

УЧЕТ НЕДОСТАТОЧНОЙ ЛИКВИДНОСТИ И ТРАНЗАКЦИОННЫХ ИЗДЕРЖЕК ПРИ ДЕЛЬТА-ХЕДЖИРОВАНИИ

М. М. Дышаев, В. Е. Федоров

(Статья представлена членом редакционной коллегии С. М. Ситником)

Челябинский государственный университет,
Челябинск, 454001, Россия

E-mail: Mikhail.Dyshaev@gmail.com

Аннотация. Статья посвящена исследованию оптимального временного интервала хеджирования при недостаточной ликвидности и наличии транзакционных издержек. Получены нелинейные уравнения типа Блэка – Шоулса для случая, когда функция затрат неликвидности является линейной и квадратичной. Для определения транзакционных издержек используется модель методологии ценообразования с поправкой на риск (risk-adjusted pricing methodology (RAPM) model). Практическое применение продемонстрировано для опционной комбинации «long butterfly».

Ключевые слова: хеджирование, ликвидность, транзакционные издержки, книга лимитных ордеров, нелинейные уравнения типа Блэка – Шоулса, численное решение

Благодарности: Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта No 19-01-00244.

Для цитирования: Дышаев М. М., Федоров В. Е. 2021. Учет недостаточной ликвидности и транзакционных издержек при дельта-хеджировании. Прикладная математика & Физика, 53(2): 132–143.

DOI 10.52575/2687-0959-2021-53-2-132-143.

THE ACCOUNTING OF ILLIQUIDITY AND TRANSACTION COSTS DURING THE DELTA-HEDGING

Mikhail Dyshaev, Vladimir Fedorov

(Article submitted by a member of the editorial board S. M. Sitnik)

Chelyabinsk State University,
Chelyabinsk, 454001, Russia

E-mail: Mikhail.Dyshaev@gmail.com

Received May, 17, 2021

Abstract. The article is devoted to the study of optimal time interval for re-hedging in the presence of illiquidity and transaction costs. A nonlinear Black – Scholes type equations are obtained for the case when the function of illiquidity costs is linear and quadratic. To determine the transaction costs, a risk-adjusted pricing methodology (RAPM) model is used. In order to demonstrate its practical application, the optimal time interval for the delta hedging is considered using an example of an optional combination «long butterfly».

Key words: hedging, liquidity, transaction costs, limit order book, nonlinear Black – Scholes type equations, numerical solutions.

Acknowledgements: The reported study was funded by RFBR according to the research project № 19-01-00244.

For citation: Dyshaev Mikhail, Fedorov Vladimir. 2021. The accounting of illiquidity and transaction costs during the delta-hedging. Applied Mathematics & Physics, 53(2): 132–143. (in Russian) DOI 10.52575/2687-0959-2021-53-2-132-143.

1. Введение. Наиболее известной и широко используемой в финансовой индустрии моделью ценообразования производных финансовых инструментов является модель Ф. Блэка и М. Шоулса [11]. Эта классическая модель цены для опционов европейского типа разрабатывалась при определенных ограничениях. «Идеальные условия» включают постоянную процентную ставку, отсутствие дивидендов или других выплат по базовому активу, лог-нормальную динамику цен, постоянную волатильность базового актива, возможность покупки и продажи любой доли базового актива, отсутствие транзакционных издержек. Сделки трейдеров в рамках указанной модели не могут оказывать ни временного, ни постоянного влияния на цену.

В последние годы появилось много работ, посвященных включению дополнительных факторов в модель Блэка – Шоулса. Моделирование ценообразования опционов охватывает многие области, и вот лишь несколько работ, демонстрирующих это [40, 23, 32, 3, 10]. Эти статьи посвящены вопросам

фактического распределения цен и волатильности, учету транзакционных издержек и рассмотрению постоянного или временного воздействия транзакций на цену актива.

Модель Блэка – Шоулса для колл (call) опциона Европейского типа может быть записана как:

$$\begin{aligned} u_t + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 u_{xx} + r(xu_x - u) &= 0, \\ u(0, t) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{u(x, t)}{x - Ke^{-r(T-t)}} &= 1, \\ u(x, T) &= \max(x - K, 0), \\ x \in [0, +\infty), \quad t \in [0, T], \quad K = \text{const}, \quad K > 0, \\ \sigma = \text{const}, \quad \sigma > 0, \quad r = \text{const}, \quad r \geq 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь x представляет собой цену базового актива, $u(x, t)$ – цена колл опциона Европейского типа, K – цена «страйк», то есть цена исполнения опциона, σ – это историческая волатильность (обычно принимается как стандартное отклонение цены), а r – это безрисковая процентная ставка.

Исследование влияния транзакционных издержек началось с работы Н. Е. Leland [30]. Автор предложил корректировать портфель, как в модели Блэка – Шоулса, но с использованием модифицированной волатильности, отражающей наличие транзакционных издержек. В модели модифицированная волатильность принимает вид

$$\hat{\sigma}_L^2 = \sigma^2 \left[1 + \sqrt{2/\pi} k/\sigma\sqrt{\Delta t} \right],$$

где σ – волатильность из модели Блэка – Шоулса, Δt – малый, но не бесконечно малый интервал времени между пересмотрами портфеля (рехеджированием), а k – стоимость транзакции:

$$k = \frac{x_{\text{ask}} - x_{\text{bid}}}{x} = 2 \frac{x_{\text{ask}} - x_{\text{bid}}}{x_{\text{ask}} + x_{\text{bid}}},$$

где x_{ask} и x_{bid} – цены лучшей покупки и продажи в книге лимитных ордеров (limit order book, LOB) соответственно.

Если пересмотр портфеля осуществляется нечасто и транзакционные издержки низкие, метод Н. Е. Leland хорошо работает на практике (см. также статью М. Avellaneda и А. Parás [6] для случая больших транзакционных издержек). Однако, как показали Y. M. Kabanov и М. М. Safarian в [28], ошибка хеджирования в стратегии Н. Е. Leland для цены европейского опциона колл стремится к нулю только тогда, когда уровень транзакционных издержек снижается до нуля при увеличении числа пересмотров портфеля [28, Теорема 2]. Поэтому авторы предположили, что $k = k_n = k_0 n^{-\alpha}$, $\alpha \in [0, 1/2]$, и тогда модифицированная волатильность $\hat{\sigma}_{KS}$, в зависимости от количества ребалансировок, примет вид

$$\hat{\sigma}_{KS}^2 = \sigma^2 \left(1 + \frac{Y_n}{\sigma} \right), \quad Y_n = \sqrt{\frac{8}{\pi}} k_n n^{1/2} = \sqrt{\frac{8}{\pi}} k_0 n^{1/2-\alpha}.$$

G. Barles и Н. М. Soner [8] использовали асимптотический анализ для вывода нелинейного уравнения Блэка – Шоулса для модели, которая учитывает транзакционные издержки и неприятие риска рыночными участниками. Волатильность $\hat{\sigma}_{BS}$ в модели принимает вид

$$\hat{\sigma}_{BS}^2 = \sigma^2 \left(1 + Y \left(e^{r(T-t)} k^2 \gamma C x^2 u_{xx} \right) \right),$$

где k – транзакционные издержки, пропорциональные объему операций. В модели учитывается количество проданных хеджируемых опционов C и фактор неприятия риска γ . В этом случае Y является функцией поправки к волатильности [8, теорема 3.1], которая удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d}{df} [Y(f)] = \frac{Y(f) + 1}{2\sqrt{fY(f)} - f}, \quad f \neq 0, \quad Y(0) = 0.$$

М. Jandačka и D. Ševčovič [27] обобщили и проанализировали модель методологии ценообразования с поправкой на риск (risk-adjusted pricing methodology (RAPM) model). Модель учитывает риск изменения стоимости портфеля, возникающий из-за недостаточно частых пересмотров портфеля, и риск увеличения транзакционных издержек при частом рехеджировании. В этой модели функция волатильности имеет вид

$$\hat{\sigma}_{JS}^2 = \sigma^2 \left(1 - q (xu_{xx})^{\frac{1}{3}} \right),$$

где $q = 3 (k^2 R / 2\pi)^{\frac{1}{3}}$, $R \geq 0$ – коэффициент премии за риск.

Мы также упомянем здесь несколько моделей с модифицированной волатильностью, которые учитывают недостаточную ликвидность и влияние на цены. Эти модели отражают учет влияния сделок хеджирования портфеля опционов на цены базового актива.

В модели R. Frey и A. Stremme [21] модифицированная волатильность имеет вид

$$\hat{\sigma}_{FS}^2 = \sigma^2 \left[\frac{1 - \rho\phi(t, x)}{1 - \rho\phi(t, x) - \rho x \frac{\partial \phi}{\partial x}(t, x)} \right]^2,$$

где $\phi(t, x)$ – нормализованная функция стратегии хеджирования программных трейдеров, ρ – это доля программных трейдеров. Программные трейдеры хеджируют свои портфели опционов согласно заранее определенному алгоритму, в соответствии с функцией стратегии хеджирования.

В модели P. J. Schönbucher и P. Wilmott [37] крупный трейдер использует торговую стратегию, которая не обязательно направлена на хеджирование портфеля опционов. Волатильность в этой модели представлена как

$$\hat{\sigma}_{SW}^2 = \left(\frac{\frac{\partial \chi(x, W, t)}{\partial W}}{\frac{\partial \chi(x, W, t)}{\partial x} + \frac{\partial f(x, t)}{\partial x}} \right)^2,$$

где $f(x, t)$ – торговая стратегия, $\chi(S, W, t)$ – избыточный спрос, W – это случайный процесс поступления информации на рынок.

Для описания ценообразования опционов R. K. Sircar и G. Papanicolaou [39] получили семейство нелинейных уравнений в частных производных с волатильностью в форме

$$\hat{\sigma}_{SP}^2 = \sigma^2 \left[\frac{V(1 - \rho u_x) U'(V(1 - \rho u_x))}{V(1 - \rho u_x) U'(V(1 - \rho u_x)) - \rho x u_{xx}} \right]^2,$$

ρ – доля программных трейдеров, C – цена Европейских опционов колл, $V(\cdot) = U^{-1}(\cdot)$ (обратная функция), а $U(\cdot)$ – функция относительного спроса трейдеров. Авторы исследуют случай функции спроса $D(x, y) = U(y^{\beta}/x)$ при $U(z) = \beta z$, $\beta = \text{const}$.

Помимо учета вышеперечисленных факторов, опубликован ряд работ, моделирующих влияния состояния книги лимитных ордеров (LOB) на хеджирование опционов [14, 36, 1, 4, 12, 7, 24]. Кроме того, в дополнение к упомянутым работам, существует обширная литература по оптимальному исполнению крупных ордеров, также оказывающих влияние на цены. Перечислим лишь некоторые из них [9, 3, 34, 2, 15]. В этих работах изучаются эффекты временного и постоянного влияния исполнения крупных ордеров на цены.

Отдельно отметим ряд работ, посвященных вопросу оптимального рехеджирования портфеля опционов при наличии транзакционных издержек. M. Davis, V. Panas and T. Zariphoroulou [17] максимизируют экспоненциальную полезность конечного капитала. Авторы предложили рассматривать три региона цен: «покупка», «продажа» и «без сделок» для рехеджирования портфеля. На границе этих регионов трейдер должен держать определенное количество базового актива. Эта модель также была изучена E. Whalley и P. Wilmott [41] с использованием асимптотического анализа. Следующие шаги по определению оптимального времени для повторного хеджирования были предприняты в работах V. Zakamouline [42] (аппроксимация оптимальной политики хеджирования и сравнение различных методов рехеджирования), A. Sepp [38] (максимизация коэффициента Шарпа) и J. Cai et. al. [13].

Численному решению нелинейных уравнений Блэка – Шоулса с модифицированной волатильностью посвящено множество исследований. В работах [5, 16, 26, 19] получены разностные схемы для различных нелинейных уравнений Блэка – Шоулса.

Основная цель данной работы – найти оптимальный временной интервал для дельта-хеджирования при наличии неликвидности и транзакционных издержек в рамках модели RAPM. M. Dyshaeв и V. Vedorov [20] рассматривают эту проблему, когда в модели RAPM стоимость ликвидности представлена линейной функцией. Здесь будет рассмотрен вариант степенной функции стоимости ликвидности. Будут изучены некоторые эмпирические свойства книги лимитных ордеров (LOB). В целях демонстрации практического применения базовым активом выбраны наиболее ликвидные фьючерсные контракты, торгуемые на Московской бирже. На основании эмпирических данных был рассчитан оптимальный временной интервал для рехеджирования опционной комбинации «long butterfly».

Статья организована следующим образом. В разделе 2 описывается функция стоимости неликвидности и приводятся некоторые эмпирические факты о ней. В разделе 3 мы кратко напоминаем об основных свойствах модели RAPM и пытаемся учесть неликвидность в этой модели. Для линейной и квадратичной функций стоимости ликвидности представлены соответствующие нелинейные уравнения типа Блэка – Шоулса. В разделе 4 получено численное решение нелинейного уравнения Блэка – Шоулса для модели RAPM, что позволило рассчитать оптимальный временной интервал для рехеджирования комбинации опционов «long butterfly».

2. Модель. Прежде всего, необходимо определить размер возможных потерь трейдера в случае недостаточной ликвидности. После этого, когда станет известен риск из-за недостаточной ликвидности, будет проведено обобщение модели RAPM для этого случая.

2.1 Функция стоимости ликвидности из модели L. C. G. Rogers и S. Singh [36]. В этом разделе мы кратко напомним метод оценки стоимости ликвидности, как это сделано в работе L. C. G. Rogers и S. Singh [36]. Авторы описывают стоимость ликвидности как нелинейные транзакционные издержки. Стоимость ликвидности, представленную в другом виде, можно найти в работе P. Malo and T. Pennanen [31]. Сравнение этих двух способов и пример практического использования можно найти в статье M. Dyshaev [18].

В рамках этой статьи мы предполагаем, что трейдер может оказывать только временное влияние на цены. Например, исходя из собственной стратегии хеджирования опционов, трейдеру необходимо приобрести h единиц базового актива. Для этого трейдер размещает рыночный ордер на покупку. Если объем ордера превышает объем, представленный по лучшей цене предложения (ask) в LOB, то он «сметает» существующие ордера на стороне продажи до тех пор, пока не наберет требуемую сумму в h единиц. После этого LOB быстро заполняется новыми лимитными ордерами. Другими словами, рынок считается абсолютно устойчивым.

В большинстве статей, посвященных вопросам хеджирования опционов, обычно используется *рыночная цена*. Это цена, по которой базовый актив продается или покупается (только в модели). Обычно рыночная цена рассчитывается как средняя цена между лучшей ценой спроса s_{bid} и лучшей ценой предложения s_{ask} :

$$\bar{s} = \frac{s_{bid} + s_{ask}}{2}.$$

Однако трейдер почти всегда уплатит денег при покупке h единиц больше, чем $\bar{s}h$. Значение $\bar{s}h$ часто называют *рыночной стоимостью* (the mark-to-market value). Фактически трейдер покупает по взвешенной цене

$$s^f(h) = \frac{1}{h} \sum_{i=1}^{N(h)} a_i s_i, \quad \sum_{i=1}^{N(h)} a_i = h,$$

где a_i — это купленная сумма базового актива по цене s_i в книге лимитных ордеров. $N(h)$ — это количество уровней цен в LOB, достаточных для исполнения рыночного ордера на покупку h единиц базового актива. На практике, если трейдер подает рыночный ордер для хеджирования опционов, не принимая во внимание эту разницу в ценах, он или она потеряет некоторую сумму денег.

Трейдер покупает базовый актив на h единиц,

$$h = \int_1^{s^m(h)} \rho(s) ds,$$

где $s^m(h) = s_{N(h)}/\bar{s}$ — это предельная относительная цена, а $\rho(s)$ — это плотность объема ордеров базовых активов в LOB. Таким образом, $s^m(h)$ — последняя максимальная (для рыночного ордера на покупку) относительная цена.

Общая стоимость, выраженная в деньгах, которую заплатит трейдер, зависит от h :

$$T(h) = h s^f(h) = \bar{s} \int_1^{s^m(h)} s \rho(s) ds.$$

Разница между рыночной стоимостью $\bar{s}h$ и общей стоимостью $T(h)$ как раз и представляет собой стоимость ликвидности:

$$T(h) - h\bar{s} = \bar{s} \int_1^{s^m(h)} s \rho(s) ds - h\bar{s} = \bar{s} \int_1^{s^m(h)} (s - 1) \rho(s) ds.$$

Таким образом, стоимость ликвидности $C(h)$, выраженная в количестве денег, принимает вид

$$C(h) = T(h) - h\bar{s} = \bar{s}l(h), \tag{2}$$

где

$$l(h) = \int_1^{s^m(h)} (s - 1) \rho(s) ds.$$

Авторы [36] использовали для функции стоимости ликвидности $l(h)$ для единиц базового актива в форме

$$l(h) = \frac{1}{2} \varepsilon h^2,$$

где ε – малый параметр. Для численного решения авторы принимают $\varepsilon = 0.006$, исходя из практических наблюдений. Форма функции $l(h)$ была выбрана из соображений разрешимости уравнения НЖВ (см. [36, Замечание и уравнение (3.12)]).

2.2 Эмпирическая функция стоимости ликвидности в LOB. Построению моделей или изучению эмпирических свойств LOB посвящено большое количество работ. Заинтересованный читатель может найти много полезных ссылок в работах М. D. Gould и др. [22] или J. Lehoczky и M. Schervish [29].

Если мы посмотрим на типичные графики с эмпирической функцией стоимости неликвидности на рисунке 1, мы можем предположить, что эта функция имеет вид

$$l(h) = \frac{1}{2} \varepsilon h^\alpha, \quad \varepsilon > 0, \quad \alpha > 1, \quad (3)$$

или ее можно аппроксимировать как линейную функцию от h , которая представляет максимальную стоимость ликвидности (пунктирные линии на рисунке 1)

$$l(h) = \frac{1}{2} v h, \quad v > 0, \text{ if } \alpha = 1. \quad (4)$$

Сплошные линии на рисунке 1 представляют собой нелинейную аппроксимацию эмпирических данных методом наименьших квадратов. Пунктирная линия примерно соответствует максимуму функции стоимости ликвидности в LOB. По оси абсцисс показано общее количество лотов в LOB до определенного уровня цен. Ось ординат представляет значения функции стоимости ликвидности $l(h)$. На левой панели представлена функция стоимости ликвидности для стороны спроса книги лимитных ордеров (LOB), на правой – для стороны предложения. Исходные данные были получены из мгновенных «снимков» LOB с интервалом 5 секунд для фьючерсного контракта (RIM0, RTS-6.20) на индекс РТС, торгуемого на Московской бирже [33]. Данные соответствуют периоду с 5 мая 2020 года по 29 мая 2020 года. Было обработано около 160 000 снимков со 100 уровнями цен каждый (50 уровней для стороны спроса и 50 уровней для стороны предложения). Таблица 1 содержит аналогичные данные для фьючерсного контракта на нефть марки Brent (BRM0, BR-06.20) и фьючерсного контракта на обменный курс доллара США по отношению к российскому рублю (SiM0, Si-06.20).

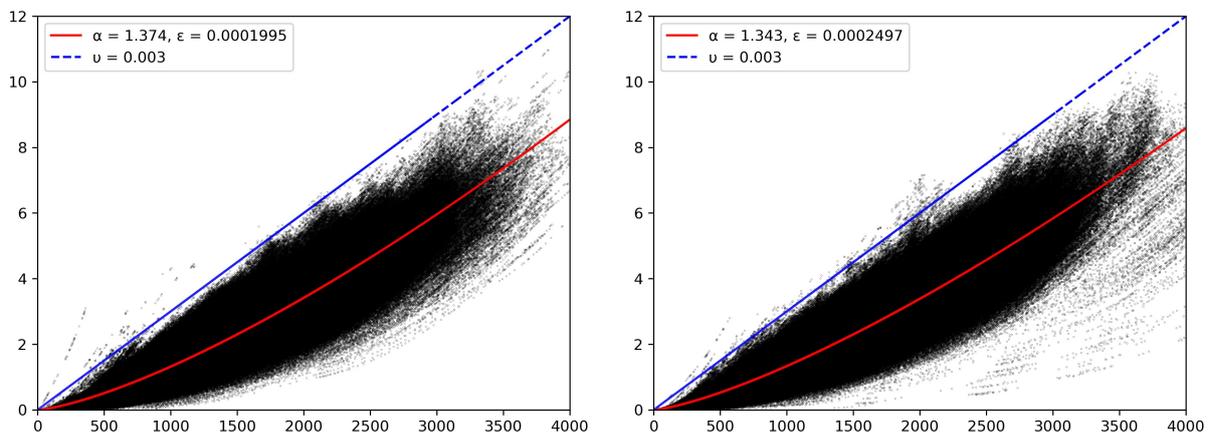


Рис. 1. Типичная форма функции стоимости ликвидности (левая панель – спрос, правая панель – предложение)

Fig. 1. The typical form of the liquidity cost function (left panel – for the bid side of LOB, right panel – for the ask side of LOB)

Расчет на основе мгновенных снимков книги лимитных ордеров был выполнен как для стороны спроса, так и для стороны предложения, поскольку ряд авторов указывают на наличие разницы в их свойствах [31, 25, 35].

Чтобы вычислить значения, приведенные в таблице 1, мы аппроксимировали их с помощью нелинейного метода наименьших квадратов. Использовалась функция `curve_fit()` из пакета SciPy для Python. Как видно на рисунке 1, ε и α сильно меняются со временем.

3 Модель RAPM с учетом недостаточной ликвидности. В начале кратко отмечаются некоторые результаты, полученные для модели RAPM [27]. После этого делается попытка дополнить эту модель

Таблица 1: Эмпирические значения ϵ и α для функции стоимости ликвидности в виде $l(h) = \frac{1}{2}\epsilon h^\alpha$.

Фьючерс на ...	Brent oil	RTS index	USD/RUB FX-rate
Код контракта	BRM0, BR-06.20	RIM0, RI-06.20	SiM0, Si-06.20
Количество снимков, N	162481	162479	162480
$\epsilon, \times 10^{-3}$: all/bid/ask	1.61/3.50/0.69	0.23/0.20/0.25	0.41/0.38/0.41
StdDev $\epsilon, \times 10^{-6}$: all/bid/ask	3.39/10.3/2.04	0.24/0.30/0.37	0.33/0.47/0.46
α : all/bid/ask	1.16/1.08/1.25	1.36/1.37/1.34	1.04/1.05/1.04
StdDev $\alpha, \times 10^{-4}$: all/bid/ask	2.13/2.99/2.97	1.40/1.98/1.97	0.92/1.42/1.24

учетом недостаточной ликвидности в случае абсолютной устойчивости. С учетом эмпирического вида функции стоимости ликвидности получены соответствующие нелинейные уравнения типа Блэка – Шоулса.

3.1 Модель RAPM. Рассмотрим основные этапы получения модели RAPM. Если портфель состоит из одного опциона и δ единиц базового актива, изменение портфеля за временной интервал Δt составляет

$$\Delta\Pi = \Delta u + \delta\Delta x. \tag{5}$$

В предположении о геометрическом броуновском движении цены базового актива

$$dx = \mu x dt + \sigma x dW,$$

где дрейф равен μ , а σ – стандартное отклонение.

Прежде всего, было сделано предположение, что премия за риск добавляется к изменению портфеля Π за интервал времени Δt :

$$\Delta\Pi = r\Pi\Delta t + (r_{TC} + r_{VP})x\Delta t, \tag{6}$$

где r – безрисковая процентная ставка, r_{TC} – премия за риск операционных издержек на единицу цены актива, а r_{VP} – премия за риск волатильности портфеля. Первая из них соответствует риску увеличения транзакционных издержек при частом хеджировании. Вторая учитывает риск незащищенности портфеля (увеличение ошибки хеджирования) при недостаточно частом хеджировании.

Премия за риск увеличения общей стоимости транзакции r_{TC} имеет вид

$$r_{TC} = \frac{kx\sigma|u_{xx}|}{\sqrt{2\pi}\Delta t},$$

а премия за риск волатильности портфеля r_{VP} из-за редкого рехеджирования может быть представлена как

$$r_{VP} = \frac{1}{2}R\sigma^4 x^2 u_{xx}^2 \Delta t.$$

Находя минимум функции общего риска $r_T = r_{TC} + r_{VP}$ в зависимости от Δt , получаем выражение для оптимального интервала рехеджирования Δt_{opt} :

$$\Delta t_{opt} = \left(\frac{k}{R} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^{2/3} \frac{1}{\sigma^2 |xu_{xx}|^{2/3}}. \tag{7}$$

После этого, применив формулу Ито для цены опциона u , можно найти Δu

$$\Delta u = \left[u_t + \mu x u_x + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 u_{xx} \right] dt + \sigma x u_x dW.$$

Подставляя полученные выражения в (5) и учитывая, что используется стратегия δ -хеджирования, т.е. $\delta = -u_x$:

$$\Delta\Pi = \left[u_t + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 u_{xx} \right] dt.$$

Сравнивая с уравнением (6) и подставляя оптимальный временной интервал (7) в r_{TC} и r_{VP} , получаем уравнение Блэка – Шоулса с поправкой на риск в виде

$$u_t + \frac{1}{2}\sigma^2 \left(1 - q(xu_{xx})^{1/3}\right) x^2 u_{xx} - r(u - xu_x) = 0, \tag{8}$$

где $q = 3(k^2 R / 2\pi)^{1/3}$.

3.2 Премия за риск недостаточной ликвидности. Представляется возможным дополнить модель RAPM новым фактором риска в (6), если учитывать премию за риск неликвидности так же, как и другие премии. Как упоминалось выше, стоимость неликвидности может быть измерена как (2). В этом случае, поскольку интервал между корректировками портфеля принимается равным Δt (напомним, что $\bar{s} = x$):

$$r_{IL}x\Delta t = xl(h). \tag{9}$$

При выводе формулы для премии за риск транзакционных издержек в [27] было показано, что величина изменения базового актива для δ -хеджирования равна

$$\Delta\delta = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\sigma x|u_{xx}|\sqrt{\Delta t}.$$

Обратим внимание, что h соответствует этой сумме $\Delta\delta$ базового актива, необходимой для ребалансировки портфеля в модели RAPM. Аналогично аргументам при рассмотрении транзакционных издержек, $|u_{xx}|$ также следует использовать при расчете стоимости ликвидности. Заменяв $l(h)$ из (3) в (9) и используя выражение для $\Delta\delta$ вместо h , получаем

$$r_{IL} = \frac{1}{\Delta t}l(h) = \frac{\varepsilon}{2\Delta t}h^\alpha = \frac{\varepsilon}{2\Delta t}\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\sigma x|u_{xx}|\sqrt{\Delta t}\right)^\alpha = \frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\right)^\alpha (\sigma x|u_{xx}|)^\alpha \Delta t^{\frac{\alpha}{2}-1}.$$

Функция общей премии за риск изображена на рисунке 2. Представлены графики для разных α . По оси абсцисс показан временной интервал Δt (как часть года) для последовательных корректировок портфеля, соответствующих стратегии δ -хеджирования. По оси ординат показаны значения функции общего риска r_R . Для сопоставимости вычислений в расчетах использованы значения $q = 0.2, k = 0.01$ и $\sigma = 0.3$, как в [27], и $\varepsilon = 0.006$, как в [36]. Также для расчетов принято $x|u_{xx}| = 0.5$. Эта функция имеет вид

$$r_R = r_{TC} + r_{VP} + r_{IL} = \frac{kx\sigma|u_{xx}|}{\sqrt{2\pi}}\Delta t^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}R\sigma^4x^2u_{xx}^2\Delta t + \frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\right)^\alpha (\sigma x|u_{xx}|)^\alpha \Delta t^{\frac{\alpha}{2}-1}. \tag{10}$$

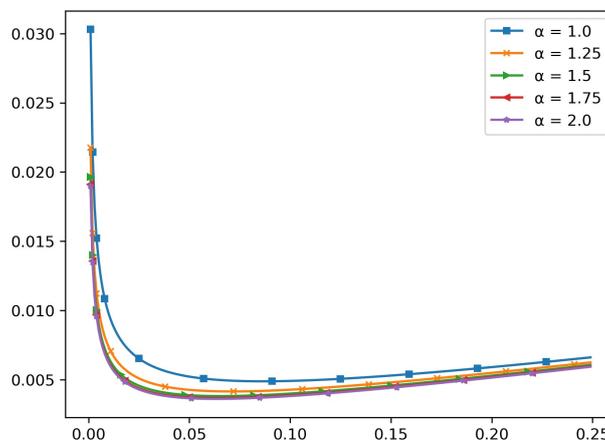


Рис. 2. Функция общей премии за риск r_R для различных α
 Fig. 2. The function of the total risk premium r_R for different α

Необходимо найти интервал времени Δt_{opt} , при котором общий риск r_R минимален. Найдем минимум функции r_R :

$$r'_R = -\frac{1}{2}\frac{k\sigma x|u_{xx}|}{\sqrt{2\pi}}\Delta t^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}R\sigma^4x^2u_{xx}^2 + \frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\right)^\alpha (\sigma x|u_{xx}|)^\alpha \left(\frac{\alpha}{2} - 1\right)\Delta t^{\frac{\alpha}{2}-2} = 0.$$

Теперь необходимо убедиться, что функция r_R достигает минимума на интервалах $\Delta t \in (0, 1], \alpha > 1$. Для этого найдем вторую производную r_R по Δt и покажем, что $r''_R > 0$ для любых Δt и α из вышеуказанных интервалов:

$$\begin{aligned} r''_R &= \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\frac{k\sigma x|u_{xx}|}{\sqrt{2\pi}}\Delta t^{-\frac{5}{2}} + \frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\right)^\alpha (\sigma x|u_{xx}|)^\alpha \left(\frac{\alpha}{2} - 1\right)\left(\frac{\alpha}{2} - 2\right)\Delta t^{\frac{\alpha}{2}-3} \\ &= \frac{3}{4}\frac{k\sigma x|u_{xx}|}{\sqrt{2\pi}}\Delta t^{-\frac{5}{2}} + \frac{\varepsilon}{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\right)^\alpha (\sigma x|u_{xx}|)^\alpha ((\alpha - 3)^2 - 1)\Delta t^{\frac{\alpha}{2}-3} > 0. \end{aligned}$$

Первое слагаемое положительное для всех α и Δt . Второе слагаемое положительно тогда и только тогда, когда $\alpha < 2$ или $\alpha > 4$.

Вернемся к поиску минимума для (10) и корня его первой производной. Используя следующие подстановки и обозначения

$$y = \Delta t^{\frac{3}{2}}, 0 < \Delta t \leq 1 \Rightarrow \Delta t = y^{\frac{2}{3}}, \Delta t^{\frac{\alpha-2}{2}} = y^{\frac{\alpha-4}{3}}, 0 < y \leq 1,$$

$$a = -\frac{1}{2} \frac{k\sigma x |u_{xx}|}{\sqrt{2\pi}}, \quad b = \frac{1}{2} R\sigma^4 x^2 u_{xx}^2, \quad c = \frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \right)^\alpha (\sigma x |u_{xx}|)^\alpha \left(\frac{\alpha}{2} - 1 \right),$$

мы получим уравнение в виде $ay^{-1} + b + cy^{\frac{\alpha-4}{3}} = 0$. Затем, умножая на y и разделив на a , получаем

$$Cy^{\frac{\alpha-1}{3}} + By + 1 = 0, \tag{11}$$

где

$$C = \frac{c}{a} = -\frac{\varepsilon}{k} \frac{\sqrt{2}^{\alpha+1}}{\sqrt{\pi}^{\alpha-1}} \left(\frac{\alpha}{2} - 1 \right) (\sigma x |u_{xx}|)^{\alpha-1}, \quad B = \frac{b}{a} = -\frac{R}{k} \sqrt{2\pi} \sigma^3 x |u_{xx}|.$$

Исходя из вида полученного уравнения (11) и наличия в нем неизвестного эмпирического параметра α , мы будем искать значения оптимального интервала рехеджирования Δt_{opt} численно.

Замечание 1. Если мы рассмотрим простую модель, когда $l(h)$ является линейной функцией относительно h , как (4), то есть $\alpha = 1$, мы получим следующее нелинейное уравнение Блэка – Шоулса

$$u_t - \frac{1}{2} \sigma^2 \left(1 - q(xu_{xx})^{1/3} \right) x^2 u_{xx} - r(xu_x - u) = 0, \tag{12}$$

$$q = 3((k + \varepsilon)^2 R / 2\pi)^{1/3}.$$

Обратим внимание, что в случае, когда $\alpha = 2$, премия за риск недостаточной ликвидности r_{IL} не зависит от Δt . Для $\alpha = 2$ оптимальный интервал рехеджирования Δt_{opt} будет таким же, как (7), но соответствующее нелинейное уравнение Блэка – Шоулса будет другим. Чтобы получить его, заменим Δt_{opt} из (7) на r_R (уравнение (10)). Затем стандартными шагами, (применяя формулу Ито для $u(x, t)$ и следуя стратегии δ -хеджирования), мы получаем новую нелинейную модель Блэка – Шоулса (ср. (8))

$$u_t - \frac{1}{2} \sigma^2 \left(1 - q(xu_{xx})^{1/3} - pxu_{xx} \right) x^2 u_{xx} - r(xu_x - u) = 0, \tag{13}$$

$$q = 3(k^2 R / 2\pi)^{1/3}, \quad p = 2\varepsilon/\pi.$$

4. Численное решение. Наличие эмпирического параметра α затрудняет получение аналитического решения (11). Поскольку отсутствует выражение в явном виде для Δt_{opt} , также невозможно представить аналитическое выражение для модифицированной волатильности. А это, в свою очередь, не позволяет явно записать нелинейное уравнение Блэка – Шоулса с параметром α . Однако для практических целей мы рассчитаем оптимальный интервал рехеджирования при определенных допущениях. Прежде всего, мы найдем значения xu_{xx} , полученные для модели RAPM. Затем мы используем эти значения xu_{xx} для численного решения уравнения (11), и это позволит найти Δt_{opt} .

4.1 Численная схема для нелинейного уравнения в частных производных для модели RAPM. Первое, что необходимо сделать, это численно решить начально-краевую задачу для модели RAPM. Расчеты проводились по методике, описанной в [19].

Рассматривается комбинация опционов

$$\text{«Long butterfly»} = +1 \text{ Long call}(K_1) \text{ at } p_1 + 2 \text{ Short call}(K_0) \text{ at } p_0 + 1 \text{ Long call}(K_2) \text{ at } p_2,$$

где $K_2 > K_0 > K_1 > 0$ – цены исполнения («strikes»), $p_1, p_0, p_2 > 0$ – цены приобретения или продажи опционов (это могут быть реальные рыночные цены, однако для простоты взяты расчетные цены из модели Блэка – Шоулса).

Для решения произведено усечение области определения с правой стороны и смена направления времени. Время было заменено на $t' = T - t$, поэтому время в задаче становится обратным. В результате мы получим начально-краевую задачу (снова обозначив переменную t' как t).

Для комбинации опционов «long butterfly» начально-краевая задача, в отличие от (1), выглядит так:

$$u_t - \frac{1}{2} \sigma^2 \left(1 - q(xu_{xx})^{1/3} \right) x^2 u_{xx} - r(xu_x - u) = 0, \quad q = 3(k^2 R / 2\pi)^{1/3},$$

$$(x, t) \in [0, 1] \times [0, 1], \quad \sigma = \text{const}, \quad \sigma > 0, \quad r = \text{const}, \quad r \geq 0,$$

$$u(0, t) = (-p_1 + 2p_0 - p_2)e^{-rt}, \tag{14}$$

$$u(1, t) = [2K_0 - K_1 - K_2 + 2p_0 - p_1 - p_2] e^{-rt},$$

$$u(x, 0) = \max(x - K_1, 0) - 2 \max(x - K_0, 0) + \max(x - K_2, 0) - p_1 + 2p_0 - p_2.$$

Для численного решения задачи (14) использовался шаблон для шеститочечной двухслойной неявной схемы с весами. Соответствующая разностная схема в случае $\theta = 1/2$ называется схемой Кранк — Николсон. В нашей схеме значения искомой функции u_n^{m+1} на слое $m + 1$ имеют вес θ , а значения из предыдущего слоя рассматриваются с весом $1 - \theta$.

Разностные представления функции $u(x, t)$ и ее производных

$$\begin{aligned} u &\sim \theta u_n^{m+1} + (1 - \theta) u_n^m, & u_t &\sim \frac{u_n^{m+1} - u_n^m}{\tau}, \\ u_x &\sim \theta \frac{u_{n+1}^{m+1} - u_{n-1}^{m+1}}{h} + (1 - \theta) \frac{u_{n+1}^m - u_{n-1}^m}{h}, \\ u_{xx} &\sim \theta \frac{u_{n+1}^{m+1} - 2u_n^{m+1} + u_{n-1}^{m+1}}{h^2} + (1 - \theta) \frac{u_{n+1}^m - 2u_n^m + u_{n-1}^m}{h^2}, \end{aligned}$$

где τ — шаг сетки для t , а h — постоянный шаг сетки для x .

Расчеты выполнены методом «прогонки». Использовались следующие параметры модели:

- волатильность $\sigma = 0.3$;
- шаг изменения волатильности $\Delta\sigma = 0.01$;
- цены исполнения $K_0 = 0.40$, $K_1 = 0.32$, $K_2 = 0.48$;
- процентная ставка $r = 0.0$.

Выбраны следующие параметры разностной схемы:

- весовой множитель для верхнего слоя шаблона: $\Theta = 0.9$;
- количество узлов сетки вдоль оси x : $N = 120$.

На рисунке 3 показан график так называемой GammaP ($\text{GammaP} = \frac{x}{100} u_{xx}$) для комбинации опционов «long butterfly». Использовались следующие цены исполнения опционов: $K_0 = 0.40$, $K_1 = 0.32$, $K_2 = 0.48$.

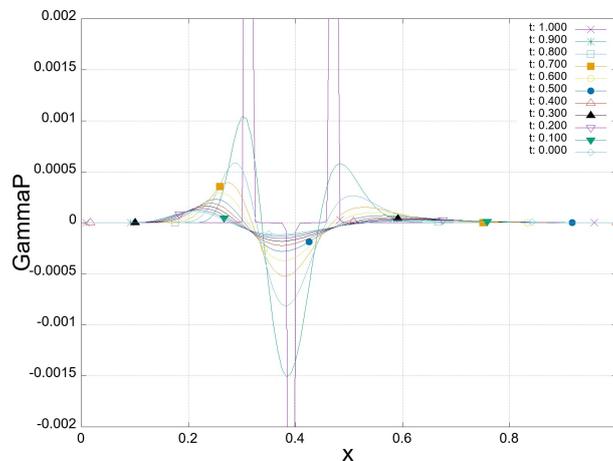


Рис. 3. GammaP для опционной комбинации «long butterfly»
Fig. 3. The GammaP for the options combination «long butterfly»

4.2 Оптимальный временной интервал для корректировки комбинации опционов. Данные, полученные численно в предыдущем разделе, позволяют рассчитать Δt_{opt} . Теперь, когда массив значений $x|u_{xx}|$ из модели RAPM определен, можно найти коэффициенты уравнения (11). Для расчета использовались $\varepsilon = 2.3 \times 10^{-4}$ и $\alpha = 1.36$. Эти значения соответствуют фьючерсному контракту на индекс РТС. Для каждой пары (x, t) и, соответственно, $x|u_{xx}|$ были найдены значения коэффициентов C и B . После этого корни уравнения (11) были найдены численно.

Расчеты проводились по методу Ньютона. Использовалась функция `root_scalar` (`method = 'newton'`) из пакета SciPy для Python. Начальное приближение было установлено как $x_0 = 1.0$, допустимое отклонение для завершения составляет $\varepsilon_y = 2.36 \times 10^{-11}$.

Результаты показаны на рисунке 4. Представлена зависимость оптимального временного интервала Δt_{opt} для рехеджирования комбинации опционов «long butterfly» от цены базового актива x и времени t . На левой панели изображен оптимальный временной интервал рехеджирования для модели RAPM без учета наличия недостаточной ликвидности. На правой панели представлен тот же интервал, но с учетом стоимости ликвидности фьючерсного контракта на индекс РТС. Используются эмпирические значения

$\varepsilon = 2.3 \times 10^{-4}$, $\alpha = 1.36$. Как видно из представленных графиков, оптимальный интервал пересмотра портфеля Δt_{opt} уменьшается при $t \rightarrow T$. Дельта-хеджирование становится особенно необходимым, если цена базового актива приближается к одному из страйков рассматриваемой комбинации опционов.

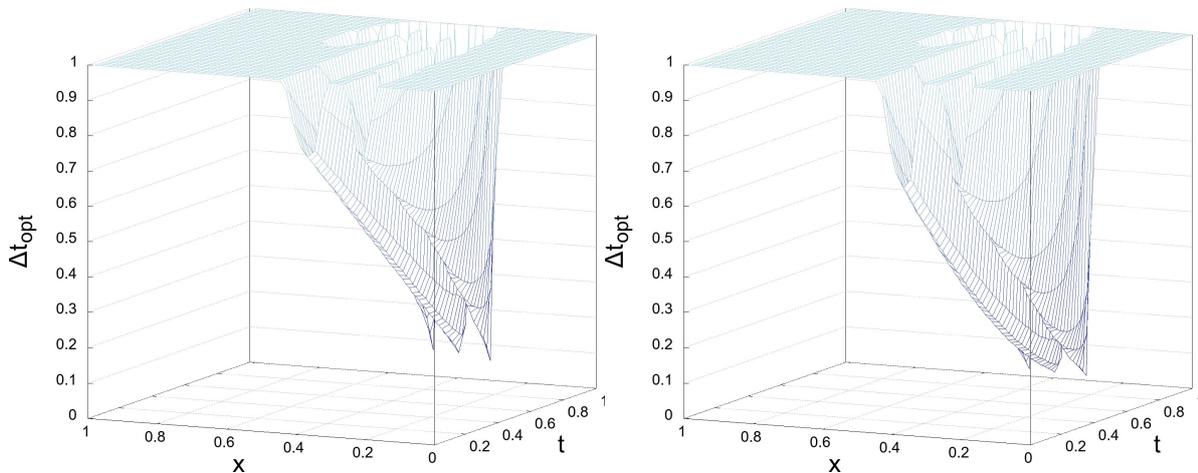


Рис. 4. Зависимость оптимального временного интервала дельта-хеджирования Δt_{opt} для комбинации опционов «long butterfly» от цены базового актива x и времени t

Fig. 4. The dependence of the optimal time interval Δt_{opt} for adjustment of options combination «long butterfly» on the price of underlying asset x and time t

5. Заключение. В статье предлагается обобщение учета затрат при недостаточной ликвидности при исполнении крупных ордеров в LOB в рамках дельта-хеджирования портфеля опционов. Получено нелинейное уравнение типа Блэка – Шоулса для случая, когда цена неликвидности является линейной или квадратичной. Демонстрируется методика расчета оптимального интервала дельта-хеджирования Δt_{opt} для практического использования.

Интересной перспективой развития полученных в данной работе результатов представляется качественное и численное изучение уравнения (13). Это новое нелинейное уравнение в частных производных типа Блэка – Шоулса, которое учитывает нехватку ликвидности в LOB.

Возможно, с практической точки зрения, когда необходимо оценить максимально возможные издержки на неликвидность, стоит использовать линейную аппроксимацию функции стоимости ликвидности. С другой стороны, есть много работ, посвященных вопросу оптимального исполнения ордеров. Эти работы направлены на разработку алгоритмов выполнения крупных ордеров с наименьшим влиянием на цену и наименьшей стоимостью ликвидности. Очевидно, что использование таких алгоритмов на практике позволяет избежать потери ликвидности в LOB. В этом случае, как правило, трейдер дробит крупный ордер и покупает или продает за один раз только небольшое количество базового актива. Тем не менее, если по каким-либо причинам использовать алгоритм невозможно, будет полезна оценка влияния стоимости ликвидности, полученная в данной работе.

References

1. Agliardi R., GenÇay R. 2014. Hedging through a limit order book with varying liquidity. *The Journal of Derivatives*, 22(2):32–49. DOI:10.3905/jod.2014.22.2.032.
2. Alfonsi A., Fruth A., Schied A. 2010. Optimal execution strategies in limit order books with general shape functions. *Quantitative Finance*, 10(2):143–157. DOI:10.1080/14697680802595700.
3. Almgren R., Chriss N. 2001. Optimal execution of portfolio transactions. *Journal of Risk*, 3(2):5–39. DOI:10.21314/JOR.2001.041.
4. Almgren R., Li T. M. 2016. Option hedging with smooth market impact. *Mark. Microstructure Liq.*, 02(01):1650002. DOI:10.1142/s2382626616500027.
5. Ankudinova J., Ehrhardt M. 2008. On the numerical solution of nonlinear Black-Scholes equations. *Computers & Mathematics with Applications*, 56(3):799–812. DOI:10.1016/j.camwa.2008.02.005.
6. Avellaneda M., Parás A. 1994. Dynamic hedging portfolios for derivative securities in the presence of large transaction costs. *Applied Mathematical Finance*, 1(2):165–194. DOI:10.1080/1350486940000010.
7. Bank P., Soner H. M., Voß, M. 2017. Hedging with temporary price impact. *Mathematics and Financial Economics*, 11(2):215–239. DOI:10.1007/s11579-016-0178-4.

8. Barles G., Soner H. M. 1998. Option pricing with transaction costs and a nonlinear Black – Scholes equation. *Finance and Stochastics*, 2(4):369–397. DOI:10.1007/s007800050046.
9. Bertsimas D., Lo A. W. 1998. Optimal control of execution costs. *Journal of Financial Markets*, 1(1):1–50. DOI:10.1016/S1386-4181(97)00012-8.
10. Biais B., Glosten L., Spatt C. 2005. Market microstructure: A survey of microfoundations empirical results policy implications. *Journal of Financial Markets*, 8(2):217–264. DOI:10.1016/j.finmar.2004.11.001.
11. Black F., Scholes M. 1973. The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, 81(3):637–654. DOI:10.1086/260062.
12. Bouchard B., Loeper G., Zou Y. 2017. Hedging of covered options with linear market impact and gamma constraint. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 55(5):3319–3348. DOI:10.1137/15M1054109.
13. Cai J., Fukasawa M., Rosenbaum M., Tankov P. 2016. Optimal discretization of hedging strategies with directional views. *SIAM Journal on Financial Mathematics*, 7(1):34–69. DOI:10.1137/151004306.
14. Cartea A., Gan L., Jaimungal S. 2019. Hedge and speculate: replicating option payoffs with limit and market orders. *SIAM Journal on Financial Mathematics*, 10(3):790–814. DOI:10.1137/18M1192706.
15. Cartea Á., Jaimungal S. 2015. Optimal execution with limit and market orders. *Quantitative Finance*, 15(8):1279–1291. DOI:10.1080/14697688.2015.1032543.
16. Company R., Navarro E., Pintos J. R., Ponsoda E. 2008. Numerical solution of linear and nonlinear Black-Scholes option pricing equations. *Computers & Mathematics with Applications*, 56(3):813–821. DOI:10.1016/j.camwa.2008.02.010.
17. Davis M. H. A., Panas V. G., Zariphopoulou T. 1993. European option pricing with transaction costs. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 31(2):470–493. DOI:10.1137/0331022.
18. Dyshaeв M. M. 2020. On measuring the cost of liquidity in the limit order book. *Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal*, 5(1):96–104. DOI:10.24411/2500-0101-2020-15107.
19. Dyshaeв M. M., Fedorov V. E. 2019. Comparing of some sensitivities (Greeks) for nonlinear models of option pricing with market illiquidity. *Mathematical notes of NEFU*, 26(2):94–108. DOI:10.25587/SVFU.2019.102.31514.
20. Dyshaeв M. M., Fedorov V. E. 2020. The optimal reheding interval for the options portfolio within the RAPM, taking into account transaction costs and liquidity costs. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series: Mathematics*, 31:3–17. DOI:10.26516/1997-7670.2020.31.3.
21. Frey R., Stremme A. 1997. Market volatility and feedback effects from dynamic hedging. *Mathematical Finance*, 7(4):351–374. DOI:10.1111/1467-9965.00036.
22. Gould M. D., Porter M. A., Williams S., McDonald M., Fenn D. J., Howison S. D. 2013. Limit order books. *Quantitative Finance*, 13(11):1709–1742. DOI:10.1080/14697688.2013.803148.
23. Guéant O. 2016. *The financial mathematics of market liquidity: from optimal execution to market making*. Chapman and Hall/CRC. DOI:10.1201/b21350.
24. Guéant O., Pu J. 2017. Option pricing and hedging with execution costs and market impact. *Mathematical Finance*, 27(3):803–831. DOI:10.1111/mafi.12102.
25. Harris L., Hasbrouck J. 1996. Market vs. limit orders: the SuperDOT evidence on order submission strategy. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 31(2):213–231. DOI:10.2307/2331180.
26. Heider P. 2010. Numerical methods for non-linear Black – Scholes equations. *Applied Mathematical Finance*, 17:59–81. DOI:10.1080/13504860903075670.
27. Jandačka M., Ševčovič, D. 2005. On the risk-adjusted pricing-methodology-based valuation of vanilla options and explanation of the volatility smile. *Journal of Applied Mathematics*, 2005(3):235–258. DOI:10.1155/JAM.2005.235.
28. Kabanov Y. M., Safarian M. M. 1997. On Leland’s strategy of option pricing with transactions costs. *Finance and Stochastics*, 1(3):239–250. DOI:10.1007/s007800050023.
29. Lehoczky J., Schervish M. 2018. Overview and history of statistics for equity markets. *Annual Review of Statistics and Its Application*, 5:265–288. DOI:10.1146/annurev-statistics-031017-100518.

30. Leland H. E. 1985. Option pricing and replication with transactions costs. *The Journal of Finance*, 40(5):1283–1301. DOI:10.1111/j.1540-6261.1985.tb02383.x.
31. Malo P., Pennanen T. 2012. Reduced form modeling of limit order markets. *Quantitative Finance*, 12(7):1025–1036. DOI:10.1080/14697688.2011.589402.
32. McAleer M., Medeiros M. C. 2008. Realized volatility: A review. *Econometric Reviews*, 27(1-3):10–45. DOI:10.1080/07474930701853509.
33. Moscow Exchange. Search by contracts 2020. Accessed Nov 2020. URL:<https://www.moex.com/en/derivatives/contracts.aspx?p=act>.
34. Obizhaeva A. A., Wang J. 2013. Optimal trading strategy and supply/demand dynamics. *Journal of Financial Markets*, 16(1):1–32. DOI:10.1016/j.finmar.2012.09.001.
35. Rinaldo A. 2004. Order aggressiveness in limit order book markets. *Journal of Financial Markets*, 7(1):53–74. DOI:10.1016/S1386-4181(02)00069-1.
36. Rogers L. C. G., Singh S. 2010. The cost of illiquidity and its effects on hedging. *Mathematical Finance*, 20(4):597–615. DOI:10.1111/j.1467-9965.2010.00413.x.
37. Schönbucher P. J., Wilmott P. 2000. The feedback effect of hedging in illiquid markets. *SIAM J. Appl. Math.*, 61(1):232–272. DOI:10.1137/S0036139996308534.
38. Sepp A. 2013. When you hedge discretely: optimization of sharpe ratio for delta-hedging strategy under discrete hedging and transaction costs. *Journal of Investment Strategies*, 3(1):19–59. DOI:10.2139/ssrn.1865998.
39. Sircar R. K., Papanicolaou G. 1998. General Black-Scholes models accounting for increased market volatility from hedging strategies. *Appl. Math. Finance*, 5(1):45–82. DOI:10.1080/135048698334727.
40. Tarasov V. E. 2020. Fractional econophysics: market price dynamics with memory effects. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, p. 124865. DOI:10.1016/j.physa.2020.124865.
41. Whalley A. E., Wilmott P. 1997. An asymptotic analysis of an optimal hedging model for option pricing with transaction costs. *Mathematical Finance*, 7(3):307–324. DOI:10.1111/1467-9965.00034.
42. Zakamouline V. I. 2006. Efficient analytic approximation of the optimal hedging strategy for a European call option with transaction costs. *Quantitative Finance*, 6(5):435–445. DOI:10.1080/14697680600724809.

Получена 17.05.2021

Дышаев Михаил Михайлович – кандидат физико-математических наук, Челябинский государственный университет

 <http://orcid.org/0000-0003-4265-1752>

ул. Бр. Кашириных, 129, Челябинск, 454001, Россия

E-mail: Mikhail.Dyshaev@gmail.com

Федоров Владимир Евгеньевич – доктор физико-математических наук, профессор, Челябинский государственный университет

 <http://orcid.org/0000-0002-0787-3272>

ул. Бр. Кашириных, 129, Челябинск, 454001, Россия

E-mail: kar@csu.ru