Прикладная математика & Физика, 2022, том 54, №1. С. 28–32.

УДК 517.958 : 531.33 DOI 10.52575/2687-0959-2022-54-1-28-32
MSC 35J05, 35J10, 35K05, 35L05

МЕТОД ДВУХМАСШТАБНОГО РАЗЛОЖЕНИЯ В ЗАДАЧЕ О КОЛЕБАНИЯХ ТЕМПЕРАТУРЫ В МЕРЗЛОМ ГРУНТЕ

А. М. Мейрманов

(*Статья представлена членом редакционной коллегии А. В. Носковым*)

Национальный Исследовательский Московский Государственный Университет,
Москва, 129337, Россия

E-mail: meirmanovam@mgsu.ru

Аннотация. В работе исследуется задача о динамике мерзлого грунта при изменении внешней температуры на границе рассматриваемой физической области. Согласно общепринятой схеме, независимо предложенной Р. Барриджем и Дж. Келлером и Э. Санчес-Паленсией в 1980 году, в первую очередь формулируется микроскопическая математическая модель, описывающая физический процесс на микроскопическом уровне уравнениями классической механики Ньютона сплошных сред. Естественным малым параметром здесь является средний безразмерный диаметр пор твердого скелета грунта. В этой модели изменение температуры среды регулируется задачей Стефана, а динамика жидкости в порах абсолютно твердого скелета грунта подчинена уравнениям Стокса для вязкой несжимаемой жидкости. Вторым и основным моментом метода является вывод макроскопических уравнений физического процесса, получающихся предельным переходом при стремлении малого параметра к нулю (усреднении). Целью настоящей работы является вывод макроскопических уравнений (усреднение), описывающих динамику мерзлого грунта, с помощью метода двухмасштабного разложения.

Ключевые слова: задача Стефана, уравнения Стокса вязкой сжимаемой жидкости, усреднение

Для цитирования: Мейрманов А. М. 2022. Метод двухмасштабного разложения в задаче о колебаниях температуры в мерзлом грунт. Прикладная математика & Физика. 54(1): 28–32. DOI 10.52575/2687-0959-2022-54-1-28-32

TWO-SCALE EXPANSION METHOD IN THE PROBLEM OF TEMPERATURE OSCILLATIONS IN FROZEN SOIL

Anvarbek Meirmanov

Article submitted by a member of the editorial board A. V. Noskov

Moscow State University of Civil Engineering,
Moscow 129337, Russia
E-mail: meirmanovam@mgsu.ru
Received February, 16, 2022

Abstract. The paper investigates the problem of the dynamics of frozen soil with a change in the external temperature at the boundary of the physical domain under consideration. According to the generally accepted scheme, independently proposed by R. Barridge and J. Keller and E. Sanchez-Palencia in 1980, we first formulate a microscopic mathematical model, that describes the physical process at the microscopic level by the equations of classical Newtonian mechanics of continuous media. A natural small parameter here is the average dimensionless diameter of the pores of the solid skeleton. In this model the change in the temperature of the medium is controlled by the Stefan problem, and the dynamics of fluid in the pores of an absolutely rigid skeleton obeys the Stokes equations for a viscous incompressible fluid. The second and main point of the method is the derivation of the macroscopic equations of the physical process, which are obtained by passing to the limit as a small parameter tends to zero (homogenization). The purpose of this work is to derive macroscopic (homogenized) equations describing the dynamics of frozen soil using the two-scale expansion method.

Key words: The Stefan problem, Stokes equations for a viscous compressible fluid, homogenization

For citation: Anvarbek Meirmanov. 2022. Two-scale expansion method in the problem of temperature oscillations in frozen soil. Applied Mathematics & Physics. 54(1): 28–32. (in Russian) DOI 10.52575/2687-0959-2022-54-1-28-32

---

1. Введение. Настоящее исследование посвящено приложению метода двухмасштабного разложения в задаче о фазовых переходах в мерзлом грунте при изменении температуры воздуха на поверхности Земли.

В настоящее время для описания динамики мерзлого грунта существует большой спектр математических моделей, опосредовано описывающих рассматриваемый физический процесс на макроскопическом уровне (см. [3], [2] и цитируемую там литературу). В отличии от микроскопических моделей, в макроскопических моделях характерными размерами являются метры или десятки метров. В силу этого указанные модели не различают микроструктуру сплошной среды, поскольку в такой модели в каждой точке сплошной среды присутствует как горная порода (твердый скелет), так и жидкость в порах этого скелета. Все такие модели строятся по одному принципу. Динамика жидкости, как правило, управляется системой уравнений фильтрации Дарси или какой-либо ее модификацией, а теплоперенос в грунте описывается модификациями уравнения теплопроводности. Главным в этих постулатах является вид коэффициентов уравнений. Как раз здесь и наблюдается большое разнообразие, зависящее от вкусов и пристрастий авторов моделей. Оно вполне объяснимо, поскольку основной механизм физического процесса сосредоточен на неизвестной (свободной) границе между жидкой и твердой фазами флюида в порах и никак не прописан в предлагаемых макроскопических моделях. Именно там происходит изменение геометрии по́рового пространства, и именно там возникает поток тепла внутрь несущей жидкости. Все эти принципиально важные изменения происходят на микроскопическом уровне, соответствующему среднему размеру пор или трещин в горных породах, в то время как любая из предлагаемых макроскопических моделей оперирует с совсем другими (на порядки большими) масштабами и поэтому не различает ни свободную границу, ни особенностей взаимодействия жидкой и твердой фаз по́рового флюида, что и объясняет большое разнообразие макроскопических математических моделей. У авторов таких моделей просто нет ни точного метода описания физических процессов на микроскопическом уровне на базе фундаментальных законов механики сплошных сред и химии, ни возможности учесть эту микроструктуру в макроскопических моделях. Поэтому им приходится ограничиваться некими умозрительными соображениями.

При всем этом возникает естественный вопрос, если есть несколько макроскопических моделей, описывающих один и тот же физический процесс, какая из них наиболее адекватно отображает это процесс? Где здесь критерий истинности? Говорить об эксперименте не имеет никакого смысла, поскольку в каждой такой модели достаточно свободных параметров, никак не привязанных ни к геометрии пласта (как, например, пористость), ни к физическим характеристикам процесса (как, например, вязкости и плотности фильтрующихся жидкостей) и вариацией этих параметров можно добиться совпадения с любым экспериментом.

R. Burridge и J. B. Keller [4] были первыми, кто на примере процессов акустики и фильтрации жидкости в горных породах с периодической структурой объяснили, что адекватное описание физических процессов на макроскопическом уровне возможно если только:

(а) рассматриваемый физический процесс на микроскопическом уровне описывается с помощью классических уравнений механики сплошных сред (**Точная модель**),

(б) выделен набор малых безразмерных параметров,

(в) макроскопические математические модели есть строгие асимптотические пределы (усреднения) точных математических моделей на микроскопическом уровне при стремлении выделенных малых параметров к нулю.

В настоящей работе мы будем следовать этой схеме, используя метод двухмасштабного разложения и теорему Нгуетсенга [7] и получим макроскопическую математическую модель, описывающую колебания температуры в мерзлом грунте.

2. Постановка задачи. Для простоты изложения предположим, что грунт является абсолютно твердым телом (скорости скелета грунта тождественно равны нулю) и в уравнении притока тепла отсутствует конвективное слагаемое. Последнее предположение основано на известном факте о средней скорости фильтрации по́ровой жидкости [1]. Твердый скелет Ω_s^ε и подобласть $\Omega_{f,s}^\varepsilon(t)$ по́рового пространства Ω_f^ε, занятая твердой фазой флюида, считаются абсолютно твердыми телами. То есть перемещения и скорости в Ω_s^ε и в $\Omega_{f,s}^\varepsilon(t)$ равны нулю. Мы специально используем термин «флюид», поскольку выражение «жидкая фаза жидкости» звучит как «масло масляное».

В этом случае математическая модель на микроскопическом уровне состоит из уравнений Стокса

$$\nabla\cdot\mathbb{P}^\varepsilon=0,\ \ \mathbb{P}^\varepsilon=\alpha_\mu^\varepsilon\,\mathbb{D}(x,\boldsymbol{v}^\varepsilon)-p^\varepsilon\,\mathbb{I},\tag{1}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{v}^\varepsilon=0\tag{2}$$

для скорости $\boldsymbol{v}^\varepsilon$ и давления p^ε жидкой фазы вязкого несжимаемого флюида в подобласти $\Omega_{f,f}^\varepsilon(t)$ по́рового пространства Ω_f^ε, занятой жидкой фазой флюида.

В области $\Omega=\Omega_f^\varepsilon\cup S^\varepsilon\cup\Omega_s^\varepsilon$, $S^\varepsilon=\Omega_f^\varepsilon\cap\Omega_s^\varepsilon$ энтальпия H^ε и температура ϑ^ε сплошной среды связаны уравнением притока тепла

$$\frac{\partial H^\varepsilon}{\partial t}=\nabla\cdot(\nabla\,\vartheta^\varepsilon-\boldsymbol{v}^\varepsilon\,\vartheta^\varepsilon).\tag{3}$$

На границе $S=\partial\Omega$

$$\vartheta^\varepsilon=\vartheta_0(\boldsymbol{x}),\ \ \mathbb{P}^\varepsilon\cdot\boldsymbol{n}=-p_0(\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{n}.\tag{4}$$

Будем считать, что область $\Omega^\varepsilon_{f,s}(0)$ непуста и свободная (неизвестная) граница $\Gamma^\varepsilon(t)$, $\Gamma^\varepsilon(t) = \Omega^\varepsilon_{f,s}(t) \cap \Omega^\varepsilon_{f,f}(t)$, разделяющая жидкую и твердую компоненты $\Omega^\varepsilon_{f,s}(t)$ и $\Omega^\varepsilon_{f,f}(t)$, в начальный момент времени не имеет общих точек с границей S^ε. В этом случае область $Q^\varepsilon_s(t) = \overline{\Omega}^\varepsilon_f \cup S^\varepsilon \cup \Omega^\varepsilon_{f,s}(t)$ неподвижна и в ней перемещения и скорости $\boldsymbol{v}^\varepsilon$ сплошной среды равны нулю. Поэтому на свободной границе $\Gamma^\varepsilon(t)$ выполнено краевое условие

$$\boldsymbol{v}^\varepsilon = 0. \tag{5}$$

Температура ϑ^ε непрерывна на свободной границе и совпадает с температурой фазового перехода флюида ϑ^*

$$\vartheta^\varepsilon(\boldsymbol{x}_0 + 0, t) = \vartheta^\varepsilon(\boldsymbol{x}_0 - 0, t). \tag{6}$$

Кроме того, на свободной границе выполнено условие Стефана [5]

$$\frac{\partial \vartheta^\varepsilon}{\partial N}(\boldsymbol{x}_0 - 0, t) - \frac{\partial \vartheta^\varepsilon}{\partial N}(\boldsymbol{x}_0 + 0, t) = D_N, \tag{7}$$

позволяющее определить положение свободной границы.

Задача (1) – (7) замыкается уравнением состояния

$$\vartheta^\varepsilon = \Phi(H^\varepsilon), \tag{8}$$

и начальными условиями

$$\vartheta^\varepsilon(\boldsymbol{x}, t) = \vartheta_0(\boldsymbol{x}), \;\; \Gamma^\varepsilon(0) = \Gamma_0. \tag{9}$$

В (1) – (9) $\mathbb{D}(x, \boldsymbol{u}) = \dfrac{1}{2}(\nabla \boldsymbol{u} + \nabla^* \boldsymbol{u})$ – симметрическая производная вектор-функции $\boldsymbol{u}$;

$\Phi(s) = s$ при $s \leqslant 0$, $\Phi(s) = 0$ при $0 \leqslant s \leqslant \vartheta_*$, $\Phi(s) = s - \vartheta_*$ при $s \geqslant \vartheta_*$;

$\mathbb{I}$ – единичный тензор (единичная матрица);

$\boldsymbol{n}$ – единичный вектор внешней по отношению к области Ω нормали;

$\boldsymbol{N}$ – единичный вектор внешней по отношению к области Ω_f нормали;

$$u(\boldsymbol{x}_0 + 0, t) = \lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0} u(\boldsymbol{x}, t), \;\; \boldsymbol{x} \in \Omega^\varepsilon_{f,f}(t), \;\; \boldsymbol{x}_0 \in \Gamma^\varepsilon(t),$$

$$u(\boldsymbol{x}_0 - 0, t) = \lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0} u(\boldsymbol{x}, t), \;\; \boldsymbol{x} \in \Omega^\varepsilon_{f,s}(t), \;\; \boldsymbol{x}_0 \in \Gamma^\varepsilon(t);$$

$\alpha^\varepsilon_\mu = \dfrac{2\,\mu}{L\, g\, t_*\, \rho_f}$, L – характерный размер рассматриваемой области, t_* характерное время длительности физического процесса.

3. Эквивалентная запись математической модели (1) – (9) в виде интегральных тождеств. Для записи задачи (1) – (9) в виде интегральных тождеств, эквивалентных исходной задаче, введем характеристическую функцию $\chi^\varepsilon(\boldsymbol{x}, t) = \chi(\boldsymbol{x}, t, \dfrac{\boldsymbol{x}}{\varepsilon}$ области $\Omega^\varepsilon_{f,f}(t)$, определяемую равенствами $\Omega^\varepsilon_{f,f}(t) = \{\boldsymbol{x} \in \Omega : \chi^\varepsilon(\boldsymbol{x}, t) = 1\}$.

Здесь функция $\chi(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y})$ – 1-периодическая по переменной $\boldsymbol{y}$.

В этом случае интегральные тождества

$$\int\int_{\Omega_T} \chi^\varepsilon \left(\alpha^\varepsilon_\mu \mathbb{D}(x, \widetilde{\boldsymbol{v}}^\varepsilon) - \widetilde{p}^\varepsilon\, \mathbb{I}\right) : \mathbb{D}(x, \boldsymbol{\varphi})\, dxdt = -\int\int_{\Omega_T} \nabla\, p_0 \cdot \boldsymbol{\varphi}\, dxdt, \tag{10}$$

$$\int\int_{\Omega_T} \chi^\varepsilon\, \boldsymbol{v}^\varepsilon \cdot \nabla\psi\, dxdt = 0 \tag{11}$$

и

$$\int_\Omega H^\varepsilon(\boldsymbol{x}, t_0)\, \xi(\boldsymbol{x}, t_0) dx - \int_\Omega H^\varepsilon(\boldsymbol{x}, 0)\, \xi(\boldsymbol{x}, 0) dx + \int_0^{t_0}\int_\Omega (-H^\varepsilon \frac{\partial \xi}{\partial \tau} + \nabla\xi \cdot\, (\nabla\, \vartheta^\varepsilon - \boldsymbol{v}^\varepsilon\, \vartheta^\varepsilon) dxd\tau = 0, \tag{12}$$

справедливые для произвольных функций $\boldsymbol{\varphi}$, ψ и ξ, будут эквивалентны исходным дифференциальным уравнениям (1) – (3).

4. Вывод макроскопической модели. Для вывода макроскопической модели, описывающей на макроскопическом уровне динамику фазовых переходов в мерзлом грунте, воспользуемся методом двухмасштабного разложения. Этот метод основан на предварительной оценке возможной гладкости решений микроскопической математической модели и предыдущих результатов о гладкости решений данной математической модели, от возможности записать исходную дифференциальную задачу эквивалентной форме интегральных тождеств и на точных результатах о предельных переходах в функционалах, зависящих от малого параметра задачи [7].

В первую очередь рассмотрим двухмасштабное разложение динамических характеристик $\boldsymbol{v}^\varepsilon$ и p^ε. Для этих величин двухмасштабное разложение зависит от предельных значений безразмерного коэффициента α_μ^ε [6]:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\alpha_\mu^\varepsilon = \mu_0, \;\; \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\alpha_\mu^\varepsilon}{\varepsilon^2} = \mu_1. \tag{13}$$

Напомним [6], что в случае $\mu_0 = 0$ и $0 < \mu_1 < \infty$ жидкость называется слабовязкой и в случае $0 < \mu_1 < \infty$ жидкость называется вязкой [6]. Отметим, что макроскопической математической моделью движения вязкой жидкости в абсолютно твердом скелете грунта является покой [6]. Таким образом, в наших предположениях единственной нетривиальной макроскопической математической моделью является модель движения слабовязкой жидкости с $\mu_0 = 0$ и $0 < \mu_1 < \infty$.

Для этой модели единственно возможным двухмасштабным разложением будет разложение

$$\boldsymbol{v}^\varepsilon = \chi^\varepsilon(\boldsymbol{x},t)\,\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x},t,\frac{\boldsymbol{x}}{\varepsilon}) + o(\varepsilon), \;\; \mathbb{D}(x,\boldsymbol{v}^\varepsilon) = \mathbb{D}(y,\boldsymbol{V}) + o(\varepsilon), \;\; p^\varepsilon = p(\boldsymbol{x},t)\,\chi^\varepsilon(\boldsymbol{x},t) + o(\varepsilon). \tag{14}$$

Для решений H^ε и ϑ^ε задачи Стефана имеем

$$H^\varepsilon = H(\boldsymbol{x},t,\frac{\boldsymbol{x}}{\varepsilon}) + o(\varepsilon), \;\; \vartheta^\varepsilon = \vartheta(\boldsymbol{x},t) + o(\varepsilon), \;\; \nabla\vartheta^\varepsilon = \nabla\vartheta(\boldsymbol{x},t) + \nabla_y\Theta(\boldsymbol{x},t,\frac{\boldsymbol{x}}{\varepsilon})) + o(\varepsilon). \tag{15}$$

Функции $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})$, $H(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})$ и $\Theta(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})$ должны быть 1 – периодическими по переменной $\boldsymbol{y}$ функциями.

Вот теперь мы сможем определить характеристическую функцию χ^ε жидкой части по́рового пространства как

$$\chi(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}) = \max\{\min\{H(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}),1\},0\}. \tag{16}$$

Подставляя выражения (14) и (15) в интегральные тождества (10) – (12), переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$ и реинтегрируя предельные интегральные тождества, получим с помощью теоремы Нгуетсенга [7] следующую систему дифференциальных уравнений макроскопической математической модели процесса замораживания или размораживания грунта для слабовязкого флюида в порах абсолютно твердого скелета

$$\boldsymbol{v} = -\frac{k}{\mu_1}\nabla(p - p_0), \tag{17}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{v} = 0, \tag{18}$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \nabla\cdot(\nabla\,\vartheta - \boldsymbol{v}\,\vartheta). \tag{19}$$

Эти же интегральные уравнения, краевые и начальные условия (4) и (9) доставляют нам краевые и начальные условия макроскопической математической модели:

$$\vartheta(\boldsymbol{x},t) = \vartheta_0(\boldsymbol{x}), \;\; p(\boldsymbol{x},t) = p_0(\boldsymbol{x}), \;\; \boldsymbol{x}\in S, \;\; t > 0, \;\; \vartheta(\boldsymbol{x},0) = \vartheta_0(\boldsymbol{x}). \tag{20}$$

Температура ϑ и энтальпия H связаны уравнением состояния

$$\vartheta = \Phi(H), \tag{21}$$

которое следует из уравнения состояния (8) после предельного перехода при $\varepsilon \to 0$.

Список литературы

1. Барренблатт Г. П., Ентов В. М., Рыжик В. М. 1972. Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа. М., Недра, 288.

2. Васильев В. И., Максимов А. М., Петров Е. Е., Цыпкин Г. Г. 1996. Тепломассоперенос в промерзающих и протаивающих грунтах. М, Наука, 224.

3. Тер-Мартиросян З. Г., Горбачев П. А. 2012. Промерзание грунта с учетом переменной температуры на поверхности и фазовых переходов в интервале температур. Весник МГСУ, 1: 32–36.

4. Burridge R. , Keller J. 1981. Poroelasticity equations derived from microstructure. J. Acoust. Soc. Am., 70(4): 1140–1146.

5. Meirmanov A. 1992. The Stefan Problem. Berlin-New York: Walter de Gruyter, 311.

6. Meirmanov A. 2014. Mathematical models for poroelastic flows. Amsterdam-Paris-BeiJing: Atlantis Press, 449.

7. Nguetseng G. 1989. A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization. SIAM J. Math. Anal., 20(3): 608–623.

References

1. Barrenblatt G. P., Entov V. M., Ryzhik V. M. 1972. Teoria neststsionarnoi philtratsii zhidkosti i gaza. M., Nedra, 288.
2. Vasiliev V. I., Maksimov A. M., Petrov E. E., Tsypkin G. G. 1996. Heat and mass transfer in freezing and thawing soils. M.,Nauka, 224.
3. Ter-Martirosian Z. G., Gorbacnev P. A. 2012. Soil freezing taking into account variable temperature on the surface and phase transitions in the temperature range. Bulletin of MGSU. 1: 32–36.
4. Burridge R., Keller J. 1981. Poroelasticity equations derived from microstructure. J. Acoust. Soc. Am. 70(4): 1140–1146.
5. Meirmanov A. 1992. The Stefan Problem. Berlin-New York: Walter de Gruyter, 311.
6. Meirmanov A. 2014. Mathematical models for poroelastic flows. Amsterdam-Paris-BeiJing: Atlantis Press, 449.
7. Nguetseng G. 1989. A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization. SIAM J. Math. Anal., 20(3): 608–623.

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.
Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Получена 16.02.2022

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Мейрманов Анварбек Мукатович – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры прикладной математики Национального исследовательского университета «Московский государственный строительный университет»

http://orcid.org/0000-0002-8543-3897
Ярославское шоссе 26, Москва, 12933, Россия
E-mail: meirmanovam@mgsu.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Anvarbek Meirmanov – PhD, Professor, Professor of the Department of Applied Mathematics, National Research University «Moscow State University of Civil Engineering», Moscow, Russia