Прикладная математика & Физика, 2021, том 53, №2. С. 97–113.

УДК 519.218.7
MSC 60G10, 60H15

DOI 10.52575/2687-0959-2021-53-2-97-113

ФОРМУЛА ЗИГЕРТА ДЛЯ МНОГОМЕРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ ОРНШТЕЙНА – УЛЕНБЕКА

Ю. П. Вирченко, Н. Н. Витохина

ООО «Матрица»,
Белгород, 308012, Россия
Белгородский государственный национальный исследовательский университет,
Белгород, 308015, Россия

E-mail: virch@bsu.edu.ru

Аннотация. Рассматриваются элементарные гауссовские, марковские случайные процессы $\{\tilde{\mathbf{x}}(t); t \in [t_0, \infty)\}$ со значениями в $\mathbb{R}^n$, каждый из которых невырожден и обладает пределом при $t_0 \to -\infty$, являющимся стационарным процессом. Предельный стационарный процесс представляет собой многомерный случайный процесс Орнштейна – Уленбека. Получена формула для характеристической функции $Q(-i\lambda)$ квадратичного функционала $\mathsf{J}_t[\tilde{\mathbf{x}}(s)] = \int_0^t (\tilde{\mathbf{x}}(s), \mathsf{V}\tilde{\mathbf{x}}(s))ds$ от случайных траекторий $\tilde{\mathbf{x}}(t)$, справедливая для каждого процесса этого класса, которая является многомерным обобщением формулы Зигерта для одномерного процесса Орнштейна – Уленбека.

Ключевые слова: элементарные гауссовские процессы, многомерный процесс Орнштейна – Уленбека, матричное уравнение Риккати, белый шум, уравнение Колмогорова.

Для цитирования: Вирченко Ю. П., Витохина Н. Н. 2021. Формула Зигерта для многомерных случайных процессов Орнштейна – Уленбека. Прикладная математика & Физика, 53(2): 97–113.
DOI 10.52575/2687-0959-2021-53-2-97-113.

THE ZIEGERT FORMULA FOR MULTIDIMENSIONAL ORNSHTEIN-UHLENBECK RANDOM PROCESSES

Yuri Virchenko, Natalia Vitokhina

Belgorod National Research University,
Belgorod, 308015, Russia
E-mail: virch@bsu.edu.ru

Received May, 17, 2021

Abstract. Elementary gaussian and markovian random processes $\{\tilde{\mathbf{x}}(t); t \in [t_0, \infty)\}$ with values in $\mathbb{R}^n$ are investigated. Each such a process is nondegenerated and it possesses the limit at $t_0 \to -\infty$. It is a stationary process. The limiting stationary process represents the multidimensional Ornshtein-Uhlenbeck one. It is obtained the formula of the characteristic function $Q(-i\lambda)$ of quadratic functional $\mathsf{J}_t[\tilde{\mathbf{x}}(s)] = \int_0^t (\tilde{\mathbf{x}}(s), \mathsf{V}\tilde{\mathbf{x}}(s))ds$ on random trajectories $\tilde{\mathbf{x}}(t)$. This formula is valid for each process of the class pointed out. It is the multidimensional generalization of the Ziegert formula which is known for one-dimensional Ornshtein-Uhlenbeck process.

Key words: elementary gaussian processes, multidimensional Ornshtein-Uhlenbeck process, Riccati's matrix equation, white noise, Kolmogorov's equation.

For citation: Virchenko Yu. P., Vitokhina N. N. 2021. The Ziegert formula for multidimensional Ornshtein-Uhlenbeck random processes. Applied Mathematics & Physics, 53(2): 97–113. (in Russian) DOI 10.52575/2687-0959-2021-53-2-97-113.

1. Введение. Системы стохастических линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами можно рассматривать как основу математического моделирования в тех областях науки, где приходится использовать случайные функции для моделирования процессов изменения случайных величин со временем. По этому поводу см., например, [1-3]. Решениями систем стохастических дифференциальных уравнений являются случайные вектор-функции от $t \in \mathbb{R}_+$. Обозначим посредством $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ такую вектор-функцию, которая принимает значения в $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$. Здесь и далее, знак «тильда», поставленный над символом математического объекта, указывает на его случайный характер с точки зрения концепций теории вероятностей. В общем виде любая система стохастических линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами записывается в канонической форме в терминах стохастического дифференциала $d\tilde{\mathbf{w}}(t)$ по многомерному винеровскому процессу

$$d\tilde{\mathbf{x}}(t) = \mathsf{A}\,\tilde{\mathbf{x}}(t)dt + \mathsf{S}\,d\tilde{\mathbf{w}}(t)\,, \tag{1.1}$$

где A и S — вещественные $n \times n$-матрицы, причем матрица S симметрична, $\mathsf{S}^T = \mathsf{S}$ и неотрицательна, а $\tilde{\mathbf{w}}(t) = \langle \tilde{w}_j(t); j = 1 \div n \rangle$, $t \in \mathbb{R}_+$ — случайная вектор-функция, компонентами которой являются n экземпляров статистически независимых стандартных винеровских процессов (см., например, [4]) так, что

$$\mathrm{E} w_j(s) w_k(t) = \delta_{jk} \min\{s, t\}\,, \tag{1.2}$$

где, здесь и далее, E – символ математического ожидания по мере рассматриваемого случайного процесса, без конкретизации того, какой процесс имеется в виду, что не должно вызвать недоразумений, а δ_{jk} – символ Кронекера, $j, k \in \{1, ..., n\}$.

Остановимся кратко на том, что понимается в настоящей работе под стохастическим дифференциалом $d\tilde{\mathbf{w}}(t) = \langle d\tilde{w}_j(t); j = 1 \div n \rangle$. Допустимы различные определения стохастического дифференциала (см., например, [3]). Использование того или иного определения тесно связано с той конкретной задачей, которая решается на основе стохастических дифференциальных уравнений. Наиболее употребительными в математике являются дифференциал в смысле Ито (см., например, [5]) и дифференциал в смысле Стратоновича [6]. Что касается того, какой из этих дифференциалов наиболее адекватен в рандомизированных задачах математической физики, то по этому поводу имеется обширная дискуссия (см., например, [7], [8]). Итогом ее можно считать известную теорему Вонга-Закаи [9], следствием которой является утверждение о том, что, при моделировании физических процессов с непрерывным временем, необходимо использование дифференциала Стратоновича. Заметим, однако, что в задачах, связанных со стохастическими системами с постоянными коэффициентами, не возникает различия в получаемых результатах при использовании того или иного конкретного типа дифференциала. Эти различия возникают только лишь в процессе математических доказательств и в технике вычислений.

В связи с вышесказанным, мы принимаем, что всюду, на протяжении этой статьи, мы используем стохастический дифференциал Стратоновича. В этом случае уравнение (1.1) допустимо записать в форме обычного дифференциального уравнения

$$\frac{d}{dt}\tilde{\mathbf{x}}(t) = \mathsf{A}\,\tilde{\mathbf{x}}(t) + \mathsf{S}\,\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(t)\,, \tag{1.3}$$

где $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(t) = d\tilde{\mathbf{w}}(t)/dt = \langle \tilde{\varphi}_j(t); j = 1 \div n \rangle$. Так как траектории стандартного винеровского процесса $\tilde{\mathbf{w}}(t)$ [1)] с вероятностью 1 всюду непрерывны, но нигде не дифференцируемы (см. [10]), то производную $d\tilde{\mathbf{w}}(t)/dt = \boldsymbol{\varphi}(t)$ в уравнении (1.3) нужно понимать в обобщенном смысле. Так как винеровский процесс гауссовский (см., например, [11]) и его корреляционная функция (1.2) зависит от разности $|s - t|$, то обобщенную случайную вектор-функцию $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(t)$ нужно трактовать как обобщенный случайный стационарный гауссовский векторнозначный процесс с нулевым средним значением. Компонентами $\varphi_j(t)$, $j = 1 \div n$ его векторных значений являются независимые гауссовские случайные процессы, для которых выполняется $\mathrm{E}\tilde{\varphi}_j(s)\tilde{\varphi}_k(t) = 0$ при $j \neq k$ и каждый из которых имеет нулевое среднее значение $\mathrm{E}\tilde{\varphi}_j(t) = 0$. Корреляционная функция каждой фиксированной компоненты равна $\mathrm{E}\tilde{\varphi}_j(s)\tilde{\varphi}_j(t) = \delta(s-t)$, то есть каждая из компонент $\varphi_j(t)$, $j = 1 \div n$ является т.н. процессом «белого шума». Здесь $\delta(t)$ — т.н. обобщенная функция Дирака (см., например, [12]). Ввиду того, что уравнение (1.3) получается из (1.1) посредством дифференцирования по t, то производную $d\tilde{\mathbf{x}}(t)/dt$ в уравнении (1.3) нужно понимать в обобщенном смысле, так как траектории случайного процесса $\tilde{\mathbf{x}}(t)$, которые являются его решениями, также как и траектории процесса $\tilde{\mathbf{w}}(t)$ с вероятностью 1 всюду непрерывны, но нигде не дифференцируемы. В данном случае интерпретация производной совершенно прозрачна. Если дифференциальное уравнение (1.3) понимается по Стратоновичу, то его можно формально проинтегрировать в смысле Римана

$$\tilde{\mathbf{x}}(t) = e^{(t-t_0)\mathsf{A}}\tilde{\mathbf{x}}(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} \exp\big(\mathsf{A}(t-s)\big)\mathsf{S}\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(s)ds = e^{(t-t_0)\mathsf{A}}\tilde{\mathbf{x}}(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} \exp\big(\mathsf{A}(t-s)\big)\mathsf{S}\,d\tilde{\boldsymbol{w}}(s)\,. \tag{1.4}$$

Интеграл в правой части формулы следует понимать как стохастический интеграл Стратоновича (см. [2]). Таким образом, отображение, описываемое формулой (1.4), *индуцирует* случайный процесс $\{\tilde{\mathbf{x}}(t); t \in [t_0, \infty)\}$, в том смысле, что оно определяет класс траекторий этого процесса на основе класса траекторий векторнозначного винеровского процесса $\{\tilde{\boldsymbol{w}}(t); t \in [t_0, \infty)\}$ вместе со структурой измеримости на пространстве всех локально непрерывных вектор-функций на $[t_0, \infty)$, а также распределение вероятностей на σ-алгебре измеримых множеств в этом пространстве при учете распределения вероятностей $\Pr\{\tilde{\mathbf{x}}(t_0) < \mathbf{x}_0\}$ случайного вектора $\tilde{\mathbf{x}}(t_0)$ — т.н. *вероятности входа в процесс.* А именно, для вероятности любого случайного события — измеримого подмножества траекторий Σ должно выполняться

$$\Pr\{\tilde{\mathbf{x}}(t) \in \Sigma\} = \Pr\{e^{(t-t_0)\mathsf{A}}\tilde{\mathbf{x}}(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} \exp\big(\mathsf{A}(t-s)\big)\mathsf{S}\,d\tilde{\boldsymbol{w}}(s) \in \Sigma\} =$$

[1)] Здесь и далее, мы под выражением стандартный винеровский процесс понимаем винеровский процесс с единичной дисперсией (см. формулу (1.2)), исходящий из точки $\mathbf{x} = 0$, но со сдвинутым началом отсчета времени в момент $t = t_0$.

$$= \int \Pr\{\tilde{\mathbf{w}}(t) \in \mathsf{F}_t^{-1}\big[\Sigma - e^{(t-t_0)\mathsf{A}}\mathbf{x}_0\big]\} d\Pr\{\tilde{\mathbf{x}}(t_0) < \mathbf{x}_0\} \tag{1.5}$$

в том случае, когда случайная величина $\tilde{\mathbf{x}}(t_0)$ и процесс $\{\tilde{\mathbf{w}}(t); t \in [t_0, \infty)\}$ статистически независимы. Здесь введены: обозначение для отображения F_t в пространстве непрерывных функций на $[t_0, \infty)$ — траекторий винеровского процесса

$$\mathsf{F}_t[\tilde{\mathbf{w}}(s)] = \int\limits_{t_0}^{t} \exp\big(\mathsf{A}(t-s)\big)\mathsf{S}\, d\tilde{\boldsymbol{w}}(s)$$

и неравенство $\tilde{\mathbf{x}}(t_0) < \mathbf{x}_0$, которое указывает на выполнение совокупности неравенств $\tilde{x}_j(t_0) < (\mathbf{x}_0)_j$, $j = 1 \div n$. Таким образом, распределение вероятностей полностью определяется распределениями вероятностей: процесса $\{\tilde{\boldsymbol{w}}(t); t \in [t_0, \infty)\}$ и $\Pr\{\tilde{\mathbf{x}}(t_0) < \mathbf{x}_0\}$. Поэтому во всех формулах, в которых вычисляется математическое ожидание E по распределению вероятностей случайного процесса $\{\tilde{\mathbf{x}}(t); t \in [t_0, \infty)\}$ можно считать, что оно вычисляется по произведению распределений вероятностей порождающего его случайного процесса $\{\tilde{\boldsymbol{w}}(t); t \in [t_0, \infty)\}$ и распределению вероятностей случайного вектора $\tilde{\mathbf{x}}(t_0)$. Вычисление указанных математических ожиданий по распределению вероятностей процесса $\{\tilde{\boldsymbol{x}}(t); t \in \mathbb{R}\}$, эквивалентным образом, может выполняться на основе формулы (1.4) посредством использования распределения вероятностей $\Pr\{\tilde{\mathbf{x}}(t_0) < \mathbf{x}_0\}$ и характеристического функционала обобщенного гауссовского случайного процесса $\{\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(t); t \in \mathbb{R}\}$,

$$\mathrm{E}\exp\Big(i\int\limits_{-\infty}^{\infty}(\boldsymbol{u}(t), \tilde{\boldsymbol{\varphi}}(t))dt\Big) = \exp\Big(-\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{u}^2(t)dt\Big), \tag{1.6}$$

значения которого определены для любой финитной непрерывной вектор-функции $\boldsymbol{u}(t)$, $t \in \mathbb{R}$ и который вычисляется на основе указанных выше правил усреднения,

$$\mathrm{E}\tilde{\varphi}_j(t) = 0\,, \quad \mathrm{E}\tilde{\varphi}_j(s)\tilde{\varphi}_{jk}(t) = \delta_{jk}\delta(s-t)\,, \quad j,k \in \{1,\dots,n\}\,. \tag{1.7}$$

Поэтому, далее, не оговаривая дополнительно, мы будем применять также и такой метод усреднения при вычислении математических ожиданий по распределению вероятностей случайного процесса $\{\tilde{\mathbf{x}}(t); t \in [t_0, \infty)\}$.

Пусть V — вещественная симметричная $n \times n$-матрица. Определим на пространстве непрерывных вектор-функций $\mathbf{x}(t)$, $t \in \mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ квадратичный функционал

$$\mathsf{J}_t[\mathbf{x}(s)] = \int\limits_0^t (\mathbf{x}(s), \mathsf{V}\mathbf{x}(s))ds\,, \tag{1.8}$$

зависящий от параметра $t > 0$. Тогда значения этого функционала с вероятностью 1 определены для выборочных функций процесса $\{\tilde{\mathbf{x}}(t); t \in [t_0, \infty)\}$ при $t_0 \leq 0$. Таким образом, при каждом значении $t > 0$ совокупность его значений, принимаемых на классе допустимых случайных траекторий $\tilde{\mathbf{x}}(t)$, определяют случайную величину с распределением вероятностей, индуцированным распределением вероятностей процесса $\{\tilde{\mathbf{x}}(t); t \in [t_0, \infty)\}$.

В настоящей работе мы рассмотрим гауссовские марковские случайные процессы $\{\tilde{\mathbf{x}}(t); t \in [t_0, \infty)\}$ при выполнении двух условий, а именно, когда имеют место: невырожденность ковариационной матрицы S, $\det\, \mathsf{S} \neq 0$ и *диссипативность матрицы* A. Точнее, мы будем считать, что матрица A диагонализуема (имеет скалярный тип в терминологии, применяемой в [13]) и реальная часть каждого из ее собственных чисел отрицательна. В этом случае каждый случайный процесс $\{\tilde{\mathbf{x}}(t); t \in [t_0, \infty)\}$ обладает предельным при $t_0 \to -\infty$ случайным процессом $\{\tilde{\mathbf{x}}_\infty(t); t \in \mathbb{R}\}$, который является многомерным стационарным гауссовским, марковским процессом — т.н. многомерным *процессом Орнштейна – Уленбека* с нулевым средним значением. В дальнейшем при обозначении процессов такого типа нижний индекс ∞ мы опускаем. Его распределение вероятностей полностью определяется парной корреляционной функций $K_{jk}(t,s) = \mathrm{E}(\tilde{\mathbf{x}}_\infty)_j(s)\,(\tilde{\mathbf{x}}_\infty)_k(t)$.

Целью настоящей работы является вывод формулы для характеристической функции

$$Q_t(-i\lambda) = \mathrm{E}\exp\Big(i\lambda\mathsf{J}_t[\tilde{\mathbf{x}}(s)]\Big) \tag{1.9}$$

распределения вероятностей случайной величины $\mathsf{J}_t[\tilde{\mathbf{x}}(s)]$, аналогичной т.н. формуле Зигерта [14], которая имеет место в одномерном случае и которая находит различные применения в задачах статистической радиотехники (см., например, пионерскую работу [15]) и в задачах статистики фотоотсчетов в квантовой оптике (см., например, [16]) и др., а также работы [17-19] одного из авторов этой статьи.

Для решения задач такого типа разработаны различные методы. Пионерским в этом отношении является метод, которым впервые была решена задача для функционала J_T, траекторий винеровского процесса [20] (см. также [21]). Этот метод существенно использует марковость случайного процесса, по мере которого производится усреднение. Более общий подход к решению таких задач основан на т.н. методе Карунена-Лоэва (см. [22], [23]), использующий только лишь гауссовость случайного процесса $\{\tilde{\mathbf{x}}(t); t \in [a,b] \subset \mathbb{R}\}$. Он позволяет сводить нахождение математических ожиданий для более сложных квадратичных функционалов от траекторий процесса (см. [24–27]). В настоящей работе мы следуем методу, который был применен ранее одним из авторов статьи в [28],[29].

2. Элементарные гауссовские процессы. В этом разделе мы введем в рассмотрение класс гауссовских случайных процессов, связанных со стохастическими системами (1.1), которые М. Арато (см. [1]) называет *элементарными.*

Определение 1. *Случайный векторно-значный процесс* $\{\tilde{\mathbf{z}}(t); t \in [t_0, \infty)\}$ *называется гауссовским, если его характеристический функционал определяется формулой*

$$\mathrm{E}\exp\Big(i\int\limits_{t_0}^{\infty}(\mathbf{u},\tilde{\mathbf{z}}(t))dt\Big) = \exp\Big(i\int\limits_{t_0}^{\infty}(\mathbf{u}(t),\mathbf{z}_0(t))dt - \frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{\infty}dt\int\limits_{t_0}^{\infty}C_{jk}(s,t)u_j(s)u_k(t)ds\Big), \tag{2.1}$$

где $\mathbf{u}(t)$ *— произвольная непрерывная финитная функция, а математическое ожидание E вычисляется по распределению вероятностей этого процесса. При этом* $\mathbf{z}_0(t) = \mathrm{E}\tilde{\mathbf{z}}(t)$ *и* $C_{jk}(s,t) = \mathrm{E}(\tilde{z}_j(s) - (\mathbf{z}_0)_j(s))(\tilde{z}_k(t) - (\mathbf{z}_0)_k(t))$ *— корреляционная функция процесса.*

Матричное ядро $C_{jk}(s,t)$ в (2.1) обладает свойством симметрии $C_{jk}(s,t) = C_{kj}(t,s)$ и положительной определенностью, то есть для любой непрерывной финитной функции имеет место

$$\mathrm{E}\Big[\int\limits_{t_0}^{\infty}u_j(t)(\tilde{z}_j(t) - (\mathbf{z}_0)_j(t))\Big]^2 dt = \int\limits_{t_0}^{\infty}dt\int\limits_{t_0}^{\infty}C_{jk}(s,t)u_j(s)u_k(t)ds > 0\,.$$

Согласно этому определению, процесс $\{\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(t); t \in \mathbb{R}\}$ — гауссовский случайный процесс, с характеристическим функционалом (1.6). Он является обобщенным процессом, так как у него отсутствуют траектории, однако функционал (1.6) является пределом характеристических функционалов гауссовских процессов.

Согласно формуле (1.4), процесс $\{\tilde{\mathbf{x}}(t); t \in [t_0, \infty)\}$ является линейным преобразованием гауссовского случайного процесса $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(s)$, $s \in (t_0 - 0, \infty)$. Поэтому он также является гауссовским векторнозначным процессом (см. [11]). В этом легко удостовериться непосредственно.

Теорема 1. *Для любых вещественных матриц* A *и* S, $\mathsf{S}^T = \mathsf{S}$ *случайный процесс* $\{\tilde{\mathbf{x}}(t); t \in [t_0, \infty)\}$ *гауссовский.*

□ Поставим в определение характеристического функционала выражение для траекторий (1.4). Так как $\mathrm{E}\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(s) = 0$, то

$$\mathrm{E}\exp\Big(i\int\limits_{t_0}^{\infty}(\mathbf{u}(t),\tilde{\mathbf{x}}(t))dt\Big) =$$

$$= \exp\Big(i\int\limits_{t_0}^{\infty}(e^{(t-t_0)\mathsf{A}}\mathbf{x}_0,\mathbf{u}(t))dt\Big)\mathrm{E}\exp\Big(i\int\limits_{t_0}^{\infty}dt\int\limits_{t_0}^{t}(\mathbf{u}(t),e^{\mathsf{A}(t-s)}\,\mathsf{S}\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(s))ds\Big). \tag{2.2}$$

Далее, вводя функцию

$$\mathbf{v}(s) = \int\limits_{s}^{\infty}\mathsf{S}e^{\mathsf{A}^T(t-s)}\mathbf{u}(t)dt\,,$$

вычислим математическое ожидание

$$\mathrm{E}\exp\Big(i\int\limits_{t_0}^{\infty}dt\int\limits_{t_0}^{t}(\mathbf{u}(t),e^{\mathsf{A}(t-s)}\,\mathsf{S}\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(s))ds\Big) = \mathrm{E}\exp\Big(i\int\limits_{t_0}^{\infty}dt\int\limits_{t_0}^{t}(\mathsf{S}e^{\mathsf{A}^T(t-s)}\mathbf{u}(t),\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(s))ds\Big) =$$

$$= \mathrm{E}\exp\Big(i\int\limits_{t_0}^{\infty}ds\int\limits_{s}^{\infty}(\mathsf{S}e^{\mathsf{A}^T(t-s)}\mathbf{u}(t),\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(s))dt\Big) = \mathrm{E}\exp\Big(i\int\limits_{t_0}^{\infty}(\mathbf{v}(s),\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(s))ds\Big) =$$

$$= \exp\Big(-\frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{\infty}\mathbf{v}^2(s)ds\Big) = \exp\Big(-\frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{\infty}\Big(\int\limits_{s}^{\infty}\mathsf{S}e^{\mathsf{A}^T(t-s)}\mathbf{u}(t)dt\Big)^2 ds\Big). \qquad (2.3)$$

Интеграл в показателе экспоненты преобразуем, используя симметрию матрицы S, так, что получающееся в процессе преобразований подинтегрального выражения по переменным интегрирования принимает вид

$$\frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{\infty}\Big(\int\limits_{s}^{\infty}\mathsf{S}e^{\mathsf{A}^T(t-s)}\mathbf{u}(t)dt\Big)^2 ds = \int\limits_{t_0}^{\infty}ds\int\limits_{s}^{\infty}\big[\mathsf{S}e^{\mathsf{A}^T(t_1-s)}\mathbf{u}(t_1)\big]_j dt_1\int\limits_{t_1}^{\infty}\big[\mathsf{S}e^{\mathsf{A}^T(t_2-s)}\mathbf{u}(t_2)\big]_j dt_2 =$$

$$= \int\limits_{t_0}^{\infty}dt_1\int\limits_{t_0}^{t_1}\big[\mathsf{S}e^{\mathsf{A}^T(t_1-s)}\mathbf{u}(t_1)\big]_j ds\int\limits_{t_1}^{\infty}\big[\mathsf{S}e^{\mathsf{A}^T(t_2-s)}\mathbf{u}(t_2)\big]_j dt_2 =$$

$$= \int\limits_{t_0}^{\infty}dt_1\int\limits_{t_1}^{\infty}dt_2\int\limits_{t_0}^{t_1}\big[\mathsf{S}e^{\mathsf{A}^T(t_2-s)}\mathbf{u}(t_2)\big]_j\big[\mathsf{S}e^{\mathsf{A}^T(t_1-s)}\mathbf{u}(t_1)\big]_j ds =$$

$$= \int\limits_{t_0}^{\infty}dt_1\int\limits_{t_1}^{\infty}dt_2\int\limits_{t_0}^{t_1}\big(\mathsf{S}e^{\mathsf{A}^T(t_2-s)}\mathbf{u}(t_2), \mathsf{S}e^{\mathsf{A}^T(t_1-s)}\mathbf{u}(t_1)\big)ds =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{\infty}dt_1\int\limits_{t_0}^{\infty}\Big(\Big[\int\limits_{t_0}^{\min\{t_1,t_2\}}e^{\mathsf{A}(t_1-s)}\mathsf{S}^2e^{\mathsf{A}^T(t_2-s)}ds\Big]\mathbf{u}(t_2), \mathbf{u}(t_1)\Big)dt_2\,.$$

Таким образом, подставляя это преобразованное выражение в (2.3), получаем

$$\mathrm{E}\exp\Big(i\int\limits_{t_0}^{\infty}dt\int\limits_{t_0}^{t}(\mathsf{S}e^{\mathsf{A}^T(t-s)}\mathbf{u}(t), \tilde{\boldsymbol{\varphi}}(s))ds\Big) = \exp\Big(-\frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{\infty}dt_1\int\limits_{t_0}^{\infty}\big(\mathsf{C}(t_1,t_2)\mathbf{u}(t_2), \mathbf{u}(t_1)\big)dt_2\Big),$$

где матриц-функция $\mathsf{C}(t_1, t_2)$ определяется матричным интегральным ядром

$$C_{j_1,j_2}(t_1,t_2) = \int\limits_{t_0}^{\min\{t_1,t_2\}}\Big[e^{\mathsf{A}(t_1-s)}\mathsf{S}^2e^{\mathsf{A}^T(t_2-s)}\Big]_{j_1,j_2}ds\,. \qquad (2.4)$$

Принимая во внимание (2.2) и, затем, сравнивая с формулой (2.1), определяющей вид характеристического функционала гауссовского процесса, убеждаемся в справедливости утверждения теоремы, так как, по построению, ядро (2.4) является корреляционной функцией. ■

Таким образом, на основании доказанной теоремы, следуя терминологии, введенной в начале раздела, мы будем далее называть процессы $\{\tilde{\mathbf{x}}(t); t \in [t_0,\infty)\}$, определяемые (1.1), элементарными гауссовскими процессами.

Следствие. *Корреляционная функция* $C^{(w)}_{j,k}(s,t)$ *стандартного винеровского процесса равна*

$$C^{(w)}_{j,k}(s,t) = \delta_{jk}\min(s-t_0, t-t_0)\,. \qquad (2.5)$$

□ Достаточно положить в (2.4) $\mathsf{A} = 0$, $\mathsf{S} = \mathbf{I}$.

Пусть $\{\tilde{\mathbf{z}}(t); t \in [t_0,\infty)\}$ — элементарный гауссовский процесс. Положим, что носитель функций $\mathbf{u}(t)$ в формуле (2.3) совпадает с $[t_0, t]$. Перейдем к пределу в этой формуле на классе непрерывных на $[t_0, t]$ функций таким образом, что $\mathbf{u}(s) \to \delta(s-t)\mathbf{q}$ с фиксированным вектором $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$.

В этом случае формула (2.1) принимает вид

$$\bar{f}(\mathbf{q}, t; \mathbf{z}_0, t_0) \equiv \mathrm{E}\exp\Big(i(\mathbf{q}, \tilde{\mathbf{z}}(t))\Big) = \exp\Big(i(\mathbf{q}, e^{(t-t_0)\mathsf{A}}\mathbf{z}_0) - \frac{1}{2}\big(\mathsf{C}(t,t)\mathbf{q}, \mathbf{q}\big)\Big), \qquad (2.6)$$

где матриц-функция $\mathsf{C}(t, t)$, согласно (2.4), определяется формулой

$$\mathsf{C}(t,t) = \int\limits_{t_0}^{t}e^{\mathsf{A}(t-s)}\mathsf{S}^2e^{\mathsf{A}^T(t-s)}ds = \int\limits_{0}^{t-t_0}e^{s\mathsf{A}}\mathsf{S}^2e^{s\mathsf{A}^T}ds\,. \qquad (2.7)$$

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. *Функция* $\bar{f}(\mathbf{q}, t; \mathbf{x}_0, t_0)$ *удовлетворяет условию* $\bar{f}(\mathbf{q}, t; \mathbf{x}_0, t_0) \to \exp\big(i(\mathbf{q}, \mathbf{x}_0)\big)$ *при* $t \to t_0$ *и дифференциальному уравнению*

$$\frac{\partial}{\partial t}\bar{f}(\mathbf{q}, t; \mathbf{x}_0, t_0) = \Big(\mathbf{q}, \mathsf{A}\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}}\bar{f}(\mathbf{q}, t; \mathbf{x}_0, t_0)\Big) - \frac{1}{2}(\mathsf{S}^2\mathbf{q}, \mathbf{q})\bar{f}(\mathbf{q}, t; \mathbf{x}_0, t_0)\,. \tag{2.8}$$

□ Заметим, что при $t \to t_0$ матрица $\mathsf{C}(t, t) \to 0$, согласно (2.7) и, следовательно, $\bar{f}(\mathbf{q}, t; \mathbf{x}_0, t_0) \to \exp\big(i(\mathbf{q}, \mathbf{x}_0)\big)$.

Из (2.6) следует, что производная по t функции $\bar{f}(\mathbf{q}, t; \mathbf{x}_0, t_0)$ имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\bar{f}(\mathbf{q}, t; \mathbf{x}_0, t_0) = \Big[i(\mathbf{q}, \mathsf{A}e^{(t-t_0)\mathsf{A}}\mathbf{x}_0) - \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial t}\mathsf{C}(t, t)\mathbf{q}, \mathbf{q}\Big)\Big]\bar{f}(\mathbf{q}, t; \mathbf{x}_0, t_0)\,. \tag{2.9}$$

С другой стороны, вычислим градиент в пространстве $\mathbb{R}^n$ векторов $\mathbf{q}$,

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}}\bar{f}(\mathbf{q}, t; \mathbf{x}_0, t_0) = \Big[ie^{(t-t_0)\mathsf{A}}\mathbf{x}_0 - \mathsf{C}(t, t)\mathbf{q}\Big]\bar{f}(\mathbf{q}, t; \mathbf{x}_0, t_0)\,.$$

Тогда, симметризовав матрицу, определяющую квадратичную форму

$$\big(\mathsf{AC}(t, t)\mathbf{q}, \mathbf{q}\big) = \big(\big[\mathsf{AC}(t, t) + \mathsf{C}(t, t)\mathsf{A}^T\big]\mathbf{q}, \mathbf{q}\big)/2,$$

получаем

$$\Big(\mathbf{q}, \mathsf{A}\,\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}}\Big)\bar{f}(\mathbf{q}, t; \mathbf{x}_0, t_0) = \Big[i(\mathbf{q}, \mathsf{A}e^{(t-t_0)\mathsf{A}}\mathbf{x}_0) - \big(\big[\mathsf{AC}(t, t) + \mathsf{C}(t, t)\mathsf{A}^T\big]\mathbf{q}, \mathbf{q}\big)/2\Big]\bar{f}(\mathbf{q}, t; \mathbf{x}_0, t_0)\,. \tag{2.10}$$

Так как, согласно (2,7),

$$\mathsf{AC}(t, t) + \mathsf{C}(t, t)\mathsf{A}^T = \int\limits_0^{t-t_0}\Big(\frac{d}{ds}\,e^{s\mathsf{A}}\mathsf{S}^2e^{s\mathsf{A}^T}\Big)ds = e^{\mathsf{A}(t-t_0)}\mathsf{S}^2e^{\mathsf{A}^T(t-t_0)} - \mathsf{S}^2$$

и

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathsf{C}(t, t) = e^{\mathsf{A}(t-t_0)}\mathsf{S}^2e^{\mathsf{A}^T(t-t_0)}\,,$$

то, сравнением (2.10) с (2.9), находим, что имеет место (2.6). ■

Введем плотность распределения условных вероятностей перехода

$$f(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0) = \mathrm{E}\delta(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}(t)) \tag{2.11}$$

для случайного процесса $\{\tilde{\mathbf{x}}(t); t \in [t_0, \infty)\}$, траектории которого начинаются в точке $\mathbf{x}_0$, $\tilde{\mathbf{x}}(t_0) = \mathbf{x}_0$. Это т.н. *плотность условных вероятностей перехода* из точки $\mathbf{x}_0$ в момент времени t_0 в точку $\mathbf{x}$ в момент времени t. В формуле (2.8) усредняется n-мерная δ-функция на $\mathbb{R}^n$. Записывая представление этой δ-функций в виде интеграла Фурье

$$\delta(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\exp(-i(\mathbf{q}, \mathbf{x}))d\mathbf{q}\,,$$

находим, что образ Фурье по переменной $\mathbf{x}$ для плотности $f(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0)$ равен

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i(\mathbf{q},\mathbf{x})}f(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0)d\mathbf{x} = \mathrm{E}\exp\big(i(\mathbf{q}, \tilde{\mathbf{x}}(t))\big) = \bar{f}(\mathbf{q}, t; \mathbf{x}_0, t_0)\,.$$

Следовательно, плотность $f(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0)$ восстанавливается, согласно (2.6), по образу Фурье следующим образом:

$$f(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\exp\Big(i(\mathbf{q}, e^{(t-t_0)\mathsf{A}}\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}) - \frac{1}{2}\big(\mathsf{C}(t, t)\mathbf{q}, \mathbf{q}\big)\Big)d\mathbf{q}\,. \tag{2.12}$$

Теорема 2. *Плотность условных вероятностей перехода* $f(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0)$ *является решением параболического дифференциального уравнения*

$$\frac{\partial}{\partial t}f(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0) = \Big(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}, \mathsf{A}\mathbf{x}\Big)f(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0) + \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}, \mathsf{S}^2\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\Big)f(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0) \tag{2.13}$$

с начальным условием $\lim\limits_{t\to t_0} f(\mathbf{x},t;\mathbf{x}_0,t_0)=\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)$.

□ Тот факт, что $f(\mathbf{x},t;\mathbf{x}_0,t_0)$ удовлетворяет указанному начальному условию, непосредственно следует из (2.12) при учете того, что $\bar f(\mathbf{q},t;\mathbf{x}_0,t_0)\to\exp\big(i(\mathbf{q},\mathbf{x}_0)\big)$ при $t\to t_0$, согласно утверждению леммы.

Тогда продифференцируем по t плотность $f(\mathbf{x},t;\mathbf{x}_0,t_0)$ (2.12) и учтем, что функция $f(\mathbf{q},t;\mathbf{x}_0,t_0)$ удовлетворяет уравнению (2.8),

$$\frac{\partial}{\partial t}f(\mathbf{x},t;\mathbf{x}_0,t_0)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\exp\big(-i(\mathbf{q},\mathbf{x})\big)\cdot\frac{\partial}{\partial t}f(\mathbf{q},t;\mathbf{x}_0,t_0)\,d\mathbf{q}=$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\exp\big(-i(\mathbf{q},\mathbf{x})\big)\Big(\big(\mathbf{q},\mathsf{A}\frac{\partial}{\partial\mathbf{q}}\bar f(\mathbf{q},t;\mathbf{x}_0,t_0)\big)-\frac{1}{2}\big(\mathsf{S}^2\mathbf{q},\mathbf{q}\big)\bar f(\mathbf{q},t;\mathbf{x}_0,t_0)\Big)d\mathbf{q}\,. \tag{2.14}$$

Первое слагаемое в (2.14) преобразуем следующим образом:

$$\frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\exp\big(-i(\mathbf{q},\mathbf{x})\big)\big(\mathbf{q},\mathsf{A}\frac{\partial}{\partial\mathbf{q}}\bar f(\mathbf{q},t;\mathbf{x}_0,t_0)\big)\bar f(\mathbf{q},t;\mathbf{x}_0,t_0)d\mathbf{q}=$$

$$=\frac{i}{(2\pi)^n}\frac{\partial}{\partial x_j}A_{jk}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\exp\big(-i(\mathbf{q},\mathbf{x})\big)\frac{\partial}{\partial q_k}\bar f(\mathbf{q},t;\mathbf{x}_0,t_0)\big)d\mathbf{q}\,. \tag{2.15}$$

Преобразование последнего интеграла по частям, с учетом стремления к нулю интеграла по поверхности шара в $\mathbf{q}$-пространстве с неограниченно возрастающим радиусом, приводит его к выражению $\Big(\dfrac{\partial}{\partial\mathbf{x}},\mathsf{A}\mathbf{x}\Big)f(\mathbf{x},t;\mathbf{x}_0,t_0)$.

Интеграл же, соответствующий второму слагаемому в (2.14), преобразуется следующим образом:

$$-\frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\exp\big(-i(\mathbf{q},\mathbf{x})\big)\big(\mathsf{S}^2\mathbf{q},\mathbf{q}\big)\bar f(\mathbf{q},t;\mathbf{x}_0,t_0)d\mathbf{q}=$$

$$=\frac{(-i)}{(2\pi)^n}\Big(\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}},\mathsf{S}^2\int\limits_{\mathbb{R}^n}\mathbf{q}\exp\big(-i(\mathbf{q},\mathbf{x})\big)\bar f(\mathbf{q},t;\mathbf{x}_0,t_0)d\mathbf{q}\Big)=$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^n}\Big(\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}},\mathsf{S}^2\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}}\Big)\int\limits_{\mathbb{R}^n}\exp\big(-i(\mathbf{q},\mathbf{x})\big)\bar f(\mathbf{q},t;\mathbf{x}_0,t_0)d\mathbf{q}=$$

$$=\Big(\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}},\mathsf{S}^2\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}}\Big)f(\mathbf{x},t;\mathbf{x}_0,t_0)d\mathbf{q}\,.$$

Подставив это выражение вместе с выражением (2.15) в (2.14), получаем уравнение (2.13). ■

Следствие. *Гауссовский процесс* $\{\tilde{\mathbf{x}}(t);t\in[t_0,\infty)\}$, *является марковским, обладающим непрерывными с вероятностью 1 траекториями* (см. [4]).

Случайный процесс $\{\tilde{\mathbf{x}}(t);t\in[t_0,\infty)\}$ является *марковским*, так как плотность $f(\mathbf{x},t;\mathbf{x}_0,t_0)$ условных вероятностей перехода удовлетворяет параболическому уравнению (2.13), которое является т.н. *прямым уравнением Колмогорова*, для марковских случайных процессов с непрерывными траекториями.

3. Процессы Орнштейна – Уленбека в $\mathbb{R}^n$. Далее, в этой работе мы будем рассматривать случайные гауссовские марковские процессы $\{\tilde{\mathbf{x}}(t);t\in[t_0,\infty)\}$ при условии, что стохастическое уравнение (1.3) обладает свойством *невырожденности*, то есть когда имеет место $\det\,\mathsf{S}\neq 0$. В этом случае интеграл (2.12), определяющий плотность $f(\mathbf{x},t;\mathbf{x}_0,t_0)$, вычисляется явно в терминах элементарных функций так, что эта плотность не содержит сингулярной составляющей.

Теорема 3. *Плотность* $f(\mathbf{x},t;\mathbf{x}_0,t_0)$ *условных вероятностей перехода случайного гауссовского марковского процесса* $\{\tilde{\mathbf{x}}(t);t\in[t_0,\infty)\}$, *у которого* $\det\,\mathsf{S}\neq 0$, *определяется формулой*

$$f(\mathbf{x},t;\mathbf{x}_0,t_0)=\big[(2\pi)^n\det\mathsf{C}(t,t)\big]^{-1/2}\exp\Big[-\frac{1}{2}\Big(\mathsf{C}^{-1}(t,t)\big[\mathbf{x}-e^{(t-t_0)\mathsf{A}}\mathbf{x}_0\big],\big[\mathbf{x}-e^{(t-t_0)\mathsf{A}}\mathbf{x}_0\big]\Big)\Big]\,. \tag{3.1}$$

□ Пусть $\det\,\mathsf{S}\neq 0$. Так как $\det\exp(s\mathsf{A})=\exp(s\mathrm{Sp}\,\mathsf{A})\neq 0$, то эта матрица и транспонированная к ней матрица $\exp(s\mathsf{A}^T)$ невырождены. Следовательно, симметричная матрица $e^{s\mathsf{A}}\mathsf{S}^2e^{s\mathsf{A}^T}$ невырождена. Более того, эта матрица положительно определена, так как для любого вектора $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$ имеет место

$$(e^{s\mathsf{A}}\mathsf{S}^2e^{s\mathsf{A}^T}\mathbf{x},\mathbf{x})=(\mathsf{S}^2e^{s\mathsf{A}^T}\mathbf{x},e^{s\mathsf{A}^T}\mathbf{x})>0\,,$$

так как матрица S^2 симметрична и положительно определена, а также $e^{s\mathsf{A}^T}\mathbf{x} \neq 0$, ввиду невырожденности матрицы $e^{s\mathsf{A}^T}$. Отсюда следует, что симметричная матрица $\mathsf{C}(t,t)$ положительно определена и, следовательно, невырождена при любом $t \in [t_0, \infty)$, так как для любого $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ выполняется

$$\big(\mathsf{C}(t,t)\,\mathbf{x},\mathbf{x}\big) = \Big(\Big[\int\limits_0^{t-t_0} e^{s\mathsf{A}}\mathsf{S}^2 e^{s\mathsf{A}^T}\,ds\Big]\mathbf{x},\mathbf{x}\Big) = \int\limits_0^{t-t_0} (e^{s\mathsf{A}}\mathsf{S}^2 e^{s\mathsf{A}^T}\,\mathbf{x},\mathbf{x})\,ds > 0\,.$$

Ввиду положительной определенности матрицы $\mathsf{C}(t,t)$, интеграл в (2.12) вычисляется посредством «выделения полного квдрата» в показателе экспоненты

$$i(\mathbf{q}, e^{(t-t_0)\mathsf{A}}\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}) - \frac{1}{2}\big(\mathsf{C}(t,t)\mathbf{q},\mathbf{q}\big) =$$

$$= -\frac{1}{2}\Big(\mathsf{C}(t,t)\big(\mathbf{q} - i\mathsf{C}^{-1}(e^{(t-t_0)\mathsf{A}}\mathbf{x}_0 - \mathbf{x})\big), \mathbf{q} - i\mathsf{C}^{-1}(e^{(t-t_0)\mathsf{A}}\mathbf{x}_0 - \mathbf{x})\Big) -$$

$$-\frac{1}{2}\Big(\mathsf{C}^{-1}(t,t)\big(\mathbf{x} - e^{(t-t_0)\mathsf{A}}\mathbf{x}_0\big), \big(\mathbf{x} - e^{(t-t_0)\mathsf{A}}\mathbf{x}_0\big)\Big)\,.$$

Вводя, теперь, новую переменную интегрирования $\mathbf{q} - i\mathsf{C}^{-1}(e^{(t-t_0)\mathsf{A}}\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}) \Rightarrow \mathbf{q}$ в интеграле (2.12), находим

$$f(\mathbf{x},t;\mathbf{x}_0,t_0) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp\Big(i(\mathbf{q}, e^{(t-t_0)\mathsf{A}}\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}) - \frac{1}{2}\big(\mathsf{C}(t,t)\mathbf{q},\mathbf{q}\big)\Big)d\mathbf{q} =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp\Big(-\frac{1}{2}\big(\mathsf{C}(t,t)\mathbf{q},\mathbf{q}\big)\Big)d\mathbf{q}\cdot\exp\Big[-\frac{1}{2}\Big(\mathsf{C}^{-1}(t,t)\big[\mathbf{x} - e^{(t-t_0)\mathsf{A}}\mathbf{x}_0\big], \big[\mathbf{x} - e^{(t-t_0)\mathsf{A}}\mathbf{x}_0\big]\Big)\Big]$$

и так как

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp\Big(-\frac{1}{2}\big(\mathsf{C}(t,t)\mathbf{q},\mathbf{q}\big)\Big)d\mathbf{q} = \frac{(2\pi)^{n/2}}{\big[\det\mathsf{C}(t,t)\big]^{1/2}}\,,$$

то для плотности условных вероятностей перехода выполняется формула (3.1). ■

Рассмотрим, наконец, элементарные гауссовские процессы $\{\tilde{\mathbf{x}}(t); t \in [t_0,\infty)\}$ при условии, когда матрица A является гурвицевой (устойчивой), то есть будем считать, что A диагонализуема и реальная часть каждого из ее собственных чисел отрицательна. При этом условии имеет место

Теорема 4. *Пусть A–диагонализуемая $n\times n$-матрица, все собственные числа которой имеют строго отрицательную реальную часть. Случайный гауссовский марковский процесс $\{\tilde{\mathbf{x}}(t); t \in [t_0,\infty)\}$, определяемый стохастическим дифференциальным уравнением (1.1) с матрицей A, имеет предел $\lim\limits_{t_0\to-\infty}\tilde{\mathbf{x}}(t)$ по мере, который не зависит от значения $\tilde{\mathbf{x}}(t_0)$ и является стационарным случайным процессом.*

□ Докажем, что существует предел матрицы $\mathsf{C}(t,t)$ при $t_0 \to -\infty$, то есть сходится интеграл

$$\int_0^\infty e^{s\mathsf{A}}\,\mathsf{S}^2 e^{s\mathsf{A}^T}\,ds.$$

Для любого вектора $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ неотрицательный диагональный элемент положительно определенной симметричной матрицы удовлетворяет неравенству

$$\big(e^{s\mathsf{A}}\,\mathsf{S}^2 e^{s\mathsf{A}^T}\mathbf{x},\mathbf{x}\big) = \big(\mathsf{S}^2 e^{s\mathsf{A}^T}\mathbf{x}, e^{s\mathsf{A}^T}\mathbf{x}\big) \le \|\mathsf{S}\|^2\|e^{s\mathsf{A}^T}\mathbf{x}\|^2\,. \tag{3.2}$$

Пусть $\{\mathbf{e}^{(j)}; j = 1 \div n\}$ — базис в $\mathbb{R}^n$, состоящий из собственных векторов матрицы A с соответствующими собственными числами $\{-\nu^{(j)} < 0; j = 1 \div n\}$. Тогда, подействовав матрицей $e^{s\mathsf{A}}$ на разложение вектора $\mathbf{x} = \sum_{j=1}^n \alpha_j\mathbf{e}^{(j)}$, находим

$$e^{s\mathsf{A}}\mathbf{x} = \sum_{j=1}^n \alpha_j e^{-s\nu^{(j)}}\mathbf{e}^{(j)}\,.$$

Следовательно,

$$\|e^{s\mathsf{A}}\mathbf{x}\|^2 \le \Big|\sum_{j=1}^n \alpha_j e^{-s\nu^{(j)}}\Big|^2 \le e^{-2\nu s}\Big(\sum_{j=1}^n |\alpha_j|\Big)^2 \equiv e^{-2\nu s}\|\mathbf{x}\|_1^2\,, \tag{3.3}$$

где $\nu = \min\{\mathrm{Re}\,\nu^{(j)}; j = 1 \div n\}$. В сочетании с (3.2), получаем оценку

$$\big(e^{s\mathsf{A}}\,\mathsf{S}^2 e^{s\mathsf{A}^T}\mathbf{x},\mathbf{x}\big) \le e^{-2\nu s}\|\mathsf{S}\|^2\|\mathbf{x}\|_1^2\,.$$

Тогда для любого вектора $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ равен нулю следующий предел для матриц-функции, значениями которой являются симметричные положительно определенные матрицы

$$\Big(\Big[\int_t^\infty e^{s\mathsf{A}}\,\mathsf{S}^2 e^{s\mathsf{A}^T} ds\Big]\mathbf{x},\mathbf{x}\Big) \le \|\mathbf{x}\|_1^2 \frac{1-e^{-2\nu t}}{2\nu}\,\|\mathsf{S}\|^2 \to 0\,, \quad t\to\infty\,.$$

Откуда следует сходимость интеграла. Тогда, согласно (2.7), существует предел

$$\lim_{t_0\to-\infty} \mathsf{C}(t,t) = \int_0^\infty e^{s\mathsf{A}}\,\mathsf{S}^2 e^{s\mathsf{A}^T} ds \equiv \mathsf{C}\,.$$

Кроме того, для любого вектора $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, согласно (3.2), $e^{(t-t_0)\mathsf{A}}\mathbf{x}_0 \to 0$ при $t_0 \to -\infty$.

Перейдем к пределу $t_0 \to -\infty$ в формуле (3.1). Предельное значение плотности $f(\mathbf{x},t;\mathbf{x}_0,t_0)$, которое мы обозначим $f(\mathbf{x})$, существует и равно

$$f(\mathbf{x}) = \big[(2\pi)^n \det\mathsf{C}\big]^{-1/2} \exp\Big[-\frac{1}{2}(\mathsf{C}^{-1}\mathbf{x},\mathbf{x})\Big]\,. \tag{3.4}$$

Эта предельная плотность не зависит от $\mathbf{x}_0$. Так как она не зависит от $t \in \mathbb{R}$ и плотность условных вероятностей перехода зависит только лишь от разности $t - t_0$, то предельный случайный гауссовский марковский процесс, который теперь определен для всех $t \in \mathbb{R}$, является стационарным (см. [30]). ■

4. Характеристическая функция случайной величины $\mathsf{J}_t[\,\tilde{\mathbf{x}}(s)\,]$. Ввиду того, то случайная величина $\mathsf{J}_t[\,\tilde{\mathbf{x}}(s)\,]$ с вероятностью 1 положительна, то ее распределение вероятностей удобно характеризовать производящей функцией

$$Q(\lambda,t) = \mathrm{E}\,\exp\Big(-\lambda\mathsf{J}_t[\,\tilde{\mathbf{x}}(s)\,]\Big)\,, \quad \mathrm{Re}\lambda \in [0,\infty)\,. \tag{4.1}$$

Тогда характеристическая функция этой случайной величины равна $Q(-i\lambda,t)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Мы произведем вычисление функции (4.1) методом, идейно близким к методу Каца [20], а именно, сведем ее вычисление к решению вспомогательного параболического уравнения типа уравнения Шредингера. Однако при этом, в отличие от указанной работы, мы не будем явно использовать интегрирование по мере винеровского процесса $\{\tilde{\mathbf{w}}(t); t \in [0,\infty)\}$, а воспользуемся известной формулой усреднения Фуруцу – Новикова (см. [31], [32]), связанной с процессом белого шума.

Введем, следуя М. Кацу, совместную одновременну́ю плотность $g(\mathbf{x},v;t,\mathbf{x}_0)$ распределения вероятностей для составного случайного процесса, представляющего собой пару случайных процессов $\{\langle\tilde{\mathbf{x}}(t),\mathsf{J}_t[\tilde{\mathbf{x}}(s)]\rangle; t \in [0,\infty)\}$,

$$g(\mathbf{x},v;t,\mathbf{x}_0) = \mathrm{E}\delta(\mathbf{x}-\tilde{\mathbf{x}}(t))\delta(v-\mathsf{J}_t[\tilde{\mathbf{x}}(s)])$$

при условии, что $\tilde{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{x}_0$, $\mathsf{J}_0[\tilde{\mathbf{x}}(s)] = 0$. Здесь первая δ-функция n-мерная, а вторая — одномерная, хотя мы их обозначаем одной буквой. Однако, в дальнейшем, это не должно вызвать недоразумений. Следующие интегралы с этой плотностью определяют плотность $f(\mathbf{x},t;\mathbf{x}_0,0)$ и производящую функцию $Q(\lambda,t,\mathbf{x}_0)$ условного распределения вероятностей для величины $\mathsf{J}_t[\tilde{\mathbf{x}}(s)]$:

$$f(\mathbf{x},t;\mathbf{x}_0,0) = \int_0^\infty g(\mathbf{x},v;t,\mathbf{x}_0)dv\,, \quad h(\mathbf{x},\lambda;t,\mathbf{x}_0) = \int_0^\infty g(\mathbf{x},v;t,\mathbf{x}_0)e^{-\lambda v}dv\,,$$

$$Q(\lambda,t;\mathbf{x}_0) = \int_{\mathbb{R}^n} h(\mathbf{x},\lambda;t,\mathbf{x}_0)d\mathbf{x} = \int_0^\infty dv \int_{\mathbb{R}^n} g(\mathbf{x},v;t,\mathbf{x}_0)e^{-\lambda v}d\mathbf{x}\,. \tag{4.2}$$

Пусть случайные функции представляются линейным функционалом $\tilde{z}_j(t) = \int z_{jk}(t,s)\tilde{\varphi}_k(s)ds$, $j = 1 \div n$ от реализаций белого шума таким, что эти функции непрерывны с вероятностью 1. Пусть также $G[\tilde{\mathbf{z}}(s)]$– функционал от случайных функций $\tilde{\mathbf{z}}(t)$, обладающий вариационной производной (производной Гато) на пространстве непрерывных функций. Тогда формула Фуруцу – Новикова утверждает, что для математического ожидания $\mathrm{E}\tilde{\varphi}(t)G[\tilde{\mathbf{z}}(s')]$ имеет место равенство

$$\mathrm{E}\tilde{\varphi}_j(t)G[\tilde{\mathbf{z}}(s')] = \int_{\mathbb{R}} \Big(\mathrm{E}\frac{\delta G[\tilde{\mathbf{z}}(s')]}{\delta\tilde{z}_k(s)}\Big)\big(\mathrm{E}\tilde{\varphi}_j(t)\tilde{z}_k(s)\big)ds\,. \tag{4.3}$$

Из формулы (4.3) вытекает, во-первых, что она линейна по функционалу $G[\tilde{\mathbf{z}}(s)]$ и, во-вторых, если $G[\tilde{\mathbf{z}}(s)] = w(H[\tilde{\mathbf{z}}(s)])$, $w(\cdot)$ — непрерывно дифференцируемая функция, то

$$\mathrm{E}\tilde{\varphi}_j(t)G[\tilde{\mathbf{z}}(s')] = \mathrm{E}\Big(\frac{dw}{dH}\int_{\mathbb{R}} \frac{\delta H[\tilde{\mathbf{z}}(s')]}{\delta z_k(s)}\Big)\big(\mathrm{E}\tilde{\varphi}_j(t)\tilde{z}_k(s)\big)ds\,. \tag{4.4}$$

Пусть носитель непрерывной функции $z_{kk'}(s,s')$ относительно переменной s', содержит t в качестве внутренней точки. Тогда $\mathrm{E}\tilde\varphi_j(t)\tilde z_k(s) = z_{kj}(s,t)$. Если этот носитель не содержит точки t, то $\mathrm{E}\tilde\varphi_j(t)\tilde z_k(s) = 0$. Наконец, если t является крайней точкой носителя, то $\mathrm{E}\tilde\varphi_j(t)\tilde z_k(s) = z_{kj}(t,t)/2$. Последнее равенство, как раз, связано с использованием белого шума в смысле Стратоновича, так как в этом случае, согласно теореме Вонга – Закаи, правильное использование корреляционной функции белого шума состоит в замене $\delta(t-s)$ на какую-то непрерывную корреляционную функцию $c(s-t) = \mathrm{E}\tilde\varphi(s)\tilde\varphi(t)$, которая является четной, с последующим переходом к пределу $c(t) \to \delta(t)$.

Используя перечисленные свойства устанавливаем справедливость следующей формулы.

Лемма 2. *Пусть* $\{\tilde{\mathbf{x}}(t); t \in [0,\infty)\}$ *— элементарный гауссовский процесс с траекториями* (1.4) *и* $G[\tilde{\mathbf{x}}(s)] = \exp\big(-i(\mathbf{q},\tilde{\mathbf{x}}(t)) - \lambda \mathsf{J}_t[\tilde{\mathbf{x}}(s)]\big)$. *Тогда имеет место формула*

$$\mathrm{E}\,\tilde\varphi_j(t)G[\tilde{\mathbf{x}}(s)] = -\frac{i}{2}\,(\mathsf{S}\mathbf{q})_j\,\mathrm{E}\,G[\tilde{\mathbf{x}}(s)]\,. \tag{4.5}$$

□ Согласно (1.4), положим $\tilde{\mathbf{x}}(t) = e^{t\mathsf{A}}\mathbf{x}_0 + \tilde{\mathbf{z}}(t)$, $\tilde z_j(t) = \int_0^t z_{jk}(t,s)\tilde\varphi_k(s)ds$, $z_{jk}(t,s) = \big(e^{(t-s)\mathsf{A}}\mathsf{S}\big)_{jk}\theta(t-s)$. Кроме того, $w(H) = \exp(-H)$, $H[\tilde{\mathbf{z}}(s)] = i(\mathbf{q},\tilde{\mathbf{x}}(t)) + \lambda \mathsf{J}_t[\tilde{\mathbf{x}}(s)]$. Тогда

$$\frac{\delta H[\tilde{\mathbf{z}}(s')]}{\delta \tilde z_k(s)} = iq_k\delta(t-s) + \lambda\frac{\delta \mathsf{J}_t[\tilde{\mathbf{z}}(s')]}{\delta\tilde z_k(s)}$$

и

$$\frac{\delta \mathsf{J}_t[\tilde{\mathbf{z}}(s')]}{\delta\tilde z_k(s)} = 2\int\limits_0^t \delta(s-s')\big(\mathsf{V}\tilde{\mathbf{x}}\big)_k(s') = 2\theta(t-s)\theta(s)\big(\mathsf{V}\tilde{\mathbf{x}}\big)_k(s)\,,$$

$$\int\limits_0^t \frac{\delta \mathsf{J}_t[\tilde{\mathbf{z}}(s')]}{\delta\tilde z_k(s)}\big(\mathrm{E}\tilde\varphi_j(t)\tilde z_k(s)\big)ds = 2\int\limits_0^t \big(\mathsf{V}\tilde{\mathbf{x}}\big)_k(s)\big(\mathrm{E}\tilde\varphi_j(t)\tilde z_k(s)\big)ds =$$

$$= 2\int\limits_0^t \big(\mathsf{V}\tilde{\mathbf{x}}\big)_k(s)z_{kj}(s,t)ds = 2\int\limits_0^t \big(\mathsf{V}\tilde{\mathbf{x}}\big)_k(s)e^{(s-t)\mathsf{A}}\mathsf{S}_{kj}\theta(s-t)ds = 0\,,$$

так как t является внешней точкой по отношению к интервалу интегрирования по s. Учитывая полученное равенство, получаем, согласно (4.4),

$$\mathrm{E}\Big(\frac{dw}{dH}\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\delta H[\tilde{\mathbf{z}}(s')]}{\delta z_k(s)}\Big)\big(\mathrm{E}\tilde\varphi_j(t)\tilde z_k(s)\big)ds = -\frac{i}{2}\,(\mathsf{S}\,\mathbf{q})_j\mathrm{E}G[\tilde{\mathbf{z}}(s')]\,,$$

так как t является крайней точкой интервала интегрирования, то мы положили $\mathrm{E}\tilde\varphi_j(t)\tilde z_k(s) = S_{kj}/2$ и воспользовались симметрией матрицы S. ■

Теперь мы в состоянии доказать следующее утверждение.

Теорема 5. *Плотность* $h(\mathbf{x},\lambda;t)$ *удовлетворяет следующему уравнению*

$$\frac{\partial}{\partial t}\,h(\mathbf{x},\lambda;t,\mathbf{x}_0) = \Big(-\Big(\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}},\mathsf{A}\mathbf{x}\Big)h + \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}},\mathsf{S}^2\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}}\Big)h - \lambda(\mathsf{V}\mathbf{x},\mathbf{x})h\Big)(\mathbf{x},\lambda;t,\mathbf{x}_0) \tag{4.6}$$

и начальному условию $h(\mathbf{x},\lambda;0,\mathbf{x}_0) = \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)$.

□ Заметим, что

$$h(\mathbf{x},\lambda;t,\mathbf{x}_0) = \mathrm{E}\delta(\mathbf{x}-\tilde{\mathbf{x}}(t))\exp(-\lambda\mathsf{J}_t[\tilde{\mathbf{z}}(s)])\,,$$

представим эту функцию в виде интеграла Фурье

$$h(\mathbf{x},\lambda;t,\mathbf{x}_0) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i(\mathbf{x},\mathbf{q})}\mathrm{E}G[\tilde{\mathbf{z}}(s)]d\mathbf{q}\,. \tag{4.7}$$

Запишем выражение для производной

$$\frac{\partial}{\partial t}G[\tilde{\mathbf{z}}(s)] = -G[\tilde{\mathbf{z}}(s)]\Big[i\Big(\mathbf{q},\frac{d}{dt}\tilde{\mathbf{x}}(t)\Big) + \lambda(\tilde{\mathbf{x}}(t),\mathsf{V}\tilde{\mathbf{x}}(t))\Big] =$$

$$= -G[\tilde{\mathbf{z}}(s)]\Big[i(\mathbf{q},\mathsf{A}\tilde{\mathbf{x}}(t)) + i(\mathbf{q},\mathsf{S}\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(t)) + \lambda(\tilde{\mathbf{x}}(t),\mathsf{V}\tilde{\mathbf{x}}(t))\Big]\,.$$

Осуществляя, теперь, преобразование Фурье для математического ожидания от обеих частей этого равенства, воспользовавшись (4.5), находим

$$\frac{\partial}{\partial t}h(\mathbf{x},\lambda;t,\mathbf{x}_0) = -\frac{i}{(2\pi)^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i(\mathbf{x},\mathbf{q})}(\mathbf{q},\mathsf{A}\,\mathrm{E}\tilde{\mathbf{x}}(t)G[\tilde{\mathbf{z}}(s)])d\mathbf{q}-$$

$$-\frac{\lambda}{(2\pi)^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i(\mathbf{x},\mathbf{q})}\mathrm{E}(\tilde{\mathbf{x}}(t),\mathsf{V}\tilde{\mathbf{x}}(t))G[\tilde{\mathbf{z}}(s)]d\mathbf{q} - \frac{i}{(2\pi)^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i(\mathbf{x},\mathbf{q})}(\mathbf{q},\mathsf{S}\,\mathrm{E}\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(t))G[\tilde{\mathbf{z}}(s)]d\mathbf{q}\,. \tag{4.8}$$

Первое слагаемое в правой части формулы преобразуется следующим образом:

$$\frac{i}{(2\pi)^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i(\mathbf{x},\mathbf{q})}(\mathbf{q},\mathsf{A}\,\mathrm{E}\tilde{\mathbf{x}}(t)G[\tilde{\mathbf{z}}(s)])d\mathbf{q} = \Big(\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}},\mathsf{A}\,\mathrm{E}\,\tilde{\mathbf{x}}(t)\Big)\frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i(\mathbf{x},\mathbf{q})}G[\tilde{\mathbf{z}}(s)])d\mathbf{q} =$$

$$= \Big(\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}},\mathsf{A}\,\mathrm{E}\,\tilde{\mathbf{x}}(t)\Big)\delta(\mathbf{x}-\tilde{\mathbf{x}}(t))\exp(-\lambda\mathsf{J}_t[\tilde{\mathbf{z}}(s)]) = \Big(\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}},\mathsf{A}\,\mathbf{x}\Big)h(\mathbf{x},\lambda;t,\mathbf{x}_0)\,. \tag{4.9}$$

Преобразуем второе слагаемое в (4.8),

$$\frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i(\mathbf{x},\mathbf{q})}\mathrm{E}(\tilde{\mathbf{x}}(t),\mathsf{V}\tilde{\mathbf{x}}(t))G[\tilde{\mathbf{z}}(s)]d\mathbf{q} = \mathrm{E}(\tilde{\mathbf{x}}(t),\mathsf{V}\tilde{\mathbf{x}}(t))\frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i(\mathbf{x},\mathbf{q})}G[\tilde{\mathbf{z}}(s)]d\mathbf{q} =$$

$$= \mathrm{E}(\tilde{\mathbf{x}}(t),\mathsf{V}\tilde{\mathbf{x}}(t))\delta(\mathbf{x}-\tilde{\mathbf{x}}(t))\exp(-\lambda\mathsf{J}_t[\tilde{\mathbf{z}}(s)]) = (\mathbf{x},\mathsf{V}\mathbf{x})h(\mathbf{x},\lambda;t,\mathbf{x}_0)\,. \tag{4.10}$$

Наконец, для преобразования последнего слагаемого в (4.8) применим формулу (4.5),

$$\frac{i}{(2\pi)^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i(\mathbf{x},\mathbf{q})}(\mathbf{q},\mathsf{S}\,\mathrm{E}\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(t))G[\tilde{\mathbf{z}}(s)]d\mathbf{q} = \Big(\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}},\mathsf{S}\,\mathrm{E}\,\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(t)\Big)\frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i(\mathbf{x},\mathbf{q})}G[\tilde{\mathbf{z}}(s)])d\mathbf{q} =$$

$$= \Big(\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}},\mathsf{S}\,\frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i(\mathbf{x},\mathbf{q})}\mathrm{E}\,\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(t)\Big)G[\tilde{\mathbf{z}}(s)])d\mathbf{q} = -\frac{i}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}},\mathsf{S}^2\,\frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\mathbf{q}e^{i(\mathbf{x},\mathbf{q})}\mathrm{E}\,G[\tilde{\mathbf{z}}(s)]d\mathbf{q}\Big) =$$

$$= -\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}},\mathsf{S}^2\,\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}}\Big)h(\mathbf{x},\lambda;t,\mathbf{x}_0)\,.$$

Подставляя это выражение вместе с (4.9) и (4.10) в (4.8), получаем уравнение (4.6).

В заключение заметим, что $\mathsf{J}_0[\tilde{\mathbf{z}}(s)] = 0$ и вектор $\tilde{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{x}_0$ неслучаен. Поэтому $h(\mathbf{x},\lambda;0,\mathbf{x}_0) = f(\mathbf{x},0;\mathbf{x}_0,0) = \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)$. ■

5. Обобщенная формула Зигерта. По определению, функция $h(\mathbf{x},\lambda;t,\mathbf{x}_0)$ существует и единственна, так как существует и единственна плотность распределения $g(\mathbf{x},v;t,\mathbf{x}_0)$, а функция $h(\mathbf{x},\lambda;t,\mathbf{x}_0)$ представляет собой условное математическое ожидание случайной величины $\exp(-\lambda\mathsf{J}_t[\tilde{\mathbf{z}}(s)])$, которая ограничена при $\operatorname{Re}\lambda \geq 0$, ввиду $\mathsf{J}_t[\tilde{\mathbf{z}}(s)] \geq 0$ с вероятностью 1.

Найдем решение уравнения (4.6), удовлетворяющее начальному условию $h(\mathbf{x},\lambda;0,\mathbf{x}_0) = \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)$. Нам понадобятся следующие утверждения относительно разрешимости матричного уравнения Риккати [33].

Теорема 6. *Пусть* A, V *и* S^2 *— $n\times n$-матрицы, причем матрицы* V *и* S^2 *симметричны и положительно определены. Тогда квадратное матричное уравнение относительно матрицы* B

$$\mathsf{B}\mathsf{S}^2\mathsf{B}^T + (\mathsf{A}\mathsf{B}^T + \mathsf{B}\mathsf{A}^T) - 2\lambda\mathsf{V} = 0\,, \tag{5.1}$$

при $\lambda \geq 0$ *имеет решение в виде вещественной матрицы* B.

□ Произведем замену $\mathsf{B} \Rightarrow \mathsf{B}+\mathsf{R}$. Тогда

$$(\mathsf{B}+\mathsf{R})\mathsf{S}^2(\mathsf{B}^T+\mathsf{R}^T) + (\mathsf{A}(\mathsf{B}^T+\mathsf{R}^T) + (\mathsf{B}+\mathsf{R})\mathsf{A}^T) - 2\lambda\mathsf{V} = 0\,.$$

Так как S^2 положительно определенная матрица, то S^{-2} существует. Поэтому выберем матрицу R так, чтобы выполнялось $\mathsf{R}\mathsf{S}^2 + \mathsf{A} = 0$, то есть $\mathsf{R} = -\mathsf{A}\mathsf{S}^{-2}$, $\mathsf{R}^T = -\mathsf{S}^{-2}\mathsf{A}^T$. В результате, получим уравнение

$$\mathsf{B}\mathsf{S}^2\mathsf{B}^T = 2\lambda\mathsf{V} - \mathsf{R}\mathsf{S}^2\mathsf{R}^T - \mathsf{R}\mathsf{A}^T - \mathsf{A}^T\mathsf{R} = 2\lambda\mathsf{V} + \mathsf{A}^T\mathsf{S}^{-2}\mathsf{A}\,.$$

Введем матрицы $\mathsf{X} = \mathsf{B}\mathsf{S}$, $\mathsf{E} = 2\lambda\mathsf{V} + \mathsf{A}\mathsf{S}^{-2}\mathsf{A}^T$. Тогда уравнение принимает вид

$$\mathsf{X}\mathsf{X}^T = \mathsf{E}\,. \tag{5.2}$$

Так как матрица $\mathsf{A}\mathsf{S}^{-2}\mathsf{A}^T$ симметрична и положительно определена и такими же свойствами обладает матрица λV, то матрица E симметрична и положительно определена и следовательно существует единственная симметричная положительно определенная матрица, которая является квадратным корнем $\mathsf{E}^{1/2}$ из матрицы E (см. [34]), так как для вещественной симметричной неотрицательно определенной матрицы ее взаимно ортогональные собственные векторы всегда могут быть выбраны вещественными. Тогда уравнение (5.2) имеет решение в виде вещественной симметричной матрицы $\mathsf{X} = \mathsf{E}^{1/2}$. Таким образом, $\mathsf{B} = \mathsf{E}^{1/2}S^{-1}$. Наконец, возвращаясь к исходным обозначениям $\mathsf{B} \Rightarrow \mathbf{B}-\mathbf{R}$, находим решение уравнения (5.1) в виде $\mathsf{B} = \mathsf{E}^{1/2}S^{-1} + \mathsf{A}\mathsf{S}^{-2}$. ■

Следующее утверждение уточняет Теорему 6.

Теорема 7. *Пусть* A, V *и* S^2 *— $n\times n$-матрицы, причем матрицы* V *и* S^2 *симметричны и положительно определены. Пусть, кроме того, матрица* S *коммутирует с матрицами* V *и* A. *Тогда матричное уравнение (5.1) относительно матрицы* B *при* $\lambda > 0$ *имеет такое решение, что квадратичная форма* $(\mathsf{B}\mathbf{x},\mathbf{x})$ *является положительно определенной.*

□ Рассмотрим решение $\mathsf{B} = \mathsf{E}^{1/2}S^{-1} + \mathsf{A}\mathsf{S}^{-2}$, существование которого установлено в доказательстве Теоремы 6. При условии коммутации матрицы S с матрицами V и A, обратная матрица S^{-1} также коммутирует с этими матрицами, и поэтому $[\mathsf{S}^{-1},\mathsf{E}^{1/2}] = 0$. Тогда матрица $\mathsf{S}^{-1}\mathsf{E}^{1/2}$ симметричная и положительно определенная, и поэтому $(\mathsf{S}^{-1}\mathsf{E}^{1/2}\mathbf{x},\mathbf{x}) > 0$ при $\mathbf{x}\neq 0$.

Рассмотрим квадратичную форму $(\mathsf{A}\mathsf{S}^{-2}\mathbf{x},\mathbf{x})$. Матрицы A и S^{-2}, ввиду их коммутации, обладают общим для них базисом $\{\mathbf{e}_j; j = 1\div n\}$ ортонормированных собственных векторов. Обозначим наборы их собственных чисел, соответственно, $\{\alpha_j; j = 1\div n\}$, $\{\sigma_j^{-2} > 0; j = 1\div n\}$. При этом α_j вещественны, так как являются собственными числами вещественной матрицы с вещественными собственными векторами $\mathbf{e}_j$, являющимися, одновременно собственными векторами симметричной матрицы S. Тогда для любого вектора $\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{n}\xi_j\mathbf{e}_j$, коэффициенты ξ_j вещественны, так как $\mathbf{e}_j$ вещественны, так как являются собственными векторами симметричной матрицы S и поэтому имеет место

$$(\mathsf{A}\mathsf{S}^{-2}\mathbf{x},\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n}\frac{\alpha_j}{\sigma_j^2}\,\xi_j^2 < 0\,,$$

так как $\alpha_j < 0$, $j = 1\div n$. Следовательно, суммарная квадратичная форма положительно определена, $(\mathsf{S}^{-1}\mathsf{E}^{1/2}\mathbf{x},\mathbf{x}) - \mathrm{Re}(\mathsf{A}\mathsf{S}^{-2}\mathbf{x},\mathbf{x}) > 0$ при $\mathbf{x}\neq 0$. ■

Будем искать функцию $h(\mathbf{x},\lambda;t,\mathbf{x}_0)$ в следующем виде

$$h = p\exp\big(at - (x,\mathsf{B}x)/2\big)\,,\qquad p = p(\mathbf{x},\lambda;t)$$

с симметричной матрицей $\mathsf{B}^T = \mathsf{B}$. Обозначив $\partial/\partial x_j \equiv \nabla_j$, вычислим градиент функции h,

$$\nabla_j h = \exp\big(at - (\mathbf{x},\mathsf{B}\mathbf{x})/2\big)\nabla_j p - (\mathsf{B}\mathbf{x})_j p\ \exp\big(at - (\mathbf{x},\mathsf{B}\mathbf{x})/2\big)\,,$$

ввиду $\nabla_j(\mathbf{x},\mathsf{B}\mathbf{x}) = 2(\mathsf{B}\mathbf{x})_j$. Так как $\nabla_k\nabla_j(\mathbf{x},\mathsf{B}\mathbf{x}) = 2B_{jk}$, то повторное дифференцирование функции h дает

$$\nabla_k\nabla_j h = \exp\big(at - (\mathbf{x},\mathsf{B}\mathbf{x})/2\big)\Big[\nabla_k\nabla_j p - (\mathsf{B}\mathbf{x})_j\nabla_k p - (\mathsf{B}\mathbf{x})_k\nabla_j p + p(-\mathsf{B}_{jk} + (\mathsf{B}\mathbf{x})_j(\mathsf{B}\mathbf{x})_k)\Big]\,. \tag{5.3}$$

Кроме того,

$$\nabla_j(\mathsf{A}\mathbf{x})_j h = \exp\big(at - (\mathbf{x},\mathsf{B}\mathbf{x})/2\big)\Big[A_{jj}p + (\mathsf{A}\mathbf{x})_j(\nabla_j p - (\mathsf{B}\mathbf{x})_j\,p)\Big]\,, \tag{5.4}$$

$$\dot h = (ap + \dot p)\exp\big(at - (\mathbf{x},\mathsf{B}\mathbf{x})/2\big)\,. \tag{5.5}$$

Подстановка (5.3) - (5.5) в (4.6) дает следующее равенство:

$$ap + \dot p = -\Big[A_{jj}p + (\mathsf{A}\mathbf{x})_j(\nabla_j p - (\mathsf{B}\mathbf{x})_j\,p)\Big] +$$

$$+\frac{1}{2}\,(\mathsf{S}^2)_{jk}\Big[\nabla_k\nabla_j p - \nabla_k p\cdot(\mathsf{B}\mathbf{x})_j - \nabla_j p\cdot(\mathsf{B}\mathbf{x})_k + p(-\mathsf{B}_{jk} + (\mathsf{B}\mathbf{x})_j(\mathsf{B}\mathbf{x})_k)\Big] - \lambda(\mathbf{x},\mathsf{V}\mathbf{x})p\,.$$

Постоянную a и матрицу B выберем таким образом, чтобы уравнение для функции p не содержало членов, пропорциональных самой функции p. Отсюда следует, что

$$a = -\mathrm{Sp}\big(\mathsf{A} + \mathsf{S}^2\mathsf{B}/2\big)\,, \tag{5.6}$$

а матрица B должна быть решением матричного уравнения Риккати

$$\mathsf{B}\mathsf{S}^2\mathsf{B}^T + (\mathsf{A}\mathsf{B}^T + \mathsf{B}\mathsf{A}^T) - 2\lambda\mathsf{V} = 0\,, \tag{5.7}$$

где мы воспользовались симметрией матрицы S^2 и равенством $(\mathsf{B}\mathsf{A}\mathbf{x},\mathbf{x}) = (\mathsf{A}^T\mathsf{B}\mathbf{x},\mathbf{x})$. При таком выборе матрицы B и постоянной a функция p должна удовлетворять дифференциальному уравнению

$$\dot p = \frac{1}{2}\,(\mathsf{S}^2)_{jk}\nabla_k\nabla_j\,p - (\mathsf{D}\mathbf{x})_j\nabla_j\,p\,, \tag{5.8}$$

где $\mathsf{D} = \mathsf{A} + \mathsf{S}^2\mathsf{B}$. При этом функция $p(\mathbf{x},\lambda;t)$ должна удовлетворять начальному условию

$$p(\mathbf{x},\lambda;0) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\exp\big[(\mathsf{B}\mathbf{x}_0,\mathbf{x}_0)/2\big]\,. \tag{5.9}$$

Найдем решение уравнения (5.8). Для этого перейдем к зависящим от времени радиус-векторам $\mathbf{y} = e^{t\mathsf{D}}\mathbf{x}$ и положим $q(\mathbf{y},\lambda;t) \equiv p(\mathbf{x},\lambda;t) = p(e^{t\mathsf{D}}\mathbf{y},\lambda;t)$. Выразим производные $\partial q/\partial t$, $\partial^2 q/\partial y_j \partial y_k$ в терминах функции p,

$$\frac{\partial}{\partial t}\, q(\mathbf{y},\lambda;t) = \dot p(e^{t\mathsf{D}}\mathbf{x},\lambda;t) + \big(\mathsf{D}e^{t\mathsf{D}}\mathbf{x}\big)_j\big(\nabla_j p\big)_{\mathbf{x}\Rightarrow e^{t\mathsf{D}}\mathbf{x}} = \big[\dot p + \big(\mathsf{D}\mathbf{x}\big)_j \nabla_j p\big]_{\mathbf{x}\Rightarrow e^{t\mathsf{D}}\mathbf{x}}\,, \tag{5.10}$$

$$\frac{\partial}{\partial y_j}\, q(\mathbf{y},\lambda;t) = \frac{\partial}{\partial y_j}\, p(e^{t\mathsf{D}}\mathbf{x},\lambda;t) = \big(e^{t\mathsf{D}}\big)_{lj}\big(\nabla_l p\big)_{\mathbf{x}\Rightarrow e^{t\mathsf{D}}\mathbf{x}}\,,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y_j \partial y_k}\, q(\mathbf{y},\lambda;t) = \big(e^{t\mathsf{D}}\big)_{lj}\frac{\partial}{\partial x_l}\frac{\partial}{\partial y_k}\; p(e^{t\mathsf{D}}\mathbf{x},\lambda;t) = \big(e^{t\mathsf{D}}\big)_{lj}\big(e^{t\mathsf{D}}\big)_{mk}\big(\nabla_l \nabla_m\, p\big)_{\mathbf{x}\Rightarrow e^{t\mathsf{D}}\mathbf{x}}\,. \tag{5.11}$$

Определим матрицу

$$\mathsf{S}^2_-(t) = \exp(-t\mathsf{D})\mathsf{S}^2 \exp(-t\mathsf{D}^T) \tag{5.12}$$

и, воспользовавшись (5.10), (5.11), преобразуем разность

$$\frac{\partial}{\partial t}\, q(\mathbf{y},\lambda;t) - \frac{1}{2}\big(\mathsf{S}^2_-(t)\big)_{jk}\,\frac{\partial^2 q}{\partial y_j \partial y_k} = \frac{\partial}{\partial t}\, q(\mathbf{y},\lambda;t) - \frac{1}{2}\big[\,\exp(-t\mathsf{D})\mathsf{S}^2\exp(-t\mathsf{D}^T)\big]_{jk}\,\frac{\partial^2 q}{\partial y_j \partial y_k} q =$$

$$= \Big[\dot p + \big(\mathsf{D}\mathbf{x}\big)_j \nabla_j p - \frac{1}{2}\big(\mathsf{S}^2\big)_{jk}\nabla_j\nabla_k\, p\Big]_{\mathbf{x}\Rightarrow e^{t\mathsf{D}}\mathbf{x}}\,,$$

которая равна нулю, в силу уравнения (5.8). Таким образом, функция $q(\mathbf{y},\lambda;t)$ удовлетворяет уравнению

$$\dot q = \frac{1}{2}\big(\mathsf{S}^2_-(t)\big)_{jk}\,\frac{\partial^2 q}{\partial y_j \partial y_k}\;. \tag{5.13}$$

Необходимо найти решение этого уравнения, удовлетворяющее начальному условию

$$q(\mathbf{y},\lambda;0) = p(\mathbf{x},\lambda;0)_{x=y}.$$

Непосредственной подстановкой в (5.13) проверяется, что следующая функция является таким решением

$$q(\mathbf{y},\lambda;t) = \frac{\exp[(\mathbf{x}_0,\mathsf{B}\mathbf{x}_0)/2]}{\big[(2\pi)^n \det\,\mathsf{G}_-(t)\big]^{1/2}}\exp\big[-((\mathbf{y}-\mathbf{x}_0),\mathsf{G}_-^{-1}(t)(\mathbf{y}-\mathbf{x}_0))/2\big]\,, \tag{5.14}$$

где введено обозначение

$$\mathsf{G}_-(t) = \int\limits_0^t \mathsf{S}^2_-(s)ds\,. \tag{5.15}$$

Так как $\mathsf{S}^2_-(t)$ — симметричная положительно определенная матрица, то таковой является матрица $\mathsf{G}_-(t)$ при любом $t \in (0,\infty)$. Она стремится к нулю при $t \to 0$. Тогда функция (5.14) стремится к $\delta(\mathbf{y}-\mathbf{x}_0)\exp[(\mathbf{x}_0,\mathsf{B}\mathbf{x}_0)/2]$, то есть она удовлетворяет требуемому начальному условию.

На основании (5.14), находим требуемое решение уравнения (5.8):

$$p(\mathbf{x},\lambda;t) = \frac{\exp[(\mathbf{x}_0,\mathsf{B}\mathbf{x}_0)/2]}{\big[(2\pi)^n \det\,\mathsf{G}_-(t)\big]^{1/2}}\exp\big[-((e^{-t\mathsf{D}}\mathbf{x}-\mathbf{x}_0),\mathsf{G}_-^{-1}(t)(e^{-t\mathsf{D}}\mathbf{x}-\mathbf{x}_0))/2\big]$$

и, следовательно,

$$h(\mathbf{x},\lambda;t,\mathbf{x}_0) = \frac{e^{at}}{\big[(2\pi)^n \det\,\mathsf{G}_-(t)\big]^{1/2}}\exp\{[(\mathbf{x}_0,\mathsf{B}\mathbf{x}_0)-(\mathbf{x},\mathsf{B}\mathbf{x})]/2\}\times$$

$$\times\exp\big[-((\mathbf{x}-e^{t\mathsf{D}}\mathbf{x}_0),[e^{t\mathsf{D}}\mathsf{G}_-(t)e^{t\mathsf{D}^T}]^{-1}(\mathbf{x}-e^{t\mathsf{D}}\mathbf{x}_0))/2\big]. \tag{5.16}$$

Наконец, после несложных преобразований в рамках матричного анализа

$$e^{t\mathsf{D}}\mathsf{G}_-(t)e^{t\mathsf{D}^T} = e^{t\mathsf{D}}\Big(\int\limits_0^t e^{-s\mathsf{D}}\mathsf{S}^2 e^{-s\mathsf{D}^T}ds\Big)e^{t\mathsf{D}^T} = \int\limits_0^t e^{(t-s)\mathsf{D}}\mathsf{S}^2 e^{(t-s)\mathsf{D}^T}ds = \int\limits_0^t e^{s\mathsf{D}}\mathsf{S}^2 e^{s\mathsf{D}^T}ds = \mathsf{G}_+(t)\,; \tag{5.17}$$

$$\det\mathsf{G}_+(t) = \det e^{t\mathsf{D}}\mathsf{G}_-(t)e^{t\mathsf{D}^T} = \big(\det e^{t\mathsf{D}}\big)\big(\det\mathsf{G}_-(t)\big)\big(\det e^{t\mathsf{D}^T}\big) =$$

$$= \exp(t\,\mathrm{Sp}\,\mathsf{D})\cdot\det\mathsf{G}_-(t)\cdot\exp(t\,\mathrm{Sp}\,\mathsf{D}^T) = \exp(2t\,\mathrm{Sp}\,\mathsf{D})\cdot\det\mathsf{G}_-(t)$$

и, следовательно,

$$e^{-t\mathrm{Sp}\mathsf{BS}^2/2}[\det \mathsf{G}_+(t)]^{1/2} = e^{-t\mathrm{Sp}\mathsf{BS}^2}\big(\exp(t\,\mathrm{Sp}\,\mathsf{D})[\det \mathsf{G}_-(t)]^{1/2}\big) = e^{-at}[\det \mathsf{G}_-(t)]^{1/2}\,. \tag{5.18}$$

Формула (5.16) принимает следующий вид при использовании (5.17) и (5.18):

$$h(\mathbf{x},\lambda;t,\mathbf{x}_0) = \frac{\exp(t\,\mathrm{Sp}\,\mathsf{BS}^2/2)}{\big[(2\pi)^n\det\,\mathsf{G}_+(t)\big]^{1/2}}\exp\{[(\mathbf{x}_0,\mathsf{B}\mathbf{x}_0)-(\mathbf{x},\mathsf{B}\mathbf{x})]/2\}\times$$

$$\times\exp\big[-((\mathbf{x}-e^{t\mathsf{D}}\mathbf{x}_0),\mathsf{G}_+^{-1}(t)(\mathbf{x}-e^{t\mathsf{D}}\mathbf{x}_0))/2\big]\,. \tag{5.19}$$

Замечание. Так как уравнение (4.6) совпадает с (3.1) при $\lambda = 0$, то решение (3.4) получается из (5.14) при $\lambda \to 0$. В самом деле, положив $\lambda = 0$, в качестве решения уравнения (5.7) достаточно взять $\mathsf{B} = 0$, и поэтому $\mathsf{D} = \mathsf{A}$, $\mathsf{G}_+(t) = \mathsf{C}(t,t)$ при $t_0 = 0$ (см. (2.7)), откуда получаем равенство $f(\mathbf{x},t;\mathbf{x}_0,0) = h(\mathbf{x},t;\mathbf{x}_0,0)$.

Теорема 8. *Производящая функция $Q(\lambda,t;\mathbf{x}_0)$ распределения условных вероятностей при условии $\tilde{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{x}_0$ определяется следующей формулой:*

$$Q(\lambda,t;\mathbf{x}_0) = \left[\frac{\exp\big[t\,\mathrm{Sp}\,\mathsf{BS}^2 + (\mathbf{x}_0,\big[\mathsf{B}-e^{t\mathsf{D}}\mathsf{B}\big[\mathbf{1}+\mathsf{G}_+(t)\mathsf{B}\big]^{-1}e^{t\mathsf{D}}\big]\mathbf{x}_0)\big]}{\det\,\big(\mathbf{1}+\mathsf{G}_+(t)\mathsf{B}\big)}\right]^{1/2}, \tag{5.20}$$

где зависимость функции $Q(\lambda,t;\mathbf{x}_0)$ от λ определяется зависимостью от этого параметра матрицы B и соответствующей ей матрицы $\mathsf{D} = \mathsf{A}+\mathsf{S}^2\mathsf{B}$.

□ Согласно определяющей формуле (4.2), необходимо вычислить следующий интеграл:

$$Q(\lambda,t,\mathbf{x}_0) = \int_{\mathbb{R}^n} h(\mathbf{x},\lambda;t,\mathbf{x}_0)d\mathbf{x} =$$

$$\frac{\exp\big[\big(t\,\mathrm{Sp}\,\mathsf{BS}^2+(\mathbf{x}_0,\mathsf{B}\mathbf{x}_0)\big)/2\big]}{\big[(2\pi)^n\det\,\mathsf{G}_+(t)\big]^{1/2}}\int_{\mathbb{R}^n}\exp\big\{-\big[(\mathbf{x},\mathsf{B}\mathbf{x})+((\mathbf{x}-e^{t\mathsf{D}}\mathbf{x}_0),\mathsf{G}_+^{-1}(t)(\mathbf{x}-e^{t\mathsf{D}}\mathbf{x}_0))\big]/2\big\}d\mathbf{x}. \tag{5.21}$$

Так как матрица $\mathsf{G}_-(t)$ положительно определена, то и матрица $\mathsf{G}_+(t)$, согласно своему определению, положительно определена. Будем, далее, предполагать, что матрица S коммутирует с матрицами V и A. В этом случае квадратичная форма $(\mathsf{B}\mathbf{x},\mathbf{x})$ положительно определена согласно Теореме 7. Тогда вычисление интеграла производится посредством выделения полного квадрата по вектору $\mathbf{x}$,

$$\big(\mathbf{x},\mathsf{B}\mathbf{x}\big)+\big((\mathbf{x}-e^{t\mathsf{D}}\mathbf{x}_0),\mathsf{G}_+^{-1}(t)(\mathbf{x}-e^{t\mathsf{D}}\mathbf{x}_0)\big) =$$

$$= \big(\mathbf{x},(\mathsf{B}+\mathsf{G}^{-1}(t))\mathbf{x}\big)-2\big(\mathsf{G}_+^{-1}(t)e^{t\mathsf{D}}\mathbf{x}_0,\mathbf{x}\big)+\big(e^{t\mathsf{D}}\mathbf{x}_0,\mathsf{G}_+^{-1}(t)e^{t\mathsf{D}}\mathbf{x}_0\big) =$$

$$= \big((\mathsf{B}+\mathsf{G}^{-1}(t))\big(\mathbf{x}-(\mathsf{B}+\mathsf{G}^{-1}(t))^{-1}\mathsf{G}_+^{-1}(t)e^{t\mathsf{D}}\mathbf{x}_0\big),\mathbf{x}-(\mathsf{B}+\mathsf{G}^{-1}(t))^{-1}\mathsf{G}_+^{-1}(t)e^{t\mathsf{D}}\mathbf{x}_0\big)+H(\lambda,t)\,, \tag{5.22}$$

где мы воспользовались симметричностью значений матриц-функции $\mathsf{G}_+(t)$ и тем, что функция $H(\lambda,t)$ определяется формулой:

$$H(\lambda,t) = \big(e^{t\mathsf{D}}\mathbf{x}_0,\mathsf{G}_+^{-1}(t)e^{t\mathsf{D}}\mathbf{x}_0\big)-\big(\mathsf{G}_+^{-1}(t)e^{t\mathsf{D}}\mathbf{x}_0,(\mathsf{B}+\mathsf{G}^{-1}(t))^{-1}\mathsf{G}_+^{-1}(t)e^{t\mathsf{D}}\mathbf{x}_0\big) =$$

$$= \big(e^{t\mathsf{D}}\mathbf{x}_0,\mathsf{G}_+^{-1}(t)e^{t\mathsf{D}}\mathbf{x}_0\big)-\big(e^{t\mathsf{D}}\mathbf{x}_0,\big[\mathsf{G}_+(t)\mathsf{B}\mathsf{G}_+(t)+\mathsf{G}_+(t)\big]^{-1}e^{t\mathsf{D}}\mathbf{x}_0\big) =$$

$$\big(e^{t\mathsf{D}}\mathbf{x}_0,\mathsf{G}_+^{-1}(t)\big[\mathsf{G}_+(t)\mathsf{B}\mathsf{G}_+(t)\big]\big[\mathsf{G}_+(t)\mathsf{B}\mathsf{G}_+(t)+\mathsf{G}_+(t)\big]^{-1}e^{t\mathsf{D}}\mathbf{x}_0\big) = \big(e^{t\mathsf{D}}\mathbf{x}_0,\mathsf{B}\big[\mathbf{1}+\mathsf{G}_+(t)\mathsf{B}\big]^{-1}e^{t\mathsf{D}}\mathbf{x}_0\big)\,. \tag{5.23}$$

Подставив (5.22) и (5.23) в показатель экспоненты подинтегрального выражения (5.21) и вычислив n–мерный интеграл Пуассона по $\mathbf{x}$, находим

$$Q(\lambda,t;\mathbf{x}_0) = \frac{\exp\big[\big(t\,\mathrm{Sp}\,\mathsf{BS}^2+(\mathbf{x}_0,\mathsf{B}\mathbf{x}_0)-H(\lambda,t)\big)/2\big]}{\big[\det\,\mathsf{G}_+(t)\big]^{1/2}\big[\det\,\big(\mathsf{G}_+^{-1}(t)+\mathsf{B}\big)\big]^{1/2}} =$$

$$= \left[\frac{\exp\big[t\,\mathrm{Sp}\,\mathsf{BS}^2+(\mathbf{x}_0,\big[\mathsf{B}-e^{t\mathsf{D}}\mathsf{B}\big[\mathbf{1}+\mathsf{G}_+(t)\mathsf{B}\big]^{-1}e^{t\mathsf{D}}\big]\mathbf{x}_0)\big]}{\det\,\big(\mathbf{1}+\mathsf{G}_+(t)\mathsf{B}\big)}\right]^{1/2}. \quad ■ \tag{5.24}$$

Наконец, вычислим производящую функцию $Q(\lambda,t)$ безусловного распределения вероятностей значений функционала $\mathsf{J}_t[\tilde{\mathbf{x}}(s)]$ от траекторий n-мерного случайного процесса Орнштейна – Уленбека, которую мы называем обобщенной формулой Зигерта.

Теорема 9. *Производящая функция* $Q(\lambda, t)$ *распределения вероятностей случайной величины* $\mathsf{J}_t[\tilde{\mathbf{x}}(s)]$ *от траекторий* n*-мерного случайного процесса Орнштейна – Уленбека определяется следующей формулой:*

$$Q(\lambda,t) = \left[\frac{\exp\big(t\,\mathrm{Sp}\,\mathsf{B}\mathsf{S}^2\big)}{\det\Big(\mathbf{1}+\mathsf{C}\mathsf{B}-\mathsf{C}e^{t\mathsf{D}}\mathsf{B}\big[\mathbf{1}+\mathsf{G}_+(t)\mathsf{B}\big]^{-1}e^{t\mathsf{D}}\Big)\cdot\det\big(\mathbf{1}+\mathsf{G}_+(t)\mathsf{B}\big)}\right]^{1/2}, \tag{5.25}$$

где зависимость функции $Q(\lambda, t)$ *от* λ *определяется зависимостью от этого параметра матрицы* B *и соответствующей ей матрицы* $\mathsf{D} = \mathsf{A} + \mathsf{S}^2\mathsf{B}$.

□ Согласно определению производящей функции $Q(\lambda, t)$ распределения вероятностей случайной величины $\mathsf{J}_t[\tilde{\mathbf{x}}(s)]$, она выражается посредством следующего интеграла

$$Q(\lambda,t) = \mathrm{E}\exp\big(-\lambda\mathsf{J}_t[\tilde{\mathbf{x}}(s)]\big) = \int_{\mathbb{R}^n} Q(\lambda,t;\mathbf{x}_0)f(\mathbf{x}_0)d\mathbf{x}_0\,, \tag{5.26}$$

где плотность $f(\cdot)$ определяется формулой (3.4). Используя определение плотности $f(\cdot)$, запишем интеграл (5.26) в следующем виде

$$\int_{\mathbb{R}^n} Q(\lambda,t;\mathbf{x}_0)f(\mathbf{x}_0)d\mathbf{x}_0 = \left[\frac{\exp\big(t\,\mathrm{Sp}\,\mathsf{B}\mathsf{S}^2\big)}{(2\pi)^n\det\mathsf{C}\cdot\det\big(\mathbf{1}+\mathsf{G}_+(t)\mathsf{B}\big)}\right]^{1/2}\times$$

$$\times\int_{\mathbb{R}^n}\exp\Big(-\frac{1}{2}\big(\mathbf{x}_0,\Big[\mathsf{C}^{-1}+\mathsf{B}-e^{t\mathsf{D}}\mathsf{B}\big[\mathbf{1}+\mathsf{G}_+(t)\mathsf{B}\big]^{-1}e^{t\mathsf{D}}\Big]\mathbf{x}_0\big)\Big)d\mathbf{x}_0$$

и вычислим его как n-мерный интеграл Пуассона:

$$Q(\lambda,t) = \left[\frac{\exp\big(t\,\mathrm{Sp}\,\mathsf{B}\mathsf{S}^2\big)}{\det\mathsf{C}\cdot\det\big(\mathbf{1}+\mathsf{G}_+(t)\mathsf{B}\big)}\right]^{1/2}\cdot\Big[\det\Big(\mathsf{C}^{-1}+\mathsf{B}-e^{t\mathsf{D}}\mathsf{B}\big[\mathbf{1}+\mathsf{G}_+(t)\mathsf{B}\big]^{-1}e^{t\mathsf{D}}\Big)\Big]^{-1/2} =$$

$$= \left[\frac{\exp\big(t\,\mathrm{Sp}\,\mathsf{B}\mathsf{S}^2\big)}{\det\Big(\mathbf{1}+\mathsf{C}\mathsf{B}-\mathsf{C}e^{t\mathsf{D}}\mathsf{B}\big[\mathbf{1}+\mathsf{G}_+(t)\mathsf{B}\big]^{-1}e^{t\mathsf{D}}\Big)\cdot\det\big(\mathbf{1}+\mathsf{G}_+(t)\mathsf{B}\big)}\right]^{1/2}. \tag{5.27}$$

Возможность распространения интегрирования по $\mathbf{x}_0$ на все пространство $\mathbb{R}^n$ обосновывается также как и при доказательстве Теоремы 8, на основе утверждения Теоремы 7, т.е. переходом в квадратичной форме в показателе экспоненты к общему для всех матриц S, A, V ортонормированному базису их собственных векторов, что возможно в случае их коммутации. ■

6. Заключение. В одномерном случае, когда все матрицы превращаются в числа, формула (5.27) принимает стандартный вид, найденный Зигертом в [14] в случае стандартного процесса Орнштейна – Уленбека, с чем связано название настоящей работы. Эта формула выражается в явной форме на основе элементарных функций. Но уже при $n = 2$, в общем случае, при произвольно выбранных допустимых в рамках постановки задачи матрицах S, A, V, проведение преобразований формулы (5.27), аналогичных одномерному случаю, вызывает определенные вычислительные затруднения. При решении такой задачи сложности возникают уже при определении явного вида матрицы B и, затем, уже при вычислении на его основе явного вида всех матриц, входящих в формулу (5.27).

В связи с найденной формулой (5.27) возникают также другие вопросы, связанные с ее распространением на более широкий класс троек матриц $\mathsf{S}, \mathsf{A}, \mathsf{V}$, определяющих постановку задачи, которая изучалась в настоящей работе. В первую очередь, имеется настоятельная необходимость отказаться от довольно сильного ограничения на выбор этих матриц, заключающегося в их взаимной коммутации. Это ограничение сильно сужает область практической применимости найденной формулы в прикладных задачах, где прибегают к моделированию стохастического поведения системы на основе элементарных гауссовских процессов. Кроме того, основываясь на виде полученного результата, возникает мысль о том, что требование диагонализуемости матрицы A может быть также излишним. Наличие клеток Жордана в каноническом разложении этой матрицы не ограничивает существование тех матриц, которые входят в окончательное выражение. Желательно, чтобы перечисленные проблемы нашли свое решение в результате дальнейших исследований.

References

1. Arato M. 1982. Linear stochastic systems with constant coefficients. A statistical approach. Lecture Notes in Control and Information Sciences. Berlin: Springer-Verlag, 312.

2. Pugachev V.S. 2013. Theory of Random Functions: And Its Application to Control Problems. Elsevier Science, 708.
3. Pugachev V. S., Sinitsin I. N. 2002. Stochastic Differential Systems Analysis and Filtering. World Scientific Publishing Company: Wiley, 928.
4. Gikhman I. I., Skorokhod A. V. 1996. Introduction to the Theory of Random Processes. Courier Corporation, 516.
5. Gikhman I. I., Skorokhod A. V. 2015. The Theory of Stochastic Processes I. Springer-Verlag, 574.
6. Stratonovich R. L. 1963 and 1967. Selected Topics in the Theory of Random Noise. Vols. 1 and 2. Gordon and Breach Science Publisher, New York, Inc.
7. Lavenda B. H., Compiani M. 1983. The Physical Implications of Two Forms of Stochastic Calculi. Lettere al Nuovo Cimento. 38(9): 345–352.
8. Smyth J., Moss P., McClintak P. V. E., Clarckson D. 1983. Ito versus Stratonovich revisited. Physical Letters. 97(3): 95–98.
9. Wong E., Zakai M. 1965. On the convergence of ordinary integrals to stochastic integrals. Ann. Math. Stat. 36: 1560–1564.
10. Doob J. L. 1953. Stochastic Processes. New York: John Wiley & Sons, 608.
11. Ibragimov I. A., Rozanov Yu. A. 1978. Gaussian random processes. New York.: Springer-Verlag, 277.
12. Antosik P., Mikusinski J., Sikorski R. 1973.Theory of distributions. The sequential approach. Amsterdam: Elsevier Scientific Publishing Company.
13. Glazman I. M., Lyubic Yu. I. 2006. Finite-dimensional Linear Analysis: A Systematic Presentation in Problem Form . Courier Corporation, 520.
14. Ziegert A. J. F. 1957. A systematic approach to a class of problems in the theory of noise and other random phenomena, part II. Trans.IRE. 3: 39–44.
15. Slepian D. 1958. Fluctuation of random noise power. Bell Systems Technical Journal. 163–184.
16. Lax M. 1968. Fluctuation and coherence phenomena in classical and quantum physics. New York: Gordon and Beach.
17. Virchenko Yu. P., Mazmanishvili A. S. 1988. Distribution of dissipative losses in an oscillatory circuit excited by white noise. Proceedings of Conference «Statistical Methods in the Theory of Signal Transmission and Transformation», Kiev, 151.
18. Virchenko Yu. P., Mazmanishvili A. S. 1989. Average power distribution for linear system perturbed by white noise. Radio Engrg. Electron. Phys. 35(12): 2546–2549.
19. Virchenko Yu. P., Mazmanishvili A. S. 2004. Study of statistics of quality control functional in the rough surface treatment theory. Functional Materials. 11(1): 20–13.
20. Kac M. 1957. Probability and related topics in physical sciences. with special lectures by G. E. Uhlenbeck, A. R. Hibbs. New York: Interscience Publishers, Inc.
21. Laskin N. V., Mazmanishvili A. S. 1983. Functionals on trajectories of the Ornstein – Uhlenbeck process. Preprint KhFTI AN USSR. Kharkov: KhFTI, 1: 32.
22. Loéve M. 1955. Probability Theory. Princeton, New Jersey: D. Van Nostrand Company Inc.
23. Karhunen K. 1947. Über Linearen Methoden in der Wahrscheinlichkeit Srechung. Ann. Acad. Sci. Fennicae. Ser.A. 1; 2.
24. Virchenko Yu. P., Mazmanishvili A. S. 1989. Statistical properties of the convolution functional on normal Markovian process. ref.: Math.Rev. 90d:60043. Doklady Akademii nauk Ukr. SSR, ser.A. 1: 14–16.
25. Virchenko Yu. P., Mazmanishvili A. S. 1990. Probability distribution of the random convolution functional on normal markovian process. Problems Information Transmission. 26(3): 96–101.
26. Virchenko Yu. P., Mazmanishvili A. S. 1996. Statistical properties of the cross-correlation functional on the trajectories of two Ornstein-Uhlenbeck processes. Radiophysics. 39(7): 916–924.

27. Virchenko Yu. P., Mazmanishvili A. S. 1996. Distribution of the cross-correlation functional from the trajectories of two Ornstein-Uhlenbeck processes. Doklady Akademii nauk Ukr. SSR. 4: 27–30.

28. Virchenko Yu. P., Mazmanishvili A. S. 1987. The probability distribution density of the energy functional from the trajectories of the stochastic Ornstein-Uhlenbeck process . Moscow: In-t Atominform, 26p.

29. Virchenko Yu. P., Mazmanishvili A. S. 1984. Statistics of functionals defined on solutions of stochastic differential equations. Preprint DonFTI AN USSR - 84-8, Donetsk, 16p.

30. Korolyuc V. S., Portenko N. I., Skorochod A. V., Turbin A. F. 1985. Handbook on probability theory and mathematical statistics . Moscow: Nauka, (in Russian).

31. Furutsu K. 1963. On the statistical theory of electromagnetic waves in a fluctuating medium (I). J. Res. Nat. Bur. Standards. Sect. D (Radio Propagation). 67: 303–311.

32. Nonikov E. A. 1964. Functionals and method of random forces in the turbulence theory. ZhETF. 47: 1919–1927.

33. Palin V. V. 2008. On solvability of squared matrix equations. Bulletin of Moscow University. ser.1, Mathematics, Mechanics. 6: 36–41.

34. Gantmakher F. R. 1959. The theory of matrices. New York: Chelsea Pub. Co.

Получена 17.05.2021

Вирченко Юрий Петрович – доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры теоретической и математической физики института инженерных и цифровых технологий Белгородского государственного национального исследовательского университета

http://orcid.org/0000-0002-5413-6179
ул. Королева, 2а, Белгород, Россия, 308012
E-mail: virch@bsu.edu.ru

Витохина Наталья Николаевна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики факультета математики и естественнонаучного образования Белгородского государственного национального исследовательского университета

http://orcid.org/0000-0003-1986-299X
ул. Победы, 85, Белгород, Россия, 308015
E-mail: vitohina@bsu.edu.ru