Прикладная математика & Физика, 2021, том 53, №4. С. 312–316.

ФИЗИКА. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 519.218.5 DOI 10.52575/2687-0959-2021-53-4-312-316
MSC 60G10, 60H15

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ КРИТИЧЕСКИХ НАПРЯЖЕНИЙ РАЗРЫВА ОБРАЗЦОВ ПОРИСТОГО МАТЕРИАЛА

Ю. П. Вирченко, И. М. Шаполова

Белгородский государственный технологический университет им. В. Г. Шухова,
г. Белгород, 308012 Россия

Белгородский государственный национальный исследовательский университет,
г. Белгород, 308015, Россия

E-mail: virch@bsu.edu.ru

Аннотация. В рамках феноменологических общефизических представлений строится статистическая модель для описания условий зарождения таких микротрещин в объемных образцах пористых твердотельных материалов, которые под действием приложенной одноосной внешней нагрузки приводят к поперечному разрыву. На основе этой модели вычислена вероятность разрыва образцов как функция концентрации, находящихся в них пор.

Ключевые слова: закон Гриффитса, концентрация, микротрещина, предел прочности, хрупкое разрушение, распределение пор, статистическая независимость.

Для цитирования: Вирченко Ю. П., Шаполова И. М. 2021. Распределение вероятностей критических напряжений разрыва образцов пористого материала. Прикладная математика & Физика 53(4): 312–316. DOI 10.52575/2687-0959-2021-53-4-312-316.

PROBABILITY DISTRIBUTION OF CRITICAL TENSIONS OF SAMPLE BREAK OF POROUS MATERIAL

Yuri Virchenko, Irina Shapolova

Belgorod State Technological University named after V. G. Shukhova,
Belgorod, 308012 Russia
Belgorod State National Research University, Belgorod, 308015 Russia
E-mail: virch@bsu.edu.ru
Received December, 9, 2021

Abstract. Porous materials are studied in frameworks of phenomenological representations of general physics. The statistical model for theoretical description of origin conditions of such microcracks in volume samples which leads to their transverse break is proposed. The break occurs due to the cracks growth when the external directed ultimate elastic power is applied which exceeds the material ultimate strength. On the basis of the model the probability of fragile destruction of the sample is calculated as the function of pores concentration.

Key words: Griffith' law, concentration, microcrack, ultimate strength, pores distribution, fragile destruction, statistical independence.

For citation: Virchenko Yu. P., Shapolova I. M. 2021. Probability distribution of critical tensions of sample break of porous material. Applied Mathematics & Physics. 53(4): 312–316. (in Russian). DOI 10.52575/2687-0959-2021-53-4-312-316.

1. Введение. В работе, в рамках феноменологических представлений, с использованием теории Гриффитса [9] роста трещин в твердом теле, предлагается статистическая модель для описания равновесного состояния хрупкого твердотельного материала, находящегося под внешней одноосной нагрузкой, растягивающей образец. Построение модели основано на представлении о том, что к разрыву образца, который происходит катастрофическим образом в течение очень короткого промежутка времени, приводит очень быстрый рост под воздействием нагрузки какой-либо из микротрещин, длина которой превосходит некоторую критическую величину. Рассматривается типичная ситуация в практике технологического использования твердотельных материалов, когда в образце имеются микротрещины с размером порядка $1 \div 10$Нм. Они возникают либо вследствие несовершенства технологии приготовления материала, либо вследствие длительного воздействия на него внешней нагрузки постоянной и/или переменной в изменяющихся термодинамических условиях. Эти микротрещины играют роль «зародышей» из которых развивается разрыв образца при достаточно большой величине внешней нагрузки. Наличие зародышей для разрыва образца является необходимым условием, указывающим ту пространственную точку, в которой этот разрыв происходит. В идеальной твердотельной кристаллической структуре разрыв образца, с чисто теоретической точки зрения, мог бы происходить только посредством одновременного рассыпания его на отдельные атомы.

Так как распределение любого рода дефектов в твердом теле носит статистический характер, то любая математическая модель, которая предназначена для установления функциональных связей между существующими в образце упругими напряжениями и характеристиками самой среды, в частности, характеристиками ее термодинамического состояния, должна быть сформулирована на основе понятий теории вероятностей. Такого рода теоретический подход к описанию свойств реальной твердотельной структуры по отношению к внешним механическим воздействиям имеет уже большую историю (см., например, [6]-[2]). Именно такой статистический подход должен быть применен при теоретическом предсказании связи между величиной упругих напряжений, приводящих к разрушению образца материала как целого, то есть предела прочности, и характеристиками среды. В настоящей работе мы строим модель именно такого типа.

2. Физическая картина развития разрыва под нагрузкой. Мы исходим из представления о том, что разрыв образца происходит в результате роста имеющихся в твердотельной среде микротрещин, под воздействием механических напряжений, ориентированных поперек их расположения. Трещины, с которых может начать развиваться процесс разрыва, должны иметь достаточно большую величину, превосходящую некоторую критическую d_*. По своему физическому замыслу, в конструкцию нашей модели закладывается предположение о том, что в тех материалах, к которым допустимо ее применение, возникновение трещин такой достаточно большой величины связано с наличием в образце точечных дефектов в виде пор очень малого размера r. Таковыми являются образцы материалов с достаточно большой величиной хрупкости. Следовательно, основную роль в формировании величины предела прочности в нашей модели играет наличие дефектов в виде пор. Частный случай такой модели изучался ранее в [13].

Поры всегда присутствуют в образце с той или иной концентрацией ρ, которая зависит как от физической природы материала, так и от технологии приготовления образца. В нашей модели величина ρ является свободным феноменологическим параметром. Поэтому в рамках предлагаемой модели имеет смысл задача о зависимости предела прочности от величины ρ.

Так как с точки зрения технологии приготовления материала можно управлять только лишь концентрацией пор, то они распределены в образце случайным образом и обладают случайным размером с некоторым характерным средним значением. Величина концентрации ρ формируется посредством усреднения по расположениям пор. Такое усреднение осуществляется по пространственным областям Σ с макроскопическими, по отношению размеру пор, линейными размерами. Таким образом, размер d областей Σ должен быть велик по сравнению со средним размером r пор, $d \gg r$ и средним расстоянием l между ними, $d \gg l$ и, в то же время, он должен быть мал по сравнению с характерным размером неоднородностей в распределении напряжений в материале, так как именно на неоднородностях механического напряжения внутри образца формируется зародыш его разрыва.

В каждой пространственной области Σ с указанными размерами, когда размер $d \sim 10l$, неизбежно имеются флуктуации числа $\tilde{n}_\Sigma$ пор достаточно заметной величины. Если флуктуация Δn_Σ в какой-либо области Σ с размером d такова, что в ней происходит слияние находящихся в ней пор под действием растягивающих напряжений, действующих на границах пор внутри области Σ нагрузки, прикладываемой к границе образца, то при таком слиянии образуется микротрещина с линейным размером $\sim d$. При этом d превосходит критическую величину d_*, о которой речь шла выше. Тогда, вследствие такого слияния пор возникает процесс быстрого роста этой трещины с длиной, превосходящей критическую, при воздействии внешней нагрузки на материал. В результате, микротрещина превращается в макротрещину. Последняя очень быстро разрастается и ее линейный размер достигает величины, сравнимой с линейным размером самого образца, то есть происходит его разрыв. Таким образом, критическому размеру микротрещины соответствует критическая величина флуктуации концентрации. Как следствие, критическая величина флуктуации концентрации пор связана с величиной внешней одноосной нагрузки. Если такая зависимость известна, то можно установить предел прочности материала – ту критическую величину внешней нагрузки, которая приводит к разрушению образца. Таким образом, в описанном выше теоретическом походе предел прочности материала связывается с критической величиной флуктуации пор в материале.

3. Статистическая модель разрушения хрупкого материала. Пусть поры случайным образом распределены по объему исследуемого образца. Размеры пор будем предполагать настолько малыми, что ими можно пренебречь по сравнению со средним расстоянием между ними, $l \gg r$. В этом случае будем моделировать случайное расположение пор по образцу Ω посредством наборов случайно расположенных геометрических точек в области пространства, занимаемой этим образцом. При этом число $\tilde{n}$ точек в этих наборах будет случайным и, точно так же, положение в Ω каждой точки из набора также является случайным. Таким образом, расположение пор в наборе точек $\langle \tilde{\mathbf{x}}_1, \tilde{\mathbf{x}}_2, ..., \tilde{\mathbf{x}}_{\tilde{n}} \rangle \in \Omega$ представляет собой, с математической точки зрения, точечное случайное поле. Так как $l \gg r$, то будем считать положение каждой точки статистически независимым от расположений всех других точек из этого набора. Ввиду макроскопического размера образца по сравнению с l и, как следствие, малого влияния его границы на расположение пор в нем, естественно считать, что попадание каждой точки в любую малую область $\Sigma \subset \Omega$ не имеет никакого предпочтения перед любой другой областью $\Sigma' \subset \Omega$ с точно такой же формой и размерами. Иными словами, мы полагаем, что распределение каждой фиксированной случайной точки из набора $\langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_{\tilde{n}} \rangle$, описывающего расположение пор по образцу, является *равновозможным*, то есть она имеет плотность распределения $|\Omega|^{-1}$.

Из сделанных предположений следует, что условная плотность распределения всего набора из $\tilde{n}$ точек при условии, что число $\tilde{n}$ неслучайно, $\tilde{n} = n$, равна $|\Omega|^{-n}$ или, с учетом физической неразличимости точек набора $(n!)^{-1}|\Omega|^{-n}$. Это означает, что расположение пор в большом образце мы моделируем *безгранично делимым пуассоновским* точечным случайным полем [11]. Вводя характеристику такого поля — объемную концентрацию $\rho = N/|\Omega|$ (т.е. их плотность), вероятность $\mathsf{P}\{\tilde{n}_\Sigma = n\}$ попадания числа n в каждую фиксированную область Σ определяется распределением Пуассона

$$\mathsf{P}\{\tilde{n}_\Sigma = n\} = \frac{(\rho|\Sigma|)^n}{n!} \exp(-\rho|\Sigma|) \,. \tag{1}$$

С физической точки зрения, использование такого распределения вероятностей для случайного числа $\tilde{n}_\Sigma$ тем более оправдано, если суммарный объем пор по образцу намного меньше объема $|\Omega|$ самого образца, в силу малости объема каждой поры и, как следствие, малости объемной концентрации $\rho = N/|\Omega|$ пор.

Заметим, что используемая нами модель материала со случайным образом распределенными в нем дефектами является частным случаем вероятностных моделей, используемых в математической и теоретической физике (см. [8], [15]).

Определив распределение вероятностей для расположения пор в Ω, принципиально, мы в состоянии подсчитать вероятность появления той величины критической флуктуации $\Delta\tilde{n}_\Sigma$, которая определяет возможность появления трещины требуемого размера в образце в зависимости от величины концентрации ρ. Однако, это еще не дает возможность связать эту величину с величиной упругого напряжения, вызывающего рост трещины. Для установления связи между критическим напряжением p_* и концентрацией пор ρ, приводящей к росту трещины, воспользуемся следующим законом Гриффитса.

Пусть d – критическая (флуктуационная) длина трещины, начиная с которой начиняется ее развитие последней. Из теории Гиффитса роста трещины следует, что

$$d = d_0\,(k/p)^{\alpha/2} \,, \tag{2}$$

где $\alpha > 0$ и k – т.н. постоянная Гриффитса. Такая форма зависимости d от p согласуется с представлением о том, что при $p \to \infty$ возможно развитие трещины со сколь угодно малых размеров d, а при $p = 0$ трещиной формально можно считать разломы в образце, имеющие макроскопические размеры. Что касается практического использования формулы (2), то в теории хрупкого разрушения часто используется модель с $\alpha = 4$.

Свяжем теперь критическую длину трещины d с концентрацией пор, которую будем называть критической. Для этого рассмотрим кубическую область Σ с размером d. Будем считать, что трещина под напряжением p, приложенным в направлении одного из ребер, зарождается в этой ячейке, если в ней количество пор превышает определенную величину n_*. Пусть δ — характерное расстояние между ионами материала такое, что при его превышении возникает явление *охрупчивания.* Для металлов это расстояние равно, по порядку величины, среднему расстоянию между атомами в жидком состоянии. Тогда критическую концентрацию n_* определим из требования, чтобы в области Σ все атомы находились на расстоянии, не меньшем чем δ. Таким образом,

$$n_* = (d/\delta)^3 \,. \tag{3}$$

Таким образом, рост трещины при действии внешней одноосной нагрузки на образец Ω хрупкого материала начинается в том случае, если в области Ω существует такой кубик Σ с длиной ребра d, в котором имеется $\tilde{n}$ пор, т. е. случайных точек пуассоновского точечного поля, которое превосходит n_*.

Определение связи (3) завершает построение статистической модели для вычисления вероятности P случайного события, что произойдет разрыв образца Ω, имеющего форму параллелепипеда при действии на его противоположные торцы растягивающей силы. Это случайное событие Γ с математической точки зрения определяется следующим образом. Свяжем с каждым кубом $\Sigma \subset \Omega$ характеризующий его радиус-вектор $\mathbf{x} \in \Omega$, который соответствует центру этого куба, то есть куб, связанный с $\mathbf{x}$, будем обозначать как $\Sigma(\mathbf{x})$. Тогда $\Gamma = \{\exists(\mathbf{x} \in \Omega)(|\tilde{n}_\Sigma(\mathbf{x})| > n_*)\}$.

Сделаем одно очень важное физическое замечание. Сконструированная модель может претендовать только на вычисление этой вероятностей для разрыва массивного образца, размеры которого, по порядку величины, по всем направлениям одинаковы. Она ни в коем случае не применима для теоретического анализа разрыва тонких пленок материала.

Математическая задача, связанная с построенной моделью, состоит в определении $P = \mathsf{P}(\Gamma)$. Так как число n_* является функцией от p, то от этой величины внешнего приложенного механического напряжения зависит событие Γ и, следовательно, его вероятность P. Кроме того, эта вероятность зависит от ρ, так как от этого параметра зависит распределение вероятностей случайного числа $\tilde{n}_\Sigma(\mathbf{x})$. Таким образом, в результате решения вероятностной задачи, получим функцию $P \equiv P(p, \rho; V)$, где указана зависимость вероятности P от полного объема образца $V = |\Omega|$. При этом зависимость от объема должна быть такой, что $P(p, \rho; V) \to 1$ при $V \to \infty$ и ρ =const. Это связано с тем, что вероятность разрушения P образца должна возрастать, приближаясь к единичной вероятности при неограниченном возрастании его размеров, то есть образец должен наверняка быть разрушенным. Такое свойство функции $P(p, \rho; V)$ в материаловедении называется *размерным эффектом.*

Учитывая тот факт, что линейные размеры Ω очень велики по сравнению с остальными имеющимися в модели параметрами размерности длины, то при решении поставленной задачи интерес представляет не точное значение функции $P(p, \rho, V)$, а ее асимптотическое поведение при $V \to \infty$. Такая ситуация аналогична той, которая возникает при изучении термодинамических флуктуаций в статистической физике, когда переход к термодинамическому пределу приводит к полному исчезновению флуктуаций и, соответственно, их распределения вероятностей. Поэтому интерес представляет изучение именно асимптотических отклонений величин от *термодинамически предельных* значений (см., например, [12]). Но имеется и существенное отличие. Так как $P(p, \rho, V) \to 1$ при $V \to \infty$, то, в отличие от задач статистической механики, решением задачи нужно считать следующий член асимптотического разложения при $V \to \infty$.

4. Анализ статистической модели. Данная выше формулировка случайного события Γ неудобна для вычисления его вероятности, поэтому желательна эквивалентная формулировка этого случайного события в терминах какой-либо неслучайной величины, связанной с $\tilde{n}_{\Sigma(\mathbf{x})}$. Зафиксировав размеры каждого куба $\Sigma(\mathbf{x})$, заметим, что $\tilde{n}_{\Sigma(\mathbf{x})}$ представляет собой сепарабельную случайную функцию, распределение вероятностей которой индуцируется распределением вероятностей пуассоновского точечного случайного поля $\langle \tilde{x}_1, \tilde{x}_2, ..., \tilde{x}_{\tilde{n}} \rangle$, то есть все ее частные распределения вероятностей (см., например, [7]) могут быть вычислены на основе распределения вероятностей точечного поля $\langle \tilde{x}_1, \tilde{x}_2, ..., \tilde{x}_{\tilde{n}} \rangle$.

Заметим, что событие Γ формулируется эквивалентным образом в терминах случайного поля $\tilde{n}(\mathbf{x}) \equiv \tilde{n}_{\Sigma(\mathbf{x})}$, а именно, $\Gamma = \{\max\{\tilde{n}(\mathbf{x}); \mathbf{x} \in \Omega\} > n_*\}$. Таким образом, для решения задачи об определении предела прочности образца хрупкого материала, в рамках предложенной модели, нужно определить распределение вероятностей максимума случайной функции $\{\tilde{n}(\mathbf{x}); \mathbf{x} \in \Omega\}$ (см., по этому поводу также [4]). Следовательно,

$$P(p, \rho, V) = \mathsf{P}\{\max\{\tilde{n}(\mathbf{x}); \mathbf{x} \in \Omega\} > n_*\}\,.$$

Так как значения случайной функции $\{\tilde{n}(\mathbf{x}); \mathbf{x} \in \Omega\}$ не являются, вообще говоря, статистически независимыми, то решение такой задачи не сводится к известным решениям [10] для независимых случайных величин.

5. Заключение. В результате проведенного теоретического исследования нами построена теоретическая статистическая модель, описывающая явление разрушения хрупкого материала под воздействием на него внешней одноосной нагрузки. В этой модели величина критической флуктуации концентрации пор внутри образца материала связана с величиной самой концентрации ρ и образование микротрещины критического размера есть следствие достаточно большой величины ρ. На основе закона Гриффитса роста трещины в твердотельном образце, введена связь между концентрацией пор и критическим механическим напряжением (пределом разрывной прочности) материала p_*. Построенная модель претендует на предсказание количественных характеристик хрупкого разрушения материала.

References

1. Batdorf S. B. 1973. A statistical theory for failure of brittle materials under combined stresses. AIAA Paper. 381: 1-5.

2. Batdorf S. B. 1975. Fracture statistics of brittle materials with intergranular cracks. Nucl. Eng. and Des. 35(3): 349-360.

3. Chechulin B. B. 1963. Scale factor and statistical nature of metal strengh. Moscow, Metallurizdat, 120.

4. Epstein B. 1948. Application of the theory of extreme values in fracture problems. Amer. Stat. Assoc. J. 13(9): 403-412.

5. Fisher J. C., Hollomon J. M. 1947. A statistical theory of fracture. Metals Technol. 14(5): 1-16.

6. Frenkel Ya. I., Kontorova T. A. 1943. A statistical theory of the brittle strength of real crystals. J. Phys. Moscow. 7: 108- 120.

7. Gardiner C. W. 1985. Handbook of Stochastic Methods for Physics, Chemistry and the Natural Sciences, 2d ed. Berlin-Heidelberg-New York, Springer-Verlag, 436.

8. Gilbert E. N. 1962. The Poisson random medium in statistical physics. Ann. Math. Statistics. 33(3): 958-968.

9. Griffith A. A. 1921. The Phenomenon of Rupture and Flow in Solids. Phil. Trans. Roy. Soc. of London. A221: 163-198.

10. Gumbel E. 1962. Statistics of Extremes. New York, Columbia University Press, 540.

11. Matthes K., Kerstan J., Mecke J. 1978. Infinitely Divisible Point Processes. New York, Chichester, 360.

12. Minlos R. A. 2002. Inroduction into mathematical statistical physics. Moscow, MCNMO, 112.

13. Virchenko Yu. P., Sheremet O. I. 2000. To the Statistical Theory of Brittle Destruction of Solid Media. Dopovidi NANU. 7: 92-95.

14. Weibull W. 1949. A statistical representation of fatigue failure in solids. Trans. Roy. Inst. Tech. (Stocholm): 27-43.

15. Ziman J.M. 1979. Models of disorder. The theoretical physics of homogeneously disordered systems. New York, Cambridge University Press, 420.

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.
Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Получена 09.12.2021

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Вирченко Юрий Петрович – доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры програмного обеспечения вычислительной техники и автоматизированных систем Белгородского государственного технологического университета им. В. Г. Шухова

http://orcid.org/0000-0002-5413-6179
Ул. Костюкова, 46, Белгород, 308012, Россия
E-mail: virch@bsu.edu.ru

Шаполова Ирина Михайловна – аспирант второго года обучения института инженерных и цифровых технологий Белгородского государственного национального исследовательского университета
Ул. Победы, 85, Белгород, 30801, Россия
E-mail: shapolova@bsu.edu.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Yuri Virchenko – PhD in Physics and Mathematics, Professor,Professor of the Department of Software for Computing Machinery and Automated Systems, Belgorod State Technological University named after V. G. Shukhova, Belgorod, Russia

Irina Shapolova – postgraduate student of the second year of study at the Institute of Engineering and Digital Technologies, Belgorod State National Research University, Belgorod, Russia