 \dots p_n(\omega') \mid i \in I) = \vee_\Theta(F_i p_1 \dots p_{n-1}(p_n) \mid i \in I) = \\ &= \vee_{\Theta^{\omega_c}}(F_i p_1 \dots p_{n-1}(p_n) \mid i \in I) = Hp_1 \dots p_{n-1}(p_n), \\ Fp_1(\omega') &= \vee_{\mathrm{H}}(F_i p_1 \dots p_n(\omega') \mid i \in I) = \vee_{\mathrm{H}}(F_i p_1 \dots p_{n-1}(p_n) \mid i \in I) = \\ &= \vee_{\mathrm{H}^{\omega_l}}(F_i p_1 \dots p_{n-1}(p_n) \mid i \in I) = Fp_1 \dots p_{n-1}(p_n). \end{aligned}$$

Таким образом, спутник $Hp_1 \dots p_n$ является каноническим ω-композиционным спутником формации $Hp_1 \dots p_{n-1}(p_n)$, а спутник $Fp_1 \dots p_n$ – каноническим ω-локальным спутником формации $Fp_1 \dots p_{n-1}(p_n)$, т. е. рассматриваемое утверждение верно и для n. Последнее и завершает доказательство утверждения 3) и леммы 19.

Лемма 20. *Пусть $\mathfrak{X}$ — класс Фиттинга, $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F}$ — непустые формации, T — группа с $T_{\mathfrak{X}} = 1$ такая, что $T \in \mathfrak{F}$. Тогда если для любой монолитической группы U с $U_{\mathfrak{X}} = 1$ условие $U \in \mathfrak{F}$ влечет $U \in \mathfrak{H}$, то $T \in \mathfrak{H}$. Если, кроме того, $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}\mathfrak{X}$ — радикальная формация, то для любой группы $G \in \mathfrak{F}$ имеет место включение $G^{\mathfrak{H}} \subseteq G_{\mathfrak{X}}$.*

Доказательство. Если группа T является монолитической, то утверждение леммы следует из условия. Пусть группа T не является монолитической, и $\mathrm{Soc}(T) = N_1 \times \ldots \times N_k = \prod_{j=1}^{k}{}^{\times} N_j$, где N_j — минимальная нормальная подгруппа группы T, $k > 1$, $k \in \mathbb{N}$, $j = 1, \ldots, k$. Обозначим через M_i наибольшую нормальную в T подгруппу, содержащую $N_1 \times \ldots\ N_{i-1} \times N_{i+1} \times \ldots \times N_k = \prod_{j \neq i}{}^{\times} N_j$, но не содержащую N_i, где $i = 1, \ldots, k$. Тогда, как следует из доказательства леммы 4.1.3 [6], с. 152 факторгруппа T/M_i — монолитическая группа с монолитом $N_i M_i/M_i$, T-изоморфным N_i, и, кроме того, $M_1 \cap \ldots \cap M_k = 1$. Значит, так как по условию $\mathfrak{X}$ является классом Фиттинга и $T_{\mathfrak{X}} = 1$, то $(T/M_i)_{\mathfrak{X}} = 1$. Учитывая последнее, вследствие включения $T/M_i \in \mathfrak{F}$ и условия видим, что $T/M_i \in \mathfrak{H}$. Следовательно, $T \cong T/1 = T/\big(\bigcap_{i=1}^{k} M_i\big) \in \mathrm{R}_0(T/M_1, \ldots, T/M_k) \subseteq \mathfrak{H}$.

Если, кроме того, $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}\mathfrak{X}$ — радикальная формация и $G \in \mathfrak{F}$, то $\big(G/G_{\mathfrak{X}}\big)_{\mathfrak{X}} = G_{\mathfrak{X}}/G_{\mathfrak{X}} \cong 1$. Так как $G \in \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}$ — формация, то и $G/G_{\mathfrak{X}} \in \mathfrak{F}$. Поэтому ввиду доказанного $G/G_{\mathfrak{X}} \in \mathfrak{H}$. Последнее влечет $G^{\mathfrak{H}} \subseteq G_{\mathfrak{X}}$. Лемма доказана.

Поскольку $\mathfrak{S}_\omega \mathfrak{S}_\omega = \mathfrak{S}_\omega$ — радикальная формация и для произвольной группы G в рамках наших определений $R_\omega(G) = G_{\mathfrak{S}_\omega}$, из леммы ПР-6 получаем следующее утверждение.

Лемма 21. *Пусть $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F}$ — непустые формации, T — группа с $R_\omega(T) = 1$ такая, что $T \in \mathfrak{F}$. Тогда если для любой монолитической группы U с $R_\omega(U) = 1$ условие $U \in \mathfrak{F}$ влечет $U \in \mathfrak{H}$, то и $T \in \mathfrak{H}$. В частности, для любой группы $G \in \mathfrak{F}$ имеет место включение $G^{\mathfrak{H}} \subseteq R_\omega(G)$.*

Основным результатом работы является следующая

Теорема 1. *Пусть H и Θ — такие ω-частичные алгебры формаций, что $\mathrm{H} \subseteq \Theta$, $\mathrm{H}^{\omega_l} \subseteq \mathrm{H}$ и $\Theta^{\omega_c} \subseteq \Theta$, причем решетка Θ^{ω_c} индуктивна. Предположим также, что выполнено следующее условие: либо $\mathrm{H}^{\omega_l} \subsetneq \mathrm{H}$ и H — полная подрешетка в Θ, либо $\mathrm{H}^{\omega_l} = \mathrm{H}$ и $\Theta^{\omega_c} = \Theta$. Тогда если для произвольного набора $\{\mathfrak{H}_j \mid j \in J\}$ формаций из H^{ω_l} и для любой монолитической группы A с $R_\omega(A) = 1$ условие $A \in \vee_{\mathrm{H}^{\omega_l}}\big(\mathfrak{H}_j \mid j \in J\big)$ влечет $A \in \vee_{\Theta^{\omega_c}}\big(\mathfrak{H}_j \mid j \in J\big)$, то решетка H^{ω_l} является полной подрешеткой решетки Θ^{ω_c}.*

Доказательство. Прежде всего заметим, что вследствие леммы 4 и условия имеют место включения $\mathrm{H}^{\omega_l} \subseteq \mathrm{H}^{\omega_c} \subseteq \Theta^{\omega_c}$, из которых следует, что произвольная H^{ω_l}-формация является Θ^{ω_c}-формацией и, в частности, $\mathfrak{M}_{\mathrm{H}^{\omega_l}} \subseteq \mathfrak{M}_{\Theta^{\omega_c}}$.

Пусть $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ — произвольный набор H^{ω_l}-формаций, F_i — канонический ω-локальный спутник формации $\mathfrak{F}_i$,

$$\mathfrak{H} = \vee_{\Theta^{\omega_c}}\big(\mathfrak{F}_i \mid i \in I\big) = \Theta^{\omega_c}\mathrm{form}\big(\bigcup_{i \in I}\mathfrak{F}_i\big) \quad \text{и} \quad \mathfrak{F} = \vee_{\mathrm{H}^{\omega_l}}\big(\mathfrak{F}_i \mid i \in I\big) = \mathrm{H}^{\omega_l}\mathrm{form}\big(\bigcup_{i \in I}\mathfrak{F}_i\big).$$

Понятно, что $\bigcap_{i \in I}\mathfrak{F}_i$ — H^{ω_l}-формация, которая является нижней гранью для $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ как в решетке Θ^{ω_c}, так и в решетке H^{ω_l}. Понятно также, что $\mathfrak{H}$ является верхней гранью для $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ в решетке Θ^{ω_c}, а $\mathfrak{F}$ является верхней гранью для $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ в решетке H^{ω_l}. Докажем, что $\mathfrak{H} = \mathfrak{F}$. Включение $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$ очевидно. Следовательно, необходимо лишь показать, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$.

Если $\mathfrak{F} = \varnothing$, то доказываемое включение очевидно. В связи с этим далее считаем, что $\mathfrak{F} \neq \varnothing$. Предположим, что $\pi(\mathfrak{F}) \cap \omega = \varnothing$, и пусть G — произвольная группа из $\mathfrak{F} = \vee_{\mathrm{H}^{\omega_l}}\big(\mathfrak{F}_i \mid i \in I\big)$. Тогда $R_\omega(G) = 1$, и ввиду условия и леммы 21 заключаем, что $G \in \mathfrak{H} = \vee_{\Theta^{\omega_c}}\big(\mathfrak{F}_i \mid i \in I\big)$. Следовательно, $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$ и теорема в данном случае верна.

Пусть теперь $\pi(\mathfrak{F}) \cap \omega \neq \varnothing$. В силу леммы 19 $\pi\big(\mathrm{Com}(\mathfrak{H})\big) \cap \omega = \pi(\mathfrak{F}) \cap \omega$. Поэтому $\pi\big(\mathrm{Com}(\mathfrak{H})\big) \cap \omega \neq \varnothing$, и следовательно, $\mathfrak{H} \neq \varnothing$.

Предположим, что $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H} \neq \varnothing$, и пусть A — группа минимального порядка из $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H}$. Тогда A — монолитическая группа с монолитом $P = A^{\mathfrak{H}}$. Если $R_\omega(A) = 1$, то по условию $A \in \mathfrak{H}$. Противоречие. Значит, $R_\omega(A) \neq 1$, и следовательно, $P \subseteq R_\omega(A)$. Поэтому P — абелева p-группа для некоторого простого $p \in \omega$. Поскольку $\mathfrak{H}$ — непустая ω-композиционная формация, то ввиду леммы 3

$$P = C_A(P) = C^p(A) = F_p(A) = O_p(A).$$

Выше было отмечено, что вследствие леммы 19 $\pi\big(\mathrm{Com}(\mathfrak{H})\big) \cap \omega = \pi(\mathfrak{F}) \cap \omega$. Из указанной леммы следует также, что $\mathfrak{H} = CF_\omega(H)$ и $\mathfrak{F} = LF_\omega(F)$, где $H = \vee_\Theta\big(F_i \mid i \in I\big)$, $F = \vee_{\mathrm{H}}\big(F_i \mid i \in I\big)$ и, кроме того, спутники H и F — внутренние. Заметим, что ввиду условия и включения $\mathfrak{F}_i \in \mathrm{H}^{\omega_l}$ из леммы 8 [26] (см. также лемма 4) вытекает, что для каждого $i \in I$ спутник F_i H-значен (а потому, так как $\mathrm{H} \subseteq \Theta$, и Θ-значен).

Если $\mathrm{H}^{\omega_l} \subsetneq \mathrm{H}$, причем H является полной подрешеткой Θ, то

$$\begin{aligned} A/O_p(A) = A/P = A/F_p(A) \in F(p) = \big(\vee_{\mathrm{H}}(F_i \mid i \in I)\big)(p) = \vee_{\mathrm{H}}\big(F_i(p) \mid i \in I\big) = \\ = \vee_\Theta\big(F_i(p) \mid i \in I\big) = \big(\vee_\Theta(F_i \mid i \in I)\big)(p) = H(p), \end{aligned}$$

т. е.

$$A/O_p(A) \in H(p) = H(p) \cap \mathfrak{H}.$$

Следовательно, в силу леммы 4 [27] $A \in \mathfrak{H}$. Вновь полученное противоречие показывает, что в случае, когда $\mathrm{H}^{\omega_l} \subsetneq \mathrm{H}$ и H — полная подрешетка Θ, имеет место включение $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$.

Продолжим рассуждения, считая теперь, что $\mathrm{H}^{\omega_l} = \mathrm{H}$ и, кроме того, $\Theta^{\omega_c} = \Theta$. В таком случае, как следует из леммы 19, спутник H оказывается каноническим ω-композиционным спутником формации $\mathfrak{H}$, а спутник F — каноническим ω-локальным спутником формации $\mathfrak{F}$. Кроме того, ввиду леммы 4 F совпадает с каноническим ω-композиционным спутником $\mathfrak{F}$. Поскольку $p \in \pi(A) \cap \omega \subseteq \pi(\mathfrak{F}) \cap \omega$ и $\pi\big(\mathrm{Com}(\mathfrak{H})\big) \cap \omega = \pi(\mathfrak{F}) \cap \omega$ (см. лемма 19), то $p \in \pi\big(\mathrm{Com}(\mathfrak{H})\big) \cap \omega$, и следовательно, $H(p) \neq \varnothing$ (с учетом теоремы 1 [27] из последнего следует, в частности, что A не является p-группой). Далее, с учетом включения $\mathrm{H} \subseteq \Theta$ из задания спутников H и F имеем $H(p) \subseteq F(p)$ (см. также лемма 7 [27]). Более того, так как $A \notin \mathfrak{H}$, то $H(p) \subsetneq F(p)$. Действительно, поскольку $H(\omega') = \mathfrak{H}$ (спутник H — канонический) и $P = A^{\mathfrak{H}} \subseteq R_{\omega}(A)$, согласно лемме 9 [27]

$$A/C^{p}(A) = A/P \notin H(p),$$

но в то же время $A/P = A/F_p(A) \in F(p)$.

Обозначим группу $A/C^{p}(A)$ через A_1. Так как $A \neq 1$, то вследствие леммы 1 $C^{p}(A) \neq 1$. Заметим также, что поскольку $A_1 = A/C^{p}(A) \notin H(p) \neq \varnothing$, то $A_1 \neq 1$. Таким образом,

$$A_1 = A/C^{p}(A) \in F(p) \setminus H(p),\ H(p) \neq \varnothing,$$
$$C^{p}(A) \neq 1 \neq A_1.$$

В силу леммы 19 $\pi\big(\mathrm{Com}(H(p))\big) \cap \omega = \pi\big(F(p)\big) \cap \omega$ и, помимо этого, спутник $Hp = \vee_{\Theta}\big(F_i p \mid i \in I\big)$ является каноническим ω-композиционным спутником формации $H(p)$, а спутник $Fp = \vee_{\mathrm{H}}\big(F_i p \mid i \in I\big)$ — каноническим ω-локальным (вследствие леммы 4, и ω-композиционным) спутником формации $F(p)$. Отметим, что ввиду условия и включения $F_i(p) \in \mathrm{H} = \mathrm{H}^{\omega_l}$ из леммы 8 [26] (см. также лемма 4) вытекает, что для каждого $i \in I$ спутник $F_i p$ является H-значным (а следовательно, так как $\mathrm{H} \subseteq \Theta$, и Θ-значным).

Поскольку $A_1 \notin H(p)$, то $P_1 = A_1^{H(p)} \neq 1$. Далее, учитывая, что $A_1 \in F(p) = \vee_{\mathrm{H}}\big(F_i(p) \mid i \in I\big) = \vee_{\mathrm{H}^{\omega_l}}\big(F_i(p) \mid i \in I\big)$, $H(p) = \vee_{\Theta}\big(F_i(p) \mid i \in I\big) = \vee_{\Theta^{\omega_c}}\big(F_i(p) \mid i \in I\big)$, ввиду условия из леммы 21 имеем $P_1 = A_1^{H(p)} \subseteq R_{\omega}(A_1)$. Следовательно, так как $Hp(\omega') = H(p)$ (спутник Hp — канонический), то в силу леммы 9 [27] найдется такое простое $p_1 \in \pi\big(\mathrm{Com}(P_1)\big) \cap \omega$, что $A_1/C^{p_1}(A_1) \notin Hp(p_1)$.

Обозначим через A_2 группу $A_1/C^{p_1}(A_1)$. Учитывая, что формация $F(p) \in \mathrm{H} = \mathrm{H}^{\omega_l}$, а также принимая во внимание лемму 7, имеем $\pi\big(\mathrm{Com}(P_1)\big) \cap \omega \subseteq \pi\big(\mathrm{Com}(F(p))\big) \cap \omega = \pi\big(F(p)\big) \cap \omega = \pi\big(\mathrm{Com}(H(p))\big) \cap \omega$. Следовательно, так как $p_1 \in \pi\big(\mathrm{Com}(P_1)\big) \cap \omega$, то $p_1 \in \pi\big(\mathrm{Com}(H(p))\big) \cap \omega$ и $Hp(p_1) \neq \varnothing$ (с учетом леммы 18 из последнего следует, в частности, что ω-последовательность простых чисел p, p_1 является C-подходящей как для формации $\mathfrak{F}$, так и для формации $\mathfrak{H}$; см. также лемма 19). Так как $A_1 \neq 1$, то ввиду леммы 1 $C^{p_1}(A_1) \neq 1$. Заметим также, что поскольку $A_2 = A_1/C^{p_1}(A_1) \notin Hp(p_1) \neq \varnothing$, то $A_2 \neq 1$. Таким образом,

$$A_2 = A_1/C^{p_1}(A_1) \in Fp(p_1) \setminus Hp(p_1),\ Hp(p_1) \neq \varnothing,$$
$$C^{p_1}(A_1) \neq 1 \neq A_2.$$

Далее, вследствие леммы 19 справедливо равенство $\pi\big(\mathrm{Com}(Hp(p_1))\big) \cap \omega = \pi\big(Fp(p_1)\big) \cap \omega$ и, кроме того, спутник $Hpp_1 = \vee_{\Theta}\big(F_i pp_1 \mid i \in I\big)$ является каноническим ω-композиционным спутником формации $Hp(p_1)$, а спутник $Fpp_1 = \vee_{\mathrm{H}}\big(F_i pp_1 \mid i \in I\big)$ — каноническим ω-локальным (вследствие леммы 4, и ω-композиционным) спутником формации $Fp(p_1)$. При этом, в силу условия и включения $F_i p(p_1) \in \mathrm{H} = \mathrm{H}^{\omega_l}$ из леммы 8 [26] (см. также лемма 4) следует, что спутник $F_i pp_1$ является H-значным (ввиду включения $\mathrm{H} \subseteq \Theta$, и Θ-значным) для любого $i \in I$.

Так как $A_2 \notin Hp(p_1)$, то $P_2 = A_2^{Hp(p_1)} \neq 1$. Ввиду того, что $A_2 \in Fp(p_1) = \vee_{\mathrm{H}}\big(F_i p(p_1) \mid i \in I\big) = \vee_{\mathrm{H}^{\omega_l}}\big(F_i p(p_1) \mid i \in I\big)$, $Hp(p_1) = \vee_{\Theta}\big(F_i p(p_1) \mid i \in I\big) = \vee_{\Theta^{\omega_c}}\big(F_i p(p_1) \mid i \in I\big)$, согласно условию из леммы 21 имеем $P_2 = A_2^{Hp(p_1)} \subseteq R_{\omega}(A_2)$. Следовательно, в силу леммы 9 [27] существует такое простое $p_2 \in \pi\big(\mathrm{Com}(P_2)\big) \cap \omega$, что $A_2/C^{p_2}(A_2) \notin Hpp_1(p_2)$.

Обозначим через A_3 группу $A_2/C^{p_2}(A_2)$. Учитывая, что формация $Fp(p_1) \in \mathrm{H} = \mathrm{H}^{\omega_l}$, а также принимая во внимание лемму 7, аналогично имеем $\pi\big(\mathrm{Com}(P_2)\big) \cap \omega \subseteq \pi\big(\mathrm{Com}(Fp(p_1))\big) \cap \omega = \pi\big(Fp(p_1)\big) \cap \omega = \pi\big(\mathrm{Com}(Hp(p_1))\big) \cap \omega$. Следовательно, так как $p_2 \in \pi\big(\mathrm{Com}(P_2)\big) \cap \omega$, то $p_2 \in \pi\big(\mathrm{Com}(Hp(p_1))\big) \cap \omega$ и $Hpp_1(p_2) \neq \varnothing$. При этом с учетом леммы 18 последовательность простых чисел p, p_1, p_2 оказывается C-подходящей для $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ ω-последовательностью (см. также лемма 19). Вновь применив лемму 1 и проведя для группы A_2 такие же рассуждения, как и для группы A_1, получаем

$$A_3 = A_2/C^{p_2}(A_2) \in Fpp_1(p_2) \setminus Hpp_1(p_2),\ Hpp_1(p_2) \neq \varnothing,$$
$$C^{p_2}(A_2) \neq 1 \neq A_3.$$

По тем же самым соображениям группа A_3 будет удовлетворять аналогичным условиям. Продолжая этот процесс, мы получим группы

$$A_4 = A_3/C^{p_3}(A_3), \dots, A_n = A_{n-1}/C^{p_{n-1}}(A_{n-1}), \dots .$$

При этом для любого натурального k выполняются условия (мы полагаем $A_0 = A$ и $p_0 = p$)

$$A_k = A_{k-1}/C^{p_{k-1}}(A_{k-1}) \in Fp_0p_1\dots p_{k-2}(p_{k-1}) \setminus Hp_0p_1\dots p_{k-2}(p_{k-1}),\ Hp_0p_1\dots p_{k-2}(p_{k-1}) \neq \varnothing,$$
$$C^{p_{k-1}}(A_{k-1}) \neq 1 \neq A_k,$$

причем последовательность простых чисел $p_0, \dots, p_{k-1}$ является C-подходящей для формаций $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ ω-последовательностью (при $k = 1$ мы отождествляем запись (спутник) $Fp_0p_1\dots p_{k-2}(a)$ с $F(a)$, а запись (спутник) $Hp_0p_1\dots p_{k-2}(a)$ — с $H(a)$, где $a \in \omega \cup \{\omega'\}$).

Ввиду условия $C^{p_{k-1}}(A_{k-1}) \neq 1$ для построенной последовательности групп $A_0 = A$, A_1, $A_2, \dots$, $A_n, \dots$ имеем $|A_0| > |A_1| > |A_2| > \dots > |A_n| > \dots$. Но поскольку группа $A = A_0$ конечна, то на некотором шаге m мы получим, что $|A_m| = 1$, т. е. A_m — единичная группа ($m \in \mathbb{N}$). Имеет место противоречие.

Итак, наше предположение неверно, и в данном случае, т. е. когда $\mathrm{H}^{\omega_l} = \mathrm{H}$ и $\Theta^{\omega_c} = \Theta$, имеет место включение $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$. Таким образом, в обоих случаях справедливо равенство $\mathfrak{H} = \mathfrak{F}$. Теорема доказана.

Замечание 8. Как следует из теоремы 2.1 [12], для индуктивности решетки Θ^{ω_c} достаточно, чтобы Θ являлась ω-частичной алгеброй формаций, $\Theta^{\omega_c} \subseteq \Theta$ и для любой совокупности групп $\mathfrak{X}$ такой, что $(\mathfrak{X}) \subseteq \mathfrak{M}_{\Theta^{\omega_c}}$, имело место $\pi\big(\mathrm{Com}(\mathfrak{X})\big) \cap \omega = \pi\big(\mathrm{Com}(\mathfrak{V})\big) \cap \omega$, где $\mathfrak{V} = \Theta^{\omega_c}\mathrm{form}\,(\mathfrak{X})$. Таким образом, заменяя условие индуктивности решетки Θ^{ω_c} последним указанным условием, можно получить частный случай теоремы 1.

4. Следствия основного результата. Применение доказанной теоремы к конкретным решеткам формаций позволяет получить важные следствия.

Следствие 9. *Пусть τ_1 и τ_2 — подгрупповые функторы такие, что $\tau_1 \geq \tau_2$, причем $\tau_2 \leq \tau_{sn}$. Тогда решетка $l^{\tau_1}_{\omega_n}$ всех τ_1-замкнутых n-кратно ω-насыщенных формаций является полной подрешеткой решетки $c^{\tau_2}_{\omega_n}$ всех τ_2-замкнутых n-кратно ω-композиционных формаций.*

Доказательство. Индукция по n. Пусть $n = 0$. Тогда, как несложно видеть, ввиду условия $\tau_1 \geq \tau_2$ и определений имеем $l^{\tau_1}_{\omega_0} = c^{\tau_1}_{\omega_0} = \mathcal{F}^{\tau_1} \subseteq \mathcal{F}^{\tau_2} = c^{\tau_2}_{\omega_0}$, и если $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ — произвольный набор $\mathcal{F}^{\tau_1}$-формаций, то в силу следствия 1.2.24 [6], с. 24

$$l^{\tau_1}_{\omega_0}\mathrm{form}\big(\bigcup_{i\in I}\mathfrak{F}_i\big) = \tau_1\mathrm{form}\big(\bigcup_{i\in I}\mathfrak{F}_i\big) = \mathrm{form}\big(\bigcup_{i\in I}\mathfrak{F}_i\big) = \tau_2\mathrm{form}\big(\bigcup_{i\in I}\mathfrak{F}_i\big) = l^{\tau_2}_{\omega_0}\mathrm{form}\big(\bigcup_{i\in I}\mathfrak{F}_i\big).$$

Следовательно, $l^{\tau_1}_{\omega_0}$ является полной подрешеткой $l^{\tau_2}_{\omega_0}$, и утверждение верно.

Пусть $n > 0$ и рассматриваемое утверждение справедливо для $n - 1$. Покажем, что для решеток формаций $\mathrm{H} = l^{\tau_1}_{\omega_{n-1}}$ и $\Theta = c^{\tau_2}_{\omega_{n-1}}$ выполнены условия теоремы 1. Действительно, в силу лемм 5 и 6 структуры $l^{\tau_1}_{\omega_{n-1}}$ и $c^{\tau_2}_{\omega_{n-1}}$ являются частичными алгебрами формаций. Ввиду следствия 1 и условия $\tau_1 \geq \tau_2$, учитывая также, что $l^{\tau_1}_{\omega_0} = c^{\tau_1}_{\omega_0} \subseteq c^{\tau_2}_{\omega_0}$, для любого целого неотрицательного m имеем $l^{\tau_1}_{\omega_m} \subseteq c^{\tau_1}_{\omega_m} \subseteq c^{\tau_2}_{\omega_m}$. В частности, для $m = n - 1$ последнее влечет $\mathrm{H} = l^{\tau_1}_{\omega_{n-1}} \subseteq c^{\tau_2}_{\omega_{n-1}} = \Theta$, причем, согласно индуктивному предположению, $l^{\tau_1}_{\omega_{n-1}}$ — полная подрешетка $c^{\tau_2}_{\omega_{n-1}}$. Вследствие леммы 2 [34] (см. также [1], лемма 1.5.11, с. 60) имеют место равенства $\mathrm{H}^{\omega_l} = (l^{\tau_1}_{\omega_{n-1}})^{\omega_l} = l^{\tau_1}_{\omega_n}$, а вследствие лемм 2.1 и 3.1 [40] (см. также [1], лемма 4.6.3, с. 216) — равенства $\Theta^{\omega_c} = (c^{\tau_2}_{\omega_{n-1}})^{\omega_c} = c^{\tau_2}_{\omega_n}$. Включения $l^{\tau_1}_{\omega_n} \subseteq l^{\tau_1}_{\omega_{n-1}}$ и $c^{\tau_2}_{\omega_n} \subseteq c^{\tau_2}_{\omega_{n-1}}$ вытекают непосредственно из определений. В силу теоремы 1 [2] или теоремы 2.1 [40] (см. также [1], теорема 4.6.8, с. 223; [35], теорема) решетка $c^{\tau_2}_{\omega_n}$ индуктивна.

Заметим, далее, что если $n > 1$ и $|\omega| = 1$, то ввиду замечания 2 $l^{\tau_1}_{\omega_n} = l^{\tau_1}_{\omega_{n-1}}$, $c^{\tau_2}_{\omega_n} = c^{\tau_2}_{\omega_{n-1}}$, и следовательно, с учетом индуктивного предположения, $l^{\tau_1}_{\omega_n}$ — полная подрешетка $c^{\tau_2}_{\omega_n}$, т. е. доказываемое утверждение справедливо. Поэтому в дальнейшем считаем, что либо $n = 1$, либо $n > 1$ и $|\omega| > 1$ (т. к. $\omega \neq \varnothing$). В таком случае $\mathrm{H}^{\omega_l} = l^{\tau_1}_{\omega_n} \subsetneq l^{\tau_1}_{\omega_{n-1}} = \mathrm{H}$ и $\Theta^{\omega_c} = c^{\tau_2}_{\omega_n} \subsetneq c^{\tau_2}_{\omega_{n-1}} = \Theta$. В самом деле, вследствие теоремы 1 [27] (наследственная) формация $\mathfrak{A}$ всех абелевых групп не является p-композиционной ни для какого простого числа p. Поэтому если $n = 1$, то, рассматривая наряду с $\mathfrak{A}$ также формацию $\mathfrak{N}_q\mathfrak{A}$, с учетом утверждения 4 имеем

$$\mathfrak{A},\ \mathfrak{N}_q\mathfrak{A} \in \mathcal{F}^{\mathrm{S}} \setminus c^{\omega} = l^{\mathrm{S}}_{\omega_0} \setminus c^{\omega}_1 \subseteq l^{\tau_1}_{\omega_0} \setminus c^{\omega}_1 \subseteq l^{\tau_1}_{\omega_0} \setminus c^{\tau_2}_{\omega_1} = l^{\tau_1}_{\omega_{n-1}} \setminus c^{\tau_2}_{\omega_n},$$

где q — произвольное простое число из $p' = \mathbb{P} \setminus \{p\}$, если $|\omega| = 1$, причем $\omega = \{p\}$, и q — произвольное простое число, если $|\omega| > 1$.

Если $n > 1$ и, кроме того, $|\omega| > 1$, то, вводя в рассмотрение формации $\mathfrak{N}^{n-1}_{\pi}\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{N}_q\mathfrak{N}^{n-1}_{\pi}\mathfrak{A}$, вследствие утверждения 6 и леммы 11 [24] (см. также доказательство утверждения 5 и лемму 10) получим

$$\mathfrak{N}^{n-1}_{\pi}\mathfrak{A},\ \mathfrak{N}_q\mathfrak{N}^{n-1}_{\pi}\mathfrak{A} \in l^{\mathrm{S}}_{\omega_{n-1}} \setminus c^{\omega}_n \subseteq l^{\tau_1}_{\omega_{n-1}} \setminus c^{\omega}_n \subseteq l^{\tau_1}_{\omega_{n-1}} \setminus c^{\tau_2}_{\omega_n},$$

где q — произвольное простое, π — произвольное множество простых чисел такое, что $\pi \supseteq \omega$. Теперь ввиду включений $l^{\tau_1}_{\omega_{n-1}} \subseteq c^{\tau_2}_{\omega_{n-1}}$, $l^{\tau_1}_{\omega_n} \subseteq c^{\tau_2}_{\omega_n}$ (см. выше) видим, что в каждом из рассмотренных случаев указанные формации содержатся как в $l^{\tau_1}_{\omega_{n-1}} \setminus l^{\tau_1}_{\omega_n}$, так и в $c^{\tau_2}_{\omega_{n-1}} \setminus c^{\tau_2}_{\omega_n}$, откуда и получаем требуемое. Отметим, что при некоторых ограничениях на подгрупповые функторы τ_1 и τ_2 ранее в примерах 2 и 3 нами также были рассмотрены $(l^{\tau_1}_{\omega_{n-1}} \setminus l^{\tau_1}_{\omega_n})$-формации и $(c^{\tau_2}_{\omega_{n-1}} \setminus c^{\tau_2}_{\omega_n})$-формации специального вида.

Наконец, пусть $\{\mathfrak{H}_j \mid j \in J\}$ — произвольный набор $l^{\tau_1}_{\omega_n}$-формаций и A — такая монолитическая группа, что $R_\omega(A) = 1$. И пусть $A \in \vee_{\mathrm{H}^{\omega l}}(\mathfrak{H}_j \mid j \in J) = \vee^{\tau_1 l}_{\omega_n}(\mathfrak{H}_j \mid j \in J) = l^{\tau_1}_{\omega_n}\mathrm{form}\big(\bigcup_{j\in J}\mathfrak{H}_j\big)$. Тогда, учитывая следствие 1.2.24 [6], с. 24 согласно которому $\tau_1\mathrm{form}\big(\bigcup_{j\in J}\mathfrak{H}_j\big) = \mathrm{form}\big(\bigcup_{j\in J}\mathfrak{H}_j\big)$, ввиду леммы 10 имеем $\mathfrak{N}^n_{\tilde\pi}\mathrm{form}\big(\bigcup_{j\in J}\mathfrak{H}_j\big) \in l^{\tau_1}_{\omega_n}$, где $\tilde\pi = \pi\Big(\mathrm{form}\big(\bigcup_{j\in J}\mathfrak{H}_j\big)\Big) \cap \omega = \pi\big(\bigcup_{j\in J}\mathfrak{H}_j\big) \cap \omega$. Поэтому $l^{\tau_1}_{\omega_n}\mathrm{form}\big(\bigcup_{j\in J}\mathfrak{H}_j\big) \subseteq \mathfrak{N}^n_{\tilde\pi}\mathrm{form}\big(\bigcup_{j\in J}\mathfrak{H}_j\big)$. Значит, $A \in \mathfrak{N}^n_{\tilde\pi}\mathrm{form}\big(\bigcup_{j\in J}\mathfrak{H}_j\big)$. Так как $R_\omega(A) = 1$ и $\tilde\pi \subseteq \omega$, то из последнего включения получаем $A \in \mathrm{form}\big(\bigcup_{j\in J}\mathfrak{H}_j\big) \subseteq c^{\tau_2}_{\omega_n}\mathrm{form}\big(\bigcup_{j\in J}\mathfrak{H}_j\big) = \vee^{\tau_2 c}_{\omega_n}(\mathfrak{H}_j \mid j \in J) = \vee_{\Theta^{\omega c}}(\mathfrak{H}_j \mid j \in J)$.

Итак, все условия теоремы 1 выполнены. Применяя ее, заключаем, что решетка $\mathrm{H}^{\omega l} = l^{\tau_1}_{\omega_n}$ является полной подрешеткой решетки $\Theta^{\omega c} = c^{\tau_2}_{\omega_n}$. Следствие доказано.

Следствие 10. *Пусть τ_1 и τ_2 — подгрупповые функторы такие, что $\tau_1 \geq \tau_2$, причем $\tau_2 \leq \tau_{sn}$. Тогда решетка $l^{\tau_1}_{\omega_\infty}$ всех τ_1-замкнутых тотально ω-насыщенных формаций является полной подрешеткой решетки $c^{\tau_2}_{\omega_\infty}$ всех τ_2-замкнутых тотально ω-композиционных формаций.*

Доказательство. Покажем выполнение условий теоремы 1 для решеток формаций $\mathrm{H} = l^{\tau_1}_{\omega_\infty}$ и $\Theta = c^{\tau_2}_{\omega_\infty}$. Прежде всего, в силу лемм 5 и 6 каждая из решеток $l^{\tau_1}_{\omega_\infty}$ и $c^{\tau_2}_{\omega_\infty}$ является частичной алгеброй формаций, причем, как вытекает из следствия 2 с учетом условия $\tau_1 \geq \tau_2$, $\mathrm{H} = l^{\tau_1}_{\omega_\infty} \subseteq c^{\tau_1}_{\omega_\infty} \subseteq c^{\tau_2}_{\omega_\infty} = \Theta$. Из леммы 17 [13] следуют равенства $\mathrm{H}^{\omega l} = (l^{\tau_1}_{\omega_\infty})^{\omega l} = l^{\tau_1}_{\omega_\infty} = \mathrm{H}$, а из леммы 2.4 [12] — равенства $\Theta^{\omega c} = (c^{\tau_2}_{\omega_\infty})^{\omega c} = c^{\tau_2}_{\omega_\infty} = \Theta$. Вследствие теоремы 2.2 [12] решетка $c^{\tau_2}_{\omega_\infty}$ индуктивна.

Пусть $\{\mathfrak{H}_j \mid j \in J\}$ — произвольный набор $l^{\tau_1}_{\omega_\infty}$-формаций и A — такая монолитическая группа, что $R_\omega(A) = 1$. И пусть $A \in \vee_{\mathrm{H}}(\mathfrak{H}_j \mid j \in J) = \vee^{\tau_1 l}_{\omega_\infty}(\mathfrak{H}_j \mid j \in J) = l^{\tau_1}_{\omega_\infty}\mathrm{form}\big(\bigcup_{i\in J}\mathfrak{H}_j\big)$. Учитывая следствие 1.2.24 [6], с. 24, согласно которому $\tau_1\mathrm{form}\big(\bigcup_{i\in J}\mathfrak{H}_j\big) = \mathrm{form}\big(\bigcup_{i\in J}\mathfrak{H}_j\big)$, ввиду леммы 11 [3] и леммы 11 [24] (см. также предложение 5) имеем $\mathfrak{S}_{\tilde\pi}\mathrm{form}\big(\bigcup_{i\in J}\mathfrak{H}_j\big) \in l^{\tau_1}_{\omega_\infty}$, где $\tilde\pi = \pi\Big(\mathrm{form}\big(\bigcup_{j\in J}\mathfrak{H}_j\big)\Big) \cap \omega = \pi\big(\bigcup_{j\in J}\mathfrak{H}_j\big) \cap \omega$. Поэтому $l^{\tau_1}_{\omega_\infty}\mathrm{form}\big(\bigcup_{i\in J}\mathfrak{H}_j\big) \subseteq \mathfrak{S}_{\tilde\pi}\mathrm{form}\big(\bigcup_{i\in J}\mathfrak{H}_j\big)$, и следовательно, $A \in \mathfrak{S}_{\tilde\pi}\mathrm{form}\big(\bigcup_{i\in J}\mathfrak{H}_j\big)$. Так как $R_\omega(A) = 1$ и $\tilde\pi \subseteq \omega$, то последнее влечет $A \in \mathrm{form}\big(\bigcup_{i\in J}\mathfrak{H}_j\big) \subseteq c^{\tau_2}_{\omega_\infty}\mathrm{form}\big(\bigcup_{i\in J}\mathfrak{H}_j\big) = \vee^{\tau_2 c}_{\omega_\infty}(\mathfrak{H}_j \mid j \in J) = \vee_{\Theta}(\mathfrak{H}_j \mid j \in J)$.

Таким образом, все требования теоремы 1 выполнены. Применяя ее, заключаем, что решетка $\mathrm{H} = l^{\tau_1}_{\omega_\infty}$ является полной подрешеткой решетки $\Theta = c^{\tau_2}_{\omega_\infty}$. Следствие доказано.

Из следствия 9 (с учетом замечания 2) получаем также следующие результаты.

Следствие 11. *Пусть τ — подгрупповой функтор такой, что $\tau \leq \tau_{sn}$. Тогда решетка $l^{\tau}_{\omega_n}$ всех τ-замкнутых n-кратно ω-насыщенных формаций является полной подрешеткой решетки $c^{\tau}_{\omega_n}$ всех τ-замкнутых n-кратно ω-композиционных формаций.*

Следствие 12. *Для произвольного подгруппового функтора τ решетка $l^{\tau}_{\omega_n}$ всех τ-замкнутых n-кратно ω-насыщенных формаций является полной подрешеткой решетки c^{ω}_{n} всех n-кратно ω-композиционных формаций.*

Следствие 13. *Решетка l^{ω}_{n} всех n-кратно ω-насыщенных формаций является полной подрешеткой решетки c^{ω}_{n} всех n-кратно ω-композиционных формаций.*

Следствие 14. *Для произвольного подгруппового функтора τ такого, что $\tau \leq \tau_{sn}$, решетка l^{τ}_{n} всех τ-замкнутых n-кратно насыщенных формаций является полной подрешеткой решетки c^{τ}_{n} всех τ-замкнутых n-кратно композиционных формаций.*

Следствие 15. *Для произвольного подгруппового функтора τ структура l^{τ}_{n} всех τ-замкнутых n-кратно насыщенных формаций является полной подструктурой структуры c_n всех n-кратно композиционных формаций.*

Следующее следствие является положительным ответом на открытый вопрос 5.3, предложенный А. Н. Скибой и Н. Н. Воробьевым [28].

Следствие 16. *Решетка l_n всех n-кратно насыщенных формаций является полной подрешеткой решетки c_n всех n-кратно композиционных формаций.*

Следствие 17. *Пусть τ — подгрупповой функтор такой, что $\tau \leq \tau_{sn}$. Тогда решетка l^{τ}_{ω} всех τ-замкнутых ω-насыщенных формаций является полной подрешеткой решетки c^{τ}_{ω} всех τ-замкнутых ω-композиционных формаций.*

Следствие 18. *Для произвольного подгруппового функтора τ решетка l^{τ}_{ω} всех τ-замкнутых ω-насыщенных формаций является полной подрешеткой решетки c^{ω} всех ω-композиционных формаций.*

Следствие 19 ([39], теорема). *Решетка l^ω всех ω-насыщенных формаций является полной подрешеткой решетки c^ω всех ω-композиционных формаций.*

Следствие 20 ([38], теорема). *Пусть τ — подгрупповой функтор такой, что $\tau \leq \tau_{sn}$. Тогда решетка l^τ всех τ-замкнутых насыщенных формаций является полной подрешеткой решетки c^τ всех τ-замкнутых композиционных формаций.*

Следствие 21. *Для произвольного подгруппового функтора τ решетка l^τ всех τ-замкнутых насыщенных формаций является полной подрешеткой решетки c всех композиционных формаций.*

Следствие 22 ([28], теорема 1.1). *Решетка l всех насыщенных формаций является полной подрешеткой решетки c всех композиционных формаций.*

Следствие 23. *Предположим, что τ — подгрупповой функтор такой, что $\tau \leq \tau_{sn}$. Тогда решетка l_p^τ всех τ-замкнутых p-насыщенных формаций является полной подрешеткой решетки c_p^τ всех τ-замкнутых p-композиционных формаций.*

Следствие 24. *Пусть τ — произвольный подгрупповой функтор. Тогда решетка l_p^τ всех τ-замкнутых p-насыщенных формаций является полной подрешеткой решетки c^p всех p-композиционных формаций.*

Следствие 25. *Решетка l^p всех p-насыщенных формаций является полной подрешеткой решетки c^p всех p-композиционных формаций.*

Отметим также следующие результаты, которые вытекают из следствия 10.

Следствие 26. *Пусть τ — подгрупповой функтор такой, что $\tau \leq \tau_{sn}$. Тогда решетка $l_{\omega_\infty}^\tau$ всех τ-замкнутых тотально ω-насыщенных формаций является полной подрешеткой решетки $c_{\omega_\infty}^\tau$ всех τ-замкнутых тотально ω-композиционных формаций.*

Следствие 27. *Для произвольного подгруппового функтора τ решетка $l_{\omega_\infty}^\tau$ всех τ-замкнутых тотально ω-насыщенных формаций является полной подрешеткой решетки c_∞^ω всех тотально ω-композиционных формаций.*

Следствие 28. *Решетка l_∞^ω всех тотально ω-насыщенных формаций является полной подрешеткой решетки c_∞^ω всех тотально ω-композиционных формаций.*

Следствие 29. *Пусть τ — подгрупповой функтор такой, что $\tau \leq \tau_{sn}$. Тогда решетка l_∞^τ всех τ-замкнутых тотально насыщенных формаций является полной подрешеткой решетки c_∞^τ всех τ-замкнутых тотально композиционных формаций.*

Следствие 30. *Для произвольного подгруппового функтора τ решетка l_∞^τ всех τ-замкнутых тотально насыщенных формаций является полной подрешеткой решетки c_∞ всех τ-замкнутых тотально композиционных формаций.*

Следующее следствие дает положительный ответ на вопрос 5.4, поставленный А. Н. Скибой и Н. Н. Воробьевым [28].

Следствие 31. *Решетка l_∞ всех тотально насыщенных формаций является полной подрешеткой решетки c_∞ всех тотально композиционных формаций.*

Напомним, что элемент a решетки L называется *компактным*, если из $a \leq \bigvee(x_i \mid i \in I)$ следует $a \leq \bigvee(x_j \mid j \in J)$ для некоторого конечного подмножества $J \subseteq I$. Полная решетка называется *алгебраической*, или *компактно порожденной*, если любой ее элемент является решеточным объединением компактных элементов. Напомним также, что решетка L называется *модулярной*, если для любых элементов x, y, $z \in L$ таких, что $x \leq y$, выполняется *модулярный закон*

$$x \vee (y \wedge z) = y \wedge (x \vee z),$$

и *дистрибутивной*, если для любых элементов x, y, $z \in L$ имеет место *дистрибутивный закон*

$$x \vee (y \wedge z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z).$$

Для получения дальнейших следствий нам понадобится следующее известное утверждение.

Лемма 22 ([17], теорема 8). *Пусть L — алгебраическая решетка, а H — полная подрешетка L. Тогда H является алгебраической решеткой.*

Доказательство. Обозначим через m_H наибольший элемент решетки H. Для произвольного элемента $x \in L$ такого, что $x \leq m_H$, определим элемент $\alpha(x)$ следующим образом

$$\alpha(x) = \bigwedge(h \mid h \in H,\ h \geq x).$$

Поскольку H — полная подрешетка L, то $\alpha(x) \in H$. Понятно, что $\alpha(x)$ является наименьшим из элементов $h \in H$ с условием $h \geq x$, и следовательно, $x \leq \alpha(x)$. Несложно видеть также, что если x — компактный элемент в L, причем $x \leq m_H$, то компактным является и элемент $\alpha(x)$ в H. Действительно, если $\alpha(x) \leq \bigvee(h_i \mid h_i \in H,\ i \in I)$, где $x \leq m_H$, то вследствие условия $x \leq \alpha(x)$ имеем $x \leq \bigvee(h_i \mid h_i \in H,\ i \in I)$. Так как x — компактный элемент решетки L и H — полная подрешетка в L, то $x \leq \bigvee(h_j \mid h_j \in H, j \in J) \in H$ для некоторого конечного множества $J \subseteq I$. Из последнего в силу определения элемента $\alpha(x)$ получаем $\alpha(x) \leq \bigvee(h_j \mid h_j \in H,\ j \in J)$, и значит, $\alpha(x)$ компактен в H. Наконец, для произвольного элемента

$h \in H \subseteq L$ в силу алгебраичности решетки L имеем $h = \bigvee(x_s \mid s \in S)$, где каждый элемент x_s компактен в L. Поскольку $x_s \leq h \in H$ (понятно, что тогда $x_s \leq m_H$), то $\alpha(x_s) \leq h$, и следовательно, $\bigvee(\alpha(x_s) \mid s \in S) \leq h$. С другой стороны, так как $x_s \leq \alpha(x_s)$, то $h = \bigvee(x_s \mid s \in S) \leq \bigvee(\alpha(x_s) \mid s \in S)$. Значит, $h = \bigvee(\alpha(x_s) \mid s \in S)$, причем, как установлено выше, каждый элемент $\alpha(x_s)$ компактен в H. Снова учитывая, что H — полная подрешетка L, ввиду произвольности выбора элемента $h \in H$ заключаем, что H является алгебраической решеткой. Лемма доказана.

Из доказательства леммы 22 ввиду леммы 4.1 [28] (см. также [1], лемма 4.8.1, с. 247]) и определений вытекает следующая

Лемма 23. *Предположим, что* Θ *— алгебраическая решетка формаций и* H *— полная подрешетка* Θ. *Тогда* H *— алгебраическая решетка формаций. Кроме того, если* $\mathfrak{R} = \Theta\mathrm{form}(G)$ *— компактный элемент в* Θ, *причем* $(G) \subseteq \mathfrak{M}_{\mathrm{H}}$, *то* $\mathfrak{R}_1 = \mathrm{H}\mathrm{form}(G)$ *является компактным элементом в* H.

Следствие 32 ([7], теорема 3.1 и [8], теорема 1). *Для любого подгруппового функтора* τ *решетка* $l^{\tau}_{\omega_n}$ *всех* τ*-замкнутых* n*-кратно* ω*-насыщенных формаций алгебраична и модулярна.*

Доказательство. Ввиду теоремы 4 [27] (см. также следствие 3.2 [40] и следствие 2 [2]) решетка c^{ω}_n алгебраична и модулярна. Следовательно, согласно лемме 22, лемме 16 [14] и следствию 12, алгебраической и модулярной является решетка $l^{\tau}_{\omega_n}$, где τ — произвольный подгрупповой функтор. Отметим, что из доказательства теоремы 4 [27] с учетом леммы 4.1 [28] (см. также [1], лемма 4.8.1, с. 247) следует, что компактными элементами решетки c^{ω}_n являются в точности однопорожденные c^{ω}_n-формации. Поэтому вследствие леммы 23, теоремы 1.5.3 [1], с. 52 и леммы 4.1 [28] аналогично заключаем, что компактными элементами структуры $l^{\tau}_{\omega_n}$ являются однопорожденные $l^{\tau}_{\omega_n}$-формации, и только они. Следствие доказано.

Следствие 33 ([14], теорема 2; [29], теорема). *Для любого подгруппового функтора* τ *решетка* $l^{\tau}_{\omega_\infty}$ *всех* τ*-замкнутых тотально* ω*-насыщенных формаций является алгебраической.*

Доказательство. Ввиду следствия 3.2 [12] решетка c^{ω}_{∞} алгебраична, причем, как следует из доказательства теоремы 3.1 [12], компактными элементами c^{ω}_{∞} являются однопорожденные c^{ω}_{∞}-формации, и только они. Из леммы 23, следствия 27 и теоремы 1.5.4 [1], с. 54 с учетом леммы 4.1 [28] (см. также [1], лемма 4.8.1, с. 247) получаем, что для произвольного подгруппового функтора τ решетка $l^{\tau}_{\omega_\infty}$ алгебраична и, кроме того, ее компактными элементами являются в точности однопорожденные $l^{\tau}_{\omega_\infty}$-формации. Следствие доказано.

Следующая лемма непосредственно вытекает из доказательства основного результата (теоремы) работы [34] (см. также [1], теорема 4.5.1, с. 206).

Лемма 24. *Пусть* ω *— множество простых чисел,* $m > n \geq 0$, *где* m *и* n *— целые числа и* $|\omega| > 1$. *Предположим также, что* τ_1 *и* τ_2 *— подгрупповые функторы такие, что* $\tau_1 \geq \tau_2$. *Тогда решетка* $l^{\tau_1}_{\omega_m}$ *всех* τ_1*-замкнутых* m*-кратно* ω*-насыщенных формаций не является подрешеткой решетки* $l^{\tau_2}_{\omega_n}$ *всех* τ_2*-замкнутых* n*-кратно* ω*-насыщенных формаций.*

Следствие 34. *Пусть* ω *— множество простых чисел,* $m > n \geq 0$, *где* m *и* n *— целые числа и* $|\omega| > 1$. *И пусть* τ_1 *и* τ_2 *— подгрупповые функторы такие, что* $\tau_2 \leq \tau_1 \leq \tau_{sn}$. *Тогда решетка* $c^{\tau_1}_{\omega_m}$ *всех* τ_1*-замкнутых* m*-кратно* ω*-композиционных формаций не является подрешеткой решетки* $c^{\tau_2}_{\omega_n}$ *всех* τ_2*-замкнутых* n*-кратно* ω*-композиционных формаций.*

Доказательство. Предположим, что $c^{\tau_1}_{\omega_m}$ является подрешеткой в $c^{\tau_2}_{\omega_n}$. И пусть $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ — произвольные $l^{\tau_1}_{\omega_m}$-формации. Тогда, поскольку ввиду следствия 11 $l^{\tau_1}_{\omega_m}$ — (полная) подрешетка в $c^{\tau_1}_{\omega_m}$, в силу нашего предположения имеем

$$\mathfrak{F}_1 \vee^{\tau_1{}^l}_{\omega_m} \mathfrak{F}_2 = \mathfrak{F}_1 \vee^{\tau_1{}^c}_{\omega_m} \mathfrak{F}_2 = \mathfrak{F}_1 \vee^{\tau_2{}^c}_{\omega_n} \mathfrak{F}_2.$$

Так как $m > n$ и $\tau_1 \geq \tau_2$, то $\mathfrak{F}_i \in l^{\tau_1}_{\omega_m} \subseteq l^{\tau_2}_{\omega_n}$, где $i = 1, 2$. Согласно следствию 11, решетка $l^{\tau_2}_{\omega_n}$ является (полной) подрешеткой в $c^{\tau_2}_{\omega_n}$. Поэтому

$$\mathfrak{F}_1 \vee^{\tau_2{}^l}_{\omega_n} \mathfrak{F}_2 = \mathfrak{F}_1 \vee^{\tau_2{}^c}_{\omega_n} \mathfrak{F}_2.$$

Значит,

$$\mathfrak{F}_1 \vee^{\tau_1{}^l}_{\omega_m} \mathfrak{F}_2 = \mathfrak{F}_1 \vee^{\tau_2{}^l}_{\omega_n} \mathfrak{F}_2,$$

и в силу произвольности выбора $l^{\tau_1}_{\omega_m}$-формаций $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ заключаем, что $l^{\tau_1}_{\omega_m}$ является подрешеткой решетки $l^{\tau_2}_{\omega_n}$. Последнее противоречит лемме 24. Таким образом, исходное допущение неверно, и для любых целых неотрицательных чисел m и n, а также подгрупповых функторов таких, что $\tau_2 \leq \tau_1 \leq \tau_{sn}$, решетка $c^{\tau_1}_{\omega_m}$ не является подрешеткой в $c^{\tau_2}_{\omega_n}$, если только $|\omega| > 1$. Следствие доказано.

Предложение 8. *Пусть* τ_1 *и* τ_2 *— подгрупповые функторы такие, что* $\tau_2 \leq \tau_1 \leq \tau_{sn}$. *Тогда решетка* $c^{\tau_1}_{\omega_n}$ *является полной подрешеткой решетки* $c^{\tau_2}_{\omega_n}$.

Доказательство. Проведем индукцию по n. Пусть $\{\mathfrak{H}_i \mid i \in I\}$ — произвольный набор $c^{\tau_1}_{\omega_n}$-формаций. По условию $\tau_1 \geq \tau_2$, и следовательно, $c^{\tau_1}_{\omega_n} \subseteq c^{\tau_2}_{\omega_n}$. Поэтому для каждого $i \in I$ формация $\mathfrak{H}_i$ является также $c^{\tau_2}_{\omega_n}$-формацией. Пусть $n = 0$. Тогда, согласно следствию 1.2.24 [6], с. 24 имеем

$$c^{\tau_1}_{\omega_0}\mathrm{form}\big(\bigcup_{i\in I}\mathfrak{H}_i\big) = \tau_1\mathrm{form}\big(\bigcup_{i\in I}\mathfrak{H}_i\big) = \mathrm{form}\big(\bigcup_{i\in I}\mathfrak{H}_i\big) = \tau_2\mathrm{form}\big(\bigcup_{i\in I}\mathfrak{H}_i\big) = c^{\tau_2}_{\omega_0}\mathrm{form}\big(\bigcup_{i\in I}\mathfrak{H}_i\big).$$

Значит, при $n = 0$ утверждение верно.

Пусть $n > 0$ и при $n-1$ утверждение верно. И пусть h_i — произвольный внутренний (например, минимальный) ω-композиционный $c^{\tau_1}_{\omega_{n-1}}$-значный спутник формации $\mathfrak{H}_i$. Из теоремы 1 [2] или теоремы 2.1 [40] (см. также [1], теорема 4.6.8, с. 223; [35], теорема) для подгруппового функтора $\tau = \tau_2$ имеем

$$\vee^{\tau_2{}^c}_{\omega_n}(\mathfrak{H}_i \mid i \in I) = CF_\omega\big(\vee^{\tau_2{}^c}_{\omega_{n-1}}(h_i \mid i \in I)\big).$$

Ввиду предположения индукции при любом $p \in \pi\Big(\mathrm{Com}\big(\underset{i\in I}{\cup}\mathfrak{H}_i\big)\Big) \cap \omega$ формации

$$\big(\vee^{\tau_2{}^c}_{\omega_{n-1}}(h_i \mid i \in I)\big)(p) \quad \text{и} \quad \big(\vee^{\tau_2{}^c}_{\omega_{n-1}}(h_i \mid i \in I)\big)(\omega')$$

τ_1-замкнуты. Значит, в силу леммы 3.1 [40] (см. также [1], лемма 1.6.2, с. 66) τ_1-замкнутой является и формация $\vee^{\tau_2{}^c}_{\omega_n}(\mathfrak{H}_i \mid i \in I)$. Лемма доказана.

Аналогично предыдущему утверждению, но с применением леммы 5 [33] (см. также [1], лемма 4.4.6, с. 196) и леммы 1.5.5 [1], с. 55 вместо теоремы 1 [2] (или теоремы 2.1 [40]) и леммы 3.1 [40] соответственно может быть доказано

Предложение 9. *Пусть τ_1 и τ_2 — подгрупповые функторы такие, что $\tau_1 \geq \tau_2$. Тогда решетка $l^{\tau_1}_{\omega_n}$ является полной подрешеткой решетки $l^{\tau_2}_{\omega_n}$.*

Из предложения 8, замечания 2 и следствия 34 вытекает следующий результат.

Следствие 35. *Пусть ω — множество простых чисел, $m > n \geq 0$, где m и n — целые числа. И пусть τ_1 и τ_2 — подгрупповые функторы такие, что $\tau_2 \leq \tau_1 \leq \tau_{sn}$.Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) если $|\omega| = 1$, то решетка $c^{\tau_1}_{\omega_m}$ является полной подрешеткой решетки $c^{\tau_2}_{\omega_n}$;

2) если $|\omega| > 1$, то решетка $c^{\tau_1}_{\omega_m}$ не является подрешеткой решетки $c^{\tau_2}_{\omega_n}$.

В силу совпадения при $\tau_1 = \tau_2 = \tau$, $|\omega| = 1$ в следствии 35 решеток формаций $c^{\tau_1}_{\omega_m}$ и $c^{\tau_2}_{\omega_n}$ (см. замечание 2), из указанного результата получаем

Следствие 36. *Пусть ω — множество простых чисел, $m > n \geq 0$, где m и n — целые числа и $|\omega| > 1$. И пусть τ — подгрупповой функтор такой, что $\tau \leq \tau_{sn}$. Тогда решетка $c^{\tau}_{\omega_m}$ всех τ-замкнутых m-кратно ω-композиционных формаций не является подрешеткой решетки $c^{\tau}_{\omega_n}$ всех τ-замкнутых n-кратно ω-композиционных формаций.*

Последнее следствие является решением открытого вопроса 5.4, предложенного А. А. Царевым и Н. Н. Воробьевым [36].

В заключение отметим, что следствие 11 может быть также использовано и для доказательства недистрибутивности при $\tau \leq \tau_{sn}$ структуры $c^{\tau}_{\omega_n}$ (см. теорема 4.1 [36]). Для этого вначале необходимо в свете теории частично насыщенных формаций показать справедливость утверждений, аналогичных леммам 4.1 и 4.2 [36], и установить недистрибутивность решетки $l^{\tau}_{\omega_n}$, а далее наряду с упомянутым выше следствием 11 воспользоваться леммой 16 [14].

5. Заключение. В работе исследована полнота подрешеток формаций специального вида. Указаны достаточные условия, при которых решетка формаций H^{ω_l} является полной подрешеткой решетки формаций Θ^{ω_c}. В частности, доказано, что решетка всех n-кратно насыщенных формаций l_n — полная подрешетка решетки всех n-кратно композиционных формаций c_n. Аналогичный результат установлен для решетки всех тотально насыщенных формаций l_∞ и решетки всех тотально композиционных формаций c_∞. Кроме того, показано, что если $|\omega| > 1$, $m > n \geq 0$, где m и n — целые числа, и $\tau \leq \tau_{sn}$, то решетка всех τ-замкнутых m-кратно ω-композиционных формаций не является подрешеткой решетки всех τ-замкнутых n-кратно ω-композиционных формаций. Тем самым даны положительные ответы на два вопроса структурной теории формаций, поставленных А. Н. Скибой и Н. Н. Воробьевым, а также указано решение одного из вопросов А. А. Царева и Н. Н. Воробьева в границах данной теории.

Список литературы

1. Воробьев Н. Н. 2012. Алгебра классов конечных групп. Витебск, Изд-во Витебского государственного университета имени П. М. Машерова, 322.

2. Жизневский П. А. 2010. О модулярности и индуктивности решетки всех τ-замкнутых n-кратно ω-композиционных формаций конечных групп. Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины, 58(1): 185–191.

3. Сафонов В. Г. 2004. О тотально ω-насыщенных формациях конечных групп. Препринт, № 7. Гомель, Изд-во Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины, 18.

4. Сафонов В. Г., Шеметков Л. А. 2008. О подрешетках решетки тотально насыщенных формаций конечных групп. Доклады НАН Беларуси, 52(4): 34–37.

5. Селькин В. М. 2011. Однопорожденные формации. Гомель, Изд-во Гомельского государственного университета имени Франциска Скорины, 240.

6. Скиба А. Н. 1997. Алгебра формаций. Минск, Беларуская навука, 240.

7. Шабалина И. П. 2002. Алгебраичность решетки τ-замкнутых n-кратно ω-локальных формаций. Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. Вопросы алгебры-18, 5(14): 59–67.

8. Шабалина И. П. 2003. О решетке τ-замкнутых n-кратно ω-локальных формаций конечных групп. Вести НАН Беларуси. Серия физико-математических наук, 1: 28–30.

9. Шеметков Л. А. 1978. Формации конечных групп. М., Наука, 267.

10. Шеметков Л. А. 1984. О произведении формаций. Доклады АН БССР, 28(2): 101–103.

11. Шеметков Л. А, Скиба А. Н. 1989. Формации алгебраических систем. М., Наука, 253.

12. Щербина В. В. 2020. О двух задачах теории частично тотально композиционных формаций конечных групп. Прикладная математика & Физика, 52(1): 18–32. DOI 10.18413/2687-0959-2020-52-1-18-32.

13. (а) Щербина В. В., Сафонов В. Г. 2019. О подрешетках решетки частично тотально насыщенных формаций конечных групп. Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика. 51(1): 64–87. DOI 10.18413/2075-4639-2019-51-1-64-87.

14. (б) Щербина В. В., Сафонов В. Г. 2019. О некоторых свойствах решетки частично тотально насыщенных формаций конечных групп. Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика. 51(2): 227–244. DOI 10.18413/2075-4639-2019-51-2-227-244.

15. Ballester-Bolinches A., Ezquerro L. M. 2006. Classes of Finite Groups. Dordrecht, Springer, 385.

16. Doerk K., Hawkes T. 1992. Finite Soluble Groups. Berlin–New York, Walter de Gruyter & Co, 891.

17. Grätzer G., Schmidt E. T. 1963. Characterizations of congruence lattices of abstract algebras. Acta Scientiarum Mathematicarum, 24(1–2): 34–59.

18. Guo W. 2000. The Theory of Classes of Groups. Beijing–New York, Science Press–Kluwer Academic Publishers, 261.

19. Guo W. 2015. Structure Theory for Canonical Classes of Finite Groups. Berlin–Heidelberg, Springer-Verlag, 359.

20. Guo W., Shum K. P. 2003. Uncancellative factorizations of Baer-local formations. Journal of Algebra, 267(2): 654–672. DOI 10.1016/S0021-8693(03)00306-5.

21. Guo W., Sel'kin V. M., Shum K. P. 2007. Factorization theory of 1-generated ω-composition formations. Communications in Algebra, 35(9): 2901–2931. DOI 10.1080/00927870701302248.

22. Huppert B., Blackburn N. 1982. Finite Groups III. Berlin–Heidelberg–New York, Springer-Verlag, 455.

23. Kamornikov S. F., Shemetkov L. A. 1995. Coradicals of subnormal subgroups. Algebra and Logic, 34(5): 273–284. DOI 10.1007/BF00768098.

24. Safonov V. G. 2007. Characterization of the soluble one-generated totally saturated formations of finite groups. Siberian Mathematical Journal, 48(1): 150-155. DOI: 10.1007/s11202-007-0015-3.

25. Schmidt O. U. 1966. Abstract Theory of Groups. San Francisco–London, W. H. Freeman and Company, 174.

26. Skiba A. N., Shemetkov L. A. 2000. Multiply ω-local formations and Fitting classes of finite groups. Siberian Advances in Mathematics, 10(2): 112–141.

27. Skiba A. N., Shemetkov L. A. 2000. Multiply $\mathfrak{L}$-composite formations of finite groups. Ukrainian Mathematical Journal, 52(6): 898–913.

28. Skiba A. N., Vorob'ev N. N. 2013. On the lattices of saturated and solubly saturated formations of finite groups. Southeast Asian Bulletin of Mathematics, 37(5): 771–780.

29. Shcherbina V. V. 2020. Algebraicity of lattice of τ-closed totally ω-saturated formations of finite groups. Ufa Mathematical Journal, 12(1): 82–90. DOI 10.13108/2020-12-1-82.

30. Shemetkov L. A. 1997. Frattini extensions of finite groups and formations. Communications in Algebra, 25(3): 955–964. DOI 10.1080/00927879708825900.

31. Shemetkov L. A. 2001. On partially saturated formations and residuals of finite groups. Communications in Algebra, 29(9):4125–4137. DOI 10.1081/AGB-100105992.

32. Shemetkov L. A. 2012. Local definitions of formations of finite groups. Journal of Mathematical Sciences, 185(2): 324–334. DOI 10.1007/s10958-012-0917-x.

33. Shemetkov L. A., Skiba A. N., Vorob'ev N. N. 2009. On laws of lattices of partially saturated formations, Asian-European Journal of Mathematics, 2(1): 155–169.
DOI 10.1142/S1793557109000133.

34. Shemetkov L. A., Skiba A. N., Vorob'ev N. N. 2010. On lattices of formations of finite groups. Algebra Colloquium, 17(4): 557–564. DOI 10.1142/S1005386710000532.

35. Tsarev A. A., Vorob'ev N. N. 2014. On a question of the theory of partially composition formations. Algebra Colloquium, 21(3): 437–447. DOI 10.1142/S1005386714000388.

36. Tsarev A. A., Vorob'ev N. N. 2018. Lattices of composition formations of finite groups and the laws. Journal of Algebra and Its Applications, 17(5): 1850084 (17 pages).
DOI 10.1142/S0219498818500846.

37. Vedernikov V. A., Sorokina M. M. 2002. ω-Fibered formations and Fitting flasses of finite groups. Mathematical Notes, 71(1): 39-55. DOI 10.1023/A:1013922206539.

38. Vorob'ev N. N. 2018. On complete sublattices of formations of finite groups. Russian Mathematics, 62(1): 17–22. DOI 10.3103/S1066369X18010036.

39. Vorob'ev N. N. 2018. On sublattices of the lattice of all ω-composition formations of finite groups. Advances in Group Theory and Applications, 6: 89–100. DOI 10.32037/agta-2018-006.

40. Vorob'ev N. N., Tsarev A. A. 2010. On the modularity of a lattice of τ-closed n-multiply ω-composite formations. Ukrainian Mathematical Journal, 62(4): 518–529. DOI 10.1007/s11253-010-0368-9.

References

1. Vorob'ev N. N. 2012. Algebra klassov konechnykh grupp [Algebra of Classes of Finite Groups]. Vitebsk, Vitebsk State University named after P. M. Masherov, 322.

2. Zhiznevsky P. A. 2010. O modulyarnosti i induktivnosti reshetki vsekh τ-zamknutykh n-kratno ω-kompozitsionnykh formatsiy konechnykh grupp [On modularity and inductance of the lattice of all τ-closed n-multiply ω-composition formations of finite groups]. Izvestiya Gomel'skogo gosudarstvennogo universiteta imeni F. Skoriny, 58(1): 185–191.

3. Safonov V. G. 2004. O total'no ω-nasyshchennykh formatsiyakh konechnykh grupp. Preprint, № 7 [On totally ω-saturated formations of finite groups. Preprint, N 7]. Gomel, Gomel State University named after Francisk Skorina, 18.

4. Safonov V. G., Shemetkov L. A. 2008. O podreshetkakh reshetki total'no nasyshchennykh formatsiy konechnykh grupp [Sublattices of the lattice of totally saturated formations of finite groups]. Doklady NAN Belarusi, 52(4): 34–37.

5. Sel'kin V. M. 2011. Odnoporozhdennye formatsii [One-generated Formations]. Gomel, Gomel State University named after Francisk Skorina, 240.

6. Skiba A. N. 1997. Algebra formatsiy [Algebra of Formations]. Minsk, Publ. Belaruskaya navuka, 240.

7. Shabalina I. P. 2002. Algebraichnost' reshetki τ-zamknutykh n-kratno ω-lokal'nykh formatsiy [Algebraicity of the lattice of τ-closed n-multiply ω-local formations]. Izvestiya Gomel'skogo gosudarstvennogo universiteta imeni F. Skoriny. Voprosy algebry-18, 5(14): 59–67.

8. Shabalina I. P. 2003. O reshetke τ-zamknutykh n-kratno ω-lokal'nykh formatsiy konechnykh grupp [On the lattice of τ-closed n-multiply ω-local formations of finite groups]. Vesti NAN Belarusi. Seriya fiziko-matematicheskikh nauk, 1: 28–30.

9. Shemetkov L. A. 1978. Formatsii konechnykh grupp [Formations of Finite Groups]. Moscow, Publ. Nauka, 267.

10. Shemetkov L. A. 1984. O proizvedenii formatsiy [On the product of formations]. Doklady Akademii nauk BSSR, 28(2): 101–103.

11. Shemetkov L. A, Skiba A. N. 1989. Formatsii algebraicheskikh sistem [Formations of Algebraic Systems]. M., Publ. Nauka, 253.

12. Shcherbina V. V. 2020. On two problems of the theory of partially totally composition formations of finite groups. Applied Mathematics & Physics. 52(1): 18–32 (in Russian). DOI 10.18413/2687-0959-2020-52-1-18-32.

13. (a) Shcherbina V. V., Safonov V. G. 2019. On sublattices of the lattice of partially totally saturated formations of finite groups. Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics. Physics. 51(1): 64–87 (in Russian). DOI 10.18413/2075-4639-2019-51-1-64-87.

14. (b) Shcherbina V. V., Safonov V. G. 2019. On some properties of the lattice of partially totally saturated formations of finite groups. Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics. Physics. 51(2): 227–244 (in Russian). DOI 10.18413/2075-4639-2019-51-2-227-244.

15. Ballester-Bolinches A., Ezquerro L. M. 2006. Classes of Finite Groups. Dordrecht, Springer, 385.

16. Doerk K., Hawkes T. 1992. Finite Soluble Groups. Berlin–New York, Walter de Gruyter & Co, 891.

17. Grätzer G., Schmidt E. T. 1963. Characterizations of congruence lattices of abstract algebras. Acta Scientiarum Mathematicarum, 24(1–2): 34–59.

18. Guo W. 2000. The Theory of Classes of Groups. Beijing–New York, Science Press–Kluwer Academic Publishers, 261.

19. Guo W. 2015. Structure Theory for Canonical Classes of Finite Groups. Berlin–Heidelberg, Springer-Verlag, 359.

20. Guo W., Shum K. P. 2003. Uncancellative factorizations of Baer-local formations. Journal of Algebra, 267(2): 654–672. DOI 10.1016/S0021-8693(03)00306-5.

21. Guo W., Sel'kin V. M., Shum K. P. 2007. Factorization theory of 1-generated ω-composition formations. Communications in Algebra, 35(9): 2901–2931. DOI 10.1080/00927870701302248.

22. Huppert B., Blackburn N. 1982. Finite Groups III. Berlin–Heidelberg–New York, Springer-Verlag, 455.

23. Kamornikov S. F., Shemetkov L. A. 1995. Coradicals of subnormal subgroups. Algebra and Logic, 34(5): 273–284. DOI 10.1007/BF00768098.

24. Safonov V. G. 2007. Characterization of the soluble one-generated totally saturated formations of finite groups. Siberian Mathematical Journal, 48(1): 150-155. DOI: 10.1007/s11202-007-0015-3.

25. Schmidt O. U. 1966. Abstract Theory of Groups. San Francisco–London, W. H. Freeman and Company, 174.

26. Skiba A. N., Shemetkov L. A. 2000. Multiply ω-local formations and Fitting classes of finite groups. Siberian Advances in Mathematics, 10(2): 112–141.

27. Skiba A. N., Shemetkov L. A. 2000. Multiply $\mathfrak{L}$-composite formations of finite groups. Ukrainian Mathematical Journal, 52(6): 898–913.

28. Skiba A. N., Vorob'ev N. N. 2013. On the lattices of saturated and solubly saturated formations of finite groups. Southeast Asian Bulletin of Mathematics, 37(5): 771–780.

29. Shcherbina V. V. 2020. Algebraicity of lattice of τ-closed totally ω-saturated formations of finite groups. Ufa Mathematical Journal, 12(1): 82–90. DOI 10.13108/2020-12-1-82.

30. Shemetkov L. A. 1997. Frattini extensions of finite groups and formations. Communications in Algebra, 25(3): 955–964. DOI 10.1080/00927879708825900.

31. Shemetkov L. A. 2001. On partially saturated formations and residuals of finite groups. Communications in Algebra, 29(9):4125–4137. DOI 10.1081/AGB-100105992.

32. Shemetkov L. A. 2012. Local definitions of formations of finite groups. Journal of Mathematical Sciences, 185(2): 324–334. DOI 10.1007/s10958-012-0917-x.

33. Shemetkov L. A., Skiba A. N., Vorob'ev N. N. 2009. On laws of lattices of partially saturated formations, Asian-European Journal of Mathematics, 2(1): 155–169. DOI 10.1142/S1793557109000133.

34. Shemetkov L. A., Skiba A. N., Vorob'ev N. N. 2010. On lattices of formations of finite groups. Algebra Colloquium, 17(4): 557–564. DOI 10.1142/S1005386710000532.

35. Tsarev A. A., Vorob'ev N. N. 2014. On a question of the theory of partially composition formations. Algebra Colloquium, 21(3): 437–447. DOI 10.1142/S1005386714000388.

36. Tsarev A. A., Vorob'ev N. N. 2018. Lattices of composition formations of finite groups and the laws. Journal of Algebra and Its Applications, 17(5): 1850084 (17 pages). DOI 10.1142/S0219498818500846.

37. Vedernikov V. A., Sorokina M. M. 2002. ω-Fibered formations and Fitting flasses of finite groups. Mathematical Notes, 71(1): 39-55. DOI 10.1023/A:1013922206539.

38. Vorob'ev N. N. 2018. On complete sublattices of formations of finite groups. Russian Mathematics, 62(1): 17–22. DOI 10.3103/S1066369X18010036.

39. Vorob'ev N. N. 2018. On sublattices of the lattice of all ω-composition formations of finite groups. Advances in Group Theory and Applications, 6: 89–100. DOI 10.32037/agta-2018-006.

40. Vorob'ev N. N., Tsarev A. A. 2010. On the modularity of a lattice of τ-closed n-multiply ω-composite formations. Ukrainian Mathematical Journal, 62(4): 518–529. DOI 10.1007/s11253-010-0368-9.

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.
Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Получена 19.04.2021

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Щербина Владимир Владимирович – выпускник Белорусского государственного университета
http://orcid.org/0000-0002-8709-1181
ул. Одинцова, 109–37, Минск, 220136, Республика Беларусь
E-mail: shcherbinavv@tut.by

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Vladimir V. Shcherbina – graduate of the Belarusian State University, Minsk, Republic of Belarus