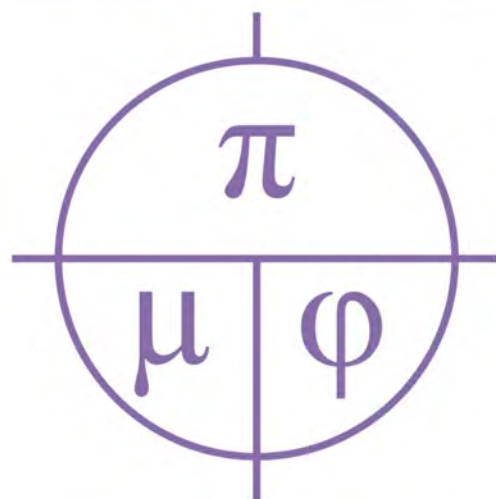


# ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА & ФИЗИКА

# APPLIED MATHEMATICS & PHYSICS





## Прикладная математика & Физика

2020. Том 52, № 1

Основан в 1995 г. Журнал включен в Перечень ВАК рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней кандидата и доктора наук (01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ, 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление, 01.04.07 – физика конденсированного состояния). Ранее журнал издавался под названием «Научные ведомости Белгородского государственного университета. Математика. Физика».

### УЧРЕДИТЕЛЬ:

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Белгородский государственный национальный исследовательский университет».

### РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:

**Главный редактор:** В. Б. Васильев, доктор физико-математических наук, НИУ «БелГУ»;

**Заместители главного редактора:** С. М. Ситник, доктор физико-математических наук, НИУ «БелГУ», Математика; А. В. Носков, доктор физико-математических наук, НИУ «БелГУ», Физика. Математическое моделирование;

**Ответственный секретарь:** О. В. Чернова, кандидат физико-математических наук, НИУ «БелГУ».

### ЧЛЕНЫ РЕДАКЦИОННОЙ КОЛЛЕГИИ:

Ю. А. Алхутов, д-р физ.-мат. наук, Владимир, Россия;  
А. Ашыралыев, д-р физ.-мат. наук, Алматы, Казахстан;  
С. В. Блажевич, д-р физ.-мат. наук, Белгород, Россия;  
А. Н. Беляков, д-р физ.-мат. наук, Белгород, Россия;  
А. Г. Брусенцев, д-р физ.-мат. наук, Белгород, Россия;  
Ю. П. Вирченко, д-р физ.-мат. наук, Белгород, Россия;  
А. В. Глушак, д-р физ.-мат. наук, Белгород, Россия;  
С. Б. Дабагов, д-р физ.-мат. наук, Москва, Россия;  
А. Н. Куликов, д-р физ.-мат. наук, Ярославль, Россия;  
Д. М. Левин, д-р физ.-мат. наук, Тула, Россия;  
И. С. Ломов, д-р физ.-мат. наук, Москва, Россия;  
В. В. Меньших, д-р физ.-мат. наук, Воронеж, Россия;  
А. И. Назаров, д-р физ.-мат. наук, Санкт-Петербург, Россия;  
Е. Ю. Панов, д-р физ.-мат. наук, Великий Новгород, Россия;  
О. М. Пенкин, д-р физ.-мат. наук, Алматы, Казахстан;  
И. П. Половинкин, д-р физ.-мат. наук, Воронеж, Россия;  
Е. В. Радкевич, д-р физ.-мат. наук, Москва, Россия;  
А. П. Солдатов, д-р физ.-мат. наук, Москва, Россия;  
В. Е. Федоров, д-р физ.-мат. наук, Челябинск, Россия;  
М. В. Шитикова, д-р физ.-мат. наук, Воронеж, Россия;  
А. А. Шибков, д-р физ.-мат. наук, Тамбов, Россия.

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор). Выходит 4 раза в год.

Выпускающий редактор: Л. П. Котенко	Гарнитура Times.
Корректурa: Ю. В. Ивахненко	Дата выхода 30.03.2020.
Компьютерная верстка: О. В. Чернова	Оригинал-макет подготовлен подготовлен отделом
Оригинал-макет: В. Б. Васильев	объединенной редакции научных журналов НИУ «БелГУ»
E-mail: vasilyev_v@bsu.edu.ru	308015 г. Белгород, ул. Победы, 85.

## СОДЕРЖАНИЕ

### МАТЕМАТИКА

***М. С. Апанович, А. П. Ляпин, К. В. Шадрин***

Вычисление последовательности главных миноров теплицевой ленточной матрицы **5**

***Е. С. Чеб, Е. С. Симинская***

О классическом решении смешанной задачи для линейного нестрого гиперболического уравнения четвертого порядка с одной кратной характеристикой **11**

***В. В. Щербина***

О двух задачах теории частично тотально композиционных формаций конечных групп **18**

### ФИЗИКА. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

***Е. А. Кульченков, С. Б. Рыбалка, А. А. Демидов, А. Ю. Дракин***

Расчет характеристик карбидокремниевых диодов Шоттки для малогабаритных металлополимерных корпусов **33**

***Д. А. Тукмаков***

Численное исследование влияния объемного содержания дисперсной компоненты газозвеси на интенсивность межфазного скоростного скольжения при разлете газозвеси в вакуум **41**



# Applied Mathematics & Physics

2020. Volume 52, № 1

*Founded in 1995. The journal is included into the List of Higher Attestation Commission of peer-reviewed scientific publications where the main scientific results of dissertations for obtaining scientific degrees of a candidate and doctor of science should be published (01.01.01 – material, complex and functional analysis, 01.01.02 – differential equations, dynamical systems and optimal control, 01.04.07 – condensed matter physics). Previously, the magazine was published under the title «Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics. Physics».*

## FOUNDER:

Federal state autonomous educational establishment of higher education  
«Belgorod National Research University».

## EDITORIAL BOARD:

**Chief Editor:** V. B. Vasilyev, Dr.Sc., Ph.D., Belgorod National Research University;

**Deputy Editor-in-Chief:** S. M. Sitnik, Dr.Sc., Ph.D., Belgorod National Research University, Mathematics; A. V. Noskov, Dr.Sc., Ph.D., Belgorod National Research University, Physics. Mathematical modeling;

**Executive Secretary:** O. V. Chernova, PhD, Belgorod National Research University.

## EDITORIAL BOARD MEMBERS:

Yu. A. Alkhutov, Dr.Sc., Ph.D., Vladimir, Russia;  
A. Ashyralyev, Dr.Sc., Ph.D., Almaty, Kazakhstan;  
S. V. Blazhevich, Dr.Sc., Ph.D., Belgorod, Russia;  
A. N. Belyakov, Dr.Sc., Ph.D., Belgorod, Russia;  
A. G. Brusentsev, Dr.Sc., Ph.D., Belgorod, Russia;  
Yu. P. Virchenko, Dr.Sc., Ph.D., Belgorod, Russia;  
A. V. Glushak, Dr.Sc., Ph.D., Belgorod, Russia;  
S. B. Dabagov, Dr.Sc., Ph.D., Moscow, Russia;  
A. N. Kulikov, Dr.Sc., Ph.D., Yaroslavl, Russia;  
D. M. Levin, Dr.Sc., Ph.D., Tula, Russia;  
I. S. Lomov, Dr.Sc., Ph.D., Moscow, Russia;  
V. V. Menshih, Dr.Sc., Ph.D., Voronezh, Russia;  
A. I. Nazarov, Dr.Sc., Ph.D., St. Petersburg, Russia;  
E. Yu. Panov, Dr.Sc., Ph.D., Velikiy Novgorod, Russia;  
O. M. Penkin, Dr.Sc., Ph.D., Almaty, Kazakhstan;  
I. P. Polovinkin, Dr.Sc., Ph.D., Voronezh, Russia;  
E. V. Radkevich, Dr.Sc., Ph.D., Moscow, Russia;  
A. P. Soldatov, Dr.Sc., Ph.D., Moscow, Russia;  
V. E. Fedorov, Dr.Sc., Ph.D., Chelyabinsk, Russia;  
M. V. Shitikova, Dr.Sc., Ph.D., Voronezh, Russia;  
A. A. Shibkov, Dr.Sc., Ph.D., Tambov, Russia.

The journal has been registered at the Federal service for supervision of communications information technology and mass media (Roskomnadzor). Publication frequency: 4 / year.

Commissioning Editor L. P. Kotenko  
Proofreading Yu. V. Ivakhnenko  
Computer imposition O. V. Chernova  
Dummy layout by V. B. Vasilyev  
E-mail: vasilyev\_v@bsu.edu.ru

Typeface Times.  
Date of publishing 30.03.2020.  
The layout is presented by Department of the united  
Editorial Board of Scientific Journals Belgorod  
National Research University  
Address: 85 Pobeda St., Belgorod, 308015, Russia

## CONTENTS

### MATHEMATICS

***M. S. Apanovich, A. P. Lyapin, K. V. Shadrin***

Calculating the sequence of main minors of the toeplitz band matrix **5**

***E. S. Cheb, E. S. Siminskaya***

Classical solution of the mixed problem for linear nonstrictly hyperbolic fourth-order with multiple chatacteristic **11**

***V. V. Shcherbina***

On two problems of the theory of partially totally composition formations of finite groups **18**

### PHYSICS. MATHEMATICAL MODELING

***E. A. Kulchenkov, S. B. Rybalka, A. A. Demidov and A. Yu. Drakin***

Calculation of characteristics of the silicon carbide schottky diodes for small metalpolymeric package **33**

***D. A. Tukmakov***

Numerical study of the influence of volume content of a dispersed gas-suspension component on the intensity of an interphasic speed sliding during gas-suspension split in vacuum **41**

## МАТЕМАТИКА

УДК 517.55+519.85+519.111.1

DOI 10.18413/2687-0959-2020-52-1-5-10

### ВЫЧИСЛЕНИЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ГЛАВНЫХ МИНОРОВ ТЕПЛИЦЕВОЙ ЛЕНТОЧНОЙ МАТРИЦЫ

М. С. Апанович<sup>1</sup>, А. П. Ляпин<sup>2</sup>, К. В. Шадрин<sup>1</sup>

*Статья представлена членом редакционной коллегии С. М. Ситником*

<sup>1</sup>Красноярский государственный медицинский университет имени профессора В. Ф. Войно-Ясенецкого  
г. Красноярск, 660022, Россия

<sup>2</sup>Сибирский федеральный университет  
г. Красноярск, 660041, Россия

E-mail: [marina.apanovich@list.ru](mailto:marina.apanovich@list.ru), [aplyapin@sfu-kras.ru](mailto:aplyapin@sfu-kras.ru), [kvsh\\_buffon@mail.ru](mailto:kvsh_buffon@mail.ru)

**Аннотация.** В работе рассматривается алгоритм, который позволяет вычислить последовательность главных миноров теплицевой ленточной матрицы, ассоциированной с задачей Коши для двумерного полиномиального разностного оператора с постоянными коэффициентами, с верхней (нижней) шириной ленты равной единице, что позволит определить невырожденность такой матрицы и, следовательно, сделать выводы о разрешимости задачи Коши.

**Ключевые слова:** полиномиальный разностный оператор, задача Коши, разрешимость, ленточная матрица, теплицева матрица, главные миноры.

**Благодарности:** работа первого автора выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта №18-31-00232.

**Для цитирования:** Апанович М. С., Ляпин А. П., Шадрин К. В. 2020. Вычисление последовательности главных миноров теплицевой ленточной матрицы. Прикладная математика & Физика. 52(1): 5–10.

DOI 10.18413/2687-0959-2020-52-1-5-10.

---

---

### CALCULATING THE SEQUENCE OF MAIN MINORS OF THE TOEPLITZ BAND MATRIX

M. S. Apanovich<sup>1</sup>, A. P. Lyapin<sup>2</sup>, K. V. Shadrin<sup>1</sup>

*Article submitted by a member of the editorial board S. M. Sitnik*

<sup>1</sup>Krasnoyarsk State Medical University named after Prof. V. F. Voino-Yasenyetsky,  
Krasnoyarsk, 660022, Russia

<sup>2</sup>Siberian Federal University  
Krasnoyarsk, 660041, Russia

E-mail: [marina.apanovich@list.ru](mailto:marina.apanovich@list.ru), [aplyapin@sfu-kras.ru](mailto:aplyapin@sfu-kras.ru), [kvsh\\_buffon@mail.ru](mailto:kvsh_buffon@mail.ru)

Received March 18, 2020

**Abstract.** In this paper, we consider an algorithm that allows you to calculate the sequence of the main minors of the Toeplitz band matrix associated with the Cauchy problem for a two-dimensional polynomial difference operator with constant coefficients, with an upper (lower) band width equal to one, which allows us to determine the non-degeneracy of such a matrix and, therefore, draw conclusions on the solvability of the Cauchy problem

**Key words:** polynomial difference operator, Cauchy problem, solvability, band matrix, toeplitz matrix, main minor.

**Acknowledgements:** The work of the first author is supported by the Russian Federal Property Fund in the framework of scientific project textnumero 18-31-00232.

**For citation:** Apanovich M. S., Lyapin A. P., Shadrin K. V. 2020. Calculating the sequence of main minors of the toeplitz band matrix. Applied Mathematics & Physics. 52(1): 5–10 (in Russian).

DOI 10.18413/2687-0959-2020-52-1-5-10.

---

**1. Введение.** Линейные разностные уравнения (уравнения в конечных разностях или рекуррентные уравнения) возникают в различных областях математики. Например, разностные уравнения часто используются в моделях динамики при моделировании процессов с дискретным временем ([3], [4]), а

также для приближенного решения дифференциальных уравнений ([10]), в комбинаторном анализе в сочетании с методом производящих функций дают мощный аппарат исследования перечислительных задач (см., например, [13], [14]), следовательно, поиск решений таких уравнений является одной из математических задач, имеющей многочисленные приложения в различных областях науки и техники [8], [11], [12].

В работе [15] рассмотрен вариант задачи Коши для многомерного разностного уравнения с постоянными коэффициентами, возникающий с задачей о числе путей на целочисленной решетке в перечислительном комбинаторном анализе. Получена формула, выражающая производящую функцию решения задачи Коши через производящие функции данных Коши, и найдено решение задачи Коши через ее фундаментальное решение и данные Коши.

В работе [9] в связи с исследованием разрешимости задачи Коши для двумерного разностного оператора вводится понятие ассоциированной матрицы, которая представляет собой теплицевую ленточную матрицу бесконечного порядка, и ее невырожденность является необходимым и достаточным условием разрешимости задачи Коши, а также было доказано рекуррентное соотношение для последовательности главных миноров теплицевой ленточной матрицы.

Данная работа посвящена описанию алгоритма для вычисления последовательности главных миноров теплицевой ленточной матрицы с верхней (нижней) шириной ленты равной единице, что позволит определить невырожденность такой матрицы и, следовательно, сделать выводы о разрешимости задачи Коши. Кроме того, приводится пример, иллюстрирующий его работу.

## 2. Постановка задачи и известные результаты.

**Определение 1.** Матрица  $A = \|a_{ij}\|$  называется ленточной, если все ненулевые элементы заключены внутри ленты, образованной между диагоналями, параллельными главной. Если для матрицы  $A$  справедливо:  $a_{ij} = 0$  при  $i > j + l$  и  $a_{ij} = 0$  при  $j > i + k$ , то  $l$  называется нижней шириной ленты,  $k$  – верхней шириной ленты. Величина  $s = l + k + 1$  называется шириной ленты матрицы  $A$ .

**Определение 2.** Матрица  $B$  называется теплицевой (см., например, [5]), если на всех диагоналях матрицы  $\|b_{ij}\|$ , параллельных главной диагонали и на самой главной диагонали, элементы матрицы одинаковы:  $b_{ij} = b_{j-i}$ .

Обозначим через  $\mathbb{Z}^2$  двумерную целочисленную решетку и  $\mathbb{Z}_{\geq}^2$  – подмножество этой решетки, состоящее из точек с целыми неотрицательными координатами. Пусть  $\delta_1$  – оператор сдвига по переменной  $x_1$ , т.е.  $\delta_1 f(x_1, x_2) = f(x_1 + 1, x_2)$ , а  $\delta_2$  – оператор сдвига по переменной  $x_2$ , т.е.  $\delta_2 f(x_1, x_2) = f(x_1, x_2 + 1)$ .

Рассмотрим полиномиальный разностный оператор вида

$$P(\delta_1, \delta_2) = \sum_{\alpha_1 + \alpha_2 \leq m} c_{\alpha_1, \alpha_2} \delta_1^{\alpha_1} \delta_2^{\alpha_2},$$

где  $c_{\alpha_1, \alpha_2}$  – постоянные коэффициенты,  $m$  – порядок оператора  $P(\delta_1, \delta_2)$ .

Будем рассматривать разностные уравнения вида

$$P(\delta_1, \delta_2)f(x_1, x_2) = 0, \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{Z}_{\geq}^2, \quad (1)$$

где  $f(x_1, x_2)$  – неизвестная функция.

Для точек  $x = (x_1, x_2)$  и  $y = (y_1, y_2)$  решетки  $\mathbb{Z}^2$  запись  $x \not\geq y$  означает, что найдется  $i_0 \in \{1, 2\}$  такое, что  $x_{i_0} < y_{i_0}$ .

Зафиксируем  $\beta = (l, k)$  такое, что  $l + k + 1 = m$  и  $c_{l,k} \neq 0$  и сформулируем задачу Коши:

найти решение разностного уравнения (1), удовлетворяющее условию

$$f(x_1, x_2) = \varphi(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \not\geq (l, k). \quad (2)$$

Переобозначим коэффициенты  $c_{\alpha_1, \alpha_2}$  однородной составляющей  $\sum_{\alpha_1 + \alpha_2 = m} c_{\alpha_1, \alpha_2} \delta_1^{\alpha_1} \delta_2^{\alpha_2}$  старшей степени многочлена  $P(\delta_1, \delta_2)$ :

$$\begin{aligned} t_{-l} &= c_{0,m}, \quad t_{-l+1} = c_{1,m-1}, \quad \dots, \quad t_{-1} = c_{-l+1,k+1}, \quad t_0 = c_{l,k}, \\ t_1 &= c_{l+1,k-1}, \quad \dots, \quad t_{k-1} = c_{m-1,1}, \quad t_k = c_{m,0}. \end{aligned} \quad (3)$$

Ассоциированной с задачей (1) – (2) матрицей будем называть матрицу бесконечного порядка вида:

$$T_\infty = \begin{pmatrix} t_0 & t_1 & t_2 & \cdots & t_k & 0 & \cdots \\ t_{-1} & t_0 & t_1 & \ddots & \vdots & t_k & \ddots \\ t_{-2} & t_{-1} & \ddots & \ddots & t_2 & \vdots & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & t_1 & t_2 & \vdots \\ t_{-l} & \cdots & t_{-2} & t_{-1} & t_0 & t_1 & \ddots \\ 0 & t_{-l} & \cdots & t_{-2} & t_{-1} & t_0 & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \cdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Далее обозначим  $D_p$  – главный минор матрицы  $T_\infty$  порядка  $p$ . Например, для разностного оператора

$$P(\delta_1, \delta_2) = t_2\delta_1^3 + t_1\delta_1\delta_2^2 + t_0\delta_1^2\delta_2 + t_{-1}\delta_2^3 + \sum_{\alpha_1+\alpha_2 \leq 2} c_{\alpha_1, \alpha_2} \delta_1^{\alpha_1} \delta_2^{\alpha_2}$$

ассоциированная матрица имеет вид

$$T_\infty = \begin{pmatrix} t_0 & t_1 & t_2 & 0 & \cdots \\ t_{-1} & t_0 & t_1 & t_2 & \ddots \\ 0 & t_{-1} & t_0 & t_1 & \ddots \\ 0 & 0 & t_{-1} & t_0 & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix},$$

а главные миноры

$$D_1 = t_0, D_2 = \begin{vmatrix} t_0 & t_1 \\ t_{-1} & t_0 \end{vmatrix}, D_3 = \begin{vmatrix} t_0 & t_1 & t_2 \\ t_{-1} & t_0 & t_1 \\ 0 & t_{-1} & t_0 \end{vmatrix}, D_4 = \begin{vmatrix} t_0 & t_1 & t_2 & 0 \\ t_{-1} & t_0 & t_1 & t_2 \\ 0 & t_{-1} & t_0 & t_1 \\ 0 & 0 & t_{-1} & t_0 \end{vmatrix}, \dots$$

Приведем необходимое и достаточное условие разрешимости задачи Коши (1) – (2) из работы [9]: задача (1) – (2) имеет единственное решение тогда и только тогда, когда ассоциированная матрица  $T_\infty$  невырожденная, т.е. для любого  $p$  главные миноры  $D_p \neq 0$ . Кроме того, в работе [9] было доказано рекуррентное соотношение для последовательности главных миноров теплицевой ленточной матрицы, а именно: последовательность  $D_p$  главных миноров теплицевой ленточной матрицы  $T_\infty$  с верхней шириной ленты  $k = 1$  (нижней шириной ленты  $l = 1$ ) удовлетворяет рекуррентному соотношению порядка  $l + 1$  ( $k + 1$ )

$$D_p = t_0 D_{p-1} + \sum_{v=1}^l (-1)^v t_1^v t_{-v} D_{p-1-v}, \quad p = 3, 4, \dots, \quad l = 1, 2, \dots$$

$$\left( D_p = t_0 D_{p-1} + \sum_{v=1}^k (-1)^v t_{-1}^v t_v D_{p-1-v}, \quad p = 3, 4, \dots, \quad k = 1, 2, \dots \right).$$

**3. Описание алгоритма.** Для построения последовательности главных миноров теплицевой ленточной матрицы нам надо знать:

1) точку  $\beta$ , определяющую количество наддиагоналей и поддиагоналей теплицевой ленточной матрицы, т.е. ширину ленты. Поскольку рекуррентное соотношение для последовательности главных миноров в работе [9] было доказано для теплицевой ленточной матрицы, имеющей одну наддиагональ или одну поддиагональ, то одна из координат точки  $\beta$  должна быть равна единице.

2) коэффициенты двумерного разностного оператора. Коэффициенты двумерного разностного оператора задаются квадратной матрицей  $C$ , имеющей нижнетреугольный вид.

3) количество элементов последовательности главных миноров, оно может быть много больше, чем размерность теплицевой ленточной матрицы, построенной по коэффициентам разностного оператора.

Итак, входные данные конечны и имеют вид:

- 1) точка  $\beta = (l, k)$ , где  $l = 1$  или  $k = 1$ ;
- 2) нижнетреугольная матрица  $C = (c_{\alpha_1, \alpha_2})$ ,  $\alpha_1 = 0, \dots, m$ ,  $\alpha_2 = 0, \dots, m$ , размера  $(m + 1) \times (m + 1)$  из коэффициентов  $c_{\alpha_1, \alpha_2}$  двумерного разностного оператора;
- 3) количество элементов последовательности главных миноров.



Отметим, что координаты точек в декартовой системе координат отличаются от координат точек в «матричной» системе координат и потребуется их перевод из одной системы координат в другую. Далее необходимо будет проверить, что одна из координат точки  $\beta$  равна единице.

Соответствующий алгоритм размещен по ссылке <https://github.com/lyarinap/ALS2020>.

**4. Пример работы алгоритма.** Алгоритм был реализован в среде Matlab 2014 32bit. Вычисления производились на машине Intel(R) Core(TM) i5-3330S CPU 2.70 GHz, 32bit, ОЗУ 4.00 Гб под управлением Windows 7 Корпоративная SP1. Время счета для приведенного примера составило менее 1 секунды.

Рассмотрим полиномиальный разностный оператор

$$P(\delta_1, \delta_2) = c_{03}\delta_2^3 + c_{12}\delta_1\delta_2^2 + c_{21}\delta_1^2\delta_2 + c_{03}\delta_1^3 + c_{02}\delta_2^2 + c_{11}\delta_1\delta_2 + c_{20}\delta_1^2 + c_{01}\delta_2 + c_{10}\delta_1 + c_{00}.$$

Фиксируем  $\beta = (1, 2)$ , тогда теплицевая ленточная матрица будет иметь одну поддиагональ ( $l = 1$ ) и две наддиагонали ( $k = 2$ ), а ширина ленты будет равна  $l + k + 1 = 4$ .

Зададим матрицу коэффициентов полиномиального разностного оператора  $P(\delta_1, \delta_2)$

$$C = \begin{pmatrix} c_{03} & 0 & 0 & 0 \\ c_{02} & c_{12} & 0 & 0 \\ c_{01} & c_{11} & c_{21} & 0 \\ c_{00} & c_{10} & c_{20} & c_{30} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 10 & 0 & 0 \\ 3 & 9 & 8 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

Поставим задачу найти первые шесть элементов последовательности главных миноров.

Вектор диагонали матрицы коэффициентов  $C$ :  $a = (1 \ 10 \ 8 \ 7)^T$ .

Получение общей теплицевой матрицы.

$$column_c = (10 \ 1 \ 0 \ 0)^T,$$

$$row_c = (10 \ 8 \ 7 \ 0)^T,$$

$$T_4 = \begin{pmatrix} 10 & 8 & 7 & 0 \\ 1 & 10 & 8 & 7 \\ 0 & 1 & 10 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \end{pmatrix}.$$

Результатом работы алгоритма является вектор с главными минорами:

$$(10 \ 92 \ 847 \ 7804 \ 71908 \ 662577).$$

Итоговый вектор с шестью первыми элементами последовательности главных миноров не содержит нулевых элементов, кроме того, каждый следующий элемент последовательности больше предыдущего, таким образом, можно сделать вывод, что задача Коши для рассматриваемого двумерного разностного оператора разрешима. Для вычисления производящей функции решения задачи Коши для двумерного разностного оператора с постоянными коэффициентами можно воспользоваться программой [7], принцип работы которой описан в работе [6], а для вычисления решения задачи Коши для двумерного разностного оператора с постоянными коэффициентами можно использовать программу [1]. Для вычисления последовательности главных миноров можно использовать программу [2], принцип работы которой и описан в данной статье.

**5. Заключение.** В работе рассмотрен алгоритм вычисления последовательности главных миноров теплицевой ленточной матрицы, ассоциированной с задачей Коши, для двумерного разностного оператора и иллюстрирующий его работу пример.

#### Список литературы

1. Апанович М. С., Шадрин К. В. 2019. CauchyTriangle. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2019663199.
2. Апанович М. С., Шадрин К. В. 2020. ToeplitzBanDet. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2020612776.
3. Даджион Д., Мерсеро Р. 1988. Цифровая обработка многомерных сигналов. Пер. с англ. М., Мир, 487. (Dudgeon D. E., Mersereau R. M. 1983. Multidimensional digital signal processing. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 400.).
4. Изерман Р. 1984. Цифровые системы управления. М., Мир, 541.

5. Иохвидов И. С. 1974. Ганкелевы и теплицевы матрицы. М., Наука, 264.
6. Kytmanov A. A., Lyapin A. P., Sadykov T. M. 2017. Evaluating the rational generating function for the solution of the Cauchy problem for a two-dimensional difference equation with constant coefficients. *Programming and Computer Software*, 43(2): 105-111.
7. Кытманов А. А., Ляпин А. П., Садыков Т. М. 2018. Программа вычисления рациональной производящей функции решения задачи Коши двумерного разностного уравнения с постоянными коэффициентами. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2018619622.
8. Рогозина М. С. 2012. Устойчивость многослойных разностных схем и амёбы алгебраических гиперповерхностей. *Журнал СФУ. Серия Математика и физика*, 5(2): 256–263.
9. Рогозина М. С. 2014. О разрешимости задачи Коши для полиномиального разностного оператора. *Вестник Новосибирского государственного университета*, 14 (3): 83–94.
10. Рябенский В. С. 2000. Введение в вычислительную математику: учеб. пособие, изд. 2-е, исправл. М., ФИЗМАТЛИТ, 296 с.
11. Рябенский В. С., Филиппов А. Ф. 1956. Об устойчивости разностных уравнений. М., Гос. изд. технико-теоретической литературы, 171 с.
12. Самарский А.А. 1971. Введение в теорию разностных схем. М., Наука, 552.
13. Стенли Р. 1990. Перечислительная комбинаторика: Пер. с англ. М., Мир, 440. (Stanley R. 1997. *Enumerative combinatorics*. Cambridge University Press, 326).
14. Стенли Р. 2005. Перечислительная комбинаторика. Деревья, производящие функции и симметрические функции: Пер. с англ. М., Мир, 767. (Stanley R. 1997. *Enumerative combinatorics. Trees and the Composition of Generating Functions*. Cambridge University Press, 600).
15. Lyapin A. P., Chandragiri S. 2020. The Cauchy Problem for Multidimensional Difference Equations in Lattice Cones. *Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics*, 13(2): 187–196.

### References

1. Apanovich M.S., Shadrin K.V. 2019. CauchyTriangle. Svidetel'stvo o gosudarstvennoj registracii programmy dlja JeVM №2019663199.
2. Apanovich M.S., Shadrin K.V. 2020. ToeplitzBanDet. Svidetel'stvo o gosudarstvennoj registracii programmy dlja JeVM №2020612776.
3. Dadzhion D., Mersero O. 1988. Cifrovaja obrabotka mnogomernyh signalov [Multidimensional digital signal processing]. Moscow, Mir, 487. (Dudgeon D.E., Mersereau R.M. 1983. *Multidimensional digital signal processing*. Englewood Cliffs, NJ : Prentice-Hall, 400.).
4. Izerman R. 1984. Cifrovye sistemy upravlenija. Moscow, Mir, 541.
5. Iohvidov I. S. 1974. Gankelevy i teplicevy matricy. Moscow, Nauka, 264.
6. Kytmanov A. A., Lyapin A. P., Sadykov T. M. 2017. Evaluating the rational generating function for the solution of the Cauchy problem for a two-dimensional difference equation with constant coefficients. *Programming and Computer Software*, 43(2): 105-111.
7. Kytmanov A. A., Ljapin A. P., Sadykov T. M. 2018. Programma vychislenija racional'noj proizvodja-shhej funkcii reshenija zadachi Koshi dvumernogo raznostnogo uravnenija s postojannymi kojefficienta-mi. Svidetel'stvo o gosudarstvennoj registracii programmy dlja JeVM №2018619622.
8. Rogozina M. S. 2012. Ustojchivost' mnogoslojnyh raznostnyh shem i ameby algebraicheskikh giperpovernostej. *Zhurnal SFU. Serija Matematika i fizika*, 5(2): 256–263.
9. Rogozina M. S. 2014. O razreshimosti zadachi Koshi dlja polinomial'nogo raznostnogo operatora. *Vestnik Novosibirskogo gosudarstvennogo universiteta*, 14 (3): 83–94.
10. Rjaben'kij V. S. 2000. Vvedenie v vychislitel'nuju matematiku: ucheb. posobie, izd. 2-e, ispravl. Moscow, FIZMATLIT, 296 p.
11. Rjaben'kij V.S., Filippov A.F. 1956. Ob ustojchivosti raznostnyh uravnenij. М., Gos. izd. tehniko-teoreticheskoy literatury, 171.

12. Samarskij A.A. 1971. Vvedenie v teoriju raznostnyh shem, M., Nauka, 552.
13. Stenli R. 1990. Perechislitel'naja kombinatorika [Enumerative combinatorics]. Moscow, Mir, 440. (Stanley R. 1997. Enumerative combinatorics. Cambridge University Press, 326).
14. Stenli R. 2005. Perechislitel'naja kombinatorika. Derev'ja, proizvodjashhie funkicii i simmetricheskie funkicii [Enumerative combinatorics. Trees and the Composition of Generating Functions]. Moscow, Mir, 767. (Stanley R. 1997. Enumerative combinatorics. Trees and the Composition of Generating Functions. Cambridge University Press, 600).
15. Lyapin A. P., Chandragiri S. 2020. The Cauchy Problem for Multidimensional Difference Equations in Lattice Cones. Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics, 13(2): 187–196.

Получена 18.03.2020

---

**Апанович Марина Степановна** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры медицинской кибернетики и информатики Красноярского государственного медицинского университета имени профессора В. Ф. Войно-Ясенецкого

ул. Партизана Железняка, 1, г. Красноярск, Россия, 660022

E-mail: [marina.apanovich@list.ru](mailto:marina.apanovich@list.ru)

**Ляпин Александр Петрович** – кандидат физико-математических наук, доцент базовой кафедры вычислительных и информационных технологий Сибирского федерального университета

пр. Свободный, 79, г. Красноярск, Россия, 660041

E-mail: [aplyapin@sfu-kras.ru](mailto:aplyapin@sfu-kras.ru)

**Шадрин Константин Викторович** – старший преподаватель кафедры медицинской кибернетики и информатики Красноярского государственного медицинского университета имени профессора В. Ф. Войно-Ясенецкого

ул. Партизана Железняка, 1, г. Красноярск, Россия, 660022

E-mail: [kvsh\\_buffon@mail.ru](mailto:kvsh_buffon@mail.ru)

**О КЛАССИЧЕСКОМ РЕШЕНИИ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО НЕСТРОГО  
ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА  
С ОДНОЙ КРАТНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ**

**Е. С. Чеб, Е. С. Симинская**

*Статья представлена членом редакционной коллегии А. П. Солдатовым*

Белорусский государственный университет  
г. Минск, 220030, Республика Беларусь

E-mail: [cheb@bsu.by](mailto:cheb@bsu.by), [Slavelena16@gmail.com](mailto:Slavelena16@gmail.com)

**Аннотация.** Данная статья посвящена построению классического решения смешанной задачи для линейного однородного нестроого гиперболического уравнения четвертого порядка, оператор которого представляет собой четырехкратную композицию одного и того же оператора первого порядка, с постоянными коэффициентами и четырехкратной характеристикой. Для корректной постановки данной задачи граничные условия задаются не на всей боковой границе, что является ее особенностью. Для построения решения используется метод характеристик. Согласно этому методу, в общем решении исходного уравнения присутствуют четыре неизвестные функции, которые на области определения находятся из начальных и граничных условий. Классическое решение построено для случая отсутствия производных младших порядков. Получены достаточные условия гладкости и согласований граничных условий с начальными условиями и уравнением. Гладкость исходных данных нужна для четырехжды непрерывной дифференцируемости решения. Условия согласования нужны для четырехжды непрерывной дифференцируемости решения на критической характеристике. Доказана теорема существования единственного классического решения этой смешанной задачи. Полученные результаты могут быть применены в теории уравнений с частными производными и в вычислительной математике.

**Ключевые слова:** нестроого гиперболическое уравнение четвертого порядка, смешанная задача, классическое решение, метод характеристик, условия гладкости и согласования.

**Для цитирования:** Чеб Е. С., Симинская Е. С. 2020. О классическом решении смешанной задачи для линейного нестроого гиперболического уравнения четвертого порядка с одной кратной характеристикой. Прикладная математика & Физика. 52(1): 11–17. DOI 10.18413/2687-0959-2020-52-1-11-17.

---

---

**CLASSICAL SOLUTION OF THE MIXED PROBLEM FOR LINEAR NONSTRICTLY HYPERBOLIC  
FOURTH-ORDER WITH MULTIPLE CHARACTERISTIC**

**E. S. Cheb, E. S. Siminskaya**

*Article submitted by a member of the editorial board A. P. Soldatov*

Belorussian State University,  
Minsk, 220030, Republic of Belarus

E-mail: [cheb@bsu.by](mailto:cheb@bsu.by), [Slavelena16@gmail.com](mailto:Slavelena16@gmail.com)

Received January 10, 2020

**Abstract.** In the work is constructed the classical solution of mixed value problem for not strictly hyperbolic homogeneous equation of the fourth order with constant coefficients and the multiple characteristics. We use the method of characteristics to solve this problem. According to this method, general solution of the equation contains the sum of four functions, which are found from initial and boundary conditions. This general solution is constructed for the both cases: with the presence or absence derivatives of lower orders. We obtained matching conditions for initial and boundary conditions. These conditions follow from the requirement of four times continuous differentiability of the solution taking into account smoothness of the functions. A theorem on the existence of a unique classical solution has been proved. The obtained results can be used in the theory of differential equations with partial derivatives and in the computational mathematics.

**Key words:** partial differential hyperbolic equation of the fourth order, initial value problem, boundary value problem, classical solution, method of characteristics, smoothness and matching conditions.

**For citation:** Cheb E. S., Siminskaya E. S. 2020. Classical Solution of the Mixed Problem for Linear Nonstrictly Hyperbolic Fourth-Order with Multiple Characteristic. Applied Mathematics & Physics. 52(1): 11–17 (in Russian). DOI 10.18413/2687-0959-2020-52-1-11-17.

---

**Введение.** Нестроого гиперболические уравнения обладают рядом особенностей, которые появляются при постановке и исследовании на разрешимость смешанных задач для них. Среди них наиболее

изученной является задача Коши. В работе [Иврий, Петков, 1974] получены необходимые условия корректности задачи Коши для нестрогих гиперболических уравнений второго порядка. Некоторые смешанные задачи для уравнений гиперболического типа были исследованы [Sakamoto, 1970]. На возможность применения метода характеристик при решении смешанных задач указано в работе [Than, Mikio, Nguen, 2000]. В работах [Ломовцев, Юрчук, 2016] и [Ломовцев, 2019] методом характеристик получены необходимые и достаточные условия корректной разрешимости смешанных задач для нестрогих гиперболического уравнения второго порядка с двукратной характеристикой соответственно в первой четверти и полуполосе плоскости. В этих работах указано на повышение требований гладкости от граничных с начальными данными и уравнением. В [Чеб, 2017] методом характеристик получено классическое решение смешанной задачи для нестрогих гиперболического уравнения четвертого порядка, оператор которого представляет собой композицию двух операторов второго порядка.

В данной работе впервые рассматривается смешанная задача для уравнения четвертого порядка с одной характеристикой кратности четыре. Особенность изучаемой задачи заключается в том, что граничные условия задаются не на всей боковой границе.

**1. Постановка задачи.** В области  $Q = (0, \infty) \times \Omega \subset \mathbb{R}^2$ ,  $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ , переменных  $(t, x)$  рассмотрим относительно функции  $u(t, x)$  линейное нестрогое гиперболическое уравнение четвертого порядка с постоянными коэффициентами в предположении, что гиперболический оператор уравнения  $L$  представим в виде композиции операторов первого порядка

$$Lu \equiv \prod_{i=1}^4 \left( \frac{\partial}{\partial t} - a \frac{\partial}{\partial x} \right) u(t, x) = 0, \quad a > 0, \quad (t, x) \in Q, \quad \text{где } \Omega = (0, l), l > 0. \quad (1)$$

К уравнению (1) присоединим начальные условия

$$\frac{\partial^j u}{\partial t^j} \Big|_{t=0} = \varphi_j(x), \quad x \in \Omega, \quad j = 0, 1, 2, 3, \quad (2)$$

и граничные условия

$$u(t, 0) = \mu_1(t), \quad \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = \mu_2(t), \quad t \in \left( \frac{l}{a}, +\infty \right), \quad (3)$$

$$u(t, l) = \nu_1(t), \quad \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l} = \nu_2(t), \quad t \in (0, +\infty). \quad (4)$$

Условия (3)–(4) выбираются таким образом, чтобы смешанная (начально-граничная) задача (1)–(4) была корректно поставленной по Адамару, т. е. всегда существовало единственное и устойчивое по исходным данным ее классическое решение. Требуется построить классическое решение  $u \in C^{(4)}(Q)$ ,  $Q = [0, \infty) \times [0, l]$ , уравнения (1) из класса четырежды непрерывно дифференцируемых функций, удовлетворяющих уравнению (1) на  $Q$  в обычном смысле, а начальным (2) и граничным условиям (3)–(4) в смысле пределов значения решения  $u(t, x)$  во внутренних точках  $(t, x) \in Q$ . Например, для начального условия (2) при  $j = 0 : \forall x \in \Omega, \forall (t_n, x_n) \in Q, (t_n, x_n) \rightarrow (0, x) \in \mathbb{R}^2$  при  $n \rightarrow \infty$  последовательность  $u(t_n, x_n) \rightarrow \varphi_0(x) \in \mathbb{R}$  при  $n \rightarrow \infty$ . Найти достаточные требования гладкости исходных данных  $\varphi_j$  ( $j = 0, 3$ ),  $\mu_1, \mu_2, \nu_1, \nu_2$  и условия согласования между ними и уравнением для корректной разрешимости поставленной задачи (1)–(4).

**2. Решение смешанной задачи.** Уравнение (1) имеет одно семейство характеристик  $x + at = C$ ,  $C \in \mathbb{R}$ , кратности четыре. Область  $Q$  разбивается характеристикой  $x + at = l$  на две подобласти

$$Q^{(0)} = \left\{ (t, x) : 0 < t < \frac{l-x}{a}, 0 < x < l \right\}, \quad Q^{(1)} = \left\{ (t, x) : t > \frac{l-x}{a}, 0 < x < l \right\},$$

$\overline{Q} = \overline{Q^{(0)}} \cup \overline{Q^{(1)}}$ . Эту характеристику  $x + at = l$  будем называть критической по аналогии с работой [Ломовцев, Юрчук, 2016].

Из определения классического решения  $u \in C^{(4)}(\overline{Q})$  задачи (1)–(4) вытекают основные обязательные требования гладкости начальных и граничных данных

$$\begin{aligned} & \varphi_0 \in C^{(4)}(\overline{\Omega}), \quad \varphi_1 \in C^{(3)}(\overline{\Omega}), \quad \varphi_2 \in C^{(2)}(\overline{\Omega}), \quad \varphi_3 \in C^{(1)}(\overline{\Omega}), \\ & \mu_1 \in C^{(4)} \left[ \frac{l}{a}, \infty \right), \quad \mu_2 \in C^{(3)} \left[ \frac{l}{a}, \infty \right), \quad \nu_1 \in C^{(4)}[0, \infty), \quad \nu_2 \in C^{(3)}[0, \infty). \end{aligned} \quad (5)$$

Вычисляя соответствующие производные по  $t$  от граничных условий (4) при  $t = 0$ , по  $x$  из начальных условий (2) при  $x = 0$ , получаем простейшие условия согласования граничных условий (4) с начальными условиями (2) и уравнением (1):

$$\frac{d^s \nu_1(t)}{dt^s} \Big|_{t=0} = \varphi_s(l), \quad \frac{d^s \nu_2(t)}{dt^s} \Big|_{t=0} = \varphi'_s(l), \quad s = 0, 1, 2, 3, \quad (6)$$

$$v_1^{(4)}(0) = 4a\varphi_3'(l) - 6a^2\varphi_2''(l) + 4a^3\varphi_1^{(3)}(l) - a^4\varphi_0^{(4)}(l). \quad (7)$$

Условие согласования (7) вытекает из уравнения (1), начальных условий (2) и первого граничного условия из (4). Остальные достаточные условия согласования будут получены в процессе доказательства следующей теоремы.

**Теорема.** Пусть выполнены требования гладкости начальных и граничных данных  $\varphi_0 \in C^{(7)}(\overline{Q})$ ,  $\varphi_1 \in C^{(6)}(\overline{Q})$ ,  $\varphi_2 \in C^{(5)}(\overline{Q})$ ,  $\varphi_3 \in C^{(4)}(\overline{Q})$ ,  $\mu_1 \in C^{(5)}\left[\frac{l}{a}, \infty\right)$ ,  $v_1 \in C^{(5)}[0, \infty)$ ,  $\mu_2 \in C^{(4)}\left[\frac{l}{a}, \infty\right)$ ,  $v_2 \in C^{(4)}[0, \infty)$ , и выполнены основные условия согласования (6), (7) и дополнительные условия согласования

$$\begin{aligned} \mu_{i+1}\left(\frac{l}{a}\right) &= \frac{1}{6a^3} \left[ 6a^3\varphi_0^{(i)}(l) + 6a^2l\varphi_1^{(i)}(l) + 3al^2\varphi_2^{(i)}(l) + l^3\varphi_3^{(i)}(l) - 6a^3\varphi_0^{(i+1)}(l) \right] + \\ &+ \frac{1}{6a^3} \left[ -6a^2l^2\varphi_1^{(i+1)}(l) - 3al^3\varphi_2^{(i+1)}(l) + 3a^3l^2\varphi_0^{(i+2)}(l) + 3a^2l^3\varphi_1^{(i+2)}(l) - a^3l^3\varphi_0^{(i+3)}(l) \right], \\ \mu'_{i+1}\left(\frac{l}{a}\right) &= \frac{1}{6a^2} \left[ 6a^2\varphi_1^{(i)}(l) + 6al\varphi_2^{(i)}(l) + 3l^2\varphi_3^{(i)}(l) \right] + \\ &+ \frac{1}{6a^2} \left[ -6a^2l\varphi_1^{(i+1)}(l) - 6al^2\varphi_2^{(i+1)}(l) + l^3\varphi_3^{(i+1)}(l) \right] + \\ &+ \frac{1}{6a^2} \left[ 3a^2l^2\varphi_1^{(i+2)}(l) - 3al^3\varphi_2^{(i+2)}(l) + 3a^2l^3\varphi_1^{(i+3)}(l) - a^3l^3\varphi_0^{(i+4)}(l) \right], \\ \mu''_{i+1}\left(\frac{l}{a}\right) &= \frac{1}{6a} \left[ 6a\varphi_2^{(i)}(l) + 6l\varphi_3^{(i)}(l) - 6al\varphi_2^{(i+1)}(l) + 6l^2\varphi_3^{(i+1)}(l) - 15al^2\varphi_2^{(i+2)}(l) \right] + \\ &+ \frac{1}{6a} \left[ l^3\varphi_3^{(i+2)}(l) + 12a^2l^2\varphi_1^{(i+3)}(l) \right] + \\ &+ \frac{1}{6a} \left[ -3al^3\varphi_2^{(i+3)}(l) - 3a^3l^2\varphi_0^{(i+4)}(l) + 3a^2l^3\varphi_1^{(i+4)}(l) - a^3l^3\varphi_0^{(i+5)}(l) \right], \\ \mu_{i+1}^{(3)}\left(\frac{l}{a}\right) &= \frac{1}{6} \left[ 6\varphi_3^{(i)}(l) + 18l\varphi_3^{(i+1)}(l) - 36al\varphi_2^{(i+2)}(l) + 9l^2\varphi_3^{(i+2)}(l) + 24a^2l\varphi_1^{(i+3)}(l) \right] + \\ &+ \frac{1}{6} \left[ -24al^2\varphi_2^{(i+3)}(l) + l^3\varphi_3^{(i+3)}(l) - 6a^3l\varphi_0^{(i+4)}(l) + 21a^2l^2\varphi_1^{(i+4)}(l) - 3al^3\varphi_2^{(i+4)}(l) \right] + \\ &+ \frac{1}{6} \left[ -6a^3l^2\varphi_0^{(i+5)}(l) + 3a^2l^3\varphi_1^{(i+5)}(l) - a^3l^3\varphi_0^{(i+6)}(l) \right], \quad i = 0, 1, \\ \mu_1^{(4)}\left(\frac{l}{a}\right) &= \frac{a}{6} \left[ 24\varphi_3'(l) - 36a\varphi_2''(l) + 36l\varphi_3''(l) + 24a^2\varphi_1^{(3)}(l) - 84al\varphi_2^{(3)}(l) + 12l^2\varphi_3^{(3)}(l) \right] + \\ &+ \frac{a}{6} \left[ -6a^3\varphi_0^{(4)}(l) + 66a^2l\varphi_1^{(4)}(l) - 33al^2\varphi_2^{(4)}(l) + l^3\varphi_3^{(4)}(l) - 18a^3l\varphi_0^{(5)}(l) \right] + \\ &+ \frac{a}{6} \left[ 30a^2l^2\varphi_1^{(5)}(l) - 3al\varphi_2^{(5)}(l) - 9a^3l^2\varphi_0^{(6)}(l) + 3a^2l^3\varphi_1^{(6)}(l) - a^3l^3\varphi_0^{(7)}(l) \right], \\ \mu_2^{(4)}\left(\frac{l}{a}\right) - \frac{1}{a}\mu_1^{(5)}\left(\frac{l}{a}\right) &= \frac{a}{2} \left[ -12\varphi_3''(l) + 28a\varphi_2^{(3)}(l) - 8l\varphi_3^{(3)}(l) - 22a^2\varphi_1^{(4)}(l) \right] + \\ &+ \frac{a}{2} \left[ 22al\varphi_2^{(4)}(l) - l^2\varphi_3^{(4)}(l) + 6a^3\varphi_0^{(5)}(l) - 20a^2l\varphi_1^{(5)}(l) + 3al\varphi_2^{(5)}(l) \right] + \\ &+ \frac{a}{2} \left[ 6a^3l\varphi_0^{(6)}(l) - 3a^2l^2\varphi_1^{(6)}(l) + a^3l^2\varphi_0^{(7)}(l) \right], \\ v_1^{(5)}(0) - av_2^{(4)}(0) &= 6a^2\varphi_3''(l) - 12a^3\varphi_2^{(3)}(l) + 11a^4\varphi_1^{(4)}(l) - 3a^5\varphi_0^{(5)}(l). \end{aligned} \quad (8)$$

Тогда в классе функций  $C^{(4)}(\overline{Q})$  смешанная задача (1)–(4) имеет единственное классическое решение

$$\begin{aligned} u_0(t, x) &= \varphi_0(x + at) + t[\varphi_1(x + at) - a\varphi_0'(x + at)] + \frac{1}{2}t^2[\varphi_2(x + at) - 2a\varphi_1'(x + at) + \\ &+ a^2\varphi_0''(x + at)] + \frac{1}{6}t^3[\varphi_3(x + at) - 3a\varphi_2'(x + at) + 3a^2\varphi_1''(x + at) - a^3\varphi_0^{(3)}(x + at)], \quad (t, x) \in Q^{(0)}, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} u_1(t, x) &= \frac{(l-x)^2(l+2x)}{l^3} \mu_1\left(t + \frac{l}{a}\right) + \frac{x(l-x)^2}{l^2} \mu_2\left(t + \frac{l}{a}\right) + \\ &+ \frac{x^2(3l-2x)}{l^3} v_1\left(t - \frac{l-x}{a}\right) - \frac{x^2(l-x)}{l^2} v_2\left(t - \frac{l-x}{a}\right) - \\ &- \frac{x(l-x)^2}{al^2} \mu_1'\left(t + \frac{l}{a}\right) + \frac{x^2(l-x)}{al^2} v_1'\left(t - \frac{l-x}{a}\right), \quad (t, x) \in Q^{(1)}. \end{aligned} \quad (10)$$

**Доказательство.** Методом характеристик найдем общий вид классических решений уравнения (1) на  $Q$ .

**Лемма.** Общее решение уравнения (1) на  $Q$  из класса  $C^{(4)}(Q)$  четырежды непрерывно дифференцируемых функций представляется в виде суммы

$$u(t, x) = g_1(x + at) + tg_2(x + at) + t^2g_3(x + at) + t^3g_4(x + at) \quad (11)$$

четырех произвольных функций  $g_1, g_2, g_3, g_4 \in C^{(4)}(\mathbb{R})$  от аргумента  $x + at$ , где функции  $g_i : [0, \infty) \ni y \rightarrow g_i(y) \in \mathbb{R}, i = 1, 2, 3, 4$ .

**Доказательство леммы.** Сделаем замену переменных  $\xi = x + at, \eta = t$  в уравнении (1) и приведем его к каноническому виду  $\frac{\partial^4 \tilde{u}}{\partial \eta^4} = 0$ , где  $\tilde{u}(\eta, \xi) = u(t, x)$ . Интегрируя последнее уравнение четырежды по переменной  $\eta$  при каждом фиксированном  $\xi$ , находим  $\tilde{u}(\eta, \xi) = g_1(\xi) + \eta g_2(\xi) + \eta^2 g_3(\xi) + \eta^3 g_4(\xi)$ . Возвращаясь здесь к старым переменным, получаем общее решение (11), так как сделанная замена переменных не вырождена. Лемма доказана.

Из леммы следует, что для того, чтобы решить задачу (1)–(4), нам нужно определить функции  $g_i, i = 1, 2, 3, 4$ , так, чтобы выполнялись условия (2)–(4). Классическое решение задачи (1)–(4) в области  $Q^{(0)}$  совпадает с классическим решением задачи Коши (1), (2) в  $Q^{(0)}$ . Найдем ее решение. Удовлетворяя (11) начальным условиям (2) в указанном выше смысле, получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} g_1(x) &= \varphi_0(x), & g_2(x) + ag_1'(x) &= \varphi_1(x), & 2g_3(x) + 2ag_2'(x) + a^2g_1''(x) &= \varphi_2(x), \\ 6g_4(x) + 6ag_3'(x) + 3a^2g_2''(x) + a^3g_1^{(3)}(x) &= \varphi_3(x), & x \in (0, l). \end{aligned} \quad (12)$$

Система (12) решается стандартными методами, а именно, из первого уравнения выражаем  $g_1$ , затем дифференцируем первое уравнение и подставляем  $g_1'$  во второе, из которого выражаем  $g_2$  и т. д. На каждом шаге получается алгебраическое уравнение. Таким образом, из системы (12) однозначно определяются функции  $g_1, g_2, g_3, g_4$ , когда их аргумент  $y \in (0, l)$ . Обозначим их через  $g_1^{(0)}, g_2^{(0)}, g_3^{(0)}, g_4^{(0)}$ . Тогда

$$g_1^{(0)}(y) = \varphi_0(y), \quad (13)$$

$$g_2^{(0)}(y) = \varphi_1(y) - a\varphi_0'(y), \quad (14)$$

$$g_3^{(0)}(y) = \frac{1}{2} [\varphi_2(y) - 2a\varphi_1'(y) + a^2\varphi_0''(y)], \quad (15)$$

$$g_4^{(0)}(y) = \frac{1}{6} [\varphi_3(y) - 3a\varphi_2'(y) + 3a^2\varphi_1''(y) - a^3\varphi_0^{(3)}(y)]. \quad (16)$$

Следовательно, в представлении (11) по формулам (13)–(16) мы однозначно определили  $g_i(y), (i = \overline{1, 4})$ , когда  $y \in (0, l)$ , и тем самым решили задачу Коши (1), (2). Ее единственным формальным решением является функция

$$u_0(t, x) = g_1^{(0)}(x + at) + tg_2^{(0)}(x + at) + t^2g_3^{(0)}(x + at) + t^3g_4^{(0)}(x + at), \quad (17)$$

которая при подстановке в нее выражений (13)–(16) для  $g_i^{(0)}(y) (i = \overline{1, 4})$  совпадает с (9).

Поскольку надо, чтобы  $u_0 \in C^{(4)}(\overline{Q^{(0)}})$ , то достаточные требования на гладкость начальных функций имеют вид

$$\varphi_0 \in C^{(7)}(\overline{\Omega}), \varphi_1 \in C^{(6)}(\overline{\Omega}), \varphi_2 \in C^{(5)}(\overline{\Omega}), \varphi_3 \in C^{(4)}(\overline{\Omega}). \quad (18)$$

Как видно, условия (18) отличаются от условий (5). Повышение требований гладкости обусловлено тем, что уравнение (1) является нестрогим гиперболическим. Такая необходимость повышения гладкости была подмечена при решении смешанной задачи для нестрогим гиперболического уравнения второго порядка в [Ломовцев, Юрчук, 2016].

Как видно из алгоритма вывода формулы (17), задача Коши имеет единственное решение. Решив задачу Коши, мы нашли классическое решение исходной задачи в области  $Q^{(0)}$ . Будем искать теперь классическое решение задачи в  $Q^{(1)}$ . Для определения функций  $g_i(y) (i = \overline{1, 4})$  на оставшейся области определения  $Q^{(1)}$  воспользуемся граничными условиями (3)–(4).

На концах  $x = 0$  и  $x = l$  задаются граничные условия по два на каждом, можно найти поэтому значения функций  $g_i(y) (i = \overline{1, 4})$ . Сначала рассмотрим левую границу  $x = 0$ . Подставим в (11) и в его первую производную по  $x$  значение  $x = 0$  и получим систему вида

$$\begin{aligned} g_1(at) + tg_2(at) + t^2g_3(at) + t^3g_4(at) &= \mu_1(t), \\ g_1'(at) + tg_2'(at) + t^2g_3'(at) + t^3g_4'(at) &= \mu_2(t). \end{aligned} \quad (19)$$

В силу того, что  $t > l/a$ , то аргумент  $at > l$ , поэтому система (19) содержит четыре неизвестные функции. Преобразуем уравнения в (19). Сделаем замену  $y = at$ , первое уравнение продифференцируем по переменной  $y$  и вычтем из полученного второе уравнение системы. Система (19) примет вид

$$\begin{aligned} g_1(y) + \frac{y}{a} g_2(y) + \left(\frac{y}{a}\right)^2 g_3(y) + \left(\frac{y}{a}\right)^3 g_4(y) &= \mu_1\left(\frac{y}{a}\right), \\ g_2(y) + 2\frac{y}{a} g_3(y) + 3\left(\frac{y}{a}\right)^2 g_4(y) &= a\mu_1'\left(\frac{y}{a}\right) - a\mu_2\left(\frac{y}{a}\right). \end{aligned} \tag{20}$$

Перейдем к рассмотрению условий на правой границе  $x = l$ . Удовлетворив (11) условиям (4), получим

$$\begin{aligned} g_1(l + at) + tg_2(l + at) + t^2g_3(l + at) + t^3g_4(l + at) &= v_1(t), \\ g_2'(l + at) + tg_2'(l + at) + t^2g_3'(l + at) + t^3g_4'(l + at) &= v_2(t). \end{aligned} \tag{21}$$

Аналогично, как и в системе (19), сделаем замену  $y = l + at$ , тогда (21) примет вид

$$\begin{aligned} g_1(y) + \frac{y-l}{a} g_2(y) + \left(\frac{y-l}{a}\right)^2 g_3(y) + \left(\frac{y-l}{a}\right)^3 g_4(y) &= v_1\left(\frac{y-l}{a}\right), \\ g_2(y) + 2\frac{y-l}{a} g_3(y) + 3\left(\frac{y-l}{a}\right)^2 g_4(y) &= av_1'\left(\frac{y-l}{a}\right) - av_2\left(\frac{y-l}{a}\right). \end{aligned} \tag{22}$$

Таким образом, для определения функций  $g_i(y)$  ( $i = \overline{1,4}$ ) для  $y \in (l, \infty)$ , мы получили систему четырех уравнений (20), (22) с четырьмя неизвестными, решая которую определяем эти функции. Обозначим их через  $g_1^{(1)}, g_2^{(1)}, g_3^{(1)}, g_4^{(1)}$ . Тогда

$$\begin{aligned} g_1^{(1)}(y) &= \frac{(l-y)^2(l+2y)}{l^3} \mu_1\left(\frac{y}{a}\right) + \frac{y(l-y)^2}{l^2} \mu_2\left(\frac{y}{a}\right) + \frac{y^2(3l-2y)}{l^3} v_1\left(\frac{y-l}{a}\right) - \\ &\quad - \frac{y^2(l-y)}{l^2} v_2\left(\frac{y-l}{a}\right) - \frac{y(l-y)^2}{al^2} \mu_1'\left(\frac{y}{a}\right) + \frac{y^2(l-y)}{al^2} v_1'\left(\frac{y-l}{a}\right), \end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned} g_2^{(1)}(y) &= \frac{6ay(l-y)}{l^3} \mu_1\left(\frac{y}{a}\right) - \frac{a(l-3y)(l-y)}{l^2} \mu_2\left(\frac{y}{a}\right) - \frac{6ay(l-y)}{l^3} v_1\left(\frac{y-l}{a}\right) + \\ &\quad + \frac{ay(2l-3y)}{l^2} v_2\left(\frac{y-l}{a}\right) + \frac{(l-3y)(l-y)}{l^2} \mu_1'\left(\frac{y}{a}\right) - \frac{y(2l-3y)}{l^2} v_1'\left(\frac{y-l}{a}\right), \end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned} g_3^{(1)}(y) &= -\frac{3(l-2y)}{l^3} \mu_1\left(\frac{y}{a}\right) - \frac{a^2(2l-3y)}{l^2} \mu_2\left(\frac{y}{a}\right) + \frac{3a^2(l-2y)}{l^3} v_1\left(\frac{y-l}{a}\right) - \\ &\quad - \frac{a^2(l-3y)}{l^2} v_2\left(\frac{y-l}{a}\right) + \frac{a(2l-3y)}{l^2} \mu_1'\left(\frac{y}{a}\right) + \frac{a(l-3y)}{l^2} v_1'\left(\frac{y-l}{a}\right), \end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned} g_4^{(1)}(y) &= -\frac{2a^3}{l^3} \mu_1\left(\frac{y}{a}\right) - \frac{a^3}{l^2} \mu_2\left(\frac{y}{a}\right) + \frac{2a^3}{l^3} v_1\left(\frac{y-l}{a}\right) - \\ &\quad - \frac{a^3}{l^2} v_2\left(\frac{y-l}{a}\right) + \frac{a^2}{l^2} \mu_1'\left(\frac{y}{a}\right) + \frac{a^2}{l^2} v_1'\left(\frac{y-l}{a}\right). \end{aligned} \tag{26}$$

Из формул (23)–(26) видно, что функции  $g_i^{(1)}$  ( $i = \overline{1,4}$ ) в представлении (11) определяются единственным образом, поэтому формальное решение исходной задачи в области  $Q^{(1)}$  определяется однозначно и имеет вид

$$u_1(t, x) = g_1^{(1)}(x + at) + tg_2^{(1)}(x + at) + t^2g_3^{(1)}(x + at) + t^3g_4^{(1)}(x + at), \tag{27}$$

где  $g_i^{(1)}$ ,  $i = \overline{1,4}$ , находятся по формулам (23)–(26). Подставив их, после преобразований получим формулу (10). Из-за нестрогой гиперболичности уравнения (1) для того, чтобы  $u_1 \in C^{(4)}(\overline{Q^{(1)}})$  достаточно гладкости граничных данных  $\mu_i, v_1$  на единицу больше, чем указано в (5). Из вывода формулы (27) вытекает единственность решения (10) этой граничной задачи.

Решение  $u(t, x)$  в области  $Q$  определяется двумя формулами:  $u_0(t, x)$ , если  $(t, x) \in Q^{(0)}$ , и  $u_1(t, x)$ , если  $(t, x) \in Q^{(1)}$ . Теперь нужно показать, что на характеристике  $x + at = l$  решения (9) и (10) непрерывны и имеют непрерывные производные до четвертого порядка включительно, т. е. выполняются следующие соотношения:

$$\begin{aligned} u_0(t, l - at) = u_1(t, l - at), \quad \frac{\partial^s u_0}{\partial t^s} \Big|_{x=l-at} &= \frac{\partial^s u_1}{\partial t^s} \Big|_{x=l-at}, \quad \frac{\partial^s u_0}{\partial x^s} \Big|_{x=l-at} = \frac{\partial^s u_1}{\partial x^s} \Big|_{x=l-at}, \quad s = 1, 2, 3, 4, \\ \frac{\partial^2 u_0}{\partial t \partial x} \Big|_{x=l-at} &= \frac{\partial^2 u_1}{\partial t \partial x} \Big|_{x=l-at}, \quad \frac{\partial^3 u_0}{\partial t^2 \partial x} \Big|_{x=l-at} = \frac{\partial^3 u_1}{\partial t^2 \partial x} \Big|_{x=l-at}, \quad \frac{\partial^3 u_0}{\partial t \partial x^2} \Big|_{x=l-at} = \frac{\partial^3 u_1}{\partial t \partial x^2} \Big|_{x=l-at}, \\ \frac{\partial^4 u_0}{\partial t^3 \partial x} \Big|_{x=l-at} &= \frac{\partial^4 u_1}{\partial t^3 \partial x} \Big|_{x=l-at}, \quad \frac{\partial^4 u_0}{\partial t^2 \partial x^2} \Big|_{x=l-at} = \frac{\partial^4 u_1}{\partial t^2 \partial x^2} \Big|_{x=l-at}, \quad \frac{\partial^4 u_0}{\partial t \partial x^3} \Big|_{x=l-at} = \frac{\partial^4 u_1}{\partial t \partial x^3} \Big|_{x=l-at}. \end{aligned}$$



Выполнение этих соотношений приводит к дополнительным условиям согласования (8). Покажем, как получаются эти условия. Рассмотрим условие непрерывности функций  $u_0$  и  $u_1$  на  $x + at = l$ :

$$\begin{aligned} (u_0 - u_1)(t, l - at) &= \varphi_0(l) - v_1(0) + t \left[ av_2(0) + \varphi_1(l) - v_1'(0) - a\varphi_0'(l) \right] + \\ &+ \frac{1}{2} t^2 \left[ -\frac{2a}{l^2} \left( 3a\mu_1 \left( \frac{l}{a} \right) + al\mu_2 \left( \frac{l}{a} \right) - 3av_1(0) + 2alv_2(0) - l\mu_1' \left( \frac{l}{a} \right) - 2lv_1'(0) \right) \right] + \\ &+ \frac{1}{2} t^2 \left[ \varphi_2(l) - 2a\varphi_1'(l) + a^2\varphi_0''(l) \right] + \frac{1}{6} t^3 \left[ \varphi_3(l) - 3a\varphi_2'(l) + 3a^2\varphi_1''(l) - a^3\varphi_0^{(3)}(l) \right] + \\ &+ \frac{1}{6} t^3 \left[ \frac{6a^2}{l^3} \left( 2a\mu_1 \left( \frac{l}{a} \right) + al\mu_2 \left( \frac{l}{a} \right) - 2av_1(0) + alv_2(0) - l\mu_1' \left( \frac{l}{a} \right) - lv_1'(0) \right) \right]. \end{aligned}$$

Данное соотношение имеет вид  $A + Bt + Ct^2 + Dt^3$ . Преобразуем его с учетом условий согласования (6)–(7). Это условие непрерывности примет вид

$$\begin{aligned} (u_0 - u_1)(t, l - at) &= \\ &= \frac{1}{2} t^2 \left[ -\frac{2a}{l^2} \left( 3a\mu_1 \left( \frac{l}{a} \right) + al\mu_2 \left( \frac{l}{a} \right) - 3a\varphi_0(l) - 2l\varphi_1(l) + 2al\varphi_0'(l) - l\mu_1' \left( \frac{l}{a} \right) \right) \right] + \\ &+ \frac{1}{2} t^2 \left[ \varphi_2(l) - 2a\varphi_1'(l) + a^2\varphi_0''(l) \right] + \frac{1}{6} t^3 \left[ \varphi_3(l) - 3a\varphi_2'(l) + 3a^2\varphi_1''(l) - a^3\varphi_2(l) \right] + \\ &+ \frac{1}{6} t^3 \left[ \frac{6a^2}{l^3} \left( 2a\mu_1 \left( \frac{l}{a} \right) + al\mu_2 \left( \frac{l}{a} \right) - 2a\varphi_0(l) - l\varphi_0(l) - l\mu_1' \left( \frac{l}{a} \right) - al^2\varphi_0'(l) \right) \right]. \end{aligned}$$

Далее, учитывая линейную независимость функций  $1, t, t^2, t^3$ , потребуем, чтобы коэффициенты при  $t$  и  $t^2$  обращались в нуль. Получаем первые два уравнения системы

$$\begin{aligned} \varphi_2(l) - 2a\varphi_1'(l) + a^2\varphi_0''(l) - \frac{2a}{l^2} \left( 3a\mu_1 \left( \frac{l}{a} \right) + al\mu_2 \left( \frac{l}{a} \right) - 3a\varphi_0(l) - 2l\varphi_1(l) + 2al\varphi_0'(l) - l\mu_1' \left( \frac{l}{a} \right) \right) &= 0, \\ \varphi_3(l) - 3a\varphi_2'(l) + 3a^2\varphi_1''(l) - a^3\varphi_2(l) + \frac{6a^2}{l^3} \left( 2a\mu_1 \left( \frac{l}{a} \right) + al\mu_2 \left( \frac{l}{a} \right) - 2a\varphi_0(l) - l\varphi_0(l) - l\mu_1' \left( \frac{l}{a} \right) - \right. & \\ \left. - al^2\varphi_0'(l) \right) &= 0. \end{aligned}$$

Аналогично рассматриваются все оставшиеся соотношения. Каждое соотношение записывается в виде полинома третьей степени, учитывая вид решений (9), (10). Затем его коэффициенты упрощаются за счет условий (6), (7), после чего они приравниваются к нулю. Получается система уравнений, которую решаем относительно  $\mu_1^{(i)}(l/a)$ ,  $i = 0, 5$ ,  $\mu_2^{(i)}(l/a)$ ,  $i = 0, 4$ ,  $v_1^{(5)}(0)$ ,  $v_2^{(4)}(0)$ . Ее решение и есть условия (8). Устойчивость решения  $u_0$  по  $\varphi_j$ ,  $j = 0, 1, 2, 3$ , в  $\overline{Q^{(0)}}$  и  $u_1$  по  $\mu_i, v_i$ ,  $i = 1, 2$ , в  $\overline{Q^{(1)}}$  непосредственно следует из формул (9) и (10). Теорема доказана.

**Замечание.** В процессе решения смешанной задачи (1)–(4) использовались средства компьютерной алгебры – система Mathematica 11: для проверки решений  $u_0, u_1$  и проверки дополнительных условий согласования (8).

**Заключение.** В работе построено единственное классическое решение смешанной задачи в полуполосе для линейного нестрого гиперболического однородного уравнения четвертого порядка, оператор которого представляет собой произведение одинаковых операторов первого порядка. Получены достаточные требования гладкости входных данных и достаточные условия согласования граничных условий с начальными условиями и уравнением.

**Благодарность.** Авторы выражают благодарность доктору физико-математических наук, профессору Ломовцеву Федору Егоровичу за внимательное знакомство с рукописью статьи и сделанные ценные замечания.

#### Список литературы

1. Иврий Н. И., Петков В. М. 1974. Необходимые условия корректности задачи Коши для нестрогих гиперболических уравнений. Успехи матем. наук, 29(5): 3–70.
2. Ломовцев Ф. Е., Юрчук Н. И. 2016. Решение начально-краевой задачи для нестрогих гиперболического уравнения при смешанных граничных условиях в четверти плоскости. Весці НАН Б, 3: 51–57.
3. Ломовцев Ф. Е. 2019. Критерий корректности смешанной задачи для одного параболического уравнения на отрезке со смешанными граничными условиями на концах. Материалы Международной конференции «Воронежская зимняя математическая школа» (28 февраля – 2 марта 2019 г.) Воронеж: Издательский дом ВГУ: 184–185.

4. Чеб Е. С. 2017. Классическое решение смешанной задачи для линейного гиперболического уравнения четвертого порядка с кратными характеристиками. Вестник ГГУ. Сер. 2, 7(3): 33–41.
5. Sakamoto P. 1970. Mixed problems for hyperbolic equations I, II. J. Math. Kyoto Univ., 10(3): 403–417.
6. Than D. V., Mikio T., Nguen D. S. 2000. The characteristic method and its generalization for first-order nonlinear partial differential equations, CHAPMAN&HALL/CRC. Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, 101. Boca Raton-London-New York-Washington, 237 p.

### References

1. Ivrii N. I., Petkov V. M. 1974. Neobhodimye usloviya korrektnosti zadachi Koshi dlya nestrogo giperbolicheskikh uravneniy [Necessary condition for the Cauchy problem for non-strictly hyperbolic equations]. Uspehi matem. Nauk, 29(5): 3–70.
2. Lomovtsev F. E., Yurchuk N. I. 2016. Reshenie nachalno-kraevoy zadachi dlya nestrogo giperbolicheskogo uravneniya pri smeshannih granichnih usloviyah v chetverti ploskosti [Initial boundary value problem for non-strictly hyperbolic equation with mixed boundary condition in a quadrant]. Vesti NANB. Ser. fiz.-math.n., 3: 51-57.
3. Lomovtsev F. E. 2019. Kriteriy korrektnosti smeshannoy zadachi dlya odnogo parabolicheskogo uravneniya na otrezke so smeshannimi granichnimi usloviyami na koncah Materialy Mezhd. Konf. «Voronezhskaya zimnya matem shkola» (28.02-02.03 2019). Voronezh, VGU: 184-185.
4. Cheb E. S. 2017. Klassicheskoe reshenie smeshannoy zadachi dlya lineynogo giperbolicheskogo uravneniya chetvertogo poryadka s kratnimi harakteristikami [Classical solution of the mixed problem for linear hyperbolic fourth-order equation with multiple characteristics]. Vestnik GSU. S. 27(3): 33-41.
5. Sakamoto P. 1970. Mixed problems for hyperbolic equations I, II. J. Math. Kyoto Univ., 10(3): 403–417.
6. Than D. V., Mikio T., Nguen D. S. 2000. The characteristic method and its generalization for first-order nonlinear partial differential equations, CHAPMAN&HALL/CRC. Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, 101. Boca Raton-London-New York-Washington, 237 p.

Получена 10.01.2020

---

**Симинская Елена Сергеевна** – выпускница магистратуры ФПМИ Белорусского государственного университета

пр. Независимости, 4, г. Минск, Республика Беларусь, 220030

E-mail: [Slavelena16@gmail.com](mailto:Slavelena16@gmail.com)

**Чеб Елена Сергеевна** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры компьютерных технологий и систем ФПМИ Белорусского государственного университета

пр. Независимости, 4, г. Минск, Республика Беларусь, 220030

E-mail: [cheb@bsu.by](mailto:cheb@bsu.by)

## О ДВУХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ ЧАСТИЧНО ТОТАЛЬНО КОМПОЗИЦИОННЫХ ФОРМАЦИЙ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

В. В. Щербина

*Статья представлена членом редакционной коллегии В. Б. Васильевым*

Государственное учреждение образования «Институт подготовки научных кадров  
Национальной академии наук Беларуси»,  
г. Минск, 220049, Республика Беларусь

E-mail: [shcherbinavv@tut.by](mailto:shcherbinavv@tut.by)

**Аннотация.** В работе рассматриваются только конечные группы. Изучаются свойства решетки всех функторно замкнутых частично totally композиционных формаций. Доказано, что для любого подгруппового функтора  $\tau$  решетка  $c_{\omega_{\infty}}^{\tau}$  всех  $\tau$ -замкнутых totally  $\omega$ -композиционных формаций является алгебраической. Кроме того, установлена индуктивность данной решетки. В качестве следствия основного результата установлены алгебраичность и индуктивность решетки  $c_{p_{\infty}}^{\tau}$  всех  $\tau$ -замкнутых totally  $p$ -композиционных формаций, а также решетки  $c_{\infty}^{\tau}$  всех  $\tau$ -замкнутых totally композиционных формаций.

**Ключевые слова:** конечная группа, формация групп, totally  $\omega$ -композиционная формация, решетка формаций,  $\tau$ -замкнутая формация, алгебраическая решетка, индуктивная решетка.

**Для цитирования:** Щербина В. В. 2020. О двух задачах теории частично totally композиционных формаций конечных групп. Прикладная математика & Физика. 52(1): 18–32.

DOI 10.18413/2687-0959-2020-52-1-18-32.

---

---

## ON TWO PROBLEMS OF THE THEORY OF PARTIALLY TOTALLY COMPOSITION FORMATIONS OF FINITE GROUPS

V. V. Shcherbina

*Article submitted by a member of the editorial board V. B. Vasilyev*

State Institution of Education «Graduate School of the National Academy of Sciences of Belarus»,  
Minsk, 220049, Republic of Belarus

E-mail: [shcherbinavv@tut.by](mailto:shcherbinavv@tut.by)

Received December 25, 2019

**Abstract.** All groups considered in the paper are assumed to be finite. Further,  $\omega$  denotes some nonempty set of primes, and  $\tau$  is a subgroup functor in the sense of A.N. Skiba. Recall that a formation is a class of groups that is closed under taking homomorphic images and finite subdirect products. The paper studies properties of the lattice of all closed functorially totally partially saturated formations. We prove that for any subgroup functor  $\tau$ , the lattice  $c_{\omega_{\infty}}^{\tau}$  of all  $\tau$ -closed totally  $\omega$ -composition formations is algebraic. Furthermore, we prove that the lattice mentioned above is inductive. In particular, we show that the lattice  $c_{p_{\infty}}^{\tau}$  of all  $\tau$ -closed totally  $p$ -composition formations and the lattice  $c_{\infty}^{\tau}$  of all  $\tau$ -closed totally composition formations are both algebraic and inductive. Thus, new classes of algebraic and inductive lattices of formations are found.

**Key words:** finite group, formation of groups, totally  $\omega$ -composition formation, lattice of formations,  $\tau$ -closed formation, algebraic lattice, inductive lattice.

**For citation:** Shcherbina V. V. 2020. On two problems of the theory of partially totally composition formations of finite groups. Applied Mathematics & Physics. 52(1): 18–32 (in Russian).

DOI 10.18413/2687-0959-2020-52-1-18-32.

---

**Введение.** В работе рассматриваются только конечные группы. Мы будем использовать терминологию, принятую в работах Л. А. Шеметкова, А. Н. Скибы и других авторов [Шеметков, 1978; Шеметков, Скиба, 1989; Doerk, Hawkes, 1992; Скиба, 1997; Скиба, Шеметков, 2000; Воробьев, 2012].

Понятие формации было введено В. Гашюцом [Gaschuts, 1963] в связи с разработкой общих методов отыскания подгрупп в конечных разрешимых группах. Класс конечных групп называют *формацией*, если он замкнут относительно взятия гомоморфных образов и конечных подпрямых произведений. В той же работе В. Гашюца был впервые выделен важный для приложений класс *насыщенных* формаций и предложен способ конструирования такого рода формаций при помощи специальных функций. Установленная А. Н. Скибой [1986] модулярность решетки всех формаций, а также решетки всех насыщенных формаций, стала основой в использовании решеточных методов для решения многих открытых

вопросов теории формаций конечных групп. Основные результаты структурной теории формаций изложены в книгах Л. А. Шеметкова, А. Н. Скибы и других авторов [Шеметков, Скиба, 1989; Doerk, Hawkes, 1992; Скиба, 1997; Guo, 2000; Ballester-Bolinches, Ezquerro, 2006; Воробьев, 2012]. Ряд свойств решетки всех тотально насыщенных формаций установлен в работах А. Н. Скибы, Н. Н. Воробьева и других авторов [Скиба, 1997; Воробьев, 2000; Сафонов, 2007; Сафонов, 2008; Сафонов, 2010]. Изучению свойств решетки всех тотально композиционных формаций посвящены работы А. А. Царева [Tsarev, 2018a; Tsarev, 2019].

В 1999 году в теории формаций А. Н. Скибой и Л. А. Шеметковым был предложен подход, использующий идеи частичной [Шеметков, 1984] и кратной (тотальной) [Скиба, 1987] насыщенности формации, объединенные в понятии  $n$ -кратно (тотально)  $\omega$ -насыщенной формации [Скиба, Шеметков, 1999]. Дальнейшим развитием идей и результатов теории формаций явилось перенесение данного подхода на более широкий класс частично композиционных формаций [Скиба, Шеметков, 2000]. Особая роль частично тотально насыщенных (композиционных) формаций обусловлена прежде всего тем, что большинство наиболее известных конкретных классов конечных групп являются частично тотально насыщенными (композиционными) формациями, и поэтому они наиболее часто применяются в различных приложениях теории классов конечных групп. Изучение ряда свойств решетки частично тотально насыщенных формаций проведено в работах В. Г. Сафонова и других авторов [Сафонов, 2004; Сафонов, Сафонова, 2014; Сафонов, Сафонова, 2017; Щербина, Сафонов, 2019а, б]. Тем не менее в настоящее время решетка (частично) тотально композиционных формаций является одной из менее изученных решеток формаций конечных групп. Об этом свидетельствует ряд открытых вопросов, поставленных в работах А. Н. Скибы, Л. А. Шеметкова и других авторов [Скиба, Шеметков, 2000; Skiba, Vorob'ev, 2013; Tsarev, Vorob'ev, 2018]. В теории частично композиционных формаций А. Н. Скибой и Л. А. Шеметковым [2000] была установлена модулярность и алгебраичность решетки всех  $n$ -кратно  $\mathfrak{L}$ -композиционных формаций при любом натуральном  $n$ , а также поставлена следующая проблема: алгебраична ли решетка  $c_{\infty}^{\mathfrak{L}}$  всех тотально  $\mathfrak{L}$ -композиционных формаций (см. проблема 1 [Скиба, Шеметков, 2000]).

В совместной работе А. А. Царева и Н. Н. Воробьева [Tsarev, Vorob'ev, 2018] поставлены вопросы об алгебраичности и индуктивности решетки  $c_{\omega_{\infty}}^{\tau}$  всех  $\tau$ -замкнутых тотально  $\omega$ -композиционных формаций (см. вопрос 5.5(1) и (2) [Tsarev, Vorob'ev, 2018]).

В данной работе мы даем положительные ответы на эти вопросы: доказано, что решетка  $c_{\omega_{\infty}}^{\tau}$  всех  $\tau$ -замкнутых тотально  $\omega$ -композиционных формаций алгебраична (теорема 3.1), а также установлена индуктивность указанной решетки (теорема 2.2).

**1. Предварительные сведения.** В дальнейшем  $\omega$ ,  $\pi$  обозначают некоторые непустые множества простых чисел,  $p$  и  $q$  – некоторые простые числа,  $K \times A$  – полупрямое произведение группы  $K$  с некоторой группой операторов  $A$  этой группы. Для каждого множества простых чисел  $\pi$  через  $\pi'$  обозначается множество  $\mathbb{P} \setminus \pi$ , где  $\mathbb{P}$  – множество всех простых чисел. Символ  $\pi(G)$  обозначает множество всех различных простых делителей порядка группы  $G$ ,  $\pi(\mathfrak{X})$  – объединение множеств  $\pi(G)$  для всех групп  $G$  из  $\mathfrak{X}$ . Для произвольного класса групп  $\mathfrak{F} \supseteq (1)$  символ  $G^{\mathfrak{F}}$  обозначает пересечение всех таких нормальных подгрупп  $N$ , что  $G/N \in \mathfrak{F}$ , символ  $G_{\mathfrak{F}}$  – произведение всех нормальных  $\mathfrak{F}$ -подгрупп группы  $G$ . Символом (1) обозначается класс всех единичных групп. Символы  $\mathfrak{G}$ ,  $\mathfrak{G}_{\pi}$ ,  $\mathfrak{R}_p$ ,  $\mathfrak{S}_{\pi}$  и  $\mathfrak{N}_{\pi}$  обозначают класс всех групп,  $\pi$ -групп,  $p$ -групп, разрешимых  $\pi$ -групп и нильпотентных  $\pi$ -групп соответственно. Если  $\pi = \emptyset$ , то, по определению,  $\mathfrak{G}_{\emptyset} = \mathfrak{R}_{\emptyset} = \mathfrak{S}_{\emptyset} = (1)$ .

Полагают

$$O_p(G) = G_{\mathfrak{R}_p}, \quad O_{\pi}(G) = G_{\mathfrak{G}_{\pi}}, \quad R_{\omega}(G) = G_{\mathfrak{S}_{\omega}}, \quad F_p(G) = G_{\mathfrak{G}_p, \mathfrak{R}_p}.$$

Символ  $C^p(G)$  обозначает пересечение централизаторов всех тех главных факторов группы  $G$ , чьи композиционные факторы имеют простой порядок  $p$  (если в группе  $G$  нет таких факторов, то полагают  $C^p(G) = G$ ).

Неединичная группа  $G$  называется *монолитической*, если в ней имеется лишь одна минимальная нормальная подгруппа (*монолит* группы  $G$ ). Для произвольной совокупности групп символ  $(\mathfrak{X})$  обозначает абстрактное замыкание  $\mathfrak{X}$ , т. е. класс всех групп, изоморфных группам из  $\mathfrak{X}$ . Символы  $\mathcal{K}(\mathfrak{X})$  и  $\text{Com}(\mathfrak{X})$  обозначают класс всех тех простых групп и соответственно класс всех тех простых абелевых групп, которые встречаются в качестве композиционных факторов некоторых групп из  $\mathfrak{X}$ .

Класс всех простых групп мы обозначаем символом  $\mathfrak{P}$ . Для произвольного класса простых групп  $\mathfrak{T}$  через  $\mathfrak{T}'$  обозначено множество  $\mathfrak{P} \setminus \mathfrak{T}$ . Для произвольного непустого класса простых групп  $\mathfrak{L}$  через  $\mathfrak{L}^+$  обозначена совокупность всех абелевых групп из  $\mathfrak{L}$ , через  $\mathfrak{L}^-$  – совокупность всех простых неабелевых групп из  $\mathfrak{L}$  [Скиба, Шеметков, 2000].

Для произвольного класса простых групп  $\mathfrak{T}$  символ  $E(\mathfrak{T})$  обозначает класс всех таких групп, у которых все композиционные факторы принадлежат  $\mathfrak{T}$ . По определению, единичные группы принадлежат  $E(\mathfrak{T})$ .

Пусть  $f$  – произвольная функция вида

$$f : \omega \cup \{\omega'\} \rightarrow \{\text{формации групп}\}, \quad (1)$$

где  $f(\omega') \neq \emptyset$  (формационная  $\omega$ -функция).

Следуя [Скиба, Шеметков, 2000], сопоставим функции  $f$  класс групп

$$CF_\omega(f) = (G \mid G/R_\omega(G) \in f(\omega') \text{ и } G/C^p(G) \in f(p) \text{ для всех простых } p \in \pi(\text{Com}(G)) \cap \omega).$$

Для любой функции  $f$  вида (1) класс  $CF_\omega(f)$  является формацией. Если формация  $\mathfrak{F}$  такова, что  $\mathfrak{F} = CF_\omega(f)$  для некоторой функции вида (1), то  $\mathfrak{F}$  называется  $\omega$ -композиционной или разрешимо  $\omega$ -насыщенной формацией с  $\omega$ -композиционным спутником  $f$  [Скиба, Шеметков, 2000]. Если при этом все значения  $f$  лежат в  $\mathfrak{F}$ , то  $f$  называется внутренним (или приведенным) спутником.

Пусть  $\{f_i \mid i \in I\}$  – произвольный набор  $\omega$ -композиционных спутников. Через  $\bigcap_{i \in I} f_i$  обозначают такой  $\omega$ -композиционный спутник  $f$ , что  $f(a) = \bigcap_{i \in I} f_i(a)$  для всех  $a \in \omega \cup \{\omega'\}$ . Пусть  $f$  и  $h$  –  $\omega$ -композиционные спутники. Тогда полагают  $f \leq h$ , если  $f(a) \subseteq h(a)$  для всех  $a \in \omega \cup \{\omega'\}$ .

Согласно замечанию 1 [Скиба, Шеметков, 2000] любая  $\omega$ -композиционная формация  $\mathfrak{F}$  имеет такой  $\omega$ -композиционный спутник  $F$ , что  $F(\omega') = \mathfrak{F}$  и  $F(p) = \mathfrak{N}_p F(p) \subseteq \mathfrak{F}$  для всех  $p \in \omega$ , и, кроме того, для произвольного внутреннего  $\omega$ -композиционного спутника  $f$  формации  $\mathfrak{F}$  имеет место  $f \leq F$ . Спутник  $F$  называется каноническим  $\omega$ -композиционным спутником формации  $\mathfrak{F}$ .

Пусть  $\mathfrak{X}$  – произвольная совокупность групп,  $p$  – простое число. Тогда полагают (см. [Скиба, Шеметков, 2000]):

$$\mathfrak{X}(C^p) = \begin{cases} \text{form}(G/C^p(G) \mid G \in \mathfrak{X}), & \text{если } p \in \pi(\text{Com}(\mathfrak{X})) \cap \omega, \\ \emptyset, & \text{если } p \in \mathbb{P} \setminus (\text{Com}(\mathfrak{X})) \cap \omega. \end{cases}$$

Пусть  $A, B$  – группы,  $\varphi : A \rightarrow B$  – эпиморфизм,  $\Omega$  и  $\Sigma$  – некоторые системы подгрупп в  $A$  и  $B$  соответственно. Тогда через  $\Omega^\varphi$  обозначается множество  $\{H^\varphi \mid H \in \Omega\}$ , а через  $\Sigma^{\varphi^{-1}}$  – множество  $\{H^{\varphi^{-1}} \mid H \in \Sigma\}$  всех полных прообразов в  $A$  всех групп из  $\Sigma$ .

Пусть  $\mathfrak{X}$  – произвольный непустой класс групп и всякой группе  $G \in \mathfrak{X}$  сопоставлена некоторая система ее подгрупп  $\tau(G)$ . Говорят, что  $\tau$  – подгрупповой  $\mathfrak{X}$ -функтор в смысле А. Н. Скибы [1997] (или, иначе,  $\tau$ -подгрупповой функтор на  $\mathfrak{X}$ ), если для всякого эпиморфизма  $\varphi : A \rightarrow B$ , где  $A, B \in \mathfrak{X}$ , выполнены включения  $(\tau(A))^\varphi \subseteq \tau(B)$ ,  $(\tau(B))^{\varphi^{-1}} \subseteq \tau(A)$  и, кроме того, для любой группы  $G \in \mathfrak{X}$  имеет место  $G \in \tau(G)$ . Если  $\mathfrak{X} = \mathfrak{G}$  – класс всех групп, то символ  $\mathfrak{X}$  опускают и говорят просто о подгрупповом функторе. Через  $S(G)$  обозначают совокупность всех подгрупп группы  $G$ , через  $S_n(G)$  – совокупность всех нормальных подгрупп группы  $G$ . Подгрупповой функтор  $\tau$  называется тривиальным, если  $\tau(G) = \{G\}$ , единичным, если  $\tau(G) = S(G)$  для любой группы  $G$ . Класс групп  $\mathfrak{F}$  называется  $\tau$ -замкнутым, если  $\tau(G) \subseteq \mathfrak{F}$  для любой группы  $G \in \mathfrak{F}$ .

Будем рассматривать только такие подгрупповые функторы  $\tau$ , что для любой группы  $G$  все подгруппы, входящие в  $\tau(G)$ , субнормальны в  $G$ . Напомним, что решеткой называется частично упорядоченное множество  $L$ , в котором любые два элемента имеют точную нижнюю грань, обозначаемую  $x \wedge y$ , и точную верхнюю грань, обозначаемую  $x \vee y$  [Биркгоф, 1984, с. 18]. Решетка  $L$  называется полной, если любое ее подмножество  $X$  имеет в  $L$  точные верхнюю и нижнюю грани. Подрешеткой решетки  $L$  называется подмножество  $Y \subseteq L$  такое, что если  $a \in Y$ ,  $b \in Y$ , то  $a \wedge b \in Y$  и  $a \vee b \in Y$ . Подрешетка решетки сама является решеткой с теми же операциями объединения и пересечения. Элемент  $a$  решетки  $L$  называется компактным, если из  $a \leq \vee(x_j \mid j \in J)$  следует  $a \leq \vee(x_j \mid j \in F)$  для некоторого конечного подмножества  $F \subseteq J$ . Решетка  $L$  называется алгебраической, если каждый элемент  $a \in L$  является объединением компактных элементов решетки  $L$ .

Непустую совокупность формаций  $\Theta$  называют полной решеткой формаций [Скиба, 1997; Скиба, Шеметков, 2000], если пересечение любой совокупности формаций из  $\Theta$  снова принадлежит  $\Theta$  и во множестве  $\Theta$  имеется такая формация  $\mathfrak{F}$ , что  $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$  для любой формации  $\mathfrak{H} \in \Theta$ . Формации из  $\Theta$  называют  $\Theta$ -формациями. Спутник  $f$  называется  $\Theta$ -значным, если все его значения принадлежат  $\Theta$ . Символом  $\Theta^{\omega_c}$  обозначается совокупность всех формаций, которые обладают  $\omega$ -композиционным  $\Theta$ -значным спутником.

Полная решетка формаций  $\Theta$  называется частичной алгеброй формаций (см. [Скиба, 1997]), если для любого простого числа  $p$  и для любой формации  $\mathfrak{F} \in \Theta$  имеет место  $\mathfrak{N}_p \mathfrak{F} \in \Theta$ . Полная решетка формаций  $\Theta$  называется индуктивной (см. [Скиба, 1997]), если для любого набора  $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$  формаций  $\mathfrak{F}_i \in \Theta^{\omega_c}$  и для любого набора  $\{f_i \mid i \in I\}$  внутренних  $\omega$ -композиционных  $\Theta$ -значных спутников, где  $\mathfrak{F}_i = CF_\omega(f_i)$ , имеет место

$$\vee_{\Theta^{\omega_c}} \{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\} = CF_\omega(\vee_{\Theta} \{f_i \mid i \in I\}).$$

А. Н. Скибой введены кратно локальные формации [Скиба, 1987]. Следуя данной концепции, любая формация считается 0-кратно  $\omega$ -композиционной, а при  $n \geq 1$  формация  $\mathfrak{F}$  называется  $n$ -кратно  $\omega$ -композиционной, если  $\mathfrak{F} = CF_\omega(f)$ , где все значения  $f$  являются  $(n - 1)$ -кратно  $\omega$ -композиционными формациями [Скиба, Шеметков, 2000]. Формация  $\mathfrak{F}$  называется тотально  $\omega$ -композиционной, если она  $n$ -кратно  $\omega$ -композиционна для всех  $n$ . Если при этом формация  $\mathfrak{F}$  является  $\tau$ -замкнутой, то  $\mathfrak{F}$  называется  $\tau$ -замкнутой  $n$ -кратно  $\omega$ -композиционной и соответственно  $\tau$ -замкнутой тотально  $\omega$ -композиционной.

Символом  $c_{\omega_\infty}^\tau$  обозначают совокупность всех  $\tau$ -замкнутых тотально  $\omega$ -композиционных формаций. Если  $\omega = \mathbb{P}$ , то вместо символа  $c_{\mathbb{P}_\infty}^\tau$  используют символ  $c_\infty^\tau$ , обозначая совокупность всех  $\tau$ -замкнутых тотально композиционных формаций.

Если  $\tau$ -тривиальный подгрупповой функтор, то вместо символа  $c_{\omega_\infty}$  для обозначения совокупности всех тотально  $\omega$ -композиционных формаций обычно используют символ  $c_\infty^\omega$ .

Пусть  $\mathfrak{X}$  – некоторая совокупность групп. Через  $c_{\omega_\infty}^\tau \text{ form } \mathfrak{X}$  обозначают пересечение всех  $\tau$ -замкнутых тотально  $\omega$ -композиционных формаций, содержащих  $\mathfrak{X}$ . Формацию  $c_{\omega_\infty}^\tau \text{ form } \mathfrak{X}$  называют  $\tau$ -замкнутой тотально  $\omega$ -композиционной формацией, порожденной совокупностью групп  $\mathfrak{X}$ . Если  $\mathfrak{X} = \{G\}$ , то  $c_{\omega_\infty}^\tau \text{ form } \mathfrak{X} = c_{\omega_\infty}^\tau \text{ form } G$  называют *однопорожденной  $\tau$ -замкнутой тотально  $\omega$ -композиционной формацией*.

Для любых  $\tau$ -замкнутых тотально  $\omega$ -композиционных формаций  $\mathfrak{M}$  и  $\mathfrak{H}$  полагают

$$\mathfrak{M} \vee_{\omega_\infty}^{\tau c} \mathfrak{H} = c_{\omega_\infty}^\tau \text{ form } (\mathfrak{M} \cup \mathfrak{H}).$$

При этом для обозначения верхней грани в решетках  $c_\infty^\tau$  и  $c_\infty^\omega$  будем использовать символы  $\vee_\infty^{\tau c}$  и  $\vee_\infty^{\omega c}$  соответственно.

Ввиду теоремы 1.6.4 [Воробьев, 2012, с. 70] множество всех  $\tau$ -замкнутых тотально  $\omega$ -композиционных формаций  $c_{\omega_\infty}^\tau$ , частично упорядоченное по включению, относительно операций  $\cap$  и  $\vee_{\omega_\infty}^{\tau c}$  является полной решеткой формаций.

$\omega$ -Композиционный спутник, все значения которого суть  $c_{\omega_\infty}^\tau$ -формации, называется  $c_{\omega_\infty}^\tau$ -значным.

Пусть  $\{f_i \mid i \in I\}$  – некоторая система  $c_{\omega_\infty}^\tau$ -значных спутников. Тогда через  $\vee_{\omega_\infty}^{\tau c} (f_i \mid i \in I)$  обозначается такой спутник  $f$ , что  $f(a) = c_{\omega_\infty}^\tau \text{ form } (\cup_{i \in I} f_i(a))$  для всех  $a \in \omega \cup \{\omega'\}$ , если по крайней мере одна из формаций  $f_i(a) \neq \emptyset$ . В противном случае полагают  $f(a) = \emptyset$ .

Пусть  $\{f_i \mid i \in I\}$  – набор всех  $\omega$ -композиционных  $c_{\omega_\infty}^\tau$ -значных спутников формации  $\mathfrak{F}$ . Тогда в силу леммы 2 [Скиба, Шеметков, 2000]  $f = \bigcap_{i \in I} f_i$  –  $\omega$ -композиционный  $c_{\omega_\infty}^\tau$ -значный спутник формации  $\mathfrak{F}$ , называемый *минимальным*.

В дальнейшем нам понадобятся некоторые известные факты теории формаций конечных групп, которые мы сформулируем в виде следующих лемм.

**Лемма 1.1.** [Скиба, Шеметков, 2000]. Пусть  $\mathfrak{X}$  – непустая совокупность групп,  $\mathfrak{F} = \Theta^{\omega c} \text{ form } (\mathfrak{X})$ ,  $\pi = \pi(\text{Com}(\mathfrak{F})) \cap \omega$ , и пусть  $f$  – минимальный  $\omega$ -композиционный  $\Theta$ -значный спутник формации  $\mathfrak{F}$ . Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1)  $f(\omega') = \Theta \text{ form } (G/R_\omega(G) \mid G \in \mathfrak{F})$ ;
- 2)  $f(p) = \Theta \text{ form } (\mathfrak{X}(C^p))$  для всех  $p \in \pi$ ;
- 3)  $f(p) = \emptyset$  для всех  $p \in \omega \setminus \pi$ ;
- 4) если  $\mathfrak{F} = CF_\omega(h)$  и спутник  $h$   $\Theta$ -значен, то для всех  $p \in \pi$  имеет место

$$f(p) = \Theta \text{ form } (G \mid G \in h(p) \cap \mathfrak{F}, O_p(G) = 1)$$

и

$$f(\omega') = \Theta \text{ form } (G \mid G \in h(\omega') \cap \mathfrak{F}, R_\omega(G) = 1);$$

- 5) если  $E(\mathcal{K}(\mathfrak{X})) \in \Theta^{\omega c}$ , то  $\mathcal{K}(\mathfrak{X}) = \mathcal{K}(\mathfrak{F})$ .

**Лемма 1.2.** [Скиба, Шеметков, 2000]. Пусть формация  $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{H}$ , где  $\mathfrak{H} = CF_\omega(h)$ ,  $\mathfrak{M} = CF_\omega(m)$  и спутники  $h$  и  $m$  являются внутренними. Тогда если  $\mathfrak{R}_{\pi(\mathfrak{M})} \subseteq \mathfrak{M}$ , то  $\mathfrak{F} = CF_\omega(f)$ , где  $f(\omega') = \mathfrak{F}$  и

$$f(p) = \begin{cases} m(p)\mathfrak{H}, & \text{если } p \in \pi(\text{Com}(\mathfrak{M})) \cap \omega, \\ h(p), & \text{если } p \in \omega \setminus \pi(\text{Com}(\mathfrak{M})). \end{cases}$$

**Лемма 1.3.** [Воробьев, 2012, с. 66]. Пусть  $\mathfrak{F}$  – разрешимо  $\omega$ -насыщенная формация. Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) если  $\mathfrak{F}$  имеет  $\tau$ -значный  $\omega$ -композиционный спутник, то  $\mathfrak{F}$  –  $\tau$ -замкнутая формация;
- 2) если  $\mathfrak{F}$  –  $\tau$ -замкнутая формация, то ее канонический  $\omega$ -композиционный спутник является  $\tau$ -значным.

**Лемма 1.4.** [Скиба, Шеметков, 2000]. Пусть  $\Theta$  – такая полная решетка формаций, что для любой формации  $\mathfrak{H} \in \Theta$  формация  $\mathfrak{M}_p\mathfrak{H} \in \Theta$  при любом  $p \in \omega$ ,  $\Theta^{\omega c} \subseteq \Theta$ . Тогда если  $\mathfrak{F} = CF_\omega(F) \in \Theta^{\omega c}$ , то спутник  $F$   $\Theta$ -значен.

**Лемма 1.5.** [Сафонон, 2007]. Пусть  $\mathfrak{M}$  – непустая наследственная формация,  $\mathfrak{F}$  – непустая  $\tau$ -замкнутая формация. Тогда  $\mathfrak{M}\mathfrak{F}$  –  $\tau$ -замкнутая формация.

**Лемма 1.6.** [Скиба, 1997, с. 41]. Пусть  $A$  – монолитическая группа с неабелевым монолитом,  $\mathfrak{M}$  – некоторая  $\tau$ -замкнутая полуформация и  $A \in l_n^\tau \text{ form } \mathfrak{M}$ . Тогда  $A \in \mathfrak{M}$ .

**Лемма 1.7.** [Скиба, 1997, с. 179]. Решетка  $l_n^\tau$  является алгебраической.

**Лемма 1.8.** [Скиба, Шеметков, 2000]. Если  $\mathfrak{F} = CF_\omega(f)$  и

$$G/O_p(G) \in \mathfrak{F} \cap f(p)$$

для некоторого  $p \in \omega$ , то  $G \in \mathfrak{F}$ .

**Лемма 1.9.** [K. Doerk, T. Hawkes, 1992, p. 335]. Пусть  $\mathfrak{F}$ –формация,  $R/S$ –нормальная секция  $\mathfrak{F}$ –группы  $G$  и  $K$ –нормальная подгруппа группы  $G$ , содержащаяся в  $C_G(R/S)$ . Относительно следующего действия группы  $G/K$  на  $R/S$ :

$$(rS)^{gK} = g^{-1}rgS, \quad r \in R, g \in G,$$

составим полупрямое произведение  $H = (R/S) \rtimes (G/K)$ . Тогда  $H \in \mathfrak{F}$ .

**2. Индуктивность решетки  $c_{\omega_\infty}^\tau$  всех  $\tau$ -замкнутых тотально  $\omega$ -композиционных формаций.**

Целью данного раздела является доказательство индуктивности широкого класса полных решеток частично композиционных формаций при достаточно общих предположениях (теорема 2.1.). В качестве основного следствия мы получим индуктивность решетки  $c_{\omega_\infty}^\tau$  (теорема 2.2.).

Для доказательства теорем установим несколько вспомогательных утверждений.

**Лемма 2.1.** Решетка  $c_{\omega_\infty}^\tau$  всех  $\tau$ -замкнутых тотально  $\omega$ -композиционных формаций является частичной алгеброй формаций.

**Доказательство.** Проверим, что для любого простого числа  $p$  и всякой  $\tau$ -замкнутой тотально разрешимо  $\omega$ -насыщенной формации  $\mathfrak{H}$  формация  $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}_p\mathfrak{H}$  также является  $\tau$ -замкнутой тотально разрешимо  $\omega$ -насыщенной.

Поскольку формация  $\mathfrak{H}$ –  $\tau$ -замкнутая, то по лемме 1.5. формация  $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}_p\mathfrak{H}$  также является  $\tau$ -замкнутой формацией.

Докажем, что формация  $\mathfrak{M}$  тотально разрешимо  $\omega$ -насыщена. Обозначим через  $h$  внутренний  $\omega$ -композиционный  $c_{\omega_\infty}^\tau$ -значный спутник формации  $\mathfrak{H}$ .

Пусть вначале  $p \in \omega$ . Формация  $\mathfrak{N}_p$  имеет такой внутренний  $\omega$ -композиционный спутник  $t$ , что  $t(p) = (1)$ ,  $t(\omega') = (1)$  и  $t(q) = \emptyset$  для всех  $q \in \omega \setminus \{p\}$ . Ввиду леммы 1.2. формация  $\mathfrak{M}$  имеет спутник  $f$ , удовлетворяющий условиям:  $f(p) = \mathfrak{H}$ ,  $f(\omega') = \mathfrak{M}$  и  $f(q) = h(q)$  для любого  $q \in \omega \setminus \{p\}$ . Поскольку  $\mathfrak{H} \in c_{\omega_\infty}^\tau$ , то  $\mathfrak{M}$  является  $n$ -кратно разрешимо  $\omega$ -насыщенной для любого натурального  $n$ . Следовательно,  $\mathfrak{M}$ –тотально разрешимо  $\omega$ -насыщенная формация.

Пусть теперь  $p \notin \omega$ . В этом случае формация  $\mathfrak{N}_p$  имеет такой внутренний  $\omega$ -композиционный спутник  $t$ , что  $t(q) = \emptyset$  для всех  $q \in \omega$  и  $t(\omega') = \mathfrak{N}_p$ . Тогда согласно лемме 1.2., формация  $\mathfrak{M}$  имеет спутник  $f$ , такой, что  $f(q) = h(q)$  для любого  $q \in \omega$  и  $f(\omega') = \mathfrak{M}$ . Следовательно,  $\mathfrak{M}$ –тотально разрешимо  $\omega$ -насыщенная формация. Таким образом,  $\mathfrak{M} \in c_{\omega_\infty}^\tau$ . ■

**Лемма 2.2.** Пусть  $\mathfrak{F} = CF_\omega(F)$ –  $\tau$ -замкнутая тотально  $\omega$ -композиционная формация. Тогда канонический спутник  $F$  является  $c_{\omega_\infty}^\tau$ -значным.

**Доказательство.** Прежде всего заметим, что  $F(\omega') = \mathfrak{F} \in c_{\omega_\infty}^\tau$ . Кроме того, из леммы 1.1 следует, что если  $p \in \omega \setminus \pi(\text{Com}(\mathfrak{F}))$ , то  $F(p) = \emptyset \in c_{\omega_\infty}^\tau$ . Покажем, что для любого  $p \in \pi(\text{Com}(\mathfrak{F})) \cap \omega$  имеет место  $F(p) \in c_{\omega_\infty}^\tau$ . Поскольку  $\mathfrak{F} \in c_{\omega_\infty}^\omega$ , то  $\mathfrak{F} = CF_\omega(f)$ , где спутник  $f$  является  $c_{\omega_\infty}^\omega$ -значным. Поэтому  $\mathfrak{F} \in (c_{\omega_\infty}^\omega)^{\omega^c}$ . Тогда, учитывая очевидное включение  $(c_{\omega_\infty}^\omega)^{\omega^c} \subseteq c_{\omega_\infty}^\omega$  и лемму 2.1, из леммы 1.4 получаем  $F(p) \in c_{\omega_\infty}^\omega$ . Из первого утверждения леммы 1.3 следует, что формация  $F(p)$  является  $\tau$ -замкнутой. Таким образом, формация  $F(a) \in c_{\omega_\infty}^\tau$  для всех  $a \in \omega \cup \{\omega'\}$ . Следовательно, спутник  $F$  является  $c_{\omega_\infty}^\tau$ -значным. ■

Непосредственно из определений и первого утверждения леммы 1.3 вытекает следующая лемма.

**Лемма 2.3.** Пусть  $\mathfrak{F} = CF_\omega(f)$ , где  $f$ –  $\omega$ -композиционный  $c_{\omega_\infty}^\tau$ -значный спутник формации  $\mathfrak{F}$ . Тогда  $\mathfrak{F}$  является  $\tau$ -замкнутой тотально  $\omega$ -композиционной формацией.

Следующий результат является прямым следствием лемм 2.2 и 2.3.

**Лемма 2.4.** Справедливо равенство  $(c_{\omega_\infty}^\tau)^{\omega^c} = c_{\omega_\infty}^\tau$ .

В дальнейшем, учитывая замечание 3 [Скиба, Шеметков, 2000], мы полагаем  $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}^+$ , при этом  $\pi(\mathfrak{L}) = \omega$ . Учитывая также, что для любой полной решетки формаций  $\Theta$  совокупность  $\Theta^{\omega^c}$  всех формаций, которые имеют  $\omega$ -композиционный  $\Theta$ -значный спутник, – полная решетка формаций (см. подробнее [Скиба, Шеметков, 2000]), обозначим через  $\mathfrak{M}$  такую формацию из  $\Theta^{\omega^c}$ , что  $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{M}$  для всех  $\mathfrak{H} \in \Theta^{\omega^c}$ .

**Лемма 2.5.** Пусть  $\Theta$ – полная решетка формаций,  $\mathfrak{X}$ – такая непустая совокупность групп, что  $(\mathfrak{X}) \subseteq \mathfrak{M}$ ,  $\mathfrak{F} = \Theta^{\omega^c} \text{form}(\mathfrak{X})$ . Предположим также, что существуют такие классы простых групп  $\mathfrak{I}$  и  $\mathfrak{L}_1$ , что  $\mathcal{K}(\mathfrak{X}) \subseteq \mathfrak{I} \subseteq \mathcal{K}(\mathfrak{M})$ ,  $\mathfrak{I} \cap \mathfrak{L}_1 = \mathcal{K}(\mathfrak{X}) \cap \mathfrak{L}_1$ , причем  $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{L}_1$ . Тогда если  $E(\mathfrak{I}) \in \Theta^{\omega^c}$ , то

$$\mathcal{K}(\mathfrak{X}) \cap \mathfrak{L}_1 = \mathcal{K}(\mathfrak{F}) \cap \mathfrak{L}_1.$$

В частности,

$$\pi(\text{Com}(\mathfrak{X})) \cap \omega = \pi(\text{Com}(\mathfrak{F})) \cap \omega.$$

**Доказательство.** Поскольку  $\mathcal{K}(\mathfrak{X}) \subseteq \mathfrak{I}$  и  $E(\mathfrak{I}) \in \Theta^{\omega_c}$ , то, учитывая равенство  $\mathcal{K}(E(\mathfrak{I})) = \mathfrak{I}$ , имеем  $(\mathfrak{X}) \subseteq E(\mathfrak{I})$ . Поэтому  $\mathfrak{F} = \Theta^{\omega_c} \text{form}(\mathfrak{X}) \subseteq E(\mathfrak{I})$ . Из последнего включения в силу равенства  $\mathfrak{I} \cap \mathfrak{L}_1 = \mathcal{K}(\mathfrak{X}) \cap \mathfrak{L}_1$  получаем

$$\mathcal{K}(\mathfrak{F}) \cap \mathfrak{L}_1 \subseteq \mathfrak{I} \cap \mathfrak{L}_1 = \mathcal{K}(\mathfrak{X}) \cap \mathfrak{L}_1.$$

Из включения  $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}$  следует, что  $\mathcal{K}(\mathfrak{X}) \cap \mathfrak{L}_1 \subseteq \mathcal{K}(\mathfrak{F}) \cap \mathfrak{L}_1$ . Следовательно,

$$\mathcal{K}(\mathfrak{X}) \cap \mathfrak{L}_1 = \mathcal{K}(\mathfrak{F}) \cap \mathfrak{L}_1.$$

В частности, полагая  $\mathfrak{L}_1 = \mathfrak{L}$  и учитывая, что класс  $\mathfrak{L}$  содержит только абелевы простые группы (порядки которых принадлежат  $\omega$ ), из последнего равенства имеем

$$\text{Com}(\mathfrak{X}) \cap \mathfrak{L} = \text{Com}(\mathfrak{F}) \cap \mathfrak{L}.$$

Следовательно,

$$\pi(\text{Com}(\mathfrak{X})) \cap \omega = \pi(\text{Com}(\mathfrak{F})) \cap \omega,$$

что и завершает доказательство леммы. ■

**Лемма 2.6.** Пусть  $\mathfrak{I}$ -непустой класс простых групп,  $\mathfrak{R} = E(\mathfrak{I})$ , и пусть  $r$ -такой  $\omega$ -композиционный спутник, что  $r(\omega') = \mathfrak{R}$  и

$$r(p) = \begin{cases} \mathfrak{R}, & \text{если } p \in \pi(\text{Com}(\mathfrak{I})) \cap \omega, \\ \emptyset, & \text{если } p \in \omega \setminus \pi(\text{Com}(\mathfrak{I})). \end{cases}$$

Тогда  $\mathfrak{R} = CF_\omega(r)$ - $\tau$ -замкнутая тотально  $\omega$ -композиционная формация, а  $r = R$ - канонический  $c_{\omega_\infty}^\tau$ -значный спутник.

**Доказательство.** Заметим, что  $\mathcal{K}(\mathfrak{R}) = \mathcal{K}(E(\mathfrak{I})) = \mathfrak{I}$ . Поэтому  $\text{Com}(\mathfrak{R}) = \text{Com}(\mathfrak{I})$ . Пусть  $\pi = \pi(\text{Com}(\mathfrak{I})) \cap \omega$ .

Покажем, что  $\mathfrak{R} = CF_\omega(r)$ . Включение  $\mathfrak{R} \subseteq CF_\omega(r)$  очевидно. Предположим, что обратное включение неверно и  $G$  – группа минимального порядка из  $CF_\omega(r) \setminus \mathfrak{R}$  с монолитом  $P = G^{\mathfrak{R}}$ .

Если  $\pi(\text{Com}(P)) \cap \omega = \emptyset$ , то  $R_\omega(G) = 1$ . Значит,

$$G \cong G/1 = G/R_\omega(G) \in r(\omega') = \mathfrak{R}.$$

Противоречие.

Следовательно,  $\pi(\text{Com}(P)) \cap \omega \neq \emptyset$ . Пусть  $p \in \pi(\text{Com}(P)) \cap \omega$ . Тогда  $P$  – абелева  $p$ -группа. Если  $p \notin \pi$ , то ввиду условий  $r(p) = \emptyset$  и  $p \in \omega$ , имеем  $p \notin \pi(\text{Com}(G)) \cap \omega$ . Учитывая, что  $p \in \omega$ , получаем  $p \notin \pi(\text{Com}(G))$ . Противоречие. Значит,  $p \in \pi$ . Следовательно,

$$G \in \mathfrak{R}_p \mathfrak{R} = \mathfrak{R}_p E(\mathfrak{I}) = E(\mathfrak{I}) = \mathfrak{R}.$$

Вновь полученное противоречие показывает, что  $CF_\omega(r) \subseteq \mathfrak{R}$ . Таким образом,  $\mathfrak{R} = CF_\omega(r)$ . В таком случае формация  $\mathfrak{R}$  является  $n$ -кратно  $\omega$ -композиционной для любого натурального  $n$ . Следовательно,  $\mathfrak{R}$  – тотально  $\omega$ -композиционна.

Кроме того, несложно видеть, что  $\mathfrak{R} = E(\mathfrak{I})$  является  $S_n$ -замкнутой формацией. Поэтому, ввиду ограничения на подгрупповой функтор  $\tau$  (для любой группы  $G$  все подгруппы, входящие в  $\tau(G)$ , субнормальны в  $G$ ), окончательно заключаем, что  $\mathfrak{R}$  является  $\tau$ -замкнутой тотально  $\omega$ -композиционной формацией.

Поскольку для любого  $p \in \pi$  имеет место  $\mathfrak{R}_p \mathfrak{R} = \mathfrak{R}_p E(\mathfrak{I}) = E(\mathfrak{I}) = \mathfrak{R}$ , заключаем, что  $r$  является каноническим  $c_{\omega_\infty}^\tau$ -значным спутником формации  $\mathfrak{R}$  (см. также лемма 2.2). ■

**Лемма 2.7.** Пусть  $\mathfrak{X}$  – произвольная непустая совокупность групп и  $\mathfrak{F} = c_{\omega_\infty}^\tau \text{form} \mathfrak{X}$ . Тогда имеет место равенство

$$\text{Com}(\mathfrak{X}) = \text{Com}(\mathfrak{F}).$$

В частности,

$$\pi(\text{Com}(\mathfrak{X})) \cap \omega = \pi(\text{Com}(\mathfrak{F})) \cap \omega.$$

**Доказательство.** Обозначим через  $\mathfrak{I}^+$  класс всех простых абелевых групп, а через  $\mathfrak{I}^-$  – класс всех простых неабелевых групп ( $\mathfrak{I}^- = \mathfrak{I}' = \mathfrak{I} \setminus \mathfrak{I}^+$ ). Положим  $\mathfrak{I} = \text{Com}(\mathfrak{X}) \cup \mathfrak{I}^-$ ,  $\mathfrak{L}_1 = \mathfrak{I}^+$ ,  $\mathfrak{M} = \mathfrak{G}$  ( $\mathfrak{G}$  – класс всех групп). Покажем, что для решетки  $\Theta = c_{\omega_\infty}^\tau$  выполнены условия леммы 2.5.

Заметим сначала, что согласно теореме 1.6.4 [Воробьев, 2012, с. 70]  $\mathfrak{M} = \mathfrak{G}$  является наибольшим элементом решетки  $\Theta = c_{\omega_\infty}^\tau$ . Далее, несложно видеть, что ввиду выбора классов  $\mathfrak{I}$  и  $\mathfrak{L}_1$  имеют место включения  $\mathcal{K}(\mathfrak{X}) \subseteq \mathfrak{I} \subseteq \mathcal{K}(\mathfrak{M}) = \mathfrak{I}$ ,  $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{L}_1$ . Кроме того, так как  $\mathfrak{L}_1 = \mathfrak{I}^+$  – класс всех простых абелевых групп, то имеют место равенства

$$\mathfrak{I} \cap \mathfrak{L}_1 = \text{Com}(\mathfrak{I}) = \text{Com}(\mathfrak{X}) = \mathcal{K}(\mathfrak{X}) \cap \mathfrak{L}_1.$$



Наконец, из леммы 2.6 следует, что  $E(\mathfrak{X}) \in c_{\omega_\infty}^\tau$ .

Таким образом, все условия леммы 2.5 выполнены. Применяя ее с учетом равенства  $\mathfrak{L}_1 = \mathfrak{F}^+$ , получаем

$$\text{Com}(\mathfrak{X}) = \mathcal{K}(\mathfrak{X}) \cap \mathfrak{L}_1 = \mathcal{K}(\mathfrak{F}) \cap \mathfrak{L}_1 = \text{Com}(\mathfrak{F}).$$

Последнее утверждение леммы непосредственно следует из уже доказанного. ■

Ввиду лемм 2.4 и 2.7 из леммы 1.1 вытекает следующий результат.

**Лемма 2.8.** Пусть  $\mathfrak{X}$  – непустая совокупность групп,  $\mathfrak{F} = c_{\omega_\infty}^\tau \text{ form } \mathfrak{X}$ ,  $f$  – минимальный  $\omega$ -композиционный  $c_{\omega_\infty}^\tau$ -значный спутник формации  $\mathfrak{F}$ , и пусть  $\pi = \pi(\text{Com}(\mathfrak{X})) \cap \omega$ . Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1)  $f(\omega') = c_{\omega_\infty}^\tau \text{ form } (G/R_\omega(G) \mid G \in \mathfrak{X})$ ;
- 2)  $f(p) = c_{\omega_\infty}^\tau \text{ form } (G/C^p(G) \mid G \in \mathfrak{X})$  для всех  $p \in \pi$ ;
- 3)  $f(p) = \emptyset$  для всех  $p \in \omega \setminus \pi$ ;
- 4) если  $\mathfrak{F} = CF_\omega(h)$  и спутник  $h$   $c_{\omega_\infty}^\tau$ -значен, то для всех  $p \in \pi$  имеет место

$$f(p) = c_{\omega_\infty}^\tau \text{ form } (G \mid G \in h(p) \cap \mathfrak{F}, O_p(G) = 1)$$

и

$$f(\omega') = c_{\omega_\infty}^\tau \text{ form } (G \mid G \in h(\omega') \cap \mathfrak{F}, R_\omega(G) = 1);$$

- 5)  $\pi(\text{Com}(\mathfrak{X})) \cap \omega = \pi(\text{Com}(\mathfrak{F})) \cap \omega$ .

**Лемма 2.9.** Пусть  $\Theta$  – такая полная решетка формаций, что для любой непустой совокупности групп  $\mathfrak{X}$ , такой, что  $(\mathfrak{X}) \subseteq \mathfrak{M}$ , имеет место  $\pi(\text{Com}(\mathfrak{X})) \cap \omega = \pi(\text{Com}(\mathfrak{F})) \cap \omega$ , где  $\mathfrak{F} = \Theta^{\omega^c} \text{ form } (\mathfrak{X})$ . И пусть  $f_i$  – минимальный  $\omega$ -композиционный  $\Theta$ -значный спутник формации  $\mathfrak{F}_i \in \Theta^{\omega^c}$ , где  $i \in I$ . Тогда  $\vee_\Theta(f_i \mid i \in I)$  – минимальный  $\omega$ -композиционный  $\Theta$ -значный спутник формации  $\mathfrak{F} = \vee_{\Theta^{\omega^c}}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I)$ .

**Доказательство.** Пусть  $f = \vee_\Theta(f_i \mid i \in I)$  и  $h$  – минимальный  $\omega$ -композиционный  $\Theta$ -значный спутник формации  $\mathfrak{F}$ . Так как  $\mathfrak{F}_i \subseteq \mathfrak{M}$  для любого  $i \in I$ , то  $\cup_{i \in I} \mathfrak{F}_i \subseteq \mathfrak{M}$ . Следовательно, ввиду условия леммы, имеем  $\pi(\text{Com}(\cup_{i \in I} \mathfrak{F}_i)) \cap \omega = \pi(\text{Com}(\mathfrak{F})) \cap \omega$ . Пусть  $\pi = \pi(\text{Com}(\cup_{i \in I} \mathfrak{F}_i)) \cap \omega$ .

Покажем, что  $h = f$ . Если  $p \in \omega \setminus \pi$ , то согласно лемме 1.1 для любого  $i \in I$  имеет место  $f_i(p) = \emptyset$ . Значит,  $f(p) = \emptyset$ . Понятно также, что  $h(p) = \emptyset$ .

Пусть теперь  $p \in \pi \cap \omega$ . Тогда найдется такое  $i \in I$ , что  $f_i(p) \neq \emptyset$ . Ввиду леммы 1.1 имеют место равенства

$$\begin{aligned} h(p) &= \Theta \text{ form } (G/C^p(G) \mid G \in \cup_{i \in I} \mathfrak{F}_i) = \Theta \text{ form } (\cup_{i \in I} \Theta \text{ form } (G/C^p(G) \mid G \in \mathfrak{F}_i)) = \\ &= \Theta \text{ form } (\cup_{i \in I} f_i(p)) = (\vee_\Theta(f_i \mid i \in I))(p) = f(p). \end{aligned}$$

Кроме того, из леммы 1.1 следует, что

$$\begin{aligned} h(\omega') &= \Theta \text{ form } (G/R_\omega(G) \mid G \in \cup_{i \in I} \mathfrak{F}_i) = \Theta \text{ form } (\cup_{i \in I} \Theta \text{ form } (G/R_\omega(G) \mid G \in \mathfrak{F}_i)) = \\ &= \Theta \text{ form } (\cup_{i \in I} f_i(\omega')) = (\vee_\Theta(f_i \mid i \in I))(\omega') = f(\omega'). \end{aligned}$$

Таким образом,  $h = f$ . ■

Полагая в лемме 2.9  $\Theta = c_{\omega_\infty}^\tau$  и учитывая лемму 2.7, получаем следующую лемму.

**Лемма 2.10.** Пусть  $f_i$  – минимальный  $\omega$ -композиционный  $c_{\omega_\infty}^\tau$ -значный спутник  $\tau$ -замкнутой тотально  $\omega$ -композиционной формации  $\mathfrak{F}_i$ , где  $i \in I$ . Тогда  $\vee_{\omega_\infty}^{\tau^c}(f_i \mid i \in I)$  – минимальный  $\omega$ -композиционный  $c_{\omega_\infty}^\tau$ -значный спутник формации  $\mathfrak{F} = \vee_{\omega_\infty}^{\tau^c}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I)$ .

Теперь мы готовы доказать основной результат данного раздела.

**Теорема 2.1.** Пусть  $\Theta$  – такая полная решетка формаций, что для любой непустой совокупности групп  $\mathfrak{X}$ , такой, что  $(\mathfrak{X}) \subseteq \mathfrak{M}$ , имеет место  $\pi(\text{Com}(\mathfrak{X})) \cap \omega = \pi(\text{Com}(\mathfrak{F})) \cap \omega$ , где  $\mathfrak{F} = \Theta^{\omega^c} \text{ form } (\mathfrak{X})$ . И пусть для любой формации  $\mathfrak{H} \in \Theta$  формация  $\mathfrak{R}_p \mathfrak{H} \in \Theta$  для всех  $p \in \omega$ ,  $\Theta^{\omega^c} \subseteq \Theta$ . Тогда решетка формаций  $\Theta$  индуктивна.

**Доказательство.** Пусть  $\{\mathfrak{F}_i = CF_\omega(f_i) \mid i \in I\}$  – произвольный набор формаций из  $\Theta^{\omega^c}$ , где  $f_i$  – некоторый внутренний  $\omega$ -композиционный  $\Theta$ -значный спутник. Обозначим через  $\mathfrak{F}$  формацию  $\vee_{\Theta^{\omega^c}}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I)$ . Покажем, что  $\mathfrak{F} = CF_\omega(\vee_\Theta(f_i \mid i \in I))$ .

Введем следующие обозначения:  $h_i$  – минимальный  $\omega$ -композиционный  $\Theta$ -значный спутник формации  $\mathfrak{F}_i = CF_\omega(F_i)$ ,  $i \in I$ ,  $\mathfrak{F} = CF_\omega(F)$ ,  $h$  – минимальный  $\omega$ -композиционный  $\Theta$ -значный спутник формации  $\mathfrak{F}$ . Кроме того, считаем, что  $p \in \omega$ . Тогда согласно лемме 2.9  $h = \vee_\Theta(h_i \mid i \in I)$ . Ввиду замечания 1 [Скиба, Шеметков, 2000] и леммы 1.4 имеют место включения

$$h_i(p) \subseteq f_i(p) \subseteq \mathfrak{R}_p h_i(p) = F_i(p) \in \Theta.$$

Ввиду того, что

$$\mathfrak{N}_p h_i(p) \subseteq \mathfrak{N}_p(\vee_{\Theta}(h_i(p) \mid i \in I)) \text{ и } \mathfrak{N}_p(\vee_{\Theta}(h_i(p) \mid i \in I)) \in \Theta,$$

имеем

$$\Theta \text{form} \left( \bigcup_{i \in I} \mathfrak{N}_p h_i(p) \right) \subseteq \Theta \text{form} \left( \mathfrak{N}_p(\vee_{\Theta}(h_i(p) \mid i \in I)) \right) = \mathfrak{N}_p(\vee_{\Theta}(h_i(p) \mid i \in I)).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} h(p) &= \Theta \text{form} \left( \bigcup_{i \in I} h_i(p) \right) \subseteq \Theta \text{form} \left( \bigcup_{i \in I} f_i(p) \right) = f(p) \subseteq \Theta \text{form} \left( \bigcup_{i \in I} \mathfrak{N}_p h_i(p) \right) \subseteq \\ &\subseteq \mathfrak{N}_p(\vee_{\Theta}(h_i(p) \mid i \in I)) = \mathfrak{N}_p h(p) = F(p). \end{aligned}$$

Итак,  $h(p) \subseteq f(p) \subseteq F(p)$  для всех  $p \in \omega$ .

Кроме того, поскольку

$$h_i(\omega') \subseteq f_i(\omega') \subseteq F_i(\omega') = \mathfrak{F}_i \in \Theta^{\omega_c} \text{ и } \Theta^{\omega_c} \subseteq \Theta,$$

справедливы включения

$$\begin{aligned} h(\omega') &= \Theta \text{form} \left( \bigcup_{i \in I} h_i(\omega') \right) \subseteq \Theta \text{form} \left( \bigcup_{i \in I} f_i(\omega') \right) = f(\omega') \subseteq \Theta \text{form} \left( \bigcup_{i \in I} F_i(\omega') \right) = \\ &= \Theta \text{form} \left( \bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i \right) \subseteq \Theta^{\omega_c} \text{form} \left( \bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i \right) = \mathfrak{F} = F(\omega'). \end{aligned}$$

Значит,  $h(\omega') \subseteq f(\omega') \subseteq F(\omega')$ . Таким образом,  $h \leq f \leq F$ , и поэтому  $\mathfrak{F} = CF_{\omega}(f)$ . ■

Отметим, что доказанная теорема является обобщением соответствующего утверждения теоремы работы Н. Н. Воробьева [2000] на случай решеток частично композиционных формаций.

Из теоремы 2.1 ввиду доказательства леммы 4.6.1 [Воробьев, 2012, с. 213], а также лемм 4.6.3 и 4.6.4 [Воробьев, 2012, с. 216], вытекает

**Следствие 2.1.** [Воробьев, Царев, 2010; Жизневский, 2010]. *Решетка  $c_{\omega_n}^{\tau}$  всех  $\tau$ -замкнутых  $n$ -кратно  $\omega$ -композиционных формаций индуктивна.*

Учитывая леммы 2.1, 2.4 и 2.7, из теоремы 2.1 получаем следующий результат, который является положительным ответом на вопрос 5.5(2) [Tsarev, Vorob'ev, 2018].

**Теорема 2.2.** *Решетка  $c_{\omega_{\infty}}^{\tau}$  всех  $\tau$ -замкнутых totally  $\omega$ -композиционных формаций индуктивна.*

Поскольку каждая полная подрешетка индуктивной решетки также является индуктивной (см. [Скиба, 1997, с. 155]), из теоремы 2.2 получаем

**Следствие 2.2** *Каждая полная подрешетка решетки  $c_{\omega_{\infty}}^{\tau}$  индуктивна.*

Отметим также следующие важные следствия.

Если  $\tau$ -тривиальный подгрупповой функтор, то из теоремы 2.2 вытекает

**Следствие 2.3.** *Решетка  $c_{\omega_{\infty}}^{\omega}$  всех totally  $\omega$ -композиционных формаций индуктивна.*

В случае, когда  $\tau(G) = S_n(G)$  для любой группы  $G$ , из теоремы 2.2 получаем

**Следствие 2.4.** *Решетка всех нормально наследственных totally  $\omega$ -композиционных формаций индуктивна.*

Если  $\omega = \{p\}$ , то из теоремы 2.2 имеем

**Следствие 2.5.** *Решетка  $c_{p_{\infty}}^{\tau}$  всех  $\tau$ -замкнутых totally  $p$ -композиционных формаций индуктивна.*

Если  $\omega = \mathbb{P}$ -множество всех простых чисел, из теоремы 2.2 получаем

**Следствие 2.6.** [Tsarev, 2018]. *Решетка  $c_{\omega_{\infty}}^{\tau}$  всех  $\tau$ -замкнутых totally композиционных формаций индуктивна.*

### 3. Алгебраичность решетки $c_{\omega_{\infty}}^{\tau}$ всех $\tau$ -замкнутых totally $\omega$ -композиционных формаций.

Для доказательства алгебраичности решетки  $c_{\omega_{\infty}}^{\tau}$  нам понадобятся следующие вспомогательные утверждения.

**Лемма 3.1.** *Пусть  $\mathfrak{F}$  – непустая  $\tau$ -замкнутая формация,  $\pi$  – такое множество простых чисел, что  $\pi(\text{Com}(\mathfrak{F})) \cap \omega \subseteq \pi$ . Тогда формация  $\mathfrak{S}_{\pi} \mathfrak{F}$  является  $\tau$ -замкнутой totally  $\omega$ -композиционной формацией.*

**Доказательство.** Если  $\pi = \emptyset$ , то ввиду примера 1 [Скиба, Шеметков, 2000]  $\mathfrak{S}_{\emptyset} \mathfrak{F} = (1) \mathfrak{F} = \mathfrak{F}$  – totally  $\omega$ -композиционна, и утверждение леммы верно.

Предположим, что  $\pi \neq \emptyset$ . Покажем, что формация  $\mathfrak{S}_{\pi} \mathfrak{F}$  является totally разрешимо  $\omega$ -насыщенной. Пусть  $\mathfrak{I} = (Z_p \mid p \in \pi)$ , где  $Z_p$  – группа простого порядка  $p$ . Тогда очевидно,  $\mathfrak{S}_{\pi} = E(\mathfrak{I})$ . Заметим также, что  $\pi(\text{Com}(\mathfrak{I})) = \pi(\text{Com}(\mathfrak{S}_{\pi})) = \pi$ . Тогда ввиду леммы 2.6  $\mathfrak{S}_{\pi} = CF_{\omega}(K)$ , где  $K(\omega') = \mathfrak{S}_{\pi}$ ,  $K(p) = \mathfrak{S}_{\pi}$  при любом  $p \in \pi \cap \omega$  и  $K(p) = \emptyset$  при  $p \in \omega \setminus \pi$ . Из условия следует, что

$$\pi(\text{Com}(\mathfrak{F})) \cap \omega \subseteq \pi = \pi(\text{Com}(\mathfrak{S}_{\pi})).$$

Учитывая последнее включение, а также лемму 1.2, заключаем, что формация  $\mathfrak{S}_{\pi} \mathfrak{F}$  имеет такой  $\omega$ -композиционный спутник  $t$ , что  $t(\omega') = \mathfrak{S}_{\pi} \mathfrak{F}$ ,  $t(p) = K(p) \mathfrak{F} = \mathfrak{S}_{\pi} \mathfrak{F}$  при любом  $p \in \pi \cap \omega$  и  $t(p) = \emptyset$  при  $p \in \omega \setminus \pi$ .

$\omega \setminus \pi$  (см. также лемма 4.5 [Guo et al., 2007] и лемма 3.3.8 [Селькин, 2011]). Поэтому  $\mathfrak{S}_\pi \mathfrak{F}$  является  $n$ -кратно разрешимо  $\omega$ -насыщенной для любого натурального  $n$ . Следовательно,  $\mathfrak{S}_\pi \mathfrak{F}$  – тотально разрешимо  $\omega$ -насыщенная формация.

Поскольку формация  $\mathfrak{S}_\pi$  наследственна, то ввиду леммы 1.5 формация  $\mathfrak{S}_\pi \mathfrak{F}$  является  $\tau$ -замкнутой. Таким образом,  $\mathfrak{S}_\pi \mathfrak{F}$  –  $\tau$ -замкнутая тотально  $\omega$ -композиционная формация. ■

**Лемма 3.1.** Пусть  $\mathfrak{H} = c_{\omega_\infty}^\tau \text{form} \left( \bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i \right)$ , где  $\mathfrak{F}_i$  –  $\tau$ -замкнутая тотально  $\omega$ -композиционная формация ( $i \in I$ ),  $A \in \mathfrak{H}$  – монолитическая группа. Тогда если  $\text{Soc}(A)$  – неабелева группа, то  $A \in \bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i$ .

**Доказательство.** Пусть  $A$  – группа из условия леммы,  $\pi = \pi \left( \text{Com} \left( \bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i \right) \right) \cap \omega$ . Ввиду леммы 2.7

$$\pi \left( \text{Com} \left( \bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i \right) \right) \cap \omega = \pi \left( \text{Com}(\mathfrak{H}) \right) \cap \omega.$$

Значит,  $\pi = \pi \left( \text{Com}(\mathfrak{H}) \right) \cap \omega$ . Согласно лемме 3.1

$$\mathfrak{S}_\pi \tau \text{form} \left( \bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i \right) \in c_{\omega_\infty}^\tau.$$

Поэтому

$$c_{\omega_\infty}^\tau \text{form} \left( \bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i \right) \subseteq \mathfrak{S}_\pi \tau \text{form} \left( \bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i \right).$$

Значит,  $A \in \mathfrak{S}_\pi \tau \text{form} \left( \bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i \right)$ . Поскольку  $\text{Soc}(A)$  – неабелева группа, то

$$A \in \tau \text{form} \left( \bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i \right).$$

Тогда вследствие леммы 1.6 заключаем, что  $A \in \bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i$ . ■

Основным результатом работы является следующая теорема, которая дает положительный ответ на вопрос 5.5(1) [Tsarev, Vorob'ev, 2018].

**Теорема 3.1.** Решетка  $c_{\omega_\infty}^\tau$  всех  $\tau$ -замкнутых тотально  $\omega$ -композиционных формаций является алгебраической.

**Доказательство.** Покажем вначале, что для любой группы  $A$  однопорожденная  $\tau$ -замкнутая тотально  $\omega$ -композиционная формация  $\mathfrak{F} = c_{\omega_\infty}^\tau \text{form } A$  является компактным элементом решетки  $c_{\omega_\infty}^\tau$ .

Предположим противное. Тогда существуют группа  $A$  и формации  $\mathfrak{F}_i \in c_{\omega_\infty}^\tau$ , где  $i \in I$ , такие, что

$$\mathfrak{F} = c_{\omega_\infty}^\tau \text{form } A \subseteq \mathfrak{H} = c_{\omega_\infty}^\tau \text{form} \left( \bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i \right)$$

и, кроме того,

$$\mathfrak{F} = c_{\omega_\infty}^\tau \text{form } A \not\subseteq c_{\omega_\infty}^\tau \text{form} \left( \bigcup_{j \in J} \mathfrak{F}_j \right)$$

для любого конечного подмножества  $J \subset I$ . Пусть  $A$  – группа минимального порядка среди групп с таким свойством. Покажем, что группа  $A$  монолитична. Допустим, что  $N_1$  и  $N_2$  – две различные минимальные нормальные подгруппы группы  $A$ . Пусть  $\mathfrak{L} = c_{\omega_\infty}^\tau \text{form} (A/N_1)$ ,  $\mathfrak{M} = c_{\omega_\infty}^\tau \text{form} (A/N_2)$ .

Поскольку  $|A/N_1| < |A|$  и  $|A/N_2| < |A|$ , то ввиду выбора группы  $A$  из включений

$$\mathfrak{L} = c_{\omega_\infty}^\tau \text{form } A/N_1 \subseteq \mathfrak{H} = c_{\omega_\infty}^\tau \text{form} \left( \bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i \right),$$

$$\mathfrak{M} = c_{\omega_\infty}^\tau \text{form } A/N_2 \subseteq \mathfrak{H} = c_{\omega_\infty}^\tau \text{form} \left( \bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i \right)$$

следует, что найдутся такие наборы индексов  $i_1, \dots, i_k \in I$  и  $j_1, \dots, j_l \in I$ , что

$$\mathfrak{L} \subseteq c_{\omega_\infty}^\tau \text{form} (\mathfrak{F}_{i_1} \cup \dots \cup \mathfrak{F}_{i_k}),$$

$$\mathfrak{M} \subseteq c_{\omega_\infty}^\tau \text{form} (\mathfrak{F}_{j_1} \cup \dots \cup \mathfrak{F}_{j_l}).$$

Следовательно,

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{L} \vee_{\omega_\infty}^\tau \mathfrak{M} \subseteq c_{\omega_\infty}^\tau \text{form} (\mathfrak{F}_{i_1} \cup \dots \cup \mathfrak{F}_{i_k} \cup \mathfrak{F}_{j_1} \cup \dots \cup \mathfrak{F}_{j_l}).$$

Получили противоречие. Значит,  $A$  – монолитическая группа.

Пусть  $P = \text{Soc}(A)$ . Предположим, что  $P$  – неабелева группа. Тогда, учитывая условие  $A \in c_{\omega_\infty}^\tau \text{form} \left( \bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i \right)$  и лемму 3.2, имеем  $A \in \bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i$ . Поэтому существует такой индекс  $i_0 \in I$ , что  $A \in \mathfrak{F}_{i_0}$ . Учитывая, что  $\mathfrak{F}_{i_0}$  –  $c_{\omega_\infty}^\tau$ -формация, имеем  $\mathfrak{F} = c_{\omega_\infty}^\tau \text{form } A \subseteq \mathfrak{F}_{i_0}$ . Противоречие.

Следовательно,  $P$  – абелева  $p$ -группа для некоторого простого числа  $p$ . Пусть

$$\pi = \pi \left( \text{Com} \left( \bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i \right) \right) \cap \omega.$$

Предположим, что  $p \notin \omega$ . Тогда  $p \notin \pi$ . Ввиду леммы 3.1  $\mathfrak{S}_\pi \tau \text{form} \left( \bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i \right) \in c_{\omega_\infty}^\tau$ . Значит,

$$\mathfrak{S} = c_{\omega_\infty}^\tau \text{form} \left( \bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i \right) \subseteq \mathfrak{S}_\pi \tau \text{form} \left( \bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i \right).$$

Так как

$$A \in \mathfrak{S} = c_{\omega_\infty}^\tau \text{form} \left( \bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i \right),$$

то имеет место

$$A \in \mathfrak{S}_\pi \tau \text{form} \left( \bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i \right).$$

Поскольку  $p \notin \pi$ , то

$$A \in \tau \text{form} \left( \bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i \right).$$

Тогда, согласно лемме 1.7, найдутся такие индексы  $i_1, \dots, i_m \in I$ , что

$$\tau \text{form} A \subseteq \tau \text{form} (\mathfrak{F}_{i_1} \cup \dots \cup \mathfrak{F}_{i_m}).$$

Из включения

$$\tau \text{form} (\mathfrak{F}_{i_1} \cup \dots \cup \mathfrak{F}_{i_m}) \subseteq c_{\omega_\infty}^\tau \text{form} (\mathfrak{F}_{i_1} \cup \dots \cup \mathfrak{F}_{i_m}),$$

следует, что

$$\tau \text{form} A \subseteq c_{\omega_\infty}^\tau \text{form} (\mathfrak{F}_{i_1} \cup \dots \cup \mathfrak{F}_{i_m}).$$

Следовательно,

$$c_{\omega_\infty}^\tau \text{form} A \subseteq c_{\omega_\infty}^\tau \text{form} (\mathfrak{F}_{i_1} \cup \dots \cup \mathfrak{F}_{i_m}).$$

Противоречие. Поэтому  $p \in \omega$ . Так как  $A/P \in \mathfrak{S}$  и  $|A/P| < |A|$ , то в силу выбора группы  $A$  существует такой набор индексов  $i_1, \dots, i_s \in I$ , что

$$A/P \in c_{\omega_\infty}^\tau \text{form} (\mathfrak{F}_{i_1} \cup \dots \cup \mathfrak{F}_{i_s}).$$

Пусть  $T = P \lambda (A/C_A(P))$ . Поскольку  $A \in \mathfrak{F}$ , то согласно лемме 1.9  $T \in \mathfrak{F}$ . Значит,  $T \in \mathfrak{S}$ .

Предположим, что  $|T| < |A|$ . Тогда ввиду выбора группы  $A$  найдутся такие индексы  $j_1, \dots, j_t \in I$ , что

$$T \in c_{\omega_\infty}^\tau \text{form} (\mathfrak{F}_{j_1} \cup \dots \cup \mathfrak{F}_{j_t}).$$

Пусть  $\mathfrak{B} = c_{\omega_\infty}^\tau \text{form} (\mathfrak{F}_{i_1} \cup \dots \cup \mathfrak{F}_{i_s} \cup \mathfrak{F}_{j_1} \cup \dots \cup \mathfrak{F}_{j_t})$ ,  $v$  – некоторый  $\omega$ -композиционный спутник формации  $\mathfrak{B}$ .

Покажем, что в таком случае  $A \in \mathfrak{B}$ . Ясно, что  $T \in \mathfrak{B}$  и  $A/P \in \mathfrak{B}$ . Из определения группы  $T$  также следует, что

$$A/C_A(P) \cong T/P = T/C_T(P) = T/C^P(T) \in v(p).$$

Пусть  $C^P(A/P) = \tilde{C}/P$ . Поскольку  $A/P \in \mathfrak{B}$ , то имеет место

$$A/\tilde{C} \cong (A/P)/(\tilde{C}/P) = (A/P)/C^P(A/P) \in v(p).$$

Учитывая, что  $C^P(A) = \tilde{C} \cap C_A(P)$ , получаем

$$A/C^P(A) = A/(\tilde{C} \cap C_A(P)) \in v(p).$$

Кроме того, поскольку  $P \subseteq R_\omega(A)$  и  $P \subseteq C^q(A)$  для всех простых  $q \neq p$ , то

$$R_\omega(A/P) = R_\omega(A)/P \text{ и } C^q(A/P) = C^q(A)/P.$$

Снова принимая во внимание, что  $A/P \in \mathfrak{B}$ , имеем

$$A/R_\omega(A) \cong (A/P)/(R_\omega(A)/P) = (A/P)/R_\omega(A/P) \in v(\omega')$$

и

$$A/C^q(A) \cong (A/P)/(C^q(A)/P) = (A/P)/C^q(A/P) \in v(q)$$

для любого  $q \in (\pi(\text{Com}(A)) \cap \omega) \setminus \{p\}$ . Таким образом,

$$A/C^r(A) \in v(r)$$

для всех  $\pi(\text{Com}(A)) \cap \omega$ . Следовательно,  $A \in \mathfrak{B}$ . В таком случае

$$\mathfrak{F} = c_{\omega_\infty}^\tau \text{form} A \subseteq \mathfrak{B} = c_{\omega_\infty}^\tau \text{form} (\mathfrak{F}_{i_1} \cup \dots \cup \mathfrak{F}_{i_s} \cup \mathfrak{F}_{j_1} \cup \dots \cup \mathfrak{F}_{j_t}).$$

Противоречие.

Поэтому  $|T| = |A|$ . Следовательно,  $P = C_A(P)$ , что влечет

$$P = C_A(P) = C^P(G) = F_p(A) = F(A) = O_p(A).$$

Пусть  $f_i$  и  $h$  – минимальные  $\omega$ -композиционные  $c_{\omega_\infty}^\tau$ -значные спутники формаций  $\mathfrak{F}_i$  и  $\mathfrak{H}$  соответственно ( $i \in I$ ). Тогда ввиду леммы 2.10

$$h = \vee_{\omega_\infty}^{\tau^c} (f_i \mid i \in I).$$

Поскольку  $P = C^P(A)$  и  $A \in \mathfrak{H}$ , то

$$A/P = A/C^P(A) \in h(p) = (\vee_{\omega_\infty}^{\tau^c} (f_i \mid i \in I))(p) = \vee_{\omega_\infty}^{\tau^c} (f_i(p) \mid i \in I).$$

Так как  $|A/P| < |A|$ , то в силу выбора группы  $A$  существует такой набор индексов  $\hat{J} = \{j_1, \dots, j_n\}$ , что

$$A/P \in \vee_{\omega_\infty}^{\tau^c} (f_j(p) \mid j \in \hat{J}).$$

Вследствие леммы 2.10  $w = \vee_{\omega_\infty}^{\tau^c} (f_j \mid j \in \hat{J})$  – минимальный  $\omega$ -композиционный  $c_{\omega_\infty}^\tau$ -значный спутник формации

$$\mathfrak{W} = \vee_{\omega_\infty}^{\tau^c} (\mathfrak{F}_j \mid j \in \hat{J}).$$

Следовательно,

$$A/O_p(A) = A/P \in \vee_{\omega_\infty}^{\tau^c} (f_j(p) \mid j \in \hat{J}) = (\vee_{\omega_\infty}^{\tau^c} (f_j \mid j \in \hat{J}))(p) = w(p).$$

Поскольку спутник  $w$  – внутренний, то, применяя лемму 1.8, заключаем, что группа  $A \in \mathfrak{W}$ . Следовательно,

$$\mathfrak{F} = c_{\omega_\infty}^\tau \text{ form } A \subseteq \mathfrak{W} = \vee_{\omega_\infty}^{\tau^c} (\mathfrak{F}_j \mid j \in \hat{J}).$$

Полученное противоречие показывает, что  $\mathfrak{F}$  – компактный элемент решетки  $c_{\omega_\infty}^\tau$ . Поскольку любая  $\tau$ -замкнутая тотально  $\omega$ -композиционная формация является объединением своих однорожденных  $\tau$ -замкнутых тотально  $\omega$ -композиционных подформаций в решетке  $c_{\omega_\infty}^\tau$ , то решетка  $c_{\omega_\infty}^\tau$  алгебраична.

Заметим, что ввиду леммы 4.8.1 [Воробьев, 2012, с. 247] (см. также лемма 4.1(a) [Skiba, Vorob'ev, 2013]) компактными элементами решетки  $c_{\omega_\infty}^\tau$  являются в точности однорожденные формации из  $c_{\omega_\infty}^\tau$ . ■

Поскольку каждая полная подрешетка алгебраической решетки формаций также является алгебраической решеткой (см. [Щербина, Сафонов, 2019б]), то из теоремы 3.1 получаем

**Следствие 3.1.** *Каждая полная подрешетка решетки  $c_{\omega_\infty}^\tau$  является алгебраической.*

Отметим также другие следствия доказанной теоремы. Следующее следствие является решением проблемы 1 [Скиба, Шеметков, 2000]. Если  $\tau$ -тривиальный подгрупповой функтор, то из теоремы 3.1 получаем

**Следствие 3.2.** *Решетка  $c_\infty^\omega$  всех тотально  $\omega$ -композиционных формаций является алгебраической.*

В случае, когда  $\tau(G) = S_n(G)$  для любой группы  $G$ , из теоремы 3.1 имеем

**Следствие 3.3.** *Решетка всех нормально наследственных тотально  $\omega$ -композиционных формаций является алгебраической.*

Если  $\omega = \{p\}$ , то из теоремы 3.1 получаем

**Следствие 3.4.** *Решетка  $c_{p_\infty}^\tau$  всех  $\tau$ -замкнутых тотально  $p$ -композиционных формаций является алгебраической.*

Если  $\omega = \mathbb{P}$  – множество всех простых чисел, то из теоремы 3.1 вытекает

**Следствие 3.5.** [Tsarev, 2019b]. *Решетка  $c_\infty^\tau$  всех  $\tau$ -замкнутых тотально композиционных формаций является алгебраической.*

В случае  $\omega = \mathbb{P}$  для тривиального подгруппового функтора  $\tau$  из теоремы 3.1 вытекает

**Следствие 3.6.** [Tsarev, 2019a]. *Решетка  $c_\infty$  всех тотально композиционных формаций является алгебраической.*

**Заключение.** В работе получены положительные ответы двух открытых проблем теории решеток частично композиционных формаций: А. Н. Скибы и Л. А. Шеметкова об алгебраичности решетки всех (функторно замкнутых) частично тотально композиционных формаций, а также А. А. Царева и Н. Н. Воробьева об индуктивности указанной решетки. В качестве следствия основного результата установлены алгебраичность и индуктивность решетки  $c_{p_\infty}^\tau$  всех  $\tau$ -замкнутых тотально  $p$ -композиционных формаций, а также решетки  $c_\infty^\tau$  всех  $\tau$ -замкнутых тотально композиционных формаций. Аналогичные результаты получены для решеток функторно замкнутых частично тотально композиционных формаций, соответствующих некоторым подгрупповым функторам  $\tau$ . Тем самым найдены новые классы алгебраических и индуктивных решеток формаций. Полученные результаты могут быть использованы в исследованиях по теории решеток частично композиционных формаций конечных групп.

**Благодарность.** Автор выражает искреннюю признательность В. Г. Сафонову за полезные обсуждения работы.

## Список литературы

1. Биркгоф Г. 1984. Теория решеток. Пер. с англ. М., Наука, 568 с.
2. Воробьев Н. Н. 2000. Об индуктивных решетках формаций и классов Фиттинга. Доклады НАН Беларуси, 44(3): 21–24.
3. Воробьев Н. Н. 2012. Алгебра классов конечных групп. Витебск, «Витебский государственный университет имени П. М. Машерова», 322 с.
4. Воробьев Н. Н., Царев А. А. 2010. О модулярности решетки  $\tau$ -замкнутых  $n$ -кратно  $\omega$ -композиционных формаций. Украинский математический журнал, 62(4): 453–463.
5. Жизневский П. А. 2010. О модулярности и индуктивности решетки всех  $\tau$ -замкнутых  $n$ -кратно  $\omega$ -композиционных формаций конечных групп. Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины, 58(1): 185–191.
6. Сафонов В. Г. 2004. О totally  $\omega$ -насыщенных формациях конечных групп. Препринт, № 7. Гомель, «Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины», 18 с.
7. Сафонов В. Г. 2007. Характеризация разрешимых однопорожденных totally насыщенных формаций конечных групп. Сибирский математический журнал, 48(1): 185–191. DOI: 10.1007/s11202-007-0015-3.
8. Сафонов В. Г. 2010.  $\mathfrak{G}$ -отделимость решетки  $\tau$ -замкнутых totally насыщенных формаций. Алгебра и логика, 49(5): 690–702. DOI: 10.1007/s10469-010-9110-9.
9. Сафонов В. Г., Сафонова И. Н. 2014. О минимальных totally  $\omega$ -насыщенных ненильпотентных формациях конечных групп. Вестник Витебского государственного университета, 84(6): 9–15.
10. Сафонов В. Г., Сафонова И. Н. 2017. Отделимость решетки  $\tau$ -замкнутых totally  $\omega$ -насыщенных формаций конечных групп. Проблемы физики, математики и техники, 33(4): 76–83.
11. Сафонов В. Г., Шеметков Л. А. 2008. О подрешетках решетки totally насыщенных формаций конечных групп. Доклады НАН Беларуси, 52(4): 34–37.
12. Селькин В. М. 2011. Однопорожденные формации. Гомель, «Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины», 2011, 240 с.
13. Скиба А. Н. 1986. О локальных формациях длины 5. В кн.: Арифметическое и подгрупповое строение конечных групп: труды Гомельского семинара. Под. ред. М. И. Салука. Минск, Наука и техника, 135–149.
14. Скиба А. Н. 1987. Характеризация конечных разрешимых групп заданной нильпотентной длины. В кн.: Вопросы алгебры. Вып. 3. Минск, «Университетское»: 21–31.
15. Скиба А. Н. 1997. Алгебра формаций. Минск, Беларуская навука, 240 с.
16. Скиба А. Н., Шеметков Л. А. 1999. Кратно  $\omega$ -локальные формации и классы Фиттинга конечных групп. Математические труды, 2(2): 114–147.
17. Скиба А. Н., Шеметков Л. А. 2000. Кратно  $\mathfrak{L}$ -композиционные формации конечных групп. Украинский математический журнал, 52(6): 783–797.
18. Шеметков Л. А. 1978. Формации конечных групп. М., Наука, 267 с.
19. Шеметков Л. А. 1984. О произведении формаций. Доклады АН БССР, 28(2): 101–103.
20. Шеметков Л. А., Скиба А. Н. 1989. Формации алгебраических систем. М., Наука, 253 с.
21. (а) Щербина В. В., Сафонов В. Г. 2019. О подрешетках решетки частично totally насыщенных формаций конечных групп. Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика. 51(1): 64–87. DOI 10.18413/2075-4639-2019-51-1-64-87.
22. (б) Щербина В. В., Сафонов В. Г. 2019. О некоторых свойствах решетки частично totally насыщенных формаций конечных групп. Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика. 51(2): 227–244. DOI 10.18413/2075-4639-2019-51-2-227-244.
23. Ballester-Bolinches A., Ezquerro L. M. 2006. Classes of Finite Groups. Dordrecht, Springer, 385 p.

24. Doerk K., Hawkes T. 1992. Finite Soluble Groups. Berlin, New York, Walter de Gruyter & Co, 891 p.
25. Gaschuts W. 1963. Zur Theorie der endlichen auflösbaren Gruppen [On the theory of finite soluble groups]. Mathematische Zeitschrift, 80(4): 300–305.
26. Guo W. 2000. The Theory of Classes of Groups. Beijing, New York, Dordrecht, Boston, London, Science Press, Kluwer Academic Publishers, 2000, 261 p.
27. Guo W., Sel'kin V.M., Shum K. P. 2007. Factorization theory of 1-generated  $\omega$ -composition formations. Communications in Algebra, 35(9): 2901–2931. DOI: 10.1080/00927870701302248.
28. Skiba A. N., Vorob'ev N. N. 2013. On the lattice of saturated and solubly saturated formations of finite groups. Southeast Asian Bulletin of Mathematics, 37(5): 771–780.
29. Tsarev A. A. 2018. Inductive lattices of totally composition formations. Revista Colombiana de Matematicas, 52(2): 161–169. DOI: <https://dx.doi.org/10.15446/recolma.v52n2.77156> (accessed: 6 November 2019).
30. (a) Tsarev A. A. 2019. On the lattice of all totally composition formations of finite groups. Ricerche di Matematica, 68(2): 693–698. DOI: 10.1007/s11587-019-00433-3.
31. (b) Tsarev A. A. 2019. On the lattice of all  $\tau$ -closed totally composition formations of finite groups. Materials of international conference «Algebra and Mathematical Logic: Theory and Applications». Kazan, Kazan (Volga Region) Federal University: 62–63.
32. Tsarev A. A., Vorob'ev N. N. 2018. Lattices of composition formations of finite groups and the laws. Journal of Algebra and Its Applications, 17(5): 1850084 (17 pages). DOI: 10.1142/S0219498818500846.

### References

1. Birkhoff G. 1984. Teoriya reshetok [Lattice Theory]. Moscow, Publ. Nauka, 568 p.
2. Vorob'ev N. N. 2000. Ob induktivnykh reshetkakh formatsiy i klassov Fittinga [On inductive lattices of formations and Fitting classes]. Doklady NAN Belarusi, 44(3): 21–24.
3. Vorob'ev N. N. 2012. Algebra klassov konechnykh grupp [Algebra of Classes of Finite Groups]. Vitebsk, Publ. «Vitebskiy gosudarstvennyy universitet imeni P. M. Masherova», 322 p.
4. Vorob'ev N. N., Tsarev A. A. 2010. O modulyarnosti reshetki  $\tau$ -zamknutykh  $n$ -kratno  $\omega$ -kompozitsionnykh formatsiy [On the modularity of a lattice of  $\tau$ -closed  $n$ -multiply  $\omega$ -composition formations]. Ukrainskiy matematicheskiy zhurnal, 62(4): 453–463.
5. Zhiznevsky P. A. 2010. O modulyarnosti i induktivnosti reshetki vseh  $\tau$ -zamknutykh  $n$ -kratno  $\omega$ -kompozitsionnykh formatsiy konechnykh grupp [On modularity and inductance of the lattice of all  $\tau$ -closed  $n$ -multiply  $\omega$ -composition formations of finite groups]. Izvestiya Gomel'skogo gosudarstvennogo universiteta imeni F. Skoriny, 58(1): 185–191.
6. Safonov V. G. 2004. O total'no  $\omega$ -nasyshchennykh formatsiyakh konechnykh grupp. Preprint, № 7 [On totally  $\omega$ -saturated formations of finite groups. Preprint, No. 7]. Gomel, Publ. «Gomel'skiy gosudarstvennyy universitet im. F. Skoriny», 18 p.
7. Safonov V. G. 2007. Characterization of the soluble one-generated totally saturated formations of finite groups. Siberian Mathematical Journal, 48 (1): 185–191 (in Russian). DOI: 10.1007/s11202-007-0015-3.
8. Safonov V. G. 2010.  $\mathfrak{G}$ -separability of the lattice of  $\tau$ -closed totally saturated formations. Algebra and Logic, 49(5): 690–702 (in Russian). DOI: 10.1007/s10469-010-9110-9.
9. Safonov V. G., Safonova I. N. 2014. O minimal'nykh total'no  $\omega$ -nasyshchennykh nenil'potentnykh formatsiyakh konechnykh grupp [On minimal totally  $\omega$ -saturated non-nilpotent formations of finite groups]. Vestnik Vitebskogo gosudarstvennogo universiteta, 84(6): 9–15.
10. Safonov V. G., Safonova I. N. 2017. Otdelimost' reshetki  $\tau$ -zamknutykh total'no  $\omega$ -nasyshchennykh formatsiy konechnykh grupp [Separability of the lattice of  $\tau$ -closed totally  $\omega$ -saturated formations of finite groups]. Problems of Physics, Mathematics and Technics, 33(4): 76–83.
11. Safonov V. G., Shemetkov L. A. 2008. O podreshetkakh reshetki total'no nasyshchennykh formatsiy konechnykh grupp [Sublattices of the lattice of totally saturated formations of finite groups]. Doklady NAN Belarusi, 52(4): 34–37.

12. Sel'kin V. M. 2011. Odnoporozhdennye formatsii [One-generated formations]. Gomel, Publ. «Gomel'-skiy gosudarstvennyy universitet imeni F. Skoriny», 2011, 240 p.
13. Skiba A. N. 1986. O lokal'nykh formatsiyakh dliny 5 [On local formations of length 5]. V kn.: Arifmeticheskoe i podgruppovoe stroenie konechnykh grupp: trudy Gomel'skog seminar [Arithmetic and subgroup structure of finite groups: Gomel seminar proceedings]. Pod. red. M. I. Saluka. Minsk, Publ. Nauka i tekhnika: 135–149.
14. Skiba A. N. 1987. Kharakterizatsiya konechnykh razreshimykh grupp zadannoy nil'potentnoy dliny [Characterization of finite soluble groups with given nilpotent length]. V kn.: Voprosy algebr. Vyp. 3 [Algebra Problems. Vol. 3]. Minsk, Publ. «Universitetskoe»: 21–31.
15. Skiba A. N. 1997. Algebra formatsiy [Algebra of Formations]. Minsk, Belaruskaya navuka, 240 p.
16. Skiba A. N., Shemetkov L. A. 1999. Multiply  $\omega$ -local formations and Fitting classes of finite groups. Mathematical Proceedings, 2(2): 114–147 (in Russian).
17. Skiba A. N., Shemetkov L.A. 2000. Kratno  $\mathcal{L}$ -kompozitsionnye formatsii konechnykh grupp [Multiply  $\mathcal{L}$ -composition formations of finite groups]. Ukrainskiy matematicheskii zhurnal, 52(6): 783–797.
18. Shemetkov L. A. 1978. Formatsii konechnykh grupp [Formations of Finite Groups]. Moscow, Publ. Nauka, 267 p.
19. Шеметков Л. А. 1984. О произведении формаций [On product of formations]. Doklady AN BSSR, 28(2): 101–103.
20. Shemetkov L. A, Skiba A. N. 1989. Formatsii algebraicheskikh sistem [Formations of Algebraic Systems]. Moscow, Publ. Nauka, 253 p.
21. Shcherbina V. V., Safonov V. G. 2019. On sublattices of the lattice of partially totally saturated formations of finite groups. Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics. Physics. 51(1): 64–87 (in Russian). DOI 10.18413/2075-4639-2019-51-1-64-87.
22. Shcherbina V. V., Safonov V. G. 2019. On some properties of the lattice of partially totally saturated formations of finite groups. Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics. Physics. 51(2): 227–244 (in Russian). DOI 10.18413/2075-4639-2019-51-2-227-244.
23. Ballester-Bolinches A., Ezquerro L. M. 2006. Classes of Finite Groups. Dordrecht, Springer, 2006, 385 p.
24. Doerk K., Hawkes T. 1992. Finite Soluble Groups. Berlin, New York, Walter de Gruyter & Co, 891 p.
25. Gaschuts W. 1963. Zur Theorie der endlichen auflösbaren Gruppen [On the theory of finite soluble groups]. Mathematische Zeitschrift, 80(4): 300–305.
26. Guo W. 2000. The Theory of Classes of Groups. Beijing, New York, Dordrecht, Boston, London, Science Press, Kluwer Academic Publishers, 2000, 261 p.
27. Guo W., Sel'kin V.M., Shum K.P. 2007. Factorization theory of 1-generated  $\omega$ -composition formations. Communications in Algebra, 35(9): 2901–2931. DOI: 10.1080/00927870701302248.
28. Skiba A. N., Vorob'ev N. N. 2013. On the lattice of saturated and solubly saturated formations of finite groups. Southeast Asian Bulletin of Mathematics, 37(5): 771–780.
29. Tsarev A. A. 2018. Inductive lattices of totally composition formations. Revista Colombiana de Matematicas, 52(2): 161–169. DOI: <https://dx.doi.org/10.15446/recolma.v52n2.77156> (accessed: 6 November 2019).
30. (a) Tsarev A. A. 2019. On the lattice of all totally composition formations of finite groups. Ricerche di Matematica, 68(2): 693–698. DOI: 10.1007/s11587-019-00433-3.
31. (b) Tsarev A. A. 2019. On the lattice of all  $\tau$ -closed totally composition formations of finite groups. Materials of international conference «Algebra and Mathematical Logic: Theory and Applications». Kazan, Kazan (Volga Region) Federal University: 62–63.
32. Tsarev A. A., Vorob'ev N. N. 2018. Lattices of composition formations of finite groups and the laws. Journal of Algebra and Its Applications, 17(5): 1850084 (17 pages). DOI: 10.1142/S0219498818500846.

Получена 25.12.2019



---

**Щербина Владимир Владимирович** – магистрант Государственного учреждения образования «Институт подготовки научных кадров Национальной академии наук Беларуси»  
ул. Кнорина, 1, г. Минск, Республика Беларусь, 220049  
E-mail: [shcherbinavv@tut.by](mailto:shcherbinavv@tut.by)

## ФИЗИКА. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 537.9; 621.382

DOI 10.18413/2687-0959-2020-52-1-33-40

### РАСЧЕТ ХАРАКТЕРИСТИК КАРБИДОКРЕМНИЕВЫХ ДИОДОВ ШОТТКИ ДЛЯ МАЛОГАБАРИТНЫХ МЕТАЛЛОПОЛИМЕРНЫХ КОРПУСОВ

Е. А. Кульченков, С. Б. Рыбалка\*, А. А. Демидов, А. Ю. Дракин

*Статья представлена членом редакционной коллегии А. В. Носковым*

Брянский государственный технический университет,  
г. Брянск, 241035, Россия

\*E-mail: [sbrybalka@yandex.ru](mailto:sbrybalka@yandex.ru)

**Аннотация.** Выполнен расчет характеристик охранной системы карбидокремниевых 4H-SiC диодов Шоттки с использованием метода физического моделирования и установлены оптимальные конфигурации (уровни легирования и толщины эпитаксиального слоя 4H-SiC) структуры диода для получения высоких значений пробивного напряжения. Установлено, что оптимальная структура диода Шоттки, пригодного для монтажа в современные малогабаритные металлополимерные корпуса (SOT, QFN), соответствует диоду с концентрацией доноров в эпитаксиальном слое 4H-SiC  $3,75 \times 10^{15} \text{ см}^{-3}$ , толщиной слоя 18 мкм, и системой из шести охранных  $p+$  колец и слоем JTE.

**Ключевые слова:** диод Шоттки, SiC, карбид кремния, малогабаритный полимерный корпус.

**Благодарности:** Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках комплексного проекта по созданию высокотехнологичного производства «Создание высокотехнологичного производства кремниевых и карбидокремниевых изделий микроэлектронной техники в малогабаритных металлополимерных корпусных исполнениях типа SOT, SO и QFN» (соглашение от 29 ноября 2019 г. № 075-11-2019-035) в организации головного исполнителя НИОКТР ФГБОУ ВО «Брянский государственный технический университет».

**Для цитирования:** Кульченков Е. А., Рыбалка С. Б., Демидов А. А., Дракин А. Ю. 2020. Расчет характеристик карбидокремниевых диодов Шоттки для малогабаритных металлополимерных корпусов. Прикладная математика & Физика. 52(1): 33–40. DOI 10.18413/2687-0959-2020-52-1-33-40.

---

---

### CALCULATION OF CHARACTERISTICS OF THE SILICON CARBIDE SCHOTTKY DIODES FOR SMALL METALPOLYMERIC PACKAGE

E. A. Kulchenkov, S. B. Rybalka\*, A. A. Demidov, A. Yu. Drakin

*Article submitted by a member of the editorial board A. V. Noskov*

Bryansk State Technical University,  
Bryansk, 241035, Russia

\*E-mail: [sbrybalka@yandex.ru](mailto:sbrybalka@yandex.ru)

Received March 12, 2020

**Abstract.** The characteristics of the guard system of the 4H-SiC silicon carbide Schottky diodes with used the physical simulation method and optimal configurations (levels of doping and thickness of the 4H-SiC epitaxial layer) of the diode structure for obtaining of high values of the breakdown voltage have been calculated. It is established that the optimum structure of the Schottky diode for installation in modern small metalpolymeric package (SOT, QFN) corresponds to the diode with concentration of donors in 4H-SiC epitaxial layer  $3,75 \times 10^{15} \text{ cm}^{-3}$ , thickness of epitaxial layer of 18 microns and a system from six  $p+$  guard rings and JTE layer.

**Key words:** Schottky diode, SiC, silicon carbide, small metalpolymeric package.

**Acknowledgements:** The work is supported by financial support from the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation within the framework of the complex project for the creation of high-tech production "Creation of high-tech production of silicon and silicon carbide products of microelectronic technology in small-sized metal-polymer hull versions of the SOT, SO and QFN types"(agreement dated November 29, 2019 No. 075-11-2019-035) in the organization of the head contractor of research and development of the Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education «Bryansk State Technical University».

**For citation:** Kulchenkov E. A., Rybalka S. B., Demidov A. A., Drakin A. Yu. 2020. Calculation of characteristics of the silicon carbide Schottky diodes for small metalpolymeric package. Applied Mathematics & Physics. 52(1): 33–40 (in Russian). DOI 10.18413/2687-0959-2020-52-1-33-40.

---

**1. Введение.** В настоящее время в США, Европе и Юго-Восточной Азии работы в области силовой электроники, как на основе традиционного кремния (Si), так и с использованием широкозонного полупроводникового материала нового поколения карбида кремния (SiC), ведутся очень бурными темпами [Kang, 2014; Розанов, 2018; Рыбалка и др., 2018(a); Kimoto, Cooper, 2014; Kimoto, Yonezawa, 2018; Baliga, 2019]. Область применения изделий силовой электроники весьма широка (установки индуктивного нагрева, частотные преобразователи, преобразователи электроэнергии с мягкой коммутацией, бесконтактные коммутаторы устройств импульсного электропитания, автомобильная электроника, железнодорожные модули питания, РЛС и др.). При этом тенденция миниатюризации современных изделий электронной техники обуславливает повышенный спрос на изделия в малогабаритных корпусах для поверхностного монтажа [Kang, 2014; Lu, Wong, 2017]. В настоящее время малогабаритные металлополимерные корпуса имеют ряд существенных достоинств, например, в случае сложных схем – это повышение степени интеграции и многофункциональности при снижении объема, массы и стоимости устройств; а в случае однофункциональных схем – возможность миниатюризации аппаратуры в условиях массовой сборки [Kang, 2014; Розанов, 2018; Kimoto, Cooper, 2014; Lu, Wong, 2017]. Разработка и использование новых методов корпусирования позволило компаниям Northrop Grumman Space Technology [Chang-Chien et al., 2006] и Avago Technologies [Ingram, 2008] получить высокопроизводительные СВЧ-микросхемы, используемые как в системах связи (WiFi 802.11a/b/g/n, WLAN, WiMax и др.), так и в сложной специальной технике (РЛС, радиосистемы и др.). При этом большая часть зарубежных микросхем и полупроводниковых приборов аналогичного класса, используемых в микро- и радиоэлектронных российских изделиях, конструктивно оформлены в широко используемых сейчас за рубежом современных малогабаритных корпусах типа SOT (SOT-23, SOT-223, SOT-323) и др. [Lu, Wong, 2017]. Между тем, в последние годы на российском рынке силовой электроники появилась и продолжает расти потребность в изделиях микроэлектронной техники на кремнии и на карбиде кремния в корпусах, отсутствующих в стандартной линейке. Это, в первую очередь, необходимо для выполнения научно-исследовательских, опытно-конструкторских и технологических работ, ведущихся в рамках программ по импортозамещению. Однако в России предприятия, производящие корпусирование, проектировались еще в советское время и строились с расчетом на выпуск больших серий корпусов (относительно несложных, с малым количеством выводов), а отдельные типы современных малогабаритных корпусов типа SOT (Small Outline Transistor), QFN (Quad Flat No Leads package), SO (Small Outline) и др. вообще не предполагалось производить. К настоящему моменту производство устройств силовой электроники в малогабаритных металлополимерных корпусах освоено несколькими зарубежными компаниями: Texas Instruments, ST Microelectronics, Microsemi, Infineon Technologies, Avago Technologies и др. [Kimoto, Yonezawa, 2018; Lu, Wong, 2017; Chang-Chien et al., 2006]. При этом SiC приборы в малогабаритных корпусах представлены на мировом рынке в гораздо меньшем ассортименте и объемах. К примеру, компания Microsemi только недавно начала выпускать SiC MOSFET на SiC в корпусах типа SOT [Silicon, 2018], а мировой лидер силовой электроники на SiC компания Wolfspeed (Cree Company) в корпусе типа QFN (PowerQFN) производит всего лишь один карбидокремниевый диод Шоттки [C3D1P7060Q, 2015]. Сведения об особенностях применяемых зарубежными компаниями технологий изготовления в открытой печати отсутствуют, так как практически все технологии содержат секреты производства («ноу-хау»). Диоды Шоттки для силовой электроники на основе 4H-SiC уже изготавливаются отечественной промышленностью, в частности, на предприятии АО «ГРУППА КРЕМНИЙ ЭЛ» (г. Брянск), однако монтаж их производится в крупногабаритные корпуса транзисторного типа (ТО-220 и др.). Ранее, в наших предыдущих работах были исследованы характеристики 4H-SiC диодов Шоттки с контактами Шоттки анода Ni и Ti без охранных колец [Panchenko et al., 2016; Panchenko et al., 2017], 4H-SiC МОП транзисторы [Иванов и др., 2017] и влияние структуры диода на пробивное напряжение [Sedykh et al., 2018], которые затем были использованы для их монтажа в крупногабаритные корпуса транзисторного типа (ТО-220 и др), продемонстрировавшие достаточно высокие характеристики по параметру  $dV/dt$ , сравнимые с зарубежными диодами [Sedykh et al., 2019; Рыбалка и др., 2018(b)].

С учетом изложенного выше, цель данной работы состоит в том, чтобы исследовать характеристики карбидокремниевых диодов Шоттки с использованием метода физического моделирования с возможностью последующего их монтажа в современные малогабаритные металлополимерные корпуса (SOT, QFN). Решение данной задачи позволит значительно повысить степени интеграции и многофункциональности выпускаемых изделий микроэлектронной техники, а также обеспечит возможность миниатюризации аппаратуры, собранной на их базе.

**2. Материалы и методы исследования.** В данной работе для реализации поставленной цели была использована физическая модель диода Шоттки, в которой решалось уравнение Пуассона с учетом концентрации свободных носителей заряда, уравнения непрерывности для электронов и дырок с учетом зависимости подвижности носителей заряда от концентрации примеси, и от напряженности электрического поля, а также учитывалось лавинное умножение носителей заряда [Bakowski, Gustafsson, 1997]. Для вычислений использовалась программная среда TCAD и описанные нами ранее методы [Panchenko et al., 2016; Panchenko et al., 2017; Sedykh et al., 2019; Рыбалка и др., 2017].

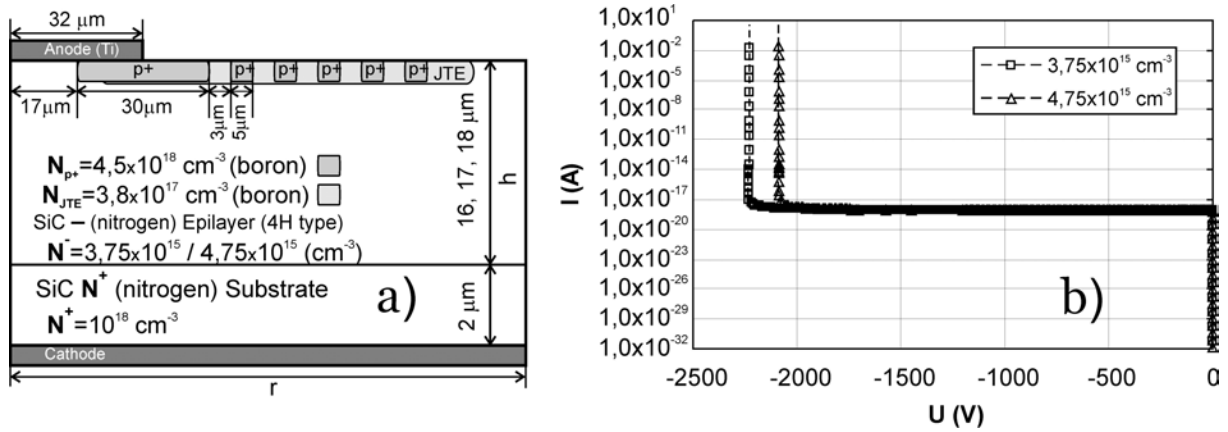


Рис. 1. а) структура карбидокремниевого диода Шоттки для расчета; б) рассчитанная обратная вольт-амперная характеристика диода Шоттки типа 4H-SiC при различных концентрациях эпитаксиального слоя 4H-SiC –  $3,75 \times 10^{15} \text{ cm}^{-3}$  и  $4,75 \times 10^{15} \text{ cm}^{-3}$

Fig. 1. а) structure of silicon carbide Schottky diode for calculation; б) calculated reverse current-voltage characteristics of 4H-SiC type Schottky diode at various concentrations of 4H-SiC epitaxial layer –  $3,75 \times 10^{15} \text{ cm}^{-3}$  and  $4,75 \times 10^{15} \text{ cm}^{-3}$

В соответствии с поставленной задачей размеры диода Шоттки выбирались таким образом, чтобы имелась возможность в последующем монтировать их в современные малогабаритные металлополимерные корпуса (SOT, QFN), при этом диод должен устойчиво работать с рабочим напряжением до 1200 В. Параметры структуры диода Шоттки, детально показанные на рис. 1. а), при моделировании были следующие: концентрация доноров (азот)  $N^+$  в подложке составляла  $1,0 \times 10^{18} \text{ cm}^{-3}$ , в эпитаксиальном слое  $N^-$  концентрации были выбраны  $3,75 \times 10^{15} \text{ cm}^{-3}$  и  $4,75 \times 10^{15} \text{ cm}^{-3}$ , толщина эпитаксиального слоя  $h$  варьировалась от 16 до 18 мкм, радиус структуры был равен  $r=120$  мкм, материал анода – титан (Ti).

Для повышения величины пробивного напряжения диода использовалась структура охранных колец состоящая из шести охранных колец, ( $p^+$ -типа), где ширина первого кольца составляла 30 мкм и пяти остальных шириной 5 мкм, отстоящих друг от друга на расстоянии 3 мкм с концентрацией доноров  $p^+$ -типа (бор)  $N_{p^+}=4,5 \times 10^{18} \text{ cm}^{-3}$  и дополнительным защитным слоем JTE (Junction Terminate Extension), сформированным имплантацией бора с концентрацией  $N_{JTE}=3,8 \times 10^{17} \text{ cm}^{-3}$ , выходящим на 10 мкм за край последнего охрannого  $p^+$  кольца. Расчеты производились при температуре 300 К.

**3. Результаты и их обсуждение.** Для получения планарных  $p$ - $n$ -переходов на карбиде кремния основной технологией является имплантация примесей (бора, алюминия) где глубина залегания переходов варьируется в пределах 0,5–1,5 мкм. Напряжение пробоя планарного перехода определяется концентрацией примеси в эпитаксиальном слое, толщиной эпитаксиального слоя и радиусом скругления  $p$ - $n$ -переходов, определяемых их глубиной залегания [Рыбалка и др., 2018(а); Kimoto, Cooper, 2014; Baliga, 2019]. С целью повышения напряжения пробоя планарного перехода на карбиде кремния применяют систему делительных колец, которая повышает радиус скругления планарного перехода при подаче обратного напряжения [Kang, 2014; Kimoto, Cooper, 2014; Baliga, 2019]. При этом зазоры между основным переходом и первым кольцом, а также между кольцами выбирают одинаковыми и подбираются таким образом, чтобы область пространственного заряда основного и делительных переходов последовательно смыкалась по мере увеличения напряжения на аноде диода. В нашем случае использовалась система охранных колец, состоящая из имплантированных бором (В) шести охранных колец ( $p^+$ -типа), где ширина первого кольца составляла 30 мкм и пяти остальных шириной 5 мкм с зазором между кольцами 3 мкм, а также дополнительным защитным слоем JTE (рис. 1. а).

Как отмечалось выше, одним из основных параметров, определяющим величину напряжения пробоя карбидокремниевых диодов Шоттки – является концентрация доноров  $N^-$  в эпитаксиальном слое 4H-SiC [Kang, 2014; Kimoto, Cooper, 2014; Kimoto, Yonezawa, 2018; Baliga, 2019]. Поэтому, для выбора оптимальной концентрации доноров в эпитаксиальном слое 4H-SiC были выполнены предварительные расчеты напряжения пробоя планарного  $p$ - $n$  перехода при различных их концентрациях.

С учетом вышесказанного для диода были изначально выбраны концентрации доноров в эпитаксиальном слое 4H-SiC, равные  $3,75 \times 10^{15} \text{ cm}^{-3}$  и  $4,75 \times 10^{15} \text{ cm}^{-3}$ , соответственно, при этом толщина эпитаксиального слоя  $h$  оставалась неизменной и равной 16 мкм. Полученные при численном моделировании обратные вольт-амперные характеристики диода Шоттки 4H-SiC представлены на рис. 1б. При концентрации доноров в эпитаксиальном слое 4H-SiC равной  $3,75 \times 10^{15} \text{ cm}^{-3}$  пробой диода произошел при подаче обратного напряжения 2232 В, как следует из Рис. 1б. При увеличении концентрации доноров в эпитаксиальном слое до  $4,75 \times 10^{15} \text{ cm}^{-3}$  пробой диода произошел при напряжении 2085 В (см. рис. 1б). Таким образом, увеличение концентрации доноров в эпитаксиальном слое с  $3,75 \times 10^{15} \text{ cm}^{-3}$  до  $4,75 \times 10^{15} \text{ cm}^{-3}$  привело к весьма существенному (148 В) снижению величины напряжения пробоя диода Шоттки.

С учетом полученного результата, дальнейшие расчеты 4H-SiC диода Шоттки были выполнены при концентрации доноров в эпитаксиальном слое с  $3,75 \times 10^{15} \text{ см}^{-3}$ . Как ранее было установлено [Baliga, 2019; Sedykh et al., 2018], имеется возможность существенно повысить значение напряжения пробоя 4H-SiC диода Шоттки если увеличить толщину эпитаксиального слоя 4H-SiC. Дальнейшие расчеты были выполнены при концентрации доноров в эпитаксиальном слое  $3,75 \times 10^{15} \text{ см}^{-3}$  и увеличенной толщине эпитаксиального слоя 4H-SiC до 17 и 18 мкм.

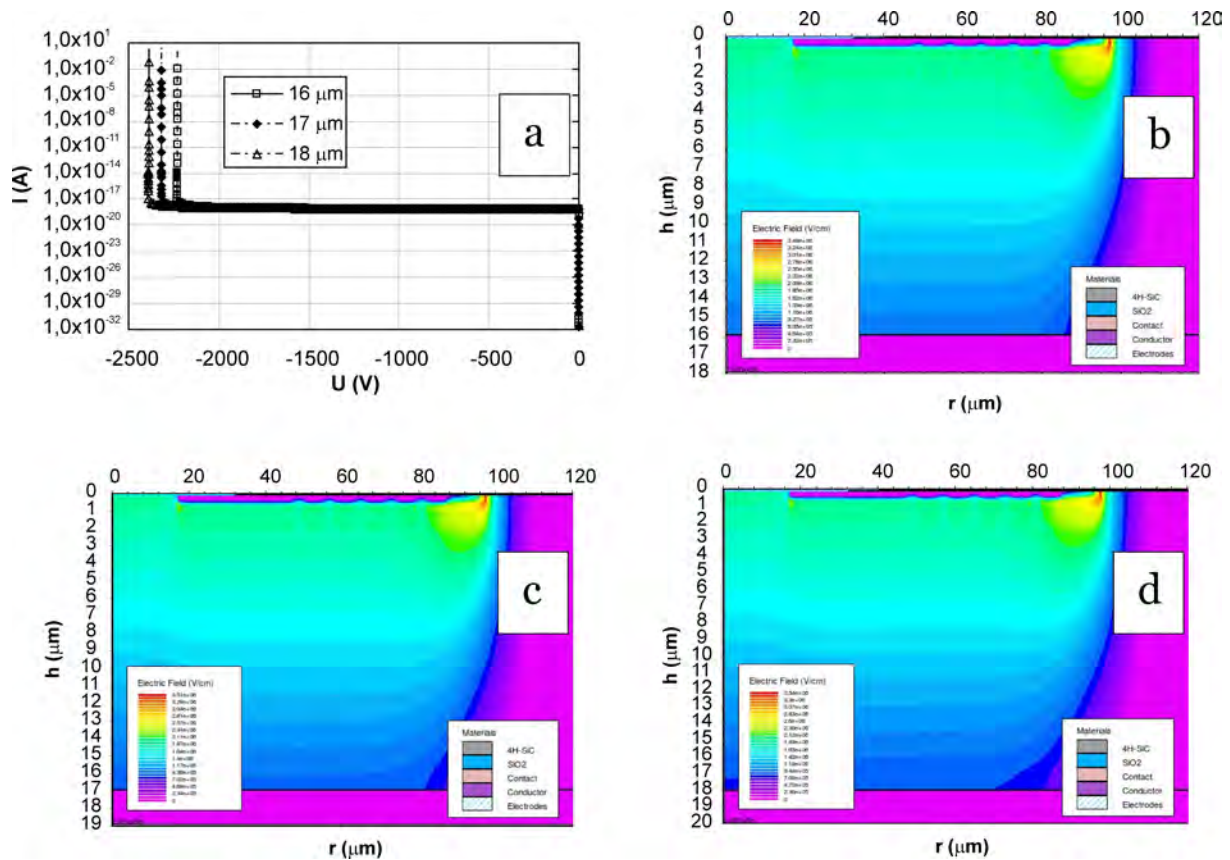


Рис. 2. а) рассчитанная обратная вольт-амперная характеристика диода Шоттки с концентрацией эпитаксиального слоя 4H-SiC  $3,75 \times 10^{15} \text{ см}^{-3}$  и различной толщиной эпитаксиального 4H-SiC слоя – 16, 17 и 18 мкм; б) распределение электрического поля диода Шоттки с толщиной эпитаксиального 4H-SiC слоя 16 мкм; в) распределение электрического поля диода Шоттки с толщиной эпитаксиального 4H-SiC слоя 17 мкм; д) распределение электрического поля диода Шоттки с толщиной эпитаксиального 4H-SiC слоя 18 мкм

Fig. 2. а) calculated reverse current-voltage characteristics of 4H-SiC type Schottky diode with concentration of 4H-SiC epitaxial layer  $3,75 \times 10^{15} \text{ cm}^{-3}$  and various thickness of 4H-SiC epitaxial layer – 16, 17 and 18  $\mu\text{m}$ ; б) electric field distribution of Schottky diode with thickness of 4H-SiC epitaxial layer equals 16  $\mu\text{m}$ ; в) electric field distribution of Schottky diode with thickness of 4H-SiC epitaxial layer equals 17  $\mu\text{m}$ ; д) electric field distribution of Schottky diode with thickness of 4H-SiC epitaxial layer equals 18  $\mu\text{m}$

На рис. 2. а) представлены полученные результаты расчетов обратной вольт-амперной характеристики 4H-SiC диодов Шоттки. Из рис. 2. а) следует, что увеличение толщины эпитаксиального слоя 4H-SiC до 17 мкм привело к повышению напряжения пробоя диода до 2316 В, что на 83 В выше чем при толщине слоя 16 мкм. Дальнейшее увеличение толщины 4H-SiC слоя до 18 мкм приводит к тому, что диод пробивается при подаче обратного напряжения 2392 В. Таким образом, установлено, что увеличение толщины 4H-SiC эпитаксиального слоя с 16 до 18 мкм приводит к заметному повышению значения величины пробоя диода Шоттки на 159 В.

Далее, с целью установления вероятного места пробоя диода, были построены карты распределения напряженности электрического поля диода Шоттки, показанные на рис. 2б-д. Установлено, что во всех случаях наиболее вероятное место пробоя находится за пределами последнего охранного кольца на краю дополнительного защитного слоя JTE.

Таким образом, использование защитного слоя JTE действительно снижает вероятность пробоя диода в пространстве между охранными кольцами и смещает место пробоя за пределы слоя JTE, что и было показано ранее другими исследователями [Baliga, 2019, Chen, 2006; Shur et al., 2006; Pan et al., 2017; Yuan et al., 2019]. Из картины распределения напряженности электрического поля диода Шоттки при различных толщинах эпитаксиального слоя (16, 17 и 18 мкм) также удалось оценить максимальное значение напряженности электрического поля диода Шоттки  $E_{max}$ . Полученные данные по максимальному

значению напряженности электрического поля диода Шоттки и напряжению пробоя при различных значениях толщины эпитаксиального слоя 4Н-SiC обобщены в таблице 1. Так, при толщине слоя 16 мкм максимальное значение электрическое поле принимает на краю дополнительного защитного слоя JTE, и составляет  $E_{max}=3,48$  МВ/см. рис. 2. b).

Таблица 1.

Максимальное значение напряженности электрического поля диода Шоттки и напряжение пробоя при различных значениях толщины эпитаксиального слоя 4Н-SiC

Table 1.

The maximal value of Schottky diode electric field strength and breakdown voltage at various values of 4Н-SiC epitaxial layer thickness

$h$ (мкм), толщина эпитаксиального слоя 4Н-SiC диода Шоттки	$E_{max}$ (МВ/см), максимальное значение напряженности электрического поля диода Шоттки	$U_{пр.}$ (В), напряжение пробоя диода Шоттки
16	3.48	2233
17	3.51	2316
18	3.54	2392

Последующее увеличение толщины слоя 4Н-SiC до 17 мкм приводит к повышению значения  $E_{max}$  до 3,51 МВ/см (см. рис. 2c). Наконец, при толщине эпитаксиального слоя 4Н-SiC равной 18 мкм, максимальное значение напряженности электрического  $E_{max}$  поля диода Шоттки составляет уже 3,54 МВ/см (см. рис. 2d).

Таким образом, оптимизируя различные уровни легирования ( $3,75 \times 10^{15} \text{ см}^{-3} - 4,75 \times 10^{15} \text{ см}^{-3}$ ) и толщины эпитаксиального слоя 4Н-SiC (16 – 18 мкм), можно получить диоды Шоттки с высокими значениями пробивного напряжения (до 2392 В) и пригодные для монтажа в современные малогабаритные металлополимерные корпуса (SOT, QFN).

**4. Заключение.** Исследованы характеристики охранной системы карбидокремниевых 4Н-SiC диодов Шоттки с использованием метода физического моделирования и установлены оптимальные конфигурации (уровни легирования и толщины эпитаксиального слоя 4Н-SiC) структуры диода для получения высоких значений пробивного напряжения. Установлено, что снижение концентрации доноров в эпитаксиальном слое 4Н-SiC с  $4,75 \times 10^{15} \text{ см}^{-3}$  до  $3,75 \times 10^{15} \text{ см}^{-3}$  (толщина эпитаксиального слоя – 16 мкм) приводит к заметному увеличению напряжения пробоя диода с 2085 В до 2232 В.

Показано, что увеличение толщины 4Н-SiC эпитаксиального слоя с 16 до 18 мкм (концентрация доноров в эпитаксиальном слое 4Н-SiC –  $3,75 \times 10^{15} \text{ см}^{-3}$ ) приводит к существенному повышению значения величины пробоя диода Шоттки на 159 В от 2233 до 2392 В. Увеличение толщины эпитаксиального слоя от 16 до 17 мкм приводит к повышению значения максимального значения напряженности электрического поля диода Шоттки с 3,48 до 3,54 МВ/см. При этом, из картины распределения электрического поля диода установлено, что наиболее вероятное место пробоя находится за пределами последнего охранного кольца на краю дополнительного защитного слоя JTE. Показано, что использование защитного слоя JTE смещает место пробоя за пределы слоя JTE и снижает вероятность пробоя диода в пространстве между охранными кольцами.

На основании выполненных расчетов, установлено, что оптимальной конфигурацией для высоковольтного 4Н-SiC диода Шоттки является концентрация доноров в эпитаксиальном слое 4Н-SiC  $3,75 \times 10^{15} \text{ см}^{-3}$  при толщине эпитаксиального слоя 18 мкм и системой из шести охранных колец ( $N_{p+} = 3,5 \times 10^{18} \text{ см}^{-3}$ ) с дополнительным защитным слоем JTE ( $N_{JTE} = 3,8 \times 10^{17} \text{ см}^{-3}$ ).

Таким образом, выполненные расчеты дают возможность изготовления отечественных 4Н-SiC диодов Шоттки предназначенных для монтажа в современные малогабаритные металлополимерные корпуса (SOT, QFN).

#### Список литературы

1. Иванов П. А., Потапов А. С., Рыбалка С. Б., Малаханов А. А. 2017. МОП-транзисторы со встроенным n-каналом на основе 4Н-SiC: пространственная локализация свободных электронов под затвором. Журнал радиоэлектроники. 6: 1-10.

2. Розанов Ю. К. 2018. Силовая электроника. Эволюция и применение. М., Знак, 140 с.
3. Рыбалка С., Демидов А., Малаханов А. 2018(a). Силовые диоды и транзисторы на основе карбида кремния. Бо-Бассен, LAP LAMBERT Academic Publishing, 128 с.
4. Рыбалка С. Б., Демидов А. А., Кульченков Е. А., Дракин А. Ю. 2018(b). Исследование  $dv/dt$  характеристик карбидокремниевых диодов Шоттки. Научные ведомости БелГУ. Серия: Математика. Физика. 50(4): 460-468.
5. Рыбалка С. Б., Краюшкина Е. Ю., Демидов А. А., Дракин А. Ю., Зотин В. Ф. 2017. Расчет влияния материала анода на вольт-амперные характеристики диода Шоттки на основе карбида кремния 4H-SiC. Научные ведомости БелГУ. Серия: Математика. Физика. 48(20): 93-97.
6. Bakowski M., Gustafsson U. 1997. Lindefelt U Simulation of SiC High Power Devices Phys. Stat. Sol. (a). 162: 421-440.
7. Baliga B.J. 2019. Wide Bandgap Semiconductor Power Devices: Materials, Physics, Design, and Applications. Cambridge, Woodhead Publishing-Elsevier, 409 p.
8. Chang-Chien P. et al. 2006. Low Temperature, Hermetic, High-yield Wafer-Level Packaging Technology. Northrop Grumman Technology Review Journal. 14(1): 57-78.
9. Chen L., Guy O. J., Doneddu D., Batcup S. G. J., Wilks S. P., Mawby P. A., Bouchet, Torregrosa F. Report on 4H-SiC JTE Schottky diodes. 2006. Microelectronics Reliability. 46(2-4): 637-640.
10. C3D1P7060Q Silicon Carbide Schottky Diode, Rev. F, 10-2015, Cree, Inc (<https://www.wolfspeed.com/downloads/dl/file/id/846/product/99/c3d1p7060q.pdf>)
11. Ingram B. 2008. Wafer Cap-packaged Amplifiers Drive Innovation into RF Designs. Microwave Journal. 51(12): 114-118.
12. Kang Y. H. 2014. Semiconductor Technologies in the Era of Electronics. Dordrecht, Springer, 149 p.
13. Kimoto T., Cooper J. A. 2014. Growth, Characterization, Devices, and Applications. Fundamentals of Silicon Carbide Technology. New York, Wiley-IEEE Press, 539 p.
14. Kimoto T., Yonezawa Y. 2018. Current status and perspectives of ultrahigh-voltage SiC power devices. Materials Science in Semiconductor Processing. 78: 43-56.
15. Lu D., Wong C. P. 2017. Materials for advanced packaging. Cham, Springer International Publishing, 974 p.
16. Pan Y., Tian L., Wu H., Li Y., Yang F. 2017. 3.3 kV 4H-SiC JBS diodes with single-zone JTE termination. Microelectronic Engineering. 181: 10-15.
17. Panchenko P. V., Rybalka S. B., Malakhanov A. A., Krayushkina E. Yu., Rad'kov A. V. 2016. I-V characteristics simulation of silicon carbide Ti/4H-SiC Schottky diode. Proc. SPIE "International Conference on Micro- and Nano-Electronics". 10224: 102240Y-1-102240Y-5.
18. Panchenko P. V., Rybalka S. B., Malakhanov A. A., Demidov A. A., Krayushkina E. Yu., Shishkina O. A. 2017. Silicon carbide of Ni/6H-SiC and Ti/4H-SiC type Schottky diode current-voltage characteristics modelling. J. Phys.: Conf. Ser. 917: 082010(5 pp).
19. Sedykh S. V., Rybalka S. B., Drakin A. Yu., Demidov A. A. et al. 2018. Ti/4H-SiC Schottky diode breakdown voltage with different thickness of 4H-SiC epitaxial layer. J. Phys.: Conf. Ser. 1124: 071012(5 pp).
20. Sedykh S. V., Rybalka S. B., Drakin A. Yu., Demidov A. A., Kulchenkov E. A. 2019. Determination of  $dV/dt$  values for domestic SiC Schottky diodes. J. Phys.: Conf. Ser. 1410: 012195(5 pp).
21. Shur M., Romyantsev S., Levishtein M. 2006. SiC Materials and Devices. Singapore, World Scientific Publishing Co. Inc, 335 p.
22. Silicon Carbide Semiconductor Products, Microsemi Corporation, 2018 ([https://www.microsemi.com/document-portal/doc\\_download/132082-sic-products-brochure](https://www.microsemi.com/document-portal/doc_download/132082-sic-products-brochure))
23. Yuan H., Tang X., Song Q., He Y., He X., Zhang Y., Zhang Y. 2019. The analysis and characteristics of 4H-SiC floating junction JBS diodes with different structures underneath the termination region. Solid-State Electronics. 160: 107620(4 pp).

## References

1. Ivanov P. A., Potapov A. S., Rybalka S. B., Malakhanov A. A. 2017. 4H-SiC MOS transistors with accumulation-type n-channel: spatial distribution of free electrons under the gate. *Journal of Radio Electronics*. 6: 1-10. (in Russian)
2. Rozanov Yu. K. 2018. *Silovaja jelektronika. Jevoljucija i primenenie*. [Power Electronics. Evolution and Application]. Moscow, Publ. Znak, 140 p.
3. Rybalka S., Demidov A., Malakhanov A. 2018(a). *Silovye diody i tranzistory na osnove karbida kremnija*. [Power diodes and transistors on the base of silicon carbide]. Beau Bassin, LAP LAMBERT Academic Publishing, 128 p.
4. Rybalka S. B., Demidov A. A., Kulchenkov E. A., Drakin A. Yu. 2018(b). Study of the  $dV/dt$  characteristics of the silicon carbide Schottky diodes. *Belgorod State University Scientific Bulletin: Mathematics & Physics*. 50(4): 460-468. (in Russian)
5. Rybalka S. B., Krayushkina E. Yu., Demidov A. A., Drakin A. Yu., Zotin V. F. 2017. Calculation of anode material effect on current-voltage characteristics of the Schottky diode on the base of 4H-SiC silicon carbide *Belgorod State University Scientific Bulletin: Mathematics & Physics*. 48(20): 93-97. (in Russian)
6. Bakowski M., Gustafsson U. 1997. Lindefelt U Simulation of SiC High Power Devices *Phys. Stat. Sol. (a)*. 162: 421-440.
7. Baliga B.J. 2019. *Wide Bandgap Semiconductor Power Devices: Materials, Physics, Design, and Applications*. Cambridge, Woodhead Publishing-Elsevier, 409 p.
8. Chang-Chien P. et al. 2006. Low Temperature, Hermetic, High-yield Wafer-Level Packaging Technology. *Northrop Grumman Technology Review Journal*. 14(1): 57-78.
9. Chen L., Guy O. J., Doneddu D., Batcup S.G.J., Wilks S.P., Mawby P.A., Bouchet, Torregrosa F. Report on 4H-SiC JTE Schottky diodes. 2006. *Microelectronics Reliability*. 46(2-4): 637-640.
10. C3D1P7060Q Silicon Carbide Schottky Diode, Rev. F, 10-2015, Cree, Inc (<https://www.wolfspeed.com/downloads/dl/file/id/846/product/99/c3d1p7060q.pdf>)
11. Ingram B. 2008. Wafer Cap-packaged Amplifiers Drive Innovation into RF Designs. *Microwave Journal*. 51(12): 114-118.
12. Kang Y.H. 2014. *Semiconductor Technologies in the Era of Electronics*. Dordrecht, Springer, 149 p.
13. Kimoto T., Cooper J. A. 2014. *Growth, Characterization, Devices, and Applications. Fundamentals of Silicon Carbide Technology*. New York, Wiley-IEEE Press, 539 p.
14. Kimoto T., Yonezawa Y. 2018. Current status and perspectives of ultrahigh-voltage SiC power devices. *Materials Science in Semiconductor Processing*. 78: 43-56.
15. Lu D., Wong C.P. 2017. *Materials for advanced packaging*. Cham, Springer International Publishing, 974 p.
16. Pan Y., Tian L., Wu H., Li Y., Yang F. 2017. 3.3 kV 4H-SiC JBS diodes with single-zone JTE termination. *Microelectronic Engineering*. 181: 10-15.
17. Panchenko P. V., Rybalka S. B., Malakhanov A. A., Krayushkina E. Yu., Rad'kov A. V. 2016. I-V characteristics simulation of silicon carbide Ti/4H-SiC Schottky diode. *Proc. SPIE "International Conference on Micro- and Nano-Electronics"*. 10224: 102240Y-1-102240Y-5.
18. Panchenko P. V., Rybalka S. B., Malakhanov A. A., Demidov A. A., Krayushkina E. Yu., Shishkina O. A. 2017. Silicon carbide of Ni/6H-SiC and Ti/4H-SiC type Schottky diode current-voltage characteristics modelling. *J. Phys.: Conf. Ser.* 917: 082010(5 pp).
19. Sedykh S. V., Rybalka S. B., Drakin A. Yu., Demidov A. A. et al. 2018. Ti/4H-SiC Schottky diode breakdown voltage with different thickness of 4H-SiC epitaxial layer. *J. Phys.: Conf. Ser.* 1124: 071012(5 pp).
20. Sedykh S. V., Rybalka S. B., Drakin A.Yu., Demidov A. A., Kulchenkov E. A. 2019. Determination of  $dV/dt$  values for domestic SiC Schottky diodes. *J. Phys.: Conf. Ser.* 1410: 012195(5 pp).
21. Shur M., Romyantsev S., Levishtein M. 2006. *SiC Materials and Devices*. Singapore, World Scientific Publishing Co. Inc, 335 p.



22. Silicon Carbide Semiconductor Products, Microsemi Corporation, 2018  
([https://www.microsemi.com/document-portal/doc\\_download/132082-sic-products-brochure](https://www.microsemi.com/document-portal/doc_download/132082-sic-products-brochure))
23. Yuan H., Tang X., Song Q., He Y., He X., Zhang Y., Zhang Y. 2019. The analysis and characteristics of 4H-SiC floating junction JBS diodes with different structures underneath the termination region. Solid-State Electronics. 160: 107620(4 pp).

Получена 12.03.2020

---

**Кульченков Евгений Александрович** – старший преподаватель кафедры общей физики Брянского государственного технического университета

бул. 50 лет Октября, 7, Брянск, Россия,

E-mail: [ewgeniy2000@mail.ru](mailto:ewgeniy2000@mail.ru)

**Рыбалка Сергей Борисович** – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры общей физики Брянского государственного технического университета

бул. 50 лет Октября, 7, Брянск, Россия,

E-mail: [sbrybalka@yandex.ru](mailto:sbrybalka@yandex.ru)

**Демидов Андрей Александрович** – доктор физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой общей физики Брянского государственного технического университета

бул. 50 лет Октября, 7, Брянск, Россия,

E-mail: [demandr@yandex.ru](mailto:demandr@yandex.ru)

**Дракин Александр Юрьевич** – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры промышленной электроники и электротехники Брянского государственного технического университета

бул. 50 лет Октября, 7, Брянск, Россия,

E-mail: [ada108@yandex.ru](mailto:ada108@yandex.ru)

**ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ОБЪЕМНОГО СОДЕРЖАНИЯ ДИСПЕРСНОЙ КОМПОНЕНТЫ ГАЗОВЗВЕСИ НА ИНТЕНСИВНОСТЬ МЕЖФАЗНОГО СКОРОСТНОГО СКОЛЬЖЕНИЯ ПРИ РАЗЛЕТЕ ГАЗОВЗВЕСИ В ВАКУУМ**

**Д. А. Тукмаков**

*Статья представлена членом редакционной коллегии Ю. П. Вирченко*

ИММ – обособленное структурное подразделение ФИЦ КазНЦ РАН,  
г. Казань, 420111, Россия

E-mail: [tukmakovDA@imm.knc.ru](mailto:tukmakovDA@imm.knc.ru)

**Аннотация.** В данной работе численно моделируется процесс истечения газозвеси в вакуум. Математическая модель учитывала вязкость, сжимаемость и теплопроводность несущей среды, межкомпонентное силовое взаимодействие, включавшее в себя силу Стокса, динамическую силу Архимеда, силу присоединенных масс, также математическая модель учитывала межкомпонентный теплообмен. Численное решение осуществлялось при помощи явного конечно-разностного метода, с последующим применением схемы нелинейной коррекции численного решения. Целью работы было выявление влияния объемного содержания дисперсной фазы при одинаковой дисперсности и плотности материала твердой компоненты смеси, газозвеси на интенсивность скоростного скольжения при разлете неоднородной среды в вакуум. Также были выявлены отличия в процессах истечения однородного вязкого газа и гетерогенной смеси.

**Ключевые слова:** математическое моделирование физических процессов, многофазные среды, уравнение Навье-Стокса, межфазное взаимодействие.

**Благодарности:** Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ Грант №19-01-00442.

**Для цитирования:** Тукмаков Д. А. 2020. Численное исследование влияния объемного содержания дисперсной компоненты газозвеси на интенсивность межфазного скоростного скольжения при разлете газозвеси в вакуум. Прикладная математика & Физика. 52(1): 41–50. DOI 10.18413/2687-0959-2020-52-1-41-50.

---

---

**NUMERICAL STUDY OF THE INFLUENCE OF VOLUME CONTENT OF A DISPERSED GAS-SUSPENSION COMPONENT ON THE INTENSITY OF AN INTERPHASIC SPEED SLIDING DURING GAS-SUSPENSION SPLIT IN VACUUM**

**D. A. Tukmakov**

*Article submitted by a member of the editorial board Yu. P. Virchenko*

IME – Subdivision of FIC KazanSC of RA,  
Kazan, 420111, Russia

E-mail: [tukmakovDA@imm.knc.ru](mailto:tukmakovDA@imm.knc.ru)

Received March 16, 2020

**Abstract.** In this work, the process of gas suspension flowing into vacuum numerically modeled. The mathematical model took into account the viscosity, compressibility and thermal conductivity of the carrier medium, the intercomponent force interaction, which included the Stokes force, the dynamic Archimedes force, the strength of the attached masses, and the mathematical model took into account the intercomponent heat transfer. The numerical solution carried out using an explicit finite-difference method, followed by the application of a nonlinear correction scheme for the numerical solution. The aim of the work was to identify the effect of the volumetric content of the dispersed phase, with the same dispersion and density of the material of the solid component of the mixture, gas suspension on the rate of slip during expansion of an inhomogeneous medium into vacuum. Differences in the processes of the expiration of a homogeneous viscous gas and a heterogeneous mixture it also revealed.

**Key words:** mathematical modeling of physical processes, multiphase media, Navier-Stokes equation, interphase interaction.

**Acknowledgements:** The work is supported by the Russian Foundation for Basic Research Grant N 19-01-00442.

**For citation:** Tukmakov D. A. 2020. Numerical study of the influence of volume content of a dispersed gas-suspension component on the intensity of an interphasic speed sliding during gas-suspension split in vacuum. Applied Mathematics & Physics. 52(1): 41–50 (in Russian). DOI 10.18413/2687-0959-2020-52-1-41-50.

---

**Введение.** Одним из развивающихся разделов механики жидкости и газа является динамика неоднородных сред. В монографиях [Нигматулин 1988, Кутушев, 2003, Федоров и др., 2015] разрабатывались

методы математического моделирования процессов механики и теплофизики неоднородных сред. Исследованию физических эффектов в различных течениях неоднородных сред посвящен ряд публикаций в периодических изданиях [Губайдуллин, Тукмаков, 2014; Садин 2016; Федоров и др., 2016; Арсланова и др., 2016; Нигматулин и др., 2016; Тукмаков, Тукмаков, 2018; Кашапов и др., 2018; Khasharov at all, 2018; Тукмаков, 2019; Пахомов, Терехов, 2018; Azanov, Osiptsov, 2017; Вараксин, 2014]. Объектом исследований являются течения неоднородных сред с одинаковым или различным агрегатным состоянием компонент – гомогенные и гетерогенные смеси [Teklaya and all, 2015; Saikat, Meheboob, 2017; Zhuoqing, Jesse, 2019; Imran and all, 2018; Mehrabadi and all, 2015; Zhengbiao and all, 2017; Garcia-Trianes and all, 2018; Lopez and all, 2016]. Моделирование течений неоднородных сред может быть осуществлено с помощью «равновесного» подхода – описание течения неоднородной среды как однородной жидкости или газа с введением коэффициентов, дающих поправку на физическую неоднородность среды [Нигматулин 1987]. Более сложным является «континуальный» подход, в котором для каждой из компонент смеси решается полная система уравнений динамики сплошной среды [Нигматулин 1987; Кутушев 2003; Федоров и др. 2015]. В течениях неоднородных сред, в которых объемные содержания компонент смеси имеют близкое значение, наиболее важной задачей является учёт межкомпонентного взаимодействия, определяющего динамику всей смеси в целом [Нигматулин 1987; Кутушев 2003]. В данной работе динамика газовой взвеси твердых частиц – запыленной среды описывается на основе двухскоростной, двухтемпературной модели, учитывающей межкомпонентный теплообмен, а также межкомпонентное силовое взаимодействие, включающее в себя силу Стокса, динамическую силу Архимеда и силу присоединённых масс [Нигматулин 1987; Кутушев 2003]. Одним из важных параметров течения гетерогенных смесей является скоростное скольжение фаз смеси – отличие скоростей несущей среды и дисперсной примеси. В данной работе с помощью вычислительных экспериментов исследуется то, как величина объемного содержания дисперсной фазы, при условии, что размер частиц и плотность материала твердой компоненты смеси одинаковы, влияет на интенсивность скоростного скольжения.

**2. Методы исследования.** Движение несущей среды описывается одномерной системой уравнений Навье-Стокса для сжимаемого теплопроводного газа с учетом межфазного силового взаимодействия и теплообмена [Кутушев 2003, Нигматулин и др., 2016]:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_1 u_1)}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial(\rho_1 u_1)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_1 u_1^2 + p - \tau) = F + \alpha \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial e_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}([e_1 + p - \tau]u_1 - \lambda \frac{\partial T_1}{\partial x}) = -Q - |F|(u_1 - u_2) + \alpha \left( \frac{\partial(pu_1)}{\partial x} \right), \quad (3)$$

$$p = (\gamma - 1)(e_1 - \rho_1(u_1^2)/2),$$

$$\tau = \frac{4}{3}\mu \frac{\partial u_1}{\partial x}.$$

Динамика дисперсной фазы описывается уравнением сохранения «средней плотности» – произведения физической плотности материала частиц и объемного содержания дисперсной фазы, изменяющегося на различных участках физической области вместе с движением твердых частиц; уравнениями сохранения импульса и уравнением сохранения энергии, записанными с учетом теплообмена, обмена импульсом с несущей фазой:

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \frac{\partial \rho_2 u_2}{\partial x} = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial(\rho_2 u_2)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_2 u_2^2) = -F - \alpha \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (5)$$

$$\frac{\partial e_2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(e_2 u_2) = Nu_{12} \frac{6\alpha}{(2r)^2} \lambda (T_1 - T_2), \quad (6)$$

$$\rho_2 = \alpha \rho_{20}, e_1 = \rho_2 C_p T_2.$$

Здесь  $p, \rho_1, u_1$  – давление, плотность, скорость несущей среды;  $T_1, e_1$  – температура и полная энергия газа;  $\rho_2, T_2, e_2, u_2$  – средняя плотность, температура, внутренняя энергия, скорость дисперсной фазы. Температура несущей среды находится из уравнения  $(\gamma - 1)(e/\rho - 0.5u^2)/R$ , где  $R$  – газовая постоянная несущей фазы. Силовое взаимодействие несущей и дисперсной фазы учитывает силу Стокса, динамическую силу Архимеда и силу присоединённых масс. Математическая модель предполагает монодисперсный состав твердой фазы газовой взвеси – все частицы имеют одинаковый размер и одинаковые физические свойства – плотность и теплоемкость материала. Внутренняя энергия взвешенной в газе дисперсной фазы определяется как  $e_1 = \rho_1 C_p T_2$ , где – удельная теплоемкость единицы массы вещества

из которого состоят частицы. В уравнение энергии для несущей фазы входит тепловой поток между несущей и дисперсной фазой  $Q = 6\alpha Nu_{12}\lambda(T_1 - T_2)/(2r)^2$ . В данной работе при описании межфазного силового взаимодействия -- F учитывалась сила аэродинамического сопротивления, динамическая сила Архимеда, а также сила присоединенных масс [Нигматулин, 1987; Кутушев, 2003]:

$$F = \frac{3\alpha}{8r} C_{d2} \rho_1 |u_1 - u_2| (u_1 - u_2) + \alpha \rho_1 \left( \frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) + 0.5\alpha \rho_1 \left( \frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{\partial u_2}{\partial t} - u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} \right).$$

Параметры межфазного взаимодействия описаны в работе [Кутушев, 2003]:

$$C_{d2} = C_{d2}^0 \phi(M_{12}) \varphi(\alpha), \quad C_{d2}^0 = \frac{24}{Re_{12}} + \frac{4}{Re_{12}^{0.5}} + 0.4,$$

$$\phi(M_{12}) = 1 + \exp\left(-\frac{0.427}{M_{12}^{0.63}}\right), \quad \varphi(\alpha) = (1 - \alpha)^{-2.5},$$

$$Re = \rho_1 u_1 D / \mu, \quad Re_{12} = r \rho_1 |u_1 - u_2| / \mu, \quad M_{12} = |u_1 - u_2| / c, \quad Pr_1 = c \rho_1 \mu (\lambda)^{-1},$$

$$Nu_{12} = 2 \exp(-M_{12}) + 0.459 Re_{12}^{0.55} Pr_1^{0.33}, \quad 0 < M_{12} < 2, \quad 0 < Re < 2 * 10^5.$$

Здесь  $D$  -- характерный размер системы.

Система уравнений математической модели решалась явным методом Мак-Кормака второго порядка [Fletcher 1988] с последующим применением схемы нелинейной коррекции решения [Музафаров, Утюжников, 1993].

Система уравнений (1)-(6) может быть записана в матричном виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} &= \mathbf{H}; \\ \mathbf{q} &= \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_1 u_1 \\ \rho_2 u_2 \\ e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{E} &= \begin{bmatrix} \rho_1 u_1 \\ \rho_2 u_2 \\ \rho_1 u_1^2 + p - \tau \\ \rho_2 u_2^2 \\ (e_1 + p - \tau) u_1 - \lambda \frac{\partial T_1}{\partial x} \\ e_2 u_2 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{H} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -F + \alpha \frac{\partial p}{\partial x} \\ F - \alpha \frac{\partial p}{\partial x} \\ -Q - |F|(u_1 - u_2) + \alpha \frac{\partial p u_1}{\partial x} \\ Q \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{7}$$

Алгоритм явного конечно-разностного метода Мак-Кормака для нелинейной системы (7) может быть записан в виде:

$$q_j^* = q_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (E_{j+1}^n - E_j^n) + \Delta t H_j^n, \\ q_j^{n+1} = 0.5(q_j^* + q_j^n) - 0.5 \frac{\Delta t}{\Delta x} (E_j^n - E_{j-1}^n) + 0.5 \Delta t H_j^n.$$

Монотонность решения достигалась с помощью применения схемы нелинейной коррекции вдоль пространственных направлений  $x$  и  $y$  по индексам  $j, k$  соответственно к компонентам вектора независимых переменных  $\mathbf{q}$ ,  $\mathbf{q} = (\rho_1, \rho_2, \rho_1 u_1, \rho_2 u_2, e_1, e_2)$ . Пусть  $Z_{j,k}^n$  -- произвольная независимая функция на  $n$ -ом временном слое в узле  $j, k$ . Тогда алгоритм коррекции имел бы следующий вид:

$$Z_{j,k}^{n*} = Z_{j,k}^n + \kappa (\delta Z_{j+1/2,k}^n - \delta Z_{j-1/2,k}^n), \tag{8}$$

где  $Z_{j,k}^{n*}$  – скорректированная функция.

Данный алгоритм выполняется в случае, когда  $(\delta Z_{j-1/2,k}^n \delta Z_{j+1/2,k}^n) < 0$  или  $(\delta Z_{j+1/2,k}^n \delta Z_{j+3/2,k}^n) < 0$ . Здесь используются обозначения

$$\delta Z_{j-1/2,k}^n = Z_j^n - Z_{j-1,k}^n, \delta Z_{j+1/2,k}^n = Z_{j+1,k}^n - Z_{j,k}^n, \delta Z_{j+3/2,k}^n = Z_{j+2,k}^n - Z_{j+1,k}^n,$$

где  $\kappa$  – коэффициент коррекции.

На границах расчетной области задавались однородные граничные условия первого рода для скорости и однородные граничные условия второго рода для остальных динамических функций [Кутушев, 2003]:

$$u_1(t, N) = 0, u_2(t, N) = 0,$$

$$\rho_1(t, N) = \rho_1(t, N - 1), \rho_2(t, N) = \rho_2(t, N - 1),$$

$$e_1(t, N) = e_1(t, N - 1), e_2(t, N) = e_2(t, N - 1),$$

$$u_1(t, 1) = 0, u_2(t, 1) = 0,$$

$$\rho_1(t, 1) = \rho_1(t, 2), \rho_2(t, 1) = \rho_2(t, 2),$$

$$e_1(t, 1) = e_1(t, 2), e_2(t, 1) = e_2(t, 2).$$

В начальный момент времени компоненты смеси покоились:

$$u_1(0, i) = 0, u_2(0, i) = 0.$$

Для искомых функций в моделируемой области течения задавались начальные значения:  $e_1(0, i) = e_1^0, e_2(0, i) = e_2^0, \rho_1(0, i) = \rho_1^0, \rho_2(0, i) = \rho_2^0$  в левой половине канала ( $x < L/2$ ) и в правой половине канала ( $x \geq L/2$ ):  $e_1(0, i) = 0, e_2(0, i) = 0, \rho_1(0, i) = 0, \rho_2(0, i) = 0$ . Численное решение проводилось на равномерной сетке с количеством узлов вдоль оси  $x$  –  $N = 1000$ . Шаг по времени вычислялся исходя из условия Куранта-Фридрихса-Леви [Fletcher, 1988]. Алгоритм численного решения системы уравнений математической модели был реализован на языке Fortran. Используемая в работе математическая модель тестировалась сопоставлением результатов моделирования с результатами известных из литературы численных расчетов [Губайдуллин, Тукмаков, 2014], экспериментальными результатами [Нигматуллин и др., 2016] и аналитическими решениями [Губайдуллин, Тукмаков, 2014].

**3. Результаты расчетов.** Начальное давление и температура газа  $p=98$  кПа и  $T=293$  К, длина канала –  $L=1$  м. Диаметр частиц моделируемого потока газозвеси составлял  $d=20$  мкм, плотность материала частиц  $\rho_{20}=2500$  кг/м<sup>3</sup>. На рис. 1 схематично изображен канал одна часть которого заполнена газом со взвешенными в нем дисперсными частицами, а в другой части которого расположена разреженная среда.

На рис. 2 представлены результаты аналитических [Овсянников, 2003] и численных расчетов скорости однородного газа – кривые 3 и 2 соответственно, также на рисунке изображено пространственное распределение скорости газа при разлете газозвеси,  $\alpha=0.001$ . Сопоставление скоростей в аналитическом решении ( $u=731$  м/с) и численном расчете ( $u=561$  м/с) для вязкого газа показывает, что наличие вязкости влияет на скорость спутного потока при истечении газа. Наличие дисперсной компоненты приводит к существенному уменьшению скорости газа –  $u=319$  м/с.

Увеличение объемного содержания дисперсной фазы ( $\alpha=0.0001$ ) приводит к замедлению истечения газозвеси в вакуум, в то же время процесс истечения в вакуум газозвеси с малым объемным содержанием дисперсной фазы ( $\alpha=0.00001$ ) аналогичен процессу истечения чистого газа – рис. 3.

Скорость газа для численной модели истечения однородного вязкого газа составляет –  $u=561$  м/с ; для газозвеси с объемным содержанием  $\alpha=0.00001$  –  $u=550$  м/с; для газозвеси с объемным содержанием  $\alpha=0.0001$  –  $u=514$  м/с; для газозвеси с объемным содержанием  $\alpha=0.001$  –  $u=319$  м/с: рис. 4.

Численное моделирование показывает, что при увеличении объемного содержания дисперсной компоненты ( $0.0001 \leq \alpha$ ) существенно уменьшается скорость истекающего газа. При этом с увеличением объемного содержания дисперсной фазы уменьшается интенсивность скоростного скольжения фаз – рис. 5, также происходит уменьшение скорости движения дисперсной компоненты смеси – рис. 6.

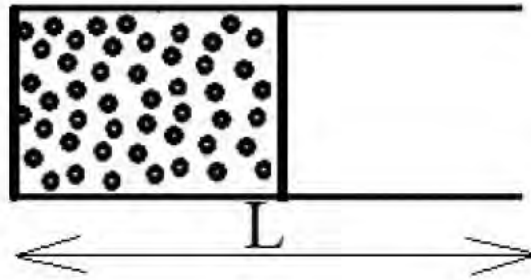


Рис. 1. Схематичное изображение моделируемого канала  
 Fig. 1. Schematic representation of the simulated channel

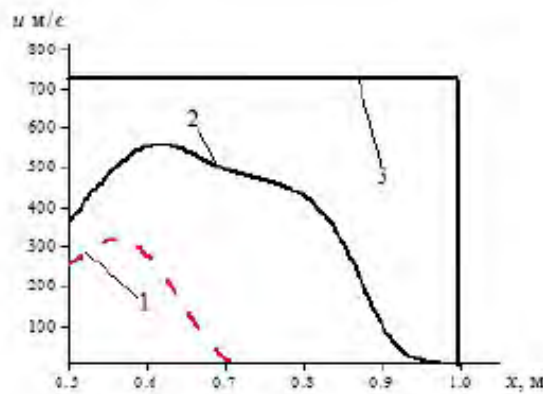


Рис. 2. Пространственное распределение скорости газа при разлете в вакуум газозвеси с объемным содержанием твердой фазы  $\alpha=0.0001$  – кривая 1; разлете в вакуум вязкого газа – кривая 2; аналитическое решение для невязкого газа – кривая 3. Момент времени  $t=0.3$  мс

Fig. 2. Spatial distribution of gas velocity during expansion of a gas suspension with a volumetric solid phase content of  $\alpha = 0.0001$  – curve 1; expansion into a vacuum of viscous gas – curve 2; analytical solution for an inviscid gas – curve 3. Moment of time  $t = 0.3$  ms

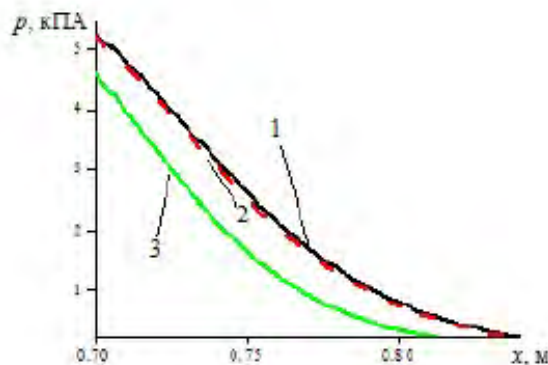


Рис. 3. Пространственные распределения давления газа при разлете в вакуум однородного вязкого газа - кривая 1; разлете в вакуум вязкого газа с дисперсной компонентой ( $\alpha=0.00001$ ) – кривая 2; разлете в вакуум вязкого газа с дисперсной компонентой ( $\alpha=0.0001$ ) – кривая 3. Момент времени  $t=0.3$  мс

Fig. 3. Spatial distributions of gas pressure during expansion into a vacuum of a homogeneous viscous gas - curve 1; expansion of a viscous gas with a dispersed component into vacuum ( $\alpha = 0.00001$ ) – curve 2; expansion of a viscous gas with a dispersed component ( $\alpha = 0.0001$ ) - curve 3 into vacuum. Moment of time  $t = 0.3$  ms

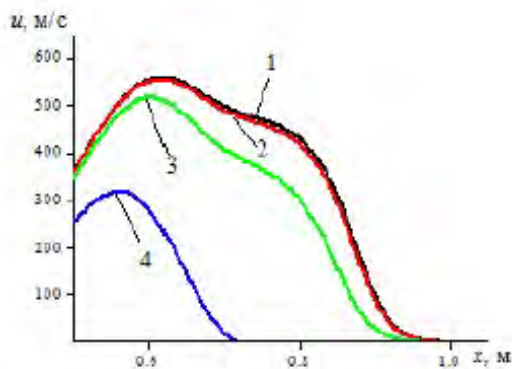


Рис. 4. Пространственное распределение скорости газа при разлете в вакуум однородного вязкого газа - кривая 1; разлете в вакуум вязкого газа с дисперсной компонентой ( $\alpha=0.00001$ ) - кривая 2; разлете в вакуум вязкого газа с дисперсной компонентой ( $\alpha=0.0001$ ) - кривая 3; разлете в вакуум вязкого газа с дисперсной компонентой ( $\alpha=0.001$ ) - кривая 4. Момент времени  $t=0.3$  мс

Fig. 4. Spatial distribution of gas velocity during the expansion of a homogeneous viscous gas into a vacuum - curve 1; expansion into a vacuum of a viscous gas with a dispersed component ( $\alpha=0.00001$ ) - curve 2; expansion of a viscous gas with a dispersed component ( $\alpha=0.0001$ ) - curve 3 into vacuum; expansion of a viscous gas with a dispersed component ( $\alpha=0.001$ ) - curve 4 into vacuum. Moment of time  $t=0.3$  ms

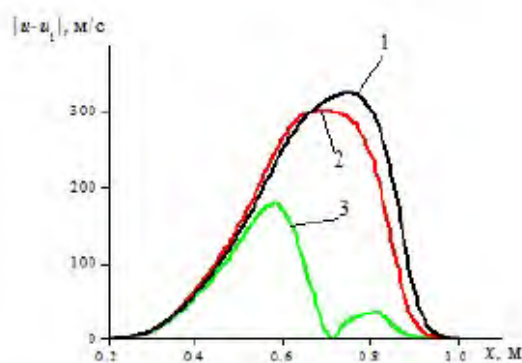


Рис. 5. Пространственное распределение интенсивности скоростного скольжения компонент смеси при разлете в вакуум вязкого газа с дисперсной компонентой ( $\alpha=0.00001$ ) - кривая 1; разлете в вакуум вязкого газа с дисперсной компонентой ( $\alpha=0.0001$ ) - кривая 2; разлете в вакуум вязкого газа с дисперсной компонентой ( $\alpha=0.001$ ) - кривая 3. Момент времени  $t=0.3$  мс

Fig. 5. The spatial distribution of the intensity of the velocity slip of the mixture components during the expansion of a viscous gas with a dispersed component into vacuum ( $\alpha=0.00001$ ) - curve 1; expansion of a viscous gas with a dispersed component into vacuum ( $\alpha=0.0001$ ) - curve 2; expansion of a viscous gas with a dispersed component ( $\alpha=0.001$ ) - curve 3 into vacuum. Moment of time  $t=0.3$  ms

Выявленные закономерности можно объяснить тем, что при прочих неизменных параметрах дисперсной компоненты смеси, увеличение объемного содержания дисперсной фазы газозвеси приводит к увеличению интенсивности межфазного взаимодействия, большим потерям кинетической энергии истекающего в вакуум газа. Вследствие чего скоростные параметры компонент смеси имеют меньшее отличие и интенсивность скоростного скольжения уменьшается. В газозвесах с меньшим содержанием дисперсной компоненты влияние дисперсной составляющей смеси на динамику газа незначительное, по сравнению с газозвесами, в которых масса несущей и дисперсной компонент близки. Газовая компонента смеси разгоняется до больших скоростей, чем газовая компонента в газозвесах с большим объемным содержанием дисперсной фазы. За счет меньших потерь в межфазном взаимодействии скорости истечения газа в газозвеси с малыми объемными содержаниями дисперсной компоненты близки к скорости истечения чистого газа. При этом скорость дисперсной компоненты существенно меньше, чем у газа, что приводит к скоростному скольжению большей величины.

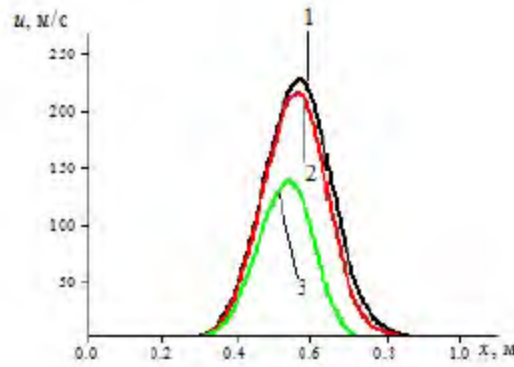


Рис. 6. Пространственное распределение скорости дисперсной компоненты смеси при разлёте в вакуум вязкого газа с дисперсной компонентой ( $\alpha=0.00001$ ) – кривая 1; разлёте в вакуум вязкого газа с дисперсной компонентой ( $\alpha=0.0001$ ) – кривая 2; разлёте в вакуум вязкого газа с дисперсной компонентой ( $\alpha=0.001$ ) – кривая 3. Момент времени  $t=0.3$  мс

Fig. 6. Spatial velocity distribution of the dispersed component of the mixture during the expansion of a viscous gas with a dispersed component ( $\alpha=0.00001$ ) – curve 1; expansion of a viscous gas with a dispersed component ( $\alpha=0.0001$ ) – curve 2 into vacuum; expansion of a viscous gas with a dispersed component ( $\alpha=0.001$ ) – curve 3 into vacuum. Moment of time  $t=0.3$  ms

**Выводы.** Вычислительные эксперименты выявили отличия процессов истечения в вакуум однородного газа и неоднородной среды. Математическое моделирование продемонстрировало, что наличие дисперсной фазы оказывает существенное влияние на истечение газа в вакуум. Также было определено, что при объёмных содержаниях дисперсной компоненты смеси больших  $\alpha = 0.0001$  влияние дисперсной компоненты смеси становится существенным. Интенсивность межфазного скоростного скольжения обратно пропорциональна величине объёмного содержания дисперсной компоненты смеси. Увеличение объёмного содержания дисперсной компоненты смеси приводит к уменьшению скорости движения несущей и дисперсной компонент смеси, вследствие большего межфазного взаимодействия, в результате уменьшается интенсивность межфазного скоростного скольжения.

#### Список литературы

1. Арсланова С. Н., Тукмаков А. Л., Тонконог В. Г. 2016. Волновая коагуляция полидисперсной газозвеси в технологии газификации и криостатирования сжиженного природного газа. Акустический журнал. 62(1): 125–131.
2. Вараксин А. Ю. 2014. Кластеризация частиц в турбулентных и вихревых двухфазных потоках. Теплофизика высоких температур. 52(5): 777–796.
3. Губайдуллин Д. А., Тукмаков Д.А. 2014. Исследование динамики двухкомпонентного газа с пространственно разделенными в начальный момент компонентами. Известия вузов. Проблемы энергетики, (3-4): 38–43.
4. Губайдуллин Д. А., Тукмаков Д.А. 2014. Численное исследование эволюции ударной волны в газозвеси с учетом неравномерного распределения частиц. Математическое моделирование, 26(10): 109–119.
5. Кутушев А. Г. 2003. Математическое моделирование волновых процессов в аэродисперсных и порошкообразных средах. СПб.: Недра, 284 с.
6. Музафаров И. Ф., Утюжников С. В. 1993. Применение компактных разностных схем к исследованию нестационарных течений сжимаемого газа. Математическое моделирование, 5(3):74–83.
7. Нигматулин Р. И. 1987. Динамика многофазных сред. Ч. 1 М.: Наука, 464 с.
8. Нигматулин Р. И., Губайдуллин Д.А., Тукмаков Д.А. 2016. Ударно-волновой разлет газозвесей. Доклады академии наук, 466(4): 418–421.
9. Овсянников Л. В. 2003. Лекции по основам газовой динамики. Москва: Издательство Института компьютерных исследований, 336 с.



10. Пахомов М. А., Терехов В. И. 2018. Влияние испарения капель на структуру течения и тепло-массообмен в ограниченном закрученном газок капельном потоке за его внезапным расширением. *Теплофизика и аэромеханика*, 6: 865–875.
11. Садин Д. В. 2016. TVD-схема для жестких задач волновой динамики гетерогенных сред негиперболического неконсервативного типа. *Журнал вычислительной математики и математической физики*, 56(12): 2098-2109.
12. Тукмаков А. Л., Тукмаков Д. А. 2018. Генерация акустического возмущения движущейся заряженной газовой взвесью. *Инженерно-физический журнал*, 91(5): 1207–1203.
13. Тукмаков А. Л., Кашапов Н. Ф., Тукмаков Д. А., Фазлыяхматов М. Г. 2018. Процесс осаждения заряженной полидисперсной газовой взвеси на поверхность пластины в электрическом поле. *Теплофизика высоких температур*, 56(4): 498–502.
14. Тукмаков Д. А. 2019. Численное моделирование отражения ударной волны в газовой взвеси для различных параметров дисперсной компоненты запыленной среды. *Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика*. 51(4): 565–576.
15. Федоров А. В., Фомин В. М., Хмель Т. А. 2015. *Волновые процессы в газовой взвеси частиц металлов*. Новосибирск, 301 с.
16. Федоров А. В., Михайлов А. Л., Финюшин С. А., Калашников Д. А., Чудаков Е. А., Бутусов Е. И., Гнутов И. С. 2016. Регистрация параметров множественного откола и внутренней структуры облака частиц при ударноволновом нагружении металлов. *Журнал экспериментальной и теоретической физики*, 149(4): 792-795.
17. Azanov G. M., Osipov A. N. 2017. The efficiency of one method of machineless gasdynamic temperature stratification in a gas flow. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 106: 1125-1133.
18. Fletcher C. 1988. *Computation Techniques for Fluid Dynamics*, Berlin: Springer-Verlag, 502 p.
19. Garcia-Trinanes P., Seville J., Ansart R., Benoit H., Leadbeater T., Parker D. 2018. Particle motion and heat transfer in an upward-flowing dense particle suspension: Application in solar receivers *Chemical Engineering Science*, 177: 313-322.
20. Imran M., Khan H., Joardder M., Kumar C., Karim M. 2018. Multiphase porous media modelling: A novel approach to predicting food processing performance. *Critical Reviews in Food Science and Nutrition* 58(4): 528-546.
21. Lopez I., Benoit H., Gauthier D., Sans J., Guillot E., Mazza G., Flamanta G. 2016. On-sun operation of a 150 kWth pilot solar receiver using dense particle suspension as heat transfer fluid *Solar Energy*, 137: 463-476.
22. Lopez I., Benoit H., Gauthier D., Sans J., Guillot E., Mazza G., Flamanta G. 2016. On-sun operation of a 150 kWth pilot solar receiver using dense particle suspension as heat transfer fluid *Solar Energy*, 137: 463-476.
23. Mehrabadi M., Tenneti S., Garg R., Subramaniam S. 2015. Pseudo-turbulent gas-phase velocity fluctuations in homogeneous gas–solid flow: fixed particle assemblies and freely evolving suspensions. *Journal of Fluid Mechanics*, 770: 210-246.
24. Saikat S., Meheboob A. 2017. Revisiting ignited–quenched transition and the non-Newtonian rheology of a sheared dilute gas–solid suspension. *Journal of Fluid Mechanics*, 833: 206-246.
25. Teklaya A., Chungeng Y., Lasse R., Kohler L. 2015. Experimental and modeling study of flash calcination of kaolinite rich clay particles in a gas suspension calciner. *Applied Clay Science*, 103: 10-19.
26. Tukmakov A. L., Kashapov N.F., Tukmakov D.A., Fazlyyakhmatov M.G. 2018. Numerical modeling of the powder materials spraying. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1757-1399/1012/1/012076>.
27. Zhengbiao P., Behdad M., Elham D. 2017. Suspension stability of slurry Taylor flow: A theoretical analysis. *Chemical Engineering Science*, 174: 459-471.
28. Zhuoqing A. Jesse Z. 2019. Correlating the apparent viscosity with gas-solid suspension flow in straight pipelines. *Powder Technology*, 345: 346-351.

## References

1. Arslanova S. N., Tonkonog V. G., Tukmakov A. L. 2016. Wave coagulation of a polydisperse gas suspension in the technology of gasification and Cryostatting of liquefied natural gas. *Acoustical Physics*. 62(1): 125–131.
2. Varaksin A. Y. 2014. Clusterization of particles in turbulent and vortex two-phase flows. *High Temperature*, 52(5): 752–769.
3. Gubaidullin D. A., Tukmakov D. A. 2014. A study of the dynamics of a two-component gas with components spatially separated at the initial moment. *News of higher educational institutions. energy issues*, (3-4): 38–43. (in Russian)
4. Gubajdulli D. A., Tukmakov D. A. 2015. Numerical investigation of the evolution of a shock wave in a gas suspension with consideration for the nonuniform distribution of the particles. *Mathematical Models and Computer Simulations*, 7(3): 246–253.
5. Kutushev A.G. 2003. *Matematicheskoe modelirovanie volnovykh processov v aerodispersnykh i poroshko-obraznykh sredah*. SPb.: Nedra, 284 p.
6. Muzafarov I. F., Utyuzhnikov S. V. 1993. Application of compact difference schemes to the study of unsteady flows of a compressible gas. *Mathematical Modeling*, 5 (3): 74–83. (in Russian)
7. Nigmatulin R. I. 1987. *Dinamika mnogofaznykh sred*. Ch.1 M.: Nauka, 464 p.
8. Nigmatulin R. I., Gubaidullin D. A., Tukmakov D. A. 2016. Shock Wave Dispersion of Gas–Particle Mixtures. *Doklady Physics*, 61(2): 70–73.
9. Ovsyannikov L. V. 2003. *Lekcii po osnovam gazovoj dinamiki*. Moskva, Izdatel'stvo Instituta kom- p'yuternykh issledovaniy, 336 p.
10. Pakhomov M. A., Terekhov V. I. 2018. Effect of droplet evaporation on the flow structure and heat and mass transfer in a confined swirling gas-droplet flow downstream of a tube sudden expansion. *Thermophysics and Aeromechanics*, 25(6): 833–843.
11. Sadin D. V. 2016. TVD scheme for stiff problems of wave dynamics of heterogeneous media of nonhyperbolic nonconservative type. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 56(12): 2068–2078.
12. Tukmakov A. L., Tukmakov D. A. 2018. Generation of Acoustic Disturbances by a Moving Charged Gas Suspension. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 91(5): 1141–1147.
13. Tukmakov A. L., Kashapov N. F., Tukmakov D. A., Fazlyyyakhmatov M. G. 2018. Process of the Deposition of Charged Polydisperse Gas Suspension on the Plate Surface in an Electrical Field. *High Temperature*, 56(4): 481–485.
14. Tukmakov D. A. 2019. Numerical modeling of reflection of a shock wave in a gas suspension for various parameters of a dispersed component of a dusted medium. *Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics. Physics*. 51(4): 565–576 (in Russian).
15. Fedorov A. V., Fomin V. M., Hmel T. A. 2015. *Volnovye processy v gazovzvesyakh chastic metallov*. Novosibirsk, 301 p.
16. Fedorov A. V., Mikhailov A. L., Finyushin S. A., Kalashnikov D. A., Chudakov E. A., Butusov E. I., Gnutov I. S. 2016. Detection of the multiple spallation parameters and the internal structure of a particle cloud during shock-wave loading of a metal. *Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 122(4): 685–688.
17. Azanov G. M., Osiptsov A. N. 2017. The efficiency of one method of machineless gasdynamic temperature stratification in a gas flow. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 106: 1125–1133.
18. Fletcher C. 1988. *Computation Techniques for Fluid Dynamics*, Berlin: Springer-Verlang, 502 p.
19. Garcia-Trinanes P., Seville J., Ansart R., Benoit H., Leadbeater T., Parker D. 2018. Particle motion and heat transfer in an upward-flowing dense particle suspension: Application in solar receivers *Chemical Engineering Science*, 177: 313–322.
20. Imran M., Khan H., Joardder M. , Kumar C., Karim M. 2018. Multiphase porous media modelling: A novel approach to predicting food processing performance. *Critical Reviews in Food Science and Nutrition* 58(4): 528–546.

21. Lopez I., Benoit H., Gauthier D., Sans J., Guillot E., Mazza G., Flamanta G. 2016. On-sun operation of a 150 kWth pilot solar receiver using dense particle suspension as heat transfer fluid *Solar Energy*, 137: 463–476.
22. Lopez I., Benoit H., Gauthier D., Sans J., Guillot E., Mazza G., Flamanta G. 2016. On-sun operation of a 150 kWth pilot solar receiver using dense particle suspension as heat transfer fluid *Solar Energy*, 137: 463–476.
23. Mehrabadi M., Tenneti S., Garg R., Subramaniam S. 2015. Pseudo-turbulent gas-phase velocity fluctuations in homogeneous gas–solid flow: fixed particle assemblies and freely evolving suspensions. *Journal of Fluid Mechanics*, 770: 210–246.
24. Saikat S., Meheboob A. 2017. Revisiting ignited–quenched transition and the non-Newtonian rheology of a sheared dilute gas–solid suspension. *Journal of Fluid Mechanics*, 833: 206–246.
25. Teklaya A., Chungun Y., Lasse R., Kohler L. 2015. Experimental and modeling study of flash calcination of kaolinite rich clay particles in a gas suspension calciner. *Applied Clay Science*, 103: 10–19.
26. Tukmakov A. L., Kashapov N. F., Tukmakov D. A., Fazlyyakhmatov M.G. 2018. Numerical modeling of the powder materials spraying. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, <https://iopscience.iop.org/article/10.1089X/412/1/012076>.
27. Zhengbiao P., Behdad M., Elham D. 2017. Suspension stability of slurry Taylor flow: A theoretical analysis. *Chemical Engineering Science*, 174: 459–471.
28. Zhuoqing A. Jesse Z. 2019. Correlating the apparent viscosity with gas-solid suspension flow in straight pipelines. *Powder Technology*, 345: 346–351.

Получена 16.03.2020

---

**Тукмаков Дмитрий Алексеевич** – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник института механики и машиностроения – обособленного структурного подразделения Федерального государственного бюджетного учреждения науки «Федеральный исследовательский центр «Казанский научный центр Российской академии наук»

ул. Лобачевского, д. 2/31, г. Казань, Россия, 420111

E-mail: [tukmakovDA@imm.knc.ru](mailto:tukmakovDA@imm.knc.ru)