

№ 6 (255), вып. 46
Март 2017

НАУЧНЫЙ РЕЦЕНЗИРУЕМЫЙ ЖУРНАЛ

Основан в 1995 г.

Журнал входит в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, выпускаемых в Российской Федерации, в которых рекомендуется публикация основных результатов диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук

НАУЧНЫЕ ВЕДОМОСТИ

Белгородского государственного университета

Математика Физика

Belgorod State University
Scientific Bulletin
Mathematics & Physics

Учредитель:

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Белгородский государственный национальный исследовательский университет»

Издатель:

НИУ «БелГУ»

Издательский дом «Белгород»

Адрес редакции, издателя, типографии:
308015 г. Белгород, ул. Победы, 85

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор)

Свидетельство о регистрации средства массовой информации
ПИ № ФС 77-63055
от 10 сентября 2015 г.

Выходит 4 раза в год.

**РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ
ЖУРНАЛА**

Главный редактор

О.Н. Полухин,

ректор НИУ «БелГУ», доктор политических наук, профессор

Зам. главного редактора

И.С. Константинов,

проректор по научной и инновационной работе НИУ «БелГУ», доктор технических наук, профессор

Научный редактор

В.М. Московкин,

профессор кафедры мировой экономики НИУ «БелГУ», доктор географических наук

Ответственный секретарь:

О.В. Шевченко,

зам. начальника УНИИ НИУ «БелГУ», кандидат исторических наук

**РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ
СЕРИИ ЖУРНАЛА**

Главный редактор серии

А.В. Носков

(доктор физико-математических наук, профессор НИУ «БелГУ»)

Заместитель главного редактора

Н.В. Малай

(доктор физико-математических наук, профессор НИУ «БелГУ»)

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

Ф.М. Лосанова Задача с интегральным условием для уравнения дробной функции	5
Л.Р. Рустамова Нелокальные краевые задачи для уравнения смешанного типа третьего порядка с кратными характеристиками	9
С.М. Рацеев, О.И. Череватенко О симметрических многочленах специального вида	16
Д.З. Каган Ширина вербальных подгрупп для аномальных произведений	24
М.В. Кукушкин Оценка собственных значений задачи Штурма-Лиувилля для дифференциального оператора второго порядка с дробной производной в младших членах	29
С.В. Галаев Почти контактные метрические многообразия с распределением нулевой кривизны	36
И.П. Попов Операторы типа набла: поверхностный, нулевой и мнимый нулевой	44
Б.И. Эфендиев Задача Дирихле для обыкновенного непрерывного дифференциального уравнения с производными Римана-Лиувилля сегментного порядка	54
А.С. Чурсанова Оценка собственных значений матриц	59
К.Г. Малютин, Л.И. Студеникина Локально выпуклые пространства целых функций нулевого порядка, приложения к интерполяции	62
А.С. Бондарев Среднеквадратичные оценки погрешности проекционно-разностного метода со схемой Кранка-Николсон по времени для параболического уравнения с периодическим условием на решение	72
G.I. Schabanowa Determination of source and variable coefficient in the inverse problem for the wave's equation	80
А.Р. Рустанов, О.С. Ищенко Аналоги тождеств Грея тензора римановой кривизны специальных обобщенных многообразий Кенмоцу первого рода	88
Е.М. Богатов Об истории развития нелинейных интегральных уравнений в СССР. Сильные нелинейности	93

Ответственный секретарь

Р.А. Загороднюк
(аспирант НИУ БелГУ)

Члены редколлегии:

С.В. Блажевич
(доктор физико-математических наук,
профессор НИУ «БелГУ»)

А.Н. Беляков
(доктор физико-математических наук,
профессор НИУ «БелГУ»)

И.П. Борисовский
(кандидат физико-математических наук,
доцент НИУ «БелГУ»)

А.Г. Брусенцев
(доктор физико-математических наук,
профессор БГТУ им. В.Г. Шухова)

И.Е. Внуков
(доктор физико-математических наук,
профессор НИУ «БелГУ»)

А.В. Глушак
(доктор физико-математических наук,
профессор НИУ «БелГУ»)

Р. Кавалла
(профессор, Технический университет,
Фрайберг, Германия)

В.В. Красильников
(доктор физико-математических наук,
профессор НИУ «БелГУ»)

А.П. Солдатов
(доктор физико-математических наук,
профессор НИУ «БелГУ»)

В.В. Сыщенко
(доктор физико-математических наук,
профессор НИУ «БелГУ»)

ФИЗИКА

**S.V. Blazhevich, D.N. Efimtceva, K.S. Lyushina, O.Yu. Shevchuk,
A.V. Noskov**
Coherent X-ray radiation along the velocity of relativistic electron crossing a
periodic layered medium **107**

С.И. Кучеев, А.В. Полунина
Полярный электрооптический эффект памяти в структуре
Si/нематик/ITO **118**

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

И.Е. Еремин, Е.А. Подолько
Математический метод опосредованной визуализации наноструктуры
алмаза **123**

И.В. Некрасова, Л.Ф. Маслакова
Математические модели гидравлического удара в вязкой жидкости
и эластичном твердом скелете **128**

Ю.П. Вирченко, Л.П. Данилова
О вириальном разложении уравнения состояния одноатомных газов **138**

М.М. Бухурова
О математической модели движения почвенной влаги **141**

Лам Тан Фат, Ю.П. Вирченко
Общее феноменологическое уравнение теплопереноса в твердотельной
среде **145**

Сведения об авторах **149**

Статьи представлены в авторской редакции

Выпускающий редактор *Л.П. Котенко*
Художественный редактор *Ю.В. Ивахненко*
Оригинал-макет *А.В. Носков*
E-mail: *noskov_a@bsu.edu.ru*

Подписано в печать 28.03.2017

Формат 60×84/8

Гарнитура Georgia, Impact

Усл. п. л. 18,8.

Заказ 63

Цена свободная

Тираж 1000 экз.

Дата выхода 31.03.2017.

Подписной индекс в Объединённом
каталоге «Пресса России» – 81631

Оригинал-макет подготовлен
и тиражирован в Издательском доме
«Белгород»

Адрес: 308015 г. Белгород, ул. Победы, 85

The Journal is included into the list of the leading peer-reviewed journals and publications coming out in the Russian Federation that are recommended for publishing key results of the theses for Doktor and Kandidat degree-seekers

Founder:

Federal state autonomous educational establishment of higher education «Belgorod State National Research University»

Publisher:

Belgorod State National Research University
Belgorod Publishing House

Address of editorial office, publisher, letterpress plant: 85 Pobeda St., Belgorod, 308015, Russia

The journal has been registered at the Federal service for supervision of communications information technology and mass media (Roskomnadzor)

Mass media registration certificate ПИ № ФС 77-63055 September 10, 2015 г.

Publication frequency: 4 /year

EDITORIAL BOARD OF JOURNAL

Editor-in-chief

O.N. Poluchin,

Rector of Belgorod State National Research University, Doctor of political sciences, Professor

Deputy editor-in-chief

I.S. Konstantinov,

Vice-Rector on Scientific and Innovative Work of Belgorod State National Research University, Doctor of technical sciences, Professor

Scientific Editor

V.M. Moskovkin,

Professor of World Economy Department of Belgorod State National Research University, Doctor of Geographical Sciences

O.V. Shevchenko,

Deputy Head of Scientific and Innovative Activity Department of Belgorod State National Research University, Candidate of Historical Sciences

EDITORIAL BOARD OF JOURNAL SERIES

Chief editor:

A.V. Noskov,

Professor (Belgorod State National Research University)

Deputies of chief editor:

N.V. Malay,

Professor (Belgorod State National Research University)

Editorial assistant:

R.A. Zagorodnyuk,

graduate student (Belgorod State National Research University)

CONTENTS

MATHEMATICS

F.M. Losanova A problem with an integral condition for fractional diffusion equation	5
L.R. Rustamova Nonlocal border problems for a mixed type equation of the third order with multiple characteristics	9
S.M. Ratseev, O.I. Cherevatenko On symmetric polynomials of a special form	16
D.Z. Kagan The width of verbal subgroups in anomalous products	24
M.V. Kukushkin Evaluation of the eigenvalues of the Sturm-Liouville problem for a differential operator of second order with fractional derivative in the junior members	29
S.V. Galaev Almost contact metric manifolds with distribution of zero curvature	36
I.P. Popov Operators type of nabla: surface, zero and zero imaginary	44
B.I. Efendiev The Dirichlet problem for ordinary continuous differential equation with the Riemann-Liouville derivatives of segment order	54
A.S. Chursanova The estimate of matrix eigenvalues	59
K.G. Malyutin, L.I. Studenikina Locally convex space of entire functions of zero order, applications to interpolation	62
A.S. Bondarev Root-mean-square estimates of errors of the projection-difference method with the Crank-Nicolson scheme in time for parabolic equation with a periodic condition on the solution	72
G.I. Schabanowa Determination of source and variable coefficient in the inverse problem for the wave's equation	80
A.R. Rustanov, O.S. Ishchenko Analogues identities Gray Riemann curvature tensor of special generalized manifolds Kenmotsu first kind	88
E.M. Bogatov About the history of development of nonlinear integral equations in the USSR. Strong nonlinearities	93
PHYSICS	
S.V. Blazhevich, D.N. Efimtceva, K.S. Lyushina, O.Yu. Shevchuk, A.V. Noskov Coherent X-ray radiation along the velocity of relativistic electron crossing a periodic layered medium	107
S.I. Kucheev, A.V. Polunina Polar electro-optical effect of memory in Si/nematic/ITO structure	118

Members of editorial board:

S.V. Blazhevich,

Professor (Belgorod State National Research University)

A.N. Belyakov,

Professor (Belgorod State National Research University)

I.P. Borisovsky,

Associated Professor (Belgorod State National Research University)

A.G. Brusentsev

Professor (Belgorod State Technological University named after V.G. Shukhov)

I.E. Vnukov,

Professor (Belgorod State National Research University)

A.V. Glushak,

Professor (Belgorod State National Research University)

R. Kawalla,

Professor of Technische Universität Bergakademie Freiberg

V.V. Krasilnikov,

Professor (Belgorod State National Research University)

A.P. Soldatov,

Professor (Belgorod State National Research University)

V.V. Syshchenko,

Professor (Belgorod State National Research University)

MATHEMATICAL PHYSICS. MATHEMATICAL MODELING

I.E. Eremin, E.A. Podolko

The mathematical method of mediated visualization of diamond-nanostructure **123**

I.V. Nekrasova, L.F. Maslakova

Mathematical models of hydraulic shock in a viscous liquid and an elastic solid skeleton **128**

Yu.P. Virchenko, L.P. Danilova

About virial expansion of monatomic gases state equation **138**

M.M. Bukhurova

On the mathematical model of moisture motion **141**

Lam Tan Phat, Yu.P. Virchenko

General phenomenological equation of heat transfer in solid medium **145**

About authors **149**

The articles are given in authors' editing.

Commissioning Editor *L.P. Kotenko*

Art Editor *Y.V. Ivakhnenko*

Dummy layout by *A.V. Noskov*

E-mail: noskov_a@bsu.edu.ru

Passed for printing 28.03.2017

Format 60×84/8

Typeface Georgia, Impact

Printer's sheets 18,8.

Order 63

Circulation 1000 copies

Date of publishing: 31.03.2017

Subscription reference in The Russian Press common catalogue – 81631

Dummy layout is replicated at Publishing House "Belgorod", Belgorod State National Research University

Address: 85 Pobeda St., Belgorod, 308015, Russia

МАТЕМАТИКА

УДК 517.95

ЗАДАЧА С ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ДРОБНОЙ ДИФФУЗИИ

A PROBLEM WITH AN INTEGRAL CONDITION FOR FRACTIONAL DIFFUSION EQUATION

Ф.М. Лосанова
F.M. Losanova

Институт прикладной математики и автоматизации, Россия, 360000, г. Нальчик, ул. Шортанова, д. 89А
Institute of Applied Mathematics and Automation, 89 A, Shortanov St, Nalchik, 360000, Russia

E-mail: losanovaf@gmail.com

Аннотация. В данной работе рассматривается нелокальная краевая задача с интегральным условием для уравнения дробной диффузии. Доказана теорема существования решения исследуемой задачи.

Abstract. In this paper we consider a nonlocal boundary value problem with integral condition. The theorems of existence and uniqueness of the problem are proved.

Ключевые слова: задача с интегральным условием, уравнение дробной диффузии, дробная производная Римана-Лиувилля, аналог условия Тихонова.

Key words: problem with an integral condition, fractional diffusion equation, fractional Riemann-Liouville derivative, analogue of Tikhonov conditions.

Введение

Дифференциальные уравнения с частными производными дробного порядка являются обобщением уравнений с частными производными целого порядка и имеют не только огромный теоретический интерес, но и большое практическое значение. Такие уравнения могут выступать в качестве математических моделей, описывающих различные процессы, в том числе в средах с фрактальной структурой [1], [2].

В области $\Omega = \{(x, y) : 0 < x < \infty, 0 < y < T\}$ евклидовой плоскости независимых переменных (x, y) рассмотрим уравнение

$$u_{xx}(x, y) - D_{0y}^{\alpha} u(x, \eta) = f(x, y), \quad (1)$$

где

$$D_{0y}^{\alpha} u(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^y \frac{u(x, \eta) d\eta}{(y-\eta)^{\alpha+1}}, & \alpha < 0, \\ u(x, y), & \alpha = 0, \\ \frac{\partial^n}{\partial y^n} D_{0y}^{\alpha-n} u(x, \eta), & n-1 < \alpha \leq n, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

– оператор дробного интегродифференцирования (в смысле Римана-Лиувилля) порядка α [1, с. 9], $\Gamma(\alpha)$ – гамма функция Эйлера, $0 < \alpha \leq 1$.

Уравнения вида (1) как с дробной производной Капуто, так и с дробной производной Римана-Лиувилля исследовались ранее многими зарубежными и отечественными учеными. В работе [3] для уравнения (1) рассматривались первая краевая задача в прямоугольной области, задача Коши и краевая задача в бесконечной области, а в [4, с. 104] методом редукции к системе уравнений меньшего порядка построено решение задачи Коши и первой краевой задачи для уравнения



(1). Также в работе [4, с. 115] построено общее представление решения уравнения (1) в прямоугольной области, решены основные краевые задачи и найдены соответствующие функции Грина. Для обобщенного уравнения (1) с младшими членами доказан принцип экстремума в работе [5].

Краевые задачи с интегральными условиями для параболических уравнений, в том числе с дробной производной, исследовались в работах [6] - [9].

Решение $u(x, y)$ уравнения (1) назовем регулярным в области Ω , если $y^{1-\alpha}u(x, y) \in C(\overline{\Omega})$, $u(x, y)$ имеет непрерывные производные до 2-го порядка по x , $D_{0y}^{\alpha-1}u(x, \eta)$ - непрерывную производную по y в области Ω .

В работе исследуется следующая **задача**.

В области Ω требуется найти регулярное решение $u = u(x, y)$ уравнения (1), удовлетворяющее следующим условиям:

$$\lim_{y \rightarrow 0} D_{0y}^{\alpha-1}u(x, \eta) = \tau(x), \quad 0 \leq x < \infty, \quad (2)$$

$$\int_0^{\infty} K(x, y)u(x, y)dx = \psi(y), \quad 0 \leq y \leq T, \quad (3)$$

где $\tau(x)$, $\psi(y)$, $K(x, y)$ – заданные достаточно-гладкие функции.

Без ограничения общности можно считать, что $f(x, y) \equiv 0$, $\tau(x) \equiv 0$. Действительно рассмотрим задачу

$$v_{xx}(x, y) - D_{0y}^{\alpha}v(x, \eta) = f(x, y), \quad (4)$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} D_{0y}^{\alpha-1}v(x, \eta) = \tau(x), \quad 0 \leq x < \infty, \quad (5)$$

$$v(0, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq T. \quad (6)$$

Тогда решение задачи (4)-(6) имеет вид [3]

$$v(x, y) = \int_0^{\infty} G(x, y, \xi, 0)\tau(\xi)d\xi - \int_0^y \int_0^{\infty} f(\xi, \eta)G(x, y, \xi, \eta)d\xi d\eta.$$

Искомое решение ищем в виде $u(x, y) = \tilde{u}(x, y) + v(x, y)$,

$$\tilde{u}_{xx}(x, y) - D_{0y}^{\alpha}\tilde{u}(x, \eta) = 0, \quad (7)$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} D_{0y}^{\alpha-1}\tilde{u}(x, \eta) = 0, \quad (8)$$

$$\int_0^{\infty} K(x, y)\tilde{u}(x, y)dx = \tilde{\psi}(y), \quad 0 \leq y \leq T, \quad (9)$$

где $\tilde{\psi}(y) = \psi(y) - \int_0^{\infty} K(x, y)v(x, y)dx$.

Таким образом задача (1)-(3) эквивалентна задаче (7)-(9).

Поэтому далее будем рассматривать следующую **задачу**.

В области Ω требуется найти регулярное решение $u = u(x, y)$ однородного уравнения

$$u_{xx}(x, y) - D_{0y}^{\alpha}u(x, \eta) = 0, \quad (1')$$

удовлетворяющее следующим условиям:

$$\lim_{y \rightarrow 0} D_{0y}^{\alpha-1}u(x, \eta) = 0, \quad 0 \leq x < \infty, \quad (2')$$

$$\int_0^{\infty} K(x, y)u(x, y)dx = \psi(y), \quad 0 \leq y \leq T, \quad (3')$$

где $\psi(y)$, $K(x, y)$ – заданные функции.

Теорема существования. Пусть $K(x, y) \in C(\overline{\Omega})$, $K_x(x, y) \in C(\overline{\Omega})$, $K(0, y) \neq 0$,

$$D_{0y}^{\alpha-1} \frac{\psi(y)}{K(0, y)} \in AC[0, T], \quad \lim_{y \rightarrow 0} D_{0y}^{\alpha-1} \frac{\psi(y)}{K(0, y)} = 0,$$



причем $K(x, y) = o\left(\exp\left(-\rho x^{\frac{2}{2-\alpha}}\right)\right)$ и $K_x(x, y) = o\left(\exp\left(-\rho x^{\frac{2}{2-\alpha}}\right)\right)$, ρ – некоторая положительная константа. Тогда существует регулярное решение уравнения (1) в области Ω , удовлетворяющее краевым условиям (2) (3) и представимое в виде

$$u(x, y) = \int_0^y \frac{1}{y-\eta} e_{1,\alpha}^{1,0}\left(-\frac{x}{(y-\eta)^\alpha}\right) \varphi(\eta) d\eta, \quad (10)$$

где $\varphi(y) = D_{0,y}^\alpha g(y)$, а $g(y)$ – является решением интегрального уравнения Вольтерра 2-го рода

$$g(y) + \int_0^y G(y, y-t)g(t)dt = \frac{\psi(y)}{K(0, y)},$$

где $G(y, y-t) = \frac{1}{K(0, y)} \int_0^\infty \frac{1}{(y-\eta)^{-1}} e_{1,\alpha}^{1,0}\left(-\frac{x}{(y-\eta)^\alpha}\right) K_x(x, y) dx$.

Доказательство.

Используя представление решения задачи (10) с условиями (3) и $u(0, y) = \varphi(y)$ для однородного уравнения (1) [3, с. 38] и удовлетворив условию (9), получим

$$\int_0^\infty K(x, y)u(x, y)dx = \int_0^\infty K(x, y) \int_0^y \frac{1}{y-\eta} e_{1,\alpha}^{1,0}\left(-\frac{x}{(y-\eta)^\alpha}\right) \varphi(\eta) d\eta dx = \psi(y) \quad (11)$$

здесь $e_{\alpha,\beta}^{\mu,\delta}(z)$ – функция типа Райта [4, с. 22].

Перепишем (11) в виде

$$\int_0^y K_1(y, \eta) \varphi(\eta) d\eta = \psi(y), \quad (12)$$

где

$$K_1(y, \eta) = \int_0^\infty K(x, y) \frac{1}{y-\eta} e_{1,\alpha}^{1,0}\left(-\frac{x}{(y-\eta)^\alpha}\right) dx. \quad (13)$$

Уравнение (12) является интегральным уравнением Вольтерра 1-го рода с ядром $K_1(y, \eta)$ и правой частью $\psi(y)$.

Проинтегрировав (13) по частям, получим

$$K_1(y, \eta) = K(0, y) \frac{(y-\eta)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \int_0^\infty (y-\eta)^{\alpha-1} e_{1,\alpha}^{1,\alpha}\left(-\frac{x}{(y-\eta)^\alpha}\right) K_x(x, y) dx.$$

Подставим $K_1(y, \eta)$ в (12)

$$K(0, y) \int_0^y \frac{(y-\eta)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \varphi(\eta) d\eta + \int_0^y \varphi(\eta) K_2(y, y-\eta) d\eta = \psi(y),$$

где $K_2(y, y-\eta) = \int_0^\infty (y-\eta)^{\alpha-1} e_{1,\alpha}^{1,\alpha}\left(-\frac{x}{(y-\eta)^\alpha}\right) K_x(x, y) dx$.

$$K(0, y) D_{0,y}^{-\alpha} \varphi(y) + \int_0^y \varphi(\eta) K_2(y, y-\eta) d\eta = \psi(y). \quad (14)$$

В силу формулы дробного интегрирования функции Райта [4, с. 26], второе слагаемое в левой части уравнения (14) можно записать в виде

$$\int_0^y \varphi(\eta) K_2(y, y-\eta) d\eta = \int_0^y \varphi(\eta) D_{y\eta}^{-\alpha} K_3(y, y-\eta) d\eta = \int_0^y K_3(y, y-t) D_{0t}^{-\alpha} \varphi(t) dt, \quad (15)$$

где $K_3(y, y-\eta) = \int_0^\infty \frac{1}{(y-\eta)^{-1}} e_{1,\alpha}^{1,0}\left(-\frac{x}{(y-\eta)^\alpha}\right) K_x(x, y) dx$.

Далее обозначив $g(y) = D_{0y}^{-\alpha} \varphi(y)$ с учетом (15), равенство (14) перепишем в виде

$$K(0, y)g(y) + \int_0^y K_3(y, y-t)g(t)dt = \psi(y). \quad (16)$$

Так как по условию $K(0, y) \neq 0$, то соотношение (16) принимает вид

$$g(y) + \int_0^y K_4(y, y-t)g(t)dt = \psi_1(y), \quad (17)$$



где $K_4(y, y-t) = \frac{K_3(y, y-t)}{K(0, y)}$, $\psi_1(y) = \frac{\psi(y)}{K(0, y)}$.

Уравнение (17) является интегральным уравнением Вольтерра 2-го рода. Из теории интегрального уравнения Вольтерра второго рода известно [10, с. 227], что для любых функций $K_4(y, y-t) \in C(\bar{D})$ и $\psi_1(y) \in C[0, T]$ существует единственное решение $g(y) \in C[0, T]$ уравнения (17) и выписывается в виде

$$g(y) = \psi_1(y) - \int_0^y R(y, t) \psi_1(t) dt,$$

где $R(y, t)$ – резольвента ядра $K_4(y, y-t)$.

Учитывая условия теоремы, накладываемые на $\psi(y)$ и на $K(x, y)$, получим что $\varphi(y) = D_{0,y}^\alpha g(y)$.

Теорема доказана.

Список литературы References

1. Нахушев А.М. 2003. Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 272с.
Nakhushev A.M. 2003. Drobnoe ischislenie i ego primenienie [Fractional calculus and its application]. Moscow, Fizmatlit.
2. Учайкин В.В. 2008. Метод дробных производных// Ульяновск: Изд. Артишок, 512 с.
Uchaikin V.V. 2008. Metod drobnih proizvodnyh [The method of fractional derivatives]. Ulyanovsk. Izd. Artichoke, 512.
3. Геккиева С.Х. 2003. Краевые задачи для нагруженных параболических уравнений с дробной производной по времени. Кандидатская диссертация. Нальчик, Научно-исследовательский институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН.
Gekkieva S.H. 2003. Kraevye zadachi dlya nagruzhennyh parabolicheskikh uravnenii s drobnou proizvodnoi po vremeni [Boundary value problems for the loaded parabolic equations with fractional time derivative]. Kandidatskaia dissertatsiya. Nalchik, Nauchno-issledovatel'skii institute prikladnoi matematiki i avtomatizacii KBNC RAN.
4. Псху А.В. 2005. Уравнения в частных производных дробного порядка. М: Наука, 199 с.
Pskhu A.V. 2005. Uravneniya v chastnykh proizvodnykh drobnogo porjadka [Partial differential equations of fractional order]. Moscow, Nauka.
5. Нахушева В.А. 2006. Дифференциальные уравнения математических моделей нелокальных процессов. М.: Наука, 173 с.
Nahusheva V.A. 2006. Differentsial'nye uravneniya matematicheskikh modelei nelokal'nyh processov [Differential equations of mathematical models of non-local processes]. Moscow, Nauka.
6. Нахушева З.А. 1990. 1-я и 2-я краевые задачи в интегральной постановке для параболического уравнения второго порядка// Дифференциальные уравнения. Т. 26, № 1 С. 1982-1992.
Nahusheva Z.A. 1990. 1-aya i 2-aya kraevye zadachi v integral'noi postanovke dlya parabolicheskogo uravneniya vtorogo poriadka [1st and 2nd boundary problems in an integrated setting for a parabolic equation of second order]. Moscow, Differential equations. 26, № 1. 1982-1992.
7. Лосанова Ф.М. 2014. Нелокальная краевая задача для нагруженного уравнения с оператором Капуто// Материалы Всероссийской научной конференции молодых ученых "Современные вопросы математической физики, математической биологии и информатики". С. 80-81.
Losanova F.M. 2014. Nelokal'naya kraevaya zadacha dlya nagruzhennogo uravneniya s operatorom Kaputo [Nonlocal boundary value problem for a loaded equation with Caputo operator]. Materialy Vserossiiskoi nauchnoi konferencii molodyh uchenykh "Sovremennye voprosy matematicheskoi fiziki, matematicheskoi biologii i informatiki". 80-81.
8. Лосанова Ф.М. 2010. Нелокальная краевая задача с оператором Капуто// Изв. ВУЗов Северо-Кавказский регион. № 5 (159). С. 22-25.
Losanova F.M. 2010. Nelokal'naya kraevaya zadacha s operatorom Kaputo [A nonlocal boundary value problem with Caputo operator]. Izvestiya VUZov Severo-Kavkazskii region. 5 (159). 22-25.
9. Лосанова Ф.М. 2015. Задача с условием Самарского для уравнения дробной диффузии в полуплоскости// Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. № 2 (11). С. 17-21.
Losanova F.M. 2015. Zadacha s uslovиеm Samarskogo dlya uravneniya drobnou diffuzii v polupolose [The problem with the condition of Samara for fractional diffusion equation in the half]. Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. Nauki. 2 (11). 17-21.
10. Краснов М.Л. 1975. Интегральные уравнения. М: Наука, 304.
Krasnov M.L. 1975. Integral'nye uravneniya [Integral equations]. Moscow, Nauka. 304.

УДК 517.95

НЕЛОКАЛЬНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С КРАТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

NONLOCAL BORDER PROBLEMS FOR A MIXED TYPE EQUATION OF THE THIRD ORDER WITH MULTIPLE CHARACTERISTICS

**Л.Р. Рустамова
L.R. Rustamova**

Ингушский государственный университет, Россия, 386132, Республика Ингушетия, г. Назрань, м.о.Гамурзиево ул. Магистральная 39

Ingush state university, Ingush Republic. Nazran. c.d. Gamurzievo, 39, Magistralnaya, 386132, Russia

E-mail: rustamoval@mail.ru

Аннотация. В данной работе рассматриваются нелокальные краевые задачи для уравнения смешанного типа третьего порядка с кратными характеристиками в области ограниченной отрезками заданных прямых. Ставится задача - определить функцию, обладающую определенными свойствами и удовлетворяющую определенными граничными условиями. Доказывается существование единственности решения поставленной задачи.

Abstract. In this paper, we consider nonlocal boundary value problem for a mixed-type equation of the third order with multiple characteristics within the domain bounded by given line segments. We state the problem to determine function with specific features that satisfies certain boundary conditions. The existence of solution uniqueness to the stated problem is proved.

Ключевые слова: определить функцию, граничные условия, относительно коэффициентов уравнения, справедливо равенство, путем дифференцирования, в результате преобразований.

Key words: to define the function, border conditions, regarding the coefficients of the equation, true equality, by differentiation, as a result of reforms.

Рассмотрим уравнение

$$0 = \begin{cases} u_{xxx} + a_1(x, y)u_x + a_0(x, y)u - u_y, & y > 0, \\ \left(\alpha \frac{\partial}{\partial x} + \beta \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), & y < 0 \end{cases} \quad (1)$$

в области Ω , ограниченной отрезками AA_0 , A_0B_0 , B_0B прямых $x = 0$, $y = h$, $x = l$, соответственно, и характеристиками AC : $x + y = 0$, BC : $x - y = l$, уравнения (1), при $y < 0$ выходящими из точек $A(0;0)$, $B(l;0)$. Пусть $\Omega_+ = \Omega \cap (y > 0)$, $\Omega_- = \Omega \cap (y < 0)$, $u(x,0) = \tau(x)$, $u_y(x,0) = \nu(x)$.

Задача 1. Определить функцию $u(x, y)$, обладающую следующими свойствами:

1) $u(x, y) \in C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega) \cap C_{x,y}^{3,1}(\Omega_+) \cap C^2(\Omega_-)$, 2) $u(x,y)$ – решение уравнения (2.1.1) в $\Omega_+ \cup \Omega_-$, 3) $u(x, y)$ удовлетворяет граничным условиям:

$$\begin{aligned} u(0,y) &= \varphi_1(y), \quad u(l,y) = \varphi_2(y), \\ u_x(0,y) - u_x(l,y) &= \varphi_3(y), \quad 0 \leq y \leq h, \end{aligned} \quad (2)$$

$$u|_{AC} = \psi_1(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{AC} = \psi_2(x), \quad 0 \leq x \leq l/2, \quad (3)$$



где $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$, $\varphi_3(y)$ и $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$ – известные функции, причем $\varphi_1(y) \in C^1[0, h]$, $\varphi_{2,3}(y) \in C[0, h]$, $\psi_1(x) \in C^2[0, l/2]$, $\psi_2(x) \in C^1[0, l/2]$, $\varphi_1(0) = \psi_1(0)$.

Относительно коэффициентов уравнения (1) в дальнейшем предполагается, что $a_0(x, y)$, $a_1(x, y)$, $a_{1x}(x, y) \in C(\bar{\Omega}_1)$, $\alpha, \beta = \text{const}$, $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$.

Вначале рассмотрим случай, когда $\alpha = 1$, $\beta = 0$.

$$\text{Пусть } u(x, y) = \begin{cases} u_1(x, y), & y > 0, \\ u_2(x, y), & y < 0. \end{cases}$$

Тогда любое решение уравнения (1) в области Ω_- при $y \neq 0$ представимо в виде [1]

$$u_2(x, y) = v_2(x, y) + \omega_2(y), \quad (4)$$

где $v_2(x, y)$ – регулярное решение уравнения

$$v_{2xx} - v_{2yy} = 0, \quad y < 0, \quad (5)$$

$\omega_2(y)$ – дважды непрерывно дифференцируемая функция, причем без ограничения общности считаем, что $\omega_2(0) = \omega_2'(0) = 0$.

Очевидно, что функция

$$v_2(x, y) = f_1(x+y) + f_2(x-y)$$

является общим решением уравнения (5), а следовательно, из (4) находим:

$$u_2(x, y) = f_1(x+y) + f_2(x-y) + \omega_2(y). \quad (6)$$

Удовлетворяя (6) условиям (3), а также условию $u_{2y}(x, 0) = v(x)$, приходим к следующей системе относительно $f_1(x)$, $f_2(x)$, $\omega_2(x)$:

$$\begin{cases} u_2(x, y)|_{AC} = \psi_1(x), \\ \frac{\partial u_2(x, y)}{\partial n}|_{AC} = \psi_2(x), \\ u_{2y}(x, 0) = v(x). \end{cases}$$

Решая систему (7), находим

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \int_0^x \psi_1'\left(\frac{t}{2}\right) d\frac{t}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_0^x \psi_2\left(\frac{t}{2}\right) dt \\ f_2(x) &= \psi_1\left(\frac{x}{2}\right) - f_1(0) - \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{x/2} \psi_2(t) dt - f_1'(0)x \\ \omega_2(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{-x} \psi_2(t) dt - 2f_1'(0)x \end{aligned}$$

Подставляя найденные значения искомых функций $f_1(x)$, $f_2(x)$ и $\omega_2(x)$ в общее решение (6), находим

$$u_2(x, y) = \psi_1\left(\frac{x+y}{2}\right) + \psi_1\left(\frac{x-y}{2}\right) - \psi_1(0) - \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_0^{x+y} \psi_2\left(\frac{t}{2}\right) dt +$$



$$+ \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{x+y} \psi_2(t) dt + \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{-y} \psi_2(t) dt - \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{x-y}{2}} \psi_2(t) dt + \int_0^{x+y} v(t) dt \quad (8)$$

Справедлива следующая

Лемма 1. Если $u_2|_{AC} = 0$, $\frac{\partial u_2}{\partial n}|_{AC} = 0$, то для любого решения задачи 1 в области Ω_-

справедливо равенство

$$I = \int_0^l \tau(t)v(t) dt = 0, \quad (9)$$

где $\lim_{y \rightarrow +0} u_1(x, y) = \tau(x)$, $\lim_{y \rightarrow +0} u_{1x}(x, y) = v(x)$.

Доказательство. При $\psi_1(x) = \psi_2(x) = 0$ из представления (8) имеем

$$u_2(x, y) = \int_0^{x+y} v(t) dt,$$

откуда

$$u_2(x, 0) = \int_0^x v(t) dt = \tau(x).$$

Путем дифференцирования из последнего соотношения находим

$$v(x) = \tau'(x). \quad (10)$$

Вычислим теперь интеграл вида

$$I = \int_0^l \tau(t)v(t) dt. \quad (11)$$

С учетом соотношения (10) имеем

$$I = \int_0^l \tau(t)v(t) dt = \int_0^l \tau(t)\tau'(t) dt = \frac{\tau^2(t)}{2} \Big|_0^l = \frac{\tau^2(l) - \tau^2(0)}{2}.$$

Но в силу условия согласования $\tau(0) = \varphi_1(0) = 0$, $\tau(l) = \varphi_2(0) = 0$, откуда получаем (9).

Далее займемся исследованием вопроса о поведении интеграла (11) при предельном переходе из области Ω_+ на линию $y = 0$. Здесь справедлива следующая

Лемма 2. Пусть коэффициенты $a_0(x, y)$ и $a_1(x, y)$ уравнения (1) таковы, что $2a_0(x, 0) \neq a_1'(x, 0)$ и выполняются равенства

$$\lim_{x \rightarrow +0} u_1(x, 0)u_{1xx}(x, 0) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow l-0} u_1(x, 0)u_{1xx}(x, 0) = 0 \quad (12)$$

Тогда равенство (9) может иметь место в том и только в том случае когда $\tau(x) \equiv 0$.

Доказательство. Переходя в уравнении (1) к пределу $y \rightarrow +0$, получим фундаментальное соотношение между функциями $u_2(x, 0) = \tau(x)$ и $u_{2y}(x, 0) = v(x)$ следующего вида

$$\tau'''(x) + a_1(x, 0)\tau'(x) + a_0(x, 0)\tau(x) = v(x). \quad (13)$$

С учетом однородных граничных условий, соответствующих условиям (2) из (13) находим

$$I = \int_0^l \tau(x)v(x) dx = \int_0^l \tau(x)\tau'''(x) dx + \int_0^l a_1(x, 0)\tau(x)\tau'(x) dx + \int_0^l a_0(x, 0)\tau^2(x) dx =$$



$$\begin{aligned}
 &= \tau(x)\tau''(x)\Big|_0^l - \int_0^l \tau'(x)\tau''(x)dx + \int_0^l a_1(x,0)d\left(\frac{\tau^2(x)}{2}\right) + \int_0^l a_0(x,0)\tau^2(x)dx = \\
 &= -\int_0^l \tau'(x)d(\tau'(x)) + \frac{a_1(x,0)}{2}\tau^2(x)\Big|_0^l - \frac{1}{2}\int_0^l a_1'(x,0)\tau^2(x)dx + \int_0^l a_0(x,0)\tau^2(x)dx = \\
 &= \frac{\tau'^2(0) - \tau'^2(l)}{2} + \frac{a_1(l,0)\tau^2(l) - a_1(0,0)\tau^2(0)}{2} + \frac{1}{2}\int_0^l [2a_0(x,0) - a_1'(x,0)]\tau^2(x)dx = \\
 &= \frac{1}{2}\int_0^l [2a_0(x,0) - a_1'(x,0)]\tau^2(x)dx. \tag{14}
 \end{aligned}$$

Из равенства (14), в силу условия $2a_0(x,0) \neq a_1'(x,0)$ леммы 2 равенство (9) может иметь место в том и только в том случае, когда $\tau(x) \equiv 0$. При этом из соотношений (10) и (13) получаем, что и $\nu(x) \equiv 0$. При этом из формулы (8) следует, что $u_2(x, y) \equiv 0$ в области D_- . С учетом того, что $\tau(x) \equiv 0$, а также с учетом однородных условий, соответствующих граничным условиям (2), в области Ω_+ приходим к следующей задаче

$$u_{1xxx} + a_1(x, y)u_{1x} + a_0(x, y)u_1 - u_{1y} = 0, \tag{15}$$

$$u_1(0, y) = 0, \quad u_{1x}(0, y) - u_{1x}(l, y) = 0, \quad u_1(l, y) = 0, \tag{16}$$

$$u_1(x, 0) = 0. \tag{17}$$

Справедлива следующая

Теорема 1. Задача (15) – (17) имеет только тривиальное решение, $u_1(x, y) \equiv 0$ в Ω_+ .

Методом от противного, доказываем, что $u(x, y) \equiv 0$ в области $\bar{\Omega}$, откуда вытекает единственность решения исследуемой задачи 1.

Докажем теперь существование решения задачи 1, когда $a_0(x, y) = \text{const} = \lambda$, $a_1(x, y) = 0$.

Переходя в уравнении (1) к пределу при $y \rightarrow +0$, получим

$$\tau'''(x) - \nu(x) + \lambda\tau(x) = 0. \tag{18}$$

Соотношение между $\tau(x)$ и $\nu(x)$, принесенное из гиперболической части Ω_- на линию $y=0$, имеет вид

$$\tau'(x) - \nu(x) = \psi_1'\left(\frac{x}{2}\right) - \omega_2'\left(\frac{x}{2}\right). \tag{19}$$

Исключая из равенств (18) и (19) $\nu(x)$, получим двухточечную нелокальную краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения третьего порядка со спектральным параметром

$$\tau'''(x) - \tau'(x) + \lambda\tau(x) = \rho(x), \tag{20}$$

$$\tau(0) = \varphi_1(0), \quad \tau(l) = \varphi_2(0), \quad \tau'(0) - \tau'(l) = \varphi_3(0), \tag{21}$$

где $\rho(x) = -\psi_1'(x/2) + \omega_2'(x/2)$.

Решение задачи (20), (21) существенно зависит от расположения корней характеристического уравнения

$$k^3 - k + \lambda = 0, \tag{22}$$

соответствующему однородному уравнению

$$\tau'''(x) - \tau'(x) + \lambda\tau(x) = 0. \tag{23}$$

Введем обозначение

$$S = \frac{\lambda^2}{4} - \frac{1}{27}. \tag{24}$$



Известно [2], что уравнение (22) имеет один действительный и два комплексных корня, если $S > 0$. Оно имеет три различных действительных корня, если $S < 0$. При $S = 0$ все три корня действительны, причем два из них равны.

Теорема 2. Пусть выполняются условия

$$\Delta_0 = -2ch2kl + kl(1 - 3kl) + (1 + 3kl)e^{-kl} \neq 0, \text{ если } S = 0; \quad (25)$$

$$\Delta_1 = (k_1 - k_2)(e^{lk_3} + e^{l(k_1+k_2)}) + (k_2 - k_1)(e^{lk_3} + e^{l(k_2+k_3)}) + (k_3 - k_1)(e^{lk_2} + e^{l(k_1+k_3)}) \neq 0 \text{ если } S < 0; \quad (26)$$

$$\Delta_2 = 2shal(b \cos bl - 3a \sin bl) - be^{-2al} \neq 0, \text{ если } S > 0, \quad (27)$$

где $k = \frac{3}{2}\lambda$, $k_1 = 1,2b$, $k_2 = -2,4b - 1,04\sqrt{1-b^2}$, $k_3 = 2,4b + 1,04\sqrt{1-b^2}$, $a = \bar{u} + \bar{v}$,

$b = \sqrt{3}(\bar{u} + \bar{v})/2$, $\bar{u} = \sqrt[3]{-\frac{\lambda}{2} + \sqrt{S}}$, $\bar{v} = \sqrt[3]{-\frac{\lambda}{2} - \sqrt{S}}$, при $S = 0$, $S < 0$ и $a = (1/\sqrt{3})\sin 2\varphi$,

$b = ctg \varphi$ при $S > 0$, тогда задача (20), (21) разрешима, притом единственным образом.

Рассмотрим теперь случай, когда $a_0(x, y) \neq const$, $a_1(x, y) \neq 0$, $\alpha = 0$, $\beta = 1$.

Положим, что

$$u_1(x, 0) = \tau_1(x), \quad u_{1,y}(x, 0) = \nu_1(x), \quad (28)$$

$$u_2(x, 0) = \tau_2(x), \quad u_{2,y}(x, 0) = \nu_2(x), \quad (29)$$

тогда условия согласования принимают вид $\tau_1(0) = \varphi_1(0)$, $\tau_1(l) = \varphi_2(0)$,

$$\tau_1'(0) - \tau_1'(l) = \varphi_3(0), \quad \tau_2'(0) + \nu_2(0) = \sqrt{2}\varphi_1(0).$$

Воспользуемся тем, что любое регулярное решение уравнения (1) в области Ω_2 представимо

в виде $u_2(x, y) = v(x, y) + \omega(y)$, где $v(x, y)$ – регулярное решение уравнения $Lv = v_{xx} - v_{yy} = 0$, а $\omega(y)$ – дважды непрерывно дифференцируемая функция, которую можно подчинить условию $\omega(0) = \omega'(0) = 0$.

Пользуясь общим представлением

$$u_2(x, y) = F_1(x + y) + F_2(x - y) + \omega(y)$$

решения уравнения (1) в области Ω_- , находим, что решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям (3), имеет вид

$$u_2(x, y) = F_1(x + y) + \psi_1\left(\frac{x - y}{2}\right) + 1/\sqrt{2} \int_0^{x-y} \psi_2(t/2)dt - 1/\sqrt{2} \int_0^{-2y} \psi_2(t/2)dt - (x + y)F_1'(0) - F_1(0).$$

Отсюда получаем функциональное соотношение между $\tau_2(x)$ и $\nu_2(x)$ в виде

$$\tau_2'(x) - \nu_2(x) = \xi(x), \quad (30)$$

где $\xi(x) = \psi_1'(x/2) + \sqrt{2}\psi_2(x/2) - \sqrt{2}\psi_2(0)$.

Переходя к пределу в уравнении (1) при $y \rightarrow +0$, получим соотношение между $\tau_1(x)$ и $\nu_1(x)$:

$$\tau_1''(x) - \nu_1(x) + a_1(x, 0)\tau'(x) + a_0(x, 0)\tau_1(x) = 0. \quad (31)$$

По условию задачи, $\tau_2'(x) = \tau_1'(x) = \tau'(x)$, $\nu_1(x) = \nu_2(x) = \nu(x)$.

Тогда, учитывая граничные условия (2), приходим к нелокальной двухточечной краевой задаче для обыкновенного дифференциального уравнения третьего порядка

$$\tau'''(x) + (a_1(x, 0) - 1)\tau'(x) + a_0(x, 0)\tau(x) = \xi(x), \quad (32)$$



$$\tau(0) = \varphi_1(0), \quad \tau(l) = \varphi_2(0), \quad \tau'(0) - \tau'(l) = \varphi_3(0). \quad (33)$$

Справедливы следующие леммы.

Лемма 3. Если $u(x, -x) = 0$, $\frac{\partial u}{\partial n}(x, -x) = 0$, то для любого решения уравнения (1) имеет место неравенство

$$J = \int_0^x \tau_2(t) \nu_2(t) dt \geq 0 \text{ при любом } x \in [0, l].$$

Доказательство. Действительно, если $\psi_1(x) = 0$, $\psi_2(x) = 0$, то $\xi(x) = 0$. Используя $\tau_2'(x) - \nu_2(x) = \xi(x)$, получим

$$J = \int_0^x \tau_2(t) \nu_2(t) dt = \frac{\tau_2^2(x)}{2} \geq 0. \quad (34)$$

Лемма 4. Если $a_1'(x, 0) - 2a_0(x, 0) \geq 0$ и

$\lim_{x \rightarrow +0} u(x, 0) u_{xx}(x, 0) = 0$, $\lim_{x \rightarrow l-0} u(x, 0) u_{xx}(x, 0) = 0$, $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = \varphi_3(0) = 0$, то для любого решения уравнения (1) справедливо неравенство

$$J = \int_0^x \tau_1(t) \nu_1(t) dt \leq 0, \quad \forall x \in [0, l].$$

Доказательство. Из равенства

$$\tau_1'''(x) - \nu_1(x) + a_1(x, 0)\tau_1'(x) + a_0(x, 0)\tau_1(x) = 0$$

имеем

$$J = \int_0^l \tau_1(t) \nu_1(t) dt = \int_0^l \tau_1(x) [\tau_1'''(x) + a_1(x, 0)\tau_1'(x) + a_0(x, 0)\tau_1(x)] dx.$$

В результате простых преобразований будем иметь

$$J = -\frac{1}{2} \int_0^l (a_1' - 2a_0) \tau_1^2(x) dx - \frac{1}{2} (\tau_1'^2(l) - \tau_1'^2(0)) = -\frac{1}{2} \int_0^l (a_1'(x, 0) - 2a_0(x, 0)) \tau_1^2(x) dx \leq 0, \quad (35)$$

так как $\tau'(l) = \tau'(0)$. Сравнивая (34), (35) заключаем, что $J = 0$ или, с учетом вида правой части (34), имеем $\tau_1(x) = \tau_2(x) = 0$.

Доказывается [1, 3] следующая

Теорема 3. Пусть $u(x, y)$ – решение в области Ω_+ однородной задачи 1. Тогда $u(x, y) \equiv 0$ в Ω .

Опираясь на найденную функцию $\tau(x)$, в области Ω_+ приходим к задаче 2.

Задача 2. Определить решение в области Ω_+ уравнения (1) при $y > 0$, непрерывное в замкнутой области $\overline{\Omega_+}$ и удовлетворяющее граничным условиям (2) и $u(x, 0) = \tau(x)$.

А в области Ω_- решаем задачу 3. [4, 5]

Задача 3. Определить решение уравнения (1) в области Ω_- при $y < 0$, непрерывное в замкнутой области $\overline{\Omega_-}$, удовлетворяющее граничным условиям (3) и $u(x, 0) = \tau(x)$.

Опираясь на все проведенные доказательства, имеет место

Теорема 4. Если $\varphi_1(y) \in C^1[0, h]$, $\varphi_2(y)$, $\varphi_3(y) \in C[0, h]$, $\psi_1(x) \in C^2[0, l/2]$, $\psi_2(x) \in C^1[0, l/2]$, $a_0(x, y)$, $a_1(x, y)$, $a_{1x}(x, y) \in C(\overline{\Omega_+})$, $\varphi_1(0) = \psi_1(0)$, $\alpha, \beta = const$, $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$, $\beta_2(y) \neq 0$, то существует единственное решение задачи 1.

Список литературы References

1. Джураев Т.Д. 1979. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно – составного типов. / Т.Д. Джураев // Ташкент: ФАН. С238.
Juraev T.D. 1979 Boundary value problems for equations of mixed and mixed - composite type. / TD Juraev Tashkent //: FAN. p 238
2. Сабитов К.Б. 1989. К теории уравнений смешанного парабола-гиперболического типа со спектральным параметром. / К.Б. Сабитов // Дифференц. уравнения. Т.25, №1, С.117-126.
Sabitov K.B. 1989. The theory of equations of mixed parabolic-hyperbolic type with a spectral parameter. / KB Sabitov // Differential equation. V.25, №1, S.117-126.
3. Джураев Т.Д. 1986. Краевые задачи для уравнений парабола- гиперболического типа. / Т.Д. Джураев, А. Сопуев, М. Мамажанов // Ташкент: ФАН, С. 220.
Juraev T.D. 1986 Boundary value problems for equations of hyperbolic type parabolic-hyperbolic type with a spectral parameter. / Juraev T.D., Sopuev A.M. Mamazhanov // Tashkent: FAN, S. 220.
4. Елеев В.А. 1976. О некоторых задачах типа задачи Коши и задач со смещением для одного вырождающегося гиперболического уравнения. / В.А. Елеев // Дифференц. уравнения. Т.12, №1 С. 44-58.
Eleev V.A. 1976. Some problems of Cauchy type problems and problems with shift for a degenerate hyperbolic equation. / VA Eleev // Differential equations. Vol.12, №1 pp 44-58.
5. Иргашев Ю. 1976. Некоторые краевые задачи для уравнений третьего порядка с кратными характеристиками. / Ю. Иргашев // Ташкент: ФАН. С.17-27.
Irgashev Yu. 1976. Some boundary value problems for a third order equations with multiple characteristics. / Yu Irgashev // Tashkent: FAN. p.17-27.



УДК 512.62

О СИММЕТРИЧЕСКИХ МНОГОЧЛЕНАХ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

ON SYMMETRIC POLYNOMIALS OF A SPECIAL FORM

С.М. Рацев ¹, О.И. Череватенко ²

S.M. Ratseev, O.I. Cherevatenko

¹Ульяновский государственный университет, 432017, г. Ульяновск, ул. Льва Толстого, 42.

Ulyanovsk State University, 432017, Ulyanovsk, Lev Tolstoy 42

²Ульяновский государственный педагогический университет имени И.Н.Ульянова, 432063, г. Ульяновск, пл. 100-летия со дня рождения В.И. Ленина, 4.

Ulyanovsk State I.N.Ulyanov Pedagogical University, Ploshchad' 100-letiya so dnya rozhdeniya V.I. Lenina, 4

E-mail: ratseevsm@mail.ru; chai@pisem.net

Аннотация. Работа посвящена исследованию симметрических многочленов специального вида. Получены критерии симметричности таких многочленов. Данная задача является частным случаем очень сложных задач о подходах к классификации первичных многообразий ассоциативных алгебр над полями положительной характеристики.

Resume. The paper is devoted to the study of symmetric polynomials of a special form. The necessary and sufficient conditions for the symmetry of such polynomials. This problem is a special case of very difficult problems on approaches to the classification of the prime varieties of associative algebras over fields of positive characteristic.

Ключевые слова: многочлен, симметрический многочлен.

Key words: polynomial, symmetric polynomial.

Введение

Один из способов изучения свойств многочленов из кольца $R[x_1, \dots, x_n]$ над кольцом R состоит в описании таких многочленов, которые не изменяются при различных преобразованиях этого кольца. Одним из важных классов таких многочленов являются многочлены, которые являются инвариантными относительно действия элементов симметрической группы S_n , то есть такие многочлены $f(x_1, \dots, x_n) \in R[x_1, \dots, x_n]$, для которых выполнено равенство

$$f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = f(x_1, \dots, x_n), \quad \sigma \in S_n.$$

Такие многочлены называются симметрическими многочленами. Основными симметрическими многочленами в кольце $R[x_1, \dots, x_n]$ являются

$$\sigma_k(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} x_{i_1} \dots x_{i_k}, \quad 1 \leq k \leq n.$$

Основная теорема теории симметрических многочленов гласит, что любой симметрический многочлен может быть представлен единственным образом в виде многочлена от основных симметрических многочленов.

Симметрические функции имеют приложения в комбинаторике, алгебраической геометрии, теории представлений и т.д. (см., например, [1, 2, 3]).

Данная работа посвящена исследованию симметрических многочленов специального вида. Эта задача является частным случаем чрезвычайно сложных задач, возникших в работах А.Р.Кемера [4] о подходах к классификации первичных многообразий ассоциативных алгебр над полями положительной характеристики.



Пусть K — некоторое поле, X и Y — некоторые счетные множества, причем $X \cap Y = \emptyset$. Целью данной работы является описание всех симметрических многочленов относительно переменных x_1, \dots, x_n и y_1, \dots, y_n вида

$$\sum \alpha_{i_1 \dots i_k j_1 \dots j_k} (x_{i_1} y_{j_1} + 1) \dots (x_{i_k} y_{j_k} + 1), \alpha_{i_1 \dots i_k j_1 \dots j_k} \in K, \quad (1)$$

где $x_{i_1}, \dots, x_{i_k} \in X$, $y_{j_1}, \dots, y_{j_k} \in Y$, причем x_{i_1}, \dots, x_{i_k} попарно различны и y_{j_1}, \dots, y_{j_k} попарно различны.

Хорошо известное строение кольца всех симметрических многочленов не зависит от характеристики основного поля. Для многочленов вида (1) это уже не так. Размерности пространств таких многочленов существенно зависят от характеристики основного поля. В частности, над полями положительной характеристики такие ненулевые многочлены вообще могут отсутствовать.

1. Симметрические многочлены специального вида

Определим умножение элементов вида $(x_{i_1} y_{j_1} + 1) \dots (x_{i_k} y_{j_k} + 1)$ и $(x_{a_1} y_{b_1} + 1) \dots (x_{a_n} y_{b_n} + 1)$ следующим образом:

$$(x_{i_1} y_{j_1} + 1) \dots (x_{i_k} y_{j_k} + 1) \cdot (x_{a_1} y_{b_1} + 1) \dots (x_{a_n} y_{b_n} + 1) = \begin{cases} (x_{i_1} y_{j_1} + 1) \dots (x_{i_k} y_{j_k} + 1) (x_{a_1} y_{b_1} + 1) \dots (x_{a_n} y_{b_n} + 1), & \text{если } \{i_1, \dots, i_k\} \cap \{a_1, \dots, a_n\} = \emptyset \text{ и} \\ & \{j_1, \dots, j_k\} \cap \{b_1, \dots, b_n\} = \emptyset, \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Распространим это правило на все многочлены вида (1), используя линейность. Не трудно заметить, что полученное множество относительно операций $+$ и \cdot будет являться ассоциативным коммутативным кольцом с единицей.

Пусть K — некоторое поле. Рассмотрим многочлены вида

$$\sum \alpha_{i_1 \dots i_k j_1 \dots j_k} (x_{i_1} y_{j_1} + 1) \dots (x_{i_k} y_{j_k} + 1), \alpha_{i_1 \dots i_k j_1 \dots j_k} \in K, \quad (2)$$

где $\{i_1, \dots, i_k\} \subseteq \{1, \dots, n\}$, $\{j_1, \dots, j_k\} \subseteq \{1, \dots, n\}$, $\#\{i_1, \dots, i_k\} = \#\{j_1, \dots, j_k\} = k$.

Ввиду коммутативности скобок, можно считать, что $j_1 < j_2 < \dots < j_k$ в каждом слагаемом из (2).

Пусть A_n^k — множество всех размещений без повторений из n элементов по k множества $\{1, \dots, n\}$. То есть множество A_n^k состоит из упорядоченных выборок вида (i_1, \dots, i_k) , где $\{i_1, \dots, i_k\} \subseteq \{1, \dots, n\}$ и i_1, \dots, i_k попарно различны.

Обозначим через $F_k^n(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$, где $1 \leq k \leq n$, многочлен вида (2), в котором каждое слагаемое состоит ровно из k скобок. Тогда многочлен F_k^n имеет такой общий вид:

$$F_k^n(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) = \sum_{\substack{(i_1, \dots, i_k) \in A_n^k \\ 1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n}} \alpha_{i_1 \dots i_k j_1 \dots j_k} (x_{i_1} y_{j_1} + 1) \dots (x_{i_k} y_{j_k} + 1), \quad (3)$$

то есть сумма берется по всем элементам множества A_n^k и по всем k -элементным подмножествам $\{j_1, \dots, j_k\}$ в множестве $\{1, \dots, n\}$, при этом $j_1 < j_2 < \dots < j_k$.

Лемма 1. Пусть K — поле нулевой характеристики и $n \in \mathbb{N}$. Многочлен $F_1^n(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ является симметрическим многочленом относительно переменных x_1, \dots, x_n тогда и только тогда, когда он имеет такой вид:

$$F_1^n(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) = \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \left(\sum_{j=1}^n \beta_j y_j \right) + n \cdot \sum_{j=1}^n \beta_j, \beta_j \in K.$$

Многочлен $F_1^n(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ является симметрическим многочленом относительно переменных x_1, \dots, x_n и y_1, \dots, y_n тогда и только тогда, когда он имеет такой вид:

$$F_1^n(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) = \beta \cdot \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \left(\sum_{j=1}^n y_j \right) + n^2 \cdot \beta, \quad \beta \in K.$$

Доказательство. Учитывая (3), многочлен F_1^n имеет такой общий вид:

$$F_1^n(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} (x_i y_j + 1), \quad \alpha_{ij} \in K.$$

После преобразования получаем

$$F_1^n(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} (x_i y_j + 1) = \sum_{i=1}^n x_i \left(\sum_{j=1}^n \alpha_{ij} y_j \right) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_{ij}.$$

Для любой перестановки $\sigma \in S_n$ выполнено равенство $\sigma F_1^n = F_1^n$ тогда и только тогда, когда для любых $i_1, i_2 \in \{1, 2, \dots, n\}$ выполнено равенство $\alpha_{i_1 j} = \alpha_{i_2 j}$, то есть коэффициенты α_{ij} не зависят от i . Обозначим $\alpha_{ij} = \beta_j$. Поэтому элемент F_1^n , симметричный относительно переменных x_1, \dots, x_n , имеет такой вид:

$$F_1^n(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) = \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \left(\sum_{j=1}^n \beta_j y_j \right) + n \cdot \sum_{j=1}^n \beta_j, \quad \beta_j \in K. \quad (4)$$

При этом многочлен F_1^n вида (4) симметричен относительно переменных y_1, \dots, y_n тогда и только тогда, когда для любых i и j выполнено равенство $\beta_i = \beta_j = \beta$.

Поэтому многочлен $F_1^n(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ является симметрическим многочленом относительно переменных x_1, \dots, x_n и y_1, \dots, y_n тогда и только тогда, когда он имеет такой вид:

$$F_1^n(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) = \beta \cdot \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \left(\sum_{j=1}^n y_j \right) + n^2 \cdot \beta, \quad \beta \in K.$$

Лемма доказана.

Лемма 2. Пусть K — поле нулевой характеристики и $n \in \mathbb{N}$. Многочлен $F_2^n(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ является симметрическим многочленом относительно переменных x_1, \dots, x_n тогда и только тогда, когда он имеет такой вид:

$$F_2^n(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) = 2! \left(\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j \right) \left(\sum_{1 \leq s < t \leq n} \beta_{st} y_s y_t \right) + (n-1) \cdot \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \left(\sum_{j=1}^n (\sum_{s=1}^{j-1} \beta_{sj} + \sum_{t=j+1}^n \beta_{jt}) y_j \right) + n(n-1) \cdot \sum_{1 \leq s < t \leq n} \beta_{st}.$$

Многочлен $F_2^n(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ является симметрическим многочленом относительно переменных x_1, \dots, x_n и y_1, \dots, y_n тогда и только тогда, когда он имеет такой вид:

$$F_2^n(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) = 2! \beta \cdot \left(\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j \right) \left(\sum_{1 \leq s < t \leq n} y_s y_t \right) + (n-1) \cdot \beta \cdot \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \left(\sum_{j=1}^n y_j \right) + \beta \cdot \frac{n^2(n-1)^2}{2}, \quad \beta \in K.$$

Доказательство. Рассмотрим случай $k=2$. Общий вид многочлена вида F_2^n , учитывая (3), будет следующим:

$$F_2^n(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) = \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq n, i \neq j, \\ 1 \leq s < t \leq n}} \alpha_{ijst} (x_i y_s + 1)(x_j y_t + 1).$$

После преобразования получаем

$$\begin{aligned} F_2^n(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) &= \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq n, i \neq j, \\ 1 \leq s < t \leq n}} \alpha_{ijst} (x_i y_s + 1)(x_j y_t + 1) = \\ &= \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq n, i \neq j, \\ 1 \leq s < t \leq n}} \alpha_{ijst} (x_i x_j y_s y_t + x_i y_s + x_j y_t) + \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq n, i \neq j, \\ 1 \leq s < t \leq n}} \alpha_{ijst} = \\ &= \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq n, i \neq j}} x_i x_j \left(\sum_{1 \leq s < t \leq n} \alpha_{ijst} y_s y_t \right) + \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq n, i \neq j, \\ 1 \leq s < t \leq n}} \alpha_{ijst} (x_i y_s + x_j y_t) + \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq n, i \neq j, \\ 1 \leq s < t \leq n}} \alpha_{ijst}. \end{aligned}$$



Для любой перестановки $\sigma \in S_n$ выполнено равенство $\sigma F_2^n = F_2^n$ тогда и только тогда, когда коэффициенты α_{ijst} не зависят от i и j . Обозначим $\alpha_{ijst} = \beta_{st}$. Поэтому F_2^n можно записать в таком виде:

$$F_2^n(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) = 2! \left(\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j \right) \left(\sum_{1 \leq s < t \leq n} \beta_{st} y_s y_t \right) + \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq n, i \neq j, \\ 1 \leq s < t \leq n}} \beta_{st} (x_i y_s + x_j y_t) + n(n-1) \cdot \sum_{1 \leq s < t \leq n} \beta_{st}.$$

Преобразуем сумму $\sum_{\substack{1 \leq i, j \leq n, i \neq j, \\ 1 \leq s < t \leq n}} \beta_{st} (x_i y_s + x_j y_t)$ к виду $\left(\sum_{a=1}^n x_a \right) \left(\sum_{b=1}^n \gamma_b y_b \right)$.

Зафиксируем пару индексов $(a, b) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, n\}$. Элемент $x_a y_b$ может находиться либо на первом месте в элементе $(x_i y_s + x_j y_t)$, либо на втором. Если $x_a y_b$ находится на первом месте, то такие слагаемые имеют вид

$$(x_a y_b + x_j y_t), \quad j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{a\}, t \in \{b+1, \dots, n\}.$$

Если $x_a y_b$ находится на втором месте, то такие слагаемые имеют вид

$$(x_i y_s + x_a y_b), \quad i \in \{1, \dots, n\} \setminus \{a\}, s \in \{1, \dots, b-1\}.$$

Поэтому

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i \neq a}} \sum_{s=1}^{b-1} \beta_{sb} (x_i y_s + x_a y_b) + \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq a}} \sum_{t=b+1}^n \beta_{bt} (x_a y_b + x_j y_t) = (n-1) \cdot \left(\sum_{s=1}^{b-1} \beta_{sb} + \sum_{t=b+1}^n \beta_{bt} \right) x_a y_b + G,$$

где многочлен G не содержит слагаемых $x_a y_b$. Таким образом, элемент F_2^n имеет такой вид:

$$F_2^n(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) = 2! \left(\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j \right) \left(\sum_{1 \leq s < t \leq n} \beta_{st} y_s y_t \right) + (n-1) \cdot \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \left(\sum_{j=1}^{b-1} (\sum_{s=1}^n \beta_{sj}) y_j + \sum_{t=j+1}^n \beta_{jt} y_j \right) + n(n-1) \cdot \sum_{1 \leq s < t \leq n} \beta_{st}. \tag{5}$$

При этом многочлен F_2^n вида (5) симметричен относительно переменных y_1, \dots, y_n тогда и только тогда, когда для любых s_1, t_1 и s_2, t_2 выполнено равенство $\beta_{s_1 t_1} = \beta_{s_2 t_2}$. Поэтому многочлен $F_2^n(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ является симметрическим многочленом относительно переменных x_1, \dots, x_n и y_1, \dots, y_n тогда и только тогда, когда он имеет такой вид:

$$F_2^n(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) = 2! \beta \cdot \left(\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j \right) \left(\sum_{1 \leq s < t \leq n} y_s y_t \right) + (n-1)^2 \cdot \beta \cdot \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \left(\sum_{j=1}^n y_j \right) + \beta \cdot \frac{n^2(n-1)^2}{2}, \quad \beta \in K.$$

Лемма доказана.

Лемма 3. Пусть K — поле нулевой характеристики и $n \in \mathbb{N}$. Многочлен $F_3^n(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ является симметрическим многочленом относительно переменных x_1, \dots, x_n и y_1, \dots, y_n тогда и только тогда, когда он имеет такой вид:

$$F_3^n(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) = 3! \beta \cdot \left(\sum_{1 \leq i < j < k \leq n} x_i x_j x_k \right) \left(\sum_{1 \leq s < t < u \leq n} y_s y_t y_u \right) + 2!(n-2)^2 \cdot \beta \cdot \left(\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j \right) \left(\sum_{1 \leq s < t \leq n} y_s y_t \right) + \frac{(n-1)^2(n-2)^2}{2} \cdot \beta \cdot \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \left(\sum_{j=1}^n y_j \right) + \beta \cdot \frac{n^2(n-1)^2(n-2)^2}{3!}, \quad \beta \in K.$$

Доказательство. Общий вид многочлена вида F_3^n , учитывая (3), будет следующим:

$$F_3^n(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) = \sum_{\substack{(i, j, k) \in A_n^3, \\ 1 \leq s < t < u \leq n}} \alpha_{ijkstu} (x_i y_s + 1)(x_j y_t + 1)(x_k y_u + 1).$$

После преобразования получаем:

$$F_3^n(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) = \sum_{(i,j,k) \in A_n^3} x_i x_j x_k \left(\sum_{1 \leq s < t < u \leq n} \alpha_{ijkstu} y_s y_t y_u \right) +$$

$$+ \sum_{\substack{(i,j,k) \in A_n^3, \\ 1 \leq s < t < u \leq n}} \alpha_{ijkstu} (x_i x_j y_s y_t + x_i x_k y_s y_u + x_j x_k y_t y_u) + \sum_{\substack{(i,j,k) \in A_n^3, \\ 1 \leq s < t < u \leq n}} \alpha_{ijkstu} (x_i y_s + x_j y_t + x_k y_u) + \sum_{\substack{(i,j,k) \in A_n^3, \\ 1 \leq s < t < u \leq n}} \alpha_{ijkstu}.$$

Многочлен $F_3^n(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ является симметрическим многочленом относительно переменных x_1, \dots, x_n и y_1, \dots, y_n тогда и только тогда, когда коэффициенты α_{ijkstu} не зависят от индексов i, j, k, s, t, u . Поэтому многочлен F_3^n имеет такой вид:

$$F_3^n(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) = 3! \beta \cdot \left(\sum_{(i,j,k) \in A_n^3} x_i x_j x_k \right) \left(\sum_{1 \leq s < t < u \leq n} y_s y_t y_u \right) +$$

$$+ \beta \cdot \sum_{\substack{(i,j,k) \in A_n^3, \\ 1 \leq s < t < u \leq n}} (x_i x_j y_s y_t + x_i x_k y_s y_u + x_j x_k y_t y_u) + \beta \cdot \sum_{\substack{(i,j,k) \in A_n^3, \\ 1 \leq s < t < u \leq n}} (x_i y_s + x_j y_t + x_k y_u) + \beta \cdot \frac{n^2(n-1)^2(n-2)^2}{3!}.$$

Рассуждая аналогичным образом, как и в лемме 2, получаем требуемый вид многочлена F_3^n . Лемма доказана.

Рассмотрим общий случай.

Теорема 1. Пусть K — некоторое поле нулевой характеристики и n — некоторое натуральное число. Пусть $1 \leq k \leq n$. Многочлен

$$F_k^n(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$$

является симметрическим многочленом относительно переменных x_1, \dots, x_n и y_1, \dots, y_n тогда и только тогда, когда он имеет такой вид:

$$F_k^n(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) = \sum_{s=0}^k (k-s)! A_{n-k+s}^s C_{n-k+s}^s \cdot \beta \cdot \left(\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{k-s} \leq n} x_{i_1} \dots x_{i_{k-s}} \right) \left(\sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_{k-s} \leq n} y_{j_1} \dots y_{j_{k-s}} \right), \quad (6)$$

где A_n^k — число размещений из n по k , C_n^k — число сочетаний из n по k , $\beta \in K$.

Доказательство. Пусть $1 \leq k \leq n$. Общий вид многочлена F_k^n имеет вид (3). Рассуждая аналогичным образом, как и в леммах 1-3, получаем, что для симметричности многочлена F_k^n относительно переменных x_1, \dots, x_n и y_1, \dots, y_n необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты $\alpha_{i_1 \dots i_k j_1 \dots j_k}$ были равны между собой. Пусть все $\alpha_{i_1 \dots i_k j_1 \dots j_k}$ равны β . Тогда

$$F_k^n(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) = \beta \cdot \sum_{\substack{(i_1, \dots, i_k) \in A_n^k, \\ 1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n}} (x_{i_1} y_{j_1} + 1) \dots (x_{i_k} y_{j_k} + 1).$$

Покажем, что данный многочлен совпадает с (6). Вычислим коэффициенты при $\left(\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{k-s} \leq n} x_{i_1} \dots x_{i_{k-s}} \right) \left(\sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_{k-s} \leq n} y_{j_1} \dots y_{j_{k-s}} \right)$, где $s = 0, \dots, k$. После раскрытия скобок в элементе

$$\sum_{\substack{(i_1, \dots, i_k) \in A_n^k, \\ 1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n}} (x_{i_1} y_{j_1} + 1) \dots (x_{i_k} y_{j_k} + 1) = \frac{1}{k!} \cdot \sum_{\substack{(i_1, \dots, i_k) \in A_n^k, \\ (j_1, \dots, j_k) \in A_n^k}} (x_{i_1} y_{j_1} + 1) \dots (x_{i_k} y_{j_k} + 1)$$

будут получаться суммы вида

$$\frac{1}{k!} \cdot \sum_{\substack{(i_1, \dots, i_k) \in A_n^k, \\ (j_1, \dots, j_k) \in A_n^k}} \sum_{1 \leq t_1 < \dots < t_s \leq k} x_{i_{t_1}} y_{j_{t_1}} \dots x_{i_{t_s}} y_{j_{t_s}} \dots x_{i_{t_s}} y_{j_{t_s}} \dots x_{i_{t_s}} y_{j_{t_s}} \dots x_{i_{t_s}} y_{j_{t_s}} \quad (7)$$



где \wedge означает, что элемент отсутствует. Понятно, что сумма $\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_s \leq k} x_{i_1} y_{j_1} \dots x_{i_s} y_{j_s} \dots x_{i_k} y_{j_k}$

состоит их C_k^s слагаемых. Далее, число элементов вида

$$(\dots, a_1, \dots, a_{k-s}, \dots), (\dots, b_1, \dots, b_{k-s}, \dots) \in A_n^k \times A_n^k,$$

где $a_1, \dots, a_{k-s}, b_1, \dots, b_{k-s}$ зафиксированы, равно $(C_{n-k+s}^s)^2$. Поэтому суммы вида (7) можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{k!} \cdot (C_{n-k+s}^s)^2 \cdot C_k^s \cdot \left(\sum_{(i_1, \dots, i_{k-s}) \in A_n^{k-s}} x_{i_1} \dots x_{i_{k-s}} \right) \left(\sum_{(j_1, \dots, j_{k-s}) \in A_n^{k-s}} y_{j_1} \dots y_{j_{k-s}} \right) = \\ & = \frac{1}{k!} \cdot (C_{n-k+s}^s)^2 \cdot C_k^s \cdot ((k-s)!)^2 \cdot \left(\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{k-s} \leq n} x_{i_1} \dots x_{i_{k-s}} \right) \left(\sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_{k-s} \leq n} y_{j_1} \dots y_{j_{k-s}} \right). \end{aligned}$$

Осталось заметить, что

$$\frac{1}{k!} \cdot (C_{n-k+s}^s)^2 \cdot C_k^s \cdot ((k-s)!)^2 = (k-s)! A_{n-k+s}^s \cdot C_{n-k+s}^s.$$

Теорема доказана.

Пример 1. Пусть поле K имеет нулевую характеристику. Приведем некоторые частные случаи симметрических многочленов $F_k^n(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ относительно переменных x_1, \dots, x_n и y_1, \dots, y_n из теоремы 1. В качестве параметра β возьмем единицу.

$$F_2^2(x_1, x_2, y_1, y_2) = 2 \cdot x_1 x_2 y_1 y_2 + (x_1 + x_2)(y_1 + y_2) + 2,$$

$$F_2^3(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) = 2 \cdot (x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3)(y_1 y_2 + y_1 y_3 + y_2 y_3) + 4 \cdot (x_1 + x_2 + x_3)(y_1 + y_2 + y_3) + 18.$$

$$F_3^3(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) = 6 \cdot x_1 x_2 x_3 y_1 y_2 y_3 + 2 \cdot (x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3)(y_1 y_2 + y_1 y_3 + y_2 y_3) + 2 \cdot (x_1 + x_2 + x_3)(y_1 + y_2 + y_3) + 6.$$

Теорема 2. Пусть $f(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ — многочлен от переменных x_1, \dots, x_n и y_1, \dots, y_n вида (1) над полем K нулевой характеристики. Данный многочлен является симметрическим многочленом относительно переменных x_1, \dots, x_n и y_1, \dots, y_n тогда и только тогда, когда он имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) &= \sum_{s=0}^2 \left(\sum_{i=2}^n \alpha_i s! A_{n-s}^{i-s} C_{n-s}^{i-s} \right) \left(\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_s \leq n} x_{i_1} \dots x_{i_s} \right) \left(\sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_s \leq n} y_{j_1} \dots y_{j_s} \right) + \\ &+ \sum_{t=3}^n \left(\sum_{i=t}^n \alpha_i t! A_{n-t}^{i-t} C_{n-t}^{i-t} \right) \left(\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_t \leq n} x_{i_1} \dots x_{i_t} \right) \left(\sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_t \leq n} y_{j_1} \dots y_{j_t} \right) \end{aligned}$$

для некоторого набора чисел $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n \in K$.

Доказательство. Нетрудно видеть, что многочлен $f(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ является симметрическим многочленом относительно переменных x_1, \dots, x_n и y_1, \dots, y_n тогда и только тогда, когда он является линейной комбинацией симметрических многочленов $F_k^n(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$, $k = 2, \dots, n$, вида (6):

$$f(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) = \sum_{k=2}^n \alpha_k F_k^n(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n).$$

Осталось преобразовать суммы к требуемому виду. Теорема доказана.

2. Симметрические многочлены специального вида в случае поля положительной характеристики

Теорема 3. Пусть K — некоторое поле и n — некоторое натуральное число. В зависимости от характеристики поля K симметрические многочлены относительно переменных x_1, \dots, x_n и y_1, \dots, y_n из теоремы 1 при $\beta = 1$ будут иметь следующий вид.

I. 1. Пусть $\text{char} K = 2$. Тогда

$$\begin{aligned}
 F_1^{2n}(x_1, \dots, x_{2n}, y_1, \dots, y_{2n}) &= \left(\sum_{i=1}^{2n} x_i \right) \left(\sum_{j=1}^{2n} y_j \right), \\
 F_1^{2n-1}(x_1, \dots, x_{2n-1}, y_1, \dots, y_{2n-1}) &= \left(\sum_{i=1}^{2n-1} x_i \right) \left(\sum_{j=1}^{2n-1} y_j \right) + 1, \\
 F_2^{2n}(x_1, \dots, x_{2n}, y_1, \dots, y_{2n}) &= \left(\sum_{i=1}^{2n} x_i \right) \left(\sum_{j=1}^{2n} y_j \right), \\
 F_2^{2n-1}(x_1, \dots, x_{2n-1}, y_1, \dots, y_{2n-1}) &= 0, \\
 F_k^n(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) &= 0, \quad 2 < k \leq n.
 \end{aligned}$$

2. Пусть $\text{char} K = 3$. Тогда

$$\begin{aligned}
 F_1^{3n}(x_1, \dots, x_{3n}, y_1, \dots, y_{3n}) &= \left(\sum_{i=1}^{3n} x_i \right) \left(\sum_{j=1}^{3n} y_j \right), \\
 F_1^{3n-1}(x_1, \dots, x_{3n-1}, y_1, \dots, y_{3n-1}) &= \left(\sum_{i=1}^{3n-1} x_i \right) \left(\sum_{j=1}^{3n-1} y_j \right) + 1, \\
 F_1^{3n-2}(x_1, \dots, x_{3n-2}, y_1, \dots, y_{3n-2}) &= \left(\sum_{i=1}^{3n-2} x_i \right) \left(\sum_{j=1}^{3n-2} y_j \right) + 1, \\
 F_2^{3n}(x_1, \dots, x_{3n}, y_1, \dots, y_{3n}) &= 2 \cdot \left(\sum_{1 \leq i < j \leq 3n} x_i x_j \right) \left(\sum_{1 \leq s < t \leq 3n} y_s y_t \right) + \left(\sum_{i=1}^{3n} x_i \right) \left(\sum_{j=1}^{3n} y_j \right), \\
 F_2^{3n-1}(x_1, \dots, x_{3n-1}, y_1, \dots, y_{3n-1}) &= 2 \cdot \left(\sum_{1 \leq i < j \leq 3n-1} x_i x_j \right) \left(\sum_{1 \leq s < t \leq 3n-1} y_s y_t \right) + \left(\sum_{i=1}^{3n-1} x_i \right) \left(\sum_{j=1}^{3n-1} y_j \right) + 2, \\
 F_2^{3n-2}(x_1, \dots, x_{3n-2}, y_1, \dots, y_{3n-2}) &= 2 \cdot \left(\sum_{1 \leq i < j \leq 3n-2} x_i x_j \right) \left(\sum_{1 \leq s < t \leq 3n-2} y_s y_t \right) + \left(\sum_{i=1}^{3n-2} x_i \right) \left(\sum_{j=1}^{3n-2} y_j \right), \\
 F_3^{3n}(x_1, \dots, x_{3n}, y_1, \dots, y_{3n}) &= 2 \cdot \left(\sum_{1 \leq i < j \leq 3n} x_i x_j \right) \left(\sum_{1 \leq s < t \leq 3n} y_s y_t \right) + 2 \cdot \left(\sum_{i=1}^{3n} x_i \right) \left(\sum_{j=1}^{3n} y_j \right), \\
 F_3^{3n-1}(x_1, \dots, x_{3n-1}, y_1, \dots, y_{3n-1}) &= 0, \\
 F_3^{3n-2}(x_1, \dots, x_{3n-2}, y_1, \dots, y_{3n-2}) &= 2 \cdot \left(\sum_{1 \leq i < j \leq 3n-2} x_i x_j \right) \left(\sum_{1 \leq s < t \leq 3n-2} y_s y_t \right), \\
 F_4^{3n-2}(x_1, \dots, x_{3n-2}, y_1, \dots, y_{3n-2}) &= \left(\sum_{1 \leq i < j \leq 3n-2} x_i x_j \right) \left(\sum_{1 \leq s < t \leq 3n-2} y_s y_t \right), \\
 F_k^n(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) &= 0, \quad 4 < k \leq n.
 \end{aligned}$$

II. Рассмотрим общий случай. Пусть $\text{char} K = p > 0$. Тогда

$$F_k^n(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) = 0, \quad 2p-1 \leq k \leq n.$$

Доказательство. Достаточно показать пункт **II**, так как **I** является частным случаем пункта **II** в плане равенства $F_k^n(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) = 0$, $2p-1 \leq k \leq n$. Покажем, что при $k \geq 2p-1$ все коэффициенты в формуле (6) делятся на p . Итак, рассмотрим коэффициент $(k-s)! A_{n-k+s}^s \cdot C_{n-k+s}^s$, который представим в виде

$$(k-s)! A_{n-k+s}^s \cdot C_{n-k+s}^s = (k-s)! (n-k+1) \dots (n-k+s) \cdot C_{n-k+s}^s.$$

Если $s \geq p$, то число $(n-k+1) \dots (n-k+s)$ делится на p , так как в этом числе не менее p множителей, состоящих из подряд идущих натуральных чисел. Если же $s < p$, то $(k-s)! \geq (k-p+1)! \geq (2p-1-p+1)! = p!$. Поэтому $(k-s)!$ делится на p . Теорема доказана.



Пример 2. Пусть $\text{char } K = 3$. Рассмотрим все симметрические многочлены при $n = 3$, используя теорему 3.

$$F_1^3(x_1, x_2, x_2, y_1, y_2, y_3) = (x_1 + x_2 + x_3)(y_1 + y_2 + y_3),$$

$$F_2^3(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) = 2 \cdot (x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3)(y_1 y_2 + y_1 y_3 + y_2 y_3) + (x_1 + x_2 + x_3)(y_1 + y_2 + y_3),$$

$$F_3^3(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) = 2 \cdot (x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3)(y_1 y_2 + y_1 y_3 + y_2 y_3) + 2 \cdot (x_1 + x_2 + x_3)(y_1 + y_2 + y_3).$$

Список литературы References

1. Макдональд И. Симметрические функции и многочлены Холла. М.: Мир, 1985. 222 с.
Macdonald I. G. Symmetric Functions and Hall Polynomials, second ed. Oxford: Clarendon Press, 1995. 475 pp.
2. Рацеев С.М. Эквивалентные условия полиномиальности роста многообразий алгебр Пуассона // Вестн. Московск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2012. Т. 67, № 5. С. 8-13.
Ratseev S.M. Equivalent conditions of polynomial growth of a variety of Poisson algebras // Moscow University Mathematics Bulletin. 2012. Vol. 67, № 5-6. Pp. 195-199.
3. Рацеев С.М. Рост многообразий алгебр Лейбница с нильпотентным коммутантом // Матем. заметки. 2007. Т. 82, № 1. С. 108-117.
Ratseev S.M. The growth of varieties of leibniz algebras with nilpotent commutator subalgebra // Mathematical Notes. 2007. Vol.82, № 1-2. Pp. 96-103.
4. Кемер А.Р. Об идеалах групповой алгебры бесконечной симметрической группы над полем характеристики p // Матем. заметки, 2012, Т. 92, № 3, 417–425.
Kemer A.R. On Ideals of the Group Algebra of an Infinite Symmetric Group over a Field of Characteristic p // Mathematical Notes, 2012, Vol. 92, № 3, Pp. 417–425.



УДК 512.54

ШИРИНА ВЕРБАЛЬНЫХ ПОДГРУПП ДЛЯ АНОМАЛЬНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ THE WIDTH OF VERBAL SUBGROUPS IN ANOMALOUS PRODUCTS

Д.З. Каган
D.Z. Kagan

Московский государственный университет путей сообщения Императора Николая II (МИИТ), Россия,
127994, г. Москва, ул. Образцова, д. 9, стр. 9

Moscow State University of Railway Engineering, 9 Obratsov St, Moscow, 127994, Russia

E-mail: dmikagan@gmail.com

Аннотация. В работе рассматриваются вопросы о ширине собственных вербальных подгрупп для аномальных произведений с бесконечной циклической группой. Получены результаты, продолжающие теоремы В.Г. Бардакова и И.В. Добрыниной о ширине вербальных подгрупп для свободных произведений с объединением и HNN-расширений. Ширина вербальной подгруппы $V(G)$ равна наименьшему $m \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ такому, что всякий элемент подгруппы $V(G)$ записывается в виде произведения не более чем m значений слов из V . Доказана бесконечность ширины всякой собственной вербальной подгруппы в аномальных произведениях бесконечной циклической группы и группы, для которой выполнена теорема о свободе при некоторых дополнительных условиях. Аналогичное утверждение доказано для аномальных произведений бесконечной циклической группы с группой, которая не является конечно порожденной.

Resume. In this paper questions of the width for proper verbal subgroups in anomalous products with the infinite cyclic group. The results continue to theorems of V.G. Bardakova and I.V. Dobrynin about the width of verbal subgroups in free products with amalgamation and HNN-extensions are obtained. The width of the verbal subgroups $V(G)$ is equal to a least value of $m \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ such that every element of the subgroup $V(G)$ is represented as the product of at most m values of words V . It is prove that width of any proper verbal subgroup in anomalous products of the infinite cyclic group and a group for which the theorem of freedom holds is infinite under certain additional conditions. A similar statement is proved for anomalous products of the infinite cyclic group and a group that is not finitely generated.

Ключевые слова: ширина вербальных подгрупп, аномальные произведения, HNN-расширения
Key words: width of verbal subgroup, anomalous products, HNN-extensions

Введение

Шириной [1] вербальной подгруппы $V(G)$ относительно множества слов V называется наименьшее число $m \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ такое, что любой элемент подгруппы $V(G)$ записывается в виде произведения не более чем m значений слов из V .

Ширина вербальной подгруппы, в общем случае, зависит от множества слов V . Как правило, рассматривается конечное множество слов, так как для любой вербальной подгруппы $V(G)$ можно подобрать такое бесконечное множество слов W , что $V(G) = W(G)$, а ширина $W(G)$ равна единице. Будем называть V собственным множеством слов, а $V(G)$ — собственной вербальной подгруппой, если $V(F_2) \neq E$ и $V(F_2) \neq F_2$. Ширина несобственной вербальной подгруппы всегда будет конечна.

Исследованиями ширины вербальных подгрупп для различных типов групп занимались многие алгебраисты. Понятие "ширина" было введено Ю. И. Мерзляковым [2] в 1967 году. А. Х. Ремтулла [3] доказал, что ширина всякой собственной вербальной подгруппы $v(G)$ будет бесконечна в свободном произведении неединичных групп $G = A * B$, за исключением $Z_2 * Z_2$

Результаты о ширине вербальных подгрупп для свободных произведений с объединенной подгруппой и HNN-расширений были получены в работах В.Г. Бардакова [4], И. В. Добрыниной [5, 6], В. А. Файзиева [7], В.Н. Безверхнего [6].



Заметим, что в некоторых работах изучалась ширина коммутантных вербальных подгрупп – подгрупп, порожденных словами из коммутанта.

Р. И. Григорчуком [8] установлены условия бесконечности собственной коммутантной вербальной подгруппы для свободных произведений с объединением и HNN–расширений. При этом используется техника построения на группах нетривиальных псевдохарактеров.

В работах автора решен вопрос об условиях бесконечности ширины собственных коммутантных вербальных подгрупп для групп с одним определяющим соотношением и нетривиальным центром. Также найдены различные условия бесконечности ширины коммутантных вербальных подгрупп для некоторых аномальных произведений [9–10].

Подробный обзор результатов о ширине вербальных подгрупп приведен в [11].

В данной статье доказываются утверждения о ширине произвольных собственных вербальных подгрупп (не только коммутантных) для аномальных произведений определенных типов групп. Отметим следующее важное обстоятельство. Для доказательства бесконечности ширины коммутантных вербальных подгрупп часто используется метод построения на рассматриваемых группах специальных функций – нетривиальных псевдохарактеров. В общем случае для произвольных вербальных подгрупп этот метод неприменим. Из существования на группе G нетривиальных псевдохарактеров не следует бесконечность ширины вербальных подгрупп, порожденных не только коммутаторными словами. Например, с помощью псевдохарактеров невозможно доказать бесконечность ширины для вербальных подгрупп, порожденных степенями $V(X^s)$.

При доказательстве утверждений мы будем использовать условия бесконечности ширины вербальных подгрупп для свободных произведений с объединенной подгруппой и HNN–расширений. Поэтому приведем формулировки соответствующих теорем.

Теорема. (И.В. Добрынина, [5]) В свободных произведениях с объединением $A *_U B$, где $|A : U| \geq 2$, $|B : U| \geq 3$, ширина всякой собственной вербальной подгруппы бесконечна.

Теорема. (В.Г. Бардаков, [4]) Пусть в HNN–расширении $G = \langle G_0, t / tAt^{-1} = B \rangle$ связанные подгруппы A и B отличны от базовой группы G_0 . Тогда ширина всякой собственной вербальной подгруппы бесконечна.

Аномальные произведения

В данной статье доказываются утверждения о ширине произвольных собственных вербальных подгрупп (не только коммутантных) для аномальных произведений определенных типов групп. Отметим следующее важное обстоятельство. Для доказательства бесконечности ширины коммутантных вербальных подгрупп часто используется метод построения на рассматриваемых группах специальных функций – нетривиальных псевдохарактеров. В общем случае для произвольных вербальных подгрупп этот метод неприменим. Из существования на группе G нетривиальных псевдохарактеров не следует бесконечность ширины вербальных подгрупп, порожденных не только коммутаторными словами.

Понятие аномального произведения было введено С.Д. Бродским [12] в 1984 году. Пусть $F = A * B$ — свободное произведение некоторых групп A и B . Пусть также $w = a_1 b_1 \dots a_l b_l$ — циклически несократимый элемент в группе F , при этом, элементы длины один не считаются циклически несократимыми по определению. Тогда, фактор-группа $G = F / \langle w^f \rangle$ группы F по нормальному замыканию элемента w называется аномальным произведением групп A и B с аномалией w и обозначается $A_w B$. Число l называется длиной аномалии.

Отметим, что в определении аномального произведения элемент w предполагается циклически несократимым, не лежащим в группах-множителях A или B . Поэтому мы всегда можем рассматривать циклически несократимую запись элемент w в произведении $F = A * B$: $w = a_1 b_1 \dots a_l b_l$, где первый слог и последний слог принадлежат разным группам A и B и не равны 1.

Сформулируем также еще одно определение, которое будем использовать в дальнейшем.

Теорема о свободе выполнена для группы G , если выполняется следующее условие. Пусть $C = G * G^* \dots * G / \langle \langle w \rangle \rangle$ — свободное произведение нескольких изоморфных копий группы G , на которое наложено одно дополнительное соотношение w , которое считается циклически несократимым. Тогда подгруппа группы C , порожденная всеми изоморфными копиями группы G , кроме одной, элементы которой входят в циклически несократимую запись w , является свободным произведением этих копий. В частности, любая из изоморфных копий естественным образом вложима в группу C , т.е. $w^c \cap G_i = 1$.

Согласно результатам Магнуса теорема о свободе выполнена для свободных групп. С.Д. Бродский в той же статье [12] доказал, что теорема о свободе выполнена для локально индикательных групп.



При доказательстве теоремы, мы будем использовать некоторые обозначения, применявшиеся С.Д. Бродским в [12], а также в работе автора [9].

Основная теорема

Теорема 1. Пусть группа G является аномальным произведением групп A и B , $G = AwB$. Группа A — бесконечная циклическая, $A = \langle x \rangle_\infty$, группа B — не равна нормальному замыканию никакого своего элемента, и для группы B выполнена теорема о свободе. Пусть сумма всех степеней элемента x , с которыми он входит в запись слова $w = x^{r_1}b_1 \dots x^{r_l}b_l$, равна нулю: $\sum_{k=1}^l k_i = 0$. Тогда ширина всякой собственной вербальной подгруппы $V(G)$ группы G , определенной конечным множеством слов V , бесконечна относительно V .

Доказательство. Заметим, что при выполнении условий теоремы длина аномалии должна быть больше 1, $l > 1$. Тогда аномалия w имеет вид $w = a_1b_1$, при этом оба элемента a_1, b_1 не равны единице. В противном случае элемент w не является циклически несократимым и это противоречит определению аномального произведения. Если $l=1$, $w = a_1b_1$, то группа G является свободным произведением с объединенной циклической подгруппой.

Обозначим нормальное замыкание подгруппы B в свободном произведении $F = A * B$ через H . Поскольку произведение всех элементов группы A , входящих в запись w равно 1, элемент w принадлежит H .

Будем обозначать через B_i группу B , сопряженную порождающим бесконечной циклической группы x в i -ой степени, $B_i = x^i B x^{-i}$. Группа H является свободным произведением групп B_i , $H = \prod_{i \in \mathbb{Z}} * B_i$.

Для произвольных целых чисел $p_1 \leq p_2$ обозначим $H_{p_1, p_2} = \prod_{i=p_1}^{p_2} * B_i$. Выберем теперь числа k и

n , как минимальный и максимальный индексы, с которыми элементы из B_i входят в циклически несократимую запись w .

Группа $F = A * B$ является HNN-расширением базы $H_{k,n}$ с изоморфными подгруппами $H_{k,n-1}$ и $H_{k+1,n}$ и проходной буквой x .

$$F = HNN(x, H_{k,n} \mid xH_{k,n-1}x^{-1} = H_{k+1,n})$$

Группа $H_{k,n-1} = \prod_{i=k}^{n-1} * B_i$ является свободным произведением групп B_i , $i=k, \dots, n-1$. Действительно, для группы B выполнена теорема о свободе, и элементы из группы B_n с максимальным индексом входят в несократимую запись аномалии w . Следовательно, $H_{k,n-1} \cap \langle w \rangle^{H_{k,n}} = 1$. Аналогично, вторая изоморфная подгруппа $H_{k+1,n}$ также является свободным произведением соответствующих групп B_i , $i=k+1, \dots, n$ и $H_{k+1,n} \cap \langle w \rangle^{H_{k,n}} = 1$.

В той же статье С.Д. Бродского [12] приводится утверждение об HNN-расширениях. Если $R = HNN(t, S \mid tAt^{-1} = B)$, N — нормальный делитель группы S и N тривиально пересекается с подгруппами A и B , $N \cap A = 1, N \cap B = 1$, то $R / N^R = HNN(t, S / N \mid t(AN / N)t^{-1} = BN / N)$.

Отсюда применительно к рассматриваемой группе $G = AwB$ следует

$$G = F / \langle w \rangle^F = HNN(x, H_{k,n} / N \mid xH_{k,n-1}x^{-1} = H_{k+1,n}),$$

где N — нормальное замыкание w в группе $H_{k,n}$.

Согласно вышеприведенной теореме Бардакова о HNN-расширениях, ширина всякой собственной вербальной подгруппы относительно конечного множества слов будет бесконечной, если изоморфные подгруппы будут собственными в базе HNN-расширения. Таким образом, для того, чтобы в группе G ширина всякой собственной вербальной подгруппы была бесконечной, достаточно выполнение следующего условия: группы $H_{k,n-1}$ и $H_{k+1,n}$ должны быть собственными подгруппами в фактор-группе $H_{k,n} / N$. Докажем, что при выполнении условий теоремы обе изоморфные подгруппы $H_{k,n-1}$ и $H_{k+1,n}$ будут собственными в $H_{k,n} / N$.

Если группа $H_{k,n-1}$ не является собственной в $H_{k,n} / N$, любой элемент $h \in H_{k,n}$ представляется в виде $h = h_1 \square n$, где $h_1 \in H_{k,n-1}, n \in N$. Тогда произведение $hh_1 \in N$ для любых $h \in H_{k,n}, h_1 \in H_{k,n-1}$.



Каждый элемент группы $H_{k,n}$ представляется в виде несократимой записи в разложении $H_{k,n} = \prod_{i=k}^n *B_i$. Для произвольного элемента $g \in H_{k,n}$ обозначим через $B^n(g)$ произведение всех элементов из B^n , входящих в несократимую запись g , сопряженное элементом x^{-n} . Таким образом, $B^n(g) = x^{-n} \cdot (\text{произведение всех элементов из } B^n \text{ в } g) \cdot x^n$, $B^n(g)$ будет элементом группы B , равным произведению всех b_i из несократимой записи элемента $g \in H_{k,n}$ с максимальным индексом n .

В несократимой записи произведения элементов $hh_1 \in N$, где $h \in H_{k,n}$, $h_1 \in H_{k,n-1}$ слоги из группы B^n могут входить лишь в запись h . Поэтому, $B^n(hh_1) = B^n(h)$.

Элемент $B^n(w)$ в соответствии с введенным обозначением равен произведению всех элементов из B^n (всех элементов b_i с максимальным индексом n), входящих в запись элемента w в разложении $H_{k,n} = \prod_{i=k}^n *B_i$. По условию теорема группа B не является нормальным замыканием одного своего элемента. В частности, $B \neq (B^n(w))^B$. Для любого элемента $n \in N$ выполняется $B^n(n) \in (B^n(w))^B$.

Следовательно, существует элемент b группы B , не принадлежащий нормальному замыканию элемента $B^n(w)$ в группе B . Рассмотрим в группе B^n элемент $x^n b x^{-n}$, где b не принадлежит нормальному замыканию $B^n(w)$.

Для любого элемента h_1 , принадлежащего группе $H_{k,n-1}$ будет выполняться $B^n(hh_1) = B^n(h)$, следовательно

$$B^n(x^n b x^{-n} \cdot h_1) = B^n(x^n b x^{-n}) = b \notin (B^n(w))^B.$$

Это означает, что элемент $x^n b x^{-n} \cdot h_1$ не лежит в группе N ни для какого $h_1 \in H_{k,n-1}$. Значит, рассматриваемый элемент $x^n b x^{-n}$ не принадлежит группе $H_{k,n-1}$ в фактор-группе $H_{k,n} / N$.

Следовательно, группа $H_{k,n-1}$ является собственной подгруппой в $H_{k,n} / N$. Аналогично доказывается, что $H_{k+1,n}$ также является собственной подгруппой. Таким образом, в группе $G = F / \langle w \rangle^F = HNN(x, H_{k,n} / N \mid xH_{k,n-1}x^{-1} = H_{k+1,n})$ обе изоморфные подгруппы являются собственными, выполнены условия теоремы Бардакова.

Поэтому любая вербальная подгруппа, определенная конечным собственным множеством слов, имеет бесконечную ширину относительно этого множества. Теорема доказана.

Теорема 2

Теорема 2. Пусть $G = AwB$ — аномальное произведение бесконечной циклической группы $A = \langle x \rangle_\infty$ и B — группы, которая не является конечно порожденной. Пусть также сумма всех степеней

элемента x , с которыми он входит в запись аномалии $w = x^{r_1} b_1 \dots x^{r_l} b_l$, равна нулю: $\sum_{k=1}^l k_i = 0$. То-

гда ширина всякой собственной вербальной подгруппы $V(G)$ группы G , определенной конечным множеством слов V , бесконечна относительно V .

Доказательство. Представим группу AwB в виде свободного произведения с объединенной подгруппой $AwB = (AwB^0 * B; B^0)$, где $B^0 = gp(b_1, b_2, \dots, b_l)$ — подгруппа группы B , порожденная элементами, входящими в несократимую запись аномалии.

Согласно теореме Добрыниной, для бесконечности ширины собственных вербальных подгрупп достаточно, чтобы число смежных классов одного множителя по объединенной подгруппе было не меньше 3, а другого — не меньше 2 (т.е. чтобы объединенная подгруппа была собственной во втором множителе).

То, число смежных классов B по B^0 будет больше 2 следует из того, что группа B не является конечно порожденной. Докажем, что группа B^0 будет собственной в AwB^0 .

В противном случае в группе AwB^0 должно выполняться равенство $x = b$, где $b \in B^0$. Но тогда элемент $x b^{-1}$ должен лежать в нормальном замыкании аномалии w в свободном произведении $F = A * B^0$. Поскольку суммарная степень, с которой порождающий x входит в запись w равна 0, то и для любого элемента из нормального замыкания $(w)^{A * B^0}$ суммарная степень также равна 0. Зна-



чит, ни для какого $b \in B^0$ элемент xb^{-1} не будет принадлежать $(w)^{A^*B^0}$. Следовательно, порождающий бесконечной циклической группы x не принадлежит подгруппе B^0 в группе AwB^0 и, соответственно, подгруппа B^0 будет собственной в AwB^0 .

Все условия для бесконечности ширины свободных произведений с объединением выполнены. Теорема доказана.

Список литературы References

1. Мерзляков Ю. И. Рациональные группы. М.: Наука, 1987.
Merzlyakov, Y. I. 1987. Rational groups, Moscow: Nauka.
2. Мерзляков Ю. И. Алгебраические линейные группы как полные группы автоморфизмов и замкнутость их вербальных подгрупп // Алгебра и логика. 1967. Т. 6, №1. С. 83 — 94.
Merzlyakov, Y. I. 1967. Algebraic linear groups as full groups of automorphisms and closure of their verbal subgroups. Algebra and logic, Vol. 6, No.1, pp. 83-94.
3. Rhemtulla A. H. A problem of bounded expressibility in free products // Proc. Cambridge Phil. Soc. 1968. V. 64, № 3. P. 573 — 584.
4. Бардаков В. Г. О ширине вербальных подгрупп некоторых свободных конструкций // Алгебра и логика. 1997. Т. 36, №5. С. 494 — 517.
Bardakov V. G. 1997. On the width of verbal subgroups of some free constructions. Algebra and logic, Vol. 36, No. 5, pp. 494-517.
5. Добрынина И.В. Решение проблемы ширины в свободных произведениях с объединением // Фундаментальная и прикладная математика. 2009. Т. 15, №1. С. 23 — 30.
Dobrynina I. V. 2009. Solution of the width problem in amalgamated free products, Fundam. Prikl. Mat., Vol. 15, No. 1, pp. 23-30.
6. Добрынина И. В., Безверхний В. Н. О ширине в некотором классе групп с двумя образующими и одним определяющим соотношением // Труды института математики и механики УрО РАН, 2001. Т.7, №2. С. 95 — 102.
Dobrynina I. V. & Bezverkhni V. N. 2001. On width in some class of groups with two generators and one defining relation, Proc. Steklov Inst. Math. Algebra. Topology, Vol. 7, suppl. 2, pp. 53-60.
7. Faiziev V. A. A problem of expressibility in some amalgamated products of groups // J. Austral. Math. Soc. 2001. V. 71. P. 105 — 115.
8. Григорчук Р. И. Ограниченные когомологии групповых конструкций // Математические заметки, 1996. Т. 59, №4. С. 546 — 550.
Grigorchuk R. I. 1996. Bounded cohomology of group constructions, Mat. Zametki, Vol. 59, No. 4, Pp. 546-550.
9. Каган Д. З. О существовании нетривиальных псевдохарактеров на аномальных произведениях групп // Вестник МГУ, 2004. №6. С. 24 — 28.
Kagan D. Z. 2004. On the existence of non-trivial Pseudocharacters on anomalous products of groups, Vestnik MGU, No. 6, Pp. 24-28.
10. Каган Д.З. Псевдохарактеры на аномальных произведениях локально индикабельных групп // Фундаментальная и прикладная математика. 2006. Т.12, №3. С. 55 — 64.
Kagan D. Z. 2006. Pseudocharacters on anomalous products of locally indicable groups, Fundam. Prikl. Mat., Vol. 12, No. 3, Pp. 55-64.
11. Добрынина И.В., Каган Д.З. О ширине вербальных подгрупп в некоторых классах групп. Чебышевский сборник. 2015. Т.16, В. 4, С. 150-163.
Dobrynina I. V., Kagan D. Z. 2015. On the width of verbal subgroups in some classes of groups// Chebyshevskii Sb., Vol. 16, Iss. 4, Pp 150–163
12. Бродский С. Д. Уравнения над группами и группы с одним определяющим соотношением // Сибирский математический журнал. 1984. Т. 25, №2. С. 84-103.
Brodsii S. D. 1980. Equations over groups and groups with a single defining relation. Siberian Math. J., Vol. 25, Iss. 2, Pp. 84-103.

УДК 517.9

**ОЦЕНКА СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ЗАДАЧИ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ
ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ВТОРОГО ПОРЯДКА С ДРОБНОЙ
ПРОИЗВОДНОЙ В МЛАДШИХ ЧЛЕНАХ**

**EVALUATION OF THE EIGENVALUES OF THE STURM-LIOUVILLE PROBLEM
FOR A DIFFERENTIAL OPERATOR OF SECOND ORDER WITH FRACTIONAL
DERIVATIVE IN THE JUNIOR MEMBERS**

**М.В. Кукушкин
M. V. Kukushkin**

Институт прикладной математики и автоматизации, Россия, 360000, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89а

Institute of Applied Mathematics and Automation, 89a ShortanovaSt, Nalchik, 360000, Russia

E-mail: kukushkinmv@rambler.ru;

Аннотация. В данной работе получен результат являющийся следствием вполне непрерывного вложения энергетического пространства порожденного дифференциальным оператором второго порядка с дробными производными в младших членах. Доказана теорема, позволяющая охарактеризовать рост собственных значений задачи Штурма-Лиувилля для дифференциального оператора второго порядка с дробными производными в младших членах.

Resume. In this paper we investigate the result which is a consequence of a completely continuous embedding energy space generated by a differential operator of second order with fractional derivatives in junior members. A theorem that allows to describe the growth of the eigenvalues of the Sturm-Liouville problem for a differential operator of second order with fractional derivatives in junior members is proved.

Ключевые слова: энергетическое пространство, оператор дробного дифференцирования, оператор Штурма-Лиувилля.

Key words: energetic space, operator of fractional differentiation, operator of Sturm-Liouville.

Введение

Считается известным (например см.[1]), что вполне непрерывное вложение энергетического пространства порожденного положительно определенным оператором в исходное пространство, дает возможность с помощью задания отношения частичного порядка на множестве положительно определенных операторов, оценить собственные значения оператора собственными значениями оператора более простого типа. В работе [2] 1977 г. рассмотрена задача Штурма-Лиувилля для дифференциального уравнения второго порядка с непрерывными коэффициентами при дробных производных в младших членах. Доказанная в работе [3] 2015 г. полуограниченность снизу оператора дробного дифференцирования, действующего в весовом пространстве Лебега суммируемых с квадратом функций, дает возможность перенести некоторые классические результаты теории положительно определенных операторов, для оператора дробного дифференцирования полуограниченного снизу. В частности как было сказано ранее важное значение имеет вопрос о вполне непрерывном вложении энергетического пространства порожденного оператором дробного дифференцирования в исходное пространство. Если не оговорено иное, будем полагать: $\alpha \in (0, 1)$, $x \in (a, b) = \Omega$. Интегрирование понимается в смысле Лебега. Следуя [4] для дробного интеграла и дробной производной, соответственно будем использовать обозначения

$$\left(I_{a+}^{\alpha} u\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{u(t)}{(x-t)^{-\alpha+1}} dt, \left(I_{b-}^{\alpha} u\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \frac{u(t)}{(t-x)^{-\alpha+1}} dt, \left(D_{a+}^{\alpha} u\right)(x) = \frac{d}{dx} I_{a+}^{1-\alpha} u, \left(D_{b-}^{\alpha} u\right)(x) = -\frac{d}{dx} I_{b-}^{1-\alpha} u.$$

В терминах обозначений [5] будем рассматривать гильбертово пространство



$$N_{\alpha,1}(L_2) := \left\{ u, v : u, v \in I_{a^+}^\alpha(L_2), \langle u, v \rangle_{N_{\alpha,1}(L_2)} = \frac{1}{2} \langle D_{a^+}^\alpha u, v \rangle_{L_2} + \frac{1}{2} \langle D_{a^+}^\alpha v, u \rangle_{L_2} \right\}.$$

Также будем рассматривать оператор типа потенциала, и сумму операторов дробного дифференцирования

$$I_{ab}^\alpha u = I_{a^+}^\alpha u + I_{b^-}^\alpha u, \quad D_{ab}^\alpha u = D_{a^+}^\alpha u + D_{b^-}^\alpha u.$$

Обозначим через λ_n собственные значения оператора задачи Штурма-Лиувилля для дифференциального уравнения второго порядка с дробными производными в младших членах

$$Au = -\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{du}{dx} \right) + q_0 D_{ab}^\alpha u, \quad (1)$$

$$u(x) \in C^2(\bar{\Omega}), \quad u(\partial\Omega) = 0, \quad (2)$$

с следующими предположениями относительно коэффициентов

$$p(x) \in C^1(\bar{\Omega}), \quad p_0 < p(x) < p_1, \quad p_0, q_0 = \text{const}, \quad p_0, q_0 > 0. \quad (3)$$

Будем также рассматривать вспомогательную задачу Штурма-Лиувилля в обозначениях (3) для коэффициентов, и с краевыми условиями (2); собственные значения оператора которой обозначим как: μ_n . Оператор вспомогательной задачи

$$Bu = -\frac{d}{dx} \left(p_0 \frac{du}{dx} \right) + \frac{q_0 (b-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}. \quad (4)$$

Вспомогательные утверждения

Лемма 1. Оператор A положительно определен.

Доказательство. Область определения оператора A является всюду плотным множеством в L_2 . Это следует из включения: $C_0^\infty \in D(A)$. Покажем, что оператор A симметричный. Имеем для $u, v \in D(A)$:

$$\langle Au, v \rangle_0 = -\int_a^b v \frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{du}{dx} \right) dx + q_0 \int_a^b v D_{a^+}^\alpha u dx + q_0 \int_a^b v D_{b^-}^\alpha u dx.$$

Применяя для первого слагаемого правой части последнего равенства формулу Грина, а также используя следствие 2 теоремы 2.4 [4, с.51] для третьего слагаемого (законность применения следствия 2 докажем ниже), имеем симметричное выражение для $u, v \in D(A)$:

$$\langle Au, v \rangle_0 = \int_a^b p(x) \frac{dv}{dx} \frac{du}{dx} dx + q_0 \int_a^b v D_{a^+}^\alpha u dx + q_0 \int_a^b u D_{a^+}^\alpha v dx. \quad (5)$$

Докажем законность применения следствия 2 теоремы 2.4 [4, с.51]. Для этого покажем, что при условиях (2) имеет место: $u \in I_{b^-}^\alpha(L_p)$, $v \in I_{a^+}^\alpha(L_q)$, $1/p + 1/q < 1 + \alpha$. Это будет следовать из фундаментальности последовательности: $\psi_\varepsilon(x)$ (см. формулу (13.7) [4, с.181]) в L_p , $1 \leq p < \infty$,

Положим: $u(x) \in C^2(\bar{\Omega})$. Используя обобщенное неравенство Минковского, имеем для $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > 0$:

$$\begin{aligned} \left(\int_a^b |\psi_{\varepsilon_1}(x) - \psi_{\varepsilon_2}(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\int_a^b \left| \int_{x+\varepsilon_1}^b \frac{u(x) - u(\tau)}{(\tau-x)^{\alpha+1}} d\tau - \int_{x+\varepsilon_2}^b \frac{u(x) - u(\tau)}{(\tau-x)^{\alpha+1}} d\tau \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = \\ &= \left(\int_a^b \left| \int_{x+\varepsilon_1}^{x+\varepsilon_2} \frac{u(x) - u(\tau)}{(\tau-x)^{\alpha+1}} d\tau \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_a^b \left| \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \frac{u(x) - u(x+t)}{t^{\alpha+1}} dt \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_a^b \left(\int_{\varepsilon_2}^{\varepsilon_1} \frac{|u(x) - u(x+t)|}{t^{\alpha+1}} dt \right)^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \end{aligned}$$



$$\leq \int_{\varepsilon_2}^{\varepsilon_1} t^{-\alpha-1} \left(\int_a^b |u(x) - u(x+t)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} dt \leq \|u\|_{C^1(\bar{\Omega})} \int_{\varepsilon_2}^{\varepsilon_1} t^{-\alpha} dt \leq \frac{M}{1-\alpha} (\varepsilon_1^{1-\alpha} - \varepsilon_2^{1-\alpha}). \quad (6)$$

Фундаментальность $\{\psi_\varepsilon(x)\}$, $\varepsilon \rightarrow 0$ доказана. В силу полноты $L_p(\Omega)$: $\exists \psi_0(x) \in L_p(\Omega)$ так, что имеет место сходимость: $\psi_\varepsilon(x) \xrightarrow{L_p} \psi_0(x)$, из чего в силу теоремы 13.2 [4,с.183] следует: $u(x) \in I_{b-}^\alpha(L_p)$, $1 \leq p < \infty$. Доказательство принадлежности: $v \in I_{a+}^\alpha(L_q)$, $1 \leq q < \infty$ полностью аналогично. Доказательство возможности применения следствия 2 теоремы 2.4 [4,с.51] завершено. Из (5) получим представление для нормы в H_A :

$$\|u\|_{H_A}^2 = \langle Au, u \rangle_{L_2} = \int_a^b p(x) \left(\frac{du}{dx} \right)^2 dx + 2q_0 \int_a^b u D_{a+}^\alpha u dx, \quad u \in D(A). \quad (7)$$

Оценим снизу первое и второе слагаемые правой части последнего равенства. Для этого используем, для первого и второго слагаемого соответственно: неравенство Фридрикса (см. теорема 30.2 [6, с.344]), и полуограниченность снизу оператора дробного дифференцирования (лемма 1.1 [3]). Имеем неравенство положительной определенности

$$\langle Au, u \rangle_{L_2} \geq \lambda^2 \|u\|_0^2, \quad \lambda = \left(\frac{p_0}{(b-a)^2} + \frac{q_0(b-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \right)^{1/2}.$$

Таким образом мы показали, что: 1) для оператора A имеет место неравенство положительной определенности, 2) $\overline{D(A)} = L_2$, 3) оператор A симметричный. Следовательно оператор A положительно определен. Лемма доказана.

Определение 1. Под обозначением H_A будем подразумевать энергетическое пространство порожденное положительно определенным оператором A .

Лемма 2. H_A как множество элементов совпадает с пространством $\overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$.

Доказательство. Предположим, что $u \in H_A$. По теореме 4.3.2 [1,с.68] существует последовательность: $\{u_n\} \subset D(A)$ такая, что:

$$\|u_{n+m} - u_n\|_{H_A} \rightarrow 0, \quad \|u_n - u\|_{L_2} \rightarrow 0. \quad (8)$$

Используя представление (7) для нормы в H_A , имеем

$$\|u_{n+m} - u_n\|_{H_A}^2 = \int_a^b (u'_{n+m} - u'_n)^2 p(x) dx + 2q_0 \int_a^b (u_{n+m} - u_n) D_{a+}^\alpha (u_{n+m} - u_n) dx, \quad \{u_n\} \subset D(A). \quad (9)$$

Поскольку в силу леммы 1.1 [3] второе слагаемое правой части последнего равенства неотрицательно, то

$$\|u'_{n+m} - u'_n\|_{L_2}^2 \leq \frac{1}{p_0} \int_a^b (u'_{n+m} - u'_n)^2 p(x) dx \rightarrow 0. \quad (10)$$

Следовательно в силу полноты пространства L_2 существует $u' \in L_2$, такая, что: $u'_n \xrightarrow{L_2} u'$. Несложно показать (например см. [1,с.82]), что u_n равномерно сходится к u , где u имеет представление

$$u(x) = \int_a^x u'(t) dt = - \int_x^b u'(t) dt. \quad (11)$$

Из чего следует, что: $u(x) \in W_2^1(\Omega)$, $u(a) = u(b) = 0$, а значит: $u(x) \in \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$. Пусть теперь: $u \in \overset{\circ}{W}_2^1$, покажем, что: $u \in H_A$. Согласно теореме 4.3.2 [1,с.68] достаточно показать, что существует последовательность: $\{u_n\} \subset D(A)$ обладающая свойствами (8). Применим метод доказательства использованный в [1,с.83] и разложим производную u' в ряд Фурье по косинусам (это возможно поскольку u' элемент пространства L_2):

$$u'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\pi \frac{x-a}{b-a}, \quad (12)$$

$a_0 = 0$, поскольку $u(\partial\Omega) = 0$. Почленно интегрируя ряд Фурье (12), получим

$$u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin k\pi \frac{x-a}{b-a}, \quad b_k = \frac{a_k(b-a)}{k\pi}. \quad (13)$$

Как известно из теории рядов Фурье ряд (13) сходится равномерно (см. теорема 44 [7, с.55]). Обозначив частичные суммы рядов (12) и (13) как: u'_n и u_n соответственно, имеем

$$\|u_{n+m} - u_n\|_{H_A}^2 = \|(u_{n+m} - u_n)\|_{L_2}^2 + \|u_{n+m} - u_n\|_{N_{\alpha,1}(L_2)}^2, \quad \{u_n\} \subset D(A).$$

Первое слагаемое правой части последнего равенства стремится к нулю, в силу сходимости ряда (12) по норме L_2 . Оценим второе слагаемое. Используя неравенство Коши-Гельдера, с учетом: леммы 2.2 [4, с.43], теоремы 3.5 [4, с.64]. Имеем

$$\begin{aligned} \|u_{n+m} - u_n\|_{N_{\alpha,1}(L_2)}^2 &= \langle u_{n+m} - u_n, D_{a+}^{\alpha}(u_{n+m} - u_n) \rangle_{L_2} = \langle u_{n+m} - u_n, I_{a+}^{1-\alpha}(u_{n+m} - u_n) \rangle_{L_2} \leq \\ &\leq \|u_{n+m} - u_n\|_{L_2} \|I_{a+}^{1-\alpha}(u_{n+m} - u_n)\|_{L_2} \leq C \|u_{n+m} - u_n\|_{L_2} \|(u_{n+m} - u_n)\|_{L_2}, \quad C = const. \end{aligned} \quad (14)$$

Заметим, что поскольку ряд (13) сходится равномерно, то и поадавно сходится по норме пространства L_2 . Следовательно в силу сходимости в L_2 рядов (12) и (13) второе слагаемое также стремится к нулю. Мы показали, что существует последовательность: $\{u_n\} \subset D(A)$ со свойствами (8); значит: $u \in H_A$. Лемма доказана.

Лемма 3. Для функции $u \in H_A$ имеет место представление для нормы (7).

Доказательство. Докажем, что (7) верно для любой функции: $u \in H_A$. Обозначим идеальный элемент (см. [8, с.25]) полученный в результате пополнения унитарного пространства образованного парой: $(\|\cdot\|_{H_A}, D(A))$, через: u^* . Заметим, что (7) можно переписать в терминах норм пространств

$$\|u_n\|_{H_A}^2 = \|u'_n\|_{L_2(\Omega,p)}^2 + 2q_0 \|u_n\|_{N_{\alpha,1}(L_2)}^2. \quad (15)$$

Поскольку u^* - идеальный элемент, то существует последовательность: $\{u_n\} \subset D(A)$ сходящаяся к u^* в смысле нормы H_A . Фундаментальность $\{u_n\}$ в пространстве H_A влечет, как следует из хода доказательства леммы 2, существование функции: $u \in \overset{\circ}{W}_2^1$ такой, что

$$u'_n \xrightarrow{L_2} u', \quad u_n \xrightarrow{L_2} u.$$

Из условия (3) на коэффициент $p(x)$, следует эквивалентность норм: $L_2(\Omega)$ и $L_2(\Omega, p)$. Значит

$$u'_n \xrightarrow{L_2(\Omega,p)} u',$$

из чего в свою очередь, с учетом свойства нормы имеем

$$\|u'_n\|_{L_2(\Omega,p)} \rightarrow \|u'\|_{L_2(\Omega,p)}. \quad (16)$$

Покажем, что: $\|u_n\|_{N_{\alpha,1}(L_2)}^2 \rightarrow \|u\|_{N_{\alpha,1}(L_2)}^2$. Оценивая полностью аналогично (14), имеем

$$\begin{aligned} \|u_n - u\|_{N_{\alpha,1}(L_2)}^2 &= \langle u_n - u, D_{a+}^{\alpha}(u_n - u) \rangle_{L_2} = \langle u_n - u, I_{a+}^{1-\alpha}(u_n - u) \rangle_{L_2} \leq \\ &\leq \|u_n - u\|_{L_2} \|I_{a+}^{1-\alpha}(u_n - u)\|_{L_2} \leq C \|u_n - u\|_{L_2} \|(u_n - u)\|_{L_2}, \quad C = const. \end{aligned} \quad (17)$$

Поскольку в силу предыдущих рассуждений правая часть последнего неравенства стремится к нулю, то: $u_n \xrightarrow{N_{\alpha,1}(L_2)} u$. Используя общие свойства нормы имеем

$$\|u_n\|_{N_{\alpha,1}(L_2)} \rightarrow \|u\|_{N_{\alpha,1}(L_2)}. \quad (18)$$



Осуществляя предельный переход в левой и правой части (15) с учетом (16) и (18), имеем представление для нормы в H_A :

$$\|u^*\|_{H_A}^2 = \|u\|_{L_2(\Omega, p)}^2 + 2q_0 \|u\|_{N_{\alpha,1}(L_2)}^2. \tag{19}$$

Лемма доказана.

Лемма 4. $\|u\|_{H_A} \geq \|u\|_{H_B}$.

Доказательство. Сразу заметим, что согласно [1, с.81]: B - положительно определенный оператор, следовательно обозначение H_B корректно, H_B как множество элементов совпадает W_2^1 . В силу: условия (3), леммы 3, леммы 1.1 [3] имеем

$$\begin{aligned} \|u\|_{H_A}^2 &= \|u\|_{L_2(\Omega, p)}^2 + 2q_0 \|u\|_{N_{\alpha,1}(L_2)}^2 \geq p_0 \|u\|_{L_2}^2 + \frac{q_0}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^b |u(t)|^2 (b-t)^{-\alpha} dt \geq \\ &\geq p_0 \|u\|_{L_2}^2 + \frac{q_0(b-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \|u\|_{L_2}^2 = \|u\|_{H_B}^2. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Теорема 1. Пространство $N_{\alpha,1}(L_2)$ вполне непрерывно вложено в L_2 .

Доказательство. Покажем, что множество ограниченное по норме пространства $N_{\alpha,1}(L_2)$ является компактным в L_2 . Используя свойство квадрата суммы получим

$$\begin{aligned} \int_a^b |I_{ab}^{\alpha/2} \psi|^2 dx &= \Gamma^{-2}(\alpha/2) \int_a^b \left| \int_a^b \psi(t) |x-t|^{-1+\alpha/2} dt \right|^2 dx = \int_a^b |I_{a+}^{\alpha/2} \psi + I_{b-}^{\alpha/2} \psi|^2 dx = \\ &= \int_a^b |I_{a+}^{\alpha/2} \psi|^2 dx + 2 \int_a^b I_{a+}^{\alpha/2} \psi I_{b-}^{\alpha/2} \psi dx + \int_a^b |I_{b-}^{\alpha/2} \psi|^2 dx. \end{aligned}$$

Из формулы (2.20) [4, с.42], с учетом положительности оператора дробного интегрирования (см. [9]) следует

$$\int_a^b I_{a+}^{\alpha/2} \psi I_{b-}^{\alpha/2} \psi dx = \int_a^b \psi I_{a+}^{\alpha} \psi dx \geq 0,$$

Используя разложение в ряд Фурье (см. рассуждения в ходе доказательства теоремы 1 [5]), имеем

$$(I_{ab}^{\alpha/2} \psi)(x) = \Gamma^{-1}(\alpha/2) \psi(x) * x^{\alpha/2-1} \square \Gamma^{-1}(\alpha/2) \mu \sum_{-\infty}^{\infty} a_n^{(\alpha/2)} c_n e^{\frac{2\pi ni}{b-a} x}, \psi(x) \square c_n, x^{\alpha/2-1} \square a_n^{(\alpha/2)}, \mu = \frac{b-a}{2}.$$

Следовательно

$$\begin{aligned} \int_a^b |I_{a+}^{\alpha/2} \psi|^2 dx + 2 \int_a^b I_{a+}^{\alpha/2} \psi I_{b-}^{\alpha/2} \psi dx + \int_a^b |I_{b-}^{\alpha/2} \psi|^2 dx &= \Gamma^{-2}(\alpha/2) \mu^2 \sum_{-\infty}^{\infty} |a_n^{(\alpha/2)} c_n|^2 = \\ &= v^2 \left\{ \frac{a_0^{(\alpha/2)2}}{2} a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(\alpha/2)2} (a_n^2 + b_n^2) \right\}, \quad v = (b-a) \Gamma^{-1}(\alpha) / 2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Так как в силу теоремы 2.22 [10, с.305], для коэффициентов Фурье ядра: $x^{\alpha-1}$ имеет место асимптотическое равенство

$$a_n^{(\alpha)} \square n^{-\alpha} \Gamma(\alpha) \sin \pi(1-\alpha) / 2, \quad n \rightarrow \infty,$$

то существует константы: $C_i > 0, (i=1,2,3)$ такие, что

$$\int_a^b |I_{a+}^{\alpha/2} \psi|^2 dx \leq C_1 \left\{ \frac{a_0^{(\alpha/2)2}}{2} a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(\alpha/2)2} (a_n^2 + b_n^2) \right\} \leq C_2 \left\{ \frac{a_0^{(\alpha)}}{2} a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(\alpha)} (a_n^2 + b_n^2) \right\} = C_3 \langle \psi, I_{a+}^{\alpha} \psi \rangle_{L_2},$$

или

$$\|I_{a+}^{\alpha/2} \psi\|_{L_2} \leq C \|I_{a+}^{\alpha} \psi\|_{N_{\alpha,1}(L_2)}, \quad C = const.$$



Следовательно из ограниченности множества: $I_{a+}^{\alpha}(\Psi)$, $\Psi \subset L_2$ в пространстве $N_{\alpha,1}(L_2)$ следует ограниченность множества: $I_{a+}^{\alpha/2}(\Psi)$ в пространстве L_2 . Поскольку оператор дробного интегрирования можно определить следующим образом

$$I_{a+}^{\alpha/2} u = \Gamma^{-1}(\alpha) \int_a^b K(x,t) u(t) dt, \quad K(x,t) \in L_2(\Omega \times \Omega), \quad K(x,t) = \begin{cases} (x-t)^{\alpha/2-1}, & 0 < t < x, \\ 0, & x \leq t < b. \end{cases}$$

то он вполне непрерывно действует в L_2 , (доказательство этого факта можно найти к примеру в [11, с.262]), а значит переводит всякое ограниченное множество в пространстве L_2 , в компактное множество пространства L_2 . В силу закона композиции оператора Римана-Лиувилля с одинаковыми начальными, имеем

$$I_{a+}^{\alpha} \Psi = (I_{a+}^{\alpha/2} \circ I_{a+}^{\alpha/2})(\Psi), \quad \Psi \in \Psi.$$

Из чего следует компактность множества $I_{a+}^{\alpha}(\Psi)$ в пространстве L_2 . Таким образом мы показали, что всякое ограниченное множество в пространстве $N_{\alpha,1}(L_2)$, является компактным в пространстве L_2 . Теорема доказана.

Основная теорема

Теорема 2. Для собственных значений оператора задачи (1) имеет место оценка

$$\lambda_n \geq \frac{p_0 \pi^2}{(b-a)^2} n^2 + \frac{q_0 (b-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (20)$$

Доказательство. В силу лемм: 1,2,4 для операторов A и B выполнены условия 1,2 в определении отношения частичного порядка на множестве положительно определенных операторов [1, с. 111]. В силу теоремы 1 ограниченное множество в пространстве $N_{\alpha,1}(L_2)$, является компактным в пространстве L_2 . Доказательство полной непрерывности вложения пространства H_B в L_2 можно найти в [1, с.102]. Таким образом операторы A и B переводят ограниченное множество энергетического пространства в компактное множество исходного пространства. Следовательно выполнены условия теоремы 5.10.1 [1, с.111], значит

$$\lambda_n \geq \mu_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

Согласно [1, с.113], имеем

$$\mu_n = \frac{p_0 \pi^2}{(b-a)^2} n^2 + \frac{q_0 (b-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)},$$

из чего и следует оценка (20).

Теорема доказана.

Автор выражает благодарность за ряд ценных замечаний и предложений академику Шкаликову Андрею Андреевичу и профессору Ляхову Льву Николаевичу.

Список литературы

References

1. Михлин С.Г. 1977. Линейные уравнения в частных производных. М., "Высшая школа" :431 .
Mikhlin S.G. Linear partial differential equations // М.: Higher School, 1977. -431 pp.
2. Нахушев А. М. 1977. Задача Штурма - Лиувилля для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с дробными производными в младших членах. Доклады Академии наук СССР. №2, Т. 234: 308-311.
Nahushev A.M. Task of Sturm - Liouville for an ordinary differential equation of the second order with fractional derivatives in junior members// Reports of the Academy of Sciences of the USSR. 1977. №2, Volume 234: 308-311 pp.
3. Кукушкин М.В. 2016. О весовых пространствах дробно дифференцируемых функций. Научные ведомости БелГУ, Математика. Физика. № 6 (227), выпуск 42: 60-70.
Kukushkin M.V. About the weighted spaces of fractionally differentiable functions.// Belgorod state university scientific bulletin. Mathematics & Physics. 2016. №6(227),42. 60-70 pp.

4. Самко С.Г. Килбас А.А. Маричев О.И. 1987. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск "Наука и техника" : 688.
Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. Integrals and derivatives of fractional order, and some applications. Minsk "Science and Technology" 1987. -688 pp.
5. Кукушкин М.В. 2016. Теорема о полноте пространства дробно-дифференцируемых функций. Научные ведомости БелГУ, Математика. Физика. №13, выпуск 43: 53-59.
Kukushkin M.V. Theorem on the completeness of the space of fractionally differentiable functions.// Belgorod state university scientific bulletin. Mathematics & Physics. 2016. №13, (43). 53-59 pp.
6. Ректорнс К. 1985. Вариационные методы в математической физике и технике. Москва «Мир»: 589 .
Rektorns K. Variational methods in mathematical physics and engineering. M.: Mir, 1985.-589 pp.
7. Харди Г.Х. Рогозинский В.В. 1962.Ряды Фурье.М.:Физматгиз :156.
Hardy G.H., Rogosinski W.W. Fourier Series. Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics. No.38, 1956.-156 pp.
8. Морен К.1965. Методы гильбертова пространства. М.: Мир: 570.
Moren K. Hilbert space methods. M.: Mir, 1965.-570 pp.
9. Нахушев А.М. 1998. О положительности операторов непрерывного и дискретного дифференцирования и интегрирования, весьма важных в дробном исчислении и в теории уравнений смешанного типа. Дифференциальные уравнения . Т. 34, № 1: 101-109.
Nahushev A.M. About positive of operators of continuous and discrete differentiation and integration, are very important in fractional calculus and theory of equations of mixed type.// Differential equations. 1998. №1, Volume 34: 101-109 pp.
10. Зигмунд А. 1965.Тригонометрические ряды. Том 1. М.: Мир: 616 .
Zygmund A. Trigonometric Series volume I. Cambridge at the university press, 1959.-616 pp.
11. Соболев В.И. 1968. Лекции по дополнительным главам математического анализа. Наука. «Физматлит»:288 .
Sobolev V.I. Lectures on the additional chapters of mathematical analysis. The science: " Fizmatlit ", 1968.-288 pp.
12. Смирнов В.И.1974.Курс высшей математики. Т. 4, ч.1.Москва: «Физматлит» :336.
Smirnov V.I. Course of higher mathematics. Volume 4, part 1. M.: "Fizmatlit",1974.-336 pp.



УДК 514.76

ПОЧТИ КОНТАКТНЫЕ МЕТРИЧЕСКИЕ МНОГООБРАЗИЯ С РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ НУЛЕВОЙ КРИВИЗНЫ

ALMOST CONTACT METRIC MANIFOLDS WITH DISTRIBUTION OF ZERO CURVATURE

С.В. Галаев
S.V. Galaev

*Саратовский национальный исследовательский государственный университет
имени Н.Г. Чернышевского,
Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, 83*

Saratov State University, Russia, 410012, Saratov, Astrahanskaya st., 83

E-mail: sgalaev@mail.ru;

Аннотация. В настоящей статье тензор Схоутена на многообразии с почти контактной метрической структурой определяется двумя способами: как тензор кривизны внутренней связности и как трансверсальная часть тензора кривизны ассоциированной связности. Тензор кривизны Схоутена получает название тензора кривизны распределения почти контактного метрического многообразия. Изучаются свойства тензора кривизны распределения, доказываемся, в частности, что тензор кривизны распределения почти контактного метрического многообразия равен нулю тогда и только тогда, когда на многообразии M существует атлас адаптированных карт, в котором коэффициенты внутренней связности равны нулю. В случае обращения в нуль тензора Схоутена, распределение почти контактной метрической структуры названо в работе распределением нулевой кривизны. Показано, что всякое контактное метрическое пространство с распределением нулевой кривизны является K -контактным метрическим пространством, а всякое сасакиево многообразие с распределением нулевой кривизны - η -Эйнштейновым многообразием.

Resume. In the present paper, the Schouten tensor on a manifold with an almost contact metric structure is defined in two ways: as the curvature tensor of the interior connection and as the transversal component of the curvature tensor of the associated connection. The Schouten curvature tensor obtains the name of the curvature tensor of the distribution of an almost contact metric manifold. The properties of the curvature tensor of the distribution are studied, in particular, it is shown that the curvature tensor of an almost contact metric manifold equals zero if and only if on the manifold M there exists an atlas of adapted charts with respect to that the Christoffel symbols of the interior connection equal zero. In the case, when the Schouten tensor is zero, the distribution of the almost contact metric structure is called in this paper the distribution of zero curvature. It is shown that each contact metric space with distribution of zero curvature is a K -contact metric space, and each Sasaki manifold of zero curvature is an η -Einstein manifold.

Ключевые слова: многообразия Сасаки, внутренняя связность, ассоциированная связность, тензор кривизны Схоутена, распределение нулевой кривизны.

Key words: Sasaki manifold, interior connection, associated connection, Schoten curvature tensor, distribution of zero curvature.

Введение

Понятие тензора кривизны оснащенного неголономного многообразия введено Схоутеном и ван Кампеном [2]. Впоследствии, заданный Схоутеном и ван Кампеном тензор был назван В.В. Вагнером тензором Схоутена [5]. Существуют два основных способа введения тензора Схоутена в геометрию почти контактных метрических многообразий. Тензор Схоутена может быть определен как тензор кривизны внутренней связности (связности в неголономном многообразии) [2], [5-7]. Альтернативным способом задания тензора Схоутена является выделение трансверсальной составляющей у тензора кривизны некоторой связности (отличной от связности Леви-Чивита), возникающей на многообразии с почти контактной метрической структурой. При этом термин «тензор Схоутена» не употребляется [1], [3].



В настоящей работе тензор Схоутена мы называем тензором кривизны распределения D многообразия M с почти контактной метрической структурой $(M, \bar{\xi}, \eta, \varphi, g, D)$. Существуют и другие способы определения тензора кривизны распределения почти контактного метрического многообразия. В [10] под тензором кривизны распределения понимается тензор кривизны некоторой связности в векторном расслоении (M, π, D) . В работе [5] Вагнер вводит понятие тензора кривизны (тензора кривизны Вагнера) оснащенного неголономного многообразия коразмерности 1. В случае контактного метрического многообразия тензор кривизны Вагнера также может быть описан как тензор кривизны связности (отличной от связности, изучаемой в работе [10]) в векторном расслоении (M, π, D) . Задание связности Вагнера сводится к продолжению внутренней связности до связности (N -продолженной связности) в векторном расслоении с помощью эндоморфизма $N : D \rightarrow D$, имеющего специальное строение.

Предлагаемая работа устроена следующим образом. Во втором разделе на почти контактном метрическом многообразии M вводится понятие внутренней связности, определяется тензор кривизны Схоутена и изучаются его свойства. В третьем разделе доказываются основные результаты работы. В частности, показывается, что контактное метрическое многообразие с распределением нулевой кривизны является K -контактным многообразием. Доказывается, также, что сасаки-ево многообразие с распределением нулевой кривизны является η -Эйнштейновым многообразием.

Тензор кривизны Схоутена и его свойства

Пусть M – гладкое многообразие нечетной размерности $n=2m+1$, $\Gamma(TM)$ – модуль гладких векторных полей на M . Все многообразия, тензорные поля и другие геометрические объекты предполагаются гладкими класса C^∞ . Предположим, что на M задана почти контактная метрическая структура $(M, \bar{\xi}, \eta, \varphi, g, D)$, где φ – тензор типа (1,1), называемый структурным эндоморфизмом или допустимой почти комплексной структурой, $\bar{\xi}$ и η – вектор и ковектор, называемые, соответственно, структурным вектором и контактной формой, g – (псевдо) риманова метрика. При этом выполняются следующие условия:

$$1) \varphi^2 = -I + \eta \otimes \bar{\xi}, \quad 2) \eta(\bar{\xi}) = 1, \quad 3) g(\varphi\bar{x}, \varphi\bar{y}) = g(\bar{x}, \bar{y}) - \eta(\bar{x})\eta(\bar{y}), \quad 4) d\eta(\bar{\xi}, \bar{x}) = 0,$$

где $\bar{x}, \bar{y} \in \Gamma(TM)$.

Гладкое распределение $D = \ker \eta$ называется распределением почти контактной структуры.

В качестве следствия условий 1) – 4) получаем:

$$5) \varphi\bar{\xi} = \bar{0}, \quad 6) \eta \circ \varphi = 0, \quad 7) \eta(\bar{x}) = g(\bar{x}, \bar{\xi}), \quad \bar{x} \in \Gamma(TM).$$

Если $rk \omega = 2m$, где $\omega = d\eta$, вектор $\bar{\xi}$ однозначно определяется из условий $\eta(\bar{\xi}) = 1$, $\ker \omega = \text{Span}(\bar{\xi})$.

Кососимметрический тензор $\Omega(\bar{x}, \bar{y}) = g(\bar{x}, \varphi\bar{y})$ называется фундаментальной формой структуры. Почти контактная метрическая структура называется контактной метрической структурой, если выполняется равенство $\Omega = d\eta$. Гладкое распределение $D^\perp = \text{Span}(\bar{\xi})$, ортогональное распределению D , называется оснащением распределения D . Имеет место разложение $TM = D \oplus D^\perp$.

Многообразие Сасаки – контактное метрическое пространство, удовлетворяющее дополнительно условию $N_\varphi + 2d\eta \otimes \bar{\xi} = 0$, где $N_\varphi(\bar{x}, \bar{y}) = [\varphi\bar{x}, \varphi\bar{y}] + \varphi^2[\bar{x}, \bar{y}] - \varphi[\varphi\bar{x}, \bar{y}] - \varphi[\bar{x}, \varphi\bar{y}]$ – тензор

Нейенхейса эндоморфизма φ . Выполнение условия $N_\varphi + 2d\eta \otimes \bar{\xi} = 0$ означает, что пространство Сасаки является нормальным пространством.



Карту $K(x^\alpha)$ ($\alpha, \beta, \gamma = 1, \dots, n$; $a, b, c = 1, \dots, n-1$) многообразия M будем называть адаптированной к распределению D , если $\partial_n = \bar{\xi}$ [2]. Пусть $P: TM \rightarrow D$ – проектор, определяемый разложением $TM = D \oplus D^\perp$, и $K(x^\alpha)$ – адаптированная карта. Векторные поля $P(\partial_a) = \bar{e}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n$ линейно независимы и в области определения соответствующей карты порождают распределение D : $D = \text{Span}(\bar{e}_a)$. Таким образом, мы имеем на многообразии M неголономное поле базисов $(\bar{e}_\alpha) = (\bar{e}_a, \partial_n)$ и соответствующее ему поле кобазисов $(dx^a, \eta = \theta^n = dx^n + \Gamma_a^n dx^a)$. Непосредственно проверяется, что $[\bar{e}_a, \bar{e}_b] = 2\omega_{ba} \partial_n$. Адаптированным будем называть также базис $\bar{e}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n$, как базис, определяемый адаптированной картой. Имеет место равенство $\partial_n \Gamma_a^n = 0$.

Пусть $K(x^\alpha)$ и $K'(x^{\alpha'})$ – адаптированные карты, тогда получаем следующие формулы преобразования координат:

$$x^a = x^a(x^{a'}), \quad x^n = x^{n'} + x^n(x^{a'}).$$

Тензорное поле t типа (p, q) , заданное на почти контактном метрическом многообразии, назовем допустимым (к распределению D), если t обращается в нуль каждый раз, когда среди его аргументов встречаются $\bar{\xi}$ или η . Координатное представление допустимого тензорного поля в адаптированной карте имеет вид:

$$t = t_{b_1 \dots b_q}^{a_1 \dots a_p} \bar{e}_{a_1} \otimes \dots \otimes \bar{e}_{a_p} \otimes dx^{b_1} \otimes \dots \otimes dx^{b_q}.$$

Преобразование компонент допустимого тензорного поля в адаптированных координатах подчиняется следующему закону:

$$t_b^a = A_a^a A_b^{b'} t_{b'}^{a'}, \quad \text{где } A_a^{a'} = \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^a}.$$

Из формул преобразования компонент допустимого тензорного поля следует, что производные $\partial_n t_b^a$ компонент допустимого тензорного поля являются компонентами допустимого тензорного поля того же типа. Заметим, что обращение в нуль производных $\partial_n t_b^a$ не зависит от выбора адаптированных координат.

Внутренней линейной связностью ∇ [8] на многообразии с почти контактной метрической структурой называется отображение

$$\nabla: \Gamma(D) \times \Gamma(D) \rightarrow \Gamma(D),$$

удовлетворяющее следующим условиям:

- 1) $\nabla_{f_1 \bar{x} + f_2 \bar{y}} = f_1 \nabla_{\bar{x}} + f_2 \nabla_{\bar{y}}$;
- 2) $\nabla_{\bar{x}} f \bar{y} = (\bar{x}f) \bar{y} + f \nabla_{\bar{x}} \bar{y}$.
- 3) $\nabla_{\bar{x}} (\bar{y} + \bar{z}) = \nabla_{\bar{x}} \bar{y} + \nabla_{\bar{x}} \bar{z}$,

где $\Gamma(D)$ – модуль допустимых векторных полей (векторных полей, в каждой точке принадлежащих распределению D).

Внутренняя связность определяет дифференцирования допустимых тензорных полей. Так, например, для допустимой почти комплексной структуры выполняется равенство $(\nabla_{\bar{x}} \varphi) \bar{y} = \nabla_{\bar{x}} (\varphi \bar{y}) - \varphi (\nabla_{\bar{x}} \bar{y})$, $\bar{x}, \bar{y} \in \Gamma(D)$.

Коэффициенты внутренней линейной связности определяются из соотношения $\nabla_{\bar{e}_a} \bar{e}_b = \Gamma_{ab}^c \bar{e}_c$. Из равенства $\bar{e}_a = A_a^{a'} \bar{e}_{a'}$, где $A_a^{a'} = \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^a}$, обычным образом следует формула преобразования для коэффициентов внутренней связности:



$$\Gamma_{ab}^c = A_a^{a'} A_b^{b'} A_c^{c'} \Gamma_{a'b'}^{c'} + A_c^c \bar{e}_a A_b^{c'}.$$

Кручением внутренней связности назовем допустимое тензорное поле

$$S(\bar{x}, \bar{y}) = \nabla_{\bar{x}} \bar{y} - \nabla_{\bar{y}} \bar{x} - P[\bar{x}, \bar{y}], \quad \bar{x}, \bar{y} \in \Gamma(D).$$

Внутреннюю связность будем называть симметричной, если ее кручение равно нулю. В случае симметричности внутренней связности в адаптированных координатах получаем:

$$S_{ab}^c = \Gamma_{ab}^c - \Gamma_{ba}^c = 0 \quad \text{или} \quad \Gamma_{ab}^c = \Gamma_{ba}^c.$$

Допустимое тензорное поле, определяемое равенством

$$R(\bar{x}, \bar{y}) \bar{z} = \nabla_{\bar{x}} \nabla_{\bar{y}} \bar{z} - \nabla_{\bar{y}} \nabla_{\bar{x}} \bar{z} - \nabla_{P[\bar{x}, \bar{y}]} \bar{z} - P[Q[\bar{x}, \bar{y}], \bar{z}],$$

где $Q = I - P$, названо Вагнером [5] тензором кривизны Схоутена. Тензор Схоутена будем называть тензором кривизны внутренней связности. Координатное представление тензора Схоутена в адаптированных координатах имеет вид: $R_{abc}^d = 2\bar{e}_{[a} \Gamma_{b]c}^d + 2\Gamma_{[a|e]}^d \Gamma_{b]c}^e$.

Тензор кривизны внутренней связности возникает в результате альтернирования вторых ковариантных производных:

$$2\nabla_{[a} \nabla_{b]} v^c = R_{abe}^c v^e + 4\omega_{ba} \partial_n v^c.$$

Назовем тензор кривизны внутренней связности тензором кривизны распределения D , а распределение D , в случае обращения в нуль тензора Схоутена, - распределением нулевой кривизны.

Аналогом связности Леви-Чивита является внутренняя симметричная связность ∇ такая, что $\nabla g = 0$, где g - допустимое тензорное поле, определяемое метрическим тензором исходной почти контактной метрической структуры. Назовем связность ∇ внутренней метрической связностью. Известно [5], что внутренняя симметричная метрическая связность существует и определена единственным образом. Ее коэффициенты задаются равенствами

$$\Gamma_{bc}^a = \frac{1}{2} g^{ad} (\bar{e}_b g_{cd} + \bar{e}_c g_{bd} - \bar{e}_d g_{bc}). \tag{1}$$

Введем в рассмотрение допустимые тензорные поля, определяемые равенствами $h\bar{x} = \frac{1}{2} (L_{\bar{\xi}} \varphi)(\bar{x})$, $C(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{1}{2} (L_{\bar{\xi}} g)(\bar{x}, \bar{y})$, $g(C\bar{x}, \bar{y}) = C(\bar{x}, \bar{y})$, $\bar{x}, \bar{y} \in \Gamma(TM)$. В адаптированных координатах получаем:

$$h_b^a = \frac{1}{2} \partial_n \varphi_b^a, \quad C_{ab} = \frac{1}{2} \partial_n g_{ab}, \quad C_b^a = g^{da} C_{db}.$$

Будем использовать следующие обозначения для связности и коэффициентов связности Леви-Чивита тензора g : $\tilde{\nabla}$, $\tilde{\Gamma}_{\beta\gamma}^\alpha$. В результате непосредственных вычислений убеждаемся в справедливости следующей теоремы.

Теорема 1. Коэффициенты связности Леви-Чивита контактного метрического пространства в адаптированных координатах имеют вид:

$$\tilde{\Gamma}_{ab}^c = \Gamma_{ab}^c, \quad \tilde{\Gamma}_{ab}^n = \omega_{ba} - C_{ab}, \quad \tilde{\Gamma}_{an}^b = \tilde{\Gamma}_{na}^b = C_a^b - \varphi_a^b, \quad \tilde{\Gamma}_{n\alpha}^n = \Gamma_{nn}^\alpha = 0,$$

где $\Gamma_{bc}^a = \frac{1}{2} g^{ad} (\bar{e}_b g_{cd} + \bar{e}_c g_{bd} - \bar{e}_d g_{bc})$.

Пусть $K(\bar{x}, \bar{y}) \bar{z}$ - тензор кривизны связности Леви-Чивита контактного метрического пространства. Используя результаты теоремы 1, и проводя вычисления в адаптированных координатах, убеждаемся в справедливости следующей теоремы.

Теорема 2. Тензор кривизны $K(\bar{x}, \bar{y}) \bar{z}$ связности Леви-Чивита $\tilde{\nabla}$ связан с тензором кривизны Схоутена $R(\bar{x}, \bar{y}) \bar{z}$ следующим соотношением:



$$K(\bar{x}, \bar{y})\bar{z} = R(\bar{x}, \bar{y})\bar{z} + \eta(\bar{x})P(\bar{y}, \bar{z}) - \eta(\bar{y})P(\bar{x}, \bar{z}) + g(\bar{z}, \varphi\bar{x})\varphi\bar{y} - g(\bar{z}, \varphi\bar{y})\varphi\bar{x} - 2g(\bar{x}, \varphi\bar{y})\varphi\bar{z} + \eta(\bar{z})\eta(\bar{y})\bar{x} - \eta(\bar{z})\eta(\bar{x})\bar{y} + \eta(\bar{x})g(\bar{y}, \bar{z})\bar{\xi} - \eta(\bar{y})g(\bar{x}, \bar{z})\bar{\xi} \quad (2)$$

Здесь $P(\bar{x}, \bar{y})$ – допустимое тензорное поле с компонентами $P_{bc}^a = \partial_n \Gamma_{bc}^a$.

Прежде чем переходить к обсуждению свойств тензора Схоутена, введем понятия N -связности ∇^N [4], [9] и ассоциированной связности ∇^A , естественным образом связанных с данной внутренней связностью.

Пусть на многообразии M с почти контактной структурой и внутренней линейной связностью ∇ задан эндоморфизм $N : D \rightarrow D$.

N -связность ∇^N определим как единственную связность на многообразии M , удовлетворяющую следующим условиям:

$$1) \nabla_{\bar{x}}^N \bar{y} \in \Gamma(D), \quad (3)$$

$$2) \nabla_{\bar{x}}^N \bar{\xi} = \bar{0}, \quad (4)$$

$$3) \nabla_{\bar{x}}^N \bar{y} = [\bar{\xi}, \bar{y}] + N\bar{y}, \quad (5)$$

$$4) \nabla_{\bar{y}}^N \bar{z} = \nabla_{\bar{y}} \bar{z}, \quad (6)$$

$$\bar{x} \in \Gamma(TM), \quad \bar{y}, \bar{z} \in \Gamma(D).$$

Корректность определения N -связности связности подтверждается следующей теоремой.

Теорема 3. На почти контактном метрическом многообразии M с заданной на нем внутренней связностью ∇ и эндоморфизмом $N : D \rightarrow D$ существует и притом единственная связность $\nabla_{\bar{x}}^N$, удовлетворяющая условиям (3)-(6).

Доказательство.

1. Единственность. Предположим, что связность $\nabla_{\bar{x}}^N$, удовлетворяющая условиям (3)-(6), существует. Введем следующее обозначение для ее коэффициентов: $\Gamma_{\beta\gamma}^{N\alpha}$. Из выполнения условий (3)-(6) следует, что в адаптированных координатах отличными от нуля коэффициентами $\Gamma_{\beta\gamma}^{A\alpha}$ являются коэффициенты $\Gamma_{bc}^{Na} = \Gamma_{ab}^c$ и $\Gamma_{nc}^{Na} = N_c^a$.

2. Существование. Определяя в адаптированных координатах отличные от нуля коэффициенты $\Gamma_{\beta\gamma}^{N\alpha}$ с помощью равенств $\Gamma_{bc}^{Aa} = \Gamma_{ab}^c$, $\Gamma_{nc}^{Na} = N_c^a$ получаем искомую связность. Теорема доказана.

Кручение $S(\bar{x}, \bar{y})$ и кривизна $K(\bar{x}, \bar{y})\bar{z}$ N -связности определяются, соответственно, следующим образом:

$$S(\bar{x}, \bar{y}) = 2\omega(\bar{x}, \bar{y})\bar{\xi} + \eta(\bar{x})N\bar{y} - \eta(\bar{y})N\bar{x},$$

$$K(\bar{x}, \bar{y})\bar{z} = 2\omega(\bar{x}, \bar{y})N\bar{z} + R(\bar{x}, \bar{y})\bar{z} + \eta(\bar{x})\left(P(\bar{y}, \bar{z}) - \left(\nabla_{P\bar{y}}^N N\right)\bar{z}\right) - \eta(\bar{y})\left(P(\bar{x}, \bar{z}) - \left(\nabla_{P\bar{x}}^N N\right)\bar{z}\right),$$

$$\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in \Gamma(TM).$$

N -связность с нулевым эндоморфизмом N будем называть ассоциированной связностью с внутренней связностью ∇ и обозначать ∇^A . Для кривизны и кручения ассоциированной связности имеем следующие равенства:

$$S(\bar{x}, \bar{y}) = 2\omega(\bar{x}, \bar{y})\bar{\xi}, \tag{7}$$

$$K(\bar{x}, \bar{y})\bar{z} = R(\bar{x}, \bar{y})\bar{z} + \eta(\bar{x})P(\bar{y}, \bar{z}) - \eta(\bar{y})P(\bar{x}, \bar{z}), \tag{8}$$

$$\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in \Gamma(TM).$$

Таким образом, из равенства (8) следует, что

$$K(\bar{x}, \bar{y})\bar{z} = R(\bar{x}, \bar{y})\bar{z}, \text{ если } \bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in \Gamma(D). \tag{9}$$

Пусть $R(\bar{x}, \bar{y})\bar{z}$, $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in \Gamma(D)$ – тензор кривизны распределения почти контактной метрической структуры. Допустимое тензорное поле $R(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{u}) = g(R(\bar{x}, \bar{y})\bar{u}, \bar{z})$, $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{u} \in \Gamma(D)$, также будем называть тензором кривизны распределения почти контактной метрической структуры. Тензор кривизны Схоутена K -контактных пространств наделен теми же формальными свойствами, что и тензор кривизны риманова многообразия. В более общем случае препятствием к этому выступает наличие производных $\partial_n g_{bc}$ в равенстве $\nabla_{[e} \nabla_a] g_{bc} = 2\omega_{ea} \partial_n g_{bc} - g_{dc} R_{eab}^d - g_{bd} R_{eac}^d$. Тем не менее, имеет место

Теорема 4. Тензор $R(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{u})$ кривизны распределения почти контактной метрической структуры удовлетворяет следующим условиям:

$$R(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{u}) + R(\bar{y}, \bar{x}, \bar{z}, \bar{u}) = 0, \tag{10}$$

$$\Sigma(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \{R(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{u})\} = 0, \tag{11}$$

где $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{u} \in \Gamma(D)$.

Справедливость равенства (10) подтверждается известным свойством тензора кривизны произвольной связности и равенством (9).

Для доказательства (11) воспользуемся тождеством Бьянки, координатная запись которого имеет вид:

$$K_{[kjl]}^i = 2\nabla_{[k} S_{jl]}^i - 4S_{[kj}^h S_{l]h}^i. \tag{12}$$

Из (7) следует, что отличными от нуля компонентами тензора кручения ассоциированной связности являются

$$S_{ab}^n = 2\omega_{ab}. \tag{13}$$

Подставляя (13) в (12), получаем

$$K_{[cab]}^n = 4\nabla_{[c} \omega_{ab]}.$$

В адаптированных координатах компоненты $d\omega$ имеют вид:

$$d\omega_{abc} = \frac{1}{3}(\bar{e}_a \omega_{bc} + \bar{e}_b \omega_{ca} + \bar{e}_c \omega_{ab}), \quad d\omega_{nab} = \frac{1}{3} \partial_n \omega_{ab}.$$

Таким образом, учитывая симметричность внутренней связности, убеждаемся в том, что равенство $d\omega_{\alpha\beta\gamma} = 0$ влечет равенство $\nabla_{[c} \omega_{ab]} = 0$. Тем самым, теорема доказана.

Контактные метрические пространства с распределением нулевой кривизны

Пусть M - контактное метрическое многообразие.



Теорема 5. Контактное метрическое многообразие размерности с распределением нулевой кривизны является K -контактным пространством.

Доказательство. Пусть ∇ – внутренняя метрическая связность: $\bar{z}g(\bar{x}, \bar{y}) = g(\nabla_{\bar{z}}\bar{x}, \bar{y}) + g(\bar{x}, \nabla_{\bar{z}}\bar{y}) = 0$, $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in \Gamma(D)$. Дифференцируя последнее равенство повторно и альтернируя полученный результат, получаем: $2\omega_{ea}\partial_n g_{bc} - g_{dc}R_{eab}^d - g_{bd}R_{eac}^d = 0$. Учитывая невырожденность формы ω , заключаем, что равенство $R_{eac}^d = 0$ влечет равенство $\partial_n g_{bc} = 0$. Что и доказывает теорему.

В качестве следствия теоремы 5 с учетом равенства (1) получаем:

Теорема 6. Пусть M – многообразии, наделенное контактной метрической структурой, тогда обращение в нуль тензора кривизны Схоутена влечет равенство $P_{bc}^a = 0$.

Теорема 7. Пусть $(M, \bar{\xi}, \eta, \varphi)$ – почти контактная метрическая структура, заданная на многообразии M . Тогда, обращение в нуль тензора Схоутена эквивалентно существованию такого атласа, состоящего из адаптированных карт, для которого выполняются равенства $\Gamma_{bc}^a = 0$.

Доказательство. Достаточность утверждения непосредственно подтверждается координатным представлением тензора Схоутена в адаптированных координатах. Докажем необходимость. Обращение в нуль тензора Схоутена влечет независимость коэффициентов связности Γ_{bc}^a от последней координаты: $\partial_n \Gamma_{bc}^a = P_{bc}^a = 0$. Покажем, что на многообразии M можно построить атлас адаптированных карт, в которых коэффициенты связности равны нулю. Составим систему уравнений в полных дифференциалах

$$\partial_a f^{b'} = A_b^{b'}, \quad \partial_a A_b^{c'} = \Gamma_{ab}^c A_c^{c'}. \quad (14)$$

Условия интегрируемости полученной системы сводятся к следующим соотношениям:

$$S_{ab}^c A_c^{c'} = 0, \quad R_{abc}^d A_d^{d'} = 0,$$

которые выполняются тождественно. Следовательно, система (14) вполне интегрируема и имеет решение с произвольными начальными условиями, что и завершает доказательство теоремы. Пусть M – многообразии Сасаки. Многообразие M называется η -Эйнштейновым сасакиевым многообразием [10], если выполняется равенство

$$R_{ij_g} = \lambda g + \nu \eta \otimes \eta, \quad \lambda, \nu \in \mathbb{R}.$$

Здесь R_{ij_g} – тензор Риччи риманова многообразия M .

Теорема 8. Многообразие Сасаки с распределением нулевой кривизны является η -Эйнштейновым сасакиевым многообразием с $\lambda = -2$.

Доказательство теоремы сводится к вычислению компонент тензора Риччи в адаптированных координатах.

Начнем с тензора кривизны $K(\bar{x}, \bar{y})\bar{z}$. Подставляя в (2) векторы неголономного базиса $(\bar{e}_\alpha) = (\bar{e}_a, \partial_n)$ и используя результаты теоремы 1, получаем:

$$K_{abc}^d = \omega_{ca}\varphi_b^d - \omega_{cb}\varphi_a^d + 2\omega_{ba}\varphi_c^d,$$

$$K_{nbc}^n = g_{cb}.$$

Далее, получаем:

$$K_{\alpha cb}^\alpha = -3g_{cb} + g_{cb} = -2g_{cb}.$$

Аналогично, $K_{\alpha bn}^\alpha = 0$ и $K_{\alpha nn}^\alpha = 2m$, что и доказывает теорему.

Список литературы
References

1. Boyer C.P., Galicki K., Matzeu P. 2006. On eta-Einstein Sasakian geometry. *Comm. Math. Phys.* 262 (1): 177-208.
2. Schouten J., van Kampen E. 1930. Zur Einbettungs-und Krümmungstheorie nichtholonomer Gebilde. *Math. Ann.* 103: 752–783.
3. Vezzoni L. 2010. Connections on contact manifolds and contact twistor spaces. *Israel J. Math.* 178: 253-267.
4. Букушева А.В. 2015. О геометрии контактных метрических пространств с ϕ -связностью. *Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика.* 17(214), 40.: 20-24.
Bukusheva A.V. 2015. The geometry of the contact metric spaces ϕ -connection. *Belgorod state university scientific bulletin. Mathematics & Physics.* 17(214), 40: 20-24. (in Russian)
5. Вагнер В.В. 1941. Геометрия $(n-1)$ -мерного неголономного многообразия в n -мерном пространстве. Тр. семинара по векторному и тензорному анализу. М.: Изд-во Моск. ун-та. 5: 173-255.
Wagner V.V. 1941. Geometry of $(n - 1)$ -dimensional nonholonomic manifold in an n -dimensional space. *Trudy Sem. Vektor. Tenzor. Analiza, Moscow, Moscow Univ. Press.* 5.: 173-255. (in Russian)
6. Галаев С.В. 2014. Почти контактные кэлеровы многообразия постоянной голоморфной секционной кривизны. *Изв. вузов. Матем.* 8: 42 - 52.
Galaev S.V. 2014. Almost contact Kählerian manifolds of constant holomorphic sectional curvature. *Russian Math.* 58(8): 35-42.
7. Галаев С.В. 2016. Геометрическая интерпретация тензора кривизны Вагнера для случая многообразия с контактной метрической структурой. *Сибирский математический журнал.* 57(3): 632-640.
Galaev S.V. 2016. Geometric interpretation of the Wagner curvature tensor in the case of a manifold with contact metric structure. *Siberian Mathematical Journal.* 57(3): 498–504.
8. Галаев С.В. 2012. Внутренняя геометрия метрических почти контактных многообразий. *Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика.* 12(1): 16-22.
Galaev S.V. 2012. The intrinsic geometry of almost contact metric manifolds. *Izv. Saratov. Univ. (N.S.) Ser. Mat. Mekh. Inform.* 12(1): 16-22. (in Russian)
9. Галаев С.В. 2015. Почти контактные метрические пространства с N -связностью. *Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика.* 15(3): 258–264.
Galaev S.V. 2015. Almost Contact Metric Spaces with N -connection. *Izv. Saratov. Univ. (N.S.) Ser. Mat. Mekh. Inform.* 15(3): 258–264. (in Russian)
10. Соловьев А.Ф. 1987. Контактные метрические многообразия и классы Чжэня. *Изв. вузов. Матем.* 1: 33 - 41.
Soloviev A.F. 1987. Contact metric manifolds and Zhen classes. *Soviet Mathematics.* 31:1: 43–53.



УДК 514.742.43

ОПЕРАТОРЫ ТИПА НАБЛА: ПОВЕРХНОСТНЫЙ, НУЛЕВОЙ И МНИМЫЙ НУЛЕВОЙ

OPERATORS TYPE OF NABLA: SURFACE, ZERO AND ZERO IMAGINARY

И.П. Попов
I.P. Popov

Курганский государственный университет, Россия, 640669, г. Курган, ул. Гоголя д.25

Kurgan state university, 25 Gogol St, Kurgan, 640669, Russia

E-mail: ip.popov@yandex.ru;

Аннотация. Вводится понятие о слагаемых векторных произведениях, которыми являются первая или ортоположительная часть и вторая или ортоотрицательная часть; дальнейшим развитием этого понятия является представление о сопряженных векторах, векторном дифференциальном поверхностном операторе, поверхностном градиенте, производной по поверхности, поверхностных дивергенции и роторе. Рассматриваются поверхностные функции, их поверхностное дифференцирование и интегрирование. Показаны особенности поверхностных функций, для которых все слагаемые являются функциями не менее чем двух переменных, кроме того, поверхностные функции имеют смешанные частные производные второго порядка, при этом, по крайней мере, одна из смешанных частных производных второго порядка от любого слагаемого не обращается в нуль. Доказывается теорема о восстановлении поверхностной функции по ее поверхностному градиенту. Вводится понятие о линейной комбинации координат и ее делении на вектор, нулевым и мнимым нулевым векторных операторах, псевдовекторах и комбинированных векторах. Приведен ряд разложений с использованием введенных операций.

Resume. We introduce the notion of the terms of vector products, which are the first or ortopolozhitelnaya part and the second part or ortootritsatelnaya; further development of this concept is the notion of conjugate vectors, vector differential operator of the surface, the surface gradient, the derivative on the surface, the surface divergence and rotor. Treated surface functions, their surface differentiation and integration. The features of surface functions for which all terms are functions of at least two variables, in addition, surface features have mixed partial derivatives of the second order, with at least one of the mixed partial derivatives of second order of any term does not vanish. We prove a theorem on the restoration of surface features on its surface gradient. We introduce the notion of a linear combination of coordinates and its division by a vector zero and zero imaginary vector operators, pseudo and combined vectors. Is a series of expansions using these operations.

Ключевые слова: слагаемые векторных произведений, сопряженный вектор, векторный дифференциальный поверхностный оператор.

Key words: : items of vector products, conjugate vector, vector differential surface operator.

Введение

Работа посвящена рассмотрению ряда операций на пространстве гладких функций и векторных полей в \mathbb{R}^3 . В качестве исходного пункта могут выступать нулевые величины. Их можно условно разделить на две категории. К первой категории относятся величины, содержимое которых "пусто". Ко второй – состоящие из величин, сумма которых равна нулю. К последней категории относится векторное произведение оператора Гамильтона (набла) на самого себя. При этом использование взаимно противоположных компонентов этого произведения создает определенные перспективы, в частности, развития элементов *поверхностного векторного анализа*. К таким элементам могут быть отнесены векторный дифференциальный поверхностный оператор, поверхностный градиент, производная по произвольной поверхности, поверхностные дивергенция и ротор, являющиеся аналогами соответствующих величин первого порядка [1; 2]. Названные операции относятся к поверхностному дифференцированию, которое можно рассматривать в качестве обратной задачи к поверхностному интегрированию. Перечисленные операции могут использоваться для получения разложений ряда векторных представлений второго порядка, часть которых имеет аналоги первого порядка. В ряде случаев для этого придется прибегнуть к специальным методам, таким, как сопряжение векторов, использование линейной комбинации координат, ее де-



ление на вектор, введение нулевого и мнимого нулевого векторных операторов, псевдовекторов и комбинированных векторов.

1. Слагаемые векторных произведений

Для векторов \mathbf{G} и \mathbf{H} имеет место операция векторного произведения

$$\mathbf{G} \times \mathbf{H} = (G_y H_z - G_z H_y) \mathbf{i} + (G_z H_x - G_x H_z) \mathbf{j} + (G_x H_y - G_y H_x) \mathbf{k}.$$

Его можно представить в виде:

$$\mathbf{G} \times \mathbf{H} = (G_y H_z \mathbf{i} + G_z H_x \mathbf{j} + G_x H_y \mathbf{k}) - (G_z H_y \mathbf{i} + G_x H_z \mathbf{j} + G_y H_x \mathbf{k}).$$

Определение 1.1. Операция $\mathbf{G} \times_1 \mathbf{H} := G_y H_z \mathbf{i} + G_z H_x \mathbf{j} + G_x H_y \mathbf{k}$

называется *первой или ортоположительной частью векторного произведения* $\mathbf{G} \times \mathbf{H}$ векторных полей $\mathbf{G} = G_x \mathbf{i} + G_y \mathbf{j} + G_z \mathbf{k}$ и $\mathbf{H} = H_x \mathbf{i} + H_y \mathbf{j} + H_z \mathbf{k}$.

Определение 1.2. Операция $\mathbf{G} \times_{II} \mathbf{H} := \mathbf{H} \times_1 \mathbf{G} = G_z H_y \mathbf{i} + G_x H_z \mathbf{j} + G_y H_x \mathbf{k}$

называется *второй или ортоотрицательной частью векторного произведения*.

Очевидно, что $\mathbf{G} \times \mathbf{H} = \mathbf{G} \times_1 \mathbf{H} - \mathbf{H} \times_1 \mathbf{G} = \mathbf{G} \times_1 \mathbf{H} - \mathbf{G} \times_{II} \mathbf{H}$.

Все вышесказанное справедливо и для ротора.

Определение 1.3. Операция $\text{rot}_I \mathbf{M} := \nabla \times_1 \mathbf{M} = \frac{\partial M_z}{\partial y} \mathbf{i} + \frac{\partial M_x}{\partial z} \mathbf{j} + \frac{\partial M_y}{\partial x} \mathbf{k}$

называется *первой или ортоположительной частью ротора* $\text{rot} \mathbf{M}$ векторного поля $\mathbf{M} = M_x \mathbf{i} + M_y \mathbf{j} + M_z \mathbf{k}$.

Определение 1.4. Операция $\text{rot}_{II} \mathbf{M} := \nabla \times_{II} \mathbf{M} = \frac{\partial M_y}{\partial z} \mathbf{i} + \frac{\partial M_z}{\partial x} \mathbf{j} + \frac{\partial M_x}{\partial y} \mathbf{k}$

называется *второй или ортоотрицательной частью ротора* $\text{rot} \mathbf{M}$.

Очевидно, что $\text{rot} \mathbf{M} = \text{rot}_I \mathbf{M} - \text{rot}_{II} \mathbf{M}$ или $\nabla \times \mathbf{M} = \nabla \times_1 \mathbf{M} - \nabla \times_{II} \mathbf{M}$.

2. Сопряженные векторы

Определение 2.1. Операция $\mathbf{G} \times^* \mathbf{H} := \mathbf{G} \times_1 \mathbf{H} - \mathbf{H} \times_1 \mathbf{G} = \mathbf{G} \times_1 \mathbf{H} + \mathbf{G} \times_{II} \mathbf{H}$

называется *сопряженным векторным произведением* векторных полей \mathbf{G} и \mathbf{H} .

Определение 2.2. Операция $\text{rot}^* \mathbf{M} := \text{rot}_I \mathbf{M} + \text{rot}_{II} \mathbf{M}$ или $\nabla \times^* \mathbf{M} = \nabla \times_1 \mathbf{M} + \nabla \times_{II} \mathbf{M}$

называется *сопряженным ротором* векторного поля \mathbf{M} .

Определение 2.3. Оператор $\nabla_s := \nabla \times_1 \nabla = \nabla \times_{II} \nabla = \frac{\nabla \times^* \nabla}{2} = \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \mathbf{i} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \mathbf{j} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \mathbf{k}$

называется *векторным дифференциальным поверхностным оператором*.

3. Поверхностный градиент и производная по поверхности

Определение 3.1. Вектор

$$\text{grad}_s W := \nabla_s W = \frac{\partial^2 W}{\partial y \partial z} \mathbf{i} + \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial z} \mathbf{j} + \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \mathbf{k} \quad (3.1)$$

называется *поверхностным градиентом* функции W .

По аналогии с производной по направлению вычисляется *производная по поверхности*

$$\frac{d_s^2 W}{d\sigma} := (\text{grad}_s W) \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial^2 W}{\partial y \partial z} \cos \varphi + \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial z} \cos \psi + \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \cos \theta. \quad (3.2)$$

Здесь $\mathbf{n} = \mathbf{i} \cos \varphi + \mathbf{j} \cos \psi + \mathbf{k} \cos \theta$ – поле единичных нормалей поверхности дифференцирования.

Теорема 3.1. Производная функции $W(x, y, z)$ (скалярного поля) по некоторой поверхности равна проекции поверхностного градиента на единичный вектор нормали к этой поверхности (в соответствующей точке).

$$\frac{d_s^2 W}{d\sigma} = |\text{grad}_s W| \cos(\text{grad}_s W, \mathbf{n}).$$



Справедливость этой теоремы непосредственно вытекает из (3.2).

Следствие. Поверхностный градиент скалярного поля равен по величине производной поля по поверхности, для которой эта производная (в соответствующей точке) является максимальной, и совпадает по направлению с единичным вектором нормали к этой поверхности.

$$\max \left(\frac{d_s^2 W}{d\sigma} \right) = |\text{grad}_s W| = \sqrt{\left(\frac{\partial^2 W}{\partial y \partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)^2}.$$

Определение 3.2. Функция $U(x, y, z)$, для каждого приведенного слагаемого которой найдется смешанная частная производная второго порядка, не являющаяся тождественно нулевой функцией, называется *поверхностной*.

Число слагаемых поверхностной функции не ограничено.

Теорема 3.2. Поверхностная функция $U(x, y, z)$ может быть восстановлена по ее поверхностному градиенту \mathbf{G} в соответствии с формулой:

$$U = \iint G_x dydz + \iint G_y dx dz + \iint G_z dx dy - 2V = \\ = P_1(x, y, z) + P_2(y, z) + Q_1(x, y, z) + Q_2(x, z) + R_1(x, y, z) + R_2(x, y) - 2V.$$

При этом $V = P_1 = Q_1 = R_1$, а интегралы понимаются как повторные неопределенные с нулевыми аддитивными составляющими.

Доказательство

$$\frac{\partial G_x}{\partial x} = \frac{\partial^3 U}{\partial x \partial y \partial z} = \frac{\partial G_y}{\partial y} = \frac{\partial G_z}{\partial z}. \quad (3.3)$$

U можно искать в виде:

$$U = \iint G_x dydz + \iint G_y dx dz + \iint G_z dx dy + f(x, y, z).$$

При этом

$$\iint G_x dydz = P_1(x, y, z) + P_2(y, z), \quad \iint G_y dx dz = Q_1(x, y, z) + Q_2(x, z), \quad \iint G_z dx dy = R_1(x, y, z) + R_2(x, y), \\ \frac{\partial^3}{\partial x \partial y \partial z} \iint G_x dydz = \frac{\partial G_x}{\partial x} = \frac{\partial^3 P_1}{\partial x \partial y \partial z}, \quad \frac{\partial^3}{\partial x \partial y \partial z} \iint G_y dx dz = \frac{\partial G_y}{\partial y} = \frac{\partial^3 Q_1}{\partial x \partial y \partial z}, \quad \frac{\partial^3}{\partial x \partial y \partial z} \iint G_z dx dy = \frac{\partial G_z}{\partial z} = \frac{\partial^3 R_1}{\partial x \partial y \partial z}.$$

С учетом (3.3) $P_1 = Q_1 = R_1 = V(x, y, z)$. Тогда $f(x, y, z) = -2V$. При этом

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \left[\iint G_x dydz + \iint G_y dx dz + \iint G_z dx dy + f(x, y, z) \right] = \\ G_x + \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} [Q_1 + Q_2(x, z) + R_1 + R_2(x, y) - 2V] = G_x.$$

Аналогично $\partial^2 U / (\partial x \partial z) = G_y$, $\partial^2 U / (\partial x \partial y) = G_z$. Теорема доказана.

Замечание 1. Равенство нулю аддитивных составляющих повторных неопределенных интегралов вытекает из того, что в поверхностных функциях соответствующих слагаемых нет.

Замечание 2. Поверхностная функция может быть восстановлена по ее поверхностному градиенту и с помощью поверхностного интеграла, однако это решение может оказаться более громоздким из-за необходимости определения поверхности интегрирования. Кроме того, при поверхностном интегрировании могут появляться константы и функции одной переменной, вследствие чего возникает необходимость прибегать к их отбрасыванию, т.е. к произволу.

Пример.
$$\text{grad}_s U = \left(3z^2 - \frac{x}{y^2} \right) \mathbf{i} + \left[\frac{1}{y} - \sin(x+z) \right] \mathbf{j} + \left(2y - \frac{z}{y^2} \right) \mathbf{k},$$

$$U = yz^3 + \frac{xz}{y} + \frac{xz}{y} + \sin(x+z) + xy^2 + \frac{xz}{y} - 2\frac{xz}{y} = yz^3 + \frac{xz}{y} + \sin(x+z) + xy^2.$$

4. Поверхностная дивергенция и поверхностный ротор

В (3.1) имеет место произведение вектора ∇_s на скаляр W . Могут быть рассмотрены скалярное и векторное произведения ∇_s на вектор \mathbf{M}



Определение 4.1. Операция $\operatorname{div}_s \mathbf{M} := \nabla_s \cdot \mathbf{M} = \frac{\partial^2 M_x}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 M_z}{\partial x \partial y}$

называется *поверхностной дивергенцией* векторного поля \mathbf{M} .

Определение 4.2. Операция

$$\operatorname{rot}_s \mathbf{M} := \nabla_s \times \mathbf{M} = \left(\frac{\partial^2 M_z}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 M_y}{\partial x \partial y} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial^2 M_x}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 M_z}{\partial y \partial z} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial^2 M_y}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 M_x}{\partial x \partial z} \right) \mathbf{k}$$

называется *поверхностным ротором* векторного поля \mathbf{M} .

Определение 4.3. Операция $\operatorname{rot}_{s,I} \mathbf{M} := \nabla_s \times_I \mathbf{M} = \frac{\partial^2 M_z}{\partial x \partial z} \mathbf{i} + \frac{\partial^2 M_x}{\partial x \partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y \partial z} \mathbf{k}$

называется *первой или ортоположительной частью* поверхностного ротора $\operatorname{rot}_s \mathbf{M}$.

Определение 4.4. Операция $\operatorname{rot}_{s,II} \mathbf{M} := \nabla_s \times_{II} \mathbf{M} = \frac{\partial^2 M_y}{\partial x \partial y} \mathbf{i} + \frac{\partial^2 M_z}{\partial y \partial z} \mathbf{j} + \frac{\partial^2 M_x}{\partial x \partial z} \mathbf{k}$

называется *второй или ортоотрицательной частью* поверхностного ротора $\operatorname{rot}_s \mathbf{M}$.

$$\operatorname{rot}_s \mathbf{M} = \operatorname{rot}_{s,I} \mathbf{M} - \operatorname{rot}_{s,II} \mathbf{M} \quad \text{или} \quad \nabla_s \times \mathbf{M} = \nabla_s \times_I \mathbf{M} - \nabla_s \times_{II} \mathbf{M}.$$

Определение 4.5. Операция $\operatorname{rot}_s^* \mathbf{M} := \operatorname{rot}_{s,I} \mathbf{M} + \operatorname{rot}_{s,II} \mathbf{M}$ или $\nabla_s \times^* \mathbf{M} := \nabla_s \times_I \mathbf{M} + \nabla_s \times_{II} \mathbf{M}$

называется *сопряженным поверхностным ротором* векторного поля \mathbf{M} .

5. Некоторые формулы

$$\nabla_s (\alpha V + \beta W) = \alpha \nabla_s V + \beta \nabla_s W \quad (\alpha = \text{const}, \beta = \text{const}).$$

$$\nabla_s \cdot (\alpha \mathbf{E} + \beta \mathbf{F}) = \alpha \nabla_s \cdot \mathbf{E} + \beta \nabla_s \cdot \mathbf{F}. \quad \nabla_s \times (\alpha \mathbf{E} + \beta \mathbf{F}) = \alpha \nabla_s \times \mathbf{E} + \beta \nabla_s \times \mathbf{F}.$$

$$\Delta_s \equiv \nabla_s \cdot \nabla_s \equiv \frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2}. \quad \nabla \cdot \nabla_s \equiv \nabla_s \cdot \nabla \equiv 3 \frac{\partial^3}{\partial x \partial y \partial z}.$$

$$\nabla \times \nabla_s \equiv -\nabla_s \times \nabla \equiv \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \mathbf{k}.$$

$$\nabla \times_I \nabla_s = \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} \mathbf{i} + \frac{\partial^3}{\partial y \partial z^2} \mathbf{j} + \frac{\partial^3}{\partial z \partial x^2} \mathbf{k}. \quad \nabla \times_{II} \nabla_s = \frac{\partial^3}{\partial x \partial z^2} \mathbf{i} + \frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2} \mathbf{j} + \frac{\partial^3}{\partial z \partial y^2} \mathbf{k}.$$

$$\Delta_s W \equiv \left(\frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} \right) W(x, y, z) = \operatorname{div}_s \operatorname{grad}_s W = \nabla_s \cdot \nabla_s W.$$

$$\Delta_s (\alpha V + \beta W) = \alpha \Delta_s V + \beta \Delta_s W. \quad \Delta_s \mathbf{F} \equiv \Delta_s F_x \mathbf{i} + \Delta_s F_y \mathbf{j} + \Delta_s F_z \mathbf{k}.$$

$$(\nabla \cdot \nabla_s) W \equiv 3 \frac{\partial^3 W}{\partial x \partial y \partial z} = \nabla \cdot \nabla_s W = \operatorname{div} \operatorname{grad}_s W = \nabla_s \cdot \nabla W = \operatorname{div}_s \operatorname{grad} W.$$

$$(\nabla \cdot \nabla_s) (\alpha V + \beta W) = \alpha (\nabla \cdot \nabla_s) V + \beta (\nabla \cdot \nabla_s) W.$$

$$(\nabla \cdot \nabla_s) (VW) = [(\nabla \cdot \nabla_s) V] W + \nabla V \cdot \nabla_s W + \nabla W \cdot \nabla_s V + [(\nabla \cdot \nabla_s) W] V.$$

$$(\nabla \cdot \nabla_s) \mathbf{F} \equiv (\nabla \cdot \nabla_s) F_x \mathbf{i} + (\nabla \cdot \nabla_s) F_y \mathbf{j} + (\nabla \cdot \nabla_s) F_z \mathbf{k}.$$

$$(\nabla \times \nabla_s) W \equiv \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} \right) \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) \mathbf{k} =$$

$$\nabla \times \nabla_s W \equiv \operatorname{rot} \operatorname{grad}_s W \equiv -\nabla_s \times \nabla W \equiv -\operatorname{rot}_s \operatorname{grad} W.$$

$$(\nabla \times \nabla_s) \cdot \mathbf{F} \equiv -(\nabla_s \times \nabla) \cdot \mathbf{F} \equiv \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 F_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 F_x}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 F_y}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 F_y}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 F_z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 F_z}{\partial y^2} \right) =$$

$$\operatorname{div} \operatorname{rot}_s \mathbf{F} = \nabla \cdot (\nabla_s \times \mathbf{F}) = -\operatorname{div}_s \operatorname{rot} \mathbf{F} = -\nabla_s \cdot (\nabla \times \mathbf{F}).$$

$$(\nabla \times \nabla_s) \times \mathbf{F} \equiv \left[\frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \left(\frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial F_y}{\partial z} + \frac{\partial F_z}{\partial y} \right) \right] \mathbf{i} + \left[\frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right) - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} + \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \right] \mathbf{j} +$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} \right) - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{\partial F_x}{\partial y} + \frac{\partial F_y}{\partial x} \right) \right] \mathbf{k} \equiv \nabla \times (\nabla_s \times \mathbf{F}) - \nabla_s \times (\nabla \times \mathbf{F}) = \nabla_s (\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla (\nabla_s \cdot \mathbf{F}).$$



$$\begin{aligned}
 \text{grad div}_S \mathbf{F} &= \nabla(\nabla_S \cdot \mathbf{F}) = \nabla_S \times (\nabla \times \mathbf{F}) + (\nabla \cdot \nabla_S) \mathbf{F}. & \text{grad}_S \text{div} \mathbf{F} &= \nabla_S (\nabla \cdot \mathbf{F}) = \nabla \times (\nabla_S \times \mathbf{F}) + (\nabla \cdot \nabla_S) \mathbf{F}. \\
 \text{grad}_S \text{div}_S \mathbf{F} &= \nabla_S (\nabla_S \cdot \mathbf{F}) = \nabla_S \times (\nabla_S \times \mathbf{F}) + \Delta_S \mathbf{F}. & \text{rot rot}_S \mathbf{F} &= \nabla \times (\nabla_S \times \mathbf{F}) = \nabla_S (\nabla \cdot \mathbf{F}) - (\nabla \cdot \nabla_S) \mathbf{F}. \\
 \text{rot}_S \text{rot} \mathbf{F} &= \nabla_S \times (\nabla \times \mathbf{F}) = \nabla (\nabla_S \cdot \mathbf{F}) - (\nabla \cdot \nabla_S) \mathbf{F}. & \text{rot}_S \text{rot}_S \mathbf{F} &= \nabla_S \times (\nabla_S \times \mathbf{F}) = \nabla_S (\nabla_S \cdot \mathbf{F}) - \Delta_S \mathbf{F}. \\
 & \text{rot}_S \text{grad}_S W = \nabla_S \times \nabla_S W \equiv 0. & \text{div}_S \text{rot}_S \mathbf{F} &= \nabla_S \cdot (\nabla_S \times \mathbf{F}) \equiv 0. \\
 \nabla_S (VW) &= W \nabla_S V + V \nabla_S W + \nabla V \times^* \nabla W. & \nabla_S \cdot (W\mathbf{F}) &= W \nabla_S \cdot \mathbf{F} + (\nabla_S W) \cdot \mathbf{F} + \nabla W \cdot (\nabla \times^* \mathbf{F}).
 \end{aligned}$$

Известные методы не позволяют получить аналогичные формулы для выражений $\nabla_S (\mathbf{F} \cdot \mathbf{G})$, $\nabla_S \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G})$, $(\mathbf{G} \cdot \nabla_S) W \mathbf{F}$, $\nabla_S \times (W\mathbf{F})$, $\nabla_S \times (\mathbf{F} \times \mathbf{G})$, $(\mathbf{G} \cdot \nabla_S) \mathbf{F}$, $\Delta_S (VW)$. Для их получения, а также для решения других задач существующий арсенал средств операций с векторами может быть расширен за счет введения в рассмотрение линейной комбинации координат и ее деления на вектор, нулевого и мнимого нулевого векторных дифференциальных операторов, псевдовекторов и комбинированных векторов.

6. Линейная комбинация координат

В результате операций над векторными функциями, например, скалярного произведения, взятия дивергенции и т.п. появляются скалярные функции вида

$$W_C = (W_x + W_y + W_z)_C. \quad (6.1)$$

Такая функция называется *линейной комбинацией координат*. Ее особенностью является то, что подобные, входящие в состав слагаемых W_x , W_y , W_z , не приведены.

Пример 6.1. $W_C = \mathbf{F} \cdot \mathbf{G} = (xy^2 z \mathbf{i} + yz^2 \mathbf{j} + yz \mathbf{k}) \cdot (z \mathbf{i} + xy \mathbf{j} + z \mathbf{k}) = (xy^2 z^2 + xy^2 z^2 + yz)_C$ – линейная комбинация координат, а $W = 2xy^2 z^2 + yz$ – линейной комбинацией координат не является.

Здесь и далее волнистой чертой "~" помечена операция, результатом которой является сумма с неприведенными слагаемыми.

Может быть введена операция *деления линейной комбинации координат на вектор*.

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{G} = \frac{W_C}{\mathbf{G}} = W_C \cdot \mathbf{G}^{-1} = \frac{(W_x + W_y + W_z)_C}{G_x \mathbf{i} + G_y \mathbf{j} + G_z \mathbf{k}} = \frac{W_x}{G_x} \mathbf{i} + \frac{W_y}{G_y} \mathbf{j} + \frac{W_z}{G_z} \mathbf{k}. \quad (6.2)$$

Действительно,

$$\begin{aligned}
 F_x G_x = W_x, \quad F_y G_y = W_y, \quad F_z G_z = W_z, \quad F_x = \frac{W_x}{G_x}, \quad F_y = \frac{W_y}{G_y}, \quad F_z = \frac{W_z}{G_z}, \\
 \left(\frac{W_x}{G_x} \mathbf{i} + \frac{W_y}{G_y} \mathbf{j} + \frac{W_z}{G_z} \mathbf{k} \right) \cdot (G_x \mathbf{i} + G_y \mathbf{j} + G_z \mathbf{k}) = W_C.
 \end{aligned}$$

W_C , в отличие от W , содержит информацию, достаточную для восстановления одного из векторов-сомножителей при известном другом.

$$\frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{G}}{\mathbf{G}} = \frac{(F_x G_x + F_y G_y + F_z G_z)_C}{G_x \mathbf{i} + G_y \mathbf{j} + G_z \mathbf{k}} = \frac{F_x G_x}{G_x} \mathbf{i} + \frac{F_y G_y}{G_y} \mathbf{j} + \frac{F_z G_z}{G_z} \mathbf{k} = \mathbf{F}.$$

Пример 6.2. См. данные примера 6.1.

$$\mathbf{F} = \frac{(xy^2 z^2 + xy^2 z^2 + yz)_C}{z \mathbf{i} + xy \mathbf{j} + z \mathbf{k}} = \frac{xy^2 z^2}{z} \mathbf{i} + \frac{xy^2 z^2}{xy} \mathbf{j} + \frac{yz}{z} \mathbf{k} = xy^2 z \mathbf{i} + yz^2 \mathbf{j} + yz \mathbf{k}.$$

Линейную комбинацию координат можно делить на любой вектор, а не только на один из сомножителей, которые ее образовали

$$\frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{G}}{\mathbf{H}} = \frac{(F_x G_x + F_y G_y + F_z G_z)_C}{H_x \mathbf{i} + H_y \mathbf{j} + H_z \mathbf{k}} = \frac{F_x G_x}{H_x} \mathbf{i} + \frac{F_y G_y}{H_y} \mathbf{j} + \frac{F_z G_z}{H_z} \mathbf{k}.$$

Пример 6.3. $\mathbf{F} = \frac{(xy^2 z^2 + xy^2 z^2 + yz)_C}{0,5x^2 y^2 \mathbf{i} + yz \mathbf{j} + yz \mathbf{k}} = \frac{xy^2 z^2}{0,5x^2 y^2} \mathbf{i} + \frac{xy^2 z^2}{yz} \mathbf{j} + \frac{yz}{yz} \mathbf{k} = \frac{2z^2}{x} \mathbf{i} + xyz \mathbf{j} + \mathbf{k}.$

Замечание. В общем виде линейная комбинация координат имеет вид

$$W_C^* = (\alpha W_x + \beta W_y + \gamma W_z)_C,$$



где α, β, γ - постоянные коэффициенты. Последнее выражение может быть получено из (6.1) следующим образом

$$W_C^* = \frac{W_C}{\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}} \tau(\alpha\mathbf{i} + \beta\mathbf{j} + \gamma\mathbf{k}) = (W_x\mathbf{i} + W_y\mathbf{j} + W_z\mathbf{k}) \tau(\alpha\mathbf{i} + \beta\mathbf{j} + \gamma\mathbf{k}) = (\alpha W_x + \beta W_y + \gamma W_z)_C.$$

7. Нулевой векторный оператор

Может быть рассмотрена следующая задача. Имеются две линейные комбинации координат W_C и V_C . Найти формулы, связывающие W_C и V_C с выражениями $(W_x V_x + W_y V_y + W_z V_z)_C$ и $(W_x V_y + W_y V_z + W_z V_x)_C$.

Для решения этих и подобных задач может быть введен нулевой векторный оператор

$$\nabla_0 = \frac{\partial^0}{\partial x^0} \mathbf{i} + \frac{\partial^0}{\partial y^0} \mathbf{j} + \frac{\partial^0}{\partial z^0} \mathbf{k} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

Верхние индексы «0» в выражении означают частные производные нулевого порядка, т.е. производные берутся ноль раз.

Некоторые свойства.

$$\nabla_0 U = U\mathbf{i} + U\mathbf{j} + U\mathbf{k}.$$

Эта величина может рассматриваться в качестве нулевого градиента \mathbf{G}_0 функции U . $\mathbf{G}_0 = \text{grad}_0 U = \nabla_0 U$

$$\nabla_0 \tau \mathbf{F} = F_C = (F_x + F_y + F_z)_C.$$

Эта величина может рассматриваться в качестве нулевой дивергенции векторного поля \mathbf{F} . $\text{div}_0 \mathbf{F} = \nabla_0 \tau \mathbf{F}$

$$\nabla_0 \times \mathbf{F} = (F_z - F_y)\mathbf{i} + (F_x - F_z)\mathbf{j} + (F_y - F_x)\mathbf{k}.$$

Эта величина может рассматриваться в качестве нулевого ротора векторного поля \mathbf{F} . $\text{rot}_0 \mathbf{F} = \nabla_0 \times \mathbf{F}$.

$$\nabla_0 \cdot (\nabla_0 \times \mathbf{F}) = \text{div}_0(\text{rot}_0 \mathbf{F}) \equiv 0.$$

Из (6.2)

$$\frac{W_C}{\nabla_0} = \nabla_0^{-1} \cdot (W_x + W_y + W_z)_C = W_x \mathbf{i} + W_y \mathbf{j} + W_z \mathbf{k} = \mathbf{W}.$$

$$\nabla_0 \tau (\nabla_0^{-1} \cdot W_C) = W_C. \quad \nabla_0^{-1} \cdot (\nabla_0 \tau \mathbf{F}) = \mathbf{F}. \quad \nabla_0^{-1} \cdot (\nabla_0 \tau \nabla_0) = \nabla_0.$$

$$\nabla_0 \cdot \nabla_s = \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}. \quad \nabla_0^{-1} \cdot (\nabla_0 \tau \nabla_s) = \nabla_s. \quad \nabla_0 \cdot \nabla = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}.$$

$$\nabla_0^{-1} \cdot (\nabla_0 \tau \nabla) = \nabla. \quad \nabla_0^{-1} \cdot \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathbf{i} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \mathbf{j} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \mathbf{k}. \quad \nabla_0 \cdot (\nabla_0^{-1} \cdot \Delta) = \Delta.$$

$$\nabla_0 \times \nabla_s = \left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \right) \mathbf{k}.$$

$$\nabla_0 \times \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial y} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial z} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \right) \mathbf{k}.$$

$$\nabla_0 \times (\nabla_0^{-1} \cdot \Delta) = \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \mathbf{k}.$$

$$\nabla_0 \times_I \nabla_0 = \nabla_0 \times_{II} \nabla_0 = \frac{\nabla_0 \times^* \nabla_0}{2} = \nabla_0.$$

Возвращаясь к задаче, приведенной в начале параграфа,

$$(W_x V_x + W_y V_y + W_z V_z)_C = (\nabla_0^{-1} \cdot W_C) \tau (\nabla_0^{-1} \cdot V_C),$$

$$(W_x V_y + W_y V_z + W_z V_x)_C = \nabla_0 \tau \left[(\nabla_0^{-1} \cdot W_C) \times_I (\nabla_0^{-1} \cdot V_C) \right].$$

Таким образом, применение нулевого векторного оператора позволяет решать подобные задачи.

Представление полного дифференциала функции с помощью векторных операторов



$$dW = \frac{\partial W}{\partial x} dx + \frac{\partial W}{\partial y} dy + \frac{\partial W}{\partial z} dz = (\nabla W) \cdot (\nabla_0^{-1} \cdot dS_1).$$

Здесь dS_1 – полный дифференциал элементарной симметрической функции $S_1 \equiv x + y + z$.

С помощью нулевого векторного оператора можно, например, преобразовать вектор в линейную комбинацию координат, выполнить некие операции, а затем результат преобразовать обратно в вектор. И наоборот, сначала линейную комбинацию координат преобразовать в вектор, выполнить векторные операции, а результат преобразовать в линейную комбинацию координат.

8. Мнимый нулевой векторный оператор

Может быть рассмотрена следующая задача. Имеются линейная комбинация координат W_c и вектор \mathbf{F} . Найти формулу, связывающую W_c и \mathbf{F} с выражением $F_x W_y \mathbf{i} + F_y W_z \mathbf{j} + F_z W_x \mathbf{k}$. Для решения подобных задач может быть введен мнимый нулевой векторный оператор

$$\{\nabla_0\} = \left\{ \frac{\partial^0}{\partial x^0} \mathbf{i} \right\} + \left\{ \frac{\partial^0}{\partial y^0} \mathbf{j} \right\} + \left\{ \frac{\partial^0}{\partial z^0} \mathbf{k} \right\} = \{\mathbf{i}\} + \{\mathbf{j}\} + \{\mathbf{k}\}.$$

Его главное отличие от оператора ∇_0 заключается в том, что псевдоорты (мнимые орты) $\{\mathbf{i}\}$, $\{\mathbf{j}\}$, $\{\mathbf{k}\}$ с ортами \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} не взаимодействуют, а взаимодействуют только с псевдоортами. Поэтому правила применения оператора $\{\nabla_0\}$ по отношению к векторам такие же, как и оператора ∇_0 в отношении линейных комбинаций координат.

Некоторые свойства $\{\nabla_0\}$.

$$\{\nabla_0\}U = U\{\mathbf{i}\} + U\{\mathbf{j}\} + U\{\mathbf{k}\}.$$

Эта величина может рассматриваться в качестве *мнимого нулевого градиента* $\{\mathbf{G}_0\}$ функции U . $\{\mathbf{G}_0\} = \{\text{grad}_0 U\} = \{\nabla_0\}U$.

$$\frac{W_c}{\{\nabla_0\}} = \{\nabla_0^{-1}\} \cdot (W_x + W_y + W_z)_c = W_x \{\mathbf{i}\} + W_y \{\mathbf{j}\} + W_z \{\mathbf{k}\}.$$

$$\{\nabla_0\} \cdot (\{\nabla_0^{-1}\} \cdot W_c) = W_c. \quad \{\nabla_0^{-1}\} \cdot (\{\nabla_0\} \cdot \{\nabla_0\}) = \{\nabla_0\}.$$

$$\frac{\mathbf{F}}{\{\nabla_0\}} = \{\nabla_0^{-1}\} \cdot \mathbf{F} = F_x \mathbf{i} \{\mathbf{i}\} + F_y \mathbf{j} \{\mathbf{j}\} + F_z \mathbf{k} \{\mathbf{k}\}. \quad \{\nabla_0\} \cdot (\{\nabla_0^{-1}\} \cdot \mathbf{F}) = \mathbf{F}.$$

$$\{\nabla_0\} \times (\{\nabla_0^{-1}\} \cdot \mathbf{F}) = (F_z \mathbf{k} - F_y \mathbf{j}) \{\mathbf{i}\} + (F_x \mathbf{i} - F_z \mathbf{k}) \{\mathbf{j}\} + (F_y \mathbf{j} - F_x \mathbf{i}) \{\mathbf{k}\}.$$

$$\{\nabla_0^{-1}\} \cdot \nabla_s = \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \mathbf{i} \{\mathbf{i}\} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \mathbf{j} \{\mathbf{j}\} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \mathbf{k} \{\mathbf{k}\}. \quad \{\nabla_0\} \cdot (\{\nabla_0^{-1}\} \cdot \nabla_s) = \nabla_s.$$

$$\{\nabla_0\} \times (\{\nabla_0^{-1}\} \cdot \nabla_s) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \mathbf{k} - \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \mathbf{j} \right) \{\mathbf{i}\} + \left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \mathbf{i} - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \mathbf{k} \right) \{\mathbf{j}\} + \left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \mathbf{j} - \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \mathbf{i} \right) \{\mathbf{k}\}.$$

$$\{\nabla_0^{-1}\} \cdot \nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} \{\mathbf{i}\} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} \{\mathbf{j}\} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \{\mathbf{k}\}. \quad \{\nabla_0\} \cdot (\{\nabla_0^{-1}\} \cdot \nabla) = \nabla.$$

$$\{\nabla_0\} \times (\{\nabla_0^{-1}\} \cdot \nabla) = \left(\frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} - \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} \right) \{\mathbf{i}\} + \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} - \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right) \{\mathbf{j}\} + \left(\frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} - \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} \right) \{\mathbf{k}\}.$$

$$\{\nabla_0^{-1}\} \cdot \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathbf{i} \{\mathbf{i}\} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \mathbf{j} \{\mathbf{j}\} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \mathbf{k} \{\mathbf{k}\}. \quad \{\nabla_0\} \cdot (\{\nabla_0^{-1}\} \cdot \Delta) = \Delta.$$

$$\{\nabla_0\} \times (\{\nabla_0^{-1}\} \cdot \Delta) = \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \{\mathbf{i}\} + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \{\mathbf{j}\} + \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \{\mathbf{k}\}.$$

$$\{\nabla_0\} \times [\{\nabla_0^{-1}\} \cdot (\nabla_0^{-1} \cdot \Delta)] = \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} \mathbf{k} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \mathbf{j} \right) \{\mathbf{i}\} + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathbf{i} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \mathbf{k} \right) \{\mathbf{j}\} + \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} \mathbf{j} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathbf{i} \right) \{\mathbf{k}\}.$$

$$\{\nabla_0\} \cdot [\{\nabla_0\} \times (\{\nabla_0^{-1}\} \cdot W_c)] = 0. \quad \{\nabla_0\} \times_1 \{\nabla_0\} = \{\nabla_0\} \times_{II} \{\nabla_0\} = \frac{\{\nabla_0\} \times^* \{\nabla_0\}}{2} = \{\nabla_0\}.$$

Возвращаясь к задаче, приведенной в начале параграфа,

$$F_x W_y \mathbf{i} + F_y W_z \mathbf{j} + F_z W_x \mathbf{k} = \{\nabla_0\} \cdot [(\{\nabla_0^{-1}\} \cdot \mathbf{F}) \times_1 (\{\nabla_0^{-1}\} \cdot W_c)].$$



Таким образом, применение мнимого нулевого векторного оператора позволяет решать подобные задачи. Другими словами, применение $\{\nabla_0\}$ позволяет сохранить орты исходного вектора.

9. Псевдовекторы и комбинированные векторы

Применение мнимого векторного оператора приводит к появлению псевдовекторов. В частности, $\{\mathbf{i}\}$, $\{\mathbf{j}\}$, $\{\mathbf{k}\}$ являются псевдоортами.

Определение 9.1. Псевдовектор – это скаляр, в котором содержится информация о включенном в него векторе.

Псевдовектор может быть обозначен следующим образом:

$$A^{(P)} = A \left\{ \frac{\mathbf{P}}{P} \right\} = \frac{A}{P} \{ P_x \mathbf{i} + P_y \mathbf{j} + P_z \mathbf{k} \}.$$

Из представленных выше выражений значительная часть является *комбинированными векторами*, т.е. сочетаниями векторов и псевдовекторов.

Комбинированный вектор может быть обозначен следующим образом:

$$\mathbf{B}_F^{(P)} = B \left\{ \frac{\mathbf{P}}{P} \right\} \frac{\mathbf{F}}{F}.$$

Нижний индекс содержит информацию о направлении вектора, верхний индекс – информацию о направлении псевдовектора.

При выполнении операций с комбинированными векторами орты взаимодействуют с ортами, а псевдоорты – с псевдоортами. Орты и псевдоорты между собой не взаимодействуют.

При умножении комбинированного вектора на другой комбинированный вектор могут использоваться следующие четыре формы записи операций умножения:

$$\{ \cdot \}, \{ \cdot \times \}, \{ \times \cdot \}, \{ \times \times \}.$$

Действие знака произведения, расположенного в скобках, распространяется на псевдовекторные составляющие комбинированных векторов, а расположенного за скобками – на векторные.

Пример 9.1. $(W_x \{ \mathbf{i} \} \mathbf{j} + W_y \{ \mathbf{j} \} \mathbf{k} + W_z \{ \mathbf{k} \} \mathbf{i}) \{ \cdot \} \times (V_x \{ \mathbf{i} \} \mathbf{k} + V_y \{ \mathbf{j} \} \mathbf{i} + V_z \{ \mathbf{k} \} \mathbf{j}) = W_x V_x \mathbf{i} + W_y V_y \mathbf{j} + W_z V_z \mathbf{k}.$

При перемножении псевдовектора и комбинированного вектора нет необходимости размещения знака произведения в скобки. Очевидно, что знак произведения "·" или "×" в этом случае распространяется на псевдовекторные составляющие.

Величина $\operatorname{div}_0 \{ \mathbf{F} \} = \{ \nabla_0 \} \cdot \{ \mathbf{F} \} = (F_x + F_y + F_z)_C$

может рассматриваться в качестве *мнимой нулевой дивергенции* мнимого векторного поля $\{ \mathbf{F} \}$. Она совпадает с *нулевой дивергенцией* векторного поля \mathbf{F} .

Величина $\operatorname{rot}_0 \{ \mathbf{F} \} = \{ \nabla_0 \} \times \{ \mathbf{F} \} = (F_z - F_y) \{ \mathbf{i} \} + (F_x - F_z) \{ \mathbf{j} \} + (F_y - F_x) \{ \mathbf{k} \}$

может рассматриваться в качестве *мнимого нулевого ротора* мнимого векторного поля $\{ \mathbf{F} \}$.

$$\{ \nabla_0 \} \cdot (\{ \nabla_0 \} \times \{ \mathbf{F} \}) = \operatorname{div}_0 \{ (\operatorname{rot}_0 \{ \mathbf{F} \}) \} \equiv 0.$$

С помощью мнимого нулевого векторного оператора можно преобразовать вектор в комбинированный вектор, выполнить некие операции, а затем результат преобразовать обратно в вектор. И наоборот, сначала комбинированный вектор преобразовать в вектор, выполнить векторные операции, а результат преобразовать в комбинированный вектор.

10. Некоторые формулы (продолжение)

$$\begin{aligned} \nabla_S (\mathbf{F} \cdot \mathbf{G}) &= \nabla_0^{-1} \cdot \left\{ \left[\nabla_0^{-1} \cdot (\nabla_S \cdot \mathbf{F}) \right] \cdot \mathbf{G} + \left[\nabla_0^{-1} \cdot (\nabla_S \cdot \mathbf{G}) \right] \cdot \mathbf{F} \right\} + \\ &\mathbf{G} \times_1 (\nabla_S \times \mathbf{F}) + \mathbf{F} \times_1 (\nabla_S \times \mathbf{G}) + (\nabla \times_1 \mathbf{F}) \times_1 (\nabla \times_{II} \mathbf{G}) + (\nabla \times_1 \mathbf{G}) \times_1 (\nabla \times_{II} \mathbf{F}) + \\ &\{ \nabla_0 \} \cdot \left\{ \left[\{ \nabla_0^{-1} \} \cdot (\nabla \cdot \mathbf{F}) \right] \times_1 \left[\{ \nabla_0^{-1} \} \cdot (\nabla \times \mathbf{G}) \right] + \left[\{ \nabla_0^{-1} \} \cdot (\nabla \cdot \mathbf{G}) \right] \times_1 \left[\{ \nabla_0^{-1} \} \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) \right] \right\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla_S \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) &= \mathbf{G} \cdot (\nabla_S \times \mathbf{F}) - \mathbf{F} \cdot (\nabla_S \times \mathbf{G}) - (\nabla \times_1 \mathbf{F}) \cdot (\nabla \times_{II} \mathbf{G}) + \\ &(\nabla \times_{II} \mathbf{F}) \cdot (\nabla \times_1 \mathbf{G}) + \nabla_0 \cdot \left\{ \left[\nabla_0^{-1} \cdot (\nabla \cdot \mathbf{F}) \right] \times \left[\nabla_0^{-1} \cdot (\nabla \cdot \mathbf{G}) \right] \right\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{G} \cdot \nabla_S) \mathbf{W} \mathbf{F} &= \mathbf{F} (\mathbf{G} \cdot \nabla_S \mathbf{W}) + \mathbf{W} (\mathbf{G} \cdot \nabla_S) \mathbf{F} + \\ &\left\{ \{ \nabla_0^{-1} \} \cdot \left[\mathbf{G} \times^* (\nabla \mathbf{W}) \right] \right\} \cdot \left[\{ \nabla_0^{-1} \} \cdot (\nabla \cdot \mathbf{F}) \right] + \left[\mathbf{G} \times^* (\nabla \mathbf{W}) \right] \times_{II} (\nabla \times \mathbf{F}). \end{aligned}$$



При этом

$$\left\{ \{\nabla_0^{-1}\} \cdot [\mathbf{G} \times^* (\nabla W)] \right\} \cdot \left[\{\nabla_0^{-1}\} \cdot (\nabla \cdot \mathbf{F}) \right] = \nabla_0^{-1} \cdot \left\{ [\mathbf{G} \times^* (\nabla W)] \cdot \left[\{\nabla_0^{-1}\} \cdot (\nabla \cdot \mathbf{F}) \right] \right\} \\ \left[\mathbf{G} \times^* (\nabla W) \right] \times_{\Pi} (\nabla \times \mathbf{F}) = [\mathbf{G} \times_I (\nabla W)] \times_{\Pi} (\nabla \times \mathbf{F}) + [\mathbf{G} \times_{\Pi} (\nabla W)] \times_{\Pi} (\nabla \times \mathbf{F}).$$

$$\nabla_s \times (W\mathbf{F}) = \nabla_s W \times \mathbf{F} + W \nabla_s \times \mathbf{F} + \left[\{\nabla_0^{-1}\} \cdot (\nabla W) \right] \cdot \left\{ \{\nabla_0\} \times \left[\{\nabla_0^{-1}\} \cdot (\nabla \cdot \mathbf{F}) \right] \right\} + \\ (\nabla \times_I \mathbf{F}) \times_I \nabla W + \nabla W \times_{\Pi} (\nabla \times_{\Pi} \mathbf{F}).$$

$$\nabla_s \times (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = (\mathbf{G} \cdot \nabla_s) \mathbf{F} - \mathbf{G} (\nabla_s \cdot \mathbf{F}) - (\mathbf{F} \cdot \nabla_s) \mathbf{G} + \mathbf{F} (\nabla_s \cdot \mathbf{G}) + \\ \left\{ \{\nabla_0^{-1}\} \cdot (\nabla \cdot \mathbf{F}) \right\} \cdot \left[\{\nabla_0^{-1}\} \cdot (\nabla \times^* \mathbf{G}) \right] - \left\{ \{\nabla_0^{-1}\} \cdot (\nabla \cdot \mathbf{G}) \right\} \cdot \left[\{\nabla_0^{-1}\} \cdot (\nabla \times^* \mathbf{F}) \right] + \\ (\nabla \times_I \mathbf{F}) \times (\nabla \times_I \mathbf{G}) - (\nabla \times_{\Pi} \mathbf{F}) \times (\nabla \times_{\Pi} \mathbf{G}).$$

$$(\mathbf{G} \cdot \nabla_s) \mathbf{F} = \left(\{\nabla_0^{-1}\} \cdot \mathbf{G} \right) \cdot \left(\{\nabla_0^{-1}\} \cdot \nabla_s \cdot \mathbf{F} \right) + \mathbf{G} \times_{\Pi} (\nabla_s \times \mathbf{F}) = \nabla_0^{-1} \cdot \left\{ \mathbf{G} \cdot \left[\{\nabla_0^{-1}\} \cdot (\nabla_s \cdot \mathbf{F}) \right] \right\} + \mathbf{G} \times_{\Pi} (\nabla_s \times \mathbf{F})$$

$$\Delta_s (VW) = (\Delta_s V)W + (\Delta_s W)V + 4(\nabla_s V) \cdot (\nabla_s W) + \\ 2\nabla V \cdot (\nabla \times^* \nabla_s W) + 2\nabla W \cdot (\nabla \times^* \nabla_s V) + \nabla_0 \cdot \left[(\nabla_0^{-1} \cdot \Delta V) \times^* (\nabla_0^{-1} \cdot \Delta W) \right].$$

Без применения "расщепления" векторных произведений на слагаемые, сопряжения векторов, использования линейной комбинации координат, ее деления на вектор, введения нулевого и мнимого нулевого векторных операторов, псевдовекторов и комбинированных векторов получить представленные выше разложения было бы невозможно.

Замечание. Несмотря на то, что в некоторых приведенных разложениях использован мнимый оператор $\{\nabla_0\}$, разложения сами по себе являются "чистыми" скалярами или векторами.

11. Некоторые физические интерпретации

Если в некоторой области среды (поля) объемом V определена функция мощности, сконцентрированной в этой области,

$$P(x, y, z) = \iiint_V p dv = \int_{z_0}^z dz \int_{y_0}^y dy \int_{x_0}^x p(x, y, z) dx,$$

где $p(x, y, z)$ – объемная плотность мощности, то поверхностный градиент от этой функции представляет собой вектор Умова (вектор Умова-Пойнтинга для электромагнитного поля), т.е. вектор скорости движения энергии через единицу поверхности.

$$\mathbf{U} = \text{grad}_s P(x, y, z) = \nabla_s P(x, y, z).$$

Производная функции мощности $P(x, y, z)$ по некоторой поверхности с единичным вектором нормали \mathbf{n} представляет собой количество энергии, проходящей через единицу площади этой поверхности в единицу времени.

$$\frac{d_s^2 P}{d\sigma} = \text{grad}_s P \cdot \mathbf{n} = \nabla_s P \cdot \mathbf{n} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{n}.$$

Пусть в некоторой области поля гравитации (или электростатического поля) для пробной массы (или электрического заряда) определена функция пространственного распределения сил $\mathbf{F}(x, y, z)$, действующих на нее (на него) со стороны поля. Тогда поверхностная дивергенция векторного поля $\mathbf{F}(x, y, z)$ представляет собой объемную плотность энергии гравитационного (или электростатического) поля в рассматриваемой точке.

$$\text{div}_s \mathbf{F} = \nabla_s \cdot \mathbf{F} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta E}{\Delta V}.$$

Если для излучающего диполя с электрическим моментом \mathbf{p}_e известна функция пространственного распределения производной напряженности электрического поля по времени $d\mathbf{E}/dt(x, y, z)$, то величина $A_1 |\mathbf{p}_e| \text{rot}_s d\mathbf{E}/dt$ представляет собой вектор Умова-Пойнтинга в рассматриваемой точке.

$$A|\mathbf{p}_e| \operatorname{rot}_s \frac{d\mathbf{E}}{dt} = A|\mathbf{p}_e| \nabla_s \times \frac{d\mathbf{E}}{dt} = \mathbf{U}(x, y, z),$$

где A – безразмерный коэффициент.

Заключение

Основным результатом работы является «расщепление» векторного произведения на две части – ортоположительную и ортоотрицательную. Это позволяет, в частности, в случае векторно-го произведения вектора на себя самого из нулевой величины, которой является это произведение, «извлечь» две ненулевые. Применение этого приема к векторному произведению оператора Гамильтона (набла) на себя самого приводит к появлению векторного дифференциального смешанного оператора второго порядка, являющегося ключевым элементом при определении понятий поверхностного векторного анализа – поверхностного градиента, поверхностной производной по направлению, поверхностных дивергенции и ротора.

Введенные элементы поверхностного векторного анализа, в частности, расширяют арсенал средств для исследования физических полей, в том числе, определения вектора Умова как поверхностного градиента от функции мощности, объемной плотности энергии силового поля как поверхностного дивергенции от функции пространственного распределения сил и т.д.

Список литературы References

1. Чеканов Н.А., Беляева И.Н., Чеканова Н.Н. К вопросу о спине электрона. Научные ведомости Белгородского государственного университета. Математика. Физика. 6: 227.
Chekanov N.A., Belyaeva I.N., Chekanova N.N. 2016 On the question of electron. Nauchnye vedomosti Belgorodskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika. Fizika [Scientific statements Belgorod State University. Mathematics. Physics]. 227(6): 103–109.
2. Кучеев С.И., Омельченко Е.И., Усатый И.М. Электрически индуцированное допирование нематика в окрестности микроконта. Научные ведомости Белгородского государственного университета. Математика. Физика. 6: 227.
Kucheev S.I., Omelchenko E.I., Usatyj I.M. 2016. Electrically induced by doping a nematic liquid crystal in the vicinity of mikrokonta. Nauchnye vedomosti Belgorodskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika. Fizika [Scientific statements Belgorod State University. Mathematics. Physics]. 227(6): 110–114.
3. Блажевич С.В., Носков А.В., Немцев С.Н., Шевчук О.Ю. Когерентное рентгеновское излучение пучка релятивистских электронов в трехслойной мишени. Научные ведомости Белгородского государственного университета. Математика. Физика. 13: 234.
Blazhevich S.V., Noskov A.V., Nemcev S.N., Shevchuk O.J. 2016. Coherent X-ray beam of relativistic electrons in a three-layer targets. Nauchnye vedomosti Belgorodskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika. Fizika [Scientific statements Belgorod State University. Mathematics. Physics]. 234(13): 104–114.
4. Попов И.П. 2009. О некоторых аспектах магнитоэлектрического взаимодействия. Вестник Челябинского государственного университета. Физика. 24: 162.
Popov I.P. 2009. Some aspects of the magnetoelectric interaction. Vestnik Chelyabinskogo gosudarstvennogo universiteta. Fizika [Herald of Chelyabinsk State University. Physics]. 162(24): 34-39.
5. Попов И.П. 2009. О пространственной конфигурации вихревого электрического поля. Вестник Курганского государственного университета. Естественные науки. 1: 15.
Popov I.P. 2009. On the spatial configuration of the vortex electric field. Vestnik Kurganskogo gosudarstvennogo universiteta. Estestvennye nauki [Bulletin of the Kurgan State University. Natural Sciences]. 15(1): 50-51.
6. Попов И.П. Дуально-инверсный аналог силы Ампера для магнитопровода с изменяющимся магнитным потоком, находящегося в электрическом поле. Вестник Курганского государственного университета. Естественные науки. 1: 15.
Popov I.P. 2009. The dual-inverse analogue of Ampere force for the magnetic flux with a variable in an electric field. Vestnik Kurganskogo gosudarstvennogo universiteta. Estestvennye nauki [Bulletin of the Kurgan State University. Natural Sciences]. 15(1): 51-52.
7. Попов И.П. О некоторых изоморфизмах между электромагнитными и магнитоэлектрическими соотношениями. Вестник Курганского государственного университета. Технические науки. 1:
Popov I.P. 2010. Some isomorphisms between electromagnetic and magnetoelectric relations. Vestnik Kurganskogo gosudarstvennogo universiteta. Tekhnicheskie nauki [Bulletin of the Kurgan State University. Technical Sciences]. 17(1): 94-96.



УДК 517.927.2

**ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННОГО НЕПРЕРЫВНОГО
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ПРОИЗВОДНЫМИ
РИМАНА-ЛИУВИЛЛЯ СЕГМЕНТНОГО ПОРЯДКА**

**THE DIRICHLET PROBLEM FOR ORDINARY CONTINUOUS DIFFERENTIAL
EQUATION WITH THE RIEMANN-LIOUVILLE DERIVATIVES OF SEGMENT
ORDER**

**Б.И. Эфендиев
B.I. Efendiev**

²Институт прикладной математики и автоматизации,
Россия, 360000, г. Нальчик, ул. Шортанова, д. 89А

Institute of Applied Mathematics and Automation, 89 A, Shortanov St, Nalchik, 360000, Russia

E-mail: beslan_efendiev@mail.ru

Аннотация. В данной работе рассматривается задача Дирихле для обыкновенного непрерывного дифференциального уравнения с производными Римана-Лиувилля сегментного порядка.

Resume. In this paper we consider the Dirichlet problem for an ordinary continuous differential equation with Riemann-Liouville derivatives of segment order.

Ключевые слова: непрерывные дифференциальные уравнения, задача Дирихле, производная Римана-Лиувилля сегментного порядка, дробная производная Римана-Лиувилля.

Key words: continuous differential equations, Dirichlet problem, Riemann-Liouville derivative of segment order, fractional derivative Riemann-Liouville.

Введение

В интервале $0 < x < l$ рассмотрим уравнение

$$Lu \equiv u''(x) + aD_{0x}^{[\alpha, \beta]}u(x) + bu'(x) + cD_{0x}^{[\gamma, \delta]}u(x) + du(x) = f(x), \quad (1)$$

где (см. [1, 2]),

$$D_{0x}^{[\alpha, \beta]}u(x) = \int_{\alpha}^{\beta} D_{0x}^s u(x) ds \quad (2)$$

- оператор непрерывного интегродифференцирования порядка $[\alpha, \beta]$, $D_{0x}^s u(x)$ - оператор дробного интегродифференцирования Римана-Лиувилля порядка s [2], $1 < \alpha < \beta < 2$, $0 < \gamma < \delta < 1$, $a, b, c, d - \text{const}$.

Уравнение (1) относится к классу непрерывных дифференциальных уравнений [1]. Оператор (2) был введен в работе [1], а в [2] были изучены их свойства, в частности, доказана положительность этих операторов, получена формула непрерывного интегрирования по частям.

В работе [3] построен оператор, обращающий оператор (2) и получены аналоги формулы Ньютона-Лейбница, а в [4, с. 148] доказан принцип экстремума для оператора непрерывного интегродифференцирования (2).

Уравнения с операторами вида (2) исследовались ранее многими учеными, в случае когда под интегралом стоит оператор Римана-Лиувилля - А.М. Нахушевым и А.В. Псху (см. [5, гл. 2,4], [4, гл. 5]).

В работе [6] для обыкновенного дифференциального уравнения континуального порядка

$$D_{0x}^{[\alpha, \beta]}u(x) + \lambda u(x) = f(x), \quad \alpha < \beta \leq 1$$

построено фундаментальное решение и найдено представление решения задачи Коши, показана положительность фундаментального решения и характер зависимости от спектрального параметра.

Для уравнения (1) при $a = b = d = 0$, $c = \lambda$ построено фундаментальное решение и найдены решения начальной и краевых задач [7-9]. В случае $a = b = c = \lambda$, $d = 0$, для уравнения (1) получены



необходимые начальные условия [10]. В работе [11] для уравнения (1) найдено фундаментальное решение и с его помощью построено явное представление решения видоизмененной задачи Коши для уравнения (1).

Регулярным решением уравнения (1) в области $]0, l[$ назовем функцию $u = u(x)$, принадлежащую классу $C[0, l] \cap C^2]0, l[$ и удовлетворяющую уравнению (1) в области $]0, l[$.

Задача. Найти регулярное решение $u = u(x)$ уравнения (1) в интервале $]0, l[$, удовлетворяющее следующим условиям:

$$u(0) = u_0, \quad u(l) = u_l, \tag{3}$$

где $u_0, u_l - const$.

Рассмотрим функцию

$$G(x, t) = H(x-t)W(x-t) - \frac{W(x)W(l-t)}{W(l)}, \tag{4}$$

$$W(x) = W(x; \alpha, \beta, \gamma, \delta) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n v_n(x), \quad v_0(x) = x,$$

$$v_n(x) = \int_0^x v_{n-1}(x-t) \left[a \frac{1}{t} Vi(2-\beta, 2-\alpha, t) + b + c \frac{1}{t} Vi(2-\delta, 2-\gamma, t) + dt \right] dt, \quad n \in N,$$

$$Vi(\sigma, \rho, x) = \int_{\sigma}^{\rho} \frac{x^t}{\Gamma(t)} dt, \quad x \geq 0, \quad \rho \geq \sigma \geq 0.$$

Здесь $W(x)$ – фундаментальное решение уравнения (1) [11], $H(x)$ – функция Хевисайда, $\Gamma(x)$ – гамма-функция Эйлера.

Оператор $\partial_{0x}^{[\rho, \sigma]}$ называется *регуляризованным* оператором дифференцирования сегментного порядка и связан с оператором непрерывного интегродифференцирования $D_{0x}^{[\gamma, \delta]}$ (2) соотношением

$$\partial_{0x}^{[\rho, \sigma]} u(x) = D_{0x}^{[\rho, \sigma]} u(x) - \sum_{k=0}^{n-1} u^{(k)}(0) \frac{1}{x} Vi(k-\sigma+1, k-\rho+1, x), \quad n-1 < \sigma \leq n, \quad n \in N.$$

Лемма. Функция $G(x, t)$ обладает следующими свойствами:

1) $G(x, t)$ как функция переменной x является решением задачи

$$G_{xx}(x, t) + aD_{0x}^{[\alpha, \beta]} G(x, t) + bG_x(x, t) + cD_{0x}^{[\gamma, \delta]} G(x, t) + dG(x, t) = 0, \tag{5}$$

$$G(0, t) = 0, \quad G(l, t) = 0, \tag{6}$$

2) $G(x, t)$ как функция переменной t является решением задачи

$$G_{tt}(x, t) + a\partial_{lt}^{[\alpha, \beta]} G(x, t) - bG_t(x, t) + c\partial_{lt}^{[\gamma, \delta]} G(x, t) + dG(x, t) = a \frac{W(x)}{W(l)} \frac{1}{l-t} Vi(2-\beta, 2-\alpha, l-t), \tag{7}$$

$$G(x, 0) = 0, \quad G(x, l) = 0, \tag{8}$$

3) $G(x, t)$ удовлетворяет условию

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [G_t(x, x+\varepsilon) - G_t(x, x-\varepsilon)] = 1. \tag{9}$$

Действительно, из определения фундаментального решения уравнения (1) следует, что функция $W(x)$ удовлетворяет условиям [11]

$$W''(x) + aD_{0x}^{[\alpha, \beta]} W(x) + bW'(x) + cD_{0x}^{[\gamma, \delta]} W(x) + dW(x) = 0, \tag{10}$$

$$W''(x) + a\partial_{0x}^{[\alpha, \beta]} W(x) + bW'(x) + c\partial_{0x}^{[\gamma, \delta]} W(x) + dW(x) = -a \frac{1}{x} Vi(2-\beta, 2-\alpha, x), \tag{11}$$

$$W(0) = 0, \quad W'(0) = 1. \tag{12}$$

Равенства (6) и (8) непосредственно получаются из представления (4) функции $G(x, t)$ с учетом первого соотношения (12).

Теперь докажем формулу (9). В силу соотношения $W_t(x-t) = -W_x(x-t)$ и второго равенства (12) имеем



$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [G_t(x, x + \varepsilon) - G_t(x, x - \varepsilon)] &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[-\frac{W(x)W_t(l-x-\varepsilon)}{W(l)} - W_t(x-x+\varepsilon) + \frac{W(x)W_t(l-x-\varepsilon)}{W(l)} \right] = \\ &= -\frac{W(x)W_t(l-x)}{W(l)} - W_t(0) + \frac{W(x)W_t(l-x)}{W(l)} = W'(0) = 1. \end{aligned}$$

Если вместо $G(x, t)$ в формулу (5) подставить представление (4), то в силу равенства (10) получится тождество. Справедливость равенства (7) следует из соотношения (11).

Функцию $G(x, t)$, определяемая формулой (4) и обладающая свойствами 1) - 3), назовем функцией Грина задачи Дирихле (3) для уравнения (1).

Теорема. Пусть $f(x) \in L[0, l] \cap C]0, l[$ и выполнено условие $W(l) \neq 0$. Тогда задача Дирихле (3) для уравнения (1) однозначно разрешима и решение имеет вид

$$u(x) = -u_0 G_t(x, 0) + u_l G_t(x, l) + \int_0^l G(x, t) f(t) dt. \quad (13)$$

Доказательство. Пусть $u(x)$ – решение уравнения (1). Проинтегрируем выражение $G(x, t)Lu(t)$ по переменной t от ε до $l - \varepsilon$, $0 < \varepsilon < l$

$$\int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} G(x, t) u''(t) dt + a \int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} G(x, t) D_{0t}^{[\alpha, \beta]} u(t) dt + b \int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} G(x, t) u'(t) dt + c \int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} G(x, t) D_{0t}^{[\gamma, \delta]} u(t) dt + d \int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} G(x, t) u(t) dt = \int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} G(x, t) f(t) dt. \quad (14)$$

Вычислим интегралы стоящие в левой части равенства (14)

$$\int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} G(x, t) u''(t) dt = \int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} G_{tt}(x, t) u(t) dt + u(x) + u'(l - \varepsilon) G(x, l - \varepsilon) - u'(\varepsilon) G(x, \varepsilon) - u(l - \varepsilon) G_t(x, l - \varepsilon) + u(\varepsilon) G_t(x, \varepsilon). \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} G(x, t) D_{0t}^{[\alpha, \beta]} u(t) dt &= \int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} G(x, t) \frac{d^2}{dt^2} D_{0t}^{[\alpha-2, \beta-2]} u(t) dt = \int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} G_{tt}(x, t) D_{0t}^{[\alpha-2, \beta-2]} u(t) dt + \\ &+ D_{0(l-\varepsilon)}^{[\alpha-1, \beta-1]} u(l - \varepsilon) G(x, l - \varepsilon) - D_{0\varepsilon}^{[\alpha-1, \beta-1]} u(\varepsilon) G(x, \varepsilon) - D_{0(l-\varepsilon)}^{[\alpha-2, \beta-2]} u(l - \varepsilon) G_t(x, l - \varepsilon) + D_{0\varepsilon}^{[\alpha-1, \beta-1]} u(\varepsilon) G_t(x, \varepsilon). \end{aligned} \quad (16)$$

С учетом формулы непрерывного интегрирования по частям [5, с. 34]

$$\int_A^B v(x) D_{Ax}^{[\rho, \sigma]} u(x) dx = \int_A^B u(x) D_{Bx}^{[\rho, \sigma]} v(x) dx, \quad \rho < \sigma \leq 0$$

интеграл в правой части (16) равен

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} G_{tt}(x, t) D_{0t}^{[\alpha-2, \beta-2]} u(t) dt &= \int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} G_{tt}(x, t) D_{0\varepsilon}^{[\alpha-2, \beta-2]} u(t) dt + \int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} G_{tt}(x, t) D_{\varepsilon t}^{[\alpha-2, \beta-2]} u(t) dt = \\ &= \int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} G_{tt}(x, t) D_{0\varepsilon}^{[\alpha-2, \beta-2]} u(t) dt + \int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} u(t) D_{(l-\varepsilon)t}^{[\alpha-2, \beta-2]} G_{tt}(x, t) dt = \int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} G_{tt}(x, t) D_{0\varepsilon}^{[\alpha-2, \beta-2]} u(t) dt + \int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} u(t) \partial_{(l-\varepsilon)t}^{[\alpha, \beta]} G(x, t) dt. \end{aligned}$$

В силу последнего равенства из соотношения (16) окончательно получим

$$\int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} G(x, t) D_{0t}^{[\alpha, \beta]} u(t) dt = \int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} G_{tt}(x, t) D_{0\varepsilon}^{[\alpha-2, \beta-2]} u(t) dt + \int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} u(t) \partial_{(l-\varepsilon)t}^{[\alpha, \beta]} G(x, t) dt + D_{0(l-\varepsilon)}^{[\alpha-1, \beta-1]} u(l - \varepsilon) G(x, l - \varepsilon) - D_{0\varepsilon}^{[\alpha-1, \beta-1]} u(\varepsilon) G(x, \varepsilon) - D_{0(l-\varepsilon)}^{[\alpha-2, \beta-2]} u(l - \varepsilon) G_t(x, l - \varepsilon) + D_{0\varepsilon}^{[\alpha-1, \beta-1]} u(\varepsilon) G_t(x, \varepsilon). \quad (17)$$

$$\int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} G(x, t) u'(t) dt = - \int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} G_t(x, t) u(t) dt + u(l - \varepsilon) G(x, l - \varepsilon) - u(\varepsilon) G(x, \varepsilon). \quad (18)$$

$$\int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} G(x, t) D_{0t}^{[\gamma, \delta]} u(t) dt = - \int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} G_t(x, t) D_{0\varepsilon}^{[\gamma-1, \delta-1]} u(t) dt + \int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} u(t) \partial_{(l-\varepsilon)t}^{[\gamma, \delta]} G(x, t) dt + D_{0(l-\varepsilon)}^{[\gamma-1, \delta-1]} u(l - \varepsilon) G(x, l - \varepsilon) - D_{0\varepsilon}^{[\gamma-1, \delta-1]} u(\varepsilon) G(x, \varepsilon). \quad (19)$$

Подставляя равенства (15), (17)-(19) в формулу (14) и устремляя $\varepsilon \rightarrow 0$ будем иметь

$$\begin{aligned} u(x) + \int_0^l u(t) [G_{tt}(x, t) + a \partial_{tt}^{[\alpha, \beta]} G(x, t) - b G_t(x, t) + c \partial_{tt}^{[\gamma, \delta]} G(x, t) + d G(x, t)] dt + \int_0^l G_{tt}(x, t) D_{00}^{[\alpha-2, \beta-2]} u(0) dt - \\ - \int_0^l G_t(x, t) D_{00}^{[\gamma-1, \delta-1]} u(0) dt = \int_0^l G(x, t) f(t) dt + G_t(x, l) [u(l) + a D_{0l}^{[\alpha-2, \beta-2]} u(l)] - G_t(x, 0) [u(0) + a D_{00}^{[\alpha-2, \beta-2]} u(0)] + \\ - G(x, l) [u'(l) + a D_{0l}^{[\alpha-1, \beta-1]} u(l) + b u(l) + c \partial_{0l}^{[\gamma-1, \delta-1]} u(l)] + G(x, 0) [u'(0) + a D_{00}^{[\alpha-1, \beta-1]} u(0) + b u(0) + c D_{00}^{[\gamma-1, \delta-1]} u(0)] \end{aligned} \quad (20)$$

где $D_{00}^{[\rho, \sigma]} u(0) = \lim_{t \rightarrow 0} D_{0t}^{[\rho, \sigma]} u(t)$.

Так как операторы $D_{0t}^{[\alpha-2, \beta-2]}, D_{0t}^{[\gamma-1, \delta-1]}$ являются интегральными, то $D_{00}^{[\alpha-2, \beta-2]}u(0) = D_{00}^{[\gamma-1, \delta-1]}u(0) = 0$. С учетом свойства 2) функции $G(x, t)$ формулу (20) перепишем в виде

$$\begin{aligned} u(x) + a \frac{W(x)}{W(l)} \int_0^l u(t) \frac{1}{l-t} Vi(2-\beta, 2-\alpha, l-t) dt = \\ = a D_{0t}^{[\alpha-2, \beta-2]} u(l) G_t(x, l) - u(0) G_t(x, 0) + u(l) G_t(x, l) + \int_0^l G(x, t) f(t) dt. \end{aligned} \quad (21)$$

В силу равенства

$$D_{0t}^{[\alpha-2, \beta-2]} u(l) = \int_0^l u(t) \frac{1}{l-t} Vi(2-\beta, 2-\alpha, l-t) dt$$

из формулы (21) получаем соотношение (13).

Подставляя найденное представление решения (13) в уравнение (1) и в краевые условия (3) с учетом соотношений (5), (6) получаем, что функция $u(x)$, определяемая формулой (13) действительно является решением задачи Дирихле (3) для уравнения (1).

Покажем теперь, что при отрицательных коэффициентах уравнения (1), т.е. $a, b, c, d < 0$ условие разрешимости $W(l) \neq 0$ выполняется. Обозначим через

$$\varphi(x) = a \frac{1}{x} Vi(2-\beta, 2-\alpha, x) + b + c \frac{1}{x} Vi(2-\delta, 2-\gamma, x) + dx.$$

Из определения следует, что функция $Vi(\sigma, \rho, x)$ положительна при положительных аргументах. Значит, при отрицательных коэффициентах a, b, c, d функция $\varphi(x) < 0$. Отсюда имеем, что $v_n(x) < 0$ для нечетных n и $v_n(x) > 0$ для четных n . Таким образом, при $a, b, c, d < 0$ знакопеременный ряд $W(l)$ становится положительным, т.е. $W(l) > 0$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-01-00462)

Список литературы References

1. Нахушев А.М. 1988. О непрерывных дифференциальных уравнениях и их разностных аналогах. М., Доклады АН СССР, 300 (4): 796-799.
Nakhushiev A.M. 1988. O nepreryvnyh differentsialnyh uravnenijah i ih raznostnyh analogah [On continuous differential equations and their difference analogues]. Moscow, Doklady AN USSR.
2. Нахушев А.М. 1998. О положительности операторов непрерывного и дискретного дифференцирования и интегрирования, весьма важных в дробном исчислении и в теории уравнения смешанного типа. М., Дифференциальные уравнения, 34 (1): 101-109.
Nakhushiev A.M. 1998. O polozhitelnosti operatorov nepreryvnogo i discretnogo differentsirovaniya i integrirovaniya, vesma vazhnyh v drobnom ischislenii i v teorii uravnenija smeshannogo tipa [Positivity operators of continuous and discrete-differentiation and of integration of very important in the fractional calculus and the theory of equations of mixed type]. Moscow, Differential equations.
3. Псху А.В. 2004. К теории оператора интегро-дифференцирования континуального порядка. М., Дифференциальные уравнения, 40 (1): 120-127.
Pskhu A.V. 2004. K teorii operatora integro-differentsirovaniya continualnogo porjadka [On the theory of integro-differentiation operator continuum order]. Moscow, Differential equations.
4. Псху А.В. 2005. Уравнения в частных производных дробного порядка. М., Наука.
Pskhu A.V. 2005. Uravnenija v chastnyh proizvodnyh drobnogo porjadka [Partial differential equations of fractional order]. Moscow, Nauka.
5. Нахушев А.М. 2003. Дробное исчисление и его применение. М., Физматлит.
Nakhushiev A.M. 2003. Drobnoe ischislenie i ego primenenie [Fractional calculus and its application]. Moscow, Fizmatlit.
6. Псху А.В. 2007. Фундаментальное решение обыкновенного дифференциального уравнения континуального порядка. Нальчик, Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук, 9 (1): 73-78.
Pskhu A.V. 2007. Fundamentalnoe reshenie obyknovennogo differentsialnogo uravnenija continualnogo porjadka [Fundamental Solution for Differential Equation of Continual Order]. Nalchik, Reports of the Adyghe (Circassian) International Academy of Sciences.
7. Эфендиев Б.И. 2011. Задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с континуальной производной. М., Дифференциальные уравнения, 47 (9): 1364-1368.
Efendiev B.I. 2011. Zadacha Coshi dlja obyknovennogo differentsialnogo uravnenija vtorogo porjadka s continualnoy proizvodnoy [Cauchy Problem for a Second-Order Ordinary Differential Equation with a Continual Derivative]. Moscow, Differential equations.



8. Эфендиев Б.И. 2013. Задача Стеклова для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с континуальной производной. М., Дифференциальные уравнения, 49 (4): 469-475.

Efendiev B.I. 2013. Zadacha Steklova dlja obyknovennogo differentsialnogo uravnenija vtorogo porjadka s continualnoy proizvodnoy [Steklov Problem for a Second-Order Ordinary Differential Equation with a Continual Derivative]. Moscow, Differential equations.

9. Эфендиев Б.И. 2015. Задача Дирихле для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с континуальной производной. М., Математические заметки, 97 (4): 620-628.

Efendiev B.I. 2015. Zadacha Dirikhle dlja obyknovennogo differentsialnogo uravnenija vtorogo porjadka s continualnoy proizvodnoy [Dirichlet Problem for a Second-Order Ordinary Differential Equation with a Continual Derivative]. Moscow, Mathematical Notes.

10. Эфендиев Б.И. 2014. Начальная задача для непрерывного дифференциального уравнения второго порядка. М., Дифференциальные уравнения, 50 (4): 564-568.

Efendiev B.I. 2014. Nachalnaja zadacha dlja nepreryvnogo differentsialnogo uravnenija vtorogo porjadka [Initial-Value Problem for a Continuous Second-Order Differential Equation]. Moscow, Differential equations.

11. Эфендиев Б.И. 2015. Начальная задача для обыкновенного непрерывного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Нальчик, Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук, 17 (2): 52-56.

Efendiev B.I. 2015. Nachalnaja zadacha dlja obyknovennogo nepreryvnogo differentsialnogo uravnenija vtorogo porjadka s postojannymi koeffitsientami [Initial-Value Problem for a Continuous Second-Order Ordinary Differential Equation with constant coefficients]. Nalchik, Reports of the Adyghe (Circassian) International Academy of Sciences.

УДК 517.925.7

ОЦЕНКА СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ МАТРИЦ

THE ESTIMATE OF MATRIX EIGENVALUES

А.С. Чурсанова
A.S. Chursanova

Воронежский государственный университет, Россия, 394018, г. Воронеж, Университетская пл. 1
Voronezh State University, 1 Universitetskaya Square, Voronezh, 394018, Russia

E-mail: anastasyachursanova@gmail.com

Аннотация. С помощью теоремы о расщеплении получена оценка собственных значений матрицы при условии, что собственное значение невозмущенной матрицы сильно отделено от остальных. В основе исследований лежит метод подобных операторов. При исследовании спектральных свойств матрицы матрица представляется в виде суммы хорошо изученной матрицы и возмущения. Получены условия малости возмущения, при котором данная матрица является блочно-диагональной.

Resume. The estimates of matrix eigenvalues in case if eigenvalue of unperturbed matrix is strongly separated from others are obtained using a theorem on splitting. The investigation is based on the similar operator method. While investigation of matrix spectral properties matrix is represented as sum of a well-studied matrix and perturbation. Smallness conditions of perturbation for which this matrix is block-diagonal are obtained.

Ключевые слова: метод подобных операторов, спектр.
Key words: the similar operator method, spectrum.

Введение

Пусть имеется линейный оператор $A \in L(\mathbb{C}^n)$, заданный матрицей $\mathcal{A} = (a_{ij})$, внедиагональные элементы которой малы по сравнению с диагональными, и элемент $a_{11} \neq a_{ii}$, где $i = 2, \dots, n$. Представим оператор A в виде разности $A = \mathcal{A} - B$ двух линейных операторов $\mathcal{A}, B \in L(\mathbb{C}^n)$, заданных матрицами \mathcal{A} и B соответственно:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad B = - \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Оператор \mathcal{A} будем называть *невозмущенным* оператором, оператор B – *возмущением* оператора \mathcal{A} , а исходный оператор A – *возмущенным* линейным оператором.

Требуется получить оценку одного определенного собственного значения возмущенного оператора A .

Разложим пространство \mathbb{C}^n в прямую сумму $\mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2$, двух инвариантных относительно оператора A подпространств \mathcal{X}_1 и \mathcal{X}_2 , где $\mathcal{X}_1 = \mathbb{C}, \mathcal{X}_2 = \mathbb{C}^{n-1}$. Будем искать оценку одного собственного значения, поэтому пусть $\mathcal{X}_1 = \mathcal{L}(e_1)$, а $\mathcal{X}_2 = \mathcal{L}(e_2, \dots, e_n)$.

В соответствии с заданным разложением пространства \mathbb{C}^n рассмотрим трансформаторы $J : L(\mathbb{C}^n) \rightarrow L(\mathbb{C}^n)$ и $\Gamma : L(\mathbb{C}^n) \rightarrow L(\mathbb{C}^n)$ [1-2], такие что:

1. Для любого $X \in L(\mathbb{C}^n)$ матрица оператора JX имеет вид:

$$JX = \begin{pmatrix} x_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix};$$

2. Оператор ΓX определяется как решение уравнения

$$A\Gamma X - \Gamma X A = X - JX, \forall X \in L(\mathbb{C}^n). \tag{1}$$

Можно показать, что матрица оператора ΓX имеет вид:



$$GX = \begin{pmatrix} 0 & \frac{x_{12}}{a_{11}-a_{22}} & \dots & \frac{x_{1n}}{a_{11}-a_{nn}} \\ \frac{x_{21}}{a_{22}-a_{11}} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{x_{n1}}{a_{22}-a_{11}} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Будем искать такой оператор $X_0 \in L(\mathbb{C}^n)$, для которого выполнено равенство

$$(A - B)(I + GX_0) = (I + GX_0)(A - GX_0). \quad (2)$$

Если $\|GX_0\| \leq 1$, то оператор $I + GX_0$ обратим, и равенство (2) означает подобие операторов $A - B$ и $A - JX_0$. Таким образом, задача оценки первого собственного значения возмущенного оператора $A - B$ сводится к задаче оценки первого собственного значения оператора $A - JX_0$, которое равно $a_{11} - x_{11}^0$. Необходимо получить оценку элемента x_{11}^0 матрицы оператора X_0 .

Основные результаты

Теорема 1. Пусть выполнено неравенство

$$\gamma \|B\| < \frac{1}{4},$$

где $\gamma = \frac{1}{\min_{\Omega} |a_{ii} - a_{jj}|}$, $\Omega = \{(i, j): i = 1 \text{ и } j = 2 \dots n, \text{ или } j = 1 \text{ и } i = 2 \dots n\}$. Тогда нелинейное уравнение

$$X = B GX - GX J(B GX) - GX J B + B = \Phi(X), \quad (3)$$

рассматриваемое в алгебре $L(\mathbb{C}^n)$, имеет единственное решение X_0 в шаре с центром в нуле и радиусом $4 \|B\|$, на котором достигается равенство

$$(A - B)(I + GX_0) = (I + GX_0)(A - GX_0).$$

Оператор X_0 можно найти методом простых итераций, если в качестве первого приближения взять $X = 0$.

Пусть P_1 и P_2 – проекторы [3], ассоциированные с указанным разложением пространства \mathbb{C}^n . Заметим, что для любого $X \in L(\mathbb{C}^n)$ выполнены следующие равенства:

$$1. JX = P_1 X P_1 + P_2 X P_2;$$

$$2. P_i(GX)P_j = \Gamma(P_i X P_j), i, j = 1, 2 \text{ и } P_i(GX)P_j = 0, i = 1, 2.$$

Через X_{ij} будем обозначать оператор $P_i X P_j$, $i, j = 1, 2$. Тогда

$$X = (P_1 + P_2)X(P_1 + P_2) = X_{11} + X_{12} + X_{21} + X_{22}, X \in L(\mathbb{C}^n).$$

Применим операторы P_1 и P_2 к обеим частям уравнения (3).

1. Вначале осуществим умножение на проектор P_1 слева и справа:

$$P_1 X P_1 = P_1 B G X P_1 - P_1 G X J(B G X) P_1 - P_1 G X J B P_1 + P_1 B P_1;$$

$$X_{11} = (B_{11} + B_{12})(GX_{11} + GX_{21}) - (GX_{11} + GX_{12})J((B_{11} + B_{12})(GX_{11} + GX_{21})) - (GX_{11} + GX_{12})(JB_{11} + JB_{21}) + B_{11}.$$

Учитывая, что $JX_{12} = JX_{21} = 0$ и $GX_{11} = GX_{22} = 0$, получим

$$X_{11} = (B_{11} + B_{12})GX_{21} - GX_{12}J((B_{11} + B_{12})GX_{21}) - GX_{12}JB_{11} + B_{11};$$

$$X_{11} = B_{12}GX_{21} + B_{11}. \quad (4)$$

2. Применим справа проектор P_1 , а слева P_2 :

$$P_2 X P_1 = P_2 B G X P_1 - P_2 G X J(B G X) P_1 - P_2 G X J B P_1 + P_2 B P_1;$$

$$X_{21} = (B_{11} + B_{22})GX_{21} - GX_{21}J(B_{12}GX_{21}) - GX_{21}B_{11} + B_{21};$$

$$X_{21} = B_{22}GX_{21} - (GX_{21})B_{12}GX_{21} - (GX_{21})B_{11} + B_{21}. \quad (5)$$

Из равенства (4) ясно, что искомую оценку элемента x_{11}^0 оператора X_0 , являющегося решением нелинейного уравнения (3), найдем, получив оценку $\|X_{11}^0\|$, а для оценки $\|X_{11}^0\|$ в свою очередь требуется оценка $\|X_{21}^0\|$ и разрешимость уравнения (5).

Теорема 2. Пусть выполнено условие теоремы 1. Тогда нелинейное уравнение (5) имеет единственное решение X_{21}^0 . Это решение можно найти методом простых итераций, если в качестве первого приближения взять $X_{21} = 0$. Имеют место следующие оценки:

$$\|X_{11}^0\| \leq \frac{1 - \gamma b_{22} - q}{2\gamma}, \|X_{21}^0\| \leq \frac{1 - \gamma b_{22} - q}{2\gamma^2 b_{12}},$$

где $q = ((\gamma b_{22} - 1)^2 - 4\gamma^2 b_{21} b_{12})^{1/2}$ и $\|B_{ij}\| = b_{ij}$, $i, j = 1, 2$, и X_{11}^0 определяется из равенства

$$X_{11}^0 = B_{12}GX_{21}^0.$$

Непосредственно из теоремы 2 следует

Теорема 3. Пусть выполнено условие теоремы 1. Тогда возмущенный оператор A , заданный матрицей $\mathcal{U} = (a_{ij})$, имеет собственное значение λ_1^0 , представимое в виде

$$\lambda_1^0 = a_{11} - x_{11}^0,$$



где число x_{11}^0 удовлетворяет оценке

$$|x_{11}^0| \leq \frac{1 - \gamma b_{22} - q}{2\gamma},$$

где

$$\gamma = \frac{1}{\min_{\Omega} |a_{ii} - a_{jj}|}, \Omega = \{(i, j): i = 1 \text{ и } j = 2 \dots n, \text{ или } j = 1 \text{ и } i = 2 \dots n\}.$$

$$q = ((\gamma b_{22} - 1)^2 - 4\gamma^2 b_{21} b_{12})^{1/2}, b_{ij} = \|B_{ij}\|, i, j = 1, 2.$$

Список литературы References

1. Баскаков А.Г. Расщепление возмущенного дифференциального оператора с неограниченными операторными коэффициентами. // *Фундаментальная и прикладная математика*, 2002. Т. 8, № 1. С. 1-16.
Baskakov A.G. Splitting of perturbed differential operator with unlimited operator coefficients. // *Fundamental and Applied Mathematics*, 2002. V. 8, №1. P. 1-16.
2. Баскаков А.Г. Теорема о расщеплении оператора и некоторые смежные вопросы аналитической теории возмущений. // *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, 1986. Т. 50, № 3. С. 435-357.
Baskakov A. G. A theorem on splitting an operator, and some related questions in the analytic theory of perturbations. // *Mathematics of the USSR-Izvestiya*, 1987. V. 28, № 3. P. 421-444. (in Russian)
3. Баскаков А.Г. Лекции по алгебре. Воронеж: Издательско-полиграфический центр ВГУ, 2013, 159 с.
Baskakov A.G. Lectcii po algebre. Voronezh: Izdatelsko-poligraphicheskii centre VSU, 2013. 159 p. (in Russian)



УДК 517.538.7

ЛОКАЛЬНО ВЫПУКЛЫЕ ПРОСТРАНСТВА ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ НУЛЕВОГО ПОРЯДКА, ПРИЛОЖЕНИЯ К ИНТЕРПОЛЯЦИИ

LOCALLY CONVEX SPACE OF ENTIRE FUNCTIONS OF ZERO ORDER, APPLICATIONS TO INTERPOLATION

К.Г. Малютин, Л.И. Студеникина
K.G. Malyutin, L.I. Studenikina

Юго-Западный государственный университет,
Россия, 305040, Курск, ул. 50 лет Октября, 94

Southwest State University, street 50 let Oktyabrya, 94, Kursk, 305040, Russia

E-mail: malyutinkg@gmail.ru, sli-kursk@yandex.ru

Аннотация. Рассматриваются локально выпуклые пространства целых функций нулевого порядка. Найдены два критерия разрешимости задачи простой свободной интерполяции в этом классе. В формулировке первого критерия используется каноническое произведение, определяемое узлами интерполяции. В формулировке второго – мера, которая определяется этими узлами. В предыдущих работах А.Ф. Леонтьева, Г.П. Лапина, К.Г. Малютина, такие задачи рассматривались в классе целых функций ненулевого порядка.

Resume. We consider the locally convex space of entire functions of order zero. Two criteria of resolvability of problem of simple free interpolation in a class of the entire functions of zero order are received. In the formulation of the first criterion, the canonical product defined by interpolation knots is used. In the formulation of the second, the measure, which is defined by these knots, is used. In A.F. Leontyev, G.P. Lapin, K.G. Malyutin previous works such the problem was considered in a class of the entire functions of non-zero order.

Ключевые слова: локально выпуклые пространства целых функций нулевого порядка, интерполяция.
Keywords: locally convex space of entire functions of order zero, interpolation.

Пусть $f(z)$ – целая функция, $M(f, r) = \max_{0 \leq \theta \leq 2\pi} |f(re^{i\theta})|$. Через $[\rho, \infty]$ обозначим класс целых функций порядок которых не превышает ρ , $\rho \geq 0$, т.е. таких, что

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln^+ \ln^+ M(f, r)}{\ln r} \leq \rho. \quad (1)$$

Здесь, как обычно, $\mathbf{b}^+ = \max\{\mathbf{b}; 0\}$.

В частности, через E_0 обозначим класс целых функций нулевого порядка ($\rho = 0$). Введем следующее определение.

Последовательность функций $\{f_n(z)\}$ из класса E_0 сходится в смысле E_0 , если: (i) она равномерно сходится на компактах, (ii) для любого $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство

$$|f_n(z)| < \exp[|z|^\varepsilon], \quad |z| > r_0(\varepsilon) \quad (n \geq 1),$$

где $r_0(\varepsilon)$ не зависит от $n \geq 1$.

При подходящем $C(\varepsilon)$, которое не зависит от n , при всех z

$$|f_n(z)| < C(\varepsilon) \exp[|z|^\varepsilon] \quad (n \geq 1). \quad (2)$$

Класс E_0 является линейным топологическим пространством с секвенциальной топологией.



Через $C(a, r)$ будем обозначать открытый, а через $B(a, r)$ – замкнутый круг радиуса r с центром в точке a . Пусть $A = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ – множество различных комплексных чисел $\{a_n = r_n e^{i\theta_n}\}_{n=1}^{\infty}$. По множеству A определим меру: $n_A(G) = \sum_{a_n \in G} 1$. Если это не будет вызывать недоразумений, то индекс A будем опускать. Множество корней произвольной функции f будем обозначать через A_f . Обозначим через $n_f = n_{A_f}$, $n_{f,a}(r) = n_f(C(a, r))$, $n_{A,a}(r) = n_A(C(a, r))$. В частности, положим $n_f(r) = n_{f,0}(r)$, $n_A(r) = n_{A,0}(r)$.

Неравенство (1) приводит к разумности введения следующего определения.

Последовательность $A = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется интерполяционной в классе $[\rho, \infty]$, если для любой последовательности комплексных чисел $\{b_n\}$, $n \in N$, удовлетворяющих условию

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln^+ \ln^+ |b_n|}{\ln |a_n|} \leq \rho \tag{3}$$

существует функция $F \in [\rho, \infty]$ со свойством

$$F(a_n) = b_n, \quad n \in N. \tag{4}$$

Задача (4) в классе $[\rho, \infty]$ в случае, когда $\rho > 0$ впервые рассматривалась А. Ф. Леонтьевым [1]. Им были найдены критерии ее разрешимости в терминах канонических произведений, определяемых последовательностью A . Позднее К. Г. Малютин [2], исходя из результатов А. Ф. Леонтьева, нашел критерии разрешимости задачи (4) в терминах меры определяемой последовательностью A . В работе [3] рассматривалась задача в классе E_0 как в терминах канонических произведений, определяемых последовательностью A , так и в терминах меры, определяемой узлами интерполяции. В настоящей работе мы рассматриваем задачу простой интерполяции в классе E_0 и находим критерии ее разрешимости, отличные от тех, которые были найдены в работе [3].

Мы дополнительно предполагаем, что выполняется неравенство $|a_1| > 0$. Это упрощает доказательство и формулировки некоторых утверждений, однако, не ограничивает общности наших рассуждений. По ходу работы мы делаем замечание, что последовательности A и $A \cup \{0\}$ являются одновременно интерполяционными.

Пусть $\rho(r)$ – уточненный порядок [4], $\lim_{r \rightarrow \infty} \rho(r) = \rho \geq 0$. Если $\rho = 0$, то уточненный порядок называется нулевым уточненным порядком.

По заданной последовательности A и уточненному порядку $\rho(r)$ определим семейства функций

$$\Phi_A^*(z, \alpha) = \frac{(n_A(C(z, \alpha | z|)) - 1)^+}{|z|^{\rho(|z|)}}.$$

Приведем формулу Пуассона для субгармонической функции ν и круга $B(z, R)$, на которую будем ссылаться в нашей работе:

$$\nu(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \nu(z + Re^{i\varphi}) d\varphi - \int_0^R \frac{\mu_\nu(B(z, t))}{t} dt. \tag{5}$$

Здесь μ_ν – риссовская мера функции ν .



В случае, если $f(z)$ – целая функция, a – простой корень функции f ,
 $\nu(z) = \ln \left| \frac{f(z)}{(z-a)} \right|$, то формула Пуассона (5) для круга $B(a, r)$ приобретает вид:

$$\ln |f(a)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |f(a + Re^{i\varphi})| d\varphi - \int_0^R \frac{n_f(B(a, t)) - 1}{t} dt - \ln R. \quad (6)$$

Пусть $A = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ – произвольная последовательность. Обозначим через

$$E_A(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n} \right).$$

Функция $E_A(z)$ называется канонической функцией последовательности A .

Основным результатом нашей статьи является следующая теорема.

Напомним, мы считаем, что выполняется условие $|a_1| > 0$.

Теорема 1. Следующие три утверждения эквивалентны:

- (1) последовательность A является интерполяционной в классе E_0 ;
- (2) для любого $\varepsilon > 0$ выполняется соотношение:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^\varepsilon} < \infty, \quad (7)$$

и каноническая функция $E_A(z)$ последовательности A удовлетворяет условию:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln |a_n|} \ln^+ \ln^+ \frac{1}{|E'_A(a_n)|} \leq 0; \quad (8)$$

- (3) выполняются соотношения (7) и

(3.1) существует нулевой уточненный порядок $\rho(r)$, такой что

$$\Phi_A(z, \alpha) \leq \frac{1}{\log \frac{1}{\alpha}}. \quad (9)$$

Пространство E_0^*

Рассмотрим последовательность E_n^* пространств целых функций, для которых конечна норма

$$\|f\| = \sup_{z \in \mathbb{C}} \frac{|f(z)|}{\exp(|z|^{1/n})} < \infty.$$

Ясно, что $E_{n_2}^* \subset E_{n_1}^*$ если $n_2 > n_1$. Обозначим через E_0^* проективный предел пространства E_n^* .

Теорема 2. Пространства E_0^* и E_0 совпадают.

Доказательство. Из работы [5] следует, что пространство E_0^* является локально выпуклым пространством с секвенциальной топологией. При этом последовательность функций $\{f_n(z)\}$ из E_0^* сходится в смысле E_0^* если она при любом $n \in \mathbb{N}$ сходится в пространстве E_n^* .



Отсюда следует, что последовательность $\{f_n(z)\}$ сходится и в пространстве E_0 . Очевидно, обратное, если последовательность $\{f_n(z)\}$ сходится и в пространстве E_0 , то она сходится и в любом пространстве E_n^* , значит, и в пространстве E_0^*

Теорема доказана.

Докажем вспомогательные утверждения.

Теорема 3. Пусть A – интерполяционная последовательность в пространстве E_0 . Тогда выполняется соотношение (7).

Доказательство. Пусть f – целая функция из пространства E_0 , решающая интерполяционную задачу: $f(a_1) = 1, f(a_n) = 0$ при $n \geq 2$. По предположению теоремы такая функция существует. Запишем формулу (5) для функции $\nu(z) = \ln|f(z)|$ и круга $B(a_1, r)$:

$$0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln|f(a_1 + Re^{i\varphi})| d\varphi - \int_0^R \frac{n_f(B(a_1, t))}{t} dt.$$

Отсюда получаем, что неравенство

$$\int_0^R \frac{n(t)}{t} dt \leq \int_0^R \frac{n_f(B(a_1, t))}{t} dt \leq K_\varepsilon R^\varepsilon, \quad K_\varepsilon > 0,$$

выполняется при любом фиксированном $\varepsilon > 0$ для всех $R > R_\varepsilon$.

Отсюда следует неравенство:

$$n(R) \leq \int_R^{eR} \frac{n(t)}{t} dt \leq K_\varepsilon R^\varepsilon. \tag{10}$$

Поскольку последнее неравенство выполняется при любом фиксированном $\varepsilon > 0$, то из него следует соотношение:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{n(R)}{R^\varepsilon} = 0, \quad \varepsilon > 0. \tag{11}$$

Тогда, используя неравенство (10) с $\varepsilon/2$ и соотношение (11), получаем:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^\varepsilon} = \int_0^{\infty} \frac{dn(t)}{t^\varepsilon} = \varepsilon \int_0^{\infty} \frac{n(t)}{t^{1+\varepsilon}} dt \leq \varepsilon K_\varepsilon \int_0^{\infty} \frac{dt}{t^{1+\varepsilon/2}} < \infty.$$

Теорема доказана.

Теорема 4. Пусть A – интерполяционная последовательность в пространстве E_0 . Тогда каноническая функция $E_A(z)$ принадлежит пространству E_0 .

Доказательство. Пусть A – интерполяционная последовательность в пространстве E_0 . $E(z)$ – его каноническая функция. Из равенства (11) следует, что $E(z)$ – целая функция. Кроме того, справедливо неравенство

$$\ln|E(z)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{r}{|a_n|}\right) = \int_0^{\infty} \ln\left(1 + \frac{r}{t}\right) dn(t) = \int_0^{\infty} \frac{rn(t)}{(t+r)t} dt,$$

из которого следует, что $E \in E_0$.

Теорема доказана.

Здесь и далее используется обозначение $|z| = r$.

Доказательство импликации 1) \Rightarrow 3)

Импликация 1) \Rightarrow (7) доказана в теореме 2.

Докажем импликацию 1) \Rightarrow (9). Докажем вначале, что

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln r_n} \ln^+ \int_0^{r_n/2} \frac{(n(B(a_n, t)) - 1)^+}{t} dt = 0. \quad (12)$$

Если это не так, то существуют последовательность $n_k \uparrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$ и число $\varepsilon_0 > 0$ такие, что

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln |a_{n_k}|} \ln^+ \int_0^{|a_{n_k}|/2} \frac{(n(B(a_n, t)) - 1)^+}{t} dt \geq \varepsilon_0, \quad k=1,2,\dots \quad (13)$$

Дополнительно можно считать, что выполняется неравенство $|a_{n_{k+1}}| > 4 |a_{n_k}|$, $k=1,2,\dots$

Пусть $f(z)$ – функция из пространств E_0 , которая решает интерполяционную задачу $f(a_{n_k}) = 1$, $k=1,2,\dots$, $\mathbf{f}(\mathbf{a}_n) = \mathbf{0}$, если $n \neq n_k$. По условию теоремы такая функция существует.

Запишем формулу (5) для функции $\nu(z) = \ln |f(z)|$ и круга $B\left(a_{n_k}, \frac{1}{2} |a_{n_k}|\right)$:

$$0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left| f\left(a_{n_k} + \frac{1}{2} |a_{n_k}| e^{i\varphi}\right) \right| d\varphi - \int_0^{|a_{n_k}|/2} \frac{(n_f(B(a_{n_k}, t)))}{t} dt.$$

При $t \in \left[0, \frac{1}{2} |a_{n_k}|\right]$ справедливо неравенство $n_f(B(a_{n_k}, t)) \geq n(B(a_{n_k}, t)) - 1$. Поэтому

$$\begin{aligned} \int_0^{|a_{n_k}|/2} \frac{(n(B(a_{n_k}, t)) - 1)^+}{t} dt &\leq \int_0^{|a_{n_k}|/2} \frac{(n_f(B(a_{n_k}, t)))}{t} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left| \left(a_{n_k} + \frac{1}{2} |a_{n_k}| e^{i\varphi}\right) \right| d\varphi. \end{aligned}$$

Полученное неравенство, соотношение $f \in E_0$ и неравенство (13) в совокупности противоречивы. Тем самым, равенство (12) доказано.

Из равенства (7) следует, что

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln |a_{n_k}|} \ln^+ \int_{|a_{n_k}|/2}^{|a_{n_k}|} \frac{(n(B(a_n, t)) - 1)^+}{t} dt = 0.$$

Вместе с равенством (12) это дает

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln |a_{n_k}|} \ln^+ \int_0^{|a_{n_k}|} \frac{(n(B(a_n, t)) - 1)^+}{t} dt = 0. \quad (14)$$

Пусть z – произвольное комплексное число и $a=a(z)$ – ближайшая к z точка последовательности $\{a_n\}$. Обозначим через F_1 множество тех z , для которых выполняется неравенство

$|z - a| > \frac{1}{2} |z|$. Из условия (7) легко следует, что

$$\limsup_{\substack{n \rightarrow \infty \\ z \in F_1}} \frac{1}{\ln r} \ln^+ \int_0^r \frac{(n(B(z, t)) - 1)^+}{t} dt = 0.$$

Поэтому в дальнейшем доказательстве можно считать, что выполняется неравенство

$$|z - a| \leq \frac{1}{2}|z|. \text{ Далее имеем}$$

$$\begin{aligned} \int_0^r \frac{(n(B(z, t)) - 1)^+}{t} dt &= \int_{|z-a|}^r \frac{(n(B(z, t)) - 1)^+}{t} dt \leq \\ &\leq \int_{|z-a|}^r \frac{(n(B(a, t + |z - a|)) - 1)^+}{t} dt = \int_{2|z-a|}^{r+|z-a|} \frac{(n(B(a, u)) - 1)^+}{u - |z - a|} du \leq \\ &\leq 2 \int_0^{r+|z-a|} \frac{(n(B(a, u)) - 1)^+}{u} du. \end{aligned}$$

Из приведенных рассуждений и равенства (12) теперь следует, что

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln r} \ln^+ \int_0^r \frac{(n(B(z, t)) - 1)^+}{t} dt = 0.$$

Отсюда следует, что существует нулевой уточненный порядок $\rho(r)$ такой, что

$$\int_0^r \frac{(n(B(z, t)) - 1)^+}{t} dt \leq V(r) := r^{\rho(r)}.$$

Сделав замену переменной $t = \alpha r$ в подынтегральном выражении последнего равенства и разделив обе части на $V(r)$ получим соотношение:

$$\int_0^1 \frac{\Phi_A(z, \alpha)}{\alpha} d\alpha \leq 1. \tag{15}$$

Неравенство (9) следует тогда из цепочки неравенств

$$1 \geq \int_0^1 \frac{\Phi_A(z, \alpha)}{\alpha} d\alpha \geq \int_\delta^1 \frac{\Phi_A(z, \alpha)}{\alpha} d\alpha \geq \Phi_A(z, \delta) \ln \frac{1}{\delta}.$$

Импликация 1) \Rightarrow 3) доказана.

Доказательство импликации 3) \Rightarrow 2)

Пусть выполняются условия (9) и (7). Для произвольной точки $a_n \in A$ оценим расстояние $|a_n - a|$ где $a \in A$ ближайшая точка к a_n , из последовательности A . Точнее, оценим

$$\alpha_n = \frac{|a_n - a|}{|a_n|}. \text{ Замечая, что } (n(B(a_n, \alpha_n)) - 1)^+ \geq 1 \text{ и воспользовавшись неравенством (9),}$$

получим

$$\frac{1}{V(r_n)} \leq \Phi_A(a_n, \alpha_n) \leq \ln \frac{1}{\alpha_n}.$$

Откуда следует оценка

$$\alpha_n \geq \exp[-V(|a_n|)].$$

Снова применяя неравенство (9) и полученную оценку для α_n , имеем

$$\int_0^{r_n/2} \frac{(n(B(a_n, t)) - 1)^+}{t} dt \leq V(r_n) \int_{\exp[-V(|a_n|)]}^{1/2} \frac{1}{t \ln(1/t)} dt =$$

$$= V(r_n)(\rho(r_n) \ln r_n - \ln \ln 2).$$

Отсюда следует соотношение (12). Дословно повторяя рассуждения выше, получим справедливость оценки (15).

Напишем равенство (6) для функции $E(z)$ и круга $B(a_n, R)$:

$$\ln |E'(a_n)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |E(a_n + \operatorname{Re} e^{i\varphi})| d\varphi - \int_0^R \frac{(n(B(a_n, t)) - 1)}{t} dt - \ln R. \quad (16)$$

Равенство (16) можно переписать в виде

$$\ln \frac{1}{|E'(a_n)|} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \frac{1}{|E(a_n + \operatorname{Re} e^{i\varphi})|} d\varphi + \int_0^R \frac{(n(B(a_n, t)) - 1)}{t} dt + \ln R. \quad (17)$$

Далее мы воспользуемся следующей теоремой.

Теорема С. Пусть функция $f(z)$ голоморфна в круге $B(0, 2eR)$ ($R > 0$), $f(0) = 1$ и η – произвольное положительное число, не превышающее $\frac{3}{2}e$. Тогда внутри круга $B(0, R)$, но вне исключительных кругов с общей суммой радиусов, не превышающей $4R\eta$, выполняется неравенство

$$\ln |f(z)| \geq - \left(2 + \ln \frac{3e}{2\eta} \right) \ln M(f, 2eR).$$

Это теорема 11 из [4, Глава I, §8].

Поскольку $E \in E_0$, то для любого числа $\varepsilon > 0$ существует r_ε такое, что при $r > r_\varepsilon$ выполняется неравенство:

$$\ln |E(z)| \leq r^\varepsilon.$$

Из этого неравенства и теоремы С, примененной к функции $E(z)$ и кругу $B(0, 3e|a_n|)$, следует, что существуют номер N_ε и число $R_1 \in \left[\frac{1}{2}|a_n|, |a_n| \right]$ такие, что для всех φ и $n > N_\varepsilon$ будет выполняться неравенство

$$\ln \frac{1}{|E(a_n + R_1 e^{i\varphi})|} \leq r_n^\varepsilon.$$

Выбирая в равенстве (17) $R = R_1$, получим доказательство импликации (13) \Rightarrow (12).

Тем самым импликация 3) \Rightarrow 2) доказана.

Доказательство импликации 2) \Rightarrow 1)

Обозначим

$$P_n(z) = \frac{1}{E'(a_n)} \frac{b_n}{z - a_n} \left(\frac{z}{a_n} \right)^{S_n}, \quad n \in N, \quad (18)$$



где $\{S_n\}_{n=1}^\infty$ - последовательность натуральных чисел, которую мы выберем ниже.

Заметим, что формальный ряд

$$F(z) = E(z) \sum_{n=1}^\infty P_n(z) \tag{19}$$

решает интерполяционную задачу (4).

Покажем, что при подходящем выборе последовательности $\{S_n\}_{n=1}^\infty$ функция $F \in E_0$. Из условий (3) и (8) получаем, что существует последовательность $\{\varepsilon_n\}, \varepsilon_n \downarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ такая, что при всех $n \in N$,

$$\left| \frac{b_n}{E'(a_n)} \right| \leq \exp(r_n^{\varepsilon_n}). \tag{20}$$

Кроме того, в силу условия (7), можно считать, что сходится ряд

$$\sum_{n=1}^\infty \exp(-r_n^{\varepsilon_n}). \tag{21}$$

Обозначим $u_n(z) = \frac{1}{z - a_n} \left(\frac{z}{a_n} \right)^{S_n}$, $n \in N$, и оценим при $z \notin C(a_n, 1)$:

$$|u_n(z)| \leq \frac{|z|^{S_n}}{r_n^{S_n}}, \quad n \in N.$$

Отсюда, с учетом определения (18) функции $P_n(z)$ и (20), получим

$$|P_n(z)| \leq \left| \frac{b_n}{E'(a_n)} \right| |u_n(z)| \leq \exp(r_n^{\varepsilon_n}) \frac{|z|^{S_n}}{r_n^{S_n}} = \left(\frac{e^{2|z|}}{r_n} \right)^{S_n} \frac{\exp(r_n^{\varepsilon_n})}{e^{2S_n}}. \tag{22}$$

при $z \notin C(a_n, 1)$

Положим $S_n = [2r_n^{\varepsilon_n}] + 1$, $n \in N$ где $[\cdot]$ - целая часть числа. Тогда из (22) получаем

$$|P_n(z)| \leq \exp(-r_n^{\varepsilon_n}) \left(\frac{e^{2|z|}}{r_n} \right)^{2r_n^{\varepsilon_n}}. \tag{23}$$

Пусть $N = N(r)$ - наименьшее целое число, обладающее свойством $|a_n| \geq e^2 r$, если $n > N$, N_0 - фиксированное число такое, что $|a_{N_0}| \geq 1$.

Функцию $F(z)$ представим в виде суммы:

$$F(z) = E(z) \sum_{n=1}^{N_0-1} P_n(z) + E(z) \sum_{n=N_0}^{N-1} P_n(z) + E(z) \sum_{n=N}^\infty P_n(z) = F_1(z) + F_2(z) + F_3(z).$$

Рассмотрим слагаемое $F_3(z)$. Из условия (21) и неравенства (23) следует, что

$$\sum_{n=N}^\infty P_n(z) \leq C, \text{ где } C - \text{некоторая постоянная.}$$



Рассмотрим $F_2(z)$. Так как $|a_n| \geq 1$ при $n > N_0$, то в силу неравенства (23) будет справедлива оценка

$$|P_n(z)| \leq \exp(-r_n^{\varepsilon_n})(er_n^{\varepsilon_n}).$$

Учитывая полученную оценку, получим, что для любого $\varepsilon > 0$ при $r > R(\varepsilon)$ имеет место $|F_2(z)| < r^\varepsilon$.

Поскольку в представлении $F_1(z)$ сумма содержит конечное число слагаемых, то из полученных оценок следует, что $F(z) \in E_0$.

Теорема полностью доказана.

В заключение покажем, что если последовательность A , $|a_1| > 0$, является интерполяционной в классе E_0 , то и последовательность $A_0 = A \cup \{0\}$ также является интерполяционной в этом классе. Действительно, рассмотрим интерполяционную задачу (4) для последовательности A_0 . Пусть $f \in E_0$ – решение интерполяционной задачи (4) для последовательности A . Тогда функция

$$f_1(z) = f(z) + \frac{E_A(z)}{E_A(0)} [b_0 - f(0)]$$

принадлежит классу E_0 и является решением поставленной интерполяционной задачи. Тем самым, ограничение $a_1 \neq 0$ не является существенным.

Замечание. Пространства целых функций $[\rho(r), \sigma]$ уточненного порядка $\rho(r)$, типа меньше или равного σ и пространства целых функций $[\rho(r), \sigma]$ уточненного порядка $\rho(r)$, типа меньше σ рассматривались в работах [6], [7], [8]. Интерполяционная задача в классе аналитических функций нулевого порядка в полуплоскости рассматривалась в работе [9], в работах [10], [11], [12] рассматривалась интерполяционная задача в различных классах аналитических функций ненулевого порядка в полуплоскости.

Список литературы References

1. Леонтьев А.Ф. 1948. Об интерполировании в классе целых функций конечного порядка. ДАН СССР, № 5: 785-787.
Leont'ev A.F. 1948. On interpolation in the class of entire functions of finite order. Dokl. Akad. Nauk SSSR, № 5: 785-787 (in Russian).
2. Малютин К.Г. 1980. Интерполяция голоморфными функциями. Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Харьков, 104 с.
Malyutin AG 1980. Interpolation by polymorphic functions. Dis. ... Cand. Sci. Sciences. Kharkov, 104 p. (in Russian).
3. Малютин К.Г., Боженко О.А. 2013. Задача кратной интерполяции в классе целых функций нулевого порядка. Сборник трудов Ин-та математики НАН Украины, № 10 (4-5): 412-423.
Malyutin K.G., Bozhenko O.A. 2013. The problem of multiple interpolation in the class of entire functions of order zero. Collection of works of the Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine, № 10 (4-5): 412-423 (in Russian).
4. Левин Б. Я. 1956. Распределение корней целых функций. М., ГИТТЛ: 632. (Levin B.Ya. 1980. Distribution of Zeros of Entire Functions. English revised edition Amer. Math. Soc. Providence, RI: 523)
Levin B.Ya. 1980. Distribution of Zeros of Entire Functions. English revised edition Amer. Math. Soc. Providence, RI: 523.
5. Себаштьян-и-Силва Жозе. 1957. О некоторых классах локально выпуклых пространств, важных в приложениях. Математика, № 1 (1): 60-77.
Sebastiao e Silva J. 1957. Certain classes of locally convex spaces, which are important in applications. Mathematics, № 1 (1): 60-77 (in Russian).
6. Malyutin K.G., Malyutina T.I. 2015. Linear Functionals in Some Spaces of Entire Functions of Finite Order. Istanbul University Science Faculty the Journal of Mathematics, Physics and Astronomy, № 6: 1-6.
7. Malyutin K.G., Studenikina L.I. 2016. Linear functionals in space of entire functions of finite order and less of the given type. Matematychni Studii, № 46 (2): 45-50.

8. Малютин К.Г., Студеникина Л.И., Ковалев В.Г. 2016. Линейный функционал в пространстве целых функций $[\rho(r), \sigma]$. Известия ЮЗГУ. Серия: Техника и технология, № 2 (19): 128-130.

Malyutin K.G., Studenikina L.I., Kovalev V.G. 2016. Linear functionals in space of entire functions $[\rho(r), \sigma]$. Southwest State University. Izvestiya: Engineering and technology, № 2 (19): 128-130 (in Russian).

9. Боженко О.А., Малютин К.Г. 2014. Задача кратной интерполяции в классе аналитических функций нулевого порядка в полуплоскости. Уфимск. матем. журн., № 6 (1): 18-29.

Bozhenko O.A., Malyutin K.G. Problem of multiple interpolation in class of analytical functions of order zero in half-plane. Ufa Mathematical Journal, № 6 (1): 18-28. (in Russian) .

10. Малютин К.Г. 1993. Задача кратной интерполяции в полуплоскости в классе аналитических функций конечного порядка и нормального типа. Матем. сб., № 184 (2): 129-144.

Malyutin K.G. 1994. The problem of multiple interpolation in the half-plane in the class of analytic functions of finite order and normal type. Sbornik: Mathematics, № 78 (1): 253-266. (in Russian)

11. Малютин К.Г. 1995. О множествах регулярного роста функций в полуплоскости. I. Изв. РАН. Сер. матем., № 59 (4): 125-154.

Malyutin K.G. 1995. Sets of regular growth of functions in a half-plane, I. Russian Academy of Sciences. Izvestiya Mathematics, № 59 (4): 785-814. (in Russian)

12. Малютин К.Г. 1995. О множествах регулярного роста функций в полуплоскости. II. Изв. РАН. Сер. матем., № 59 (5): 103 -126.

Malyutin K.G. 1995. Sets of regular growth of functions in a half-plane. II. Russian Academy of Sciences. Izvestiya Mathematics, № 59 (4): 983-1006. (in Russian).



УДК 517.954.988.8

СРЕДНЕКВАДРАТИЧНЫЕ ОЦЕНКИ ПОГРЕШНОСТИ ПРОЕКЦИОННО-РАЗНОСТНОГО МЕТОДА СО СХЕМОЙ КРАНКА-НИКОЛСОН ПО ВРЕМЕНИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ПЕРИОДИЧЕСКИМ УСЛОВИЕМ НА РЕШЕНИЕ

ROOT-MEAN-SQUARE ESTIMATES OF ERRORS OF THE PROJECTION-DIFFERENCE METHOD WITH THE CRANK-NICOLSON SCHEME IN TIME FOR PARABOLIC EQUATION WITH A PERIODIC CONDITION ON THE SOLUTION

**А.С.Бондарев
A.S.Bondarev**

Воронежский государственный университет, Россия, 394018, г. Воронеж, Университетская пл., 1

Voronezh State University, 1 Universitetskaya Sq, Voronezh, 394018, Russia

E-mail: bondarev@math.vsu.ru

Аннотация. В сепарабельном гильбертовом пространстве рассматривается абстрактная параболическая задача с периодическим условием на решение. Эта задача решается приближенно проекционно-разностным методом. Дискретизация задачи по пространству проводится методом Галёркина, а по времени – с использованием схемы Кранка-Николсон. В работе получены эффективные по времени и по пространству среднеквадратичные оценки погрешности приближенных решений. Приведены условия гладкости точного решения, обеспечивающие второй порядок сходимости погрешностей к нулю по времени.

Resume. An abstract parabolic equation with a periodic condition on the solution is treated in a separable Hilbert space. This equation is solved approximately by the projection-difference method using the Galerkin method in space and the Crank-Nicolson scheme in time. Effective both in time and in space root-mean-square estimates of approximate solutions' errors are obtained in this paper. Conditions of exact solution's smoothness, which provide the second order of errors' vanishing in time, are also obtained.

Ключевые слова: гильбертово пространство, параболическое уравнение, периодическое условие, проекционно-разностный метод, схема Кранка-Николсон.

Keywords: Hilbert space, parabolic equation, periodic condition, projection-difference method, Crank-Nicolson scheme.

Точная и приближенная задачи

Предполагается, что задана тройка сепарабельных гильбертовых пространств $V \subset H \subset V'$, где пространство V' – двойственное к V , а пространство H отождествляется со своим двойственным. Оба вложения плотны и непрерывны. Рассмотрим полуторалинейную по $u, v \in V$ форму $a(u, v)$.

Пусть для $u, v \in V$

$$|a(u, v)| \leq \mu \|u\|_V \|v\|_V, \quad \operatorname{Re} a(u, u) \geq \alpha \|u\|_V^2, \quad (1)$$

где $\alpha > 0$. Форма $a(u, v)$ порождает линейный ограниченный оператор $A: V \rightarrow V'$, такой, что $(Au, v) = a(u, v)$, где выражение типа (z, v) есть значение функционала $z \in V'$ на элементе $v \in V$. Если $z \in H$, то (z, v) – скалярное произведение в H [Aubin, 1977, ch. 2].

Рассмотрим в V' на $[0, T]$ параболическую задачу:

$$u'(t) + Au(t) = f(t), \quad u(0) = u(T). \quad (2)$$

Здесь и далее производные функций понимаются в обобщенном смысле.



В [Lions, Magenes, 1971, ch. 3, theorem 6.1] указано существование слабого решения задачи (2). Теорема 1 [Lions, Magenes, 1971]. Предположим, что в задаче (2) функция $f \in L_2(0, T; V')$. Тогда существует единственная функция $u(t)$ такая, что $u \in L_2(0, T; V) \cap C([0, T], H)$, $u' \in L_2(0, T; V')$. Функция $u(t)$ удовлетворяет почти всюду на $[0, T]$ уравнению (2) и для нее выполняется периодическое условие.

В работе [Бондарев, Смагин, 2014] задача (2) решалась приближенно полностью дискретным проекционно-разностным методом с использованием по времени неявной схемы Эйлера, которая, как известно, является разностной схемой первого порядка аппроксимации.

Схема Кранка-Николсон в настоящей работе позволила получить оценки скорости сходимости погрешности к нулю по времени с порядком вплоть для второго. Заметим, что схема Кранка-Николсон дает второй порядок убывания по времени погрешностей только при условии достаточной гладкости точного решения. Поэтому потребуем от исходных данных задачи (2) большую гладкость, чем в теореме 1.

В [Бондарев, 2015] с помощью аппроксимации задачи (2) методом Галеркина получена теорема о гладкой разрешимости задачи (2). Будем считать, что в пространстве V существует полная система элементов $\{\omega_m\}_{m=1}^\infty$. Рассмотрим линейную оболочку $L(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m) = V_m \subset V$. Обозначим P_m – ортогональный проектор пространства H на V_m . В [Бондарев, 2015] предполагается выполненной равномерная по m оценка

$$\|P_m\|_{V \rightarrow V} \leq C. \tag{3}$$

Заметим, что такая система $\{\omega_m\}_{m=1}^\infty$ существует, например, если вложение $V \subset H$ компактно [Смагин, Тужикова, 2004].

Теорема 2 [Бондарев, 2015]. Предположим, что выполнено (3). Пусть для всех $u, v \in V$ форма $a(u, v)$ удовлетворяет условиям (1). Пусть функция $t \rightarrow f(t) \in V'$ дифференцируема, $f' \in L_2(0, T; V')$ и выполняется равенство $f(0) = f(T)$. Тогда слабое решение задачи (2) будет таким, что $u' \in L_2(0, T; V) \cap C([0, T], H)$, $u'' \in L_2(0, T; V')$, причем справедлива оценка

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|u'(t)\|_H^2 + \int_0^T \|u'(t)\|_V^2 dt + \int_0^T \|u''(t)\|_{V'}^2 dt \leq C \int_0^T (\|f(t)\|_{V'}^2 + \|f'(t)\|_{V'}^2) dt.$$

Перейдем к построению приближенной задачи. Пусть V_h , где h – положительный параметр, есть произвольное конечномерное подпространство пространства V . Определим пространство V'_h , задав на $u_h \in V_h$ двойственную норму $\|u_h\|_{V'_h} = \sup |(u_h, v_h)|$, где точная верхняя граница берется по всем $v_h \in V_h$ с $\|v_h\|_V = 1$. Очевидно, что $\|u_h\|_{V'_h} \leq \|u_h\|_V$. Пусть P_h – ортопроектор в пространстве H на V_h . Как замечено в [Вайникко, Оя, 1975], оператор P_h допускает расширение по непрерывности до $\overline{P}_h : V' \rightarrow V'_h$, причем для $u \in V'$ справедливо $\|\overline{P}_h u\|_{V'_h} \leq \|u\|_{V'}$. Отметим для $u \in V'$ и $v \in V$ важное соотношение $(\overline{P}_h u, v) = (u, P_h v)$, полученное в [Смагин, 1997].

Для построения приближенных решений возьмем равномерное разбиение $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_N = T$ отрезка $[0, T]$, где $N \in \mathbb{N}$. В подпространстве $V_h \subset V$ рассмотрим разностную задачу

$$(u_k^h - u_{k-1}^h) \tau^{-1} + A_h(u_k^h + u_{k-1}^h) 2^{-1} = f_k^h \quad (k = \overline{1, N}), \quad u_0^h = u_N^h, \tag{4}$$

где $\tau = t_k - t_{k-1}$, оператор $A_h = \overline{P}_h A$, элемент $f_k^h \in V_h$ определим позже.

Решение задачи (4) будем называть приближенным решением задачи (2).

В случае, когда уравнение (2) рассматривается с начальным условием (задача Коши), имеется достаточно много результатов по применению проекционно-разностного метода со схемой Кранка-Николсон по времени. В частности, среднеквадратичные оценки погрешности установлены в [Смагин, 2000]. Отметим также работы [Смагин, 2001б; Смагин, 2005] и близкую



по тематике работу [Смагин, 2015], где исследуется проекционно-разностный метод со схемой Кранка-Николсон для вариационного параболического уравнения с нелокальным интегральным условием на решение.

Лемма 1. Задача (4) имеет единственное решение.

Доказательство. Учитывая конечномерность задачи (4), достаточно доказать, что однородная задача имеет только нулевое решение. Итак, рассмотрим задачу

$$(v_k^h - v_{k-1}^h)\tau^{-1} + A_k^h(v_k^h + v_{k-1}^h)2^{-1} = 0, \quad (k = \overline{1, N}), \quad v_0^h = v_N^h. \quad (5)$$

Умножим уравнение (5) на $(v_k^h + v_{k-1}^h)\tau$ скалярно в H . Заметим, что

$$(v_k^h - v_{k-1}^h, v_k^h + v_{k-1}^h) = \|v_k^h\|_H^2 - \|v_{k-1}^h\|_H^2 + i \cdot 2 \operatorname{Im}(v_k^h, v_{k-1}^h),$$

где $i = \sqrt{-1}$. Тогда из (5) получим

$$\|v_k^h\|_H^2 - \|v_{k-1}^h\|_H^2 + i \cdot 2 \operatorname{Im}(v_k^h, v_{k-1}^h) + (A_k^h(v_k^h + v_{k-1}^h)2^{-1}, v_k^h + v_{k-1}^h)\tau = 0.$$

Перейдем к вещественной части последнего равенства.

$$\|v_k^h\|_H^2 - \|v_{k-1}^h\|_H^2 + \frac{\tau}{4} \operatorname{Re} \left[a(t_k, v_k^h + v_{k-1}^h, v_k^h + v_{k-1}^h) + a(t_{k-1}, v_k^h + v_{k-1}^h, v_k^h + v_{k-1}^h) \right] = 0.$$

Отсюда и условия (1) следует оценка

$$\|v_k^h\|_H^2 - \|v_{k-1}^h\|_H^2 + 2^{-1} \alpha \|v_k^h + v_{k-1}^h\|_V^2 \tau \leq 0.$$

Суммируем последние неравенства по всем $k = \overline{1, N}$. Учитывая, что $v_0^h = v_N^h$, получим $\sum_{k=1}^N \|v_k^h + v_{k-1}^h\|_V^2 \tau = 0$. Следовательно, $v_k^h + v_{k-1}^h = 0$ для всех $k = \overline{1, N}$. Подставив последнее равенство в (5), получим $v_k^h - v_{k-1}^h = 0$. Из периодического условия тогда следует, что $v_k^h = 0$ для всех $k = \overline{0, N}$.

Итак, задача (4) имеет единственное решение $(u_0^h, u_1^h, \dots, u_N^h)$.

Оценки погрешностей

Далее будем предполагать, что форма $a(u, v)$ является симметричной, то есть $a(u, v) = \overline{a(v, u)}$, где черта над комплексным числом означает переход к сопряженному числу.

Из предположения симметричности формы и условия (1) следует положительная определенность и самосопряженность оператора $A_h : V_h \rightarrow V_h$, причем под скалярным произведением в V_h понимается сужение скалярного произведения в H .

Значит, существует самосопряженный положительно определенный оператор $A_h^{1/2} : V_h \rightarrow V_h$, а также операторы $A_h^{-1}, A_h^{-1/2} : V_h \rightarrow V_h$.

Будем теперь считать, что $f_k^h = \frac{1}{\tau} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \overline{P_h} f(t) dt$.

Далее будут установлены в соответствующих нормах оценки погрешностей приближенных решений, что позволит доказать сходимость приближенных решений к точному, а также получить и порядки скорости сходимости, точные по порядку аппроксимации.

Теорема 3. Пусть $u(t)$ – слабое решение задачи (2), для которой выполнены все указанные выше условия, а $(u_0^h, u_1^h, \dots, u_N^h)$ – решение задачи (4). Тогда справедлива оценка

$$M \left\{ \frac{1}{\tau} \sum_{k=1}^N \left\| \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left[\frac{u(t_k) + u(t_{k-1})}{2} - u(t) \right] dt \right\|_H^2 + \int_0^T \|(I - P_h)u(t)\|_H^2 dt \right\}. \quad (6)$$



Доказательство. Применим к равенству (2) оператор $\overline{P_h}$, проинтегрируем полученное тождество по t от t_{k-1} до t_k , разделим на τ . Вычтем из (4) полученное соотношение и для $z_k^h = u_k^h - P_h u(t_k)$ получим:

$$\frac{z_k^h - z_{k-1}^h}{\tau} + A_h \frac{z_k^h + z_{k-1}^h}{2} = A_h P_h \frac{u(t_k) + u(t_{k-1})}{2} - \frac{1}{\tau} \int_{t_{k-1}}^{t_k} A_h u(t) dt. \quad (7)$$

Преобразуем правую часть (7):

$$A_h P_h \frac{u(t_k) + u(t_{k-1})}{2} - \frac{1}{\tau} \int_{t_{k-1}}^{t_k} A_h u(t) dt = \frac{1}{\tau} A_h P_h \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left[\frac{u(t_k) + u(t_{k-1})}{2} - u(t) \right] dt + \frac{1}{\tau} A_h \int_{t_{k-1}}^{t_k} (P_h - I) u(t) dt = I_1 + I_2.$$

Учитывая последнее равенство, умножим (7) на $A_h^{-1} (z_k^h + z_{k-1}^h) 2^{-1}$ скалярно в H .

$$\left(\frac{z_k^h - z_{k-1}^h}{\tau}, A_h^{-1} \frac{z_k^h + z_{k-1}^h}{2} \right) + \left\| \frac{z_k^h + z_{k-1}^h}{2} \right\|_H^2 = \left(I_1 + I_2, A_h^{-1} \frac{z_k^h + z_{k-1}^h}{2} \right). \quad (8)$$

Преобразуем первое слагаемое в левой части (8).

$$\left(\frac{z_k^h - z_{k-1}^h}{\tau}, A_h^{-1} \frac{z_k^h + z_{k-1}^h}{2} \right) = \frac{1}{2\tau} \left[\|A_h^{-1/2} z_k^h\|_H^2 - \|A_h^{-1/2} z_{k-1}^h\|_H^2 + 2i (A_h^{-1/2} z_k^h, A_h^{-1/2} z_{k-1}^h) \right].$$

Возьмем две вещественные части (8), умноженные на τ . Получим

$$\|A_h^{-1/2} z_k^h\|_H^2 - \|A_h^{-1/2} z_{k-1}^h\|_H^2 + 2 \left\| \frac{z_k^h + z_{k-1}^h}{2} \right\|_H^2 \tau = 2Re \left(I_1 + I_2, A_h^{-1} \frac{z_k^h + z_{k-1}^h}{2} \right) \tau. \quad (9)$$

Оценим слагаемые в правой части (9).

$$2Re \left(A_h P_h \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left[\frac{u(t_k) + u(t_{k-1})}{2} - u(t) \right] dt, A_h^{-1} \frac{z_k^h + z_{k-1}^h}{2} \right) \leq \frac{1}{\varepsilon_1 \tau} \left\| \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left[\frac{u(t_k) + u(t_{k-1})}{2} - u(t) \right] dt \right\|_H^2 + \varepsilon_1 \left\| \frac{z_k^h + z_{k-1}^h}{2} \right\|_H^2 \tau. \quad (10)$$

Аналогично

$$2Re \left(A_h \int_{t_{k-1}}^{t_k} (P_h - I) u(t) dt, A_h^{-1} \frac{z_k^h + z_{k-1}^h}{2} \right) \leq \frac{1}{\varepsilon_2} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|(I - P_h) u(t)\|_H^2 dt + \varepsilon_2 \left\| \frac{z_k^h + z_{k-1}^h}{2} \right\|_H^2 \tau. \quad (11)$$

Положим в оценках (10) и (11) $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{1}{2}$. Тогда из равенства (9) и оценок (10) и

(11) получим

$$\|A_h^{-1/2} z_k^h\|_H^2 - \|A_h^{-1/2} z_{k-1}^h\|_H^2 + \left\| \frac{z_k^h + z_{k-1}^h}{2} \right\|_H^2 \tau \leq \frac{2}{\tau} \left\| \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left[\frac{u(t_k) + u(t_{k-1})}{2} - u(t) \right] dt \right\|_H^2 + 2 \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|(I - P_h) u(t)\|_H^2 dt.$$

Просуммировав последние оценки по $k = \overline{1, N}$, получим

$$\sum_{k=1}^N \left\| \frac{z_k^h + z_{k-1}^h}{2} \right\|_H^2 \tau \leq \frac{2}{\tau} \sum_{k=1}^N \left\| \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left[\frac{u(t_k) + u(t_{k-1})}{2} - u(t) \right] dt \right\|_H^2 + 2 \int_0^T \|(I - P_h) u(t)\|_H^2 dt. \quad (12)$$



Для завершения доказательства теоремы рассмотрим оценку

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^N \left\| \frac{u(t_k) + u(t_{k-1})}{2} - \frac{u_k^h + u_{k-1}^h}{2} \right\|_H^2 \tau \leq 3 \sum_{k=1}^N \left\| \frac{z_k^h + z_{k-1}^h}{2} \right\|_H^2 \tau + \\ & 3 \sum_{k=1}^N \left\| (I - P_h) \left[\frac{u(t_k) + u(t_{k-1})}{2} - \frac{1}{\tau} \int_{t_{k-1}}^{t_k} u(t) dt \right] \right\|_H^2 \tau + 3 \sum_{k=1}^N \left\| (I - P_h) \frac{1}{\tau} \int_{t_{k-1}}^{t_k} u(t) dt \right\|_H^2 \tau = \\ & 3 \sum_{k=1}^N \left\| \frac{z_k^h + z_{k-1}^h}{2} \right\|_H^2 \tau + \frac{3}{\tau} \sum_{k=1}^N \left\| \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left[\frac{u(t_k) + u(t_{k-1})}{2} - u(t) \right] dt \right\|_H^2 \tau + 3 \int_0^T \|(I - P_h)u(t)\|_H^2 dt. \quad (13) \end{aligned}$$

Теперь оценка (6) следует из (12) и (13). +

Из оценки (6) получим оценки погрешности с порядком скорости сходимости по времени.

Теорема 4. Пусть выполнены условия теоремы 3. Пусть $u(t)$ – слабое решение задачи (2), такое, что $u' \in L_p(0, T; H)$ для некоторого p , что $1 \leq p \leq 2$. Пусть $(u_0^h, u_1^h, \dots, u_N^h)$ – решение задачи (4). Тогда справедлива оценка

$$\sum_{k=1}^N \left\| \frac{u(t_k) + u(t_{k-1})}{2} - \frac{u_k^h + u_{k-1}^h}{2} \right\|_H^2 \tau \leq M \left\{ \tau^{3-2/p} \left(\int_0^T \|u'(t)\|_H^p dt \right)^{2/p} + \int_0^T \|(I - P_h)u(t)\|_H^2 dt \right\}. \quad (14)$$

Доказательство. Оценим первое слагаемое в правой части (6). Заметим, что

$$\frac{1}{\tau} \sum_{k=1}^N \left\| \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left[\frac{u(t_k) + u(t_{k-1})}{2} - u(t) \right] dt \right\|_H^2 \leq \sum_{k=1}^N \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left\| \frac{u(t_k) + u(t_{k-1})}{2} - u(t) \right\|_H^2 dt.$$

Проведем оценку подынтегрального выражения

$$\begin{aligned} \left\| \frac{u(t_k) + u(t_{k-1})}{2} - u(t) \right\|_H^2 &= \left\| \frac{1}{2} \int_t^{t_k} u'(s) ds - \frac{1}{2} \int_{t_{k-1}}^t u'(s) ds \right\|_H^2 \leq \\ & \left(\int_{t_{k-1}}^{t_k} \|u'(s)\|_H ds \right)^2 \leq \tau^{2-2/p} \left(\int_{t_{k-1}}^{t_k} \|u'(s)\|_H^p ds \right)^{2/p}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau} \sum_{k=1}^N \left\| \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left[\frac{u(t_k) + u(t_{k-1})}{2} - u(t) \right] dt \right\|_H^2 &\leq \tau^{3-2/p} \sum_{k=1}^N \left(\int_{t_{k-1}}^{t_k} \|u'(t)\|_H^p dt \right)^{2/p} \leq \\ & \tau^{3-2/p} \left(\int_0^T \|u'(t)\|_H^p dt \right)^{2/p}. \quad (15) \end{aligned}$$

Теперь оценка (14) следует из оценок (6) и (15). +

Обратим внимание, что оценка (14) дает лишь порядок сходимости соответствующих норм погрешностей к нулю не выше первого. Однако если от решения $u(t)$ потребовать большую гладкость, то можно получить порядок сходимости вплоть до второго.

Теорема 5. Пусть выполнены условия теоремы 3. Пусть $u(t)$ – слабое решение задачи (2), такое, что $u'' \in L_p(0, T; H)$ для некоторого p , что $1 \leq p \leq 2$. Пусть $(u_0^h, u_1^h, \dots, u_N^h)$ – решение задачи (4). Тогда справедлива оценка



$$\sum_{k=1}^N \left\| \frac{u(t_k) + u(t_{k-1})}{2} - \frac{u^h + u_{k-1}^h}{2} \right\|_H^2 \tau \leq M \left\{ \tau^{5-2/p} \left(\int_0^T \|u''(t)\|_H^p dt \right)^{2/p} + \int_0^T \|(I - P_h)u(t)\|_H^2 dt \right\}. \quad (16)$$

Доказательство. Оценим первое слагаемое в правой части (6). Заметим, что в результате замены порядка интегрирования и преобразования интегрированием по частям

$$\begin{aligned} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left(\frac{u(t_k) - u(t_{k-1})}{2} - u(t) \right) dt &= \frac{1}{2} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left(\int_t^{t_k} u'(s) ds - \int_{t_{k-1}}^t u'(s) ds \right) dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_{t_{k-1}}^{t_k} [2s - t_{k-1} - t_k] u'(s) ds = \frac{1}{8} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (\tau^2 - [2t - t_{k-1} - t_k]^2) u''(t) dt. \end{aligned}$$

В таком случае

$$\frac{1}{\tau} \sum_{k=1}^N \left\| \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left[\frac{u(t_k) + u(t_{k-1})}{2} - u(t) \right] dt \right\|_H^2 \leq \frac{1}{64\tau} \sum_{k=1}^N \left\| \int_{t_{k-1}}^{t_k} (\tau^2 - [2t - t_{k-1} - t_k]^2) u''(t) dt \right\|_H^2.$$

Поскольку $|\tau^2 - [2t - t_{k-1} - t_k]^2| \leq \tau^2$ для $t \in (t_{k-1}, t_k)$, то получим оценку

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau} \sum_{k=1}^N \left\| \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left[\frac{u(t_k) + u(t_{k-1})}{2} - u(t) \right] dt \right\|_H^2 &\leq \frac{\tau^3}{64} \sum_{k=1}^N \left(\int_{t_{k-1}}^{t_k} \|u''(t)\|_H dt \right)^2 \leq \\ &\leq \frac{\tau^{5-2/p}}{64} \sum_{k=1}^N \left(\int_{t_{k-1}}^{t_k} \|u''(t)\|_H^p dt \right)^{2/p} \leq \frac{\tau^{5-2/p}}{64} \left(\int_0^T \|u''(t)\|_H^p dt \right)^{2/p}. \end{aligned} \quad (17)$$

Теперь оценка (16) следует из (6) и (17). +

Заметим, что в случае $u'' \in L_2(0, T; H)$ нормы погрешностей сходятся, как следует из (16), к нулю по времени со вторым порядком.

Оценки (14) и (16) позволяют получить оценки погрешности с порядком скорости сходимости и по пространственным переменным. Для этого в (14) и (16) необходимо оценить слагаемое $\int_0^T \|(I - P_h)u(t)\|_H^2 dt$.

Пусть существует гильбертово пространство E такое, что $E \subset V$, и пространство V совпадает с интерполяционным пространством $[E, H]_{1/2}$ [Lions, Magenes, 1971, p.23]. Например, если параболическое уравнение в области Ω определено равномерно эллиптическим дифференциальным оператором второго порядка и краевым условием Дирихле, то рассматриваем пространства: $H = L_2(\Omega), V = \dot{W}_2^1(\Omega), E = W_2^2(\Omega) \cap \dot{W}_2^1(\Omega)$. Если же на границе области Ω задается условие Неймана, то пространства следующие: $H = L_2(\Omega), V = W_2^1(\Omega), E = W_2^2(\Omega)$.

Пусть подпространства V_h обладают следующим аппроксимационным свойством

$$\|(I - Q_h)v\|_V \leq r_1 h \|v\|_E \quad (v \in E, h > 0), \quad (18)$$

типичным для подпространств типа конечных элементов [Марчук, Агошков, 1981, гл.2]. Здесь оператор $Q_h : V \rightarrow V_h$ является ортопроектором в пространстве V .

В работе [Смагин, 2001a] показано, что из (18) для $v \in V$ следует оценка (аналог леммы Обэна-Нитше)

$$\|(I - Q_h)v\|_H \leq r_1 h \|(I - Q_h)v\|_V. \quad (19)$$

Следствие 1. Пусть подпространства V_h обладают свойством (18).

Тогда в случае выполнения условий теоремы 4 справедлива оценка



$$\sum_{k=1}^N \left\| \frac{u(t_k) + u(t_{k-1}))}{2} - \frac{u_k^h + u_{k-1}^h}{2} \right\|_H^2 \tau \leq M \left\{ \tau^{3-2/p} \left(\int_0^T \|u'(t)\|_H^p dt \right)^{2/p} + h^2 \int_0^T \|u(t)\|_V^2 dt \right\}. \quad (20)$$

Если же выполнены условия теоремы 5 и решение $u(t)$ задачи (2) дополнительно такое, что $u \in L_2(0, T; E)$, то справедлива оценка

$$\sum_{k=1}^N \left\| \frac{u(t_k) + u(t_{k-1}))}{2} - \frac{u_k^h + u_{k-1}^h}{2} \right\|_H^2 \tau \leq M \left\{ \tau^{5-2/p} \left(\int_0^T \|u''(t)\|_H^p dt \right)^{2/p} + h^4 \int_0^T \|u(t)\|_E^2 dt \right\}. \quad (21)$$

Доказательство. Заметим, что для всех $v \in V$

$$\|(I - P_h)v\|_H = \|(I - P_h)(I - Q_h)v\|_H \leq \|(I - Q_h)v\|_H. \quad (22)$$

Доказательство оценок (20) и (21) следует из оценок (14) и (16), а также оценок

$$\int_0^T \|(I - P_h)u(t)\|_H^2 dt \leq r_1^2 h^2 \int_0^T \|(I - Q_h)u(t)\|_V^2 dt \leq r_1^2 h^2 \int_0^T \|u(t)\|_V^2 dt$$

и, соответственно,

$$\int_0^T \|(I - P_h)u(t)\|_H^2 dt \leq r_1^2 h^2 \int_0^T \|(I - Q_h)u(t)\|_V^2 dt \leq r_1^4 h^4 \int_0^T \|u(t)\|_E^2 dt$$

которые следуют из оценок (19), (18) и (22). +

Замечание. В условиях теорем 4 и 5 можно рассмотреть и оценку погрешности

$$\sum_{k=1}^N \left\| u(t_{k-1/2}) - \frac{u_k^h + u_{k-1}^h}{2} \right\|_H^2 \tau \leq 2 \sum_{k=1}^N \left\| u(t_{k-1/2}) - \frac{u(t_k) + u(t_{k-1}))}{2} \right\|_H^2 \tau + 2 \sum_{k=1}^N \left\| \frac{u(t_k) + u(t_{k-1}))}{2} - \frac{u_k^h + u_{k-1}^h}{2} \right\|_H^2 \tau, \quad (23)$$

где $t_{k-1/2} = (t_k + t_{k-1})2^{-1}$.

Оценки второго слагаемого в правой части (23) установлены в (14) и (16). Поэтому достаточно проследить, что первое слагаемое можно оценить в аналогичных условиях с тем же порядком по τ . Например, в условиях теоремы 5 из представления

$$u(t_{k-1/2}) - \frac{u(t_k) + u(t_{k-1}))}{2} = \frac{1}{2} \left(\int_{t_{k-1}}^{t_{k-1/2}} (t_{k-1} - t) u''(t) dt + \int_{t_{k-1/2}}^{t_k} (t - t_k) u''(t) dt \right)$$

следует оценка

$$\sum_{k=1}^N \left\| u(t_{k-1/2}) - \frac{u(t_k) + u(t_{k-1}))}{2} \right\|_H^2 \tau \leq \tau^{5-2/p} \left(\int_0^T \|u''(t)\|_H^p dt \right)^{2/p}.$$

Список литературы

References

1. Бондарев А. С. 2015. Разрешимость вариационного параболического уравнения с периодическим условием на решение. Вестник Воронежского государственного университета. Серия: физика, математика, № 4: 78–88.
2. Bondarev A.S. 2015. The solvability of the variational parabolic equation with a periodic condition on the solution. Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Serija: Fizika. Matematika. [Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics]. 4: 78–88. (in Russian)
3. Бондарев А. С., Смагин В. В. 2014. Сходимость проекционно-разностного метода приближённого решения параболического уравнения с периодическим условием на решение. Вестник Воронежского государственного университета. Серия: физика, математика, № 2: 81–94.
4. Bondarev A.S., Smagin V.V. 2014. The convergence of the projection-difference method of approximate solution of parabolic equation with a periodic condition on the solution. Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Serija: Fizika. Matematika. [Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics]. 2: 81–94. (in Russian)
5. Вайникко Г. М., Оя П. Э. 1975. О сходимости и быстроте сходимости метода Галёркина для абстрактных эволюционных уравнений. Дифференциальные уравнения, 11(7): 1269–1277.

Vaynikko G.M., Oya P.E. 1975. O shodimosti i bystrote shodimosti metoda Galjorkina dlja abstraktnyh jevoljucionnyh uravnenij [About the convergence and the velocity of convergence of the Galerkin's method for abstract evolutionary equations]. *Differential'nye uravneniya*. [Differential Equations]. 11(7): 1269–1277. (in Russian)

4. Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. 1971. Неоднородные граничные задачи и их приложения. Пер. с фр. М., Мир, 372. (Lions J.-L., Magenes E. 1968. *Problemes aux limites non homogenes et applications*. Vol. 1. Dunod, Paris).

Lions J.-L., Magenes E. 1971. Neodnorodnye granichnye zadachi i ih prilozhenija [Nonhomogeneous boundary problems and applications]. Moscow, Mir, 372. (Lions J.-L., Magenes E. 1968. *Problemes aux limites non homogenes et applications*. Vol. 1. Dunod, Paris).

5. Марчук Г. И., Агoshков В. И. 1981. Введение в проекционно-сеточные методы. М., Наука, 416.

Marchuk G.I., Agoshkov V.I. 1981. Vvedenie v proekcionno-setochnye metody [Introduction to projective-difference methods]. Moscow, Nauka, 416. (in Russian).

6. Обэн Ж.-П. 1977. Приближенное решение эллиптических краевых задач. Пер. с англ. М., Мир, 384. (Aubin J.-P. 1972. *Approximation of elliptic boundary-value problems*. Pure and applied mathematics. Vol. XXVI. Wiley-Interscience. New York – London – Sydney).

Aubin J.-P. 1977. Priblizhennoe reshenie jellipticheskikh kraevyh zadach [Approximation of elliptic boundary-value problems]. Moscow, Mir, 384. (Aubin J.-P. 1972. *Approximation of elliptic boundary-value problems*. Pure and applied mathematics. Vol. XXVI. Wiley-Interscience. New York – London – Sydney).

7. Смагин В. В. 1997. Оценки скорости сходимости проекционного и проекционно-разностного методов для слабо разрешимых параболических уравнений. Математический сборник, 188 (3): 143–160.

Smagin V.V. 1997. Ocenki skorosti shodimosti proekcionnogo i proekcionno-raznostnogo metodov dlja slabo razreshimyh parabolicheskikh uravnenij [Estimates of the velocity of convergence of projective and projection-difference methods for the weakly solvable parabolic equations]. *Matematicheskij sbornik* [Sbornik: Mathematics]. 188(3): 143–160. (in Russian)

8. Смагин В. В. 2000. Среднеквадратичные оценки погрешности проекционно-разностного метода для параболических уравнений. Журнал вычислительной математики и математической физики, 40(6): 908–919.

Smagin V.V. 2000. Mean-square estimates of the error of a projection-difference method for parabolic equations. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 40(6): 868–879.

9. Смагин В. В. 2001. Проекционно-разностные методы приближенного решения параболических уравнений с несимметричными операторами. Дифференциальные уравнения, 37(1): 115–123.

Smagin V.V. 2001. Projection-difference methods for the approximate solution of parabolic equations with nonsymmetric operators. *Differential Equations*. 37(1): 128–137.

10. Смагин В. В. 2001. Энергетические оценки погрешности проекционно-разностного метода со схемой Кранка-Николсон для параболических уравнений. Сибирский математический журнал, 42 (3): 670–682.

Smagin V.V. Energy error estimates for the projection-difference method with the Crank-Nicolson scheme for parabolic equations. *Siberian Mathematical Journal*. 42(3): 568–578.

11. Смагин В. В., Тужикова М. В. 2004. О слабой разрешимости нелинейной вариационной задачи параболического типа. Вестник Воронежского государственного университета. Серия: физика, математика, № 1: 153–156.

Smagin V.V., Tuzhikova M.V. 2004. O slaboj razreshimosti nelinejnoj variacionnoj zadachi parabolicheskogo tipa [About the weak solvability of the non-linear variational problem of the parabolic type.] *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta*. Serija: Fizika. Matematika. [Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics]. 1: 153–156. (in Russian)

12. Смагин В. В. 2005. О скорости сходимости проекционно-разностных методов для гладко разрешимых параболических уравнений. Математические заметки, 78(6): 907–918.

Smagin V.V. 2005. On the rate of convergence of projection-difference method for smoothly solvable parabolic equations. *Mathematical Notes*. 78(6): 841–852.

13. Смагин В. В. 2015. Проекционно-разностный метод со схемой Кранка-Николсон по времени приближенного решения параболического уравнения с интегральным условием на решение. Дифференциальные уравнения, 51(1): 116–126.

Smagin V.V. 2015. Projection-difference method with the Crank-Nicolson scheme in time for the approximate solution of a parabolic equation with an integral condition on the solution. *Differential Equations*. 51(1): 116–126.



УДК 517.958:531.72, 517.958:539.3(4)

DETERMINATION OF SOURCE AND VARIABLE COEFFICIENT IN THE INVERSE PROBLEM FOR THE WAVE'S EQUATION

G.I. Schabanowa

Siberian Automobile and highway Academy (SibADI), 644080, Omsk, Pr. Mira 5, Russian Federation

E-mail: gal_schabanowa2014@yandex.ru

Resume. Investigated the one-dimensional inverse problem with an unknown source and an unknown variable coefficient on two known solutions at fixed points in the plane. Inverse problem using the method of integral transforms is reduced to inverse problem of Sturm-Liouville problem. The uniqueness theorems are proved.

Keywords: integral transforms, operator, bilinear system of integral equations, uniqueness theorems.

1. Introduction

Inverse problems of mathematical physics are of interest to many disciplines: geophysics, seismic, acoustic, radar, and medicine. Various statements and methods of solution of inverse problems. The actual problem is the determining the variable coefficients of the partial differential equations. A wide class of inverse problems are problems of interpretation of observational data, in which the results of the field measurements required to determine the sources of the fields or elements of the distribution environment [1].

The investigated problem is reduced to inverse problem of Sturm-Liouville problem. The original formulation is reduced to spectral by method of integral transformations, and solve the system of nonlinear integral equations containing unknown functions. The properties of the required functions are assumed set. Solution of inverse problems closely connected with the spectral theory of differential operators studied by M. M. Lavrentiev, V. G. Yakhno, K. G. Reznitskaya [2], A.S.Alekseev [3], M. M. Lavretiev and K.G. Reznitskaya [4].

The most similar problem formulation published in [2]. Closest to the topic of the research tasks are solved by reseach-workers V.G. Romanov [5], M. M.Lavrentiev et al.[2].

The purpose of the work is the building constructive solution of the problem; description of classes of functions, in which the recovered solution; the proof of the uniqueness theorems.

The investigated problem is of practical importance as a model for interpretation of seismic data and exploration. Algorithms can be useful in the numerical solution of inverse problems in special classes of functions. The obtained results can be used in further studies on the theory of inverse problems.

2. Statement of the problem

Let in the domain $-\infty < x, y < \infty, z \geq 0, t > 0$ is the wave equation

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - q(z)U(x, y, z, t). \quad (1)$$

Generalized function $U(x, y, z, t)$ is equal to zero when $t < 0$ and satisfies the equation (1), initial data

$$U(x, y, z, t) \Big|_{t=+0} = 0, \quad (2)$$

$$U'_t(x, y, z, t) \Big|_{t=+0} = 0, \quad (3)$$

and boundary condition

$$U'_z(x, y, z, t) \Big|_{z=0} = \delta(t) \cdot f(\sqrt{x^2 + y^2}) = \delta(t) \cdot f(\rho). \quad (4)$$

$\delta(t)$ – the Delta function of Dirac with the carrier at the point $t = t_0$,



$\delta(t) = \lim_{t_0 \rightarrow +0} \delta(t - t_0)$. $f(\sqrt{x^2 + y^2}) = f(\rho)$ is an unknown real function: finite, positively defined and n times differentiable in the interval $(0, \varepsilon) \ni \rho$. $f(\rho) = 0$ when $\rho \geq \varepsilon$. $f(\rho)$ satisfies the Dirichlet conditions. We assume that the set of functions $f(\rho)$ with these properties is the class Φ .

$U(x, y, z, t)$ – is a generalized solution of the boundary problem (1)-(4) belongs to the class \mathcal{U} [2].

For information about the solution of the direct problem in two fixed points in the plane $z = 0$, such that $\sqrt{(x^j)^2 + (y^j)^2} = \rho^j$, $j = 0, 1$,

$$U(x^j, y^j, 0, t) = \varphi^j(t), \quad j = 0, 1, \tag{5}$$

need to identify unknown potential $q(z)$ in the class of functions Q_M^a and the unknown source $f(\rho)$ in the class of functions Φ .

The class of functions Q_M^a [9] contains all functions $q(z)$, having the properties:

- $1. q(z) \in C^1[0, \infty) \cap L_1[0, \infty), \|q(z)\|_{L_1[0, \infty)} \leq M.$

- $2. q(z)$ has an absolute minimum $q_{\min abs} = q(b^*) = m < 0.$

- $3. \text{For the large values of the argument } z \geq b^* \text{ } q(z) \text{ takes negative values and monotonically tends to zero: } q(z) = o\left(-\frac{1}{z^2}\right), z \rightarrow \infty.$

- $4. \text{A sequence of elements of a linear normed space } L_1[0, \infty)$

$$q_n(z) = \begin{cases} q(z), & \text{if } z \in [0, b_n], \\ 0, & \text{if } z \in (b_n, \infty) \end{cases}$$

is converged in the space $L_1[0, \infty)$ to an element of this space $q(z)$ by the norm:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|q_n(z) - q(z)\|_{L_1[0, \infty)} = 0.$$

- $5. q(z)$ – entire function such that $q(0) = A > 0.$

3. Solution of the direct problem

The solution of the direct problem will be conduct by method of integral transformations, described in [2]. Apply to problem (1)-(4) two-dimensional Fourier transform in the variables x and y . Let's introduce the designation

$$W_1(p, s, z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx+isy} U(x, y, z, t) dx dy. \tag{6}$$

Get the auxiliary problem in the form

$$\frac{\partial^2 W_1}{\partial t^2} = -(p^2 + s^2)W_1(p, s, z, t) + \frac{\partial^2 W_1}{\partial z^2} - q(z)W_1(p, s, z, t), \tag{7}$$

$$W_1(p, s, z, t) \Big|_{t=+0} = 0, \tag{8}$$

$$[W_1]'_t(p, s, z, t) \Big|_{t=+0} = 0, \tag{9}$$

$$[W_1]'_z(p, s, z, t) \Big|_{z=0} = \frac{1}{2\pi} \delta(t) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx+isy} f(x, y) dx dy = \delta(t)A(p, s), \tag{10}$$

where $A(p, s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx+isy} f(x, y) dx dy. \tag{11}$

To problem (7)-(10) we apply the Laplace transform on the variable t

$$W_2(p, s, z, r) = \int_0^{\infty} e^{-rt} W_1(p, s, z, t) dt. \tag{12}$$

Get the ordinary differential equation

$$(p^2 + s^2 + r^2)W_2(p, s, z, r) = \frac{\partial^2 W_2}{\partial z^2} - q(z)W_2(p, s, z, r) \tag{13}$$

with the initial condition



$$[W_2]'_z(p, s, z, r) \Big|_{z=0} = A(p, s). \quad (14)$$

Problem (13)-(14) will be reduced to a functional equation, if we use the generalized Fourier transform

$$W_3(p, s, \lambda, r) = \int_0^\infty \varphi(z, \lambda) W_2(p, s, z, r) dz$$

on the system of eigenfunctions of Sturm-Liouville operator.

$$W_3(p, s, \lambda, r) = -\frac{1}{p^2 + s^2 + r^2 + \lambda} \cdot A(p, s).$$

Perform the inverse transform

$$\begin{aligned} W_2(p, s, z, r) &= -A(p, s) \int_0^\infty \frac{1}{p^2 + s^2 + r^2 + \lambda} \varphi(z, \lambda) d\sigma(\lambda) = \\ &= \int_0^\infty e^{-rt} \left\{ -A(p, s) \int_0^\infty \varphi(z, \lambda) \frac{1}{\sqrt{p^2 + s^2 + \lambda}} \sin(t\sqrt{p^2 + s^2 + \lambda}) d\sigma(\lambda) \right\} dt. \end{aligned} \quad (15)$$

Compare different kind of image $W_2(p, s, z, r)$ – (12) and (15). According to a theorem of Lerch, two functions with the same Laplace transform coincide for all $t > 0$, where both functions are continuous. The Laplace transform is unique for each function $W_1(p, s, z, t)$ having this conversion. So

$$W_1(p, s, z, t) = -A(p, s) \int_0^\infty \varphi(z, \lambda) \frac{\sin(t\sqrt{p^2 + s^2 + \lambda})}{\sqrt{p^2 + s^2 + \lambda}} d\sigma(\lambda).$$

The treatment of the two-dimensional Fourier transform (4) and using the integral representation (11) $A(p, s)$ gives the solution of the direct problem:

$$\begin{aligned} U(x, y, z, t) &= \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty e^{-ipx - isy} A(p, s) \left\{ \int_0^\infty \varphi(z, \lambda) \frac{\sin(t\sqrt{p^2 + s^2 + \lambda})}{\sqrt{p^2 + s^2 + \lambda}} d\sigma(\lambda) \right\} dp ds \\ &= -\frac{1}{4\pi^2} \cdot \int_0^\infty \varphi(z, \lambda) \cdot \left[\int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty f(\tilde{x}, \tilde{y}) \cdot \left\{ \int_{-\infty}^\infty e^{ip(\tilde{x}-x)} \cdot \pi J_0(\sqrt{p^2 + \lambda} \sqrt{t^2 - (y - \tilde{y})^2}) \cdot \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \theta(t^2 - (y - \tilde{y})^2) dp \right\} d\tilde{x} d\tilde{y} \right] d\sigma(\lambda) = -\frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty \varphi(z, \lambda) \cdot \left[\int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty f(\tilde{x}, \tilde{y}) \cdot 2\pi \right. \\ &\quad \left. \frac{\cos(\sqrt{\lambda} \sqrt{t^2 - (x - \tilde{x})^2 - (y - \tilde{y})^2})}{\sqrt{t^2 - (x - \tilde{x})^2 - (y - \tilde{y})^2}} \theta(t^2 - (x - \tilde{x})^2 - (y - \tilde{y})^2) d\tilde{x} d\tilde{y} \right] d\sigma(\lambda). \end{aligned}$$

After the change of the variables $x - \tilde{x} = X$, $y - \tilde{y} = Y$ we write the solution of the direct problem $U(x, y, z, t)$ as convolution of an unknown source $f(x, y)$ and the fundamental solution of the problem for equation (1) with the known centered source

$$\delta(t)\delta(x, y).$$

$$\begin{aligned} U(x, y, z, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \varphi(z, \lambda) \left\{ f(x, y) * \frac{\cos(\sqrt{\lambda} \sqrt{t^2 - x^2 - y^2})}{\sqrt{t^2 - x^2 - y^2}} \theta(t^2 - x^2 - y^2) \right\} \cdot d\sigma(\lambda) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \varphi(z, \lambda) \left[\int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty f(x - X, y - Y) \frac{\cos(\sqrt{\lambda} \sqrt{t^2 - X^2 - Y^2})}{\sqrt{t^2 - X^2 - Y^2}} \theta(t^2 - X^2 - Y^2) dX dY \right] d\sigma(\lambda). \end{aligned}$$



4. Solution of the inverse problem. Derivation of the recurrence formula. Uniqueness theorems

On the plane $z = 0$ put $x^0 = 0, y^0 = 0$ и $(x^1)^2 + (y^1)^2 = (\rho^1)^2$.

Consider the solution of the direct problem (3)-(5) at two fixed points on the plane $z = 0$.

$$\varphi^j(t) = U(x^j, y^j, 0, t)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^\infty d\sigma(\lambda) \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty f(x^j - X, y^j - Y) \frac{\cos(\sqrt{\lambda}\sqrt{t^2 - X^2 - Y^2})}{\sqrt{t^2 - X^2 - Y^2}} \cdot$$

$$\theta(t^2 - X^2 - Y^2) dX dY, j = 0, 1. \tag{16}$$

Let's move on to polar coordinates by the formulas $x = \rho \cos \vartheta, y = \rho \sin \vartheta$. The system of integral equations (16) write in the new characters:

$$\begin{cases} \varphi^0(t) = \int_0^\infty d\sigma(\lambda) \int_{-\infty}^\infty f(\rho) \frac{\cos(\sqrt{\lambda}\sqrt{t^2 - \rho^2})}{\sqrt{t^2 - \rho^2}} \theta(t^2 - \rho^2) \rho d\rho, \\ \varphi^1(t) = \int_0^\infty d\sigma(\lambda) \int_{-\infty}^\infty f(\rho^1 - \rho) \frac{\cos(\sqrt{\lambda}\sqrt{t^2 - \rho^2})}{\sqrt{t^2 - \rho^2}} \theta(t^2 - \rho^2) \rho d\rho. \end{cases} \tag{17}$$

To given system apply the Fourier transform on the variable t with parameter α . In the transformations below we use the well-known formula

$$\int_0^\infty e^{it\alpha} \frac{\cos(\sqrt{\lambda}\sqrt{t^2 - \rho^2})}{\sqrt{t^2 - \rho^2}} \theta(t^2 - \rho^2) dt = i\pi \operatorname{sign} \alpha J_0(\rho\sqrt{\alpha^2 - \lambda}) \cdot \theta(\alpha^2 - \lambda);$$

and the formulas connecting the spherical and cylindrical functions [6]. Let's introduce the designation $\Phi^0(\alpha) = \int_0^\infty e^{it\alpha} \varphi^0(t) dt$. Then

$$\begin{aligned} \Phi^0(\alpha) &= \int_0^\infty d\sigma(\lambda) \int_0^\infty \rho f(\rho) \left\{ \int_0^\infty e^{it\alpha} \frac{\cos(\sqrt{\lambda}\sqrt{t^2 - \rho^2})}{\sqrt{t^2 - \rho^2}} \theta(t^2 - \rho^2) dt \right\} d\rho = \\ &= \int_0^\infty \left[\frac{2}{\pi} d\sqrt{\lambda} + d\sigma_1(\lambda) \right] \int_0^\infty \rho f(\rho) \{ i\pi \operatorname{sign} \alpha J_0(\rho\sqrt{\alpha^2 - \lambda}) \cdot \theta(\alpha^2 - \lambda) \} d\rho = \\ &= 2i \operatorname{sign} \alpha \int_0^\infty \rho f(\rho) \left\{ \int_0^\infty J_0(\rho\sqrt{\alpha^2 - \lambda}) \cdot \theta(\alpha^2 - \lambda) d\sqrt{\lambda} \right\} d\rho + \\ &= i\pi \operatorname{sign} \alpha \int_0^\infty \rho f(\rho) \left\{ \int_0^\infty J_0(\rho\sqrt{\alpha^2 - \lambda}) \cdot \theta(\alpha^2 - \lambda) d\sigma_1(\lambda) \right\} d\rho = \\ &= 2i \operatorname{sign} \alpha \int_0^\infty f(\rho) \sin(\rho|\alpha|) d\rho \\ &+ i\pi \operatorname{sign} \alpha \int_0^\infty \rho f(\rho) \left\{ \int_0^\infty J_0(\rho\sqrt{\alpha^2 - \lambda}) \cdot \theta(\alpha^2 - \lambda) d\sigma_1(\lambda) \right\} d\rho. \end{aligned}$$

Similarly, we write the Fourier transform of the second equation of system (17). Note that for all $\alpha > 0$ true equality $\operatorname{sign} \alpha \sin(\rho|\alpha|) = \sin(\rho\alpha)$.

$$\Phi^1(\alpha) = \int_0^\infty e^{it\alpha} \varphi^1(t) dt = 2i \int_0^\infty f(\rho_1 - \rho) \sin(\rho\alpha) d\rho +$$

$$i\pi \operatorname{sign} \alpha \int_0^\infty \rho f(\rho^1 - \rho) \left\{ \int_0^\infty J_0(\rho\sqrt{\alpha^2 - \lambda}) \cdot \theta(\alpha^2 - \lambda) d\sigma_1(\lambda) \right\} d\rho.$$

Denote the kernel of the integral equations as $K(\rho, \alpha)$ and make the change of variables $\sqrt{\alpha^2 - \lambda} = \nu, \alpha^2 - \nu^2 = \lambda, d\lambda = -2\nu d\nu$. Then

$$K(\rho, \alpha) = -\frac{1}{2} \operatorname{sign} \alpha \int_0^\infty J_0(\rho\sqrt{\alpha^2 - \lambda}) \cdot \theta(\alpha^2 - \lambda) d\sigma_1(\lambda) \operatorname{sign} \alpha \int_{-\alpha}^\alpha J_0(\rho\nu) \sigma_1'(\alpha^2 - \nu^2) \nu d\nu.$$



The solution of the inverse problem with an unknown source as a function of distance reduces to solving a bilinear system of integral equations

$$\begin{cases} \Phi^0(\alpha) = 2i \int_0^\infty f(\rho) \sin(\rho\alpha) d\rho - 2\pi i \int_0^\infty \rho f(\rho) K(\rho, \alpha) d\rho, \\ \Phi^1(\alpha) = 2i \int_0^\infty f(\rho^1 - \rho) \sin(\rho\alpha) d\rho - 2\pi i \int_0^\infty \rho f(\rho^1 - \rho) K(\rho, \alpha) d\rho, \end{cases} \quad (18)$$

containing the sought functions $f(\rho)$ and $\sigma_1'(\alpha^2 - \nu^2)$. As it's known, [7-8], on the spectral functions $\sigma(\lambda) \in \sigma^a$ unknown potential $q(z)$ is uniquely recovered in the class of functions Q_M^a .

The class of functions σ^a [8] are spectral functions, answering to descriptions:

1. $\sigma(\lambda) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{nn}(\lambda)$ mainly, i.e., at points of continuity $\sigma(\lambda)$.

2. $\sigma(\lambda)$ has the form $\sigma(\lambda) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \sqrt{\lambda} + \sigma_1(\lambda), & \text{если } \lambda \geq 0, \\ 0, & \text{если } \lambda < 0. \end{cases}$

3. $\sigma(\lambda) \in C(\lambda \geq 0) \cap C^1(\lambda > 0)$; $\sigma_1(s)$, $s = \sqrt{\lambda}$, is monotonically decreasing on the interval $(0, \infty)$.

4. $\sigma_1(s)$ is absolutely continuous.

5. $\sigma_1'(\lambda)$ is an entire function in the interval $[0, \infty)$.

$$\sigma_1'(0) = \lim_{s \rightarrow 0+} \sigma_1'(s) = -\frac{2}{\pi}.$$

Note the properties of the kernel $K(\rho, \alpha)$.

1. $\lim_{\alpha \rightarrow 0} K(\rho, \alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \text{sign} \alpha \int_{-\alpha}^{\alpha} J_0(\rho\nu) \sigma_1'(\alpha^2 - \nu^2) \nu d\nu = 0$.

2. $K(\rho, \alpha)$ is continuously for the set of the arguments.

3. $K(\rho, \alpha)$ is continuously differentiable.

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\partial K(\rho, \alpha)}{\partial \alpha} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \text{sign} \alpha \int_{-\alpha}^{\alpha} J_0(\rho\nu) \sigma_1''(\alpha^2 - \nu^2) 2\alpha \nu d\nu + 2\alpha J_0(\rho\alpha) \sigma_1'(0) = 0,$$

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\partial^2 K(\rho, \alpha)}{\partial \alpha^2} &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \{ \text{sign} \alpha \int_{-\alpha}^{\alpha} J_0(\rho\nu) [\sigma_1'''(\alpha^2 - \nu^2) (2\alpha)^2 + \sigma_1''(\alpha^2 - \nu^2) 2] \nu d\nu \\ &+ (2\alpha)^2 J_0(\rho\alpha) \sigma_1''(0) + 2 \left[J_0(\rho\alpha) + \alpha \frac{\partial J_0(\rho, \alpha)}{\partial \alpha} \right] \sigma_1'(0) \} = 2\sigma_1'(0). \end{aligned}$$

.While differentiation of the kernel $K(\rho, \alpha)$ on the parameter α and calculating the limiting values of derivatives of even and odd order with respect to $\alpha \rightarrow 0$, there are the regularities:

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\partial^{2n-1} K(\rho, \alpha)}{\partial \alpha^{2n-1}} &= 0, \quad n = 1, 2, \dots, \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\partial^{2n} K(\rho, \alpha)}{\partial \alpha^{2n}} = \\ (2n-1)!! \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2^k}{[2(n-k)-1]!!} \frac{\partial^{2(n-k)} J_0(\rho\alpha)}{\partial \alpha^{2(n-k)}} \Big|_{\alpha=0} &= \sigma_1^{(k)}(0) + 2^{2n} (2n-1)!! \sigma_1^{(n)}(0) \\ &= (2n-1)!! \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{n-k} \frac{[2(n-k)]! \rho^{2(n-k)}}{2^{2n-3k} [2(n-k)-1]!! (n-k)! \Gamma(n-k+1)} \sigma_1^{(k)}(0) \\ &+ 2^{2n} (2n-1)!! \sigma_1^{(n)}(0), \quad n \geq 2. \end{aligned}$$

Because $\sigma_1'(\lambda)$ is entire in the half-line $\lambda \geq 0$, derive the recurrence formula for calculation of the coefficients of the Taylor series

$$\sigma_1'(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sigma_1^{(n+1)}(0) \lambda^n.$$

To do this, we express $f(\rho)$ from the first equation of system (18), previously multiplying every term on $i \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

$$-i \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Phi^0(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(\rho) \sin(\rho\alpha) d\rho - \sqrt{2\pi} \int_0^{\infty} \rho f(\rho) K(\rho, \alpha) d\rho.$$

Treatment of the sine-Fourier transform of the function $f(\rho)$ gives the representation $f(\rho)$ in the form

$$f(\rho) = -\frac{i}{\pi} \int_0^{\infty} \Phi^0(\alpha) \sin(\rho\alpha) d\alpha + 2 \int_0^{\infty} \sin(\rho\alpha) \int_0^{\infty} \hat{\rho} f(\hat{\rho}) K(\hat{\rho}, \alpha) d\hat{\rho} d\alpha = -i \hat{\Phi}^0(\rho) + \Omega(\rho), \tag{19}$$

where $\hat{\Phi}^0(\rho) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \Phi^0(\alpha) \sin(\rho\alpha) d\alpha = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \sin(\rho\alpha) \int_0^{\infty} e^{it\alpha} \varphi^0(t) dt d\alpha$ is known function, $\Omega(\rho) = \Omega_{[f, \sigma_1']} = 2 \int_0^{\infty} \sin(\rho\alpha) \int_0^{\infty} \hat{\rho} f(\hat{\rho}) K(\hat{\rho}, \alpha) d\hat{\rho} d\alpha$ – sine-transform bilinear quadratic form, that contains the unknown functions $f(\rho)$ and $\sigma_1'(\lambda)$.

Similarly to (19) we express the function

$$f(\rho^1 - \rho) = -i \hat{\Phi}^0(\rho^1 - \rho) + \Omega(\rho^1 - \rho) \tag{20}$$

and substitute it into the second equation of system (18). Then $\Phi^1(\alpha) =$

$$2i \int_0^{\infty} \{-i \hat{\Phi}^0(\rho^1 - \rho) + \Omega(\rho^1 - \rho)\} \sin(\rho\alpha) d\rho - 2\pi i \int_0^{\infty} \rho \{-i \hat{\Phi}^0(\rho^1 - \rho) + \Omega(\rho^1 - \rho)\} K(\rho, \alpha) d\rho = 2 \int_0^{\infty} \hat{\Phi}^0(\rho^1 - \rho) \sin(\rho\alpha) d\rho + 2i \int_0^{\infty} \Omega(\rho^1 - \rho) \sin(\rho\alpha) d\rho - 2\pi i \int_0^{\infty} \rho \{-i \hat{\Phi}^0(\rho^1 - \rho) + \Omega(\rho^1 - \rho)\} K(\rho, \alpha) d\rho \tag{21}$$

We introduce the notation $\bar{\Phi}^0(\rho^1, \alpha) = \int_0^{\infty} \hat{\Phi}^0(\rho^1 - \rho) \sin(\rho\alpha) d\rho$ and rewrite the equality (18) in the form $-\frac{i}{2} \Phi^1(\alpha) + i \bar{\Phi}^0(\rho^1, \alpha) =$

$$\int_0^{\infty} \Omega(\rho^1 - \rho) \sin(\rho\alpha) d\rho + \pi \int_0^{\infty} \rho \{i \hat{\Phi}^0(\rho^1 - \rho) - \Omega(\rho^1 - \rho)\} K(\rho, \alpha) d\rho.$$

Differentiate with respect to α the getting equal $2n$ times, and putting $\alpha = 0$, for $n = 1$ we get the moment of quadratic form $M_{\Omega}^{(1)}$ of the first order:

$$M_{\Omega}^{(1)} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[-\frac{i}{2} \Phi^1(\alpha) + i \bar{\Phi}^0(\rho^1, \alpha) \right] \Big|_{\alpha=0} = \int_0^{\infty} \rho \Omega(\rho^1 - \rho) d\rho. \tag{22}$$

When $n = 2$ we receive

$$\sigma_1'(0) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \left[-\frac{i}{2} \Phi^1(\alpha) + i \bar{\Phi}^0(\rho^1, \alpha) \right] \Big|_{\alpha=0} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \rho \{i \hat{\Phi}^0(\rho^1 - \rho) - \Omega(\rho^1 - \rho)\} d\rho$$

or, taking into consideration the calculated moment (22), express $\sigma_1'(0)$ through the integral transforms of given information.



$$\sigma_1'(0) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \left[-\frac{i}{2} \Phi^1(\alpha) + i\bar{\Phi}^0(\rho^1, \alpha) \right] \Big|_{\alpha=0}}{\int_0^\infty \rho \{i\hat{\Phi}^0(\rho^1 - \rho)\} d\rho - M_\Omega^{(1)}} =$$

$$\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \left[-\frac{i}{2} \Phi^1(\alpha) + i\bar{\Phi}^0(\rho^1, \alpha) \right] \Big|_{\alpha=0}}{\int_0^\infty \rho \{i\hat{\Phi}^0(\rho^1 - \rho)\} d\rho - \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[-\frac{i}{2} \Phi^1(\alpha) + i\bar{\Phi}^0(\rho^1, \alpha) \right] \Big|_{\alpha=0}}.$$

The derivative $(2n - 1)$ -order of the difference well-known integral transformations of information about the solution of direct problem

$\left[-\frac{i}{2} \Phi^1(\alpha) + i\bar{\Phi}^0(\rho^1, \alpha) \right]$, calculated with $\alpha = 0$, allows to get a moment of quadratic forms $M_\Omega^{(2n-1)}$ ($n = 1, 2, \dots$).

$$M_\Omega^{(2n-1)} = \int_0^\infty \rho^{2n-1} \Omega(\rho^1 - \rho) d\rho = (-1)^{n+1} \frac{\partial^{(2n-1)}}{\partial \alpha^{(2n-1)}} \left[-\frac{i}{2} \Phi^1(\alpha) + i\bar{\Phi}^0(\rho^1, \alpha) \right] \Big|_{\alpha=0}.$$

The derivative $2n$ -order of the difference $\left[-\frac{i}{2} \Phi^1(\alpha) + i\bar{\Phi}^0(\rho^1, \alpha) \right]$ with the zero value of the parameter alpha determines uniquely the coefficients $\sigma_1^{(n+1)}(0)$ of the spectral function $\sigma_1'(\lambda)$ in a Taylor series.

$$\frac{\partial^{(2n)}}{\partial \alpha^{(2n)}} \left[-\frac{i}{2} \Phi^1(\alpha) + i\bar{\Phi}^0(\rho^1, \alpha) \right] = \pi \int_0^\infty \rho \{i\hat{\Phi}^0(\rho^1 - \rho) - \Omega(\rho^1 - \rho)\} \left[\frac{\partial^{(2n)}}{\partial \alpha^{(2n)}} K(\rho, \alpha) \right] d\rho.$$

$$\frac{\partial^{(2n)}}{\partial \alpha^{(2n)}} \left[-\frac{i}{2} \Phi^1(\alpha) + i\bar{\Phi}^0(\rho^1, \alpha) \right] \Big|_{\alpha=0} =$$

$$\pi \int_0^\infty \rho \{i\hat{\Phi}^0(\rho^1 - \rho) - \Omega(\rho^1 - \rho)\} \left[(2n-1)!! \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{n-k} \frac{[2(n-k)]!}{2^{2n-3k} [2(n-k)-1]!!} \cdot \right.$$

$$\left. \frac{\rho^{2(n-k)}}{(n-k)! \Gamma(n-k+1)} \sigma_1^{(k)}(0) + 2^{2n} (2n-1)!! \sigma_1^{(n)}(0) \right] d\rho, \quad n \geq 2.$$

$$\sigma_1^{(n)}(0) = \frac{\frac{\partial^{(2n)}}{\partial \alpha^{(2n)}} \left[-\frac{i}{2} \Phi^1(\alpha) + i\bar{\Phi}^0(\rho^1, \alpha) \right] \Big|_{\alpha=0}}{\pi 2^{2n} (2n-1)!! \int_0^\infty \rho \{i\hat{\Phi}^0(\rho^1 - \rho) - \Omega(\rho^1 - \rho)\} d\rho -}$$

$$\frac{\pi (2n-1)!! \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{n-k} \cdot \frac{[2(n-k)]!}{2^{2n-3k} [2(n-k)-1]!!} \cdot \frac{\sigma_1^{(k)}(0)}{(n-k)! \Gamma(n-k+1)}}{\pi 2^{2n} (2n-1)!! \int_0^\infty \rho \{i\hat{\Phi}^0(\rho^1 - \rho) - \Omega(\rho^1 - \rho)\} d\rho}$$

$$\cdot \int_0^\infty \rho^{2(n-k)+1} \cdot \{i\hat{\Phi}^0(\rho^1 - \rho) - \Omega(\rho^1 - \rho)\} d\rho.$$

Theorem 1. The spectral function of the operator Sturm-Liouville $\sigma(\lambda)$ is unique in the class of functions σ^a and is expressed through the integral transforms of the given information (5) on the solution of the direct problem (1)-(4).

Theorem 2. Unknown potential $q(z)$ of one-dimensional inverse problem (1)-(5) is unambiguously reconstructed in the class of functions Q_M^a .

Theorem 3. Moments of the function $f(\rho)$ uniquely determine the unknown source $f(\rho) = f(\sqrt{x^2 + y^2})$ in the boundary condition (4) of the inverse problem (1)-(5) in the class of functions Φ .



While differentiation of the first equation of system (18), assuming $\alpha = 0$, we obtain the odd moments of the function $f(\rho)$:

$$M_f^{(2n-1)} = \int_0^\infty \rho^{2n-1} f(\rho) d\rho = (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{2i} \cdot \frac{\partial^{(2n-1)}}{\partial \alpha^{(2n-1)}} [\Phi^0(\alpha)] \Big|_{\alpha=0}, \quad n = 1, 2, \dots$$

5. Summary

The novelty of the work lies in the fact that it was decided a new, not previously studied problem; tested recovery method of a source and potential in the special classes of functions, first devised by author and used in the work [9]; also uniqueness theorems are proved. The proofs of theorems are constructive, and can be base for creating numerical methods for solution of inverse problems, which are reduced to inverse problem of Sturm-Liouville problem.

Studied classes of functions that can be restored by this method. Between the classes of functions Q_M^a and σ^a established one-to-one correspondence [8].

References

1. Lavrentiev M.M., Romanov V.G., Shishatsky S.P. 1980. Not correct problems of mathematical physics and analysis. M.: Nauka, 288.
2. Lavrentiev M.M., Reznitskaya K.G., Yahno V.G. 1982. One-dimensional inverse problems of mathematical physics. Nauka, Siberian branch, Novosibirsk, 88.
3. Alekseev A.S. 1962. Some inverse problems of waves distribution. Izvestiya AN SSSR, Geophysical journal, №11, 1514-1531.
4. Lavrentiev M.M., Reznitskaya K.G. 1980. Inverse problem with unknown source. Uniqueness, standing and methods of solution inverse and not correct problems. Novosibirsk: CC SB AN SSSR, 53-63.
5. Romanov V.G. 1972. Some inverse problems for the equations of hyperbolic type. Novosibirsk, Nauka, 164.
6. Korn G and Korn M. 1970. Mathematical handbook for scientists and engineers. M.: Nauka, 720.
7. Gelfand I.M., Levitan B.M. 1951. On determination of the differential equation by its own spectral function. Izvestiya AN SSSR, Mathematical journal, vol. 15, №4, 309-360.
8. Schabanowa G.I. 2015. The study of the inverse Sturm-Liouville problem in the singular case. Austrian Journal of Technical and Natural Sciences, May-June 2015, 62-67.
9. Schabanowa G.I. 2004. One-dimensional inverse problem in the linearized and exact statements. III Siberian congress of women-mathematics. Krasnoyarsk, 2004, 28-30.



УДК 517.76

АНАЛОГИ ТОЖДЕСТВ ГРЕЯ ТЕНЗОРА РИМАНОВОЙ КРИВИЗНЫ СПЕЦИАЛЬНЫХ ОБОБЩЕННЫХ МНОГООБРАЗИЙ КЕНМОЦУ ПЕРВОГО РОДА

ANALOGS IDENTITIES GRAY RIEMANN CURVATURE TENSOR OF SPECIAL GENERALIZED MANIFOLDS KENMOTSU FIRST KIND

А.Р. Рустанов, О.С. Ищенко
A.R. Rustanov, O.S. Ishchenko

*Московский педагогический государственный университет,
119991, Россия, Москва, ул. Малая Пироговская, 1/1*

*Moscow state pedagogical university,
119991, Russia, Moscow, Malaya Pirogovskaya St., 1/1*

E-mail: olga.ishchenko.88@yandex.ru, aligadzhi@yandex.ru

Аннотация. В работе рассматриваются специальные обобщенные многообразия Кенмоцу первого рода, получена полная группа структурных уравнений, подсчитаны компоненты тензора Римана-Кристоффеля на пространстве присоединенной G -структуры, доказано, всякое SGK-многообразие I рода является либо многообразием Кенмоцу, либо пятимерным собственным (т.е. не многообразием Кенмоцу) SGK-многообразием I рода. Рассмотрены контактные аналоги тождеств Грея для данного класса многообразий. Доказано, что SGK-многообразие I рода является CR_2 - или CR_3 -многообразием тогда и только тогда, когда оно является многообразием Кенмоцу, а SGK-многообразие I рода, являющееся CR_1 -многообразием является трехмерным многообразием Кенмоцу.

Resume. In this paper, we consider special generalized manifolds Kenmotsu first kind, received the full group of structural equations, calculated components of the Riemann-Christoffel tensor in the space of the associated G -structure, proved every SGK-manifold of type I is a manifold Kenmotsu or five-dimensional proper (i.e. not a manifold Kenmotsu) SGK-manifold of type I. We consider analogues contact Gray identities for this class of manifolds. It is proved that SGK-manifold type I is CR_2 - or CR_3 -manifold if and only if it is a Kenmotsu manifold and SGK-manifold of type I, which is CR_1 -manifold is a three-dimensional manifold Kenmotsu.

Ключевые слова: специальные обобщенные многообразия Кенмоцу первого рода, почти контактные многообразия, тензор римановой кривизны, CR_1 -многообразием, тождества Грея.

Keywords: special generalized manifolds Kenmotsu first kind, almost contact manifolds, the Riemann curvature tensor, CR_1 -manifold, identities Gray.

Введение

Пусть $(M^{2n+1}, \Phi, \xi, \eta, g = \langle \cdot, \cdot \rangle)$ – почти контактное метрическое многообразие.

В 1972 г. Кенмоцу [1] ввел в рассмотрение новый класс почти контактных метрических структур, характеризующихся тождеством

$$\nabla_X(\Phi)Y = -\eta(Y)\Phi X - \langle X, \Phi Y \rangle \xi; X, Y \in \mathcal{X}(M). \quad (1)$$

Эти структуры являются нормальными, но не являются ни сасакиевыми структурами, ни косимплектическими структурами [2]. Такие структуры возникают на нечетномерных пространствах Лобачевского кривизны (-1) . Структуры Кенмоцу получаются с помощью конструкции косоугольного (warped) произведения $C^n \times_f R$ в смысле Бишопа и О'Нейла [3] комплексного евклидова пространства и вещественной прямой, где $f(t) = ce^t$ (см. [1]). Более того, всякое конформно-плоское многообразие Кенмоцу, а также всякое локально-симметрическое многообразие Кенмоцу локально эквивалентно многообразию Кенмоцу такого типа [1]. В данной работе мы придерживаемся терминологии принятой в монографии [2].

Из тождества (1) легко следует, что [2]

$$\nabla_X(\eta)Y = \langle X, Y \rangle - \eta(Y)\eta(X); X, Y \in \mathcal{X}(M). \quad (2)$$

В самом деле, применяя оператор ∇_X к тождеству $\Phi^2 = -id + \eta \otimes \xi$, получим, что $\nabla_X(\Phi)(\Phi Y) + \Phi(\nabla_X(\Phi)Y) = \nabla_X(\eta)(Y)\xi + \eta(Y)\nabla_X\xi$, или, с учетом (1) $\langle \Phi X, \Phi Y \rangle \xi - \eta(Y)\Phi^2 X = \nabla_X(\eta)(Y)\xi +$



$\eta(Y)\nabla_X\xi$. Поскольку $\langle \nabla_X\xi, \xi \rangle = \frac{1}{2}X(\langle \xi, \xi \rangle) = 0$, имеем, что $\nabla_X\xi \in \mathcal{L}$, и, поскольку $\mathcal{L} \cap \mathcal{M} = \{0\}$, $\nabla_X(\eta)Y = \langle \Phi X, \Phi Y \rangle = \langle X, Y \rangle - \eta(Y)\eta(X)$; $X, Y \in \mathcal{X}(M)$.

Положив в тождестве (1) $Y = X$, получим

$$\nabla_X(\Phi)X = -\eta(X)\Phi X; X \in \mathcal{X}(M). \quad (3)$$

В полученном тождестве сделаем замену $X \rightarrow X + Y$ (поляризация по X), тогда получим:

$$\nabla_X(\Phi)Y + \nabla_Y(\Phi)X = -\eta(Y)\Phi X - \eta(X)\Phi Y; X, Y \in \mathcal{X}(M). \quad (4)$$

Определение 1 [4]. Класс почти контактных метрических многообразий, характеризующихся тождеством (4), называется *обобщенными многообразиями Кенмоцу* (короче, *GK-многообразиями*).

Тождество (4) на пространстве расслоения реперов над M примет вид:

$$\Phi_{j,k}^i + \Phi_{k,j}^i = -\eta_k \Phi_j^i - \eta_j \Phi_k^i. \quad (5)$$

Расписывая эти соотношения на пространстве присоединенной G -структуры, получим:

Предложение 1. Компоненты ковариантного дифференциала структурного эндоморфизма GK -структуры на пространстве присоединенной G -структуры удовлетворяют следующим соотношениям:

$$1) \Phi_{0,i}^0 = \Phi_{b,0}^a = \Phi_{b,0}^{\hat{a}} = 0; 2) \Phi_{i,0}^0 = \Phi_{0,0}^i = 0; 3) \Phi_{0,a}^b = -\Phi_{0,\hat{b}}^{\hat{a}} = -\sqrt{-1}\delta_a^b; 4) \Phi_{b,c}^{\hat{a}} = \Phi_{b,c}^a = 0; 5) \Phi_{0,b}^{\hat{a}} + \Phi_{b,0}^{\hat{a}} = 0; 6) \Phi_{0,\hat{b}}^a + \Phi_{b,0}^a = 0; 7) \Phi_{a,b}^0 + \Phi_{b,a}^0 = 0; 8) \Phi_{\hat{a},\hat{b}}^0 + \Phi_{\hat{b},\hat{a}}^0 = 0; 9) \Phi_{a,\hat{b}}^0 + \Phi_{\hat{b},a}^0 = 0; 10) \Phi_{a,b}^{\hat{c}} + \Phi_{b,a}^{\hat{c}} = 0; 11) \Phi_{\hat{a},\hat{b}}^{\hat{c}} + \Phi_{\hat{b},\hat{a}}^{\hat{c}} = 0.$$

Предложение 2. Интегральные кривые векторного поля ξ GK -многообразия являются геодезическими.

Доказательство: так как $0 = (\mathcal{L}_\xi \eta)(X) = \xi g(X, \xi) - g(\nabla_\xi X - \nabla_X \xi, \xi) = g(X, \nabla_\xi \xi)$, где \mathcal{L}_ξ – производная Ли в направлении вектора ξ , то интегральные кривые векторного поля ξ являются геодезическими.

Согласно Предложения 1 первая группа структурных уравнений GK -многообразий на пространстве присоединенной G -структуры примет вид:

$$1) d\omega = F_{ab}\omega^a \wedge \omega^b + F^{ab}\omega_a \wedge \omega_b; 2) d\omega^a = -\theta_b^a \wedge \omega^b + C^{abc}\omega_b \wedge \omega_c - \frac{3}{2}F^{ab}\omega \wedge \omega_b + \delta_b^a \omega \wedge \omega^b; 3) d\omega_a = \theta_a^b \wedge \omega_b + C_{abc}\omega^b \wedge \omega^c - \frac{3}{2}F_{ab}\omega \wedge \omega^b + \delta_a^b \omega \wedge \omega_b, \quad (6)$$

где

$$C^{abc} = \frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi_{b,\hat{c}}^a; C_{abc} = -\frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi_{b,c}^{\hat{a}}; C^{[abc]} = C^{abc}; C_{[abc]} = C_{abc}; \overline{C^{abc}} = C_{abc}; F^{ab} = \sqrt{-1}\Phi_{\hat{a},\hat{b}}^0; F_{ab} = -\sqrt{-1}\Phi_{a,b}^0; F^{ab} + F^{ba} = 0; F_{ab} + F_{ba} = 0; \overline{F^{ab}} = F_{ab}. \quad (7)$$

Из (6) следует следующее Предложение.

Предложение 3 [4]. Если $C^{abc} = C_{abc} = 0$ и $F^{ab} = F_{ab} = 0$, то GK -многообразие является многообразием Кенмоцу.

Предложение 3 дает примеры GK -многообразий.

Специальные обобщенные многообразия Кенмоцу первого рода

Наиболее интересные геометрические свойства почти контактных метрических многообразий появляются, когда применяются дополнительные ограничения. Поэтому представляет интерес изучить частные случаи обобщенных многообразий Кенмоцу. В работе [4] выделены два типа специальных обобщенных многообразий Кенмоцу.

В данной работе мы рассмотрим специальный тип GK -многообразий, выделенных в работе [4] и названный SGK -многообразиями I рода. Напомним это определение.

Определение 1 [4]. GK -многообразия для которых $C^{abc} = C_{abc} = 0$ называются SGK -многообразиями I рода.

Замечание. Согласно Предложения 3 SGK -многообразия I рода, для которых $F^{ab} = F_{ab} = 0$ являются многообразиями Кенмоцу.

Тогда первая группа структурных уравнений SGK -многообразий I рода примет вид [4]:

$$1) d\omega = F_{ab}\omega^a \wedge \omega^b + F^{ab}\omega_a \wedge \omega_b; 2) d\omega^a = -\theta_b^a \wedge \omega^b - \frac{3}{2}F^{ab}\omega \wedge \omega_b + \delta_b^a \omega \wedge \omega^b; 3) d\omega_a = \theta_a^b \wedge \omega_b - \frac{3}{2}F_{ab}\omega \wedge \omega^b + \delta_a^b \omega \wedge \omega_b, \quad (8)$$

где

$$F^{ab} = \sqrt{-1}\Phi_{\hat{a},\hat{b}}^0; F_{ab} = -\sqrt{-1}\Phi_{a,b}^0; F^{ab} + F^{ba} = 0; F_{ab} + F_{ba} = 0; \overline{F^{ab}} = F_{ab} \quad (9)$$

Стандартная процедура дифференциального продолжения первой группы структурных уравнений (8) дает следующую теорему.



Теорема 1. Полная группа структурных уравнений GK -многообразий I рода на пространстве присоединенной G -структуры имеет вид:

$$1) d\omega = F_{ab}\omega^a \wedge \omega^b + F^{ab}\omega_a \wedge \omega_b; \quad 2) d\omega^a = -\theta_b^a \wedge \omega^b - \frac{3}{2}F^{ab}\omega \wedge \omega_b + \delta_b^a \omega \wedge \omega^b; \quad 3) d\omega_a = \theta_a^b \wedge \omega_b - \frac{3}{2}F_{ab}\omega \wedge \omega^b + \delta_a^b \omega \wedge \omega_b; \quad 4) d\theta_b^a = -\theta_c^a \wedge \theta_b^c + \left(A_{bc}^{ad} - \frac{3}{2}F^{ad}F_{bc}\right)\omega^c \wedge \omega_d - \delta_b^a F_{cd}\omega^c \wedge \omega^d + \delta_b^a F^{cd}\omega_c \wedge \omega_d; \quad 5) dF^{ab} + F^{cb}\theta_c^a + F^{ac}\theta_c^b = -2F^{ab}\omega; \quad 6) dF_{ab} - F_{cb}\theta_c^a - F_{ac}\theta_c^b = -2F_{ab}\omega. \quad (10)$$

При этом имеют место следующие тождества:

$$1) F^{a[b}F^{cd]} = 0; \quad 2) F_{a[b}F_{cd]} = 0; \quad 3) \delta_a^{[b}F^{cd]} = 0; \quad 4) \delta_{[b}F_{cd]} = 0. \quad (11)$$

Теорема 2. Всякое SGK -многообразие I рода является либо многообразием Кенмоцу, либо пятимерным собственным (т.е. не многообразием Кенмоцу) SGK -многообразием I рода.

Доказательство. Рассмотрим равенство (11:3), т.е. $\delta_a^b F^{cd} + \delta_a^c F^{db} + \delta_a^d F^{bc} = 0$. Свернем полученное равенство по индексам a и b , тогда получим:

$$(n-2)F^{bc} = 0. \quad (12)$$

Если $F^{bc} = 0$, то согласно Предложения 3 многообразие M является многообразием Кенмоцу. Если же $F^{bc} \neq 0$, то $n = 2$, т.е. $\dim M = 5$. \square

Пусть M – SGK -многообразие I рода. Вычислим компоненты его тензора Римана-Кристоффеля на пространстве присоединенной G -структуры. Для тензорных компонент формы римановой связности имеем следующие соотношения на пространстве присоединенной G -структуры [1]:

$$1) \theta_b^a = \frac{\sqrt{-1}}{2} \Phi_{b,i}^a \omega^i; \quad 2) \theta_b^{\hat{a}} = -\frac{\sqrt{-1}}{2} \Phi_{b,i}^{\hat{a}} \omega^i; \quad 3) \theta_0^a = \sqrt{-1} \Phi_{0,i}^a \omega^i; \quad 4) \theta_0^{\hat{a}} = -\sqrt{-1} \Phi_{0,i}^{\hat{a}} \omega^i; \quad 5) \theta_a^0 = -\sqrt{-1} \Phi_{a,i}^0 \omega^i; \quad 6) \theta_a^{\hat{0}} = \sqrt{-1} \Phi_{a,i}^{\hat{0}} \omega^i; \quad 7) \theta_j^i + \theta_i^j = 0; \quad 8) \theta_0^0 = 0. \quad (13)$$

Соотношения (13), с учетом Предложения 2, для SGK -многообразий I рода на пространстве присоединенной G -структуры примут вид:

$$1) \theta_b^a = \frac{1}{2}F^{ab}\omega; \quad 2) \theta_b^{\hat{a}} = \frac{1}{2}F_{ab}\omega; \quad 3) \theta_0^a = \delta_b^a \omega^b - F^{ab}\omega_b; \quad 4) \theta_0^{\hat{a}} = \delta_b^{\hat{a}} \omega_b - F_{ab}\omega^b; \quad 5) \theta_a^0 = F_{ab}\omega^b - \delta_a^b \omega_b; \quad 6) \theta_a^{\hat{0}} = F^{ab}\omega_b - \delta_b^a \omega^b. \quad (14)$$

Дифференциальное продолжение уравнений (14) дает:

$$1) d\theta_b^a = -\frac{1}{2}F^{cb}\theta_c^a \wedge \omega - \frac{1}{2}F^{ac}\theta_c^b \wedge \omega + \frac{1}{2}F^{ab}F_{cd}\omega^c \wedge \omega^d + \frac{1}{2}F^{ab}F^{cd}\omega_c \wedge \omega_d; \quad 2) d\theta_b^{\hat{a}} = \frac{1}{2}F_{cb}\theta_c^{\hat{a}} \wedge \omega + \frac{1}{2}F_{ac}\theta_c^{\hat{b}} \wedge \omega + \frac{1}{2}F_{ab}F_{cd}\omega^c \wedge \omega^d + \frac{1}{2}F_{ab}F^{cd}\omega_c \wedge \omega_d; \quad 3) d\theta_0^a = -\theta_b^a \wedge \omega^b + F^{cb}\theta_c^a \wedge \omega_b + \left(\frac{3}{2}F^{ac}F_{cb} + \delta_b^a\right)\omega \wedge \omega^b - \frac{1}{2}F^{ab}\omega \wedge \omega_b; \quad 4) d\theta_0^{\hat{a}} = \theta_b^{\hat{a}} \wedge \omega_b - F_{cb}\theta_c^{\hat{a}} \wedge \omega^b - \frac{1}{2}F_{ab}\omega \wedge \omega^b + \left(\frac{3}{2}F_{ac}F^{cb} + \delta_b^{\hat{a}}\right)\omega \wedge \omega_b; \quad 5) d\theta_a^0 = -\theta_a^b \wedge \omega_b + F_{cb}\theta_c^a \wedge \omega^b + \frac{1}{2}F_{ab}\omega \wedge \omega^b - \left(\frac{3}{2}F_{ac}F^{cb} + \delta_b^a\right)\omega \wedge \omega_b; \quad 6) d\theta_a^{\hat{0}} = \theta_a^b \wedge \omega_b - F^{cb}\theta_c^a \wedge \omega_b - \left(\frac{3}{2}F^{ac}F_{cb} + \delta_b^a\right)\omega \wedge \omega^b + \frac{1}{2}F^{ab}\omega \wedge \omega_b. \quad (15)$$

Вторая группа структурных уравнений римановой связности имеет вид [1]:

$$d\theta_j^i = -\theta_k^i \wedge \theta_j^k + \frac{1}{2}R_{jkl}^i \omega^k \wedge \omega^l, \quad (16)$$

где $\{R_{jkl}^i\} \subset C^\infty(BM)$ – компоненты тензора Римана-Кристоффеля. Расписывая эти соотношения на пространстве присоединенной G -структуры с учетом (14), получим:

$$1) d\theta_b^a = -\frac{1}{2}F^{cb}\theta_c^a \wedge \omega - \frac{1}{2}F^{ac}\theta_c^b \wedge \omega + \left(\frac{1}{2}R_{bcd}^a + \delta_c^a \delta_b^d\right)\omega^c \wedge \omega^d + \left(R_{bcd}^a + \delta_c^b F^{ad} - \delta_c^d F^{ba}\right)\omega^c \wedge \omega_d + \left(\frac{1}{2}R_{b\hat{c}\hat{d}}^a + F^{a[c}F^{b|d|]}\right)\omega_c \wedge \omega_d + R_{b0c}^a \omega \wedge \omega^c + R_{b0\hat{c}}^a \omega \wedge \omega_{\hat{c}}; \quad 2) d\theta_b^{\hat{a}} = \frac{1}{2}F_{cb}\theta_c^{\hat{a}} \wedge \omega + \frac{1}{2}F_{ac}\theta_c^{\hat{b}} \wedge \omega + \left(\frac{1}{2}R_{bcd}^{\hat{a}} + F_{a[c}F_{b|d|]}\right)\omega^c \wedge \omega^d + \left(R_{bcd}^{\hat{a}} + \delta_a^{\hat{d}} F_{bc} - \delta_b^{\hat{d}} F_{ac}\right)\omega^c \wedge \omega_d + \left(\frac{1}{2}R_{b\hat{c}\hat{d}}^{\hat{a}} + \delta_a^{\hat{c}} \delta_b^{\hat{d}}\right)\omega_c \wedge \omega_d + R_{b0c}^{\hat{a}} \omega \wedge \omega^c + R_{b0\hat{c}}^{\hat{a}} \omega \wedge \omega_{\hat{c}}; \quad 3) d\theta_0^a = -\theta_b^a \wedge \omega^b + F^{cb}\theta_c^a \wedge \omega_b + \frac{1}{2}R_{0bc}^a \omega^b \wedge \omega^c + R_{0b\hat{c}}^a \omega^b \wedge \omega_{\hat{c}} + \frac{1}{2}R_{0\hat{b}\hat{c}}^a \omega_b \wedge \omega_{\hat{c}} + \left(R_{00b}^a + \frac{1}{2}F^{ac}F_{cb}\right)\omega \wedge \omega^b + \left(R_{00\hat{b}}^a - \frac{1}{2}F^{ab}\right)\omega \wedge \omega_b; \quad 4) d\theta_0^{\hat{a}} = \theta_b^{\hat{a}} \wedge \omega_b - F_{cb}\theta_c^{\hat{a}} \wedge \omega^b + \frac{1}{2}R_{0bc}^{\hat{a}} \omega^b \wedge \omega^c + R_{0b\hat{c}}^{\hat{a}} \omega^b \wedge \omega_{\hat{c}} + \frac{1}{2}R_{0\hat{b}\hat{c}}^{\hat{a}} \omega_b \wedge \omega_{\hat{c}} + \left(R_{00\hat{b}}^{\hat{a}} + \frac{1}{2}F_{ac}F^{cb}\right)\omega \wedge \omega_b + \left(R_{00b}^{\hat{a}} - \frac{1}{2}F_{ab}\right)\omega \wedge \omega^b; \quad 5) d\theta_a^0 = -\theta_a^b \wedge \omega_b + F_{cb}\theta_c^a \wedge \omega^b + \frac{1}{2}R_{abc}^0 \omega^b \wedge \omega^c + R_{ab\hat{c}}^0 \omega^b \wedge \omega_{\hat{c}} + \frac{1}{2}R_{a\hat{b}\hat{c}}^0 \omega_b \wedge \omega_{\hat{c}} + \left(R_{a0b}^0 + \frac{1}{2}F_{ab}\right)\omega \wedge \omega^b + \left(R_{a0\hat{b}}^0 - \frac{1}{2}F_{ac}F^{cb}\right)\omega \wedge \omega_b; \quad (17)$$



$$\begin{aligned}
 6) d\theta_a^0 &= \theta_b^a \wedge \omega^b - F^{cb} \theta_c^a \wedge \omega_b + \frac{1}{2} R_{abc}^0 \omega^b \wedge \omega^c + R_{abc}^0 \omega^b \wedge \omega_c + \frac{1}{2} R_{abc}^0 \omega_b \wedge \omega_c + \left(R_{aob}^0 - \frac{1}{2} F_{bc} F^{ca} \right) \omega \wedge \omega^b + \left(R_{aob}^0 + \frac{1}{2} F^{ab} \right) \omega \wedge \omega_b; \\
 7) d\theta_b^a &= -\theta_c^a \wedge \theta_b^c + \left(\frac{1}{2} R_{bcd}^a - \delta_{[c}^a F_{|b|d]} \right) \omega^c \wedge \omega^d + \left(R_{bcd}^a + \delta_c^a \delta_b^d - F_{bc} F^{ad} \right) \omega^c \wedge \omega_d + \left(\frac{1}{2} R_{bcd}^a - F^{a[c} \delta_b^{d]} \right) \omega_c \wedge \omega_d + R_{b0c}^a \omega \wedge \omega^c + R_{b0c}^a \omega \wedge \omega_c; \\
 8) d\theta_b^{\hat{a}} &= -d\theta_a^b = \theta_c^b \wedge \theta_a^c + \left(\frac{1}{2} R_{bcd}^{\hat{a}} - F_{a[c} \delta_b^{d]} \right) \omega^c \wedge \omega^d + \left(R_{bcd}^{\hat{a}} - \delta_c^b \delta_a^d + F_{ac} F^{bd} \right) \omega^c \wedge \omega_d + \left(\frac{1}{2} R_{bcd}^{\hat{a}} - F^{b[c} \delta_a^{d]} \right) \omega_c \wedge \omega_d + R_{b0c}^{\hat{a}} \omega \wedge \omega^c + R_{b0c}^{\hat{a}} \omega \wedge \omega_c.
 \end{aligned}$$

Сравнивая (9:4), (15) и (17), в силу линейной независимости базисных форм, имеем, что существенные ненулевые компоненты тензора Римана-Кристоффеля имеют вид:

$$1) R_{0ob}^a = F^{ac} F_{cb} + \delta_b^a; \quad 2) R_{bcd}^a = -\delta_b^a F_{cd}; \quad 3) R_{bcd}^a = A_{bc}^{ad} - F_{bc} F^{ad} - \delta_c^a \delta_b^d; \quad 4) R_{bcd}^a = F^{ab} F_{cd} - 2\delta_{[c}^a \delta_{d]}^b. \tag{18}$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 3. существенные ненулевые компоненты тензора Римана-Кристоффеля *SGK*-многообразия I рода на пространстве присоединенной *G*-структуры имеют вид:

$$1) R_{0ob}^a = F^{ac} F_{cb} + \delta_b^a; \quad 2) R_{bcd}^a = -\delta_b^a F_{cd}; \quad 3) R_{bcd}^a = A_{bc}^{ad} - F_{bc} F^{ad} - \delta_c^a \delta_b^d; \quad 4) R_{bcd}^a = F^{ab} F_{cd} - 2\delta_{[c}^a \delta_{d]}^b.$$

Аналоги тождеств Грея тензора римановой кривизны *SGK*-многообразий I рода

Контактными аналогами тождеств А.Грея R_1, R_2 и R_3 кривизны почти эрмитовых многообразий для тензора римановой кривизны являются тождества кривизны CR_1, CR_2 и CR_3 для почти контактных метрических многообразий:

$$\begin{aligned}
 CR_1: \langle R(\Phi X, \Phi Y)\Phi Z, \Phi W \rangle &= \langle R(\Phi^2 X, \Phi^2 Y)\Phi Z, \Phi W \rangle; \\
 CR_2: \langle R(\Phi X, \Phi Y)\Phi Z, \Phi W \rangle &= \langle R(\Phi^2 X, \Phi^2 Y)\Phi Z, \Phi W \rangle + \langle R(\Phi^2 X, \Phi Y)\Phi^2 Z, \Phi W \rangle + \langle R(\Phi^2 X, \Phi Y)\Phi Z, \Phi^2 W \rangle; \\
 CR_3: \langle R(\Phi X, \Phi Y)\Phi Z, \Phi W \rangle &= \langle R(\Phi^2 X, \Phi^2 Y)\Phi^2 Z, \Phi^2 W \rangle; \quad X, Y, Z \in \mathcal{X}(M).
 \end{aligned}$$

Назовем *SGK*-многообразие I рода, обладающее тождествами CR_1, CR_2 и CR_3 , соответственно, CR_1, CR_2 и CR_3 – многообразием.

Исследуем эти тождества.

Теорема 4. Пусть $S = (\xi, \eta, \Phi, g = \langle \cdot, \cdot \rangle)$ – *AC*-структура. Тогда:

- (1) $S = (\xi, \eta, \Phi, g = \langle \cdot, \cdot \rangle)$ структура класса CR_1 тогда и только тогда, когда на пространстве присоединенной *G*-структуры $R_{abcd} = R_{abdc} = R_{abdc} = 0$;
- (2) $S = (\xi, \eta, \Phi, g = \langle \cdot, \cdot \rangle)$ структура класса CR_2 тогда и только тогда, когда на пространстве присоединенной *G*-структуры $R_{abcd} = R_{abdc} = 0$;
- (3) $S = (\xi, \eta, \Phi, g = \langle \cdot, \cdot \rangle)$ структура класса CR_3 тогда и только тогда, когда на пространстве присоединенной *G*-структуры $R_{abcd} = 0$.

Доказательство данной теоремы проводится аналогично доказательству соответствующей теоремы для почти эрмитовых многообразий [2].

Теорема 5. *SGK*-многообразие I рода является CR_3 – многообразием тогда и только тогда, когда оно канонически конциркулярно многообразию $\mathcal{C}^n \times \mathbf{R}$, снабженному косимплектической структурой.

Доказательство. Пусть *SGK*-многообразие I рода является CR_3 –многообразием, тогда согласно Теореме 4 и (18), имеем $R_{abcd} = -\delta_b^a F_{cd} = 0$. Свернем это равенство по индексам b и c , тогда $nF_{cd} = 0$, т.е. $F_{cd} = 0$. Согласно Предложения 3 *SGK*-многообразие I рода является многообразием Кенмоцу. Поскольку многообразие Кенмоцу является *SGK*-многообразием I рода для которого $R_{abcd} = 0$, то учитывая Теорему 5.2 [1, стр. 424], можно сказать, что *SGK*-многообразие I рода является CR_3 –многообразием тогда и только тогда, когда оно канонически конциркулярно многообразию $\mathcal{C}^n \times \mathbf{R}$, снабженному косимплектической структурой. \square

Теорема 6. *SGK*-многообразие I рода является CR_2 – многообразием тогда и только тогда, когда оно является CR_3 –многообразием.

Доказательство. Поскольку для *SGK*-многообразия I рода $R_{bcd}^{\hat{a}} = 0$, согласно Теореме 4 *SGK*-многообразия I рода являющееся CR_2 – многообразием является CR_3 –многообразием. Но поскольку $CR_3 \supset CR_2 \supset CR_1$, то *SGK*-многообразие I рода являющееся CR_3 – многообразием является CR_2 –многообразием. \square

С учетом теоремы 5 теорему 6 можно сформулировать следующим образом.

Теорема 7. *SGK*-многообразие I рода является CR_2 – многообразием тогда и только тогда, когда оно канонически конциркулярно многообразию $\mathcal{C}^n \times \mathbf{R}$, снабженному косимплектической структурой.

Теорема 8. *SGK*-многообразие I рода является CR_1 – многообразием тогда и только тогда, когда оно является трехмерным многообразием Кенмоцу.



Доказательство. Согласно теореме 4 почти контактная метрическая структура является структурой класса CR_1 тогда и только тогда, когда на пространстве присоединенной G -структуры $R_{abcd} = R_{\bar{a}bcd} = R_{ab\bar{c}d} = 0$. Тогда согласно теореме 3 SGK -структура I рода является структурой класса CR_1 тогда и только тогда, когда на пространстве присоединенной G -структуры: 1) $R_{bcd}^a = -\delta_b^a F_{cd} = 0$; 2) $R_{\bar{b}cd}^a = F^{ab} F_{cd} - 2\delta_{[c}^a \delta_{d]}^b = 0$. Как было показано выше выполнение равенства $R_{bcd}^a = -\delta_b^a F_{cd} = 0$ влечет, что SGK -структура I рода является структурой Кенмоцу. Рассмотрим равенство $R_{\bar{b}cd}^a = F^{ab} F_{cd} - 2\delta_{[c}^a \delta_{d]}^b = 0$. Свернем это равенство сначала по индексам a и c , а затем по индексам b и d , тогда получим $F^{ab} F_{ab} = n(n-1)$. Так как $F_{ab} = 0$, то $n(n-1) = 0$, т.е. $n = 1$. Таким образом, SGK -многообразие I рода являющееся класса CR_1 является многообразием Кенмоцу размерности 3.

Обратно, поскольку для трехмерного многообразия Кенмоцу имеем, что $R_{abcd} = R_{\bar{a}bcd} = R_{ab\bar{c}d} = 0$, то оно является SGK -многообразием I рода являющееся CR_1 – многообразием.

Список литературы

References

1. Kenmotsu K. A class of almost contact Riemannian manifolds // Tôhoku Math. J., 24 (1972). – P. 93-103.
Kenmotsu K. A class of almost contact Riemannian manifolds // Tôhoku Math. J., 24 (1972). – P. 93-103.
2. Кириченко В.Ф. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. Издание второе, дополненное. Одесса: «Печатный Дом», 2013, 458 с.
V.F. Kirichenko. Differential-geometric structures on manifolds. Second Edition, Revised. Odessa: "Printing House", 2013, 458 p.
3. Bishop R.L., O'Neil B. Manifolds of negative curvature. Trans. Amer. Math. Soc. 145 (1969), 1-50.
4. Умнова С.В. Геометрия многообразий Кенмоцу и их обобщений: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. – М.: МПГУ, 2002. – 88 с.
Umnova S.V. Geometry Kenmotsu manifolds and their generalizations: Dis. ... Cand. Sci. Sciences. - M.: Moscow State Pedagogical University, 2002. - 88 p.

УДК 517.968.43

**ОБ ИСТОРИИ РАЗВИТИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
В СССР. СИЛЬНЫЕ НЕЛИНЕЙНОСТИ ¹**

**ABOUT THE HISTORY OF DEVELOPMENT OF NONLINEAR INTEGRAL
EQUATIONS IN THE USSR. STRONG NONLINEARITIES**

Е.М. Богатов
E.M. Bogatov

*Старооскольский технологический институт им. А.А. Угарова (филиал) Национального исследовательского технологического университета «МИСИС»,
Россия, Старый Оскол, 309516, Белгородская обл., г. Старый Оскол, мкр. Макаренко, 42*

*Stary Oskol Technological Institute of National Research University of Science and Technology "MISIS", 309512,
mkr. Makarenko, 42 Stary Oskol, Belgorod region, Russia*

E-mail: embogatov@inbox.ru

Аннотация. Работа посвящена некоторым вопросам истории развития теории нелинейных интегральных уравнений до середины XX в. Основной упор делается на достижения советских математиков - В.В. Немыцкого, М.А. Красносельского, Я.Б. Рунтцкого и др. Проводится анализ некоторых качественных методов решения уравнений Гаммерштейна:

$$u(x) = \lambda \int_D K(x, y) f(y, u(y)) dy;$$

и Урысона:

$$u(x) = \lambda \int_D K(x, y, u(y)) dy.$$

Особое внимание уделяется раскрытию содержания способов исследования указанных уравнений с существенно нестепенными нелинейностями в пространствах Орлича; методология изучения операторов Гаммерштейна и Урысона с полиномиальными нелинейностями рассматривается в контексте пространств C и L^p . Оценивается взаимное влияние развития теории нелинейных интегральных уравнений и функционального анализа в рассматриваемый период. Приводятся физические предпосылки к изучению нелинейных интегральных уравнений с сильными нелинейностями, основанные на задачах теории горения.

Resume. The work is dedicated to the development of the theory of nonlinear integral equations to the middle of XX century, developed by the Soviet mathematicians - V.V. Nemytskii, M.A. Krasnosel'skii, Ya.B. Rutitskii and others. The analysis of some qualitative methods for solving Hammerstein equation:

$$u(x) = \lambda \int_D K(x, y) f(y, u(y)) dy$$

and Urysohn equation:

$$u(x) = \lambda \int_D K(x, y, u(y)) dy.$$

Special attention is paid to the disclosure of the research methods content of the equations with essentially nonpower nonlinearities in Orlicz spaces. The methodology of studying Hammerstein and Urysohn operators, which has polynomial nonlinearities, is considered in the context of C and L^p spaces. We estimate the mutual influence of the theory of nonlinear integral equations and functional analysis in the period under consideration. The physical background to the study of nonlinear integral equations with strong nonlinearities, based on the problems of combustion theory is given.

Ключевые слова: история функционального анализа, теория интегральных уравнений, советская математика, уравнение Урысона, уравнение Гаммерштейна, стационарное уравнение горения, оператор Немыцкого, нестепенные нелинейности, нелинейные операторы, вполне непрерывные операторы, теоремы существования, пространства Орлича, В.В. Немыцкий, М.А. Красносельский, Я.Б. Рунтцкий.

¹ Некоторые результаты данной работы докладывались на конференции "Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна -2016" [1].



Keywords: history of functional analysis, theory of integral equations, Soviet mathematics, Hammerstein equation, Urysohn equation, stationary combustion equation, Nemytskii operator, nonpower nonlinearities, nonlinear operators, compact operators, existence theorems, Orlicz spaces, V. V. Nemytskii, M. A. Krasnosel'skii, Ya. B. Rutickii.

Введение

С появлением первых идей об интегральных уравнениях в XVIII в. до самого конца XIX в. рассматривались лишь отдельные частные, нередко не связанные между собой задачи, обычно стимулированные прикладными проблемами. Только в конце XIX в. была осознана потребность в необходимости построения общей теории. В первое десятилетие XX в. после работ В. Вольтерра, И. Фредгольма, Д. Гильберта, Э. Шмидта пришло понимание того, что родился новый раздел анализа со своим предметом исследований и системой понятий. В то же самое время, с конца XIX в. в поле зрения попали и нелинейные интегральные уравнения (А.М. Ляпунов, А. Пуанкаре, Э. Шмидт). Но методы их исследования до самого начала 1930-х гг. или находились в традиционном русле классического анализа (уравнение - решение, точное или приближённое), или, если старались выявить качественный характер всего множества решений, ограничивались поиском малых решений и малых изменений параметра. Последнее было обусловлено не недостатком желания исследовать проблему во всей её общности, а наличием существовавшего инструментария для достижения такой цели. Поэтому начало 1930-х гг. можно с некоторой долей условности считать завершением первого этапа развития теории нелинейных интегральных уравнений.

Теория интегральных уравнений явилась одним из главных источников построения грандиозной обобщающей конструкции на высоком уровне абстракции - функционального анализа. По словам Г. Вейля: "Общим результатом всей этой деятельности стало значительное изменение во взглядах на анализ" [2, с.649]. С созданием функционального анализа к началу 1930-х гг. появились адекватные инструменты для дальнейшего прогресса в теории нелинейных интегральных уравнений. Кроме функционального анализа, для решения новых задач было совершенно естественным также привлечение топологических методов, в основе которых лежат фундаментальные понятия предела и непрерывности. Появилась возможность замечательного обобщения, которое было заложено в работах Гильберта по интегральным уравнениям: от интегральных уравнений - к операторным уравнениям, в том числе нелинейным. Если раньше были доступны анализу лишь локальные задачи, то теперь постепенно вырисовывались возможности подходов к нелокальным проблемам: выявление качественно характера всего множества решений; выявление всего множества значений параметров, когда существуют различные классы решений, зависимость решений от значений параметра; изучение уравнений со специальными классами операторов, таких как монотонные и т.д. Нелинейные уравнения в исключительных случаях удаётся решить в явном виде. Поэтому важнейшее значение приобретают теоремы существования решений, что в свою очередь требует уточнения самого понятия решения. Другими словами, требуется определить, в каком функциональном пространстве мы ищем решение.

Между зарождением теории нелинейных интегральных уравнений и осмыслением их роли в развитии функционального анализа и математики в целом потребовалось определённое время и в середине XX в. стали появляться отдельные работы в этом направлении [3, с. 456-458], [4, с. 695-698; 728-732], однако систематического изучения данного вопроса не было до начала 1990-х гг. Диссертация И.А. Александровой "Из истории теории интегральных уравнений" [5] выполненная в 1992 г., стала первой попыткой изменить ситуацию. Но *нелинейным* интегральным уравнениям была посвящена только одна (пятая) глава, в которой рассматривались работы лишь некоторых советских учёных, а вклад таких математиков, как В.В. Немыцкий, М.А. Красносельский, Я.Б. Рунтцкий, уже давно ставших общепризнанными классиками в данной области (см., например,

[6, с. 637], [7, с. 546]) отражён не был. Других серьёзных усилий проследить историю развития теории нелинейных интегральных уравнений в СССР до настоящего времени, по-видимому, не предпринималось.

Качественный поворот в построении теории - выход на сцену методов топологии и функционального анализа

История нелинейных интегральных уравнений в СССР берёт своё начало с работы П.С. Урысона, написанной в 1918 г., когда он был ещё 20-летним студентом, и опубликованной в 1923 г. [8]. Урысон исходил из работы Э. Пикара [9], изучавшего дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2y}{dx^2} + F(x, y) = 0 \quad (1)$$



и рассматривал интегральное уравнение²

$$y(x) = \lambda \int_a^b K(x, s, y(s)) ds \quad (2)$$

где $y(x)$ - искомая функция.

В основу Урысон положил метод последовательных приближений Пикара, применение которого обосновывалось построением последовательностей "верхних" и "нижних" функций, между которыми заключено искомое решение [8, § 3]. Он показал, что при некоторых условиях на скорость роста $K(x, y, u)$ по u , включающих в себя, в частности, существование положительной производной $K_u(x, y, u)$, убывающей с ростом u и ограниченной снизу, существует интервал (α, β) положительных значений величины λ такой, что при каждом $\lambda \in (\alpha, \beta)$ уравнение (2) имеет единственное положительное решение $y(x, \lambda)$, монотонно возрастающее с ростом λ .

В конце 1920-х - начале 1930-х гг. в математике произошло смещение акцентов - вместо поиска решения (точного или приближённого) заданного нелинейного дифференциального или интегрального уравнения, стали предприниматься попытки изучить свойства решений этих уравнений без нахождения самих решений. Такие *качественные* методы исследования восходят к А. Пуанкаре и А.М. Ляпунову. Главное внимание в них уделяется поведению и эволюции системы, описываемой данными уравнениями; свойствам, присущим всему рассматриваемому классу функций, которые представляются уже в качестве единого объекта. Значительное место в этом заняло установление теорем существования решений интегральных уравнений, особенно нелинейных, поскольку последние (в отличие от линейных) демонстрируют качественно более сложное поведение.

Весьма важное место в математике занимает теорема о неподвижной точке, доказанная для непрерывных отображений в конечномерных пространствах голландским математиком Л. Брауэром в 1911 г. и носящая его имя. Справедливости ради надо заметить, что данную теорему о неподвижной точке за несколько лет до Брауэра установил латвийский математик П. Боль [11] и эту теорему иногда называют теоремой Брауэра-Боля.

В 1926 г. в Институте математики и механики МГУ П.С. Александровым и В.В. Немыцким был сделан доклад, в котором было приведено доказательство теоремы о существовании неподвижной точки при непрерывном преобразовании выпуклого компактного множества гильбертова пространства в себя [12, с.146-147], [13, с. 202-203].

Работа Александрова и Немыцкого осталась неопубликованной, поскольку в 1927 г. польский математик Ю. Шаудер получил более общие результаты для банаховых пространств. По словам Немыцкого, Шаудер "использовал гениально простую идею Биркгофа и Келлога" [14], [15, с.143] о существовании инвариантной функции x преобразования

$$F(u) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, u) dt,$$

с помощью которой доказывалось наличие решения уравнения $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$.

Шаудер показал, что *если в линейном полном нормированном пространстве непрерывный оператор переводит замкнутое выпуклое тело в свою компактную часть, то существует неподвижная точка* [16]. Эта теорема и её обобщения стали важнейшей основой установления существования решений нелинейных уравнений.

Для обеспечения простоты в использовании данного принципа Шаудера Немыцкий даёт определение вполне непрерывного оператора для нелинейного случая. Нелинейный оператор A был назван Немыцким вполне непрерывным *на данном множестве*, если он [15, с.445]

- непрерывен на M ;
- преобразует это множество в компактное.

Данное определение немного отличалось от имеющегося для линейного случая³ (в частности, линейный вполне непрерывный оператор всегда непрерывен).

Это позволило Немыцкому упростить постановку задачи вывода условий полной непрерывности операторов Урысона

$$H_0 u(x) = \int_D K(x, y, u(y)) dy \quad (3)$$

и Гаммерштейна

$$H_1 u(x) = \int_D K(x, y) f(y, u(y)) dy \quad (4)$$

для решения интегральных уравнений

² Пионером в исследовании данного интегрального уравнения следует, по-видимому, считать румынского учёного Г. Брату, ученика Э. Пикара [10, с. 117].

³ По Ф. Риссу, линейное преобразование вполне непрерывно, если оно переводит любую ограниченную последовательность в компактную. [17, с.73].



$$u(x) = \lambda H_0 u(x) \quad (5)$$

$$u(x) = \lambda H_1 u(x) \quad (6)$$

в подходящих функциональных пространствах. Этими пространствами оказались пространства C и L^p , поскольку критерии компактности в других пространствах к тому времени попросту отсутствовали.

В пространстве C Немыцким было получено наиболее простое и естественное условие полной непрерывности оператора Урысона. Оно заключалось в том, что функция $K(x, y, u(y))$ непрерывна по совокупности всех трёх переменных: $x, y \in D, |u| \leq a$ [15, с.150].

Так как оператор Гаммерштейна является частным случаем оператора Урысона, то условие полной непрерывности последнего даёт одновременно условие полной непрерывности оператора (4) в пространстве C .

Условия полной непрерывности оператора Гаммерштейна в пространстве L^p включали в себя ограничения на функцию $f(y, u)$, не позволяющие ей расти быстрее, чем $|u|^p$, а также на ядро $K(x, y)$, чтобы оно было интегрируемым со степенью $q, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Схема получения этих условий, выработанная Немыцким, включала в себя несколько этапов.

На первом этапе Немыцкий применил свой оригинальный приём "расщепления" оператора H_1 на две части - *линейную* интегральную вида

$$A(u) = \int_D K(x, y)u(y)dy \quad (7)$$

и *нелинейную* вида⁴

$$\mathbf{f}(u) = f(x, u(x)). \quad (8)$$

Тогда H_1 представляется в виде $H_1 u = A\mathbf{f}(u)$ и можно разграничить требования к оператору A и к оператору \mathbf{f} (эта идея в начале 1950-е гг. получила своё развитие в работах М.М. Вайнберга [19] и М.А. Красносельского [21]).

На втором этапе доказывалась компактность интегрального оператора A с использованием признака компактности семейства функций в L^p М. Рисса [22].

Последний этап заключался в поиске условий, при которых оператор \mathbf{f} непрерывен и ограничен (см. ниже).

Теоремы о существовании решения уравнений (5), (6) были доказаны Немыцким при малых значениях параметра λ [15, с.150; 167]. В них Немыцкий существенно усилил результат Гаммерштейна [23], отказавшись, для уравнения (6), от условия непрерывности $f(x, u)$ по совокупности аргументов и от требований того, что линейный оператор (7) должен быть положительным и вполне непрерывным, как оператор, действующий из L^2 в C [24, с. 181].

Условиями этих теорем явилось (в соответствии с принципом Шаудера) объединением условий, при которых операторы H_0, H_1 являются вполне непрерывными с условиями, при которых они преобразуют некоторый шар пространства в свою часть (последнее обеспечивается малостью λ). Для оператора Гаммерштейна, в частности, условия полной непрерывности имели следующий вид:

$$а. \quad \exists B = Const: \int_D |K(x, y)|^q dx \leq B; \int_D |K(x, y)|^q dy \leq B.$$

$$б. \quad f(y, u) \text{ удовлетворяет условию Гёльдера по переменной } u:$$

$$|f(y, u_1) - f(y, u_2)| \leq M |u_1 - u_2|^v.$$

По сравнению с методом Пикара, использованного Урысоном, подход Немыцкого позволил отказаться от ограничительного требования дифференцируемости ядра. После его работ [15], [20] стало ясно, что вопрос о существовании решений уравнения Гаммерштейна при малых λ со степенными нелинейностями и ограниченным в L^p ядром можно считать закрытым.

С начала 1930-х гг. нелинейные задачи стали интенсивно изучать в Киевском НИИ математики и к началу 1940-х гг. образовалась научная школа нелинейной механики, оказавшая большое влияние на тематику математических исследований в Киеве. К концу 1940-х гг. к нелинейным интегральным уравнениям обратился М.А. Красносельский, видный представитель Киевской математической школы. Он увидел в уравнениях Урысона и Гаммерштейна источник для получения результатов качественного характера (теорем существования решений, теорем о структуре спектра, о точках бифуркации и т.п.). Изучая оператор (8) в контексте вышеупомянутой методики Немыцкого, Красносельский получил довольно неожиданный результат. Пусть функция $f(x, u)$ измерима по x при каждом $u \in R$ и почти при всех $x \in [a, b]$. Если оператор \mathbf{f} действует из L^p в L^q , то он непрерывен и ограничен на каждом шаре пространства L^p , а функция $f(x, u)$ удовлетворяет неравенству

$$|f(x, u)| \leq a(x) + b|u|^{\frac{p}{q}} \text{ где } a(x) \in L^q, b > 0. \quad (9)$$

Из этого неравенства, в частности, вытекает, что пространства L^p нельзя использовать для изучения оператора Гаммерштейна с "сильными" нелинейностями, например, когда $f(x, u) \equiv e^u$ [25, с. 30].

⁴ Следуя Вайнбергу, оператор $\mathbf{f}(u)$ стали впоследствии называть *оператором Немыцкого* [18, с. 204].



Условия полной непрерывности оператора Урысона в пространстве L^p были получены позднее, в 1950 г., М.А. Красносельским и Л.А. Ладыженским⁵ при дальнейшем развитии идей Немыцкого. Они показали, что если функция $K(x, y, u(y))$ удовлетворяет условию Каратеодори (непрерывна по u и измерима по совокупности остальных переменных) и неравенству

$$|K(x, y, u(y))| \leq R(x, y)f(y, u),$$

где $f(y, u)$ растёт не быстрее $|u|^{\alpha_1}$ а $R(x, y)$ интегрируема с некоторой степенью α_2 на $D \times D$, тогда оператор Урысона H_0 действует из L^{p_1} в L^{p_2} , где $p_i = p_i(\alpha_1, \alpha_2)$ и вполне непрерывен [26, с.308].

Простейшим примером такой ситуации может служить интегральное уравнение с оператором Лалеску A_I [27, с. 165]:

$$A_I u(x) = \int_D [f_0(x, s)u(s) + f_1(x, s)u^2(s) + \dots + f_n(x, s)u^n(s)] ds$$

где $f_i(x, s)$ - ограниченная или интегрируемая с некоторой степенью функция.

В случае, когда подынтегральная функция, определяющая операторы H_0, H_i , содержит существенно нестепенные нелинейности, то, вообще говоря, данные операторы не будут даже определены на всех функциях пространства L^p . Например, если

$$A_1 u(x) = \int_D K(x, y)e^{u(y)} dy \tag{10}$$

где $K(x, y) > m > 0, (x, y \in D)$, то в каждом L^p найдётся такая функция $u(y)$, что $K(x, y)e^{u(y)}$ при каждом x будет неинтегрируемой по y [28, с.68]. Подчеркнём, что уравнения с оператором вида (10) впервые были рассмотрены Г. Брату в 1910 году [29, с. 897] и впоследствии они стали носить его имя (см., например, [30, с. 414). В СССР о работах Брату и Лалеску долгое время почти ничего не было известно.

Таким образом, задача построения такого функционального пространства E , в котором действуют нелинейные операторы H_0, H_i и являются в нём вполне непрерывными, с середины 1930-х гг. стала одной из наиболее актуальных в теории нелинейных интегральных уравнений [28, с.60]. В указанном контексте к задачам с оператором вида (10) достаточно долго не могли найти подход. Ситуация поменялась с опубликованием статьи А. Цанена, вышедшей в 1946 г., в которой он использовал новый тип банаховых пространств, введённых в 1932 г. В. Орlichem, для рассмотрения линейных интегральных операторов с неинтегрируемым в пространстве L^p ядром $K(x, y)$ [31].

Примеры появления уравнений Гаммерштейна и Урысона в физических задачах

Одним из источников возникновения интереса к нелинейным интегральным уравнениям были нелинейные дифференциальные уравнения, в частности, уравнение Пикара (1). Переход к соответствующему интегральному уравнению с помощью функции Грина линейной задачи был известен с начала XX в. [9]. Характерным примером из механики, приводящем к уравнению вида (1), была задача о колебаниях маятника

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + k^2 \sin y = 0,$$

хорошо известная европейским учёным того времени [32, с. 424].

Более перспективной с точки зрения приложений была задача описания волнового движения тяжёлой жидкости, приводящая непосредственно к уравнению Урысона. Она была решена А.И Некрасовым в 1920-е гг. (подробности см. в [33]) и получила своё развитие в работах Н.Н. Назарова [34, с. 493-494].

В конце 1930-х – начале 1940-х гг. начала формироваться математическая теория горения. У её истоков стояли известные советские физики Я.Б. Зельдович и Д.А. Франк-Каменецкий [35]-[36]. При создании математической модели они опирались на результаты А.Н. Колмогорова⁶, И.Г. Петровского и Н.С. Пискунова [37], датированные 1937 годом, в которых рассматривалось уравнение диффузии с нелинейной правой частью

$$\frac{\partial v}{\partial t} - k \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = F(v)$$

где $F(v)$ - функция вида $kv(1-v), k>0$, определённая на отрезке $[0,1]$.

Описывая стационарный процесс горения и теплового взрыва в плоских и цилиндрических сосудах в рамках указанной теории, Франк-Каменецкий получил задачу Дирихле для полулинейного уравнения Лапласа :

$$\Delta \theta = -F(\theta), \tag{11}$$

$$\theta|_S = 0, \tag{12}$$

⁵ Работа была опубликована в 1954 году.

⁶ Справедливости ради следует отметить, что Колмогорову здесь принадлежало описание физической модели, а математическая теория была разработана в основном его соавторами [38].



где $\theta = \theta(x, y)$ - безразмерная температура; $(x, y) \in D$, S - граница области D ; $F(\theta)$ - скорость тепло-выделения, равная $2e^\theta$ при тепловом взрыве [39, с. 124], и имеющая вид некоторой выпуклой функции при тепловом распространении пламени [39, с. 236].

Математическая теория горения и взрыва также продолжила своё развитие в работах других учёных (подробную библиографию см. в [39]). С определённого момента пришло понимание необходимости доказывать теоремы существования решения задачи (11)-(12) и выявлять их качественные свойства для широкого класса функций $F(\theta)$. Если допускать возможность появления разрывных решений задачи (11)-(12), то более естественным был бы переход к уравнению Гаммерштейна посредством функции Грина⁷ с последующим рассмотрением его в пространствах суммируемых функций. Но для функций вида $F(\theta) = e^\theta$ пространства L^p не подходили; в этом случае единственно приемлемым классом функций был класс Юнга так называемых "сверхсуммируемых" функций [40], преобразованный Орличем, после соответствующего согласования свойств сходимости и интегрируемости, в пространство его имени (см. следующий параграф). Однако, указанный функционально-аналитический подход ещё не нашёл широкого распространения (даже среди математиков), поэтому при исследовании задачи (11)-(12) до середины 1960-х гг. преобладали численные методы⁸. С другой стороны, результаты Франк-Каменецкого, Зельдовича и их последователей до конца 1950-х гг. были вне поля зрения математиков⁹ и разработка теории интегральных уравнений Гаммерштейна и Урысона диктовалась (как это часто бывает) главным образом внутренней логикой развития предмета.

Пространства Орлича

Прежде, чем перейти непосредственно к предмету нашего рассмотрения, сделаем несколько предварительных замечаний.

В. Орлич (1903-1990) - выпускник Львовского университета, ученик Банаха, стажировался в Гёттингене в 1929-1931 гг. под руководством Э. Ландау. В середине 1930-х он перешёл в Познаньский университет, где основал получившую известность математическую школу. В тот же период у Ландау также стажировался ученик Г. Штейнгауза З. Бирнбаум. За недолгий период сотрудничества Орлича с Бирнбаумом ими была написана большая работа "Об обобщении понятия взаимно сопряжённых потенциалов" [43]. Она была представлена в редакцию *Studia Mathematica* в октябре 1930 г. и с некоторыми добавлениями опубликована в следующем году. Главным результатом этой работы является всестороннее рассмотрение и углубление свойств восходящих к Юнгу N -функций (определение см. ниже) с точки зрения их использования в задачах интегрируемости и сходимости, после чего Орлич смог обобщить пространство L^p (работы [44]-[45])¹⁰.

Непрерывная выпуклая функция $M(u)$ называется N -функцией¹¹, если она чётна и удовлетворяет условиям [46, с. 497]

$$M(0) = 0; \lim_{|u| \rightarrow 0} \frac{M(u)}{|u|} = 0; \lim_{|u| \rightarrow \infty} \frac{M(u)}{|u|} = \infty.$$

Две N -функции, $M(u)$ и $N(v)$ считаются *дополнительными* друг к другу, если их производные являются взаимно-обратными монотонными функциями.

Простейшим примером пары дополнительных N -функций могут служить функции $M(u) = \frac{|u|^p}{p}$, $N(v) = \frac{|v|^q}{q}$, если $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ [43, с.10].

В статье [44] Орлич ввёл в рассмотрение классы суммируемых функций L_M , у которых вместо степенной функции под знаком интеграла фигурировала N -функция $M(u)$. Необходимость в такого рода рассмотрении стала возникать в теории рядов, когда при нахождении коэффициентов Фурье данной функции $f(x)$ по тригонометрической системе, $f(x)$ не принадлежала пространствам L^p [49].

Принадлежность функции u классу L_M определялась конечностью величины $\rho_M(u) = \int_a^b M(u(x)) dx$.

Норма в L_M была введена Орличем в работе [45], как

⁷ Как это сделал в несколько более общем случае А. Гаммерштейн [23, с.124].

⁸ Одной из первых работ в направлении качественных методов исследования (11)-(12) в исходной постановке можно считать [41].

⁹ Ситуация начала меняться только после выхода большой статьи И.М. Гельфанда в УМН [42].

¹⁰ Подробную историю создания пространства Орлича см. в [47, с.104-111], [48].

¹¹ Подобные функции также находят своё применение в приложениях. В частности, если в задаче теплового взрыва (11)-(12) $F(\theta)$ является N -функцией, то её решения являются устойчивыми к малым возмущениям [41].



$$\|u\|_{L_M} = \sup_{\rho_N(v) \leq 1} \int_a^b uv dx, \tag{13}$$

Здесь $M(u)$ - N -функция; $N(v)$ - дополнительная к $M(u)$ функция. Функции u , входящие в (13) должны удовлетворять условию $\rho_M(ku) < \infty$ для некоторого $k > 0$ [45, с.93].

Отметим, что нормированное пространство Орлича, порождённое функцией $M(u) = \frac{|u|^p}{p}$ совпадает с L^p [44, с.214].

Получившееся банахово пространство было обозначено Орличем через L_M^* . Его сепарабельность и рефлексивность была доказана Орличем при условии, что данное пространство порождено функциями, удовлетворяющими так называемому Δ_2 - условию при больших u [44, с.210]:

$$\exists k \in \mathbb{R} M(2u) \leq kM(u) \text{ для } |u| \geq a \tag{14}$$

В предположении о гладкости функции $M(u)$ Δ_2 - условие равносильно тому, что функция $M(u)$ растёт не быстрее степенной (это было отмечено ещё в 1928 г. Дж. Бёркилем [50, с.494]). В качестве примера такой функции можно привести [43, с.30]

$$M(u) = |u|^\alpha (|\ln |u|| + 1), \alpha > 1 \tag{15}$$

На основе построенной Орличем теории пространств L_M^* , удовлетворяющих Δ_2 - условию, Цанену удалось доказать полную непрерывность линейных интегральных операторов с неограниченными ядрами, интегрируемыми с некоторыми N -функциями [31].

Использование пространств Орлича в теории нелинейных интегральных уравнений

С нелинейными интегральными операторами дело обстояло сложнее. Если для степенных нелинейностей оператора Гаммерштейна хорошо подходило пространства L^p [51], то для неполиномиальных, (например экспоненциальных) как уже было отмечено (см. (9)), данные пространства оказались недостаточными.

В начале 1950-х гг. на одном из семинаров в Киевском НИИ математики Б.И. Коренблюм сообщил М.А. Красносельскому и Я.Б. Рудицкому о новом функциональном пространстве, введённом Орличем - пространстве L_M^* [52, с. 143]. Возникла идея использовать их для замены L^p в схеме исследования уравнений Урысона и Гаммерштейна с сильными нелинейностями. Однако здесь обнаружилась проблема: Δ_2 -условие, обеспечивающее "хорошие" свойства пространств Орлича (рефлексивность, сепарабельность, теорему о представлении линейных функционалов и т.п.), не позволяло использовать эти пространства для исследования разрешимости интегральных уравнений с существенно нестепенными нелинейностями.

Таким образом, появилась необходимость отказаться от ограничительного Δ_2 - условия и произвести реконструкцию теории пространств Орлича на основе новой классификации N -функций, определяемой их поведением на бесконечности. На этом пути Красносельский и Рудицкий сначала выделили из множества N -функций подмножество, состоящее из функций, растущих быстрее любой степенной. Это подмножество задавалось так называемым Δ_3 - условием [53, с. 23]. N -функция $M(u)$ удовлетворяет Δ_3 - условию, если

$$M(u) \sim |u|M(u) \tag{16}$$

Ясно, что функция $uM(u)$ растёт не медленнее M , так что Δ_3 - условие означает, что умножение на аргумент не порождает более "быстрорастущий" класс, что уже означает быстрый рост [54, с. 16].

Δ_3 - условию удовлетворяет, например, функция

$$M(u) = (1 + |u|)^{\ln(1+|u|)} - 1.$$

N -функции $M_1(u)$ и $M_2(u)$ называются эквивалентными ($M_1(u) \sim M_2(u)$), если существуют такие числа k_1, k_2 , что при $u \geq u_0$ выполнены неравенства

$$M_1(k_1 u) \leq M_2(u) \leq M_1(k_2 u). \tag{17}$$

Из класса N -функций, удовлетворяющих Δ_3 - условию, были выделены более узкие классы функций, имеющих экспоненциальные нелинейности [53, с. 25]. N -функция $M(u)$ удовлетворяет Δ^2 - условию, если

$$M(u) \sim M^2(u). \tag{18}$$

Это условие означает, что существуют $b > 0, u_0 \geq 0$, такие, что [55, с.40]

$$M^2(u) \leq M(bu), \quad u \geq u_0.$$

Δ^2 - условию удовлетворяет, например, функция

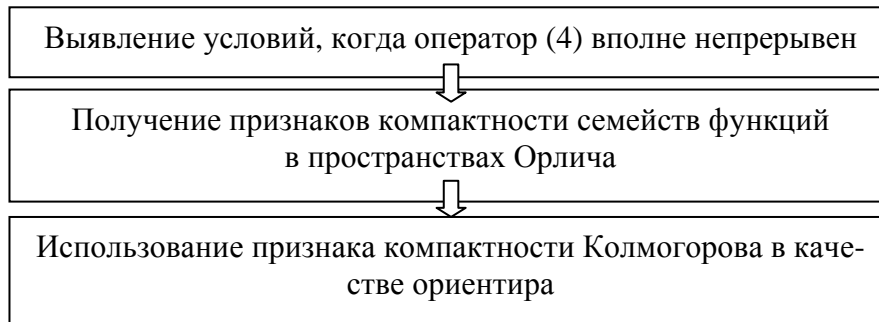
$$M(u) = e^{|u|} - |u| - 1.$$

Основой для введения именно такой классификации явилось, по-видимому, то, что при определении нормы Орлича участвуют функции, дополнительные друг к другу - $M(u)$ и $N(v)$. К моменту создания пространств L_M^* имелось два типа условий - Δ_2 и Δ' (см. ниже). Новая классификация могла стать более удобной и удачно восполнить имеющуюся, если бы она не потребовала введения новых категорий N -функций, помимо уже существующих. Поскольку функции, удовлетворяющие Δ_3 - условию дополняются функциями, удовлетворяющими Δ_2 - условию [53, с. 24], а функции, удо-



удовлетворяющие Δ^2 - условию, дополняются функциями, удовлетворяющими Δ' - условию¹², то полученная градация N - функций вполне вписывается в теорию пространств Орлича, не нарушая первоначального замысла её основателей.

Поскольку основная цель построения новой теории пространств Орлича на начальном этапе - доказательство теории существования нелинейных интегральных уравнений на основе принципа Шаудера, применительно к оператору Гаммерштейна выстраивалась следующая логическая цепочка:



Так как широко известный признак Колмогорова компактности семейств функций в пространствах L^p основан на возможности приближения функций этого семейства ограниченными функциями, имело смысл рассматривать множество таких функций и в пространствах Орлича. Идя по этому пути, Красносельский и Ружицкий выделили в L_M^* подпространство E_M - замыкание в L_M^* множества ограниченных функций, которое обладает целым рядом полезных свойств (сепарабельность, линейность, теорема о представлении линейных функционалов). Кроме того, с помощью E_M удалось ввести новый вид сходимости, относительно которой пространство Орлича оказалось *слабо полно* и *слабо компактно*¹³ [53, с. 30]. А именно, последовательность функций $u_n(x) \in L_M^*$ была названа *(o)-слабо сходящейся*, если последовательность чисел

$$l(u_n) = \int_D u_n(x)v(x)dx$$

сходится $\forall v(x) \in E_N$.

Вернёмся к нелинейным интегральным уравнениям. В рамках переработанной теории пространств Орлича Красносельскому и Ружицкому удалось сформулировать условие полной непрерывности операторов Гаммерштейна в L_M^* с нелинейной частью, удовлетворяющей условию Каратеодори и неравенству

$$|f(x, u)| \leq b(x) + R(|u|), \quad x \in D, \quad u \in (-\infty, +\infty) \quad (19)$$

где $R(u)$ - положительная, монотонно возрастающая при $u \geq 0$, непрерывная функция; $b(x) \in L_N$ [56, с. 95]. При этом функция $\alpha K(x, y)$ должна быть $M(u)$ -интегрируемой функцией по совокупности переменных:

$$\int_D \int_D M[\alpha K(x, y)] dx dy < \infty \quad \forall \alpha > 0. \quad (20)$$

Получение достаточных условий полной непрерывности оператора H_I в пространствах Орлича было проведено аналогично тому, как это делалось для пространств L^p [57, с. 68]:

- вывод условий непрерывности и ограниченности оператора Немыцкого \mathbf{f} , действующего из L_M^* в $L_{M_1}^*$;
- определение условий полной непрерывности линейного интегрального оператора $Au(x) = \int_{\Omega} K(x, y)u(y)dy$, действующего из $L_{M_1}^*$ в $L_{M_2}^*$.

Отметим, что для оператора \mathbf{f} , действующего из $L_{M_1}^*$ в $L_{M_2}^*$ было получено неравенство, аналогичное (9):

$$M_2[f(x, u)] \leq a(x) + bM_1(u), \quad \text{где } a(x) \in L^1, \quad b > 0.$$

Его можно интерпретировать, как ограничение на рост функции $f(x, u)$ по переменной u .

Красносельским и Ружицким было доказано, что достаточные условия полной непрерывности H_I в пространстве Орлича зависят от скорости роста функции $R(u)$ на бесконечности. Для $b(x) \equiv b = \text{Const}$ они имеют следующий вид:

¹² Функция $M(u)$ удовлетворяет Δ' - условию при больших значениях аргумента, если $\exists Q \in R: M(uv) \leq QM(u)M(v)$ для $|u| \geq a, |v| \geq a$. Это условие было введено Р. Купером и использовано З. Бирнбаумом и В. Орlichem при выводе необходимого и достаточного условия $M(u)$ - интегрируемости произведения двух функций [43, с. 45].

¹³ Это помогло доказать полную непрерывность оператора A с неограниченными ядрами $K(x, y)$ [58, с. 30].



Если выполняются условия (19)-(20); функция $M(u)$ удовлетворяет Δ_3 или Δ^2 - условию, а $R(u)$ имеет подчинённый $M(u)$ порядок роста, тогда оператор H_1 вполне непрерывен в некотором шаре пространства L_M^* [56, с.95-96].

В качестве примера того, как работают указанные условия можно взять оператор (10) с нелинейностью $f(x,u)=e^{c|u|}$, ядро $K(x,y)=\sqrt{\ln|x-y|}$ при $x, y \in [a, b]$; $c \in R$ и пространство Орлича L_M^* , порождённое функцией $M(u)=e^{u^2} - 1$ [57, с. 231]. В этом случае оператор (10) будет вполне непрерывным оператором в некотором шаре L_M^* .

В рассмотренных случаях функция $M(u)$ росла быстрее некоторой степенной функции при $u \rightarrow \infty$. Это означало, что ядро $K(x,y)$ принадлежало некоторому пространству $L^p(D \times D)$. Красносельский и Рутицкий нашли возможность отказаться от этого условия, предполагая, что неравенство (20) может выполняться для функций $M(u)$, растущих медленнее, чем $|u|^\varepsilon \forall (\varepsilon > 1)$ (то есть удовлетворяющих Δ_2 - условию). При этом получилось, что главная часть функции $f(x,u)$ должна мажорироваться (при больших u) очень медленно растущей функцией:

$$R(u) < \frac{cM(u)}{u} \tag{21}$$

где $C > 0$ - некоторая постоянная.

Условие (21) оказалось достаточным для того, чтобы оператор H_1 был вполне непрерывным в некотором пространстве Орлича [56, с.98-99].

Иллюстрацией вполне непрерывного оператора Гаммерштейна со "слабой" нелинейностью может служить оператор

$$H_1 u(x) = \int_a^b K(x,y) \ln(1 + |u|) dy \tag{22}$$

где $K(x,y)$ удовлетворяет неравенству

$$\int_a^b \int_a^b |K(x,y)| \ln(1 + |K(x,y)|) dx dy < \infty,$$

а функция $M(u)$ равна $|u| \ln(1 + |u|)$ [56, с.103].

При выполнении условия полной непрерывности оператора H_1 в пространстве L_M^* доказательство теоремы существования решений уравнения (4) не вызвало больших затруднений. То, что оператор λH_1 переводит шар пространства L_M^* :

$B_\rho(\theta) = \{u(x) \in L_M^* : \|u\|_M \leq \rho\}$ в свою часть при малых λ , было показано Красносельским и Рутицким с использованием непрерывности оператора Немьцкого в L_M^* и некоторых свойств N -функций [56, с.115-116].

Перейдём к уравнению Урысона (5). Его разрешимость была установлена по тому же алгоритму, что и для уравнения (6) [57, § 19]:

- 1) получение условий полной непрерывности оператора H_0

$$H_0 u(x) = \lambda \int_D K(x,y, u(y)) dy$$

- 2) применение принципа Шаудера.

Условия полной непрерывности H_0 для функции $K(x,y,u)$, удовлетворяющей неравенству

$$|K(x,y,u)| \leq k(x,y)[a(x) + R(|u|)], \quad (x \in D, u \in (-\infty, \infty)) \tag{23}$$

включают в себя ограниченность ядра:

$$k(x,y) \in E_M \times E_M \tag{24}$$

и естественные предположения:

$$a(x) \in L_M^*; R(u) \tag{25}$$

неотрицательная возрастающая функция, имеющая подчинённый $M(u)$ порядок роста.

Соответствующая теорема формулируется (и доказывается) подобно тому, как это было сделано для оператора H_1 [59, с. 364].

При выполнении условий (23)-(25) и Δ^1 - условия на дополнительную к $M(u)$ функцию оператор Урысона H_0 вполне непрерывен в некотором шаре пространства L_M^* где $M(u)$ - N - функция, удовлетворяющая Δ_3 или Δ^2 - условию.

Теорема существования решений в пространстве L_M^* в условиях полной непрерывности оператора H_0 была доказана Красносельским и Рутицким для уравнения

$$u(x) = \lambda \int_D K(x,y, u(y)) dy \tag{26}$$

при достаточно малых λ .

В качестве примера нелинейного ядра для (26) можно взять функцию

$$K(x,y, u(y)) \leq |\ln r|^{1-\beta_0} e^{\alpha|u|}, \tag{27}$$

где r - расстояние между точками $x, y \in [a, b]$.

Тогда уравнение (26) имеет решение в L_M^* где $M(u)$ - любая функция вида $e^{|u|^{1+\beta}} - 1$, где $0 < \beta < \beta_0$ [57, с. 239-241].

Случай "слабых" нелинейностей мало отличается от случая, рассмотренного для оператора H_1 .



Заметим, что условия существования решений у уравнений Урысона и Гаммерштейна, полученные с применением пространств Орлича, отличаются от аналогичных условий, возникающих при использовании пространств C и L^r (см. предыдущий раздел). Как уже упоминалось выше¹⁴, это связано с тем, что в пространствах Орлича действуют и вполне непрерывны такие операторы H_0 и H_1 , которые не действуют в пространствах непрерывных функций и функций, интегрируемых со степенью r . Так, в двух последних примерах операторы H_0 и H_1 нельзя рассматривать без дополнительных предположений в пространствах L^r в последнем из них по причине "сильной" нелинейности оператора Урысона (см. (27)), а в предпоследнем - по причине того, что ядро оператора Гаммерштейна $K(x, y)$ может иметь "сильные" особенности (см. (22)) [57, с. 241-242].

Подчеркнём, что Красносельский настолько глубоко приобщился к идеям Орлича, связанным с N -функциями, классами L_M и пространствами L_M^* и сумел так квалифицированно развить данную теорию в направлении её использования в решении нелинейных интегральных уравнений, что вскоре после выхода монографии [57] *Выпуклые функции и пространства Орлича* его стали считать вторым (!) после Орлича специалистом по теории пространств Орлича [60, с. vii]¹⁵.

Заключение

Теория нелинейных интегральных уравнений, зародившись в начале XX в. из уравнений равновесия вращающейся жидкости Ляпунова-Шмидта, к началу 1930-х гг. обогатилась двумя новыми объектами для исследований - уравнениями Урысона и Гаммерштейна. К ним и было приковано основное внимание исследователей до начала 1960-х гг. Параллельно шло развитие теории линейных уравнений в банаховых пространствах, на которую стали опираться специалисты по нелинейному анализу. Использование аппарата теории линейных интегральных уравнений при поиске решений нелинейных интегральных уравнений, начатое ещё Ляпуновым, оставалось основным приёмом при доказательстве разрешимости последних до конца 1950-х гг.

Оказалось, что в конце 1930-х гг. была построена стационарная теория горения и теплового взрыва, задачи которой приводились к уравнению Гаммерштейна с сильными нелинейностями, что могло бы дать дополнительный стимул к активизации исследований в области нелинейных интегральных уравнений. Но, к сожалению, результаты Зельдовича и Франк-Каменецкого не попали в то время в круг научных интересов математиков, специализирующихся на уравнениях Гаммерштейна и Урысона в СССР, поэтому эволюция соответствующих физических и математических теорий происходила параллельно по законам их внутренней логики развития.

В процессе «разворота» теории операторов в сторону решения нелинейных интегральных уравнений пришлось переосмыслить понятия *компактности* и *непрерывности*, создать специальные приёмы для расщепления операторов Гаммерштейна и Урысона. На этом пути были сформулированы и доказаны теоремы существования для нелинейных уравнений, порождённых вполне непрерывными операторами. Методика использования оператора суперпозиции $f(x, u(x))$, предложенная Немыцким для исследования нелинейных операторов, действующих в пространствах C и L^p и развитая в дальнейшем Красносельским для операторов, действующих в L_M^* , применялась также Вайнбергом в контексте вариационных методов решения нелинейных интегральных уравнений и систем [18]. Практически сразу она нашла своё применение и в зарубежных исследованиях, проводимых в Японии [61], Франции [62] и других странах (обзор результатов и библиография по данной теме хорошо представлены в [63]).

Значительным шагом вперёд в развитии нелинейного функционального анализа стало использование *пространств Орлича* для исследования нелинейных интегральных уравнений с сильными нелинейностями. После доклада М.А. Красносельского и Я.Б. Рutiцкого на заседании Московского математического общества в 1954 г. [56], данная идея была достаточно быстро распространена московскими математиками (М.И. Вишиком [64] и Ю.А. Дубинским [65]) на нелинейные *дифференциальные* уравнения, а через них пришла и за границу [66]. Отметим, что при доказательстве разрешимости соответствующих нелинейных краевых задач использовалась техника, основанная на теоремах вложения Соболева [67], что привело в итоге к необходимости создания нового типа функциональных пространств - *пространств Соболева-Орлича*¹⁶.

Опубликование монографии Красносельского и Рutiцкого [57] стимулировало исследования по теории пространств Орлича. В результате эти пространства стали применяться в теории функций, в гармоническом анализе, в теории вероятностей, в математической статистике, в теории интерполяций,

¹⁴ См. пояснения к формуле (10).

¹⁵ В этой связи ему (вместе с Орличем) была посвящена монография известных на западе учёных М.М. Рао (США) и З.Д. Рена (КНР) *Применение пространств Орлича*, опубликованная в 2002 г. в издательстве "Marcel Dekker".

¹⁶ В них были задействованы *классы* Орлича.



в теории симметричных пространств, в эргодической теории, в теории мартингала, в теории риска и т.д. Следует отметить, что указанная монография была переведена и издана в США и Индии, что говорит о той значимости, которую имели эти результаты. Проведённые за 25 лет исследования¹⁷ (1935-1960 гг.) по теории нелинейных интегральных уравнений вовлекли в научную работу в данной области функционального анализа сотни математиков (см., например, [4], [13], [68]).

Автор выражает искреннюю признательность Р.Р. Мухину (СТИ НИТУ МИСИС) за постановку задачи и полезные советы, а также М.А. Муратову (Симферополь, КФУ) и В.П. Богатовой за помощь в предоставлении необходимых материалов.

Отдельная благодарность участникам общегородского семинара по истории математики МГУ (руководитель С.С. Демидов) и общегородского семинара по дифференциальным уравнениям МЭИ (руководители - Ю.А. Дубинский и А.А. Амосов) за обсуждение работы.

Работа выполнена при поддержке РГНФ, проект 17-03-00383.

Список литературы

References

1. Богатов Е.М. К вопросу об истории развития теории нелинейных интегральных уравнений в СССР (1920-1960) / Е.М. Богатов // Материалы междунар. конф. "Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна-2016" ред. В.А. Костин. Издательско-полигр. центр "Научная книга", Воронеж, 2016. - С. 86-88.
Bogatov E.M. To a question about the history of the theory of nonlinear integral equations in the USSR (1920-1960) / E.M. Bogatov // Materials intern. conf. "Voronezh winter mathematical school S.G. Krein-2016", ed. V.A. Kostin. Publishing house *Science Book*, Voronezh, 2016. - P. 86-88
2. Weyl H. David Hilbert and his mathematical work / H. Weyl // *Bull. Amer. Math. Soc.* 50:9 (1944), P. 612-654.
3. Шилов Г.Е. К истории развития функционального анализа на Украине / Г.Е. Шилов // Историко-матем. исслед., Вып. IX (1956), С. 427-476.
Shilov G.E. On the history of the functional analysis development in Ukraine / G.E. Shilov // *Historical and mathemat. studies*, 9 (1956), - P. 427-476.
4. Красносельский М.А., Функциональный анализ / М.А. Красносельский, М.А. Наймарк, Г.Е. Шилов // В сб. Математика в СССР за 40 лет. Под ред. А.Г. Куроша. Т.1. ГИФФЛ, М., 1959, С. 680-683.
Krasnosel'skii M. A. Functional analysis / M. A. Krasnosel'skii, M. A. Naimark, G.E. Shilov // *Mathematics in the USSR during 40 years (1917-1957) Vol. 1 Review articles*. Moscow, Fizmatgiz, 1959. - P. 680-683.
5. Александрова И.Л. Из истории теории интегральных уравнений / И.Л. Александрова. Дисс.... кандидата физико-математических наук: 07.00.10.- М., ИИЕТ РАН, 1992.
Aleksandrova I.L. About the history of the theory of integral equations / I.L. Aleksandrova PhD Thesis, Moscow, IHST RAS, 1992.
6. Ziedler E. *Nonlinear Functional Analysis and Its Applications. II: Nonlinear Monotone Operators* / E. Ziedler.- Springer-Verlag, New York, 1990. - 741 p.
7. Ziedler E. *Nonlinear Functional Analysis and Its Applications. III: Variational Methods and Optimization* / E. Ziedler.- Springer-Verlag, New York, 1985. - 662 p.
8. Урысон П. С. Об одном типе нелинейных интегральных уравнений / П. С. Урысон // Матем. сб., 31:2 (1923). - С. 236-255.
Urysohn P. Sur une classe d'équations intégrales non lineaires / P. Urysohn // *Mat. Sb.*, 31:2 (1923), P. 236-255.
9. Picard E. *Traité d'Analyse*, t. I-III / E. Picard. - Gauthier-Villars. Paris, 1905.
10. Bratu G. Sur les équations intégrales non linéaires/ G. Bratu // *Bulletin de la S. M. F.*, 42 (1914). - P. 113-142.
11. Гайдук Ю.М. Научные заслуги П. Боля в оценках его современников / Ю.М. Гайдук // Историко-матем. исслед., Вып. XXXII-XXXIII (1990).- С. 120-137.
Haiduk Yu. M. Scientific merits of P. Bohl in the assessments of his contemporaries [in Russian] / Yu. M. Haiduk // *Historical and mathemat. studies*, XXXII-XXXIII (1990).- P. 120-137.
12. Математика: Наука в СССР за пятнадцать лет (1917-1932)-М.-Л.: ГТТИ, 1932.- 239 с.
Mathematics: The Science of the USSR in fifteen years (1917-1932). [in Russian] GTTI, Moscow-Leningrad, 1932.-239 p.
13. Вайнберг М. М. Виктор Владимирович Немыцкий (к шестидесятилетию со дня рождения) / М. М. Вайнберг, Р. Э. Виноград, Б. П. Демидович // УМН, 1961, том 16, вып. 1 (97), С. 201-212.
Vainberg M. M. Victor Vladimirovich Nemytskii (on the sixtieth birthday anniversary) / M. M. Vainberg, R. E. Vinograd, B. P. Demidovich // *Uspekhi Mat. Nauk*, 16:1 (97) (1961), P. 201-212.
14. Birkhoff G.D. Invariant points in function space / G.D. Birkhoff, Kellog O.D. // *Trans. Amer. Math. Soc.*, 23 (1922), P. 95-115.
15. Немыцкий В. В. Метод неподвижных точек в анализе / В. В. Немыцкий // УМН, 1936, вып. 1, С. 141-174.
Nemytskii V. V. Fixed-point method in analysis / V. V. Nemytskii // *Uspekhi Mat. Nauk*, 1936, № 1, P. 141-174

¹⁷ Ввиду ограниченности объёма, мы не смогли охватить такие важные направления в развитии теории нелинейных интегральных уравнений, как вариационные и топологические методы, а также теорию конусов. Это требует отдельного рассмотрения, и мы надеемся проследить историю данных вопросов в последующих работах.



16. Schauder J. Zur Theorie stetiger Abbildungen in Funktionalräumen / J. Schauder // *Math. Z.*, 26 (1927), S. 47-65.
17. Riesz F. Über lineare Funktionalgleichungen / F. Riesz // *Acta Math.*, 41 (1918), P. 71-98.
18. Вайнберг М. М. Вариационные методы исследования нелинейных операторов / М. М. Вайнберг М., ГИТТЛ, 1956. - 344 с.
- Vainberg M.M. Variational methods for the study of nonlinear operators / M.M. Vainberg (Russian) Gostehizdat, Moscow, 1956. - 344 p.
19. Вайнберг М. М. О непрерывности некоторых операторов специального вида / М. М. Вайнберг // *ДАН СССР* 73:2 (1950), С. 253-255.
- Vainberg M. M. Continuity of the operator of special type / M. M. Vainberg // *Doklady Akad. Nauk SSSR* 73:2 (1950), p. 253-255.
20. Немыцкий В. В. Теоремы существования и единственности для нелинейных интегральных уравнений / В. В. Немыцкий // *Матем. сб.*, 1934, том 41, № 3, С. 421-452.
- Niemytzki V. Théorèmes d'existence et d'unicité des solutions de quelques équations intégrales non-linéaires / V. Niemytzki // *Mat. Sb.*, 41:3 (1934). - P. 421-452
21. Красносельский М.А. Непрерывность оператора $fu(x)=f[x,u(x)]$ / М.А. Красносельский // *ДАН СССР* 77, № 2 (1951), С. 185-188.
- Krasnosel'skii M.A. The continuity of the operator $fu(x)=f[x,u(x)]$ / M.A. Krasnosel'skii // *Doklady Akad. Nauk SSSR (N.S.)* 77:2 (1951).- P. 185-188.
22. Riesz M. Sur les ensembles compacts de fonctions sommables // *Acta Sci. Math.*, (Szeged) 6 (1933).- P. 136-142.
23. Hammerstein, A. Nichtlineare Integralgleichungen nebst Anwendungen / M. Riesz // *Acta Math.*, 54 (1930), S. 117-176.
24. Александров П.С. Виктор Владимирович Немыцкий (некролог) / П.С. Александров, М. М. Вайнберг, Р. Э. Виноград, Б. П. Демидович // *УМН*, 1968, том 23, вып. 2 (140), С. 179-192.
- Aleksandrov P. S. Viktor Vladimirovich Nemytskii (obituary) / P. S. Aleksandrov, M. M. Vainberg, R. E. Vinograd, B. P. Demidovich // *Uspekhi Mat. Nauk*, 23:2 (140) (1968). - P. 179-192.
25. Рутицкий Я.Б., М.А. Красносельский в Киеве / Я.Б. Рутицкий. - Сб. Материалы к истории математического факультета ВГУ, Воронеж, ВГУ, 1998, С. 28-31.
- Rutickii Ya. B. Krasnosel'skii M.A. v Kieve / Ya. B. Rutickii - Materials to the history of mathematics department of VSU, Voronezh State University, 1998, P. 28-31.
26. Красносельский М. А. Условия полной непрерывности оператора П. С. Урысона, действующего в пространстве L^p / М. А. Красносельский, Л. А. Ладыженский // *Тр. ММО*, 3, ГИТТЛ, М., 1954, С. 307-320.
- Krasnosel'skii M. A., Ladyzhenskii L. A. Conditions for complete continuity of P. S. Uryson's operator acting in the space L^p / M. A. Krasnosel'skii, L. A. Ladyzhenskii // *Tr. Mosk. Mat. Obs.*, 3 (1954), P. 307-320.
27. Lalescu T. Sur l'équation de Volterra / T. Lalescu // *J. de Math.*, ser. 6, vol. 4 (1908), p. 125-202.
28. Красносельский М. А., Некоторые задачи нелинейного анализа / М. А. Красносельский // *УМН*, 1954, том 9, вып. 3 (61), С. 57-114.
- Krasnosel'skii M.A. Some problems of nonlinear analysis / M. A. Krasnosel'skii // *Uspekhi Mat. Nauk*, 9:3 (61) (1954). - P. 57-114.
29. Bratu G. Sur certaines équations intégrales non linéaires / G. Bratu // *C. R. Acad. Sci. Paris*, 150 (1910). - P. 896-899.
30. Davis H. T. Introduction to Nonlinear Differential and Integral Equations / H. T. Davis - Dover, New York, 1962. - 566 p.
31. Zaanen A.C. On A Certain Class of Banach Spaces / A.C. Zaanen // *Ann. of Math.*, Second Series, 4 (1946), Vol. 47. - P. 654-666.
32. Bateman H. Report on the history and present state of the theory of integral equations / H. Bateman // *British Assoc. for the Advancement of Sci.*, 80 (1910).- P. 345-424.
33. Богатов Е.М. Из истории нелинейных интегральных уравнений / Е.М. Богатов, Р.Р. Мухин // *Изв. вуз., Прикл. нелинейная динамика*, 2, 2016.
- Bogatov E.M. About the history of nonlinear integral equations / E.M. Bogatov, R.R. Mukhin // *Iz. Vuz. Applied Nonlinear Dynamics*, 2, 2016.
34. Математика в СССР за 40 лет (1917-1957) Том 2. Библиография. Сборник / М.: Физматгиз, 1959. - 821 с.
- Mathematics in the USSR for 40 years (1917-1957), Vol. 2. References. Collection / M.: Fizmatgiz, 1959. - 821 p.
35. Франк-Каменецкий Д.А. Распределение температур в реакционном сосуде и стационарная теория теплового взрыва / Д.А. Франк-Каменецкий // *Журнал физ. химии*, 13 (1939), № 6, С. 738-755.
- Frank-Kamenetskiy D.A. The temperature distribution in the reaction vessel and stationary thermal explosion theory / D.A. Frank-Kamenetskiy // *J. of Phys. Chemistry*, 13 (1939). Iss. 6. - P. 738-755.
36. Зельдович Я.Б. К теории теплового распространения пламени / Я.Б. Зельдович, Д.А. Франк-Каменецкий // *Журн. физ. химии*, 12: 1 (1938), С. 100-105.
- Zel'dovich Ya.B. To the thermal flame propagation theory / Ya.B. Zel'dovich., D.A. Frank-Kamenetskiy // *J. of Phys. Chemistry*, 12: 1 (1938), - P. 100-105.
37. Колмогоров А.Н. Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием количества вещества, и его применение к одной биологической проблеме / А.Н. Колмогоров, И.Г. Петровский, Н.С. Пискунов // *Бюлл. МГУ* 1, вып. 6 (1937), С. 1-26.
- Kolmogorov A.N. Study of diffusion equation coupled with an increase of the number of substances, and its application to a biological problem / A.N. Kolmogorov, I.G. Petrovsky, N.S. Piskunov // *Bull. Moscow State Univ.* 1, Iss. 6 (1937).- P. 1-26.



38. Тихомиров В.М. Вопросы естествознания в творчестве А. Н. Колмогорова / В.М. Тихомиров // ВИЕТ, № 3, 2003.
Tikhomirov V.M. Questions of natural science in the work of Kolmogorov / V.M. Tikhomirov // VIET, № 3, 2003.
39. Зельдович Я.Б. Математическая теория горения и взрыва / Я.Б. Зельдович, Г.И. Баренблатт, В.Б. Либрович, Г.М. Махвиладзе - М: Наука, 1980. - 478 с.
Zeldovich Ya. B. Mathematical theory of combustion and explosions / Ya. B. Zeldovich, G. I. Barenblatt, V. B. Librovich and G. M. Makhviladze.- M.: Nauka Publishing House.1980. - 478 p.
40. Young W.H. On successions with subsequence converging to an integral / W.H. Young // Ibid., ser. 2, 24 (1926), P. 1-20.
41. Истратов А.Г., Либрович В.Б. Об устойчивости решений в стационарной теории теплового взрыва / А.Г. Истратов, В.Б. Либрович // ПММ, 1963, 27:2, С. 343-347.
Istratov A.G. On the stability of solutions in the stationary thermal explosion theory / A.G. Istratov, V.B. Librovich // AMM 1963, 27: 2. - P. 343-347.
42. Гельфанд И. М. Некоторые задачи теории квазилинейных уравнений / И. М. Гельфанд // УМН, 14:2 (86) (1959).- С. 87-158.
Gel'fand I. M. Some problems in the theory of quasi-linear equations / I. M. Gel'fand // Uspekhi Mat. Nauk, 14:2(86) (1959).- P. 87-158
43. Birnbaum Z.W. Über die Verallgemeinerung des Begriffes der zueinander konjugierten Potenzen / Z.W. Birnbaum, W. Orlicz // Studia Math. 3 (1931): S.1-67.
44. Orlicz W. Über eine gewisse Klasse von Räumen vom Typus B / W. Orlicz // Bull. Int. Acad. Polon. Sci. Ser. A 1932, S. 207-220
45. Orlicz W. Über Räume (L_M) / W. Orlicz // Bull. Intern. de L'Acad. Pol., serie A, Cracovie, 1936. –S. 93-107.
46. Красносельский М.А. К теории пространств Орлича / М. А. Красносельский, Я.Б. Рutiцкий // ДАН СССР, 81, № 4 (1951). - С.497-500.
Krasnosel'skii M.A. About the theory of Orlicz Spaces / M.A. Krasnosel'skii, Ya. B. Rutickii // Doklady Akad. Nauk SSSR, 81:4 (1951). - P. 497-500
47. Maligranda L., Wnuk W. Wladislaw Orlicz (1903-1990) / L. Maligranda, W. Wnuk // Wiadom. Mat., 36 (2000), p. 85-147.
48. Богатов Е.М. Некоторые заметки об истории пространств Орлича / Е.М. Богатов // ТВИМ, 3 (2015), С. 24-39.
Bogatov E.M. Some notes on the history of Orlicz spaces / E.M. Bogatov // Taurida J. of Comput. Sc. Th. and Math., 3 (2015). P. 24-39.
49. Zygmund A. Sur les fonctions conjuguées / A. Zygmund// Fund. Math. Volume: 13, Issue: 1 (1929). - p. 284-303.
50. Burkill J.C. Strong and Weak Convergence of Functions of General Type / J.C. Burkill // Proc. Lond. Math. Soc.(2) 28 (1928), P. 493-500.
51. Красносельский М.А. Исследования по нелинейному функциональному анализу / М. А. Красносельский.- Автореферат докторской дисс. Ин-т матем. АН УССР. Киев, 1950, 21 с.
Krasnosel'skii M.A. Research on nonlinear functional analysis / M.A. Krasnosel'skii.- Abstract of doctoral diss. Inst. of Math. Ukrainian Academy of Sci. Kiev, 1950. - 21 p.
52. Рutiцкий Я.Б. Памяти дорогого учителя / Я.Б. Рutiцкий.- Красносельский Марк Александрович. К 80-летию со дня рождения / Сб. статей. М.: ИППИ РАН, 2000. - 216 с.
Rutickii Ya. B. In memory of my dear teacher / Ya. B. Rutickii.- Krasnosel'skii Mark Aleksandrovich. To the 80th anniversary. Coll. Sci. Works. ИТР RAS, Moscow, 2000, P. 141-145.
53. Красносельский М.А., Рutiцкий Я.Б. Общая теория пространств Орлича / М. А. Красносельский, Я.Б. Рutiцкий // Труды семинара по функц. анализу. ВГУ, Воронеж. Вып.1 (1956) , - С. 3-38.
Krasnosel'skii M.A. Rutickii Ya. B., The general theory of Orlicz spaces / M.A. Krasnosel'skii, Ya. B. Rutickii // Proceedings of the Seminar on functional analysis, Voronezh State University, 1 (1956), P. 1-38.
54. Мамонтов А.Е. Основы теории пространств Орлича / А.Е. Мамонтов.- Учеб. пособие. Новосибирск, НГУ, 2003. — 50 с.
Mamontov A.E. Fundamentals of the theory of Orlicz spaces / A.E. Mamontov Novosibirsk, NSU, 2003.- 50 p.
55. Rao M.M. Theory of Orlicz spaces / M.M. Rao, Z.D. Ren - New York, Marcel Dekker, 1991. 445 p.
56. Красносельский М.А. Пространства Орлича и нелинейные интегральные уравнения / М. А. Красносельский, Я.Б. Рutiцкий // Тр. ММО, 7, 1958, С. 63-120.
Krasnosel'skii M.A. Orlicz Space and nonlinear integral equations / M.A. Krasnosel'skii, Ya. B. Rutickii // Tr. Mosk. Mat. Obs., 7 (1958), P. 63-120.
57. Красносельский М.А. Выпуклые функции и пространства Орлича / М. А. Красносельский, Я.Б. Рutiцкий .- ГИФМЛ. М.: 1958.- 271 с.
Krasnosel'skii M.A. Vypuklye funkicii i prostranstva Orlicza / M.A. Krasnosel'skii, Ya. B. Rutickii.- Moscow, Fizmatgiz, 1958. – 271 p.
58. Красносельский М.А. Линейные интегральные операторы, действующие в пространствах Орлича / М. А. Красносельский, Я.Б. Рutiцкий // Труды семинара по функц. анализу. ВГУ, Воронеж. Вып.2 (1956), С.55-76.
Krasnosel'skii M.A. Linear integral operators acting in the Orlicz spaces / M.A. Krasnosel'skii, Ya. B. Rutickii // Proceedings of the Seminar on functional analysis, Voronezh State Univ., 2 (1956), P. 55-76.
59. Красносельский М.А. О некоторых нелинейных операторах в пространствах Орлича / М. А. Красносельский, Я.Б. Рutiцкий // ДАН СССР. 1957. - Т. 117. -№ 3., С.363-366.



- Krasnosel'skii M.A. About some nonlinear integral operators in Orlicz spaces / M.A. Krasnosel'skii, Ya. B. Rutickii // *Doklady Akad. Nauk SSSR* 117:3 (1957).- P. 363-366.
60. Rao M.M. Applications of Orlicz Spaces (Pure and Applied Mathematics) / M.M. Rao, Z.D. Ren.- Marcel Dekker, New York, 2002. – 464 p.
61. Yamamuro S. On the theory of some nonlinear operators / S. Yamamuro // *Yokohama math. J.* 10 (1962), P. 11-17.
62. Robert J. Continuité d'un opérateur non linéaire sur certains espaces de suites / J. Robert // *C.R. Acad. Sci. Paris*, 259 (1964), p.1287-1290.
63. Appell J. Nonlinear Superposition Operators / J. Appell, P. P. Zabreiko.- Cambridge University Press, Cambridge, 1990. - 320 p.
64. Вишик М.И. О разрешимости первой краевой задачи для квазилинейных уравнений с быстро растущими коэффициентами в классах Орлича / М.И. Вишик // *ДАН СССР*, 151:4 (1963), С.758-761.
- Vishik M.I. About the solvability of the first boundary value problem for quasilinear equations with fast growing coefficients in Orlicz classes / M.I. Vishik // *Doklady Akad. Nauk SSSR*, 151:4 (1963), P. 758-761.
65. Дубинский Ю. А. Некоторые интегральные неравенства и разрешимость вырождающихся квазилинейных эллиптических систем дифференциальных уравнений / Ю. А. Дубинский // *Матем. сб.*, 64 (106):3 (1964).- С. 458-480.
- Dubinskii Yu. A. Some integral inequalities and the solvability of degenerate quasi-linear elliptic systems of differential equations / Yu. A. Dubinskii // *Mat. Sb. (N.S.)*, 64 (106):3 (1964), P. 458–480.
66. Donaldson T. Nonlinear elliptic boundary value problems in Orlicz-Sobolev spaces / T. Donaldson // *JDE*, 10 (1971), P. 507-528.
67. Donaldson T. Orlicz-Sobolev spaces and imbedding theorem / T. Donaldson, N. Trudinger// *J. Func. Anal.*, 8 (1971), P. 52-75.
68. Красносельский Марк Александрович. К 80-летию со дня рождения / Сб. статей. М.: ИППИ РАН, 2000. – 216 с.
- Krasnosel'skii Mark Aleksandrovich. To the 80th anniversary / *Coll. Sci. Works. IITP RAS*, Moscow, 2000.-216 p.

ФИЗИКА

УДК 537.8

COHERENT X-RAY RADIATION ALONG THE VELOCITY OF RELATIVISTIC ELECTRON CROSSING A PERIODIC LAYERED MEDIUM

**S.V. Blazhevich, D.N. Efimtceva, K.S. Lyushina,
O.Yu. Shevchuk, A.V. Noskov**

Belgorod National Research University, 85 Pobedy St, Belgorod, 308015, Russia

E-mail: noskov_a@bsu.edu.ru

Abstract. In the present work, the dynamic theory of coherent X-radiation generated by a relativistic electron crossing the multilayered medium in the direction of the electron velocity vector is developed in Bragg scattering geometry for general case of asymmetric reflection. The comparison of the analogous radiation generated by a relativistic electron in the single crystal medium is made. The developed theory predicts the existence condition for the radiation and describes its spectral and angular characteristics.

Keywords: Relativistic electron; periodic layered target; coherent X-radiation dynamic theory

1. Introduction

Traditionally, the relativistic particle radiation in a periodic lamellar structure was considered as resonance transition radiation (RTR) [1, 2]. Significant contribution to the study of X-ray transition radiation was made by a group of physicists from Japan [3-5].

In the work [4] for the first time the periodic target consisting of plates of several hundred nanometers thick was used and the energy of the radiated photons was of 2-4 keV for the fundamental harmonic. The authors of [4] assert that the radiation intensity obtained in this experiment exceeds the synchrotron radiation intensity achievable on the modern electron accelerators. A theoretical description of RTR in the above-mentioned media was presented in the work [6]. Subsequently in the work [7] the RTR of the relativistic electron in a layered medium was considered together with parametric X-radiation (PXR). In the work [8] analogous with the coherent X-radiation in a single crystal medium [9-12], the radiation in a multilayered periodic structure was considered in the dynamic approximation as the scattering of the pseudo photons of the relativistic electron coulomb field in the amorphous layers of the structure. In [8] the coherent radiation in a periodic multilayered structure was considered for the first time as the result of the contribution of two radiation mechanisms, namely PXR and diffracted transition radiation (DTR).

The theory of the radiation of the relativistic electron in layered periodic media [8] describes properly the experimental data presented in the same work [13]. The data were obtained in the experiment, where the structure was used with the layers of about 1 nanometer thick, and the photons were generated with energy of about 15 keV. A detailed comparison of the theory [8] and the experiment [13] are presented in the work [14].

It's necessary to note that in all the cited works the radiation process in a layered medium was considered in Bragg geometry only for the case of symmetric reflection, where the angle between target surface and reflecting planes/ (layers) is equal to zero. Later, in our works [15-16] the dynamic theory of coherent X-radiation by the relativistic electron, crossing a layered medium in Laue geometry for the general case of asymmetric reflection of the relativistic electron coulomb field in respect to the entrance surface of the target was built. It was clarified in these works that the radiation yield in a periodic layered target significantly exceeds the yield in the crystal and the additional opportunity of the yield increase by means of the choice of optimal reflection asymmetry was shown. It was revealed in these works that the radiation yield in the periodic layered target significantly exceeds the yield in the crystalline one, and the additional opportunity of the yield increase by the choice of the optimal reflection asymmetry was proved.

The theory of parametric X-radiation (PXR) of a relativistic charged particle in a single crystal medium forecasts the radiation not only in the Bragg direction, but also in the direction along the particle velocity vector



(FPXR) [17-19]. FPXR is a result of the dynamic diffraction of pseudo photons of the particle coulomb field on the atomic planes in the crystal. The attempts of the experimental study of FPXR are known [20-24], but the first report about FPXR detection in the crystal target was recently made in the work [24]. The detailed theoretical description of the dynamic effect of FPXR and accompanying background of transition radiation (TR) in a crystal in the case of symmetric reflection was provided in the works [25-27].

The general case of asymmetric reflection was presented in FPXR theory built in Laue scattering geometry [28] and in a theory of transition radiation (TR) built in Bragg geometry [29].

In the present work the dynamic theory of the coherent radiation along the velocity of the relativistic electron crossing the periodic layered medium in Bragg scattering geometry was built for general case of asymmetric reflection, when the reflecting layers in the target are situated under a free angle relative to the target surface (symmetric reflection is a special case of the reflection). The expressions for spectral-angular characteristics of FPXR and TR in a periodic layered medium are derived on the basis of two wave approximation of the dynamic diffraction theory.

2. Radiation amplitude

Let us assume that a relativistic electron with the velocity \mathbf{V} passes through the multilayered structure, which consists of periodically situated amorphous layers of the thicknesses a and b ($T = a + b$ – the structure period). The substance of the layers a and b have the dielectric susceptibility χ_a and χ_b correspondently (fig.1).

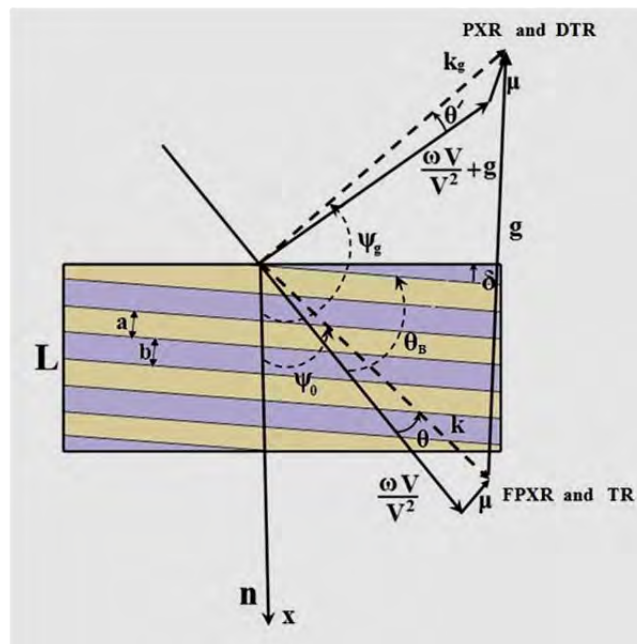


Fig. 1. The radiation process geometry and table of notations for the using magnitudes.

θ and θ' are the radiation angles, θ_B is the Bragg angle (the angle between the electron velocity \mathbf{V} and the layers of the target), δ is the angle between the target surface and the layers of the target, \mathbf{k} and \mathbf{k}_g are the wave vectors of the incident and diffracted photons

For studying the electromagnetic radiation accompanying this process we will use the two-wave approximation of the dynamic diffraction theory. Let us consider the Fourier image of the electromagnetic field

$$\mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) = \int dt d^3 \mathbf{r} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \exp(i\omega t - i\mathbf{k}\mathbf{r}). \quad (1)$$

As the relativistic particle coulomb field could be represented practically as transverse, the incident $\mathbf{E}_0(\mathbf{k}, \omega)$ and the diffracted $\mathbf{E}_g(\mathbf{k}, \omega)$ electromagnetic waves are determined by two amplitudes with different values of transverse polarization:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_0(\mathbf{k}, \omega) &= E_0^{(1)}(\mathbf{k}, \omega)\mathbf{e}_0^{(1)} + E_0^{(2)}(\mathbf{k}, \omega)\mathbf{e}_0^{(2)}, \\ \mathbf{E}_g(\mathbf{k}, \omega) &= E_g^{(1)}(\mathbf{k}, \omega)\mathbf{e}_1^{(1)} + E_g^{(2)}(\mathbf{k}, \omega)\mathbf{e}_1^{(2)}, \end{aligned} \quad (2)$$



where the vectors $\mathbf{e}_0^{(1)}$ and $\mathbf{e}_0^{(2)}$ are perpendicular to the vector $\mathbf{k}_g = \mathbf{k} + \mathbf{g}$. The vectors $\mathbf{e}_0^{(2)}$, $\mathbf{e}_1^{(2)}$ lie in the plane of vectors \mathbf{k} and \mathbf{k}_g (π -polarization) and the vectors $\mathbf{e}_0^{(1)}$ and $\mathbf{e}_1^{(1)}$ are normal to it (σ -polarization). The vector \mathbf{g} is analogous to the reciprocal lattice vector in the crystal, and it is perpendicular to the layers and its length is $g = \frac{2\pi}{T}n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

The system of equations for the Fourier image of the electromagnetic field in two-wave approximation of the dynamic diffraction theory is as follows:

$$\begin{cases} (\omega^2(1+\chi_0) - k^2)E_0^{(s)} + \omega^2\chi_{-g}C^{(s,\tau)}E_g^{(s)} = 8\pi^2ie\omega\theta VP^{(s)}\delta(\omega - \mathbf{kV}), \\ \omega^2\chi_gC^{(s,\tau)}E_0^{(s)} + (\omega^2(1+\chi_0) - k_g^2)E_g^{(s)} = 0, \end{cases} \quad (3)$$

where χ_g , χ_{-g} are the coefficients of Fourier expansion of dielectric susceptibility in the reciprocal lattice vector \mathbf{g} :

$$\chi(\omega, \mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{g}} \chi_{\mathbf{g}}(\omega) \exp(i\mathbf{g}\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{g}} (\chi'_{\mathbf{g}}(\omega) + i\chi''_{\mathbf{g}}(\omega)) \exp(i\mathbf{g}\mathbf{r}). \quad (4)$$

The quantities $C^{(s,\tau)}$ and $P^{(s)}$ are defined in (3) as follows:

$$\begin{aligned} C^{(s,\tau)} &= \mathbf{e}_0^{(s)} \mathbf{e}_1^{(s)} = (-1)^\tau C^{(s)}, \quad C^{(1)} = 1, \quad C^{(2)} = |\cos 2\theta_B|, \\ P^{(s)} &= \mathbf{e}_0^{(s)} (\boldsymbol{\mu} / \mu), \quad P^{(1)} = \sin \varphi, \quad P^{(2)} = \cos \varphi, \end{aligned} \quad (5)$$

where $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{k} - \omega\mathbf{V}/V^2$ is a component of the momentum of the virtual photon, which is perpendicular to the particle velocity \mathbf{V} ($\mu = \omega\theta/V$, where $\theta \ll 1$ is the angle between vectors \mathbf{k} and \mathbf{V}), θ_B is the Bragg angle, φ is azimuthal radiation angle, counted from the plane formed by the velocity vector \mathbf{V} and \mathbf{g} vector perpendicular to the reflecting layers. The magnitude of the vector \mathbf{g} can be expressed by the Bragg angle θ_B and the Bragg frequency ω_B : $g = 2\omega_B \sin \theta_B / V$. The angle between vector $\frac{\omega\mathbf{V}}{V^2}$ and the incident wave vector \mathbf{k} is notated as θ , the angle between vector $\frac{\omega\mathbf{V}}{V^2} + \mathbf{g}$ and the wave vector of the diffracted wave \mathbf{k}_g is notated as θ' . The system of equations (3) with $s = 1$ and $\tau = 2$ describes the π -polarized fields. In this case, $\tau = 2$ if $2\theta_B < \frac{\pi}{2}$, otherwise $\tau = 1$.

The quantities χ_0 and χ_g in this periodic structure are nominated as follows:

$$\chi_0(\omega) = \frac{a}{T}\chi_a + \frac{b}{T}\chi_b, \quad (6a)$$

$$\chi_g(\omega) = \frac{\exp(-iga) - 1}{igT} (\chi_b - \chi_a). \quad (6b)$$

The following expressions will be obtained from (6) and will be used further:

$$\chi'_0 = \frac{a}{T}\chi'_a + \frac{b}{T}\chi'_b \quad (7a)$$

$$\chi''_0 = \frac{a}{T}\chi''_a + \frac{b}{T}\chi''_b, \quad (7b)$$

$$\operatorname{Re} \sqrt{\chi_g \chi_{-g}} = \frac{2 \sin\left(\frac{ga}{2}\right)}{gT} (\chi'_b - \chi'_a), \quad (7c)$$



$$\operatorname{Im} \sqrt{\chi_g \chi_{-g}} = \frac{2 \sin\left(\frac{ga}{2}\right)}{gT} (\chi_b'' - \chi_a'') \quad (7d)$$

Solving the following dispersion equation (8) which is obtained from system (3) by means of standard methods of the dynamical theory of X-ray scattering of waves in a crystal

$$(\omega^2(1 + \chi_0) - k^2)(\omega^2(1 + \chi_0) - k_g^2) - \omega^4 \chi_{-g} \chi_g C^{(s)2} = 0, \quad (8)$$

we will obtain projections of the wave vectors \mathbf{k} and \mathbf{k}_g .

Let us search projections of the wave vectors \mathbf{k} and \mathbf{k}_g in the following form:

$$k_x = \omega \cos \psi_0 + \frac{\omega \chi_0}{2 \cos \psi_0} + \frac{\lambda_0}{\cos \psi_0}, \quad (9a)$$

$$k_{gx} = \omega \cos \psi_g + \frac{\omega \chi_0}{2 \cos \psi_g} + \frac{\lambda_g}{\cos \psi_g}. \quad (9b)$$

We will use the known expression connected to the dynamic additions λ_0 and λ_g :

$$\lambda_g = \frac{\omega \beta}{2} + \lambda_0 \frac{\gamma_g}{\gamma_0}, \quad (10)$$

where $\beta = \alpha - \chi_0 \left(1 - \frac{\gamma_g}{\gamma_0}\right)$, $\alpha = \frac{1}{\omega^2} (k_g^2 - k^2)$, $\gamma_0 = \cos \psi_0$, $\gamma_g = \cos \psi_g$, ψ_0 is the angle between the incident wave vector \mathbf{k} and the normal to the plate (target) surface \mathbf{n} , ψ_g - the angle between the wave vector \mathbf{k}_g and vector \mathbf{n} (see fig.1).

Let us find the wave vectors \mathbf{k} and \mathbf{k}_g

$$k = \omega \sqrt{1 + \chi_0} + \lambda_0, \quad k_g = \omega \sqrt{1 + \chi_0} + \lambda_g. \quad (11)$$

Taking into account that $k_{\parallel} \approx \omega \sin \psi_0$, $k_{g\parallel} \approx \omega \sin \psi_g$, we will obtain:

$$\lambda_g^{(1,2)} = \frac{\omega}{4} \left(\beta \pm \sqrt{\beta^2 + 4 \chi_g \chi_{-g} C^{(s)2} \frac{\gamma_g}{\gamma_0}} \right), \quad (12a)$$

$$\lambda_0^{(1,2)} = \omega \frac{\gamma_0}{4 \gamma_g} \left(-\beta \pm \sqrt{\beta^2 + 4 \chi_g \chi_{-g} C^{(s)2} \frac{\gamma_g}{\gamma_0}} \right), \quad (12b)$$

Since the dynamic additions are small ($|\lambda_0| \ll \omega$, $|\lambda_g| \ll \omega$), it can be shown that $\theta \approx \theta'$ (see fig.1) and we will further designate these both angles as θ .

It is convenient to represent the solution of the system (3) for the incident field of the periodic structure in the following form:

$$E_0^{(s)medium} = \frac{8\pi^2 i e V \theta P^{(s)}}{\omega} \frac{-\omega^2 \beta - 2\omega \frac{\gamma_g}{\gamma_0} \lambda_0}{4 \frac{\gamma_g}{\gamma_0} (\lambda_0 - \lambda_0^{(1)}) (\lambda_0 - \lambda_0^{(2)})} \delta(\lambda_0 - \lambda_0^*) + \quad (13)$$

$$+ E_0^{(s)(1)} \delta(\lambda_0 - \lambda_0^{(1)}) + E_0^{(s)(2)} \delta(\lambda_0 - \lambda_0^{(2)})$$



where $\lambda_0^* = \omega \left(\frac{\gamma^{-2} + \theta^2 - \chi_0}{2} \right)$, $\gamma = 1/\sqrt{1-V^2}$ is Lorentz factor of a particle, $E_0^{(s)(1)}$ and $E_0^{(s)(2)}$

are free incident fields in the concerned media.

For the field in a vacuum before the periodic structure, the solution of system (3) can be represented in form:

$$E_0^{(s)vac I} = \frac{8\pi^2 ieV\theta P^{(s)}}{\omega} \frac{1}{-\chi_0 - \frac{2}{\omega}\lambda_0} \delta(\lambda_0 - \lambda_0^*). \quad (14)$$

The expression for the field in the vacuum behind the target can be written as:

$$E_0^{(s)vac II} = \frac{8\pi^2 ieV\theta P^{(s)}}{\omega} \frac{1}{-\chi_0 - \frac{2\lambda_0}{\omega}} \delta(\lambda_0 - \lambda_0^*) + E_0^{(s)Rad} \delta\left(\lambda_0 + \frac{\omega\chi_0}{2}\right), \quad (15)$$

where $E_0^{(s)Rad}$ is the amplitude of the coherent radiation field along the velocity of the electron.

From the second equation of the system (3) the expression relating the incident and diffracted field in the crystal will follow:

$$E_0^{(s)medium} = \frac{2\omega\lambda_g}{\omega^2\chi_g C^{(s,\tau)}} E_g^{(s)medium}. \quad (16)$$

Using the usual boundary conditions on the input and the exit surface of target:

$$\int E_0^{(s)vac I} d\lambda_g = \int E_0^{(s)medium} d\lambda_g, \int E_g^{(s)medium} d\lambda_g = \int E_g^{(s)vac} d\lambda_g, \\ \int E_g^{(s)medium} \exp\left(i \frac{\lambda_g}{\gamma_g} L\right) d\lambda_g = 0, \quad (17)$$

we will obtain the expression for the amplitude of the radiation field.

$$E_0^{(s)Rad} = \frac{8\pi^2 ieV\theta P^{(s)}}{\omega} \frac{1}{\lambda_g^{(1)} \exp\left(i \frac{\lambda_0^{(2)} - \lambda_0^*}{\gamma_0} L\right) - \lambda_g^{(2)} \exp\left(i \frac{\lambda_0^{(1)} - \lambda_0^*}{\gamma_0} L\right)} \times \\ \times \left[\lambda_g^{(2)} \left(\frac{\omega}{-\omega\chi_0 - 2\lambda_0^*} + \frac{\omega}{2(\lambda_0^* - \lambda_0^{(2)})} \right) \left(1 - \exp\left(i \frac{\lambda_0^{(2)} - \lambda_0^*}{\gamma_0} L\right) \right) \exp\left(i \frac{\lambda_0^{(1)} - \lambda_0^*}{\gamma_0} L\right) - \right. \\ \left. - \lambda_g^{(1)} \left(\frac{\omega}{-\omega\chi_0 - 2\lambda_0^*} + \frac{\omega}{2(\lambda_0^* - \lambda_0^{(1)})} \right) \left(1 - \exp\left(i \frac{\lambda_0^{(1)} - \lambda_0^*}{\gamma_0} L\right) \right) \exp\left(i \frac{\lambda_0^{(2)} - \lambda_0^*}{\gamma_0} L\right) \right] \exp\left(i \frac{\lambda_0^* + \frac{\omega\chi_0}{2}}{\gamma_0} L\right) \quad (18)$$

Before the analysis of spectral-angular characteristics of the radiation, it is necessary to note that three mechanisms of the radiation make contributions to the total radiation yield: bremsstrahlung, transition radiation (TR) and parametric radiation in forward direction (FPXR). The amplitude $E_0^{(s)Rad}$ contains the contributions of the radiations analogous to FPXR and TR in the crystal.

Let us represent the expression for the radiation field (8) in the following form:

$$E_0^{(s)Rad} = E_{FPXR}^{(s)} + E_{TR}^{(s)}, \quad (19a)$$



$$E_{FPXR}^{(s)} = \frac{8\pi^2 ieV\theta P^{(s)}}{\omega} \frac{\omega}{2\lambda^*} e^{\frac{\lambda_0^* + \frac{\omega\chi_0}{2}}{\gamma_0} L} \times$$

$$\frac{1}{\lambda_g^{(1)} \exp\left(i \frac{\lambda_0^{(2)} - \lambda_0^*}{\gamma_0} L\right) - \lambda_g^{(2)} \exp\left(i \frac{\lambda_0^{(1)} - \lambda_0^*}{\gamma_0} L\right)} \times$$

$$\left[\frac{\lambda_g^{(2)} \lambda_0^{(2)}}{\lambda_0^* - \lambda_0^{(2)}} \left(1 - \exp\left(i \frac{\lambda_0^{(2)} - \lambda_0^*}{\gamma_0} L\right)\right) \exp\left(i \frac{\lambda_0^{(1)} - \lambda_0^*}{\gamma_0} L\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{\lambda_g^{(1)} \lambda_0^{(1)}}{\lambda_0^* - \lambda_0^{(1)}} \left(1 - \exp\left(i \frac{\lambda_0^{(1)} - \lambda_0^*}{\gamma_0} L\right)\right) \exp\left(i \frac{\lambda_0^{(2)} - \lambda_0^*}{\gamma_0} L\right) \right], \quad (19b)$$

$$E_{TR}^{(s)} = \frac{8\pi^2 ieV\theta P^{(s)}}{\omega} e^{\frac{\lambda_0^* + \frac{\omega\chi_0}{2}}{\gamma_0} L} \left(\frac{\omega}{\omega\chi_0 + 2\lambda_0^*} - \frac{\omega}{2\lambda_0^*} \right) \times$$

$$\left(1 - \frac{\frac{\gamma_g}{\gamma_0} (\lambda_0^{(1)} - \lambda_0^{(2)}) e^{\frac{\lambda_0^{(2)} + \lambda_0^{(1)} - 2\lambda_0^*}{\gamma_0} L}}{\lambda_g^{(1)} \exp\left(i \frac{\lambda_0^{(2)} - \lambda_0^*}{\gamma_0} L\right) - \lambda_g^{(2)} \exp\left(i \frac{\lambda_0^{(1)} - \lambda_0^*}{\gamma_0} L\right)} \right), \quad (19c)$$

The summands in the square brackets of the expression (19b) represent two branches of the dispersion equation solution corresponding to the two X-ray waves excited in the periodical medium.

For further analysis of the radiation, we will represent the dynamic additions (10) and (11) in the following view:

$$\lambda_0^{(1,2)} = \frac{\omega |\chi_g' C^{(s)}|}{2\varepsilon} \left(\xi^{(s)} - \frac{i\rho^{(s)}(1+\varepsilon)}{2} \mp \right.$$

$$\left. \mp \sqrt{\xi^{(s)2} - \varepsilon - i\rho^{(s)}((1+\varepsilon)\xi^{(s)} - 2\kappa^{(s)}\varepsilon) - \rho^{(s)2} \left(\frac{(1+\varepsilon)^2}{4} - \kappa^{(s)2} \varepsilon \right)} \right), \quad (20a)$$

$$\lambda_g^{(1,2)} = \frac{\omega |\chi_g' C^{(s)}|}{2} \left(\xi^{(s)} - \frac{i\rho^{(s)}(1+\varepsilon)}{2} \pm \right.$$

$$\left. \pm \sqrt{\xi^{(s)2} - \varepsilon - i\rho^{(s)}((1+\varepsilon)\xi^{(s)} - 2\kappa^{(s)}\varepsilon) - \rho^{(s)2} \left(\frac{(1+\varepsilon)^2}{4} - \kappa^{(s)2} \varepsilon \right)} \right), \quad (20b)$$

where

$$\xi^{(s)}(\omega) = \eta^{(s)}(\omega) + \frac{1+\varepsilon}{2\nu^{(s)}},$$

$$\eta^{(s)}(\omega) = \frac{\alpha}{2|\operatorname{Re} \sqrt{\chi_g \chi_{-g}}| C^{(s)}} \equiv \frac{\sin^2 \theta_B}{V^2 C^{(s)}} \frac{gT}{|\chi_b' - \chi_a'| \left| \sin\left(\frac{ga}{2}\right) \right|} \left(1 - \frac{\omega(1 - \theta \cos \varphi \cot \theta_B)}{\omega_B} \right),$$

$$\nu^{(s)} = \frac{C^{(s)} \operatorname{Re} \sqrt{\chi_g \chi_{-g}}}{\chi_0'} \equiv \frac{2C^{(s)} \left| \sin\left(\frac{ga}{2}\right) \right|}{g} \frac{|\chi_b' - \chi_a'|}{|a\chi_a' + b\chi_b'|},$$

$$\rho^{(s)} = \frac{\chi_0''}{\left| \operatorname{Re} \sqrt{\chi_g \chi_{-g}} \right| C^{(s)}} \equiv \frac{a\chi_a'' + b\chi_b''}{\left| \chi_b' - \chi_a' \right| C^{(s)}} \frac{g}{2 \left| \sin\left(\frac{ga}{2}\right) \right|},$$

$$\kappa^{(s)} = \frac{\chi_g'' C^{(s)}}{\chi_0''} \equiv \frac{2C^{(s)} \left| \sin\left(\frac{ga}{2}\right) \right|}{g} \left| \frac{\chi_b'' - \chi_a''}{a\chi_a'' + b\chi_b''} \right|, \quad \varepsilon = \frac{\gamma_g}{\gamma_0}. \quad (21)$$

An important parameter in expression (20) is the parameter ε , which we will rewrite as

$$\varepsilon = \frac{\sin(\theta_B - \delta)}{\sin(\theta_B + \delta)}. \quad (22)$$

Parameter ε defines the degree of the reflection asymmetry of the field relative to the target entrance surface. Here θ_B is the angle between the electron velocity and the reflected layers, δ is the angle between the target entrance surface and the reflecting layers. For the fixed value of θ_B the parameter ε defines the entrance surface orientation relative to the reflecting layers (fig.2). When the incident angle of the electron on the target ($\theta_B + \delta$) decreases the parameter δ becomes negative and then its absolute value increases, (in the extreme case $\delta \rightarrow -\theta_B$), which leads to the increase of ε . On the contrary, when the incident angle increases, the parameter ε decreases. In the case of symmetric reflection when $\delta = 0$, the asymmetry parameter $\varepsilon = 1$.

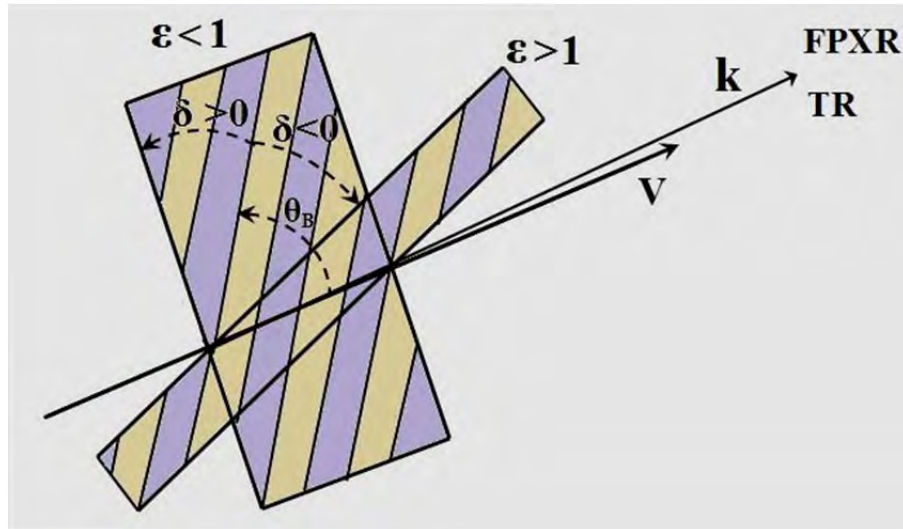


Fig. 2. Asymmetric ($\varepsilon > 1$, $\varepsilon < 1$) reflections of the radiation from the periodic layered structure

2. Spectral-angular density of the radiation

Let us consider the σ - polarized waves ($s=1$). Substituting (19b) and (19c) into the well-known expression for spectral angular density of X-ray radiation

$$\omega \frac{d^2 N}{d\omega d\Omega} = \omega^2 (2\pi)^{-6} \sum_{s=1}^2 \left| E_0^{(s)Rad} \right|^2, \quad (23)$$

we will find the expressions which describe spectral angular density of FPXR and TR mechanisms.



$$\omega \frac{d^2 N_{FPXR}}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2}{\pi^2} \frac{\theta_{\perp}^2}{\left(\theta_{\perp}^2 + \gamma^{-2} + \frac{|a\chi'_a + b\chi'_b|}{T} \right)^2} R_{FPXR}, \quad (24a)$$

$$R_{FPXR} = \frac{1}{\left| \left(\xi - K - i \frac{\rho(1+\varepsilon)}{2} \right) \exp\left(-iB \frac{K}{\varepsilon}\right) - \left(\xi + K - i \frac{\rho(1+\varepsilon)}{2} \right) \exp\left(iB \frac{K}{\varepsilon}\right) \right|^2} \times$$

$$\times \left| \frac{\left(1 - \exp\left(-iB \left(\sigma - \frac{\xi - K}{\varepsilon} + i \frac{\rho(1-\varepsilon)}{2\varepsilon} \right) \right) \right)}{\sigma - \frac{\xi - K}{\varepsilon} + i \frac{\rho(1-\varepsilon)}{2\varepsilon}} \exp\left(iB \frac{K}{\varepsilon}\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{\left(1 - \exp\left(-iB \left(\sigma - \frac{\xi + K}{\varepsilon} + i \frac{\rho(1-\varepsilon)}{2\varepsilon} \right) \right) \right)}{\sigma - \frac{\xi + K}{\varepsilon} + i \frac{\rho(1-\varepsilon)}{2\varepsilon}} \exp\left(-iB \frac{K}{\varepsilon}\right) \right|^2, \quad (24b)$$

$$\omega \frac{d^2 N_{TR}}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2}{\pi^2} \theta_{\perp}^2 \left(\frac{1}{\theta_{\perp}^2 + \gamma^{-2}} - \frac{1}{\theta_{\perp}^2 + \gamma^{-2} + \frac{|a\chi'_a + b\chi'_b|}{T}} \right)^2 R_{TR}, \quad (25a)$$

$$R_{TR} = \left| 1 + \frac{2K \exp\left(-iB \left(\sigma - \frac{\xi}{\varepsilon} + \frac{i\rho(1-\varepsilon)}{2\varepsilon} \right) \right)}{\left(\xi - K - i \frac{\rho(1+\varepsilon)}{2} \right) \exp\left(-iB \frac{K}{\varepsilon}\right) - \left(\xi + K - i \frac{\rho(1+\varepsilon)}{2} \right) \exp\left(iB \frac{K}{\varepsilon}\right)} \right|^2. \quad (25b)$$

The following notations are put into the formulas (27) and (28):

$$\sigma(\theta, \gamma) = \frac{gT}{2 \cdot \left| \sin\left(\frac{ga}{2}\right) \right| |\chi'_b - \chi'_a|} \cdot \left(\theta_{\perp}^2 + \gamma^{-2} + \frac{|a\chi'_a + b\chi'_b|}{T} \right),$$

$$K = \sqrt{\xi^2 - \varepsilon - i\rho^{(s)}((1+\varepsilon)\xi^{(s)} - 2\kappa^{(s)}\varepsilon) - \rho^{(s)2} \left(\frac{(1+\varepsilon)^2}{4} - \kappa^{(s)2} \varepsilon \right)}$$

$$\xi(\omega) = \frac{gT \sin^2 \theta_B}{\left| \sin\left(\frac{ga}{2}\right) \right| |\chi'_b - \chi'_a|} \cdot \left(1 - \frac{\omega}{\omega_B} \right) + \frac{1+\varepsilon}{2v^{(1)}}, \quad \rho = \frac{a\chi''_a + b\chi''_b}{|\chi'_b - \chi'_a|} \frac{g}{2 \left| \sin\left(\frac{ga}{2}\right) \right|},$$

$$\kappa = \frac{2 \left| \sin\left(\frac{ga}{2}\right) \right| |\chi''_b - \chi''_a|}{g}, \quad B = \frac{2\omega_B \left| \sin\left(\frac{ga}{2}\right) \right| |\chi'_b - \chi'_a|}{gT \sin(\theta_B + \delta)} L, \quad \theta_{\perp} = \theta \sin \varphi. \quad (26)$$



In accordance with (24b), two waves that contribute to the FPXR can exist in a periodic layered medium.

The contribution of the first or second wave could be significant if, respectively, the first or the second of the next equations has a solution:

$$\operatorname{Re}\left(\sigma - \frac{\xi - K}{\varepsilon} + i \frac{\rho(1 - \varepsilon)}{2\varepsilon}\right) \approx \sigma - \frac{\xi - \sqrt{\xi^2 - \varepsilon}}{\varepsilon} = 0, \tag{27a}$$

$$\operatorname{Re}\left(\sigma - \frac{\xi + K}{\varepsilon} + i \frac{\rho(1 - \varepsilon)}{2\varepsilon}\right) \approx \sigma - \frac{\xi + \sqrt{\xi^2 - \varepsilon}}{\varepsilon} = 0. \tag{27b}$$

Since $\sigma > 1$ it can be shown that equation (27b) has a solution under the condition $\varepsilon > \frac{1}{\sigma^2}$, and

the equation (27a) is solvable on the condition that $\varepsilon < \frac{1}{\sigma^2}$. Thus, under different values of asymmetry parameter, the first or the second of x-ray waves can contribute in the FPXR.

Let us consider the direction of the energy transfer of the two waves responsible for the formation of the FPXR. For this purpose, we will consider the group velocities of the radiation waves along the OX axis, neglecting absorption. The projections of the wave vectors of the waves along the OX axis (9a) in the periodic layered structure in the case of non-absorbing targets are as follows:

$$k_x^{(1,2)} = \omega \sin(\theta_B + \delta) + \frac{\omega \chi_0}{2 \sin(\theta_B + \delta)} + \frac{\omega}{2 \sin(\theta_B - \delta)} \frac{\left| \sin\left(\frac{ga}{2}\right) \right| |\chi'_b - \chi'_a| C^{(s)}}{gT} \cdot \left(\xi(\omega) \mp \sqrt{\xi(\omega)^2 - \varepsilon} \right) \tag{28}$$

The group velocities of these X-ray waves (31) have the form:

$$V_{gp} = \left(\frac{\partial k_x^{(1,2)}}{\partial \omega} \right)^{-1} \approx \left(\sin(\theta_B + \delta) - \frac{\sin^2 \theta_B}{\sin(\theta_B - \delta)} \left(1 \mp \frac{\xi(\omega)}{\sqrt{\xi(\omega)^2 - \varepsilon}} \right) \right)^{-1}. \tag{29}$$

It can be shown that the group velocity of the waves which correspond to the first branch of the dispersion relation solution is positive $(\partial k_x^{(1)} / \partial \omega)^{-1} > 0$ and the energy of the wave is transferred from the input surface to the output surface of the target. The group velocity of the second wave is always negative $(\partial k_x^{(2)} / \partial \omega)^{-1} < 0$, consequently, the energy of the wave transfers from the output to the input surface of the target. This fact leads to the suppression of the second wave of the FPRX in a periodic layered medium in the case of a crystal of a considerable thickness when the transmitted energy is completely absorbed.

Thus, for a sufficiently large thickness of the crystal, FPXR corresponding to the second branch of the dispersion relation solution is suppressed. However, on the conditions $\varepsilon < \frac{1}{\sigma^2}$, the FPXR which corresponds to the first of generated x-ray waves in periodic layered medium will be material.

Let us demonstrate this claim by numerical calculations performed by the formulas (24) and (25). In Fig. 3 and Fig. 4 the curves are constructed describing the spectral and angular density FPXR and TR of the relativistic electron of energy $E=200\text{MeV}$ which crosses the periodic layered structure C-W, that consists of the layers of carbon and tungsten. Furthermore, the curves in Figure 3 are constructed for the

case where the asymmetry parameter $\varepsilon < \frac{1}{\sigma^2}$ and contribution comes from the first branch FPXR with

positive group velocity of the X-ray waves. In Figure 4 the curves are plotted for the case $\varepsilon > \frac{1}{\sigma^2}$ where

the contribution of the first branch is absent, and the contribution of the second one is suppressed because of the negative group velocity of the correspondent waves.



It is necessary to note that in Figures 3 and Fig. 4 the curves are constructed with the same path length of the electrons $L_e = \frac{L}{\sin(\theta_B + \delta)} \approx 0.3 \mu m$ and the photons $L_e \approx L_{ph}$ in the target. In this case, the length

of the photon absorption in the structure $L_{abs} = \frac{T}{\omega|a\chi_a'' + b\chi_b''|} \approx 6.2 \mu m$ is much more than L_{ph} .

In this case, the transition radiation consists of the radiation produced at the exit surface of the target. It should be noted that the width of the peak FPXR in this case, as it follows from Figure 3, is about 25eV, which is much wider than in the crystalline medium (crystal 1-2 eV). This fact will ease the experimental research and the identification of FPXR in a periodic layered structure.

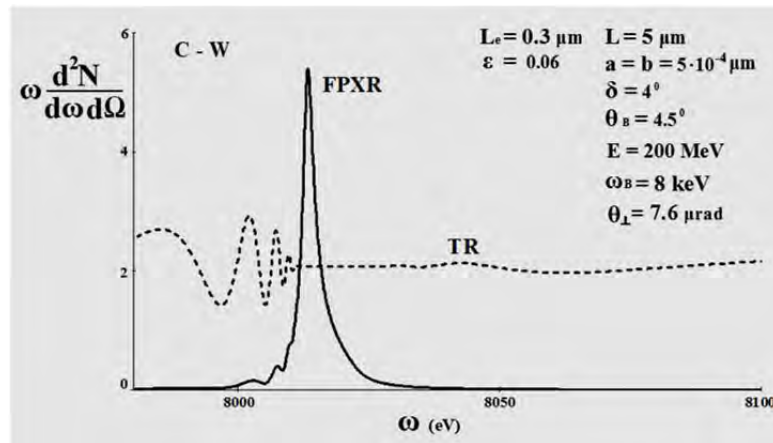


Fig. 3. Spectral-angular density of FPXR and TR of the relativistic electron in the periodic layered medium consisting of carbon and tungsten layers (the case of $\varepsilon < 1$)

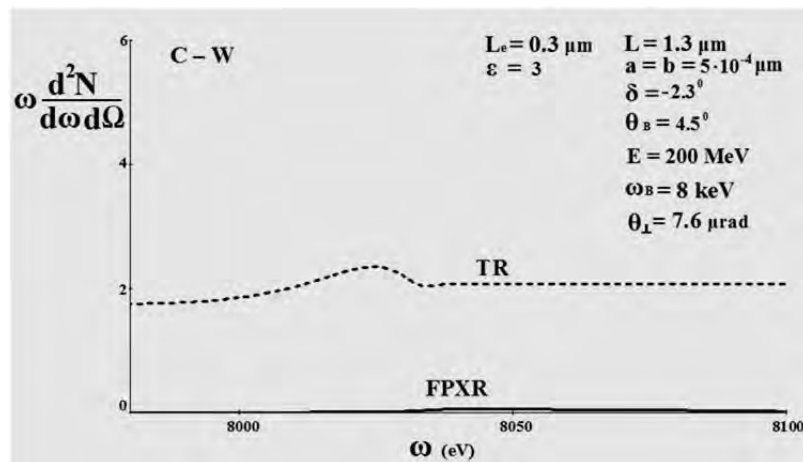


Fig 4. Spectral-angular density of FPXR and TR of the relativistic electron in the periodic layered medium consisting of carbon and tungsten layers (the case of $\varepsilon > 1$)

3. Conclusion

In the present work a dynamic theory of coherent X-rays along the velocity of the relativistic particle in a periodic layered structure in Bragg scattering geometry is built up for the general case of the asymmetric reflection of the particle field relative to the entrance surface of the target.

On the basis of the two-wave approximation of the dynamical theory of diffraction, the expressions which describe the spectral and angular characteristics of the radiation from the two radiation mechanisms FPXR and TR are obtained.

The very existence of the dynamic effect of the FPXR in a periodic layered structure is shown for the first time. It is also shown that the spectral-angular density of the FPXR considerably depends on the asymmetry of the electron field reflection relative to the surface of the target under fixed path of the electron in the target. It is shown that the spectral peak of the relativistic electron parametric X-ray radiation



in the forward direction is many times larger than the peak of the emission spectrum of a single crystal, which may ease its experimental observation and investigation.

References

1. M.L. Ter-Mikaelian *High-Energy Electromagnetic Process in Condensed Media* (New York: Wiley), 1972.
2. M.A. Piestrup, D.G. Boyers, C.I. Pincus et al., *Phys.Rev. A* 45 (1992) 1183.
3. Tanaka T et al. *Nucl. Instrum. Methods B* 93 21 (1994)
4. Yamada K, Hosokawa T, Takenaka H *Phys. Rev. A* 59 3673 (1999)
5. Asano S et al. *Phys. Rev. Lett.* 70 3247 (1993)
6. Kaplan A E, Law C T, Shkolnikov P L *Phys. Rev. E* 52 6795 (1995)
7. B. Pardo and J.-M. Andre, *Phys. Rev. E* 65 (2002) 036501.
8. N.N. Nasonov, V.V. Kaplin, S.R. Uglov, M.A. Piestrup, C.K. Gary, *Phys. Rev E* 68 (2003) 3604.
9. G.M. Garibian, C. Yang, *J. Exp. Theor. Phys.* 61 (1971) 930.
10. V.G. Baryshevsky, I.D. Feranchuk, *J. Exp. Theor. Phys.* 61 (1971) 944.
11. V.G. Baryshevsky, I.D. Feranchuk, *J. Physique (Paris)* 44 (1983) 913.
12. A. Caticha, *Phys.Rev. A.* 40 (1989) 4322.
13. V. V. Kaplin, S. R. Uglov, V. N. Zabaev, M. A. Piestrup, C. K. Gary, N. N. Nasonov, and M. K. Fuller, *Appl. Phys. Lett.* 76. (2000) 3647.
14. N.N. Nasonov, V.V. Kaplin, S.R. Uglov, V.N. Zabaev, M.A. Piestrup, C.K. Gary, *Nucl. Instrum. Methods B* 227, 2005, 41.
15. S.V. Blazhevich, I.V. Kolosova, A.V. Noskov, *J. Exp. Theor. Phys.* 114 (2012) 547.
16. S. Blazhevich, A. Noskov, *IL Nuovo Cimento* 34C (2011) 231. (DOI 10.1393/ncc/i2011-10922-x).
17. G.M. Garibian, C. Yang, *J. Exp. Theor. Phys.* 63 (1972) 1198.
18. V.G. Baryshevsky, I.D. Feranchuk, *Phys. Lett. A* 57, 183 (1976).
19. V.G. Baryshevsky, I.D. Feranchuk, *J. Physique. (Paris)* 44, 913 (1983).
20. C.L. Yuan Luke, P.W. Alley, A. Bamberger et al, *Nucl. Instr. and Meth. In Phys. Res. A* 234, 426 (1985).
21. B.N. Kalinin, G.A. Naumenko, D.V. Padalko et al, *Nucl. Instr. and Meth. In Phys. Res. B* 173, 253 (2001).
22. G. Kube, C. Ay, H. Backe, N. Clawiter et al, in *Abstracts V International Symposium "Radiation from Relativistic Electrons in Periodic Structures"*, Lake Aya, Altai Mountains, Russia, 10-14 September, 2001.
23. H. Backe, N. Clawiter et al, in *Proc. Of the Intern. Symp. on Channeling – Bent Crystals – Radiation Processes, 2003*, Frankfurt am Main, Germany, EP Systema Bt., Debrecen, p.41.
24. A. N. Aleinik, A. N. Baldin, E. A. Bogomazova, et al., *JETP Lett.* 80, 393 (2004).
25. A.S. Kubankin, N.N. Nasonov, V.I., Sergienko, I.E.Vnukov, *Nucl. Instr. and Meth. In Phys. Res. B* 201, 97 (2003).
26. N. Nasonov, A. Noskov, *Nucl. Instr. Meth. In Phys. Res. B* 201, 67 (2003).
27. A. Kubankin, N. Nasonov, A. Noskov, in *Proc. 7 Int. Russian-Japanese Symposium "Interaction of fast charged particles with solids"*, Nov. 24-30, 2002, Kyoto, Japan, p.217-225.
28. S. Blazhevich, A. Noskov *J.Exp. Theor. Phys.* 136, 2009, 1043.
29. S. Blazhevich, A. Noskov, *Nucl. Instr. Meth. In Phys. Res. B* 252, 69 (2006).



УДК 620.1.72:532.783

**ПОЛЯРНЫЙ ЭЛЕКТРООПТИЧЕСКИЙ ЭФФЕКТ ПАМЯТИ В СТРУКТУРЕ
Si/НЕМАТИК/ИТО****POLAR ELECTRO-OPTICAL EFFECT OF MEMORY IN Si/NEMATIC/ITO
STRUCTURE****С.И. Кучеев, А.В. Полунина
S.I. Kucheev, A.V. Polunina***Белгородский национальный исследовательский университет, Россия, 308015, г.Белгород, ул. Победы, 85**Belgorod National Research University, 85 Pobedy St, Belgorod, 308015, Russia**E-mail: kucheev@bsu.edu.ru*

Аннотация. Описан эффект «памяти» ориентации нематика в структуре монокристаллический кремний/нематик/электрод, имеющий место при отрицательном смещении структуры относительно кремния. Эффект обусловлен переориентацией директора на поверхности кремния в гомеотропное состояние при действии записывающего напряжения и сохранении в этом состоянии продолжительное время без внешнего поля. Показана определяющая роль примесей (не установленной природы) в нематике как собственных, так и привнесённых извне, для реализации эффекта «памяти».

Resume. The effect of "memory" of the nematic orientation in a single-crystal silicon / nematic / electrode structure, which occurs when there is a negative bias relative to the silicon substrate is described. The effect is due to the reorientation of the director on the silicon surface into a homeotropic state by the action of the recording voltage and maintaining in this state for a long time without an external field. The determining role of impurities (non-determined nature) in a nematic both own and introduced for the implementation of the "memory" effect is shown.

Ключевые слова: нематик, бистабильность, электрооптический эффект, МДП структура.

Key words: nematic, bistability, electrooptic effect, MIS structure

Введение

Нематические жидкие кристаллы благодаря электрически управляемому двулучепреломлению [1] находят применение в приборах отображения и обработки оптической информации [2]. В моностабильных приборах модуляция волнового фронта света осуществляется при переориентации молекул из исходного состояния ориентации, которое задается обычно жесткими [1] условиями на поверхностях, в состояние заданное действием электрического поля. После выключения электрического поля, вследствие упругих свойств, нематик возвращается в исходное состояние ориентации. В бистабильных жк приборах функционирование основывается на переключении ориентации между двумя (или более [3]) стабильными состояниями, которые сохраняются длительное время (режим «памяти») без внешнего электрического поля и являются, соответственно, энергонезависимыми. Бистабильность, в большинстве описанных случаях, достигается за счет организации топологически разных пространственных распределений директора, которые не могут самопроизвольно переходить друг в друга [4, 5]. Другим вариантом достижения бистабильности является создание управляемых граничных условий на поверхности. Принимая во внимание ряд преимуществ бистабильного переключения ориентации нематика над моностабильным, как например, возможность использовать пассивную адресацию пикселей вместо активно-матричной, поиск эффективного управления ориентацией директора за счет поверхности остается актуальной задачей. В предлагаемой работе показано, что в жк структуре на основе монокристаллического кремния может быть реализован по-

лярных эффект с «памятью», причина которого связана именно с изменением условий на поверхности, сохраняющимися продолжительное время.

Эксперимент

Экспериментальная ячейка представляла собой сэндвич, в которой подложкой (нижний электрод) служил полированный монокристаллический кремний p - типа проводимости с удельным сопротивлением $20 \text{ Ом}\cdot\text{см}$. Верхним электродом служила прозрачная плёнка оксида индия (ITO) с натертой пленкой полиимида, которая задает планарную ориентацию молекул жидкого кристалла. Использовался нематик 5CB из класса цианобифенилов с положительной анизотропией диэлектрической проницаемости. Толщина слоя нематика задается калиброванной фторопластовой пленкой и составляла 5 мкм . Непосредственно перед каждой сборкой нематической ячейки поверхность кремния протравливалась плавиковой кислотой, промывалась дистиллированной водой и просушивалась интенсивным потоком воздуха. Заправка нематика в ячейку осуществляется за счет капиллярных сил с одной точки заливки.

Рис. 1 демонстрирует основные состояния ориентации нематика в упомянутой жк ячейке, поясняющие сущность эффекта «памяти». Рис. 1а соответствует исходному состоянию нематика. Хорошо видно, что ориентация нематика однородна, близка к планарной, что связано с навязыванием объему жк однородной ориентации жестким сцеплением молекул на ITO электроде с полиимидом. При включении переменного напряжения (далее тестирующее), ожидаемо видна переориентация нематика, рис. 1б, причем визуализируются неоднородности текстуры, очевидно обусловленные неоднородностями ориентации нематика непосредственно на поверхности кремния. При выключении тестирующего напряжения нематик возвращается в исходное состояние, рис. 1а. Такое поведение нематика является моностабильным.

Для перехода нематика в состояние «памяти» необходимо подать на ячейку или постоянное напряжение с отрицательной полярностью относительно кремния или переменное напряжение с постоянным отрицательным смещением (далее записывающее). Последний вариант включения «памяти» предпочтителен, т.к. в этом случае доступна не прерывная визуализация процесса перехода ориентации нематика непосредственно из исходного состояния (рис. 1б) в состояние «памяти». Минимальное смещение, при котором появляются признаки «памяти» составляет около $-0,3 \text{ В}$ при длительности действия не менее 10 минут.

В результате действия записывающего напряжения нематик переходит в новое состояние ориентации, которое при тестировании выглядит совершенно по-другому, рис. 1с, в сравнении с моностабильным поведением (рис. 1б). В этом состоянии, неоднородности ориентации нематика уже отсутствуют, вся область «памяти» имеет один определённый интерференционный цвет, рис. 1с. Состояние «памяти» может сохраняться в широких временных пределах от нескольких минут до суток в зависимости от условий записи. Отметим, что положительное смещение относительно кремния не приводит к эффекту «памяти». На рис. 1д представлена типичная зависимость длительности режима «памяти» от величины записывающего напряжения (смещения). Видно, что время «памяти» пропорционально увеличивается с ростом величины отрицательного смещения.

Переход нематика в состояние «памяти» при действии соответствующего записывающего напряжения начинает осуществляться от границы заливки нематика в ячейку (отмечено стрелкой, рис. 1а). Ширина полосы L (рис. 1с), области нематика, где имеет место «память», с течением времени действия записывающего напряжения увеличивается, рис. 2. Такое избирательное поведение «памяти», с точки зрения локализации в ячейке, мы можем связать с (1) возможной адсорбцией некоторых примесей из жк материала на свежее травленной поверхности кремния при заправке ячейки, (2) уменьшением концентрации этих примесей на поверхности кремния вглубь ячейки, и (3) влиянием этих адсорбированных примесей на свойства поверхности кремния ориентировать молекулы жидкого кристалла в процессе протекания постоянного тока. Факт присутствия примесей в данном жк материале и их адсорбция ранее регистрировались по пороговым напряжениям светочувствительности и формирования гомеотропной ориентации в МДП структуре [6].

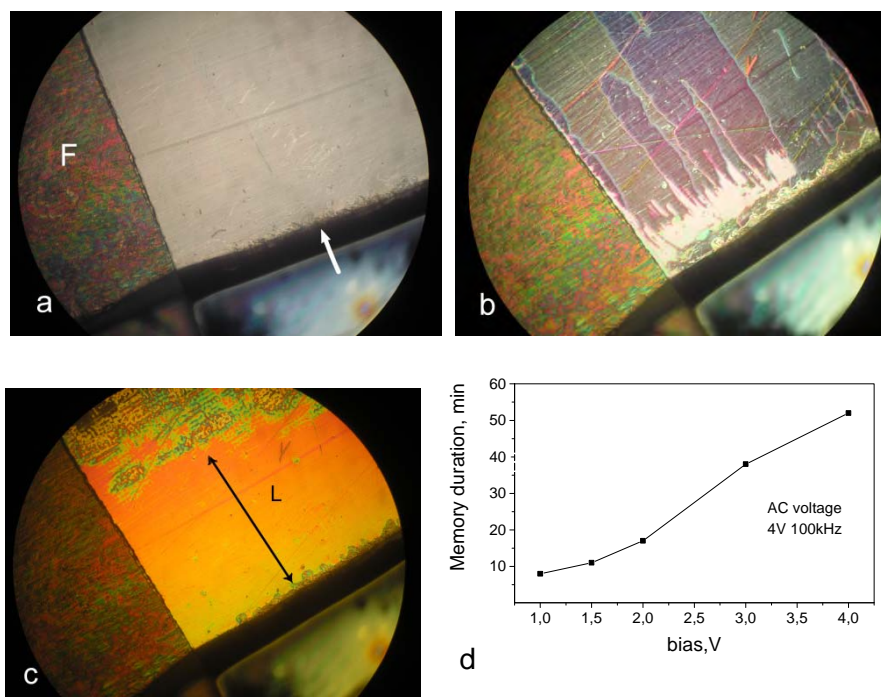


Рис. 1. Эффект «памяти». а - Исходная ориентация нематика в ячейке ($U=0$). F – фторопластовая плёнка, фиксирующая толщину слоя нематика. Стрелка указывает на границу, где нематик вводится в ячейку. б - Переориентированный нематик тестирующим напряжением $U=4$ В, 100 кГц. Моностабильный режим. с - Нематик в режиме «памяти» после действия смещения -3 В (тестирующее напряжение $U=4$ В, 100 кГц). д - Типичная зависимость времени эффекта «памяти» от величины смещения (время записи каждой точки 1 мин.)

Fig. 1. "Memory" effect. a - The initial orientation of nematic in the cell ($U = 0$). F - plastic film fixes the thickness of cell. The arrow indicates the boundary where nematic is introduced into the cell. b - The nematic reoriented by the testing voltage $U = 4$ V 100 kHz. Monostable mode. c - nematic in "memory" mode after a -3 V bias action (the testing voltage $U = 4$ V, 100 kHz). d - Typical dependence of the "memory" effect duration on bias (the recording time for each point is 1 min.)

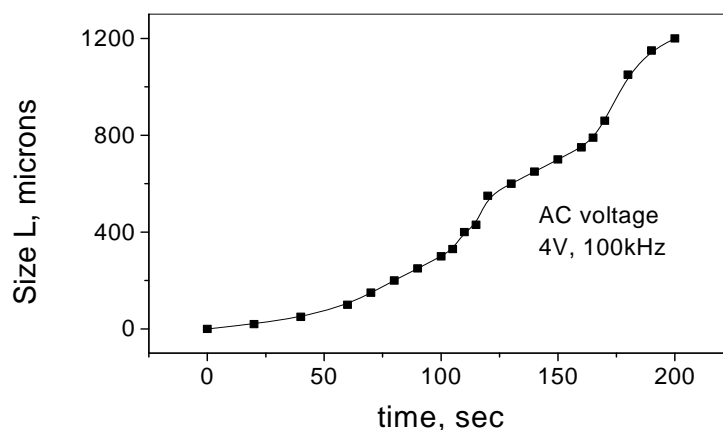


Рис. 2. Зависимость размера области «памяти» L от времени действия записывающего напряжения (смещение -1 В)

Fig. 2. Dependence of the area size L of the "memory" on the time of action of the recording voltage (-1 V of bias)

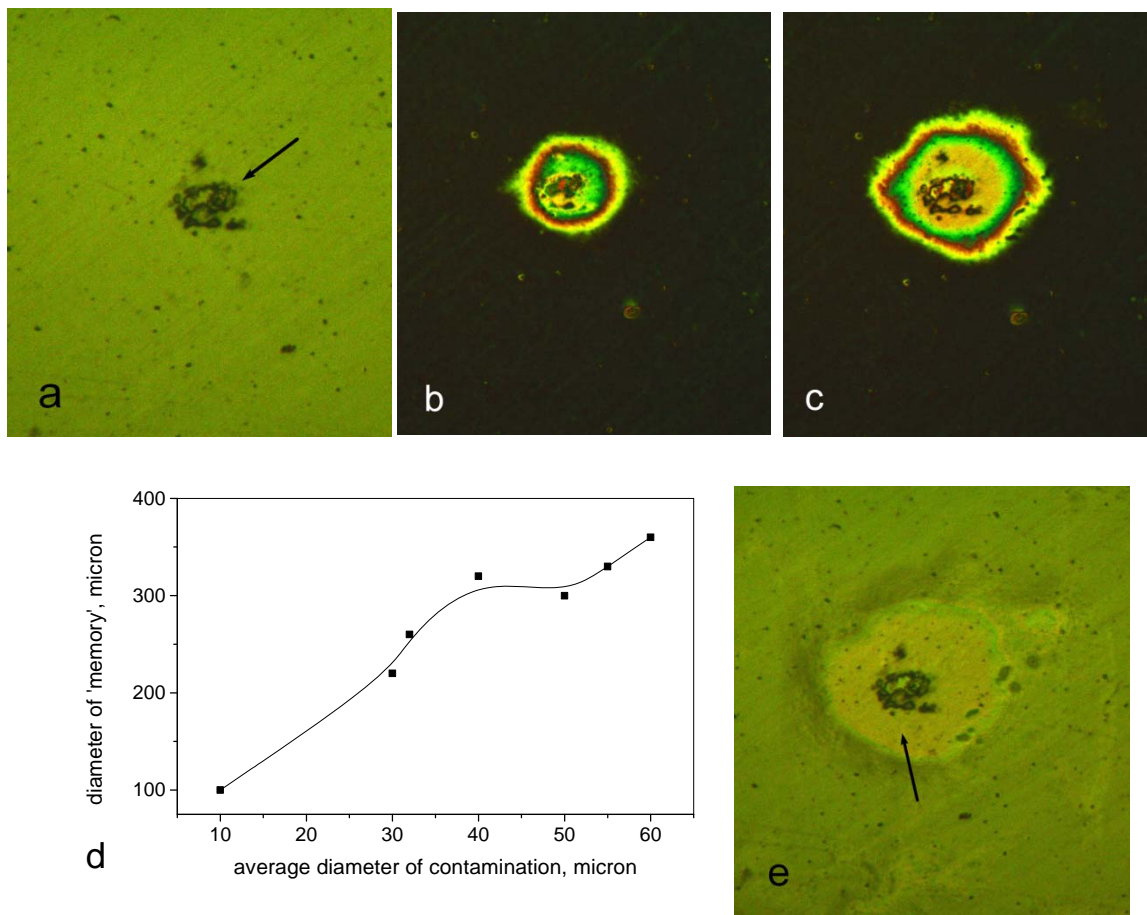


Рис. 3. Эффект «памяти» в окрестности локального загрязнения на поверхности кремния. а - Исходная ориентация нематика ($U=0$). Стрелка - загрязнение поверхности кремния, соответствующее месту высохшей капли воды. (b, c) - Длительность записывающего напряжения (4 В, смещение – 0.5 В, частота 100 кГц), минуты: b- 3, c- 8. d - Зависимость размера (средний диаметр) участка с эффектом «памяти» от среднего диаметра загрязнения, соответствующего высохшей капли. Время действия записывающего напряжения 400 секунд. е – Нематик в окрестности загрязнения в состоянии «памяти» ($U=0$). Стрелка указывает на гомеотропную ориентацию нематика на поверхности кремния

Fig. 3. "Memory" effect in the vicinity of local contamination on the silicon surface. a - Initial orientation of nematic ($U = 0$). Arrow - contamination of the silicon surface corresponding to the place of dried water droplet. (b, c) - The duration of the recording voltage (4V, bias - 0.5 V, 100 kHz), minutes: b- 3, c- 8. d - size dependence of area with the effect of "memory" (mean diameter) on the average diameter of contamination corresponding to the dried droplets. Duration of the recording voltage of 400 seconds. e - Nematic in the "memory" mode in the vicinity of contamination ($U = 0$). The arrow points on a homeotropic orientation on the silicon surface

На важную роль в реализации эффекта «памяти» адсорбируемых примесей указывают также результаты следующего эксперимента, в котором примеси не являются собственными, т.е. не принадлежат изначально жк материалу, а привносятся извне. После травления в HF и прополаскивания дистиллированной водой, поверхность кремния не обдувалась потоком воздуха. Это приводит к высыханию отдельных капель воды непосредственно на поверхности кремния. Загрязнения на поверхности кремния при подобном высыхании стягиваются в центры соответствующих капель и остаются на поверхности. В нематической ячейке, эти центры загрязнений, вследствие диффузии, становятся источниками примесей, которые адсорбируются в окрестности этих капель, причем концентрация примесей естественным образом уменьшается с увеличением расстояния от центра высохших капель. В таких ячейках было установлено, что участки «памяти» в первую очередь начинают формироваться в окрестности высохших капель, рис. 3, при этом размеры участков увеличиваются с увеличением времени действия записывающего напряжения. Прослеживается четкая корреляция между видимыми размерами загрязнений на поверхности кремния (рис. 3а) с размерами участков с «памятью» в ячейке после подачи записывающего напряжения, рис. 3. Вид-



но, что чем больше средний диаметр локального загрязнения на подложке, тем больше размер участка нематика, который переходит в состояние «памяти». Это косвенно согласуется с предположением, что чем больше загрязнение, тем большее количество примесей переходит в жк материал, и, в свою очередь, адсорбируется на поверхности кремния. Таким образом, необходимым условием реализации эффекта «памяти» является наличие примесей на поверхности, запускающих при действии отрицательного смещения механизм перехода директора на поверхности кремния в гомеотропное состояние. Формирование гомеотропной ориентации в окрестности высохших капель после действия запиывающего напряжения убедительно регистрируется в поляризованном свете, рис. 3е.

Выводы

В ходе выполнения работы было установлено следующее. Действие постоянного смещения с отрицательной полярностью относительно кремния в структуре Si/5CB/ITO приводит к переходу директора на поверхности кремния из исходного стабильного состояния ориентации в гомеотропное, причем последняя сохраняется продолжительное время. Длительность эффекта «памяти» зависит как от величины смещения, так и от продолжительности его действия. Необходимыми условиями для реализации эффекта «памяти» являются (1) свежее травленая HF поверхность кремния и (2) присутствие примесей (пока не установленной природы) как собственных, т.е. изначально принадлежащих жк материалу так и внесенных извне. Принимая во внимание, что длительность эффекта памяти значительно превышает максвелловское время релаксации ионного заряда в жк материале, механизм эффекта «памяти» не связывается с процессами накопления и релаксации зарядовой подсистемы. По всей видимости, в основе механизма лежит процесс электроочистки поверхности кремния, в котором играют роль дополнительные ионы, происхождение которых связано с адсорбированными на поверхности кремния примесями.

Список литературы References

1. Блинов Л.М. 1978. Электро- и магнитооптика жидких кристаллов. М.: Наука: 384.
Blinov L.M. 1978. Electro and magneto- optics of liquid crystal. M.: Nauka: 384.
2. Yang D.K., Wu S.T. 2006. Fundamentals of Liquid Crystal Devices John Wiley&Sons, Ltd. : 378.
3. Lee E.K., Kim J.H. 2007. Multistability of nematic liquid crystals realized on microscopic orientation patterns. Journal of Applied Physics, 102: 036102.
4. Dozov I., Nobili M., Durand G. Fast bistable nematic display using monostable surface switching. 1997. Appl. Phys. Lett., 70: 1179 -1181.
5. Barberi R., Giocondo M., Durand G. Flexoelectrically controlled surface bistable switching in nematic liquid crystals. 1992. Appl. Phys. Lett., 60: 1085 -1086.
6. Захвалинский В.С., Кучеев С.И., Межаков Н.Н., Перервенко Э.О., Пилюк Е.А. 2014. Ионная адсорбция и ориентация нематика на карбиде кремния в нематической ячейке. Научные ведомости БелГУ, Серия Математика. Физика, 25(196), вып.37: 138-142.
Zahvalinski V.S., Kucheev S.I., Mezhaikov N.N., Perervenko E.O., Piluk E.A. 2014. The ionic adsorption and the orientation of the nematic on the silicon carbide in the nematic cell. Belgorod State University Scientific Bulletin, Mathematics & Physics, 25 (196), issue 37: 138-142.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА, МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 519.6, 519.7

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ МЕТОД ОПОСРЕДОВАННОЙ ВИЗУАЛИЗАЦИИ
НАНОСТРУКТУРЫ АЛМАЗА

THE MATHEMATICAL METHOD OF MEDIATED VISUALIZATION OF DIAMOND
NANOSTRUCTURE

И.Е. Еремин ¹, Е.А. Подолько ²
I.E. Eremin, E.A. Podolko

¹Амурский государственный университет,
Игнатьевское шоссе, д. 21, г. Благовещенск, Амурской области, 675027, Российская Федерация

Amur State University
Ignatyevskoe sh. 21, Blagoveshchensk, Amur Region, 675027, Russian Federation

²Дальневосточный государственный аграрный университет
Политехническая, 86, г. Благовещенск, Амурской области, 675000, Российская федерация

Far Eastern State Agrarian University
Polytechnic, 86, Blagoveshchensk, Amur Region, 675000, Russian Federation

e-mail: marinecops@mail.ru; evgpodolko@mail.ru

Аннотация. Рассматривается модифицированная трактовка электронной конфигурации неполярной валентной химической связи алмаза. Приведены результаты опосредованной визуализации электронно-атомного строения элементарной ячейки рассматриваемого материала.

Resume. We consider the modified interpretation of the valence electron configuration of non-polar chemical diamond connection. The results of the indirect visualization of electron atomic structure of the material in the unit cell.

Ключевые слова: кибернетическая модель диэлектрической проницаемости, электронная конфигурация, тип кристаллической решетки.

Keywords: cybernetic model of permittivity, electron configuration, the type of crystal lattice.

Введение

Благодаря своим уникальным физико-химическим свойствам, алмаз является популярным объектом исследований, проводимых в самых разных областях науки и техники.

В свою очередь, учитывая сложные квантово-механические эффекты, проявляющиеся на атомарном уровне, особое значение имеет проблема моделирования тонкой структуры наносистем.

Визуализация особенностей электронно-атомного строения конкретного образца может быть выполнена путем пространственного моделирования местоположения узловых точек его ядерного каркаса, окруженного электронными оболочками определенной конфигурации. При этом для определения искомым геометрических параметров предлагаются относительно простые вычислительные методики, опирающиеся на обработку вполне доступных экспериментальных данных.



Общая характеристика предлагаемого метода

Известно, что углерод – шестой химический элемент периодической таблицы Менделеева с электронной конфигурацией основного состояния атома C : $1s^2 2s^2 2p^2$. Четыре внешних (валентных) электрона соответствуют одной спаренной $2s$ -орбитали, а также неспаренным $2p_x$ и $2p_y$ -орбиталям. Общепринято считается, что при образовании химической связи (неполярной ковалентной), возникающей между соседними частицами углерода, по одному $2s$ -электрону атомов C переходят на вакантные $2p_z$ -орбитали. На основании такого толкования механизма физической реализации рассматриваемых химических связей, каждый из химически соединенных между собой соседних атомов углерода приобретает электронную конфигурацию вида $1s^2 2s^2 2p_x 2p_y 2p_z$.

Результаты проведенных ранее прикладных исследований [Костюков, Еремин, 2004], показали, что эффективность математического моделирования оптических и диэлектрических спектров веществ, обладающих полярным ковалентным типом химической связи, могут быть значительно повышена за счет ее чисто ионного толкования.

Таким образом, в рамках видоизмененной трактовки механизма реализации неполярной ковалентной связи, возникающей для каждой пары соседних атомов алмаза, предполагается, что одна их половина переходит в катионное состояние C^{4+} , а другая – в анионное состояние C^{4-} .

Основное преимущество изменений, предлагаемых авторами, заключается в том, что на их базе становится возможным рассматривать частицы углерода в форме несжимаемых ионных шаров, обладающих сложной электронной структурой. При этом достаточно адекватная математическая модель их упругой электронной поляризации может быть описана с помощью соответствующей системы линейных дифференциальных уравнений вида:

$$\frac{d^2 \mu_k(t)}{dt^2} + 2\beta_k \frac{d\mu_k(t)}{dt} + \omega_{0k}^2 \mu_k(t) = \frac{2e^2}{m_e} E(t), \quad k = \overline{1, 6};$$

$$E(t) = E_0(t) - \frac{2}{3\epsilon_0} N \sum_{i=1}^6 \mu_i(t),$$
(1)

где $\mu_k(t)$ – функции индуцированных дипольных моментов электронных пар каждой разновидности; β_k и ω_{0k} – коэффициенты затухания и частоты их собственных колебаний; q_e и m_e – заряд и масса электрона; $E(t)$ – напряженность эффективного поля; $E_0(t)$ – напряженность внешнего поля; ϵ_0 – диэлектрическая проницаемость вакуума; N – объемные концентрации связей $C - C$.

На основании исходного описания изучаемых процессов вида (1) вытекает кибернетическая модель комплексной диэлектрической проницаемости алмаза, использующая уравнения комплексных поляризуемостей $\alpha_k(j\omega)$ каждой из рассматриваемых электронных пар [Костюков, Еремин, 2008; Еремин и др., 2010; Жилиндина, Еремин, 2012; Еремин и др., 2013; Еремин и др., 2014]:

$$\epsilon(j\omega) = 1 + \frac{2}{3\epsilon_0} N \sum_{i=1}^6 \alpha_i(j\omega);$$

$$\alpha_k(j\omega) = \frac{2e^2/m_e}{\omega_{0k}^2 - \omega^2 + j2\beta_k \omega}, \quad k = \overline{1, 6}.$$
(2)

Для утилитарных расчетов собственных частот вынужденных электромагнитных колебаний каждой из орбиталей можно использовать формулы:

$$\omega_{0k}^2 = \frac{Q_k e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e r_k^3}, \quad r_k = \frac{n_k^2 \hbar^2}{Q_k e^2 m_e}, \quad k = \overline{1, 6},$$
(3)

где Q_k – эффективный заряд атомного остатка, влияющий на заданную электронную орбиталь; r_k – радиус сферической электронной орбиты; n – главное квантовое число орбитали; \hbar – постоянная Планка.

В свою очередь, для определения величины зарядов атомных остатков, эффективно влияющих на электроны определенных орбиталей, могут использоваться методы описания линейной комбинации атомных орбиталей (МО ЛКАО), хорошо характеризующие внутреннюю энергию различных кристаллов. Самым лучшим МО ЛКАО считаются атомные орбитали слэтеровского типа. При этом значение эффективного заряда Q связано с порядковым номером Z химического элемента и величиной σ экранирования его ядра внутренними электронными оболочками.

Численное значение σ находится посредством группировки орбиталей по оболочкам ($1s$), ($2s, 2p$), ($3s, 3p$), ($3d$), ($4s, 4p$), ($4d$), ($4f$) и т.д., представляя собой сумму экранирующих вкладов, вносимых электронами каждой из групп.



Принимая во внимание, что эмпирическая методика Слэтера была изначально разработана для стационарных атомов вещества, то для повышения эффективности производимых расчетов, следует использовать ее модифицированный вариант, см. например [Костюков, Еремин, 2004; Еремин и др., 2010; Еремин и др., 2014], на базе которого эффективные заряды электронных орбиталей частиц алмаза могут быть представлены как:

$$\begin{aligned} Q_{1s^2} &= Z - \sigma_1; \\ Q_{2s^2} &= Z - \sigma_2; \quad Q_{2p_x^2} = Z - \sigma_3; \quad Q_{2p_y^2} = Z - \sigma_4; \quad Q_{2p_z^2} = Z - \sigma_5, \end{aligned} \quad (4)$$

здесь σ_1 – типовое значение экранирующего вклада электронов $1s$ -орбитали, равное 0,30; $\sigma_2 \dots \sigma_5$ – экранирующие вклады внешних (оптических) электронов аниона C^{4-} , оптимизируемые с учетом соответствующего количества внутренних электронов на основе данных физического эксперимента.

Вычисление коэффициентов затухания электронных колебаний β_k по классическим формулам является не достаточно точным, поэтому их величины целесообразно рассматривать в общем виде:

$$\beta_k = b_k \omega_{0k}, \quad k = \overline{1,6}, \quad (5)$$

где b_k – коэффициенты пропорциональности, оптимизируемые на основе данных физического эксперимента.

Концентрации единичных углеродных связей $C - C$, имеющих место для единицы объема исследуемого образца, могут быть рассчитаны как:

$$N = \rho / m, \quad (6)$$

где ρ – плотность материала; m – суммарная масса связанных частиц.

Кроме того, оптимизированные величины σ_k и b_k , могут быть представлены в следующем виде (таблица 1).

Таблица 1
Расчетные данные

Величины	Электронные орбитали				
	$1s^2$	$2s^2$	$2p_x^2$	$2p_y^2$	$2p_z^2$
σ_k	0,30	3,38	4,16	4,24	4,30
b_k	0,001	0,100	0,050	0,150	0,100

Оптимизированные величины σ_k и b_k
Optimized values σ_k and b_k

Необходимо отметить, что традиционное раскрытие внутренней структуры вещества базируется на прямой фиксации электронно-атомного строения конкретных наноструктур, проводимой с помощью дорогостоящего приборного оборудования и требующей специальной технологической обработки изучаемых образцов. С другой стороны, визуализация структурных особенностей наносистем может быть выполнена посредством пространственного геометрического моделирования местоположения узловых точек их атомно-ядерного каркаса, окруженных электронными оболочками определенной конфигурации.

Приняв позицию произвольной частицы кристалла за начало трехмерной ортогональной системы отсчета, координаты частиц его ближайшего окружения, составляющих структуру рассматриваемого типа, могут быть достаточно просто выражены через величину межъядерного расстояния в его формульной единице. Кроме того, для расчета межъядерных расстояний R могут быть применены стереохимические формулы, учитывающие тип кристаллической решетки.

В свою очередь, знание коэффициента γ компактности решетки исследуемого кристалла, а также величин его молекулярной массы и табличного значения физической плотности позволяет использовать выражение:

$$R = \sqrt[3]{\frac{\gamma \cdot m}{\rho}}. \quad (7)$$

При этом на базе альтернативной трактовки образования углеродных связей вида $C - C$ каждая пара соседних атомных узлов будет заселена ионизированными частицами углерода вида C^{4+} и C^{4-} .

Следует отметить, что теоретический расчет межъядерных расстояний алмаза, реализуемый по формуле (7) для значения $\gamma = 3\sqrt{3}/16$, отвечающего алмазоподобной решетке, дает величину $R = 1,545 \cdot 10^{-10}$ м, что полностью совпадает с данными соответствующих физических измерений.

При этом учитывая формулы вида (3), непосредственная дефиниция геометрических размеров электронных оболочек частиц C^{4+} и C^{4-} , образованных совокупностью соответствующих электронных орбиталей, может быть реализована на основе расчетных данных, представленных в таблице 2.

Таблица 2

Расчетные данные

Величины	Электронные орбитали				
	$1s^2$	$2s^2$	$2p_x^2$	$2p_y^2$	$2p_z^2$
$\omega_k, 10^{16}$ рад/с	134,32	3,5473	1,7496	1,6007	1,4935
$r_k, 10^{-10}$ м	0,0928	0,8079	1,1504	1,2027	1,2451

Размеры электронных орбиталей
The dimensions of the electron orbitals

Результаты опосредованной визуализации электронно-атомного строения элементарной ячейки алмаза приведены на рисунке 1.

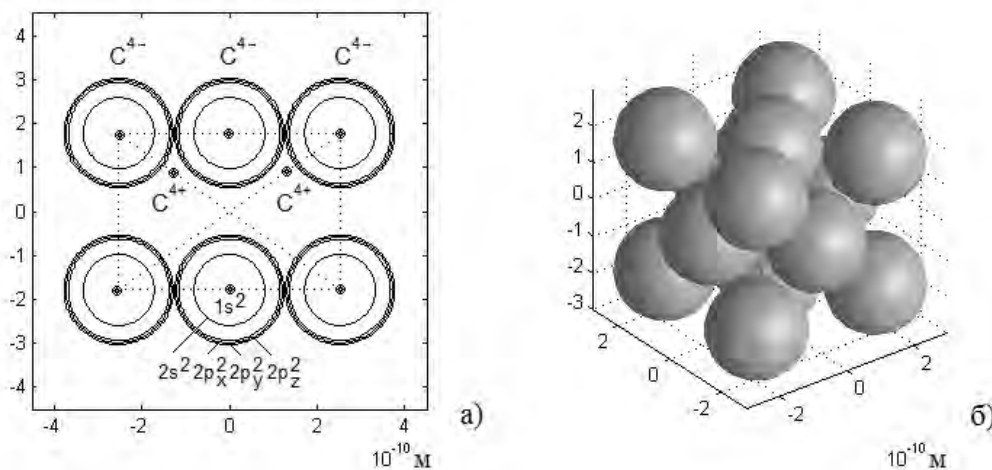


Рис. 1. Опосредованная визуализация кристаллической решетки алмаза:
а) – сечение диагональной плоскости; б) – трехмерная модель структуры

Fig. 1. The mediated visualization of a diamond crystal lattice:
a) – the diagonal plane section; b) – three-dimensional structure model

Заклучение

Главным достоинством описанного метода является реализуемая в его рамках возможность достаточно обоснованной визуализации наноструктуры материалов, проводимой на базе использования его легко измеряемых макропараметров. Данный метод оказывается практически приемлемым для исследования образцов, находящихся в различных агрегатных состояниях, при этом уровень детализации внутренней структуры вещества оказывается выше, чем у современных средств электронной микроскопии высокого разрешения.

Кроме того, модель электронной поляризации кристаллических веществ, описываемая в настоящей работе, является детально проработанной и достаточно универсальной, т.е. доведенной до прикладного уровня. Следовательно, ее практическое использование для изучения внутреннего строения кристаллических веществ может оказаться полезным для дальнейшей эволюции теоретических основ физики конденсированного состояния, обеспечивающих развитие современных нанотехнологий.

Список литературы References

1. Еремин И.Е., Жилиндина О.В., Бартошин А.С. 2013. Моделирование упругой электронной поляризации фианита. *Стекло и керамика*. 9: 22-23.
Eremin I.E., Zhilindina O.V., Bartoshin A.S. 2014. Modeling of the Elastic Electronic Polarization of Fianite. *Glass and Ceramics*. 9-10: 331-332. (in Russian)
2. Еремин И.Е., Еремина В.В., Жилиндина О.В. 2014. Моделирование упругой электронной поляризации высокотемпературного стекла. *Стекло и керамика*. 2: 7-9.
Eremin I.E., Eremina V.V., Zhilindina O.V. 2014. Modeling of the Elastic Electronic Polarization of High-Temperature Glass. *Glass and Ceramics*. 1-2: 45-47. (in Russian)
3. Еремин И. Е., Еремина В. В., Костюков Н. С., Моисеенко В. Г. 2010. Упругая электронная поляризация конденсированных диэлектриков. *Доклады Академии наук*. 5: 432.
Eremin I.E., Eremina V.V., Kostyukov N.S., Moiseenko V.G. 2010. Elastic Electron Polarization of Condensed Dielectrics. *Doklady Physics*. 6: 257-260. (in Russian)
4. Еремин И.Е., Еремин Е.Л., Демчук В.А., Моисеенко В.Г. 2014. Электронные свойства кристаллических фторидов кубической сингонии. *Доклады Академии наук*. Т. 454. №3: 274-277.
Eremin I.E., Eremin E.L., Demchuk V. A., Moiseenko V.G. 2014. Electronic Properties of Crystalline Fluorides of a Cubic Crystal System. *Doklady Physics*. 1: 6-9. (in Russian)
5. Жилиндина О.В., Еремин И.Е. 2012. Моделирование упругой электронной поляризации кордьеритовой керамики Л-24. *Стекло и керамика*. 7: 30-32.
Zhilindina O.V., Eremin I.E. 2012. Modeling of the Elastic Electronic Polarization of Cordierite Ceramic L-24. *Glass and Ceramics*. 7-8: 241-242. (in Russian)
6. Костюков Н. С., Еремин И. Е. 2004. Кибернетическая модель процесса упругой электронной поляризации диэлектрика. *Электричество*. 1: 50-54.
Kostyukov N.S., Eremin I.E. A 2004. Cybernetic Model for Simulating Elastic Electronic Polarization of a Dielectric. *Electrichestvo*. 1: 50-54. (in Russian)
7. Костюков Н. С., Еремин И. Е. 2008. Моделирование диэлектрического спектра кварца в области установления процессов электронной поляризации. *Известия высших учебных заведений. Физика*. 11: 1149-1156.
Kostyukov N.S., Eremin I.E. 2008. Modeling of Quartz Dielectric Spectrum in the Region of Establishing Electron Polarization Processes. *Russian Physics Journal*. 11: 1149-1156. (in Russian)



УДК 517.958:531.72, 517.958:539.3(4)

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ГИДРАВЛИЧЕСКОГО УДАРА В ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ И ЭЛАСТИЧНОМ ТВЕРДОМ СКЕЛЕТЕ

MATHEMATICAL MODELS OF HYDRAULIC SHOCK IN A VISCOUS LIQUID AND AN ELASTIC SOLID SKELETON

И.В.Некрасова, Л.Ф.Маслакова
I.V. Nekrasova, L.F. Maslakova

*Белгородский национальный исследовательский университет,
 Россия, 308015, г.Белгород, ул. Победы, 85*

Belgorod National Research University, 85 Pobedy St, Belgorod, 308015, Russia

e-mail: Nekrasova_i@bsu.edu.ru, Maslakova@bsu.edu.ru

Аннотация. В настоящей работе предлагается вывод математических моделей распределения поля давления в пласте вблизи скважины в процессе гидравлического удара. Чтобы получить эти модели, мы следуем известной схеме, предложенной Р. Барриджем и Дж. Келлером, которая основана на строгом усреднении точной математической модели, описывающей на микроскопическом уровне совместное движение упругого твердого скелета и вязкой жидкости, заполняющей поры.

Resume. In this paper the derivation of the mathematical models of the distribution of the pressure field in the reservoir near the well in the process of hydraulic shock. To obtain these models, we follow the scheme proposed by R. and J. Burrige. Keller, which is based on simple averaging, an accurate mathematical model that describes on a microscopic level the simultaneous motion of the elastic solid skeleton and a viscous fluid filling the pores.

Ключевые слова: Уравнения Стокса, гидравлический разрыв, двухмасштабная сходимость, усреднение периодических структур.

Keywords: Stokes equations, hydraulic fracturing, dvuhmestnoe convergence, homogenization of periodic structures.

Введение

Гидравлическим ударом называется резкое повышение давления в некоторой системе, заполненной жидкостью, как трубы, трещины и поры. Этот процесс в нефтяной скважине является частью процесса гидравлического разрыва нефтяного пласта. Существуют математические модели гидравлического удара, являющиеся инженерными моделями ([1], [2], [3]), связанными с фундаментальными законами механики сплошных сред, либо модели, описывающие распространение трещин в упругой среде ([4]). Но эти модели не работают на более сложных системах, таких как нефтяная скважина.

В настоящей работе мы получили математические модели гидравлического удара, следуя очень естественной идее Р. Барриджа и Дж. Келлера ([5]): в первую очередь, описать физический процесс на микроскопическом уровне, опираясь на общепринятую математическую модель, затем, если модель содержит малый параметр, найти все предельные режимы (усредненные уравнения) устремив малый параметр к нулю.

В качестве базовой математической модели гидравлического удара мы рассматриваем модель, описывающую кратковременные изотермические процессы в несжимаемой среде ([1] – [6]), где безразмерный вектор перемещений $\mathbf{w}(\mathbf{x}, t)$ сплошной среды в безразмерных (не отмеченных штрихами) переменных

$$\mathbf{x}' = L\mathbf{x}, \quad t' = \tau t, \quad \mathbf{w}' = \frac{L^2}{g\tau^2} \mathbf{w}$$

удовлетворяет системе дифференциальных уравнений в области Ω при $t > 0$:



$$\nabla \cdot \mathbf{w} = 0 \tag{0.1}$$

$$\tilde{\rho} \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial t^2} = \nabla \cdot \mathbf{P} + \tilde{\rho} \mathbf{F}, \tag{0.2}$$

$$\mathbf{P} = \tilde{\chi} \alpha_\mu \mathbf{D}(\mathbf{x}, \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t}) + (1 - \tilde{\chi}) \alpha_\lambda \mathbf{D}(\mathbf{x}, \mathbf{w}) - p \mathbf{I}, \tag{0.3}$$

$$\tilde{\rho} = \tilde{\chi} \rho_f + (1 - \tilde{\chi}) \rho_s.$$

В уравнениях (0.1) – (0.3) $\tilde{\chi}(\mathbf{x})$ – характеристическая функция порового пространства, $p(\mathbf{x}, t)$ – давление, ρ_f и ρ_s соответственно средние безразмерные плотности жидкости в порах и твердом скелете грунта, отнесенные к средней плотности воды ρ_0 , \mathbf{I} – единичная матрица.

Безразмерные постоянные α_μ и α_λ определяются формулами

$$\alpha_\mu = \frac{2\mu\tau}{L^2 \rho_0}, \quad \alpha_\lambda = \frac{2\lambda\tau^2}{L^2 \rho_0},$$

где μ – вязкость жидкости, λ – упругая постоянная Ламэ, τ – характерное время физического процесса, L – характерный размер рассматриваемой физической области.

Уравнение (0.2) понимается в смысле теории распределений и содержит уравнение Стокса в жидкой части, уравнение Ламэ в твердом скелете и условие непрерывности перемещений и нормальных напряжений на границе «твердый скелет – поровое пространство».

Эта математическая модель содержит естественный малый параметр ε , которым является отношение среднего размера пор l к характерному размеру L рассматриваемой области $\varepsilon = l/L$. Поэтому вполне обоснованным является нахождение предельных режимов в точной модели при стремлении малого параметра к нулю. Такие приближения сильно упрощают исходную задачу, сохраняя при этом все ее основные свойства. Но даже при наличии малого параметра задача все еще достаточно трудная и необходимы дополнительные упрощающие допущения. С геометрической точки зрения таким упрощением является предположение о периодичности порового пространства. А именно, пусть выполнено следующее

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ. 1) Пусть область Y_s есть «твердая часть» единичного куба $Y = (0,1)^3 \subset R^3$, и его «жидкая» часть Y_f есть открытое дополнение Y_s в Y и граница $\gamma = \partial Y_f \cap \partial Y_s$ есть липшицева поверхность.

2) Область E_f есть периодическое повторение в R^3 элементарной ячейки $Y_f^\varepsilon = \varepsilon Y_f$, область E_s – периодическое повторение в R^3 элементарной ячейки $Y_s^\varepsilon = \varepsilon Y_s$.

3) Поровое пространство $\Omega_f^\varepsilon \subset \Omega = \Omega \cap E_f$ есть периодическое повторение в Ω элементарной ячейки εY_f , а твердый скелет $\Omega_s^\varepsilon \subset \Omega = \Omega \cap E_s$ – периодическое повторение в Ω элементарной ячейки εY_s .

Непрерывная по Липшицу граница $\Gamma^\varepsilon = \partial \Omega_s^\varepsilon \cap \partial \Omega_f^\varepsilon$ представляет собой периодическое повторение в Ω границы $\varepsilon \gamma$.

4) $\Omega = \Omega_f^\varepsilon \cup \Gamma^\varepsilon \cup \Omega_s^\varepsilon$. Поровое пространство Ω_f^ε и твердый скелет Ω_s^ε являются связными множествами.

Тогда характеристическая функция области Ω примет вид

$$\tilde{\chi}(\mathbf{x}) = \chi^\varepsilon(\mathbf{x}) = \chi_0(\mathbf{x}) \chi\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right),$$

где $\chi_0(\mathbf{x})$ есть характеристическая функция области Ω_0 .



Пусть безразмерные параметры α_μ и α_λ зависят от малого параметра задачи ε и существуют пределы

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \alpha_\mu(\varepsilon) = \mu_0, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \alpha_\lambda(\varepsilon) = \lambda_0.$$

Целью настоящей работы является нахождение предельного режима (усредненных уравнений) и соответствующих начальных и краевых условий при

$$0 < \lambda_0 < \infty, \quad 0 < \mu_0 < \infty.$$

Вывод полученных результатов основан на систематическом использовании метода двух-масштабной сходимости, предложенного Г. Нгуетсенгом ([7]).

1. Постановка задачи

Как правило, начальный импульс, определяющий гидравлический удар, передается в нефтяной пласт через заполненный жидкостью резервуар.

Моделируя этот процесс, мы рассматриваем область Q , занимающую конечный объем и лежащую в полупространстве $\{x_3 < 0\}$. Её граница S состоит из двух частей: S^1 лежит в плоскости $\{x_3 = 0\}$, остальная часть границы $S^2 = S \setminus S^1$ есть гладкая поверхность класса C^2 , вблизи плоскости $\{x_3 = 0\}$, заданная уравнением $\Phi(x_1, x_2) = 0$ (то есть представляющая собой цилиндр).

В качестве Ω выступает подобласть области Q , такая что дополнение Ω в Q есть цилиндр $\bar{\Omega}^0 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq \delta^2 < 1, \varphi_0(x_1, x_2) < x_3 < 0\}$ (см. рисунок 1).

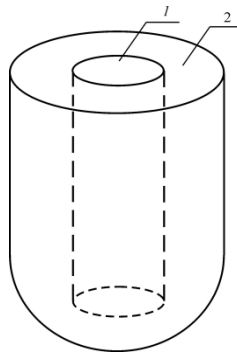


Рис.1. 1 – область Ω^0 , 2 – область Ω .

Для фиксированного $\varepsilon > 0$ совместное движение твердого скелета и жидкости, заполняющей поры, в области Ω_T описывается системой

$$\nabla \cdot \mathbf{w}^\varepsilon = 0, \quad (1.1)$$

$$\rho^\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t^2} = \nabla \cdot \mathbf{P}, \quad (1.2)$$

$$\mathbf{P} = \chi^\varepsilon \alpha_\mu \mathbf{D}(x, \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t}) + (1 - \chi^\varepsilon) \alpha_\lambda \mathbf{D}(x, \mathbf{w}^\varepsilon) - p^\varepsilon \mathbf{I}. \quad (1.3)$$

В области Ω_T^0 движение жидкости описывается системой Стокса, состоящей из уравнения неразрывности (1.1) и уравнения баланса импульса

$$\rho_f \frac{\partial^2 \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t^2} = \nabla \cdot \mathbf{P}^0, \quad (1.4)$$

$$\mathbf{P}^0 = \alpha_\mu \mathbf{D}(x, \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t}) - p^\varepsilon \mathbf{I}. \quad (1.5)$$



На общей границе $S^0 = \partial\Omega \cap \partial\Omega^0$, а также на границе Γ^ε «твердый скелет – поровое пространство» выполнены условия непрерывности перемещений

$$\lim_{\substack{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^0 \\ \mathbf{x} \in \Omega^0}} \mathbf{w}(\mathbf{x}, t) = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^0} \mathbf{w}(\mathbf{x}, t) \quad (1.6)$$

и нормальных напряжений

$$\lim_{\substack{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^0 \\ \mathbf{x} \in \Omega^0}} \mathbf{P}^0(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}_0) = \lim_{\substack{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^0 \\ \mathbf{x} \in \Omega}} \mathbf{P}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}_0), \quad (1.7)$$

где $\mathbf{n}(\mathbf{x}_0)$ – вектор нормали к соответствующей границе в точке \mathbf{x}_0 .

На части S^1 границы S задано нормальное напряжение

$$\left(\zeta \mathbf{P}^0(\mathbf{x}, t) + (1 - \zeta) \mathbf{P}(\mathbf{x}, t) \right) \cdot \mathbf{e}_3 = -p_0(\mathbf{x}, t) \mathbf{e}_3, \quad (1.8)$$

где $p_0(\mathbf{x}, t)$ есть импульс, определяющий гидравлический удар. Будем считать, что функция

$p_0(\mathbf{x}, t) = p_0(x_1, x_2, t)$ финитна в области $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 < \frac{\delta^2}{2} < 1, -\delta < x_3 < 0\}$.

На оставшейся части внешней границы $S^2 = S \setminus S^1$ выполняется условие

$$\mathbf{w}^\varepsilon(\mathbf{x}, t) = 0 \text{ при } t > 0. \quad (1.9)$$

Задача замыкается однородными начальными условиями

$$\mathbf{w}^\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t}(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad \mathbf{x} \in Q. \quad (1.10)$$

Обычным образом определяется понятие обобщённого решения задачи (1.1) – (1.10).

Определение 1. Пара функций $\{\mathbf{w}^\varepsilon, p^\varepsilon\}$, таких что

$$\mathbf{w}^\varepsilon \in W_2^{o, 1, 0}(Q_T), \quad \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t} \in L_2(Q_T), \quad p^\varepsilon \in L_2(Q_T),$$

называется обобщённым решением задачи (1.1) – (1.10), если данные функции удовлетворяют уравнению неразрывности (1.1) почти всюду в области Q_T , начальному условию (1.10) для функции \mathbf{w}^ε и интегральному тождеству

$$\int_{Q_T} (-\tilde{\rho}^\varepsilon \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} + (\zeta \mathbf{P}^0 + (1 - \zeta) \mathbf{P}) : D(\mathbf{x}, \varphi)) dxdt = \int_{Q_T} \nabla \cdot (\varphi p_0) dxdt \quad (1.11)$$

для всех функций $\varphi \in W_2^{1, 0}(Q_T)$, $\frac{\partial \varphi}{\partial t} \in L_2(Q_T)$, таких что $\varphi(\mathbf{x}, t) = 0$ на границе S_T^2 , и $\varphi(\mathbf{x}, T) = 0$ для $\mathbf{x} \in Q$.

Очевидно, что давление p^ε определяется с точностью до аддитивной постоянной. Фиксируем эту постоянную условием

$$\int_{\Omega} p^\varepsilon d\mathbf{x} = 0. \quad (1.12)$$

В уравнении (1.11) $\tilde{\rho}^\varepsilon = (\zeta + (1 - \zeta)\chi^\varepsilon)\rho_f + (1 - \zeta)(1 - \chi^\varepsilon)\rho_s$ и $\zeta = \zeta(\mathbf{x})$ есть характеристическая функция области Ω^0 в Q . Через $A : B$ обозначена свертка двух тензоров второго ранга по обоим индексам, т.е. $A : B = tr(B^* \circ A) = \sum_{i, j=1}^3 A_{ij} B_{ij}$.

Иногда мы будем записывать тождество (1.11) в дифференциальной форме

$$\tilde{\rho}^\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t^2} = \nabla \cdot (\zeta \mathbf{P}^0 + (1 - \zeta) \mathbf{P}) \quad (1.13)$$

и говорить, что функции $\{\mathbf{w}^\varepsilon, p^\varepsilon\}$ удовлетворяют уравнению (1.13) и граничному условию (1.8) в смысле теории распределений.

Будем считать, что функция p_0 подчинена следующему условию

$$\int_{Q_T} (|\nabla p_0(\mathbf{x}, t)|^2 + |\nabla \frac{\partial p_0}{\partial t}(\mathbf{x}, t)|^2) dx dt = \beta^2 < \infty,$$

где β – константа, зависящая только от областей Q , Ω и Ω_0 .

Вывод усредненных уравнений модели базируется на следующей теореме.

Теорема 1. Пусть функции $\{\mathbf{w}^\varepsilon, p^\varepsilon\}$ являются слабым решением задачи (1.1) – (1.10).

Тогда

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq t \leq T} \int_Q & (|\frac{\partial^2 \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t^2}|^2 + |p^\varepsilon|^2 + \alpha_\mu (\zeta + (1-\zeta)\chi^\varepsilon) |D(x, \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t})|^2 + \\ & + \alpha_\lambda (1-\zeta)(1-\chi^\varepsilon) |D(x, \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t})|^2) dx \leq C_0 \beta^2, \end{aligned} \tag{1.14}$$

где постоянная C_0 не зависит от малого параметра ε .

Доказательство существования обобщенного решения (1.1) – (1.10) при всех $\varepsilon > 0$ и оценки (1.14) стандартно (см. [6], [8]) и базируется на энергетическом тождестве

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_Q & (\tilde{\rho}^\varepsilon |\frac{\partial^2 \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t^2}|^2 + \alpha_\lambda (1-\zeta)(1-\chi^\varepsilon) |D(x, \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t})|^2) dx + \\ & + \int_Q \alpha_\mu (\zeta + (1-\zeta)\chi^\varepsilon) |D(x, \frac{\partial^2 \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t^2})|^2 dx = \int_Q \nabla (\frac{\partial p_0}{\partial t}) \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t^2} dx, \end{aligned} \tag{1.15}$$

2. Формулировка основных результатов

Теорема 2. Пусть $\{\mathbf{w}^\varepsilon, p^\varepsilon\}$ – слабое решение задачи (1.1) – (1.10). Тогда

1) последовательности $\{\mathbf{w}^\varepsilon\}$ и $\{\partial \mathbf{w}^\varepsilon / \partial t\}$ сходятся слабо в $\overset{o}{W}_2^{1,0}(Q_T)$ к функциям \mathbf{w} и \mathbf{v} соответственно, последовательности $\{\partial^2 \mathbf{w}^\varepsilon / \partial t^2\}$ и $\{p^\varepsilon\}$ сходятся слабо в $L^2(Q_T)$ к функциям $\frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial t^2}$ и p соответственно;

2) предельные функции \mathbf{w} , \mathbf{v} и p есть решение системы усредненных уравнений в области Q_T , состоящей из уравнения неразрывности

$$\nabla \cdot \mathbf{w} = 0, \tag{2.1}$$

и усредненного уравнения баланса импульса

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial t^2} + \nabla p - \nabla \cdot (\zeta \mu_0 D(\mathbf{x}, \mathbf{v}) + (1-\zeta) \mathcal{A}_1 : D(\mathbf{x}, \mathbf{v})) = \\ = \nabla \cdot \left(\mathcal{A}_2 : D(\mathbf{x}, \mathbf{w}) + \int_0^t \mathcal{A}_3(t-\tau) : D(\mathbf{x}, \mathbf{w}(\mathbf{x}, \tau)) d\tau \right), \end{aligned} \tag{2.2}$$

совместно с краевыми и начальными условиями

$$(\mu_0 D(\mathbf{x}, \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)) - p(\mathbf{x}, t) \mathbf{I}) \cdot \mathbf{e}_3 = p_0(\mathbf{x}, t) \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{x} \in S_T^1, \tag{2.3}$$

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \mathbf{x} \in S_T^2, \tag{2.4}$$

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{v}(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad \mathbf{x} \in Q; \tag{2.5}$$

3) задача (2.1) – (2.5) однозначно разрешима.

В уравнении (2.2)

$$\rho(\mathbf{x}) = (\zeta(\mathbf{x}) + (1-\zeta(\mathbf{x}))m)\rho_f + (1-\zeta(\mathbf{x}))(1-m)\rho_s.$$



Тензоры четвертого ранга $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \mathcal{S}_3(t)$ определены ниже формулой (3.11).

Доказательство теоремы 2.

На основании теоремы 1 заключаем, что последовательности $\{p^\varepsilon\}, \{\mathbf{w}^\varepsilon\}, \{\partial \mathbf{w}^\varepsilon / \partial t\}, \{\partial^2 \mathbf{w}^\varepsilon / \partial t^2\}, \{D(\mathbf{x}, \mathbf{w}^\varepsilon)\}$ и $\{D(\mathbf{x}, \partial \mathbf{w}^\varepsilon / \partial t)\}$ ограничены в $L_2(Q_T)$. Следовательно, существует подпоследовательность от малого параметра $\{\varepsilon > 0\}$ и функции p, \mathbf{w} и \mathbf{v} , такие что

$$p^\varepsilon \rightarrow p, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t^2} \rightarrow \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial t^2}$$

слабо в $L_2(Q_T)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, и

$$\mathbf{w}^\varepsilon \rightarrow \mathbf{w}, \quad \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t} \rightarrow \mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t}$$

слабо в $W_2^{1,0}(\Omega_T)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Переобозначая, если это необходимо, индексы, считаем сходящимися сами последовательности.

По теореме Нгуетсенга существуют 1-периодические по переменной \mathbf{y} функции $P(\mathbf{x}, t, \mathbf{y})$ из $L_2(Q_T \times Y)$ и $\mathbf{W}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y})$ из $L_2(Q_T; W_2^1(Y))$, такие что последовательности $\{p^\varepsilon\}, \{\mathbf{w}^\varepsilon\}, \{\partial \mathbf{w}^\varepsilon / \partial t\}, \{\nabla \mathbf{w}^\varepsilon\}$ и $\{\nabla(\partial \mathbf{w}^\varepsilon / \partial t)\}$ сходятся двухмасштабно в $L_2(Q_T)$ к функциям $P(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}), \mathbf{w}(\mathbf{x}, t), \mathbf{v}(\mathbf{x}, t), (\nabla_x \mathbf{w}(\mathbf{x}, t) + \nabla_y \mathbf{W}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}))$ и $(\nabla_x \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) + \nabla_y \partial \mathbf{W}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}) / \partial t)$ соответственно.

Лемма 1. Предельные функции \mathbf{w} и \mathbf{W} удовлетворяют макроскопическому и микроскопическому уравнениям неразрывности

$$\nabla \cdot \mathbf{w} = 0, \quad (\mathbf{x}, t) \in Q_T. \tag{3.1}$$

$$\nabla_y \cdot \mathbf{W} = 0, \quad (\mathbf{x}, t) \in Q_T, \quad \mathbf{y} \in Y. \tag{3.2}$$

Доказательство. Для доказательства (3.1) достаточно рассмотреть уравнение неразрывности (1.1) в виде

$$\int_0^T \int_\Omega \mathbf{w}^\varepsilon \cdot \nabla \varphi(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} dt = 0,$$

справедливое для всякой гладкой функции φ , равной нулю на части S_T^1 границы ∂Q и перейти к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Уравнение (3.2) получим, перейдя к двухмасштабному пределу в уравнении неразрывности (1.1) в интегральной форме:

$$\int_{Q_T} \varepsilon \mathbf{w}^\varepsilon \cdot \nabla (h_0(\mathbf{x}, t) h(\mathbf{x}/\varepsilon)) d\mathbf{x} dt = 0.$$

Лемма 2. Предельные функции $\mathbf{w}, p, \mathbf{W}$ и P удовлетворяют макроскопическому уравнению баланса импульса

$$\begin{aligned} & \rho(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial t^2} + \nabla p - \nabla \cdot (\zeta \mu_0 D(\mathbf{x}, \mathbf{v})) = \\ & = \nabla \cdot (1 - \zeta) (\mu_0 m D(\mathbf{x}, \mathbf{v}) + \lambda_0 (1 - m) D(\mathbf{x}, \mathbf{w})) + \\ & + \nabla \cdot (1 - \zeta) \left(\mu_0 \left\langle D(\mathbf{y}, \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t}) \right\rangle_{Y_f} + \lambda_0 \left\langle D(\mathbf{y}, \mathbf{W}) \right\rangle_{Y_s} \right) \end{aligned} \tag{3.3}$$

в области Q_T , краевому условию (2.3), начальному условию (2.5) и микроскопическому уравнению баланса импульса



$$\begin{aligned} & \nabla \cdot (\mu_0 \chi(\mathbf{y}) D(\mathbf{y}, \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t}) + \lambda_0 (1 - \chi(\mathbf{y})) D(\mathbf{y}, \mathbf{W}) - PI) + \\ & + \nabla \cdot (\mu_0 \chi(\mathbf{y}) D(\mathbf{x}, \mathbf{v}) + \lambda_0 (1 - \chi(\mathbf{y})) D(\mathbf{x}, \mathbf{w})) = 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

в области Y для почти всех (\mathbf{x}, t) .

Доказательство. Осуществив двухмасштабный предельный переход в интегральном тождестве (1.11) с пробными функциями $\varphi = \varphi(\mathbf{x}, t)$, получим

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_T} \left(\rho(\mathbf{x}) \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \nabla \cdot (\varphi p_0) + (pI - \zeta \mu_0 D(\mathbf{x}, \mathbf{v})) : D(\mathbf{x}, \varphi) \right) d\mathbf{x}dt = \\ & = \int_{\Omega_T} (\mu_0 m D(\mathbf{x}, \mathbf{v}) + \lambda_0 (1 - m) D(\mathbf{x}, \mathbf{w})) : D(\mathbf{x}, \varphi) d\mathbf{x}dt + \\ & + \int_{\Omega_T} \left(\mu_0 \left\langle D(\mathbf{y}, \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t}) \right\rangle_{Y_f} + \lambda_0 \left\langle D(\mathbf{y}, \mathbf{W}) \right\rangle_{Y_s} \right) : D(\mathbf{x}, \varphi) d\mathbf{x}dt, \end{aligned} \quad (3.5)$$

что эквивалентно дифференциальному уравнению (3.3) и начальному условию (2.5). Последнее интегральное тождество, записанное в виде

$$\int_{\Omega_T} \left(\rho_f \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} + (pI - \zeta \mu_0 D(\mathbf{x}, \mathbf{v})) : D(\mathbf{x}, \varphi) \right) d\mathbf{x}dt = - \int_{\Omega_T} \nabla \cdot (\varphi p_0) d\mathbf{x}dt$$

для финитных в области Ω_0 функции φ , обеспечивает краевое условие (2.3).

Уравнение (3.4) следует из (1.11) после двухмасштабного предельного перехода с пробными функциями $\varphi = \varepsilon h(\mathbf{x}, t) \varphi_0(\mathbf{x}/\varepsilon)$, где h есть финитная в области Ω функция.

Перейдем теперь к выводу усредненного уравнения баланса импульса (2.2). Чтобы найти тензоры $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2, \mathcal{N}_3(t)$, необходимо решить периодическую задачу (3.2), (3.4) в области Y_T , найти $D(\mathbf{y}, \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t})$ и $D(\mathbf{y}, \mathbf{W})$ как операторы на $D(\mathbf{x}, \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t})$ и $D(\mathbf{x}, \mathbf{w})$ и подставить их выражения в макроскопическое уравнение (3.3).

Перепишем тождество (3.4) в следующем виде

$$\nabla_y \cdot \left(\chi \left(\mu_0 D(\mathbf{y}, \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t}) + Z \right) + \lambda_0 (1 - \chi) D(\mathbf{y}, \mathbf{W}) - PI \right) = 0,$$

где

$$Z(\mathbf{x}, t) = \mu_0 D(\mathbf{x}, \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t}) - \lambda_0 D(\mathbf{x}, \mathbf{w}) = \sum_{i,j=1}^3 Z_{ij}(\mathbf{x}, t) J^{(ij)}.$$

Пусть $\{ \mathbf{W}^{(ij)}(\mathbf{y}, t), P^{(ij)}(\mathbf{y}, t) \}$ и $\{ \mathbf{W}_0^{(ij)}(\mathbf{y}), P_0^{(ij)}(\mathbf{y}) \}$, где $i, j = 1, 2, 3$, есть решения периодических задач

$$\left. \begin{aligned} & \nabla_y \cdot \left(\chi \mu_0 D(\mathbf{y}, \frac{\partial \mathbf{W}^{(ij)}}{\partial t}) + \right. \\ & \left. + \lambda_0 (1 - \chi) D(\mathbf{y}, \mathbf{W}^{(ij)}) - P^{(ij)} I \right) = 0, \\ & \nabla_y \cdot \mathbf{W}^{(ij)} = 0, \\ & \chi(\mathbf{y}) \mathbf{W}^{(ij)}(\mathbf{y}, 0) = \mathbf{W}_0^{(ij)}(\mathbf{y}), \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$



$$\left. \begin{aligned} \nabla_y \cdot (\chi(\mu_0 D(\mathbf{y}, \mathbf{W}_0^{(ij)}) + J^{(ij)} - P_0^{(ij)} I)) &= 0, \\ \nabla_y \cdot \mathbf{W}^{(ij)} &= 0, \\ \int_Y \chi(\mathbf{y}) \mathbf{W}_0^{(ij)}(\mathbf{y}) d\mathbf{y} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

в области Y , тогда

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = \sum_{i,j=1}^3 \int_0^t \mathbf{W}^{(ij)}(\mathbf{y}, t - \tau) Z_{ij}(\mathbf{x}, \tau) d\tau,$$

и

$$\begin{aligned} P(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) &= \chi(\mathbf{y}) \sum_{i,j=1}^3 P_0^{(ij)}(\mathbf{y}) Z_{ij}(\mathbf{x}, t) + \sum_{i,j=1}^3 \int_0^t P^{(ij)}(\mathbf{y}, t - \tau) Z_{ij}(\mathbf{x}, \tau) d\tau, \\ D(\mathbf{y}, \mathbf{W}) &= \mathcal{M}_0(\mathbf{y}) : D(\mathbf{x}, \mathbf{w}) - \int_0^t \mathcal{M}_l(\mathbf{y}, t - \tau) : D(\mathbf{x}, \mathbf{w}(\mathbf{x}, \tau)) d\tau, \end{aligned} \quad (3.8)$$

где

$$\mathcal{M}_0(\mathbf{y}) = \mu_0 \sum_{i,j=1}^3 D(\mathbf{y}, \mathbf{W}_0^{(ij)}(\mathbf{y})) \otimes J^{(ij)}, \quad (3.9)$$

$$\mathcal{M}_l(\mathbf{y}, t) = \sum_{i,j=1}^3 \left(\mu_0 D\left(\mathbf{y}, \frac{\partial \mathbf{W}^{(ij)}(\mathbf{y}, t)}{\partial t}\right) + \lambda_0 D(\mathbf{y}, \mathbf{W}^{(ij)}(\mathbf{y}, t)) \right) \otimes J^{(ij)}. \quad (3.10)$$

Уравнения (3.8) – (3.9) влекут

$$\begin{aligned} D\left(\mathbf{y}, \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t}\right) &= \mathcal{M}_0(\mathbf{y}) : D(\mathbf{x}, \frac{\partial \mathbf{w}(\mathbf{x}, t)}{\partial t}) - \mathcal{M}_l(\mathbf{y}, 0) : D(\mathbf{x}, \mathbf{w}(\mathbf{x}, t)) - \\ &\quad - \int_0^t \frac{\partial \mathcal{M}_l}{\partial t}(\mathbf{y}, t - \tau) : D(\mathbf{x}, \mathbf{w}(\mathbf{x}, t)) d\tau. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{N}_1 &= \mu_0 m \sum_{i,j=1}^3 J^{(ij)} \otimes J^{(ij)} + \mu_0 \langle \mathcal{M}_0 \rangle_{Y_f}, \\ \mathcal{N}_2 &= \lambda_0 (1 - m) \sum_{i,j=1}^3 J^{(ij)} \otimes J^{(ij)} + \lambda_0 \langle \mathcal{M}_0 \rangle_{Y_s} + \mu_0 \langle \mathcal{M}_l(\mathbf{y}, 0) \rangle_{Y_f}, \\ \mathcal{N}_3(t) &= \mu_0 \left\langle \frac{\partial \mathcal{M}_l(\mathbf{y}, t)}{\partial t} \right\rangle_{Y_f} + \lambda_0 \langle \mathcal{M}_l(\mathbf{y}, t) \rangle_{Y_s}. \end{aligned} \right\} \quad (3.11)$$

Лемма 3. Задачи (3.5), (3.6) однозначно разрешимы

Доказательство. Утверждение леммы, а также бесконечная гладкость решения по времени есть следствие оценки

$$\max_{0 < t < T} \int_{Y_f} |D(\mathbf{y}, \mathbf{W}^{(ij)}(\mathbf{y}, t))|^2 d\mathbf{y} + \int_0^t \int_{Y_s} |D(\mathbf{y}, \mathbf{W}^{(ij)}(\mathbf{y}, \tau))|^2 d\mathbf{y} d\tau \leq C_0,$$

которая выводится из энергетических тождеств

$$\frac{1}{2} \int_Y \chi \mu_0 |D(\mathbf{y}, \mathbf{W}^{(ij)}(\mathbf{y}, t))|^2 d\mathbf{y} + \int_0^t \int_{Y_f} (1 - \chi) \lambda_0 |D(\mathbf{y}, \mathbf{W}^{(ij)}(\mathbf{y}, \tau))|^2 d\mathbf{y} d\tau =$$

$$= \frac{1}{2} \int_Y \chi \mu_0 \left| D(\mathbf{y}, \mathbf{W}_0^{(ij)}(\mathbf{y})) \right|^2 d\mathbf{y},$$

$$\int_Y \chi \mu_0 \left| D(\mathbf{y}, \mathbf{W}_0^{(ij)}(\mathbf{y})) \right|^2 d\mathbf{y} + \int_Y \chi D(\mathbf{y}, \mathbf{W}_0^{(ij)}(\mathbf{y})) : J^{(ij)} d\mathbf{y} = 0, \tag{3.12}$$

после умножения первого уравнения в (3.6) на $\mathbf{W}^{(ij)}$ и интегрирования по частям по области $Y \times (0, t)$ а также умножения первого уравнения в (3.7) на $\mathbf{W}_0^{(ij)}$ и интегрирования по частям по Y .

Рассматривая функцию $(1 - \chi(\mathbf{y}))\mathbf{W}^{(ij)}(\mathbf{y}, 0)$ как периодическое решение системы Стокса

$$\nabla_y \cdot (\lambda_0 D(\mathbf{y}, \mathbf{W}^{(ij)}) - P^{(ij)} I) = 0, \quad \nabla_y \cdot \mathbf{W}^{(ij)} = 0$$

в Y_s , совпадающее на границе γ с функцией

$$\chi(\mathbf{y})\mathbf{W}^{(ij)}(\mathbf{y}, 0) \in W_2^1(Y_s),$$

мы получаем (см. [8])

$$\int_{Y_s} \left| D(\mathbf{y}, \mathbf{W}^{(ij)}(\mathbf{y}, 0)) \right|^2 d\mathbf{y} \leq C_0.$$

Повторяя эту процедуру, мы получим требуемое.

Лемма 4. Симметричный тензор \mathcal{S}_γ строго положительно определен.

Доказательство. Пусть $\zeta = (\zeta_{ij})$ и $\eta = (\eta_{ij})$ – произвольные симметричные матрицы и

$$\mathbf{Y}_\zeta = \sum_{i,j=1}^3 \mathbf{W}_0^{(ij)} \zeta_{ij}, \quad \mathbf{Y}_\eta = \sum_{i,j=1}^3 \mathbf{W}_0^{(ij)} \eta_{ij}.$$

По определению

$$(\mathcal{S}_\gamma : \zeta) : \eta = \mu_0 m \zeta : \eta + \mu_0^2 \langle D(\mathbf{y}, \mathbf{Y}_\zeta) \rangle_{Y_f} : \eta.$$

Воспользуемся равенством

$$\int_Y \chi \mu_0 D(\mathbf{y}, \mathbf{W}_0^{(ij)}) : D(\mathbf{y}, \mathbf{W}_0^{(kl)}) d\mathbf{y} + \int_Y \chi D(\mathbf{y}, \mathbf{W}_0^{(kl)}) : J^{(ij)} d\mathbf{y} = 0$$

Для $i, j = 1, 2, 3$, которое является очевидным следствием (3.12) и приводит к соотношению

$$\mu_0 \langle D(\mathbf{y}, \mathbf{Y}_\eta) \rangle_{Y_f} : \zeta + \mu_0^2 \langle D(\mathbf{y}, \mathbf{Y}_\zeta) : D(\mathbf{y}, \mathbf{Y}_\eta) \rangle_{Y_f} = 0. \tag{3.13}$$

Таким образом,

$$(\mathcal{S}_\gamma : \zeta) : \eta = \mu_0 \langle (\mu_0 D(\mathbf{y}, \mathbf{Y}_\zeta) + \zeta) : (\mu_0 D(\mathbf{y}, \mathbf{Y}_\eta) + \eta) \rangle_{Y_f}.$$

Утверждение Леммы следует из последнего соотношения.

Лемма 5. Задача (2.1) – (2.5) имеет единственное решение.

Доказательство. Однозначная разрешимость задачи (2.1) – (2.5) следует из энергетического равенства

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}) |\mathbf{v}(\mathbf{x}, t_0)|^2 d\mathbf{x} + \int_0^{t_0} \int_{\Omega} (\mathcal{S}_\gamma : D(\mathbf{x}, \mathbf{v})) : D(\mathbf{x}, \mathbf{v}) dx dt = \\ & = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} (\mathcal{S}_2 : D(\mathbf{x}, \mathbf{w}(\mathbf{x}, t_0))) : D(\mathbf{x}, \mathbf{w}(\mathbf{x}, t_0)) dx - \\ & - \int_0^{t_0} \int_{\Omega} D(\mathbf{x}, \mathbf{w}(\mathbf{x}, t)) : \left(\int_0^t \mathcal{S}_3(t - \tau) : D(\mathbf{x}, \mathbf{w}(\mathbf{x}, \tau)) d\tau \right) dx dt \end{aligned}$$

Для решения $\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t}$ однородной ($p_0 = 0$) задачи.

Список литературы References

1. Adachi J. I., Detournaray E., Peirce A. P. Analysis of the classical pseudo-3D model for hydraulic fracture with equilibrium height growth across stress barriers// *Int J of Rock Mechanics and Mining Sciences*. – 2010. 47 – P. 625 – 630.
2. Kovalyshen Y., Detounaray E. A. Reexamination of the Classical PKN Model of Hydraulic Fracture// *Transp. Porous Med* – 2010. 81. – P. 317-339.
3. Weiguob L., Yangshenga Z. A mathematical model for solid liquid and mass transfer coupling and numerical simulation for hydraulic fracture in rock salt // *Progress in Natural Science*. – 2005. – 15; 8. – P.742-748.
4. Гарипов Т.Т. Моделирование процесса гидроразрыва пласта в проупругой среде // *Мат. Моделирование*. – 2006. – 18; 6. – С.53-69.
Garipov T. T. process Modeling of hydraulic fracturing in proposal environment // *Abstr. Modeling*. – 2006. – 18; 6. – С.53-69.
5. Burridge R., Keller J.B. Poroelasticity equations derived from microstructure // *Journal of Acoustic Society of America*. – 1981. – 70; 4. – P.1140-1146.
6. Meirmanov A. Derivation of equations of seismic and acoustic wave propagation and equations of filtration via homogenization of periodic structures // *Journal of Mathematical Sciences*. – 2009. – 163; 2 – P.111-172.
7. Nguetseng G. A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization // *SIAM J. Math. Anal.* – 1989. – 20; 3. – P.608-623.
8. Ладыженская О.А., Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости / О.А. Ладыженская. – М.: Наука, 1970.
O. A. Ladyzhenskaya, *Mathematical questions of dynamics of viscous incompressible fluid* / O. A. Ladyzhenskaya. – М.: Science, 1970.



УДК 519.21 + 537.86

О ВИРИАЛЬНОМ РАЗЛОЖЕНИИ УРАВНЕНИЯ СОСТОЯНИЯ ОДНОАТОМНЫХ ГАЗОВ

ABOUT VIRIAL EXPANSION OF MONATOMIC GASES STATE EQUATION

Ю.П. Вирченко, Л.П. Данилова
Yu.P. Virchenko, L.P. Danilova

Белгородский национальный исследовательский университет, Россия, 308015, г. Белгород, ул. Победы, 85

Belgorod National Research University, 85 Pobedy St, Belgorod, 308015, Russia

E-mail: virch@bsu.edu.ru;

Аннотация. В работе, на основе алгебраического метода вычисления производящей функции числа графов с помеченными вершинами, не содержащих вершин сочленения, получена формула вириального разложения давления в равновесной статистической механике одноатомных газов.

Resume. On the basis of the algebraic method of generating function calculation that permits to determine the number of graphs with labeled vertices which do not contain any articulation vertices, the formula of the virial expansion of gas' pressure in the equilibrium statistical mechanics of monatomic gases is found.

Ключевые слова: производящая функция, графики Майера, древесные графы, уравнение состояния, вириальное разложение.

Key words: generating function, Mayer's graphics, tree graphs, state equation, virial expansion.

Введение

Исследование газа одноатомных молекул малой плотности в рамках равновесной статистической механики, в частности, вычисление его уравнения состояния, под которым понимается выражение давления газа как функции от его плотности ρ и температуры T , осуществляется на основе так называемого *вириального разложения* [1]. Это разложение представляет собой разложение давления газа $P = P(\rho, T)$ в степенной ряд по его плотности ρ ,

$$\frac{P}{T} = \sum_{n=1}^{\infty} c^n \rho^n \quad (1)$$

Здесь T - абсолютная температура газа, выраженная в энергетических единицах. Коэффициенты c_n , $n \in \mathbb{N}$ вычисляются на основе последовательности коэффициентов b_n , $n \in \mathbb{N}$, которые определяют следующие *групповые разложения* давления и плотности в степенные ряды по параметру z , который в теории газов называется *активностью*,

$$\frac{P}{T} = \sum_{n=1}^{\infty} z^n b_n(T), \rho = \sum_{n=1}^{\infty} n z^n b_n(T) \quad (2)$$

Последовательности функций $b_n(T)$ от температур при $n \geq 2$ вычисляются явно на основе так называемых *групповых интегралов*



$$b_n = \frac{V^{-1}}{n!} \int_{\Omega^n} \sum_{\Gamma^n} \prod_{\{i,j\} \in \Psi} \left(\frac{e^{-\Phi(q_i - q_j)}}{T} - 1 \right) dq_1 \dots dq_n \quad (3)$$

где $\Phi(q)$ - парный потенциал взаимодействия между молекулами, Ω - ограниченная область в R^3 расположения молекул газа (сосуд), а V - ее объем; суммирование в представленной формуле осуществляется по всем связанным графам $\Gamma_n = \langle I_n, \Psi \rangle$ с помеченными n вершинами (по поводу терминологии теории графов см. [2]), а произведение осуществляется по ребрам каждого такого фиксированного графа. В групповых разложениях (2) функция $b_1 \equiv 1$. Точно также в вириальном разложении (1) коэффициент $c_1 = 1$.

Для вычисления коэффициентов c_n , $n \geq 2$ нужно выразить каждый из них при фиксированном n через групповые функции $b_l(T)$, $l = 1 \div n$. Эту задачу не удается решить в общем виде. Поэтому в литературе для практических расчетов ограничиваются такими выражениями для $n = 1 \div N$ для фиксированного N . После этого решается вторая задача -- вычисляются групповые функции $b_n(T) = 1 \div N$ посредством приближенного вычисления групповых интегралов, указанных в формуле (4). Здесь мы продемонстрируем решение первой задачи, ограничиваясь $N = 5$. С этой целью, введем несколько иные обозначения:

$$b_n(T) \equiv \frac{\beta_n(T)}{n!}, \beta_1 = 1 \quad (4)$$

(В дальнейшем, зависимость $\beta_n(T)$ от температуры как от параметра будем опускать и писать просто β_n .) Тогда разложения (2) и (3) записываются в виде

$$\frac{P}{T} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \beta_n, \rho = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{(n-1)!} \beta_n \quad (5)$$

Введем обозначения α_n , $n \in N$ для коэффициентов разложения активности z в ряд по степеням плотности ρ ,

$$z = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \rho^n, \alpha_1 = 1$$

Тогда в принятом нами приближении, ограничиваясь степенями по ρ вплоть до пятой включительно, имеем

$$z = \rho + \alpha_2 \rho^2 + \alpha_3 \rho^3 + \alpha_4 \rho^4 + \alpha_5 \rho^5, \\ z^2 = \rho^2 + 2\rho(\alpha_2 \rho^2 + \alpha_3 \rho^3 + \alpha_4 \rho^4) + \alpha_2^2 \rho^4 + 2\alpha_2 \alpha_3 \rho^5 \quad (6)$$

$$z^3 = \rho^3 + 3\rho^2(\alpha_2 \rho^2 + \alpha_3 \rho^3) + 3\alpha_2^2 \rho^5, z^4 = \rho^4 + 4\alpha_2 \rho^5, \\ z^5 = \rho^5 \quad (7)$$

Подставим эти разложения в разложение (7), ограничиваясь вплоть до пятой степени по z (так как $z \sim \rho, z \rightarrow 0$),

$$\rho = z + \beta_2 z^2 + \frac{1}{2} \beta_3 z^3 + \frac{1}{6} \beta_4 z^4 + \frac{1}{24} \beta_5 z^5$$

Тогда, приравнивая нулю коэффициенты отдельно при каждой степени $\rho^l, l = 2, 3, 4, 5$, получим

$$\alpha_2 = -\beta_2, \quad \alpha_3 = 2\beta_2^2 - \frac{1}{2}\beta_3, \quad \alpha_4 = -5\beta_2^3 + \frac{5}{2}\beta_2\beta_3 - \frac{1}{6}\beta_4, \\ \alpha_5 = 14\beta_2^4 - \frac{21}{2}\beta_2^2\beta_3 + \beta_2\beta_4 + \frac{3}{4}\beta_3^2 - \frac{1}{24}\beta_5$$

Теперь, подстановкой полученных выражений для α_j через коэффициенты $\beta_j, j = 1 \div 5$ в (6), (7) получается вириальное разложение (1) для уравнение состояния $P(\rho, T)$ с точностью до ρ^5 ,



$$\frac{P}{T} = \rho + c_2 \rho^2 + c_3 \rho^3 + c_4 \rho^4 + c_5 \rho^5 \quad (8)$$

где

$$c_2 = \frac{1}{2} \beta_2, \quad c_3 = \beta_2^2 - \frac{1}{3} \beta_3, \quad c_4 = \frac{3}{2} \beta_2 \beta_3 - \frac{1}{8} \beta_4 - \frac{5}{2} \beta_2^3, \quad (9)$$

$$c_5 = 7\beta_2^4 - 6\beta_2^2 \beta_3 + \frac{2}{3} \beta_2 \beta_4 + \frac{1}{2} \beta_3^2 - \frac{1}{30} \beta_5 \quad (10)$$

Введем последовательность чисел γ_n , $n \in \mathbb{N}$ которые вычисляются по формуле, аналогичной той, согласно которой вычисляются коэффициенты β_n (см. (4), (5)), а именно положим

$$\gamma_n = V^{-1} \int_{\Omega^n} \sum_{\Gamma^n} \prod_{\{i,j\} \in \Psi} \left(\frac{e^{-\Phi(q_i - q_j)}}{T} - 1 \right) dq_1 \dots dq_n$$

где сумма со звездочкой означает, что учитываются вклады только от связных графиков с n помеченными вершинами, которые не содержат вершин сочленения. Тогда, непосредственно перебирая всевозможные склейки связных графиков из графиков без вершин сочленения, находим

$$\beta_3 = \gamma_3 + 3\gamma_2^2, \quad \beta_4 = \gamma_4 + 12\gamma_2\gamma_3 + 16\gamma_2^3 \quad (11)$$

$$\beta_5 = \gamma_5 + 20\gamma_2\gamma_4 + 15\gamma_3^2 + 150\gamma_2^2\gamma_3 + 125\gamma_2^4 \quad (12)$$

Таким образом, подставляя в формулы (9), (10) выражения для коэффициентов β_j , $j = 2, 3, 4, 5$ через числа γ_k , $k = 2, 3, 4, 5$, находим

$$c_2 = -\frac{1}{2} \gamma_2, \quad c_3 = -\frac{1}{3} \gamma_3, \quad c_4 = -\frac{1}{8} \gamma_4, \quad c_5 = -\frac{1}{30} \gamma_5$$

Следовательно, тогда окончательное выражение для P имеет вид

$$P = \rho - \frac{1}{2} \gamma_2 \rho^2 - \frac{1}{3} \gamma_3 \rho^3 - \frac{1}{8} \gamma_4 \rho^4 - \frac{1}{30} \gamma_5 \rho^5$$

В общем случае, применяя рассуждения аналогичные тем, которые были использованы в работе [3], получается следующая формула:

$$\frac{P}{T} = \rho \left[1 - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m \gamma_{m+1}}{m+1} \cdot \frac{\rho^m}{(m-1)!} \right] \quad (13)$$

Список литературы References

1. Майер Дж., Гепперт-Майер М. 1980. Статистическая механика. М.: Мир, 546.
Mayer J.E., Goeppert-Mayer M. 1977. Statistical mechanics. New York: John Wiley & Sons, Inc.
2. Харари Ф., Палмер Э. 1997. Перечисление графов. М.: Мир.
Harary F., Palmer E.M. 1972. Graphical Enumeration. New-York: Academic Press.
3. Вирченко Ю.П., Остапенко Л.П. 2015. Определение числа древесных графов над конечным множеством вершин. Белгородский государственный университет Научные ведомости. Математика и Физика. 11(208); 39: 37-43. Virchenko Yu.P., Ostapenko L.P. 2015. Number evaluation of tree graphs with finite vertices set. Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics & Physics. 11(208); 39: 37-43.

УДК 517.958

О МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ ПОЧВЕННОЙ ВЛАГИ

ON THE MATHEMATICAL MODEL OF MOISTURE MOTION

М.М. Бухурова
M.M. Bukhurova

Институт прикладной математики и автоматизации, Россия, 360000, г. Нальчик, ул. Шортанова, д. 89А

Institute of Applied Mathematics and Automation, 89 A, Shortanov St, Nalchik, 360000, Russia

E-mail: mareta.bukhurova@mail.ru

Аннотация. В данной работе рассматривается нелокальная задача для обобщенного уравнения Аллера, возникающая при математическом моделировании движения почвенной влаги. Зависимость фрактальной структуры почвы от влажности может существенно повлиять на процесс движения влаги в капиллярно-пористой среде.

Resume. In this paper we study a nonlocal boundary value problem for generalized Aller's equation occurring at mathematical modeling of moisture motion. The dependence of the fractal dimension on the soil humidity can significantly affect the process of unsteady moisture motion in the Capillary-porous medium.

Ключевые слова: движение почвенной влаги, фрактальная структура, уравнение Аллера, нелокальная задача, регуляризованный дробный оператор.

Key words: moisture motion, fractal structure, Aller's equation, nonlocal problem, regularized fractional operator.

Введение

Процессы перемещения влаги оказывают существенное влияние на весь ход развития сельскохозяйственных культур. Одним из основных факторов, определяющих урожай является структура почвы, которая оказывает влияние на растения функционально через формирование водного, воздушного, питательного и теплового режимов. Система растение-почва-воздух относится к фрактальным диффузионным системам. На процесс нестационарного движения влаги в почве существенно может повлиять зависимость фрактальной размерности почвы [1].

Пусть: $u = u(x, t)$ - влажность в точке x слоя $0 \leq x \leq r$ пористой почвы толщиной $r > 0$ в момент времени $t \in [0, T]$; $\psi_e = \psi_e(x, t)$ - эффективный, по терминологии Аллера [2], потенциал, связанный с капиллярным потенциалом $\psi = \psi(x, t)$ и влажностью $u(x, t)$ формулой

$$\psi_e = \psi + a_\alpha \partial_{0r}^\alpha u(x, \eta), \tag{1}$$

где $a_\alpha = const > 0$,

$$\partial_{0r}^\alpha q(\eta) = D_{0r}^{\alpha-1} q'(\eta) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\eta \frac{q'(\eta) d\eta}{(t-\eta)^\alpha}$$

- регуляризованный оператор дробного дифференцирования Римана-Лиувилля порядка $\alpha \in]0, 1[$ с началом в точке $t = 0$ и предполагается, что структура почвы имеет фрактальную организацию с потенциалами влаги ψ и ψ_e в тонких и магистральных капиллярах соответственно.

В качестве уравнения движения однокомпонентной жидкости в почве с фрактальной геометрией рассматривается нагруженное уравнение

$$\partial_{0r}^\alpha u(x, \eta) = \frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial \psi_e}{\partial x} \right), \quad 0 < x < r, \quad 0 < t < T, \tag{2}$$

где $K = const > 0$ - коэффициент влагопроводности.

Подставляя в уравнение (2) ψ_e из формулы (1) и принимая во внимание формулу

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{D(u)}{K} \frac{\partial u}{\partial x},$$

получим нагруженное дифференциальное уравнение



$$\partial_{0,t}^\alpha u(x, \eta) = \frac{\partial}{\partial x} \left[D(u) \frac{\partial u}{\partial x} + A_\alpha \partial_{0,t}^\alpha \frac{\partial u(x, \eta)}{\partial x} \right], \quad (3)$$

где $A_\alpha = a_\alpha K$, $D(u) = K \frac{\partial \Psi}{\partial u}$ - коэффициент диффузивности.

Уравнение (3) при $\alpha=1$ переходит в уравнение Аллера и в работе [3] для него методом разделения переменных решена смешанная задача.

Задача расчета нестационарного движения влаги в слое почвы толщины r сводится к проблеме отыскания решения уравнения (3), удовлетворяющее следующим условиям

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^r u(x, t) dx = f(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (4)$$

$$\left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right|_{x=r} = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (5)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq r, \quad (6)$$

где $f(t)$ и $\varphi(x)$ - заданные функции.

Условие (5) характеризует отсутствие перетока влаги из нижнего слоя в глубину, а внутреннекраевое условие (4), по терминологии А.М. Нахушева [4], задает скорость изменения влаго-

содержания (скорость иссушения) $B(t) = \int_0^r u(x, t) dx$ в почвенном слое $0 \leq x \leq r$.

Интегрируя уравнение (3) по x в пределах от 0 до r и меняя слева порядок интегрирования и дробного дифференцирования, получим

$$\partial_{0,t}^\alpha B(\eta) = \left[D(x) \frac{\partial u}{\partial x} + A_\alpha \partial_{0,t}^\alpha \frac{\partial u(x, \eta)}{\partial x} \right] \Big|_{x=0}^{x=r}$$

Отсюда, учитывая (5) можно записать внутреннекраевое условие (4) в виде

$$D(u(0, t)) u_x(0, t) + A_\alpha \partial_{0,t}^\alpha u_x(0, \eta) = -D_{0r}^{\alpha-1} f(\eta).$$

Далее будем предполагать, что $D(u) = \text{const} \geq 0$. Это часто имеет место, если влажность u меняется в небольшом диапазоне. В этом случае уравнение (3) можно записать в виде

$$\partial_{0,t}^\alpha u(x, \eta) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} [Du + A_\alpha \partial_{0,t}^\alpha u(x, \eta)], \quad 0 < x < r, \quad 0 < t < T. \quad (7)$$

Уравнение (7) относится к классу нагруженных уравнений в частных производных дробного порядка, исследованному А.М. Нахушевым в работе [5].

В уравнении (7) совершим переход к новой зависимой переменной $v = v(x, t)$ по формуле

$$\partial_{0,t}^\alpha u(x, \eta) - \lambda u(x, t) = v(x, t), \quad \lambda = -D/A_\alpha. \quad (8)$$

Предполагая $v(x, t)$ известной найдем функцию $u(x, t)$ из уравнения (8), удовлетворяющая начальному условию (6). Тогда решение запишется в виде [6]

$$u(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t [\varphi(x) + D_{0\eta}^{-\alpha} v(x, \xi)] E_{1/\alpha} [\lambda(t-\eta)^\alpha; 1] d\eta, \quad (9)$$

где $E_p[z; \mu] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\mu + k/\rho)}$ - функция типа Миттаг-Леффлера [7].

В силу формулы дифференцирования интеграла с переменным верхним пределом и свойств функции типа Миттаг-Леффлера

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t E_{1/\alpha} [\lambda(t-\eta)^\alpha; 1] d\eta &= \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t E_{1/\alpha} [\lambda \xi^\alpha; 1] d\xi = E_{1/\alpha} [\lambda t^\alpha; 1], \\ \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t E_{1/\alpha} [\lambda(t-\eta)^\alpha; 1] D_{0\eta}^{-\alpha} v(x, \xi) d\eta &= \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{E_{1/\alpha} [\lambda(t-\eta)^\alpha; 1]}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\eta \frac{v(x, \xi) d\xi}{(\eta-\xi)^{1-\alpha}} = \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{v(x, \xi)}{\Gamma(\alpha)} d\xi \int_\xi^t (\eta-\xi)^{\alpha-1} E_{1/\alpha} [\lambda(t-\eta)^\alpha; 1] d\eta = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1+\alpha k)} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t v(x, \xi) d\xi \int_\xi^t (\eta-\xi)^{\alpha-1} (t-\eta)^{\alpha k} d\eta = \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1+\alpha k)} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t v(x, \xi)(t-\xi)^{\alpha+\alpha k} d\xi \int_0^1 \eta_1^{\alpha-1} (1-\eta_1)^{\alpha k} d\eta_1 = \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha+\alpha k)\lambda^k}{\Gamma(\alpha+1+\alpha k)} \int_0^t v(x, \xi)(t-\xi)^{\alpha-1+\alpha k} d\xi = \\
 &= \int_0^t \frac{v(x, \xi)}{(t-\xi)^{1-\alpha}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[\lambda(t-\xi)^\alpha]^k}{\Gamma(\alpha+\alpha k)} d\xi = \int_0^t \frac{v(x, \xi)}{(t-\xi)^{1-\alpha}} E_{1/\alpha}[\lambda(t-\xi)^\alpha; \alpha] d\xi
 \end{aligned}$$

формулу (9) можно переписать в виде

$$u(x, t) = \varphi(x)E_{1/\alpha}[\lambda t^\alpha; 1] + \int_0^t (t-\eta)^{\alpha-1} E_{1/\alpha}[\lambda(t-\eta)^\alpha; \alpha] v(x, \eta) d\eta. \quad (10)$$

Как следует из (10), замена (8) отображает решение $u = u(x, t)$ уравнения (7) с начальным условием (6) в решении $v = v(x, t)$ уравнения

$$A_\alpha \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = v + \lambda \varphi(x) E_{1/\alpha}[\lambda t^\alpha; 1] + \lambda \int_0^t (t-\eta)^{\alpha-1} E_{1/\alpha}[\lambda(t-\eta)^\alpha; \alpha] v(x, \eta) d\eta. \quad (11)$$

Перепишем условия (4) и (5) в терминах функции $v(x, t)$ с помощью замены (8). Тогда

$$\left. \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} \right|_{x=r} = \partial_{0r}^\alpha \left. \frac{\partial u(x, \eta)}{\partial x} \right|_{x=r} - \lambda \left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right|_{x=r} = 0 \quad (12)$$

в силу (5).

Проинтегрируем обе части равенства (7) по x в пределах от 0 до r . В результате с учетом замены (8) и условия (4) будем иметь

$$D_{0r}^{\alpha-1} \frac{\partial}{\partial \eta} \int_0^r u(x, t) dx = D_{0r}^{\alpha-1} f(\eta) = A_\alpha \left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{x=0}^{x=r}$$

или же

$$\left. \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} \right|_{x=r} - \left. \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} \right|_{x=0} = D_{0r}^{\alpha-1} f(\eta) / A_\alpha.$$

Отсюда в силу (12) получаем условие

$$\left. \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} \right|_{x=0} = f_1(t), \quad f_1(t) = D_{0r}^{\alpha-1} f(\eta) / A_\alpha \quad (13)$$

Перепишем уравнение (11) в виде

$$v_{xx} - \mu^2 v = \lambda \mu^2 \varphi(x) E_{1/\alpha}[\lambda t^\alpha; 1] + \lambda \mu^2 F[v; x, t], \quad (14)$$

где $\mu^2 A_\alpha = 1$,

$$F[v; x, t] = \int_0^t (t-\eta)^{\alpha-1} E_{1/\alpha}[\lambda(t-\eta)^\alpha; \alpha] v[x, \eta] d\eta.$$

Уравнение (14) с краевыми условиями (12), (13) эквивалентно интегральному уравнению

$$v(x, t) - \lambda \mu^2 \int_0^r d\xi \int_0^t (t-\eta)^{\alpha-1} E_{1/\alpha}[\lambda(t-\eta)^\alpha; \alpha] G(x, \xi) v(\xi, \eta) d\eta = q(x, t) \quad (15)$$

с правой частью

$$q(x, t) = f_1(t)G(x, 0) + \lambda \mu^2 E_{1/\alpha}[\lambda t^\alpha; 1] \int_0^r \varphi(\xi) G(x, \xi) d\xi,$$

где

$$G(x, \xi) = \frac{1}{\mu(\exp(2\mu r) - 1)} \begin{cases} ch\mu\xi[\exp(\mu x) + \exp(2\mu r - \mu x)], & x\xi < \xi, \\ ch\mu x[\exp(\mu\xi) + \exp(2\mu r - \mu\xi)], & x > \xi, \end{cases}$$

Пусть $R(x, t; \xi, \eta; \lambda \mu^2)$ - резольвента ядра

$$K(x, t; \xi, \eta) = (t-\eta)^{\alpha-1} E_{1/\alpha}[\lambda(t-\eta)^\alpha; \alpha] G(x, \xi)$$



интегрального уравнения (15). Тогда единственное его решение $u(x, t)$ задается формулой

$$u(x, t) = q(x, t) + \lambda \mu^2 \int_0^r d\xi \int_0^t R(x, t; \xi, \eta; \lambda \mu^2) h(\xi, \eta) d\eta. \quad (16)$$

Следовательно, с помощью обратимой замены (8) нелокальная задача (4) - (7) эквивалентно сводится к задаче (12) - (14), решение которой определяется формулой (16).

Список литературы References

1. Федотов Г.Н., Третьяков Ю.Д., Иванов В.К., Куклин А.И., Пахомов Е.И., Исламов А.Х., Початкова Т.Н. 2006. Влияние влажности на фрактальные свойства почвенных коллоидов. М., Доклады РАН, 409 (2): 199-201.
Fedotov G.N., Tretyakov Yu.D., Ivanov V.K., Kuklin A.I., Pakhomov E.I., Islamov A.Kh., Pochatkova T.N. 2006. Vliyanie vlazhnosti na fraktalnie svoystva pochvennih kolloidov [Influence of humidity on the fractal properties of soil colloids]. Moscow, Doklady RAN.
2. Hallaire M. 1964. Leau et la production vegetal. Ins. Nat. rech. agronom.
3. Янгарбер В.А. 1967. О смешанной задаче для модифицированного уравнения влагопереноса. Новосибирск, Журнал прикладной математики и технической физики, (1): 91-96.
Yangarber V.A. 1967. O smeshannoi zadache dlya modifitsirovannogo uravneniya vlagoperenosa [On a mixed problem for the modified equation of moisture transfer]. Novosibirsk, Zhurnal prikladnoi matematiki i tekhnicheskoi fiziki.
4. Нахушев А.М. 2006. Задачи со смещением для уравнений в частных производных. М., Наука.
Nakhushev A.M. 2006. Zadacgi so smesheniem dlya uravneniy v chastnyh proizvodnyh [Problems with shift for partial differential equations]. Moscow, Nauka.
5. Нахушев А.М. 2012. Об одном классе нагруженных уравнений в частных производных дробного порядка. Нальчик, Доклады АМАН. 14 (1): 51-57.
Nakhushev A.M. 2012. Ob odnom klasse nagruzhennyh uravneniy v chastnyh proizvodnyh drobnogo por-yadka [A certain class of loaded equations of fractional order]. Nalchik, Doklady AMAN.
6. Нахушев А.М. 2003. Дробное исчисление и его применение. М., Физматлит.
Nakhushev A.M. 2003. Drobnoe ischislenie i ego primeneniye [Fractional calculus and its application]. Mos-cow, Fizmatlit.
7. Джрбашян М.М. 1966. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М., Наука.
Dzhrbashyan M.M. 1966. Integralnye preobrazovaniya i predctavleniya funktsiy v kompleksnoy oblasti [Integral transforms and representations of functions in the complex domain]. Moscow, Nauka.



УДК 519.21 + 537.86

**ОБЩЕЕ ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ТЕПЛОПЕРЕНОСА
В ТВЕРДОТЕЛЬНОЙ СРЕДЕ**

**GENERAL PHENOMENOLOGICAL EQUATION OF HEAT TRANSFER IN SOLID
MEDIUM**

**Лам Тан Фат, Ю.П. Вирченко
Lam Tan Phat, Yu.P. Virchenko**

²Белгородский национальный исследовательский университет, Россия, 308015, г. Белгород, ул. Победы, 85

Belgorod National Research University, 85PobedySt, Belgorod, 308015, Russia

E-mail: lam_tan_phat1802@yahoo.com; virch@bsu.edu.ru;

Аннотация. На основе термодинамических рассуждений получено уравнение переноса тепла в твердотельной абсолютно упругой среде с учетом взаимного влияния деформаций среды и распределений температуры в ней.

Resume. On basis of thermodynamic construction, the heat transfer equation is obtained in the case of solid medium being absolutely elastic subject with the account of mutual influence of its deformations and the temperature distribution in it.

Ключевые слова: тензор деформаций, распределение температуры, модули упругости, тензор теплопроводности, тензор коэффициентов линейного расширения.

Key words: strain tensor, temperature distribution, elasticity modules, thermal conductivity tensor, tensor of linear expansion coefficients.

В литературе по физике твердого тела, не уделено должного внимания изучению эволюции распределения температуры в твердотельной среде, когда учитывается влияние деформаций, порождаемых его изменением. В настоящем сообщении мы даем вывод общего уравнения теплопереноса в твердотельной, абсолютно упругой, гомогенной среде, которое устраняет этот недостаток. При этом мы не учитываем действия на твердотельную среду каких либо внешних воздействий (механических, электрических и магнитных). Кроме того, мы исключаем из рассмотрения наличие у среды собственной магнитной или электрической упорядоченности. Наш вывод уравнения теплопереноса основан на тех же рассуждениях, которые использованы в известном курсе [3] по теории упругости для получения уравнения переноса тепла в более частном случае. В отличие от рассмотренной физической ситуации, мы получаем эволюционное уравнение в случае, в котором не предполагается малость градиентов температуры в среде.

Запишем первое начало термодинамики для каждой малой пространственной области $\Lambda(\mathbf{x})$ с объемом V в момент времени t , занимаемой средой, которая сосредоточена около точки \mathbf{x} ,

$$dE(\mathbf{x}, t) = \delta Q(\mathbf{x}, t) + \delta A(\mathbf{x}, t), \tag{1}$$

где $dE(\mathbf{x}, t)$ - малое изменение внутренней энергии среды в области $\Lambda(\mathbf{x})$ и, соответственно, $\delta Q(\mathbf{x}, t)$ и $\delta A(\mathbf{x}, t)$ - малое изменение тепла внутри этой области и малая величина работы, проделанная веществом среды, сосредоточенным в ней. Эти малые изменения представляют собой линейные дифференциальные формы относительно изменений значений интенсивных термодинамических параметров, полностью характеризующих состояние среды в $\Lambda(\mathbf{x})$ при сделанных нами предположениях о ее гомогенности и отсутствии в ней какого-либо электромагнитного упорядочения.

Применим второе начало термодинамики к дифференциальному изменению теплоты $\delta Q(\mathbf{x}, t)$ к части среды, содержащейся в области $\Lambda(\mathbf{x})$ (см., например, [3]). Естественно, что это возможно только при реализации таких физических условий, при которых процессы теплопереноса в среде являются достаточно медленными. Тогда $\delta Q(\mathbf{x}, t) = VT(\mathbf{x}, t)dS(\mathbf{x}, t)$, где $dS(\mathbf{x}, t)$ - дифференциал плотности энтропии вещества, сосредоточенного в $\Lambda(\mathbf{x})$.



Так как дифференциальная форма $\delta Q = VTdS$ не является точной, то дифференциальная форма $\delta A \neq 0$, если $T \neq const$. Выражение для дифференциального изменения работы $\delta A(\mathbf{x}, t)$ запишем в виде

$$\delta A(\mathbf{x}, t) = V \Sigma_{ij}(\mathbf{x}, t) du_{ij}(\mathbf{x}, t), \quad (2)$$

где учитывается изменение формы и объема области $\Lambda(\mathbf{x})$ при изменении ее температуры. При этом мы выбираем знак «плюс», в отличие выражения, использованного в [3], в силу принятого нами знака перед δA в формуле (1). Здесь $\Sigma_{ij}(\mathbf{x}, t)$ -- тензор механических напряжений в среде и $u_{ij}(\mathbf{x}, t)$ -- тензор деформаций среды в пространственно-временной точке $\langle \mathbf{x}, t \rangle$.

Ввиду предположения об абсолютной упругости, отсутствуют необратимые деформации области $\Lambda(\mathbf{x})$ при малом изменении dt времени. Полагая что эти деформации очень малы, можно ограничиться только лишь линейной связью между деформациями и механическими напряжениями. Запишем эту связь в виде

$$\Sigma_{ij} = \beta_{ij}(T) + C_{ijkl}(T)u_{kl}. \quad (3)$$

Первое слагаемое, независящее от деформаций, описывает напряжения, которые возникают вследствие теплового расширения. Второе слагаемое представляет собой запись закона Гука в наиболее общей форме. При этом тензор четвертого ранга $C_{ijkl}(T)$ модулей упругости, обладающий специальными свойствами симметрии по совокупности своих индексов (см. [3]), зависит от температуры $T = T(\mathbf{x}, t)$ в области $\Lambda(\mathbf{x})$. В частном случае, в предположении об изотропии среды и напряжений в ней $\Sigma_{ij}(\mathbf{x}, t) = -P(\mathbf{x}, t)\delta_{ij}$, $\delta A(\mathbf{x}, t) = VP(\mathbf{x}, t)du_{ii}(\mathbf{x}, t)$. Здесь $P(\mathbf{x}, t)$ -- давление внутри области $\Lambda(\mathbf{x})$ в момент времени t , причем знак в этой формуле выбран таким образом, что $P > 0$, если давление направлено внутрь области.

Покажем, что коэффициент $\beta_{ij}(T)$ определяется формулой

$$\beta_{ij}(T) = - \int_{T_0}^T \alpha_{ij}(T') dT', \quad (4)$$

где симметричный тензор второго ранга $\alpha_{ij}(T)$, с точностью до постоянного множителя, представляет собой тензор коэффициентов теплового расширения. Здесь температура T_0 представляет собой среднюю температуру среды, которая реализуется при наличии в ней полного теплового равновесия.

Воспользуемся стандартными термодинамическими соотношениями,

$$E = F + TSV, \quad S = -V^{-1} \frac{\partial F}{\partial T}, \quad (5)$$

где F -- свободная энергия области $\Lambda(\mathbf{x})$ среды и S -- плотность энтропии. Тогда, на основании (1), имеем

$$\begin{aligned} \delta A &= dF + V S dT = \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_{u_{ij}} dT + \left(\frac{\partial F}{\partial u_{ij}} \right)_T du_{ij} + V S dT, \\ \delta A &= \left(\frac{\partial F}{\partial u_{ij}} \right)_T du_{ij}. \end{aligned} \quad (6)$$

Запишем теперь выражение для свободной энергии с точностью до квадратичных членов разложения по компонентам тензора деформаций

$$F(T, u_{kl}) = F_0(T) - V u_{ij} \int_{T_0}^T \alpha_{ij}(T') dT' + \frac{V}{2} C_{ijkl}(T) u_{ij} u_{kl} \quad (7)$$

и, следовательно, имеем

$$\left(\frac{\partial F}{\partial u_{ij}} \right)_T = -V \int_{T_0}^T \alpha_{ij}(T') dT' + V C_{ijkl}(T) u_{kl}. \quad (8)$$

Кроме того, на основании второго соотношения в (5), из (7) следует

$$S(T, u_{kl}) = S_0(T) + \alpha_{ij}(T) u_{ij} - \frac{1}{2} u_{ij} u_{kl} \frac{\partial}{\partial T} C_{ijkl}(T), \quad (9)$$



где $S_0 = -V^{-1} \partial F_0 / \partial T$, и поэтому коэффициент $\alpha_{ij}(T)$ представляет собой тензор коэффициентов линейного расширения. Отсюда видно, что, в рамках линейной теории упругости, он не зависит от компонент тензора деформаций.

Таким образом, из (6) и (8) следует, что дифференциальное изменение работы $\delta A(\mathbf{x}, t)$, в общем случае записывается в виде

$$\delta A(\mathbf{x}, t) = V \left(- \int_{T_0}^T \alpha_{ij}(T') dT' + C_{ijkl}(T) u_{kl}(\mathbf{x}, t) \right) du_{ij}(\mathbf{x}, t). \quad (10)$$

Сравнивая эту формулу с (2), получаем формулу (4).

Наконец, рассмотрим изменение внутренней энергии в области $\Lambda(\mathbf{x})$ при малом изменении времени dt . Согласно закону сохранения энергии,

$$\frac{\partial E(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \int_{\partial \Lambda(\mathbf{x})} (\mathbf{S}(\mathbf{y}, t), d\Lambda(\mathbf{y}, t)) = 0,$$

получаем

$$\frac{\partial E(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = - \int_{\Lambda(\mathbf{x})} (\nabla, \mathbf{S}(\mathbf{y}, t)) d\mathbf{y} = -V (\nabla, \mathbf{S}(\mathbf{x}, t)). \quad (11)$$

где интегрирование в первом интеграле производится по замкнутой поверхности -- границе области $\Lambda(\mathbf{x})$ с выбором ориентации элемента поверхности $d\Lambda(\mathbf{y}, t)$ в направлении из $\Lambda(\mathbf{x})$, $\mathbf{S}(\mathbf{x}, t)$ -- вектор плотности потока внутренней энергии в пространственно-временной точке $\langle \mathbf{x}, t \rangle$.

Подставим в (1) выражения для теплоты $\delta Q(\mathbf{x}, t)$, выделяемой в области $\Lambda(\mathbf{x})$ и для малой работы $\delta A(\mathbf{x}, t)$, произведенной веществом, которое содержится в ней, при малых деформациях, которые вызваны изменением распределения температуры. Поделив на объем V области, запишем первое начало термодинамики в следующей форме:

$$T \frac{\partial S(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = -(\nabla, \mathbf{S}(\mathbf{x}, t)) + \left(\int_{T_0}^T \alpha_{ij}(T') dT' - C_{ijkl}(T) u_{kl}(\mathbf{x}, t) \right) \frac{\partial u_{ij}(\mathbf{x}, t)}{\partial t}. \quad (12)$$

В предлагаемом подходе к описанию эволюции распределения температуры в среде мы столкнулись с необходимостью описания ее локального термодинамического состояния в окрестности точки \mathbf{x} не только на основе значения температуры в этой точке, но и, дополнительно на основе значений тензора деформаций $u_{ij}(\mathbf{x}, t)$ в этой точке. Тогда дифференциал плотности энтропии в каждой пространственно-временной точке дается следующей формулой

$$dS = \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_{u_{ij}} dT + \left(\frac{\partial S}{\partial u_{ij}} \right)_T du_{ij}. \quad (13)$$

Здесь частные производные, по определению (см. [3]), представляют собой

$$\left(\frac{\partial S}{\partial u_{ij}} \right)_T = \alpha_{ij}(T), \quad \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_{u_{ij}} = \frac{1}{T} c_v(T, u_{kl}), \quad (14)$$

где $c_v(T, u_{kl})$ -- теплоемкость среды при постоянном объеме, которая в общем случае является функцией температуры и деформаций среды. Зависимость теплоемкости от компонент тензора деформаций возникает вследствие зависимости тензора α_{ij} от температуры, в силу их определения (14), так как они определяют перекрестные вторые производные от энтропии по независимым интенсивным термодинамическим характеристикам среды

$$\frac{\partial^2 S}{\partial T \partial u_{ij}} = \frac{\partial}{\partial T} \alpha_{ij}(T) = \frac{1}{T} \frac{\partial}{\partial u_{ij}} c_v(T, u_{kl}).$$

Наличие же зависимости тензора $\alpha_{ij}(T)$ от температуры T , при изменении ее в широком диапазоне, является экспериментальным фактом.

Формулы (13), (14) позволяют написать выражение для временной производной от энтропии,

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{1}{T} c_v(T, u_{kl}) \frac{\partial T}{\partial t} + \alpha_{ij}(T) \frac{\partial u_{ij}}{\partial t}. \quad (15)$$

Из (12) и (15), производя очевидное преобразование

$$\int_{T_0}^T \alpha_{ij}(T') dT' - T \alpha_{ij}(T) = -T_0 \alpha_{ij}(T_0) - \int_{T_0}^T T' \left(\frac{d}{dT'} \alpha_{ij}(T') \right) dT',$$

получаем искомое уравнение теплопереноса с учетом деформаций среды,



$$c_v(T, u_{kl}) \frac{\partial T}{\partial t} = -(\nabla, \mathbf{S}(\mathbf{x}, t)) - (T_0 \alpha_{ij}(T_0) + \int_{T_0}^T T' \left(\frac{d}{dT'} \alpha_{ij}(T') \right) dT' + C_{ijkl}(T) u_{kl}(\mathbf{x}, t)) \frac{\partial u_{ij}(\mathbf{x}, t)}{\partial t}. \quad (16)$$

Заметим, что это эволюционное уравнение относительно распределения температуры $T(\mathbf{x}, t)$ не является уравнением дивергентного типа, так как тепловая энергия в среде не сохраняется.

Для описания временной эволюции среды уравнение теплопереноса в форме (12) должно быть дополнено уравнением, описывающим изменение поля смещений среды в окрестности каждой из пространственных точек.

Рассмотрим плотность потока $\mathbf{S}(\mathbf{x}, t)$ энергии в правой части уравнения. Стандартный подход в теории теплопереноса, основан на предположении о малости градиентов распределения температуры $T(\mathbf{x}, t)$. Это позволяет разложить плотность потока $\mathbf{S}(\mathbf{x}, t)$, зависящую локальным образом от $T(\mathbf{x}, t)$, по степеням этих градиентов и ограничиться только градиентами первого порядка

$$(\nabla, \mathbf{S}(\mathbf{x}, t)) = -(\chi_{ij}(T) \nabla_j T)(\mathbf{x}, t). \quad (19)$$

При этом если не производить учета радиационного теплообмена, то $\chi_{ij}(T)$ представляет собой тензор коэффициентов теплопроводности, а уравнение (18) является *уравнением теплопроводности*. Знак минус указывает на то, что при выборе направления векторного поля $\mathbf{S}(\mathbf{x}, t)$ в сторону спада градиента, симметричный тензор $\chi_{ij}(T)$ теплопроводности положительно определен.

Список литературы References

1. Зигель Р., Хауэлл Дж. 1975. Теплообмен излучением. М.: Мир: 934.
Siegel R., Howell J. 1975. Heat transfer by radiation. Moscow: Mir: 934.
2. Рубцов Н.А., 1984. Теплообмен излучением в сплошных средах. Новосибирск: Наука, Сибирское отделение, 278.
Rubtsov N.A., 1984. Heat conduction by irradiation in complex media. Novosibirsk: Nauka, Siberian department, 278.
3. Landau L.D., Lifshitz E.M. 1981. Theory of elasticity. V.7 of Course of Theoretical Physics. Institute of physical problems, USSR Academy of Sciences: 172.
4. Маслов В.П., Данилов В.Г., Волосов К.А. 1987. Математическое моделирование процессов тепло-массопереноса. М.: Наука: 352.
Maslov V. P., Danilov V. G., Volosov K. A. 1987. Mathematical modeling of processes of heat and mass transfer. Moscow: Nauka: 352.



СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

- Блажевич С.В.** – доктор физико-математических наук, профессор кафедры информатики, естественнонаучных дисциплин и методик преподавания Белгородского государственного национального исследовательского университета.
г. Белгород
- Богатов Е.М.** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики Старооскольского технологического института им. А.А. Угарова.
г. Старый Оскол
- Бондарев А.С.** – магистр математики, кафедра функционального анализа и операторных уравнений Воронежского государственного университета.
г. Воронеж
- Бухурова М.М.** – ведущий научный сотрудник отдела систем автоматизированного проектирования смешанных систем и управления Института прикладной математики и автоматизации.
г. Нальчик
- Вирченко Ю.П.** – доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической и математической физики Белгородского государственного национального исследовательского университета.
г. Белгород
- Галаев С.В.** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры геометрии Саратовского национального исследовательского государственного университета имени Н.Г. Чернышевского.
г. Саратов
- Далакян Р.В.** – доктор физико-математических наук, доцент, Национальный Политехнический Университет Армении.
г. Ереван
- Данилова Л.П.** – аспирант кафедры теоретической и математической физики Белгородского государственного национального исследовательского университета.
г. Белгород
- Еремин И.Е.** – доктор технических наук, профессор кафедры информационных и управляющих систем факультета математики и информатики Амурского государственного университета.
г. Благовещенск
- Ефимцева Д.Н.** – студент кафедры информатики, естественнонаучных дисциплин и методик преподавания Белгородского государственного национального исследовательского университета.
г. Белгород
- Закарян В.С.** – доктор физико-математических наук, декан факультета прикладной математики и физики Национального Политехнического университета Армении.
г. Ереван
- Каган Д.З.** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики Московского государственного университета путей сообщения Императора Николая II (МИИТ).
г. Москва
- Кукушкин М.В.** – кандидат физико-математических наук, младший научный сотрудник Института прикладной математики и автоматизации
г. Москва
- Кучеев С.И.** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры общей и прикладной физики Белгородского государственного национального исследовательского университета.
г. Белгород
- Лам Тан Фат** – аспирант кафедры теоретической и математической физики Белгородского государственного национального исследовательского университета.
г. Белгород
- Лосанова Ф.М.** – научный сотрудник отдела Уравнения смешанного типа Института прикладной математики и автоматизации.
г. Нальчик
- Люшина К.С.** – магистрант кафедры теоретической и математической физики Белгородского государственного национального исследовательского университета.
г. Белгород



- Малютин К.Г.** – доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики ЮЗГУ.
г. Курск
- Маслакова Л.Ф.** – старший преподаватель кафедры общей математики Белгородского государственного национального исследовательского университета.
г. Белгород
- Некрасова И.В.** – кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры общей математики Белгородского государственного национального исследовательского университета.
г. Белгород
- Носков А.В.** – доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой теоретической и математической физики Белгородского государственного национального исследовательского университета.
г. Белгород
- Подолько Е.А.** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики Дальневосточного государственного аграрного университета.
г. Благовещенск
- Полунина А.В.** – магистрант кафедры теоретической и математической физики Белгородского государственного национального исследовательского университета.
г. Белгород
- Попов И.П.** – старший преподаватель кафедры общей физики Курганского государственного университета.
г. Курган
- Рацев С.М.** – доктор физико-математических наук, профессор кафедры информационной безопасности и теории управления Ульяновского государственного университета.
г. Ульяновск
- Рустамова Л.Р.** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики и ИВТ Ингушского государственного университета.
г. Назрань
- Рустанов А.Р.** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической и специальной социологии Московского педагогического государственного университета.
г. Москва
- Студеникина Л.И.** – кандидат педагогических наук, доцент кафедры высшей математики ЮЗГУ.
г. Курск
- Череватенко О.И.** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики Ульяновского государственного педагогического университета им. И.Н.Ульянова.
г. Ульяновск
- Чурсанова А.С.** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры информационных технологий Харьковского института банковского дела.
г. Харьков
- Шабанова Г.И.** – старший преподаватель кафедры Высшей математики Сибирской государственной автомобильно-дорожной академии.
г. Омск
- Шевчук О.Ю.** – магистрант кафедры теоретической и математической физики Белгородского государственного национального исследовательского университета.
г. Белгород
- Эфендиев Б.И.** – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник отдела Дробного исчисления Института прикладной математики и автоматизации.
г. Нальчик