



Прикладная математика & Физика

2020. Том 52, № 2

Основан в 1995 г. Журнал включен в Перечень ВАК рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней кандидата и доктора наук (01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ, 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление, 01.04.07 – физика конденсированного состояния). Ранее журнал издавался под названием «Научные ведомости Белгородского государственного университета. Математика. Физика».

УЧРЕДИТЕЛЬ:

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Белгородский государственный национальный исследовательский университет».

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:

Главный редактор: В. Б. Васильев, доктор физико-математических наук, НИУ «БелГУ»;
Заместители главного редактора: С. М. Ситник, доктор физико-математических наук, НИУ «БелГУ», Математика; А. В. Носков, доктор физико-математических наук, НИУ «БелГУ», Физика. Математическое моделирование;
Ответственный секретарь: О. В. Чернова, кандидат физико-математических наук, НИУ «БелГУ».

ЧЛЕНЫ РЕДАКЦИОННОЙ КОЛЛЕГИИ:

Ю. А. Алхутов, д-р физ.-мат. наук, Владимир, Россия;
А. Ашыралыев, д-р физ.-мат. наук, Алматы, Казахстан;
С. В. Блажевич, д-р физ.-мат. наук, Белгород, Россия;
А. Н. Беляков, д-р физ.-мат. наук, Белгород, Россия;
А. Г. Брусенцев, д-р физ.-мат. наук, Белгород, Россия;
Ю. П. Вирченко, д-р физ.-мат. наук, Белгород, Россия;
А. В. Глушак, д-р физ.-мат. наук, Белгород, Россия;
С. Б. Дабагов, д-р физ.-мат. наук, Москва, Россия;
А. Н. Куликов, д-р физ.-мат. наук, Ярославль, Россия;
Д. М. Левин, д-р физ.-мат. наук, Тула, Россия;
И. С. Ломов, д-р физ.-мат. наук, Москва, Россия;
В. В. Меньших, д-р физ.-мат. наук, Воронеж, Россия;
А. И. Назаров, д-р физ.-мат. наук, Санкт-Петербург, Россия;
Е. Ю. Панов, д-р физ.-мат. наук, Великий Новгород, Россия;
О. М. Пенкин, д-р физ.-мат. наук, Алматы, Казахстан;
И. П. Половинкин, д-р физ.-мат. наук, Воронеж, Россия;
Е. В. Радкевич, д-р физ.-мат. наук, Москва, Россия;
А. П. Солдатов, д-р физ.-мат. наук, Москва, Россия;
В. Е. Федоров, д-р физ.-мат. наук, Челябинск, Россия;
М. В. Шитикова, д-р физ.-мат. наук, Воронеж, Россия;
А. А. Шибков, д-р физ.-мат. наук, Тамбов, Россия.

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор). Выходит 4 раза в год.

Выпускающий редактор: Л. П. Котенко	Гарнитура Times.
Корректурa: Ю. В. Ивахненко	Дата выхода 30.06.2020.
Компьютерная верстка: О. В. Чернова	Оригинал-макет подготовлен отделом
Оригинал-макет: В. Б. Васильев	объединенной редакции научных журналов НИУ «БелГУ»
E-mail: vasilyev_v@bsu.edu.ru	308015, г. Белгород, ул. Победы, 85.

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

Tran Quang Vuong Linear Conjugation Problems	55
Ю. П. Вирченко, Е. Ю. Московченко Уравнения Кирквуда-Зальцбурга для решетчатых классических моделей статистической механики	62
А. Г. Баскаков, И. А. Криштал, Н. Б. Ускова Метод подобных операторов в спектральном анализе операторных бесконечных матриц	71
Н. В. Королев, А. А. Ларин Об одной спектральной задаче в плоском угле для сингулярного эллиптического дифференциального оператора второго порядка	86
И. В. Рахмелевич Многомерное неавтономное уравнение второго порядка со степенными нелинейностями	93
Е. М. Богатов Об истории положительных операторов (1900-е – 1960-е гг.) и вкладе М. А. Красносельского	105
М. Х. Бештоков Краевые задачи для обобщенного модифицированного уравнения влагопереноса и разностные методы их численной реализации	128
S. A. Aldashev The criterion for the unique solvability of the Dirichlet and Poincare spectral problems for the multidimensional Euler – Darboux – Poisson equation	139
С. С. Ахтамова, В. Ю. Гришунов, А. П. Ляпин, С. А. Тихомиров О сечениях производящих рядов в задачах о решетчатых путях	146

ФИЗИКА. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

И. Е. Внуков, И. С. Волков, Ю. А. Гопонов, М. А. Сиднин, Р. А. Шатохин О влиянии асимметрии отражения на когерентное излучение релятивистских электронов в кристаллах	152
---	------------



Applied Mathematics & Physics

2020. Volume 52, № 2

Founded in 1995. The journal is included into the List of Higher Attestation Commission of peer-reviewed scientific publications where the main scientific results of dissertations for obtaining scientific degrees of a candidate and doctor of science should be published (01.01.01 – material, complex and functional analysis, 01.01.02 – differential equations, dynamical systems and optimal control, 01.04.07 – condensed matter physics). Previously, the magazine was published under the title «Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics. Physics».

FOUNDER:

Federal state autonomous educational establishment of higher education
«Belgorod National Research University».

EDITORIAL BOARD:

Chief Editor: V. B. Vasilyev, Dr.Sc., Ph.D., Belgorod National Research University;
Deputy Editor-in-Chief: S. M. Sitnik, Dr.Sc., Ph.D., Belgorod National Research University, Mathematics;
A. V. Noskov, Dr.Sc., Ph.D., Belgorod National Research University, Physics. Mathematical modeling;
Executive Secretary: O. V. Chernova, PhD, Belgorod National Research University.

EDITORIAL BOARD MEMBERS:

Yu. A. Alkhutov, Dr.Sc., Ph.D., Vladimir, Russia;
A. Ashyralyev, Dr.Sc., Ph.D., Almaty, Kazakhstan;
S. V. Blazhevich, Dr.Sc., Ph.D., Belgorod, Russia;
A. N. Belyakov, Dr.Sc., Ph.D., Belgorod, Russia;
A. G. Brusentsev, Dr.Sc., Ph.D., Belgorod, Russia;
Yu. P. Virchenko, Dr.Sc., Ph.D., Belgorod, Russia;
A. V. Glushak, Dr.Sc., Ph.D., Belgorod, Russia;
S. B. Dabagov, Dr.Sc., Ph.D., Moscow, Russia;
A. N. Kulikov, Dr.Sc., Ph.D., Yaroslavl, Russia;
D. M. Levin, Dr.Sc., Ph.D., Tula, Russia;
I. S. Lomov, Dr.Sc., Ph.D., Moscow, Russia;
V. V. Menshih, Dr.Sc., Ph.D., Voronezh, Russia;
A. I. Nazarov, Dr.Sc., Ph.D., St. Petersburg, Russia;
E. Yu. Panov, Dr.Sc., Ph.D., Velikiy Novgorod, Russia;
O. M. Penkin, Dr.Sc., Ph.D., Almaty, Kazakhstan;
I. P. Polovinkin, Dr.Sc., Ph.D., Voronezh, Russia;
E. V. Radkevich, Dr.Sc., Ph.D., Moscow, Russia;
A. P. Soldatov, Dr.Sc., Ph.D., Moscow, Russia;
V. E. Fedorov, Dr.Sc., Ph.D., Chelyabinsk, Russia;
M. V. Shitikova, Dr.Sc., Ph.D., Voronezh, Russia;
A. A. Shibkov, Dr.Sc., Ph.D., Tambov, Russia.

The journal has been registered at the Federal service for supervision of communications information technology and mass media (Roskomnadzor). Publication frequency: 4 /year.

Commissioning Editor L. P. Kotenko
Proofreading Yu. V. Ivakhnenko
Computer imposition O. V. Chernova
Dummy layout by V. B. Vasilyev
E-mail: vasilyev_v@bsu.edu.ru

Typeface Times.
Date of publishing 30.06.2020.
The layout is presented by Department of the united
Editorial Board of Scientific Journals Belgorod
National Research University
Address: 85 Pobeda St., Belgorod, 308015, Russia

CONTENTS

MATHEMATICS

Tran Quang Vuong Linear Conjugation Problems	55
Yu. P. Virchenko, E. Yu. Moskovchenko Kirkwood – Salzburg’s equations for lattice classical models of statistical mechanics	62
A. G. Baskakov, I. A. Krishtal, N. B. Uskova The method of similar operators in the spectral analysis of infinite operator matrices	71
N. V. Korolev, A. A. Larin On a spectral problem in the plane angle for second order singular differential	86
I. V. Rakhmelevich Multi-dimensional non-autonomous second order equation with power nonlinearities	93
E. M. Bogatov On the history of the positive operators (1900s – 1960s) and the contribution of M. A. Krasnosel’skii	105
M. KH. Beshtokov Boundary value problems for the generalized modified moisture transfer equation and difference methods for their numerical implementation	128
S. A. Aldashev The criterion for the unique solvability of the Dirichlet and Poincare spectral problems for the multidimensional Euler – Darboux – Poisson equation	139
S. S. Akhtamova, V. Yu. Grishunov, A. P. Lyapin, S. A. Tikhomirov On sections of generating series in lattice path problems	146

PHYSICS. MATHEMATICAL MODELING

I. E. Vnukov, I. S. Volkov, Yu. A. Goponov, M. A. Sidnin, R. A. Shatokhin Influence of reflection asymmetry on coherent emission of relativistic electrons in crystal	152
---	------------

МАТЕМАТИКА

УДК 517.952

DOI 10.18413/2687-0959-2020-52-2-55-61

LINEAR CONJUGATION PROBLEMS

Tran Quang Vuong

(Article submitted by a member of the editorial board A. P. Soldatov)

Faculty of Mathematics, Dalat university,
Dalat city, Lamdong province, Vietnam

E-mail: vuongtq@dlu.edu.vn

Received March 5, 2020

Abstract. We investigate the linear conjugation problem for polyanalytic functions using function theory and Cauchy-type integrals. We explicitly construct a canonical matrix-function by using the recurrence procedure and use it to study the linear conjugation problem. We found a solutions of the linear conjugation problem and given a formula for its index by using Cauchy type integrals. We got a representation of the solution of the linear conjugation problem through the canonical matrix-function, which is constructed explicitly.

Key words: Linear Conjugation Problems, the Goursat Formula, Cauchy Singular Integral, Functions of Canonic Matrices, Singular Integral Equations.

For citation: Tran Quang Vuong. 2020. Linear Conjugation Problem. Applied Mathematics & Physics, 52(2): 55–61. DOI 10.18413/2687-0959-2020-52-2-55-61.

ЗАДАЧА ЛИНЕЙНОГО СОПРЯЖЕНИЯ

Чан Куанг Вьонг

(Статья представлена членом редакционной коллегии А. П. Солдатовым)

Далатский университет,
г. Далат, провинция Ламдонг, Вьетнам,

E-mail: virch@bsu.edu.ru

Получена 5 марта 2020

Аннотация. Опираясь на теорию функций и интегралы типа Коши в работе рассматривается задача линейного сопряжения для полианалитических функций. Применяя процедуру рекуррентности, строится каноническая матричная функция, которая используется для изучения задачи линейного сопряжения. Мы нашли решение задачи о линейном сопряжении и дали формулу для ее индекса с помощью интегралов типа Коши. Получено представление решения задачи линейного сопряжения через каноническую матрицу-функцию, которая построена явно.

Ключевые слова: Задачи линейного сопряжения, формула Гурса, сингулярный интеграл Коши, канонические матрицы-функции, сингулярные интегральные уравнения.

Для цитирования: Чан Куанг Вьонг. 2020. Задача линейного сопряжения. Прикладная математика & Физика, 52(2): 55–61. DOI 10.18413/2687-0959-2020-52-2-55-61.

1. The Goursat Formula. Let D be a subset of \mathbb{C} , and u be a C^n function on D , $u(z) = u(x, y)$ in a complex variable $z = x + iy$. This function is called poly-analytic if it is a solution of the equation

$$\frac{\partial^n u}{\partial \bar{z}^n} = 0, \quad (1.1)$$

where

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

To emphasize on the dependency of n , these functions are also called n analytic (bi-analytic when $n = 2$). It is clear that when $n = 1$ the equation (1.1) is the Cauchy-Riemann condition and its solutions are analytic functions.

It is well known that any n - analytic function u is represented in the form

$$u(z) = \phi_1(z) + \bar{z}\phi_2(z) + \frac{\bar{z}^2}{2!}\phi_3(z) + \dots + \frac{\bar{z}^{n-1}}{(n-1)!}\phi_n(z), \tag{1.2}$$

where $\phi_j(z)$ are analytic functions on D . When $n=2$ the formula takes the name Goursat, that we conserve also in the general case for any n . In particular, from this formula, it follows that the analytic functions are infinitely differentiable in D .

In (1.2) it is easy to put an induction on n , if it is used on the relation

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}[\bar{z}^k \phi(z)] = k\bar{z}^{k-1}\phi(z), \tag{1.3}$$

for any natural k and analytical function ϕ . In fact, the Goursat formula is true for $(n-1)$ analytic functions and function $u \in C^n(D)$ satisfying the equation (1.1). So

$$\frac{\partial^{n-1}u}{\partial \bar{z}^{n-1}} = \phi_n(z),$$

where $\phi_n(z)$ is an analytic function, and from (1.3)

$$\frac{\partial^{n-1}}{\partial \bar{z}^{n-1}} \left[u(z) - \frac{\bar{z}^{n-1}}{(n-1)!}\phi_n(z) \right] = 0.$$

According to the induction, hence the validity of the formula (1.2) holds for all n .

From (1.3) and (1.2), we have

$$\frac{\partial^{j-1}u}{\partial \bar{z}^{j-1}} = \phi_j(z) + \bar{z}\phi_{j+1}(z) + \dots + \frac{\bar{z}^{n-j}}{(n-j)!}\phi_n(z), 1 \leq j \leq n. \tag{1.4}$$

Put

$$\begin{aligned} U &= (U_1, \dots, U_n), \quad U_j = \partial^{j-1}u/\partial \bar{z}^{j-1}, \\ \phi &= (\phi_1, \dots, \phi_n), \quad P = (P_{ij})_1^n, \end{aligned} \tag{1.5}$$

where $P(z)$ is a upper triangle matrix determined by

$$P_{ij}(z) = \frac{\bar{z}^{j-i}}{(j-i)!}, \quad j \geq i.$$

So the relationship (1.4) can be written in the matrix form

$$U = P\phi. \tag{1.6}$$

It is easy to check that the determinant of P is equal to 1. Therefore, relation (1.6) can be transformed to $\phi = P^{-1}U$. In other words, in Goursat formula (1.2), the set of analytic functions ϕ_j in the same way it is determined by n -analytic function u .

For the upper triangle elements of the inverse matrix P^{-1} , we have the following expression

$$(P^{-1})_{ij}(z) = \frac{(-1)^{j-i}\bar{z}^{j-i}}{(j-i)!}, \quad j \geq i. \tag{1.7}$$

In fact, let Δ be the matrix with elements

$$\Delta_{ij} = \begin{cases} 1, & j - i = 1, \\ 0, & j - i \neq 1. \end{cases}$$

Then, we have the identical expression

$$(\Delta^k)_{ij} = \begin{cases} 1, & j - i = k, \\ 0, & j - i \neq k, \end{cases} \quad 0 \leq k \leq n - 1,$$

clearly, $\Delta^n = 0$. From this notation, we can write

$$P(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\bar{z}^k}{k!} \Delta^k.$$

So, this sum coincides with the series in all $k \geq 0$, $P(z) = \exp(\bar{z}\Delta)$. Therefore,

$$P^{-1}(z) = \exp(-\bar{z}\Delta) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\bar{z}^k}{k!} (-1)^k \Delta^k,$$

this coincides with (1.7).

Let D be a neighborhood domain of the infinitely distant point ∞ , this means, it contains the exterior of $\{|z| \geq R\}$. Suppose, in the notation (1.5), the poly-analytic function $u(z)$, with $|z| \geq R$, satisfies the following inequalities

$$|U_j(z)| \leq C|z|^{l-j}, \quad j = 1, \dots, n, \tag{1.8}$$

with some integer l or, equivalently, $U_j(z) = O(|z|^{l-j})$ when $z \rightarrow \infty$.

Due to (1.6), (1.7), we have the following expressions for the components ϕ_k of ϕ

$$\phi_k(z) = \sum_{j=k}^n \frac{(-\bar{z})^{j-k}}{(j-k)!} U_j(z).$$

Therefore, the similar inequalities (1.8) are also valid for these components. We also have

$$\phi_j(z) = O(|z|^{l-j}) \text{ when } z \rightarrow \infty, \quad j = 1, \dots, n, \tag{1.9}$$

implies (1.8) with some other constant C .

2. Linear Conjugation Problems. Let Γ be a smooth oriented contour on the complex plan, which is composed of simple contours $\Gamma_1, \dots, \Gamma_m$. Therefore, the complement is the open set $D = \mathbb{C} \setminus \Gamma$ composed of connected components D_0, D_1, \dots, D_m , where D_0 is unbounded and contains a neighborhood of ∞ , the others are bounded. There is no loss of generality, we can assume that

$$\partial D_0 = \Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_{m_0}, \quad 1 \leq m_0 \leq m. \tag{2.1}$$

Let's designate $C(\widehat{D})$ denote the class $\varphi \in C(D)$, that in every domain D_j is continuously extensible to the boundary. Obviously, we can define the unilateral boundary values of $\varphi(t)$ by $\varphi^\pm(t) = \lim \varphi(z)$ at points $tin\Gamma$, when the point $z \rightarrow t$ belongs to the left (right) of Γ with a superior signal (inferior). It is clear that this function is continuous.

Together with this class, we also consider the Hölder class. Let $C^\mu(G)$ be the class of functions φ satisfying Hölder condition in domain G , i.e.

$$|\varphi(z_1) - \varphi(z_2)| \leq C|z_1 - z_2|^\mu, \quad z_j \in G,$$

with some exponent $0 < \mu \leq 1$. It is clear that the conditions $\varphi \in C^\mu(G)$ and $\varphi \in C^\mu(\overline{G})$ are equivalent. In this notations, $\varphi \in C^\mu(\widehat{D})$ by definition, means that $\varphi \in C^\mu(D_0)$ for each bounded sub-domain $D_0 \subseteq D$. Therefore, $\varphi \in C^\mu(\overline{D_j})$, $1 \leq j \leq m$, and $\varphi \in C^\mu(\overline{D_0} \cap \{|z| \leq R\})$, for any $R > 0$.

Given $n \times n$ matrix function $B(t) = (B_{ij}(t))_1^n$ on the contour Γ of the class C^μ , whose determinant is different from zero. Consider poly-analytic function u satisfying

$$U_j = \frac{\partial^{j-1} u}{\partial \bar{z}^{j-1}} \in C^\mu(\widehat{D}), \quad 1 \leq j \leq n, \tag{2.2}$$

$$U_j(z) = O(|z|^{l-j}) \text{ when } z \rightarrow \infty, \quad j = 1, \dots, n,$$

Consider the linear conjugation problem:

$$\left(\frac{\partial^{i-1} u}{\partial \bar{z}^{i-1}} \right)^+ - \sum_{j=1}^n B_{ij} \left(\frac{\partial^{j-1} u}{\partial \bar{z}^{j-1}} \right)^- = f_i, \quad 1 \leq i \leq n. \tag{2.3}$$

With the substitution $U = P\phi$, this problem is the linear conjugation problem

$$\phi^+ - G\phi^- = g, \tag{2.4}$$

For a analytic vector function $\phi \in C^\mu(\widehat{D})$ with the matrix coefficient $G = P^{-1}BP$ and the right side $g = P^{-1}f$. Due to (2.2), we have

$$\deg \phi_j \leq l - j, \text{ when } z \rightarrow \infty, \quad j = 1, \dots, n. \tag{2.5}$$

With the help of the Cauchy type integral

$$(I\varphi)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(t)dt}{t-z}, \tag{2.6}$$

this problem, by the usual manner, may be reduced to a equivalent system of the singular integral equation (see, for example: «Singular integral equations», [N. I. Muskhelishvili, 1946]).

Theorem 2.1. *If $\varphi \in C^\mu(\Gamma)$, then analytic function $\phi = I\varphi$ disappears on the unbounded domain and belongs to the class $C^\mu(\widehat{D})$, and its contour values satisfies the Sokhoski-Plemelj formulas*

$$2\phi^\pm = \pm\varphi + S\varphi, \tag{2.7}$$

with

$$(S\varphi)(t_0) = \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(t)dt}{t-t_0}, \quad t_0 \in \Gamma \tag{2.8}$$

Cauchy singular integral. Where, $I\varphi$ as a linear operator, is limited by $C^\mu(\Gamma) \rightarrow C^\mu(\widehat{D})$.

The inverse is also true: any analytic function $\phi \in C^\mu(\widehat{D})$ that satisfies the condition $\deg \phi \leq \varkappa - 1$ in unbounded domain with some integer number \varkappa , is inclusively represent-able as $\phi = I\varphi + p$ with density $\varphi \in C^\mu(\Gamma)$ and polynomial $p(z)$, subjected to the conditions

$$\deg p \leq \varkappa - 1, \quad \int_{\Gamma} \varphi(t)q(t)dt = 0, \quad \deg q \leq -\varkappa - 1,$$

where the last condition of orthogonality is understood in the relation to the polynomials $q(z)$. Where, the polynomials of negative degree are assumed as equal to zero.

The last affirmation of the theorem occurs in the fact that, in the neighborhood of ∞ , the function $I\varphi$ possesses the decomposition in Laurent series:

$$(I\varphi)(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{-k-1}, \quad c_k = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \varphi(t)t^k dt. \tag{2.9}$$

In particularly, for an integer number $\varkappa \leq -1$, the condition $\deg I\varphi \leq \varkappa - 1$ can be expressed in zero equality form

$$\int_{\Gamma} \varphi(t)q(t)dt = 0,$$

for polynomial q has $\deg q \leq -\varkappa - 1$.

In particularly, from the theorem, it follows that the singular operator $S\varphi$ is limited on the space $C^\mu(\Gamma)$.

3. Functions of canonic matrices. Suppose that the matrix-function $G \in C^\mu(\Gamma)$ is invertible. By definition, an analytic matrix function $X(z)$ out of Γ is called canonic in relation to G if it belongs to the class $C^\mu(\widehat{D})$, has finite order in the unbounded domain, satisfies the relation

$$X^+ = GX^-, \tag{3.1}$$

and the condition

$$A = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z) \text{diag}(z^{\varkappa_1}, \dots, z^{\varkappa_n}), \quad \det A \neq 0, \tag{3.2}$$

in the unbounded domain with some integer number \varkappa_j .

By the theory of singular equations, there exists a matrix G such that the integer numbers $\varkappa_1, \dots, \varkappa_n$ uniquely determined by permutation, and called partial index of G , and

$$\varkappa_1 + \dots + \varkappa_n = \text{Ind } G, \quad \text{Ind } G = \frac{1}{2\pi i} \ln \det G(t)|_{\Gamma}. \tag{3.3}$$

For the case $n = 1$, the condition (3.2) and the equality (3.3) are

$$A = \lim_{z \rightarrow \infty} z^{\varkappa} X(z) \neq 0, \quad \varkappa = \text{Ind } G. \tag{3.4}$$

In this case, the canonic function is built directly. Suppose that $m = 1$, i.e the Γ contour is simple, the conjunction D_0 (D_1) stays inside (outside) of this contour and the point $z_0 \in D_0$ is fixed. Consider $G_0(t) = (t - z_0)^{\pm\varkappa}$, $t \in \Gamma$, where the superior (inferior) is selected if contour Γ is oriented counter-clockwise. Obviously, the Cauchy index of G and G_0 coincide and the function

$$X_0(z) = \begin{cases} 1, & z \in D_0, \\ (z - z_0)^{-\varkappa}, & z \in D_1, \end{cases}$$

is G_0 canonic, or satisfies the conditions (3.1), (3.4) in relation to G_0 .

Observe that the Cauchy index of $G_1 = G_0^{-1}G$ is equal to zero, therefore $\ln G_1 \in C^\mu(\Gamma)$. Consider one integral Cauchy type $Y = I(\ln G_1)$, this function belongs to a $C^\mu(\widehat{D})$, disappears in the infinite, and according to (2.7), satisfies the condition $Y^+ - Y^- = \ln G_1$. Therefore, $X = e^Y X_0$, and G are canonical. The general case when $\Gamma = \Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_m$, G_j is the restriction of G on Γ_j and X_j is the G_j canonic function. So the product $X = X_1 \cdots X_m$ is a G canonic function.

From this, the canonic matrix function $X(z)$ corresponding to G , the solution of the problem (2.4), where

$$\deg \phi \leq l - 1, \tag{3.5}$$

can be constructed explicitly.

In fact, due to (3.1), vector function $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_n) = X^{-1}\phi$ satisfies the condition of contour $\psi^+ - \psi^- = (X^+)^{-1}g$ due to (3.2), condition (3.5) becomes to

$$\deg \psi_j \leq l + \alpha_j - 1, \quad 1 \leq j \leq n.$$

As consequence, theorem 2.1 can be applied to ψ , and we have

$$\psi(z) = \int_{\Gamma} \frac{(X^+)^{-1}(t)g(t)dt}{t - z} + p(z).$$

As a observed above, this function in the neighborhood of ∞ possesses the decomposition in Laurent series of the form (2.9) with coefficient

$$a_j = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} [(X^+)^{-1}g](t)t^{-j-1}dt, \quad j \leq -1,$$

and $a_0 + \dots + a_s z^s = p(z)$. That why the condition $\deg \psi_k \leq l + \alpha_k - 1$ reduces in the fact that $\deg p_k \leq l + \alpha_k - 1$ and

$$\int_{\Gamma} [(X^+)^{-1}g]_k(t)q_k(t)dt = 0, \quad 1 \leq k \leq n,$$

where the polynomials q_k has $\deg q_k \leq -(l + \alpha_k) - 1$. Obviously, this conditions guarantees that the order in the unbounded domain of vector function $\text{diag}(z^{-\alpha_1}, \dots, z^{-\alpha_n})\psi(z)$ doesn't exceed $l - 1$.

In this way, all solutions of the original problem (2.4), (3.5) are described by the formula

$$\phi = X(I\tilde{g} + p), \quad \tilde{g} = (X^+)^{-1}g,$$

where polynomial vector $p = (p_1, \dots, p_n)$ has $\deg p_k \leq l + \alpha_k - 1$, and the density \tilde{g} satisfies the conditions of orthogonality

$$\int_{\Gamma} \tilde{g}_k(t)q_k(t)dt = 0, \quad 1 \leq k \leq n,$$

where the polynomial q_k has $\deg q_k \leq -(l + \alpha_k) - 1$.

In particularly, the index $\alpha = \text{Ind } G + nl$.

In the case of the problems (2.4), (2.5), the order at infinity of function ϕ_j has to be aligned and is reduced to the form (3.5), this can be made with the help of the diagonal matrix function

$$Q(z) = \begin{cases} 1, & z \in D \setminus D_0, \\ \text{diag}(1, (z - z_0)^{-1}, \dots, (z - z_0)^{1-n}), & z \in D_0, \end{cases} \tag{3.6}$$

where $z_0 \in D \setminus D_0$ is fixed.

Remember that, in accordance with (2.1) the boundary of the unbounded domain D_0 is composed of components Γ_j , $1 \leq j \leq m_0$, of contour Γ . The problem $\phi = Q\tilde{\phi}$ (2.4) is replaced to the linear conjugation problem

$$\tilde{\phi}^+ - \tilde{G}\tilde{\phi}^- = \tilde{g}, \tag{3.7}$$

where $\tilde{G} = (Q^+)^{-1}GQ^-$, and the right side $\tilde{g} = (Q^+)^{-1}g$. The condition (2.5) at infinity become to (3.5). Due to (1.2), we have the following result.

Theorem 3.1. *Let $\tilde{X}(z)$ be a function of canonic matrix corresponding to coefficient matrix $\tilde{G} = (Q^+)^{-1}P^{-1}BPQ^-$, and $\tilde{\alpha}_j$, $1 \leq j \leq n$, be their partial index.*

To solve the problem (2.2), (2.3) it is necessary and sufficient that condition $\tilde{f} = (\tilde{X}^+)^{-1}(Q^+)^{-1}P^{-1}f$ satisfies the following orthogonality

$$\int_{\Gamma} \tilde{f}_k(t)\tilde{q}_k(t)dt = 0, \quad 1 \leq k \leq n, \tag{3.8}$$

where the polynomials \tilde{q}_k has $\deg \tilde{q}_k \leq -(l + \tilde{\alpha}_k) - 1$ (polynomials with negative degree are assumed as zero).

Under these conditions, the general solution of this problem is given by the formula

$$u(z) = \sum_1^n \phi_j(z) \frac{\bar{z}^{j-1}}{(j-1)!},$$

$$\phi(z) = Q(z)\tilde{X}(z) \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\tilde{f}(t)dt}{t-z} + \tilde{p}(z) \right], \tag{3.9}$$

where the polynomial vector $\tilde{p} = (\tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_n)$ satisfies the condition $\deg \tilde{p}_k \leq l + \tilde{\alpha}_k - 1, 1 \leq k \leq n$.

From the theorem, the space of the solution of homogeneous system has the same dimension with the class of the polynomial vector $\tilde{p} = (\tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_n)$ where $\deg \tilde{p}_k \leq l + \tilde{\alpha}_k - 1$. So this dimension is equal to

$$s^+ = (l + \tilde{\alpha}_1)^+ + \dots + (l + \tilde{\alpha}_n)^+.$$

In the same manner, the number of conditions that is solved linearly independently is equal to

$$s^- = (-l - \tilde{\alpha}_1)^- + \dots + (-l - \tilde{\alpha}_n)^-,$$

where for an integer s put $s^{\pm} = (|s| \pm s)/2$. In particular, the index $s^+ - s^-$ of the problem is equal.

$$s^+ - s^- = nl + \text{Ind } \tilde{G}. \tag{3.10}$$

We know that

$$\det \tilde{G} = \frac{\det Q^-(t)}{\det Q^+(t)} \det B.$$

First suppose that all contours Γ_j in (2.1) are oriented negatively with respect to the D_0 , i.e counterclockwise. Then $Q^{\pm}(t) = 1, t \in \Gamma \setminus \partial D_0$ and

$$\det Q^+(t) = 1,$$

$$\det Q^-(t) = (t - z_0)^{-n(n-1)/2}, t \in \Gamma_j, 1 \leq j \leq m_0, \tag{3.11}$$

therefore

$$\sum_{j=1}^m \frac{1}{2\pi i} \ln \left. \frac{\det Q^-(t)}{\det Q^+(t)} \right|_{\Gamma_j} = \frac{-n(n-1)}{2}, \tag{3.12}$$

from (3.10) the index $s^+ - s^-$ of the problem is equal

$$s^+ - s^- = \text{Ind} B + nl - \frac{n(n-1)}{2}.$$

For arbitrary n, let B in (2.3) be an upper triangular matrix, i.e $B_{ij} = 0$ when $i > j$. We have matrix P in (1.5) is upper triangular. Therefore, this property possessed also the matrix $\tilde{G} = (Q^+)^{-1}P^{-1}BPQ^-$. Then, the canonic matrix - function G can be explicitly constructed from a recursive procedure.

Theorem 3.2. Let $G \in C^{\mu}(\Gamma)$ be a upper triangular matrix, i.e $G_{ij} = 0$ to $i > j$, and $G_{ii}(t) \neq 0, t \in \Gamma, 1 \leq i \leq n$. Then the canonic matrix X is also upper triangular and its partial index $\alpha_i = \text{Ind} G_{ii}$.

Prove. First, suppose that all diagonal elements of G_{ii} equal 1. Write matrix X in the form $X = 1 + Y$, where $Y(z)$ disappears in ∞ and its element $Y_{ij} = 0$ to $i \geq j$. So (3.1) turns into $Y^+ = GY^- + G - 1$ or $Y^+ - Y^- = (G - 1) + (G - 1)Y^-$. Write this relation coordinately

$$Y_{ij}^+ - Y_{ij}^- = G_{ij} + \sum_{i < l < j} G_{il}Y_{lj}^-, \quad i < j. \tag{3.13}$$

From this, we have the following equalities

$$Y_{n-1,n}^+ - Y_{n-1,n}^- = G_{n-1,n}, \tag{3.14a}$$

$$Y_{n-2,n-1}^+ - Y_{n-2,n-1}^- = G_{n-2,n-1},$$

$$Y_{n-2,n}^+ - Y_{n-2,n}^- = G_{n-2,n} + G_{n-2,n-1}Y_{n-1,n}^-, \tag{3.14b}$$

$$Y_{n-3,n-2}^+ - Y_{n-3,n-2}^- = G_{n-3,n-2},$$

$$Y_{n-3,n-1}^+ - Y_{n-3,n-1}^- = G_{n-3,n-1} + G_{n-3,n-2}Y_{n-2,n-1}^-,$$

$$Y_{n-3,n}^+ - Y_{n-3,n}^- = G_{n-3,n} + G_{n-3,n-2}Y_{n-2,n}^- + G_{n-3,n-1}Y_{n-1,n}^-, \tag{3.14c}$$

and so on.

Therefore, using theorem 2.1, we have

$$Y_{n-1,n} = IG_{n-1,n}, \quad (3.15a)$$

$$\begin{aligned} Y_{n-2,n-1} &= IG_{n-2,n-1}, \\ Y_{n-2,n} &= I(G_{n-2,n} + G_{n-2,n-1}Y_{n-1,n}^-), \end{aligned} \quad (3.15b)$$

$$\begin{aligned} Y_{n-3,n-2} &= IG_{n-3,n-2}, \\ Y_{n-3,n-1} &= I(G_{n-3,n-1} + G_{n-3,n-2}Y_{n-2,n-1}^-), \\ Y_{n-3,n} &= I(G_{n-3,n} + G_{n-3,n-2}Y_{n-2,n}^- + G_{n-3,n-1}Y_{n-1,n}^-), \end{aligned} \quad (3.15c)$$

and so on. As a consequence, Y is completely determined and $X = 1 + Y$ is canonic with $\mathfrak{a}_j = 0$ in relation to a triangular matrix G with diagonal elements $G_{ii} = 1$, $1 \leq i \leq n$.

For the general case, where a triangular matrix G with arbitrary diagonal elements, the problem is reduced to the case considered above by presentation G in the product form

$$G = G_{(1)}G_{(2)}, \quad G_{(1)} = \text{diag}(G_{11}, \dots, G_{nn}), \quad (3.16)$$

where the diagonal elements of the triangular matrix $G_{(2)}$ are equal to 1. Let $X_{(1)i}$ be a canonic function corresponding to the coefficient G_{ii} .

In other words, by (3.1), (3.2), $X_{(1)i}^+ = G_{ii}X_{(1)i}^-$ and $X_{(1)i}(z)z^{\mathfrak{a}_i} \rightarrow 1$ as $z \rightarrow \infty$, where $\mathfrak{a}_i = \text{Ind } G_{ii}$. So

$$X_{(1)} = \text{diag}(X_{(1)1}, \dots, X_{(1)n}) \quad (3.17)$$

$G_{(1)}$ is canonic, this is, it satisfies (3.1), (3.2) in relation to the correlation $G_{(1)}$. Let us consider the triangular matrix in Γ

$$\tilde{G}_{(2)} = (X_{(1)}^-)^{-1}G_{(2)}X_{(1)}^-, \quad (3.18)$$

where the diagonal elements of $\tilde{G}_{(2)}$ are equal to 1.

So, by what it has been proven above, there exists

$$\lim_{z \rightarrow \infty} X_{(2)}(z) = 1.$$

We will affirm that the canonic matrix X to the original coefficient G is an $X = X_{(1)}X_{(2)}$. In fact, the equality

$$X_{(1)}^+X_{(2)}^+ = G_{(1)}G_{(2)}X_{(1)}^-X_{(2)}^-$$

having in mind the equality $X_{(1)}^+ = G_{(1)}X_{(1)}^-$ passes to $X_{(2)}^+ = \tilde{G}_{(2)}X_{(2)}^-$.

References

1. Gakhov F. D. 1977. *Krayevyye zadachi* [Boundary-value problems] Moscow, Nauka, 640.
2. Muskhelishvili N. I. 1946. *Singulyarnyye integral'nyye uravneniya* [Singular integral equations], Moscow, OGIZ. Gos. Publishing House of Technical and Theoretical. lit., 451 (in Russian).
3. Reva T. 1972. A conjugation problem for bianalytic functions and its relation with the elasticity-plasticity problem. *Prikl. Mekh.*, Kiev 8(10): 65–70, Zbl. 302. 73007.
4. Soldatov A. P. 1980. A boundary value problem of linear conjugation in the theory of functions. *Math. USSR-Izv.*, 14(1): 175–192.

Получена 05.03.2020

Чан Куанг Вьонг – кандидат физико-математических наук, преподаватель кафедры математического анализа университета Далата

ул. Фу Донг Тхиен Вьонг, 8, г. Далат, провинция Ламдонг, Вьетнам

E-mail: vuongtq@dlu.edu.vn

УРАВНЕНИЯ КИРКВУДА – ЗАЛЬЦБУРГА ДЛЯ РЕШЕТЧАТЫХ КЛАССИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ СТАТИСТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Ю. П. Вирченко, Е. Ю. Московченко

Белгородский государственный национальный исследовательский университет,
г. Белгород, 308015, Россия

E-mail: virch@bsu.edu.ru

Аннотация. Изучается класс решетчатых моделей статистической механики классических систем с суммируемым парным потенциалом взаимодействия, которые с физической точки зрения описывают т.н. разбавленные системы многих частиц. Получена система уравнений для частных распределений вероятностей, аналогичная системе уравнений Кирквуда – Зальцбурга, которая применяется для исследования непрерывных систем.

Ключевые слова: статистическая механика, распределения Гиббса, решетчатые системы, уравнения Кирквуда-Зальцбурга, статистическая сумма, термодинамический предел, гамильтониан, периодические условия.

Для цитирования: Вирченко Ю. П., Московченко Е. Ю. 2020. Уравнения Кирквуда – Зальцбурга для решетчатых классических моделей статистической механики. Прикладная математика & Физика, 52(2): 62–70. DOI 10.18413/2687-0959-2020-52-2-62-70.

KIRKWOOD – SALZBURG EQUATIONS FOR LATTICE CLASSICAL MODELS OF STATISTICAL MECHANICS

Yu. P. Virchenko, E. Yu. Moskovchenko

Belgorod National Research University,
Belgorod, 308015, Russia

E-mail: virch@bsu.edu.ru

Received February 1, 2020

Abstract. Lattice models of statistical mechanics of classical systems with a summable pair interaction potential, which from the physical point of view describe the so-called diluted systems of many particles are studied. The equations system of partial probabilities is obtained that is similar to the Kirkwood – Salzburg system which is used when continuous models are studied.

Key words: statistical mechanics, Gibbs distributions, lattice systems, Kirkwood – Salzburg equations, partition function, thermodynamic limit, hamiltonian, periodic conditions.

For citation: Virchenko Yu. P., Moskovchenko E. Yu. 2020. Kirkwood – Salzburg's equations for lattice classical models of statistical mechanics. Applied Mathematics & Physics, 52(2): 62–70 (in Russian).

DOI 10.18413/2687-0959-2020-52-2-62-70.

Введение. Математическим объектом изучения в равновесной статистической механике являются гиббсовские вероятностные меры. Частным случаем таких мер, который изучается в настоящей работе, являются гиббсовские меры, связанные с т.н. решетчатыми моделями, которые являются математическими моделями систем многих частиц, рассматриваемых в физике твердого тела. Для решетчатых моделей меры определяются посредством задания семейства согласованных между собой частных распределений вероятностей $P_\Lambda[\cdot]$ на пространствах элементарных событий $\Omega(\Lambda)$, каждое из которых сопоставляется множеству $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$, $|\Lambda| < \infty$, $d = 1, 2, 3$ (конечной части кристаллической решетки), принадлежащему специальному классу конечных подмножеств из \mathbb{Z}^d . Тогда гиббсовская мера $P[\Sigma]$ случайного события Σ , связанного с фиксированным конечным множеством $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ определяется как совокупность предельных значений последовательности $\langle P_\Lambda[\Sigma]; \Lambda \subset \mathbb{Z}^d \rangle$, $\Sigma \subset \Omega(\Lambda)$, которая соответствует расширяющейся последовательности множеств $\Lambda \rightarrow \mathbb{Z}^d$. Такие предельные значения вероятностей называются *термодинамически предельными вероятностями*. По поводу используемой терминологии (см., например, [Минлос, 2002], [Gallavotti, 1999]).

Одной из задач статистической механики является задача вычисления предельных значений $P[\Sigma]$ и один из подходов к решению этой задачи связывается с нахождением подходящей системы

уравнений, связывающих предельные значения $P[\Sigma]$ различных случайных событий Σ . В простейшем случае решетчатых моделей, которые соответствуют гиббсовским точечным случайным полям и называются «решеточным газом», такой системой уравнений являются интегральные уравнения, которые применялись для исследования таких моделей в работах [Gallavotti, Miracle-Sole, 1967], [Добрушин, 1968], а также ее видоизменение в работе [Пастур, 1974]. В последнем случае система уравнений аналогична системе уравнений Кирквуда – Зальцбурга [Kirkwood, Salsburg, 1953], используемой при изучении непрерывных моделей статистической механики. Настоящая работа посвящена выводу системы интегральных уравнений, которая представляет собой обобщение систем уравнений, полученных в цитируемых работах, на случай решетчатых систем, которые представляют собой *векторные расслоения* гиббсовских точечных случайных полей. Кроме того, мы распространим положения спектральной теории Л. А. Пастура для полученной нами системы уравнений.

2. Векторные решетчатые модели статистической механики. Определим для каждого множества Λ вероятностные пространства $\langle \mathfrak{S}(\Lambda), P_\Lambda \rangle$ решетчатых систем статистической механики, изучаемых в настоящей работе, где $\mathfrak{S}(\Lambda)$ — пространство состояний системы (пространство элементарных случайных событий) и P_Λ — нормированная мера, заданная в соответствии со структурой измеримости на $\Omega(\Lambda)$.

Прежде всего, опишем класс подмножеств $\Lambda(L) \equiv \Lambda \subset \mathbb{Z}^d$. Определим для любого $L \in \mathbb{N}_+$ множество $\Lambda = \{0, 1, \dots, L\}^d - a_L \langle 1, \dots, 1 \rangle$ с $a_L = L/2$, если L — четное, и $(L-1)/2$, если L — нечетное. При этом для любого L имеет место включение $\Lambda(L+1) \supset \Lambda(L)$ и $\bigcup_{L=0}^{\infty} \Lambda(L) = \mathbb{Z}^d$. Число L будем называть *размером* множества Λ . При этом число точек в множестве Λ с размером L равно $|\Lambda| \equiv (L+1)^d$.

Пространства состояний решетчатых систем статистической механики для каждого из указанных выше множеств Λ представляются в виде прямого произведения

$$\mathfrak{S}(\Lambda) = \bigotimes_{\mathbf{x} \in \Lambda} \mathfrak{S}(\{\mathbf{x}\}). \quad (1)$$

Подразумевается, что на пространстве состояний \mathfrak{S}_Λ имеется структура измеримости и на ней определен интеграл по σ -аддитивной мере. При этом измеримые множества определяются как прямые произведения измеримых множеств в каждом из пространств $\mathfrak{S}(\{\mathbf{x}\})$ состояний с $\mathbf{x} \in \Lambda$, а мера на $\mathfrak{S}(\Lambda)$ определяется как произведение мер $\prod_{\mathbf{x} \in \Lambda} dm_{\mathbf{x}}$, где входящие в это произведение меры $dm_{\mathbf{x}}$, $\mathbf{x} \in \Lambda$ эквивалентны. Тогда гиббсовские распределения вероятностей $P_\Lambda[\Sigma]$ случайных событий $\Sigma \subset \mathfrak{S}(\Lambda)$ для систем статистической механики определяются, для каждого Λ , на основе задания функционала $H_\Lambda[\cdot]$ на пространстве состояний $\mathfrak{S}(\Lambda)$ посредством формулы

$$P_\Lambda[\Sigma] = Q_\Lambda^{-1} \int_{\Sigma} \exp(-H_\Lambda/T) \prod_{\mathbf{x} \in \Lambda} dm_{\mathbf{x}}, \quad (2)$$

$$Q_\Lambda = \int_{\mathfrak{S}_\Lambda} \exp(-H_\Lambda/T) \prod_{\mathbf{x} \in \Lambda} dm_{\mathbf{x}}. \quad (3)$$

Здесь параметр $T > 0$, называемый температурой. Функционал $H_\Lambda[\cdot]$ называется *гамильтонианом* системы.

Для рассматриваемых нами в этой работе *векторных решетчатых моделей* пространство состояний $\mathfrak{S}(\{\mathbf{x}\})$ в каждой точке $\mathbf{x} \in \Lambda$ определяется формулой

$$\mathfrak{S}(\{\mathbf{x}\}) = \{ \langle \rho(\mathbf{x}), \mathbf{s}(\mathbf{x}) \rangle : \rho(\mathbf{x}) \in \{0, 1\}, \mathbf{s}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^n, s^2(\mathbf{x}) \leq s^2 \}, \quad (4)$$

$s \in (0, \infty)$, $n \in \mathbb{N}$ так, что все пространство $\mathfrak{S}(\Lambda)$ составляют множество пар $\langle \rho(\mathbf{x}), \mathbf{s}(\mathbf{x}) \rangle$ функций на Λ , из которых $\rho(\mathbf{x})$ — дихотомическая функция со значениями $\{0, 1\}$ и $\mathbf{s}(\mathbf{x})$ — векторное поле на Λ со значениями в \mathbb{R}^n , $n = 1, 2, 3$. Следовательно, элементами пространства $\mathfrak{S}(\Lambda)$ являются пары $\langle \rho(\mathbf{x}), \mathbf{s}(\mathbf{x}) \rangle$ и гамильтониан $H_\Lambda[\cdot]$ сопоставляет каждой такой паре число из \mathbb{R} . Поэтому его значения мы будем, далее, обозначать посредством $H_\Lambda[\rho, \mathbf{s}]$.

В свою очередь, для векторных моделей измеримые множества в каждом из пространств $\mathfrak{S}(\{\mathbf{x}\})$, $\mathbf{x} \in \Lambda$ определяются измеримыми по Лебегу множествами в \mathbb{R}^n как при значении $\rho(\mathbf{x}) = 0$, так и при значении $\rho(\mathbf{x}) = 1$, а мера $dm[\mathbf{s}(\mathbf{x})]$ на каждом из этих пространств определяется сферически симметричной плотностью $f(s)$, сосредоточенной на $[0, s]$ так, что для фиксированной точки $\mathbf{x} \in \Lambda$ дифференциал меры множества точек пространства $\mathfrak{S}(\{\mathbf{x}\})$ для каждого значения $\rho = \rho(\mathbf{x}) \in \{0, 1\}$, составляющий дифференциальную часть $s^{n-1} ds d\Omega$ сферического слоя около точки $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^n$ с $|\mathbf{s}| = s$, определяемую дифференциалом телесного угла $d\Omega$, равен $w(s)s^{n-1} ds d\Omega \equiv w(s)ds$. Таким образом,

в соответствии с формулами (2), (3), гиббсовское распределение вероятностей для измеримых множеств Σ в пространстве $\mathfrak{S}(\Lambda)$ векторных моделей определяется следующим образом:

$$P_\Lambda[\Sigma] = Q_\Lambda^{-1} \sum_{\substack{\rho(\mathbf{x}) \in \{0,1\}^\Lambda \\ (\rho, \mathbf{s}) \in \Sigma}} \int_{\Sigma_{\mathbf{s}}} \exp\left(-H_\Lambda[\rho, \mathbf{s}]/T\right) \prod_{\mathbf{x} \in \Lambda} w(s(\mathbf{x})) ds(\mathbf{x}), \quad (4)$$

$$Q_\Lambda = \sum_{\rho(\mathbf{x}) \in \{0,1\}^\Lambda} \int_{(\mathbb{R}^n)^{|\Lambda|}} \exp\left(-H_\Lambda[\rho, \mathbf{s}]/T\right) \prod_{\mathbf{x} \in \Lambda} w(s(\mathbf{x})) ds(\mathbf{x}), \quad (5)$$

где $|\mathbf{s}(\mathbf{x})| = s(\mathbf{x})$ и введено обозначение $\Sigma_{\mathbf{s}} = \{(\rho(\mathbf{x}), \mathbf{s}(\mathbf{x})); \mathbf{x} \in \Lambda\} \in \Sigma\}$.

Далее, в этой работе мы будем исследовать векторные модели, гамильтонианы которых содержат только парное взаимодействие между точками $\mathbf{x} \in \Lambda$. Такого рода функционалы определяются формулой

$$H_\Lambda[\rho(\mathbf{x}), \mathbf{s}] = - \sum_{\mathbf{x} \in \Lambda} \rho(\mathbf{x})(\mathbf{s}(\mathbf{x}), \mathbf{h}) + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Lambda^2} U(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \rho(\mathbf{x}) I(\mathbf{s}(\mathbf{x}), \mathbf{s}(\mathbf{y})) \rho(\mathbf{y}). \quad (6)$$

Здесь в первом слагаемом $(\mathbf{s}(\mathbf{x}), \mathbf{h})$ обозначает скалярное произведение вектора $\mathbf{s}(\mathbf{x})$ и постоянно-го вектора \mathbf{h} . Функция $U(\cdot) : \mathbb{Z}^d \mapsto \mathbb{R}$ обладает свойством $U(-\mathbf{x}) = U(\mathbf{x})$, $U(0) = 0$ и является суммируемой $\sum_{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d} |U(\mathbf{x})| < \infty$. Кроме того, функция $I(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2)$ является симметричной относительно перестановок аргументов, ограниченной $|I(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2)| \leq I$, $\mathbf{s}_j \in \mathbb{R}^n$, $j = 1, 2$ некоторой постоянной $I > 0$. Функция $I(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2)$ предполагается зависящей только от инвариантов пары векторов $\langle \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2 \rangle$, то есть от $\mathbf{s}_1^2, \mathbf{s}_2^2$ и скалярного произведения $\langle \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2 \rangle$.

Для каждого $n = 1 \div |\Lambda|$ и непустого множества $X \subset \Lambda$, $|X| = m$ и связанного с ним набора $(\Sigma_{\mathbf{s}(\mathbf{x}); \mathbf{x} \in X})$ рассмотрим вероятности

$$\begin{aligned} \Pr\{\tilde{\rho}(\mathbf{x}) = 1 \vee \tilde{\mathbf{s}}(\mathbf{x}) \in \Sigma_{\mathbf{s}(\mathbf{x}); \mathbf{x} \in X}\} &= Q_\Lambda^{-1} \sum_{\rho \in \{0,1\}^\Lambda} \left(\prod_{\mathbf{x} \in X} \rho(\mathbf{x}) \right) \times \\ &\times \int_{\substack{\mathbf{s}(\mathbf{x}) \in \Sigma_{\mathbf{s}(\mathbf{x}); \\ \mathbf{x} \in X}} \int_{\substack{\mathbf{s}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^n; \\ \mathbf{x} \in \Lambda \setminus X}} \exp\left(-H_\Lambda[\rho, \mathbf{s}]/T\right) \prod_{\mathbf{y} \in \Lambda} w(s(\mathbf{y})) ds(\mathbf{y}). \end{aligned}$$

Здесь знаком «тильда» помечены случайные величины.

Введем плотности $f_m(X; \mathbf{s}(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in X)$ распределения этих вероятностей, которые выражаются производными по мере $\prod_{\mathbf{x} \in X} ds(\mathbf{x})$ множества $\Sigma_{\mathbf{s}}$,

$$\begin{aligned} f_m^{(\Lambda)}(X; \mathbf{s}(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in X) &= Q_\Lambda^{-1} \sum_{\rho \in \{0,1\}^\Lambda} \left(\prod_{\mathbf{x} \in X} \rho(\mathbf{x}) w(s(\mathbf{x})) \right) \times \\ &\times \int_{\substack{\mathbf{s}(\mathbf{y}) \in \mathbb{R}^n; \\ \mathbf{y} \in \Lambda \setminus X}} \exp\left(-H_\Lambda[\rho, \mathbf{s}]/T\right) \prod_{\mathbf{y} \in \Lambda \setminus X} w(s(\mathbf{y})) ds(\mathbf{y}). \end{aligned} \quad (7)$$

Тогда каждая из вероятностей $p(X) = \Pr\{\tilde{\rho}(\mathbf{x}) = 1; \mathbf{x} \in X\}$, $\emptyset \neq X \subset \Lambda$ определяется формулой

$$\begin{aligned} p(X) &= \sum_{\rho \in \{0,1\}^\Lambda} \int_{\substack{\mathbf{s}(\mathbf{y}) \in \mathbb{R}^n; \\ \mathbf{y} \in X}} f_m^{(\Lambda)}(X; \mathbf{s}(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in X) \prod_{\mathbf{y} \in X} w(s(\mathbf{y})) ds(\mathbf{y}) = \\ &= Q_\Lambda^{-1} \sum_{\rho \in \{0,1\}^\Lambda} \left(\prod_{\mathbf{x} \in X} \rho(\mathbf{x}) w(s(\mathbf{x})) \right) \int_{\substack{\mathbf{s}(\mathbf{y}) \in \mathbb{R}^n; \\ \mathbf{y} \in \Lambda \setminus X}} \exp\left(-H_\Lambda[\rho, \mathbf{s}]/T\right) \prod_{\mathbf{y} \in \Lambda \setminus X} w(s(\mathbf{y})) ds(\mathbf{y}). \end{aligned}$$

Формулу (7) можно записать в иной форме, более удобной для решения той задачи, которой посвящена настоящая работа. Сопоставим каждой функции $\rho(\mathbf{x})$, множество $Z = \{\mathbf{z} \in \Lambda : \rho(\mathbf{z}) = 1\}$, в терминах которого запишем формулу (6) для гамильтониана системы

$$H_\Lambda[\rho(\mathbf{x}), \mathbf{s}] \equiv H_\Lambda(Z; \mathbf{s}) = - \sum_{\mathbf{z} \in Z} (\mathbf{s}(\mathbf{z}), \mathbf{h}) + \frac{1}{2} \sum_{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \in Z} U(\mathbf{x} - \mathbf{y}) I(\mathbf{s}(\mathbf{x}), \mathbf{s}(\mathbf{y})). \quad (8)$$

Плотность $f_m^{(\Lambda)}(X; \mathbf{s}(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in X)$ в терминах такой функции $H(Z)$, $Z \subset \Lambda$ записывается в виде

$$f_m^{(\Lambda)}(X; \mathbf{s}(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in X) = Q_\Lambda^{-1} \left(\prod_{\mathbf{x} \in X} w(s(\mathbf{x})) \right) \times \sum_{Y \subset \Lambda \setminus X} \int_{\substack{\mathbf{s}(\mathbf{y}) \in \Sigma \mathbf{x}; \\ \mathbf{y} \in Y}} \exp \left(-H_\Lambda(X \cup Y; \mathbf{s})/T \right) \prod_{\mathbf{y} \in Y} w(s(\mathbf{y})) ds(\mathbf{y}), \quad (9)$$

$$Q_\Lambda = \sum_{X \subset \Lambda} \int_{\mathbf{s}(\mathbf{x}); \mathbf{x} \in X} \exp \left(-H_\Lambda(X; \mathbf{s})/T \right) \prod_{\mathbf{x} \in X} w(s(\mathbf{x})) ds(\mathbf{x}). \quad (10)$$

3. Периодические условия. В статистической механике часто применяется аппроксимация, основанная на замене гамильтониана H_Λ гамильтонианом \hat{H}_Λ , получаемом в результате отождествления противоположных граней параллелепипеда Λ , на котором определено пространство $\mathfrak{S}(\Lambda)$ состояний модели. Получаемая при этом модель называется моделью с периодическими граничными условиями, соответствующей исходной решеточной модели (см. [Минлос, 2002]). Использование модели с периодическими граничными условиями упрощает всевозможные конструкции в рамках статистической механики, связанные с вычислениями статистических и термодинамических характеристик модели и доказательства утверждений о ее качественных свойствах.

Обычно, понятие системы с периодическими граничными условиями вводится в том случае, когда взаимодействие обладает конечным радиусом [Минлос, 2002]. Однако при оценке энергии конкретного состояния, в частности, при решении задачи об определении основного состояния конечной системы статистической механики, совсем не очевидно, что аппроксимация исходного гамильтониана $H_\Lambda[\cdot]$ системы, который физически не обладает конечным радиусом действия, каким-либо гамильтонианом конечного радиуса действия, приводит к близости вычисляемых величин.

В этом разделе мы вводим для каждой модели, определяемой гамильтонианом (6), понятие аппроксимирующей ее модели с периодическими граничными условиями в том случае, когда потенциал U не обладает конечным радиусом действия, и находим оценку близости энергий исходной и аппроксимирующей моделей для каждого состояния из $\mathfrak{S}(\Lambda)$.

Зафиксируем множество Λ и на его основе определим для каждой точки $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d$ действие оператора P_Λ проектирования. Точка $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d$ однозначно представима в виде $\mathbf{x} = (L + 1) \sum_{j=1}^d n_j \mathbf{e}_j + \mathbf{y}$, $\mathbf{y} \in \Lambda$, \mathbf{e}_j – орты в \mathbb{R}^d , $(\mathbf{e}_j)_i = \delta_{ij}$, $n_j \in \mathbb{Z}$, $i, j = 1 \div d$. Положим, по определению, $P_\Lambda \mathbf{x} = \mathbf{y}$.

Определение. Гамильтониан

$$\hat{H}_\Lambda[\rho, \mathbf{s}] = - \sum_{\mathbf{x} \in \Lambda} \rho(\mathbf{x})(\mathbf{s}(\mathbf{x}), \mathbf{h}) + \frac{1}{2} \sum_{\substack{\mathbf{x} \in \Lambda, \\ \mathbf{y} \in \mathbb{Z}^d, \mathbf{y} \neq \mathbf{x}}} U(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \rho(\mathbf{x}) I(\mathbf{s}(\mathbf{x}), \mathbf{s}(P_\Lambda \mathbf{y})) \rho(P_\Lambda \mathbf{y}) \quad (11)$$

назовем гамильтонианом с периодическими граничными условиями, аппроксимирующим гамильтониан $H_\Lambda[\rho, \mathbf{s}]$.

Сопоставив каждой функции $\rho(\mathbf{x})$ множество $Z = \{\mathbf{x} \in \Lambda : \rho(\mathbf{x}) = 1\}$, формулу (11), определяющую гамильтониан с периодическими условиями, запишем в виде

$$\hat{H}_\Lambda(Z; \mathbf{s}) = - \sum_{\mathbf{x} \in X} (\mathbf{s}(\mathbf{x}), \mathbf{h}) + \frac{1}{2} \sum_{\substack{\mathbf{x} \in Z, \\ \mathbf{y} \in \mathbb{Z}^d: \mathbf{x} \neq P_\Lambda \mathbf{y} \in Z}} U(\mathbf{x} - \mathbf{y}) I(\mathbf{s}(\mathbf{x}), \mathbf{s}(P_\Lambda \mathbf{y})). \quad (12)$$

Нормой $\|\cdot\|_0$ гамильтониана \hat{H}_Λ называется число

$$\|H_\Lambda[\rho, \mathbf{s}]\|_0 = \max\{|\Lambda|^{-1} |H_\Lambda[\rho, \mathbf{s}]| : \langle \rho(\mathbf{x}), \mathbf{s}(\mathbf{x}); \mathbf{x} \in \Lambda \rangle \in \mathfrak{S}(\Lambda), \Lambda \subset \mathbb{Z}^d\}. \quad (13)$$

В случае гамильтониана с конечным радиусом действия, очевидно, что разность между энергиями $H_\Lambda[\mathbf{s}]$ и $\hat{H}_\Lambda[\mathbf{s}]$ должна быть пропорциональна площади поверхности кристалла, то есть L^{d-1} при $L \rightarrow \infty$. Если же взаимодействие является дальнедействующим, то такая оценка может быть слабее.

Для получения оценок близости по норме $\|\cdot\|_0$ гамильтонианов $H_\Lambda[\rho, \mathbf{s}]$ и $\hat{H}_\Lambda[\rho, \mathbf{s}]$ установим предварительно следующую простую геометрическую оценку

Лемма. Для любой точки $\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^d$ имеет место следующее неравенство

$$|\Lambda \cap (\mathbb{Z}^d \setminus \Lambda + \mathbf{z})| \leq dL^{d-1} \max\{|z_j|; j = 1, \dots, d\} \equiv dL^{d-1} \|\mathbf{z}\| \quad (14)$$

и при $\|\mathbf{z}\| > L\sqrt{d} + 1$ выполняется $|\Lambda \cap (\mathbb{Z}^d \setminus \Lambda + \mathbf{z})| = 0$.

□ Любая точка $\mathbf{x} \in \Lambda$ после сдвига вдоль одной из осей на величину L приведет к тому, что она либо выйдет за пределы Λ , либо перейдет в граничную точку Λ . Тогда сдвиг на любой вектор $\mathbf{z} = L \sum_{j=1}^d \theta_j \mathbf{e}_j$, $\theta_j \in \{0, 1\}$ приведет к тому, что она выйдет за пределы Λ , либо попадет в угловую точку Λ . Длина вектора \mathbf{z} в этом случае не превосходит $L\sqrt{d}$. Тогда точка \mathbf{x} , наверняка, выйдет за пределы Λ , если $|\mathbf{z}| > L\sqrt{d}$. Ввиду того, что точка $\mathbf{x} \in \Lambda$ выбрана произвольно, то $\Lambda \cap (\mathbb{Z}^d \setminus \Lambda + \mathbf{z}) = \emptyset$, если $|\mathbf{z}| \geq L\sqrt{d} + 1$. Отсюда следует последнее равенство в формулировке леммы.

Доказательство неравенства (14) проведем индукцией по d . При $d = 1$ и $|\mathbf{z}| \leq L$ имеем точное равенство, так как $\Lambda = \{0, 1, \dots, L\}$ и $\Lambda + \mathbf{z} = \{z, z+1, \dots, z+L\}$. Тогда $|\Lambda \cap (\mathbb{Z} \setminus \Lambda + \mathbf{z})| = L - (L - |\mathbf{z}|) = |\mathbf{z}|$.

Пусть неравенство (14) имеет место для значения d . Тогда, так как, в общем случае,

$$|\Lambda \cap (\mathbb{Z}^d \setminus \Lambda + \mathbf{z})| = (L + 1)^d - \prod_{j=1}^d (L + 1 - |z_j|),$$

то для значения $(d + 1)$ и любой точки $\mathbf{z} = \langle z_1, \dots, z_d, z_{d+1} \rangle$, имеем, согласно предположению индукции,

$$\begin{aligned} |\Lambda \cap (\mathbb{Z}^{d+1} \setminus \Lambda + \mathbf{z})| &= (L + 1)^{d+1} - \prod_{j=1}^{d+1} (L + 1 - |z_j|) = \\ &= (L + 1) \left((L + 1)^d - \prod_{j=1}^d (L + 1 - |z_j|) \right) + \left((L + 1) \prod_{j=1}^d (L + 1 - |z_j|) - \prod_{j=1}^{d+1} (L + 1 - |z_j|) \right) \leq \\ &\leq dL^d \max\{|z_j|; j = 1, \dots, d\} + \left(\prod_{j=1}^d (L + 1 - |z_j|) \right) (L + 1 - (L + 1 - |z_{d+1}|)) \leq \\ &\leq d(L + 1)^d \max\{|z_j|; j = 1, \dots, d\} + (L + 1)^d |z_{d+1}| \leq (d + 1)(L + 1)^d \max\{|z_j|; j = 1, \dots, d + 1\}. \blacksquare \end{aligned}$$

Из полученной геометрической оценки следует оценка близости энергий произвольного состояния $\langle \rho(\mathbf{x}), \mathbf{s}(\mathbf{x}) \rangle$, $\mathbf{x} \in \Lambda$, вычисленных на основе гамильтонианов H_Λ и \hat{H}_Λ .

Теорема. *Имеет место следующее неравенство:*

$$\|H_\Lambda[\rho, \mathbf{s}] - \hat{H}_\Lambda[\rho, \mathbf{s}]\|_0 \leq \frac{dI}{2(L + 1)} \sum_{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d : \mathbf{z} \neq 0} |U(\mathbf{z})| \|\mathbf{z}\|. \quad (15)$$

□ Очевидны следующие неравенства:

$$\begin{aligned} |H_\Lambda[\rho, \mathbf{s}] - \hat{H}_\Lambda[\rho, \mathbf{s}]| &\leq \frac{1}{2} \sum_{\substack{\mathbf{x} \in \Lambda, \\ \mathbf{y} \in \mathbb{Z}^d \setminus \Lambda}} |U(\mathbf{x} - \mathbf{y})| \left| I(\mathbf{s}(\mathbf{x}), \mathbf{s}(\mathbf{P}_\Lambda \mathbf{y})) \right| \leq \\ &\leq \frac{I}{2} \sum_{\substack{\mathbf{x} \in \Lambda, \\ \mathbf{y} \in \mathbb{Z}^d \setminus \Lambda}} |U(\mathbf{x} - \mathbf{y})| = \frac{I}{2} \sum_{z \in \mathbb{Z}^d : \mathbf{z} \neq 0} |U(\mathbf{z})| |\Gamma(\mathbf{z}; \Lambda)|, \end{aligned} \quad (16)$$

где $\Gamma(\mathbf{z}; \Lambda) = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : \mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{z}, \mathbf{x} \in \Lambda, \mathbf{y} \notin \Lambda\}$.

Каждая пара, принадлежащая $\Gamma(\mathbf{z}, \Lambda)$, взаимно однозначным образом определяется точкой $\mathbf{x} \in \Lambda$ так, что $\mathbf{y} = \mathbf{x} - \mathbf{z} \notin \Lambda$. При этом $\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{z} \in \mathbb{Z}^d \setminus \Lambda + \mathbf{z}$. Следовательно,

$$\{\mathbf{x} : \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \in \Gamma(\mathbf{z}, \Lambda)\} \subset \{\mathbf{x} : \mathbf{x} \in \Lambda, \mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d \setminus \Lambda + \mathbf{z}\} = \Lambda \cap (\mathbb{Z}^d \setminus \Lambda + \mathbf{z}).$$

Тогда $|\Gamma(\mathbf{z}, \Lambda)| \leq |\Lambda \cap ((\mathbb{Z}^d \setminus \Lambda) + \mathbf{z})|$. Поэтому, применив оценку (14), получаем (15). ■

Из полученной оценки (15) разности энергий следует, что для далекодействующих взаимодействий с конечной нормой $\|\cdot\|_0$, для которых

$$\sum_{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d} |U(\mathbf{x})| \|\mathbf{x}\| = \infty,$$

разность (15) возрастает быстрее, чем площадь поверхности Λ . Это затрудняет использование аппроксимации исходной системы соответствующей ей системой с периодическими граничными условиями в случае далекодействующих потенциалов взаимодействия. Этот факт был отмечен в работах [Клюев, Вирченко 2015], [Вирченко, 1991]. Тем не менее, справедливо

Следствие. Если $H_\Lambda[\rho, \mathbf{s}]$ имеет конечную норму, то при термодинамическом предельном переходе имеет место

$$\lim_{|\Lambda| \rightarrow \infty} \frac{1}{|\Lambda|} |H_\Lambda[\rho, \mathbf{s}] - \hat{H}_\Lambda[\rho, \mathbf{s}]| = 0. \quad (17)$$

□ Так как $\|H_\Lambda[\rho, \mathbf{s}]\|_0 < \infty$, то $\sum_{\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^d} |U(\mathbf{z})| < \infty$. Для функций $U(\cdot)$ такого типа имеет место

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \sum_{\mathbf{z} \in \Lambda} |U(\mathbf{z})| \|\mathbf{z}\| = 0.$$

В самом деле, выберем произвольное число $\varepsilon > 0$ и найдем такой размер L_ε , для которого

$$\sum_{\mathbf{z}: |\mathbf{z}| > L_\varepsilon} |U(\mathbf{z})| < \varepsilon.$$

Тогда при $L > L_\varepsilon$ справедлива оценка

$$\sum_{\mathbf{z} \in \Lambda} |U(\mathbf{z})| \|\mathbf{z}\| = \sum_{\mathbf{z} \in \Lambda: |\mathbf{z}| > L_\varepsilon} |U(\mathbf{z})| \|\mathbf{z}\| + \sum_{\mathbf{z} \in \Lambda: |\mathbf{z}| \leq L_\varepsilon} |U(\mathbf{z})| \|\mathbf{z}\|.$$

Для оценки первой суммы используем неравенство $\|\mathbf{z}\| < L$ при фиксированном L_ε ,

$$\sum_{\mathbf{z} \in \Lambda} |U(\mathbf{z})| \|\mathbf{z}\| < \varepsilon L + \sum_{\mathbf{z} \in \Lambda: |\mathbf{z}| \leq L_\varepsilon} |U(\mathbf{z})| \|\mathbf{z}\|.$$

Подставим эту оценку в (15), где учтем, что при $|\mathbf{z}| > L\sqrt{d} + 1$, $\Lambda \cap ((\mathbb{Z}^d \setminus \Lambda) + \mathbf{z}) = \emptyset$,

$$\begin{aligned} |H_\Lambda[\rho, \mathbf{s}] - \hat{H}_\Lambda[\rho, \mathbf{s}]| &< \frac{1}{2} d(L+1)^{d-1} I \sum_{\substack{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d: \mathbf{z} \neq 0 \\ |\mathbf{z}| \leq L\sqrt{d}+1}} |U(\mathbf{z})| \|\mathbf{z}\| < \\ &< \frac{1}{2} dL^d I \varepsilon + \frac{1}{2} d(L+1)^{d-1} I \sum_{\substack{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d: \mathbf{z} \neq 0, |\mathbf{z}| \leq L_\varepsilon \\ |\mathbf{z}| \leq L\sqrt{d}+1}} |U(\mathbf{z})| \|\mathbf{z}\|, \end{aligned}$$

так как $L\sqrt{d} + 1 > L_\varepsilon$. Поделим обе части неравенства на $|\Lambda| = L^d$ и перейдем к пределу $L \rightarrow \infty$. В результате, так как второе слагаемое в правой части стремится к нулю при фиксированной величине L_ε , то мы получим, что

$$\lim_{|\Lambda| \rightarrow \infty} \frac{1}{|\Lambda|} |H_\Lambda[\rho, \mathbf{s}] - \hat{H}_\Lambda[\rho, \mathbf{s}]| \leq \varepsilon.$$

Ввиду произвольности величины $\varepsilon > 0$, получаем (17). ■

4. Интегральные уравнения для плотностей f_m . Выведем систему уравнений для плотностей $f_m^{(\Lambda)}(X; \mathbf{s}(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in X)$ модели решеточного газа с парным потенциалом U , аналогичную системе, введенной в работе [Пастур, 1974], при изучении модели решеточного газа. При ее выводе используется схема рассуждений, аналогичная той (см. [Рюэль, 1971]), которая используется для анализа многочастичных конфигурационных функций в статистической механике непрерывных систем.

Пусть $X = \{\mathbf{x} : \rho(\mathbf{x}) = 1\} \subset \Lambda$. Воспользовавшись формулой (12), запишем выражение (7) для плотностей $f_m^{(\Lambda)}(X; \mathbf{s}(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in X)$ в следующем виде:

$$\begin{aligned} f_m^{(\Lambda)}(X; \mathbf{s}(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in X) &= Q_\Lambda^{-1} \sum_{Y \subset \Lambda \setminus X} \left(\prod_{\mathbf{x} \in X} w(s(\mathbf{x})) \right) \times \\ &\times \int_{\substack{\mathbf{s}(\mathbf{y}) \in \mathbb{R}^n: \\ \mathbf{y} \in Y}} \exp\left(-H_\Lambda(X \cup Y; \mathbf{s})/T\right) \prod_{\mathbf{y} \in Y} w(s(\mathbf{y})) ds(\mathbf{y}). \end{aligned} \quad (18)$$

Введем в рассмотрение функцию $K(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2; \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2) = \exp(-U(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)I(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2)/T) - 1$, определенную для каждого $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{Z}^d$, $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2 \in \mathbb{R}^n$, а также следующую функцию на $\mathbb{Z}^d \times \mathfrak{P}(\mathbb{Z}^d)$, где $\mathfrak{P}(\mathbb{Z}^d)$ – семейство всех конечных подмножеств \mathbb{Z}^d :

$$W_\Lambda(\mathbf{x}; X; \mathbf{s}(\mathbf{y}), \mathbf{y} \in X) = \exp\left([\mathbf{s}(\mathbf{x}), \mathbf{h}] - \sum_{\substack{\mathbf{x} \in X, \mathbf{y} \in \mathbb{Z}^d: \\ \mathbf{x} \neq P_\Lambda \mathbf{y} \in X}} U(\mathbf{x} - \mathbf{y})I(\mathbf{s}(\mathbf{x}), \mathbf{s}(P_\Lambda \mathbf{y}))\right)/T,$$

$W_\Lambda(\mathbf{x}; \emptyset) = 1$. Тогда для любых $X \subset \Lambda \setminus \{\mathbf{x}\}$, $Y \subset \Lambda \setminus \{\mathbf{x}\}$, $X \cap Y = \emptyset$ имеет место

$$\begin{aligned} \exp(-H_\Lambda(\{\mathbf{x}\} \cup X \cup Y; \mathbf{s})/T) &= \\ &= W_\Lambda(\mathbf{x}; X; \mathbf{s}(\mathbf{y}), \mathbf{y} \in X) W_\Lambda(\mathbf{x}; Y; \mathbf{s}(\mathbf{y}), \mathbf{y} \in Y) \exp(-H_\Lambda(X \cup Y; \mathbf{s})/T) = \\ &= W_\Lambda(\mathbf{x}; X; \mathbf{s}(\mathbf{y}), \mathbf{y} \in X) \prod_{\mathbf{y} \in Y} \left(1 + K(\mathbf{x} - \mathbf{y}; \mathbf{s}(\mathbf{x}), \mathbf{s}(\mathbf{y}))\right) \exp(-H_\Lambda(X \cup Y; \mathbf{s})/T). \end{aligned} \quad (19)$$

Это равенство сохраняется и при $|X \cup Y| = 1$, так как в этом случае $H_\Lambda(X \cup Y; \mathbf{s}) = \exp((\mathbf{h}, \mathbf{s}(\mathbf{z})))$, где $\mathbf{z} = \mathbf{x}, \mathbf{y}$, в зависимости от того, какое из множеств пусто.

Определим, далее, функцию

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{s}; Y; \mathbf{s}(\mathbf{y}), \mathbf{y} \in Y) = \left\{ \prod_{\mathbf{y} \in Y} K(\mathbf{x} - \mathbf{y}; \mathbf{s}, \mathbf{s}(\mathbf{y}), \mathbf{y} \in Y), \text{ при } |Y| > 0; 1, \text{ при } |Y| = 0. \right\}$$

такую, что

$$\prod_{\mathbf{y} \in Z} \left(1 + K(\mathbf{x} - \mathbf{y}; \mathbf{s}(\mathbf{x}), \mathbf{s}(\mathbf{y}))\right) = \sum_{Y \subset Z} \prod_{\mathbf{y} \in Y} K(\mathbf{x} - \mathbf{y}; \mathbf{s}(\mathbf{x}), \mathbf{s}(\mathbf{y})) = \sum_{Y \subset Z} K(\mathbf{x}, \mathbf{s}; Y; \mathbf{s}(\mathbf{y}), \mathbf{y} \in Y). \quad (20)$$

Наконец, введем в рассмотрение пространство \mathfrak{E}_Λ всех наборов $\mathbf{f}^\Lambda = \langle f_m^{(\Lambda)}(X; \mathbf{s}(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in X) : \emptyset \neq X \subset \Lambda \rangle$ функций с $\mathbf{s}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \in \Lambda$.

Подставим (19), вместе с (20), в выражение для $f_{m+1}^{(\Lambda)}(X \cup \{\mathbf{x}\}; \mathbf{s}(\mathbf{y}), \mathbf{y} \in X \cup \{\mathbf{x}\})$ с $X \subset \Lambda \setminus \{\mathbf{x}\}$, получаемое на основе (18):

$$\begin{aligned} f_{m+1}^{(\Lambda)}(X \cup \{\mathbf{x}\}; \mathbf{s}(\mathbf{y}), \mathbf{y} \in X \cup \{\mathbf{x}\}) &= w(\mathbf{s}(\mathbf{x})) W_\Lambda(\mathbf{x}; X; \mathbf{s}(\mathbf{y}), \mathbf{y} \in X) \times \\ &\times Q_\Lambda^{-1} \sum_{Y \subset \Lambda \setminus X \cup \{\mathbf{x}\}} \sum_{\substack{Z: Y \subset Z, \\ Z \subset \Lambda \setminus X \cup \{\mathbf{x}\}}} \left(\prod_{\mathbf{y} \in X} w(\mathbf{s}(\mathbf{y})) \right) \int_{\substack{\mathbf{s}(\mathbf{y}) \in \mathbb{R}^n: \\ \mathbf{y} \in Y}} K(\mathbf{x}, \mathbf{s}; Y; \mathbf{s}(\mathbf{y}), \mathbf{y} \in Y) \times \\ &\times \exp(-H_\Lambda(X \cup Y; \mathbf{s})/T) \prod_{\mathbf{y} \in Y} w(\mathbf{s}(\mathbf{y})) d\mathbf{s}(\mathbf{y}) \end{aligned} \quad (21)$$

и произведем следующие преобразования суммы:

$$\begin{aligned} &Q_\Lambda^{-1} \sum_{Y \subset \Lambda \setminus X \cup \{\mathbf{x}\}} \sum_{\substack{Z: Y \subset Z, \\ Z \subset \Lambda \setminus X \cup \{\mathbf{x}\}}} \left(\prod_{\mathbf{y} \in X} w(\mathbf{s}(\mathbf{y})) \right) \int_{\substack{\mathbf{s}(\mathbf{y}) \in \mathbb{R}^n: \\ \mathbf{y} \in Y}} K(\mathbf{x}, \mathbf{s}; Y; \mathbf{s}(\mathbf{y}), \mathbf{y} \in Y) \times \\ &\times \exp(-H_\Lambda(X \cup Y; \mathbf{s})/T) \prod_{\mathbf{y} \in Y} w(\mathbf{s}(\mathbf{y})) d\mathbf{s}(\mathbf{y}) = \\ &= \sum_{Y \subset \Lambda \setminus X \cup \{\mathbf{x}\}} \int_{\substack{\mathbf{s}(\mathbf{y}) \in \mathbb{R}^n: \\ \mathbf{y} \in Y}} K(\mathbf{x}, \mathbf{s}; Y; \mathbf{s}(\mathbf{y}), \mathbf{y} \in Y) \prod_{\mathbf{y} \in X \cup Y} w(\mathbf{s}(\mathbf{y})) d\mathbf{s}(\mathbf{y}) \times \\ &\times Q_\Lambda^{-1} \sum_{Z \subset \Lambda \setminus (X \cup Y \cup \{\mathbf{x}\})} \int_{\substack{\mathbf{s}(\mathbf{z}) \in \mathbb{R}^n: \\ \mathbf{z} \in \Lambda \setminus Z}} \exp(-H_\Lambda(X \cup Y \cup Z; \mathbf{s})/T) \prod_{\mathbf{z} \in Z} w(\mathbf{s}(\mathbf{z})) d\mathbf{s}(\mathbf{z}) = \\ &= \sum_{Y \subset \Lambda \setminus (X \cup \{\mathbf{x}\})} \int_{\substack{\mathbf{s}(\mathbf{y}) \in \mathbb{R}^n: \\ \mathbf{y} \in Y}} K(\mathbf{x}, \mathbf{s}; Y; \mathbf{s}(\mathbf{y}), \mathbf{y} \in Y) \times \\ &\times [f_{m+|Y|}^{(\Lambda)}(X \cup Y; \mathbf{s}(\mathbf{z}), \mathbf{z} \in X \cup Y) - f_{m+1+|Y|}^{(\Lambda)}(\{\mathbf{x}\} \cup X \cup Y; \mathbf{s}(\mathbf{z}), \mathbf{z} \in X \cup Y \cup \{\mathbf{x}\})] \prod_{\mathbf{y} \in Y} d\mathbf{s}(\mathbf{y}), \end{aligned}$$

так как $\sum_{Z \subset \Lambda \setminus (\{\mathbf{x}\} \cup X \cup Y)} (\cdot) = \sum_{Z \subset \Lambda \setminus (X \cup Y)} (\cdot) - \sum_{\mathbf{x} \in Z \subset \Lambda \setminus (X \cup Y)} (\cdot)$. Подставим полученное выражение в (21). Выделив слагаемые с $Y = \emptyset$, получаем систему линейных алгебраических тождеств набора плотностей распределения вероятностей $f_m^{(\Lambda)}(X; \mathbf{s}(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in X)$ с $\mathbf{s}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \in X$, $\emptyset \neq X \subset \Lambda$:

$$f_{m+1}^{(\Lambda)}(X \cup \{\mathbf{x}\}; \mathbf{s}(\mathbf{y}), \mathbf{y} \in X \cup \{\mathbf{x}\}) = w(\mathbf{s}(\mathbf{x})) W_\Lambda(\mathbf{x}; X; \mathbf{s}(\mathbf{y}), \mathbf{y} \in X) \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \left[f_m^{(\Lambda)}(X; \mathbf{s}(\mathbf{z}), \mathbf{z} \in X) - f_{m+1}^{(\Lambda)}(\{\mathbf{x}\} \cup X; \mathbf{s}(\mathbf{z}), \mathbf{z} \in X \cup \{\mathbf{x}\}) + \right. \\
& + \sum_{Y \subset \Lambda \setminus (X \cup \{\mathbf{x}\})} \int_{\substack{\mathbf{s}(\mathbf{y}) \in \mathbb{R}^n: \\ \mathbf{y} \in Y}} K(\mathbf{x}, \mathbf{s}; Y; \mathbf{s}(\mathbf{y}), \mathbf{y} \in Y) \times \\
& \left. \times \left[f_{m+|Y|}^{(\Lambda)}(X \cup Y; \mathbf{s}(\mathbf{z}), \mathbf{z} \in X \cup Y) - f_{m+1+|Y|}^{(\Lambda)}(\{\mathbf{x}\} \cup X \cup Y; \mathbf{s}(\mathbf{z}), \mathbf{z} \in X \cup Y \cup \{\mathbf{x}\}) \right] \prod_{\mathbf{y} \in Y} ds(\mathbf{y}) \right]. \quad (22)
\end{aligned}$$

Таким образом, нами получена система интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода, которой подчинен набор плотностей распределения для векторных решетчатых моделей.

Можно показать, что эту систему можно рассматривать в пространстве \mathfrak{E}_Λ . В связи с этим, ее вид не зависит от выбора точки \mathbf{x} в каждом из множеств $X \cup \{\mathbf{x}\} \subset \Lambda$. Поэтому ее выбор можно унифицировать. Будем полагать, что в каждом $X \subset \Lambda$ эта точка выбирается первой в смысле лексикографического порядка на решетке \mathbb{Z}^d .

Наконец, укажем, что предельные плотности $f_m(X; \mathbf{s}(\mathbf{y}), \mathbf{y} \in X)$, $m \in \mathbb{N}$, $\emptyset \neq X \subset \mathbb{Z}^d$, получаемые при термодинамическом предельном переходе $\Lambda \rightarrow \mathbb{Z}^d$, должны удовлетворять следующей предельной системе интегральных уравнений:

$$\begin{aligned}
& f_{m+1}(X \cup \{\mathbf{x}\}; \mathbf{s}(\mathbf{y}), \mathbf{y} \in X \cup \{\mathbf{x}\}) = w(\mathbf{s}(\mathbf{x}))W(\mathbf{x}; X; \mathbf{s}(\mathbf{y}), \mathbf{y} \in X) \times \\
& \times \left[f_m(X; \mathbf{s}(\mathbf{z}), \mathbf{z} \in X) - f_{m+1}(\{\mathbf{x}\} \cup X; \mathbf{s}(\mathbf{z}), \mathbf{z} \in X \cup \{\mathbf{x}\}) + \right. \\
& + \sum_{Y \subset \mathbb{Z}^d \setminus (X \cup \{\mathbf{x}\})} \int_{\substack{\mathbf{s}(\mathbf{y}) \in \mathbb{R}^n: \\ \mathbf{y} \in Y}} K(\mathbf{x}, \mathbf{s}; Y; \mathbf{s}(\mathbf{y}), \mathbf{y} \in Y) \times \\
& \left. \times \left[f_{m+|Y|}(X \cup Y; \mathbf{s}(\mathbf{z}), \mathbf{z} \in X \cup Y) - f_{m+1+|Y|}(\{\mathbf{x}\} \cup X \cup Y; \mathbf{s}(\mathbf{z}), \mathbf{z} \in X \cup Y \cup \{\mathbf{x}\}) \right] \prod_{\mathbf{y} \in Y} ds(\mathbf{y}) \right]. \quad (23)
\end{aligned}$$

Эта система может рассматриваться как видоизменение, по отношению к классическим векторным решетчатым моделям, известной системы интегральных уравнений Кирквуда – Зальцбурга [Kirkwood, Salsburg, 1953] в статистической механике непрерывных моделей.

Список литературы

1. Ахиезер А. И., Барьяхтар В. Г., Пелетминский С. В. 1967. Спиновые волны. М., Наука, 368.
2. Вирченко Ю. П. 1991. К теории основного состояния обменной модели Гейзенберга. Проблемы теоретической физики. Киев: Наукова думка, 80–96.
3. Добрушин Р. Л. 1968. Гиббсовские случайные поля для решетчатых систем с попарным взаимодействием. Функциональный анализ и его приложения, 4(1): 31–43.
4. Клюев А. С., Вирченко Ю. П. 2015. Оценка энергии векторной решеточной модели с периодическими граничными условиями. Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика, 11(208)(39): 121–125.
5. Минлос Р. А. 1968. Лекции по статистической физике. Успехи мат. наук, 1: 133–190.
6. Минлос Р. А. 2002. Введение в математическую статистическую физику. М., МЦНМО, 111.
7. Пастур Л. А. 1974. Спектральная теория уравнений Кирквуда – Зальцбурга в конечном объеме. Теорет. и матем. физика, 18(2): 233–242.
8. Рюэль Д. 1971. Статистическая механика. Строгие результаты. М., Мир, 367.
9. Gallavotti G., Miracle-Sole S. 1967. Statistical Mechanics of Lattice Systems. Commun. Math. Phys, 5: 317–323.
10. Gallavotti G. Statistical mechanics. 1999. Roma: Dipartimento di Fisica Università di Roma, 349.
11. de Lacheisserie E., Gignoux D., Schlenker M. 2005. Magnetism: Fundamentals. Springer, 1: 315–317.
12. Kirkwood J. G., Salsburg Z. 1953. W. The statistical mechanical theory of molecular distribution functions in liquids. Discussion of the Faraday Society, 15(1): 28–34.

13. Stohr J., Siegmann H. C. 2006. Magnetism: From Fundamentals to Nanoscale Dynamics. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 290–293.

References

1. Akhiezer A. I., Baryakhtar V. G., Peletminsky S. V. 1967. Spinovye volny [Spin waves]. M., Nauka, 368.
2. Virchenko Yu. P. 1991. K teorii osnovnogo sostoyaniya obmennoj modeli Geizenberga [On the theory of the ground state of the Heisenberg exchange model]. Problemy teoreticheskoy fiziki. Kiev: Naukova dumka, 80–96.
3. Dobrushin R. L. 1968. Gibbsovskie sluchajnye polya dlya reshetchatyh sistem s poparnym vzaimodejstviem [Gibbs random fields for lattice systems with pairwise interaction]. Funkcional'nyj analiz i ego prilozheniya, 4(1): 31–43.
4. Klyuev A. S., Virchenko Yu. P. 2015. Ocenka energii vektornoj reshetочноj modeli s periodicheskimi granichnymi usloviyami [Energy estimation of a vector lattice model with periodic boundary conditions]. Nauchnye vedomosti Belgorodskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Matematika. Fizika, 11(208)(39): 121–125.
5. Minlos R. A. 1968. Lekcii po statisticheskoy fizike [Lectures on statistical physics]. Uspekhi mat. nauk, 1: 33–190.
6. Minlos R. A. 2002. Vvedenie v matematicheskuyu statisticheskuyu fiziku [Introduction to mathematical statistical physics]. M., MCNMO, 111.
7. Pastur L. A. 1974. Spektral'naya teoriya uravnenij Kirkvuda-Zal'cburga v konechnom ob'eme [The spectral theory of the Kirkwood – Salzburg equations within the corresponding limits]. Teoret. i matem. fizika, 18(2): 233-242.
8. Ruelle D. 1969. Statistical Mechanics. Rigorous Results. New York-Amsterdam: W. A. Benjamin, Inc, 367.
9. Gallavotti G., Miracle-Sole S. 1967. Statistical Mechanics of Lattice Systems. Commun. Math. Phys. 5: 317–323.
10. Gallavotti G. Statistical mechanics. 1999. Roma: Dipartimento di Fisica Università di Roma, 349.
11. de Lacheisserie E., Gignoux D., Schlenker M. 2005. Magnetism: Fundamentals. Springer, 1: 315–317.
12. Kirkwood J. G., Salsburg Z. 1953. W. The statistical mechanical theory of molecular distribution functions in liquids. Discussion of the Faraday Society. 15(1): 28-34.
13. Stohr J., Siegmann H. C. 2006. Magnetism: From Fundamentals to Nanoscale Dynamics. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 290–293.

Получена 01.02.2020

Вирченко Юрий Петрович – доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры теоретической и математической физики института инженерных и цифровых технологий Белгородского государственного национального исследовательского университета

ул. Победы, 85, г. Белгород, Россия, 308015

E-mail: virch@bsu.edu.ru

Московченко Екатерина Юрьевна – аспирантка первого года обучения кафедры прикладной математики и компьютерного моделирования института инженерных и цифровых технологий Белгородского государственного национального исследовательского университета

ул. Победы, 85, г. Белгород, Россия, 308015

E-mail: 1079708@bsu.edu.ru

МЕТОД ПОДОБНЫХ ОПЕРАТОРОВ В СПЕКТРАЛЬНОМ АНАЛИЗЕ ОПЕРАТОРНЫХ БЕСКОНЕЧНЫХ МАТРИЦ

А. Г. Баскаков, И. А. Криштал, Н. Б. Ускова

(Статья представлена членом редакционной коллегии С. М. Ситником)

Северо-Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова,
г. Владикавказ, Северная Осетия – Алания, 362025, Россия

Университет Северного Иллинойса,
WH320 Department of Mathematical sciences, DeKalb, IL 60115, USA

Воронежский государственный технический университет,
г. Воронеж, 394006, Россия

E-mail: anatbaskakov@yandex.ru, ikrishtal@niu.edu, nat-uskova@mail.ru

Аннотация. В работе предложена и обосновывается модификация метода подобных операторов в случае, если на собственные значения невозмущенного оператора не накладывается условие роста лакун между ними. Эта модификация отлична от традиционной схемы, используемой, например, при исследовании оператора Хилла. Все выкладки приводятся на языке матриц операторов. В рассматриваемую схему укладываются, например, дифференциальные операторы первого порядка с инволюцией, операторы Дирака.

Ключевые слова: метод подобных операторов, дифференциальный оператор первого порядка, спектр, спектральный проектор.

Благодарности: Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ, проект 19-01-00732.

Для цитирования: Баскаков А. Г., Криштал И. А., Ускова Н. Б. 2020. Метод подобных операторов в спектральном анализе операторных бесконечных матриц. Прикладная математика & Физика, 52(2): 71–85. DOI 10.18413/2687-0959-2020-52-2-71-85.

THE METHOD OF SIMILAR OPERATORS IN THE SPECTRAL ANALYSIS OF INFINITE OPERATOR MATRICES

A. G. Baskakov, I. A. Krishtal, N. B. Uskova

(Article submitted by a member of the editorial board S. M. Sitnik)

North Ossetian State University after K. L. Khetagurov,
Nizhny Novgorod, 603950, Russia

Northern Illinois University,
WH320 Department of Mathematical sciences, DeKalb, IL 60115, USA

Voronezh state technical University,
Voronezh, 394006, Russia

E-mail: anatbaskakov@yandex.ru, ikrishtal@niu.edu, nat-uskova@mail.ru

Received April 8, 2020

Abstract. Method of similar operators is a useful tool for studying the spectral properties of various classes of perturbed differential operators. In this paper, we exhibit a modification of the method which applies for a large class of operators. In particular, the spectrum of the unperturbed operator is not assumed to have increasing lacunas, which is a typical assumption for Hill operators. The method is presented in terms of the operator matrices. It can be used, for example, for first order differential operators with an involution, Dirac operators.

Key words: similar operator method, first order differential operator, spectrum, spectral projection.

Acknowledgements: The work is supported in part by the Russian Federal Property Fund, project 19-01-00732.

For citation: Baskakov A. G., Krishtal I. A., Uskova N. B. 2020. The method of similar operators in the spectral analysis of infinite operator matrices. Applied Mathematics & Physics, 52(2): 71–85 (in Russian).

DOI 10.18413/2687-0959-2020-52-2-71-85.

1. Введение. В серии работ А. П. Хромова и М. Ш. Бурлуцкой (см. [Бурлуцкая, 2014], [Бурлуцкая, Хромов, 2014] и библиографию в них) изучались спектральные свойства дифференциальных

операторов первого порядка с инволюцией и гладким потенциалом. Рассматривались различные места нахождения инволюции: при производной или при потенциале, а также различные краевые условия. Указанные операторы сводились к оператору Дирака. Другим, альтернативным, методом получения спектральных характеристик является метод подобных операторов. С его помощью получены результаты работ [Баскаков, Дербушев, Щербаков, 2011], [Баскаков, Ускова, 2018], [Ускова, 2019], [Baskakov, Krishtal, Uskova, 2018], [Baskakov, Krishtal, Uskova, 2019]. Однако в этих работах не было построено общей модификации метода подобных операторов, пригодной для применения к дифференциальным операторам первого порядка, как с инволюцией, так и других. Например, операторов Дирака или интегро-дифференциальных операторов первого порядка. Такая модификация появилась в [Baskakov, Krishtal, Uskova, 2019]. Но она опять получилась достаточно общей попыткой уложить в одну схему дифференциальные операторы, и первого и второго порядка, а также теорию расщепления линейных операторов. Поэтому необходимость появления общей и одновременно простой модификации метода подобных операторов, в которую идеально ложилась дифференциальные операторы первого порядка с инволюцией и операторы Дирака, осталась. Именно такая модификация и приводится ниже в данной работе. Еще раз подчеркнем, что данная работа не есть перевод на русский язык статьи [Baskakov, Krishtal, Uskova, 2019], хотя, безусловно, они имеют много общего. Главное их отличие в том, что в [Baskakov, Krishtal, Uskova, 2019] – более общая схема, а в данной работе – конкретная.

Все результаты исследования удобно в нашем случае проводить и формулировать в терминах операторных матриц рассматриваемых операторов.

Данная статья состоит из трех частей, перед читателем находится первая часть, состоящая из теоретических результатов. Во второй и третьей части будут собраны конкретные примеры применения общей схемы. Заметим, что они также отличается от работы [Baskakov, Krishtal, Uskova, 2019].

Перейдем к конкретной постановке задачи.

Пусть H – комплексное сепарабельное гильбертово пространство, и \mathbb{J} – некоторое непустое подмножество из \mathbb{Z} . Введем в рассмотрение нормальный линейный замкнутый оператор $A : D(A) \subset H \rightarrow H$, имеющий плотную область определения $D(A)$, спектр $\sigma(A)$ и резольвентное множество $\rho(A)$. Спектральным множеством будем называть замкнутое отделенное подмножество из $\sigma(A)$. Напомним [Рудин У. 1975], что оператор $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ называется нормальным, если $\overline{D(A)} = H$ и для оператора $A^* : D(A^*) \subset H \rightarrow H$ выполняются условия: $D(A) = D(A^*)$ и $\|Ax\| = \|A^*x\|$ для всех $x \in D(A)$.

Пусть оператор A имеет полупростые собственные значения $\lambda_n, n \in \mathbb{J}$, конечной кратности, не превосходящей некоторого числа $N_0 \in \mathbb{N}$. При этом всюду в статье считается выполненным условие

$$dist(\{\lambda_n\}, \sigma(A) \setminus \{\lambda_n\}) \geq \beta > 0 \tag{1}$$

(условие разделенности спектра оператора A). Отметим, что из этих условий вытекает компактность резольвенты оператора A .

Далее, для $n \in \mathbb{J}$, символом

$$P_n = P(\{\lambda_n\}, A) \tag{2}$$

обозначим проектор Рисса, построенный по одноточечному спектральному множеству $\sigma_n = \{\lambda_n\}, n \in \mathbb{J}$, оператора A . Отметим, что совокупность ортогональных проекторов $\{P_n, n \in \mathbb{J}\}$ образует дизъюнктивную систему операторов, являющуюся разложением единицы, т. е. $P_m P_n = 0$ при $m \neq n$, и $\sum_{n \in \mathbb{J}} P_n x = x$, где ряд сходится безусловно для любого $x \in H$.

Далее символом $\mathcal{L}_A(H)$ обозначим банахово пространство операторов, подчиненных оператору A . Линейный оператор $B : D(B) \subset H \rightarrow H$ отнесем к $\mathcal{L}_A(H)$, если $D(A) \subset D(B)$ и $\|Bx\| \leq C(\|x\| + \|Ax\|)$, для всех $x \in D(A)$ и некоторого $C \geq 0$. Обычно, без ограничения общности, полагают $D(B) = D(A)$. Норма в $\mathcal{L}_A(H)$ задается формулой: $\|B\|_A = \inf\{C \geq 0 : \|Bx\| \leq C(\|x\| + \|Ax\|)\}$ для любого $x \in D(A)$.

Символом $End H$ будет обозначаться банахова алгебра ограниченных линейных операторов, действующих в H , с нормой $\|X\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Xx\|, x \in H, X \in End H$. Пространство $End H$ непрерывно

вложено в $\mathcal{L}_A(H)$, если $\overline{D(A)} = H$.

Символом I обозначим тождественный оператор в $End H$, а символами $I_k, k \in \mathbb{J}, I_{(m)}, m \in \mathbb{Z}_+$ – тождественные операторы в подпространствах $H_k = ImP_k, k \in \mathbb{J}$, и $H_{(m)} = ImP_{(m)}$, где $P_{(m)} = \sum_{|i| < m, i \in \mathbb{J}} P_i, m \in \mathbb{Z}_+$, соответственно.

Отметим, что принадлежность оператора B пространству $\mathcal{L}_A(H)$ означает ограниченность оператора $B(A - \lambda I)^{-1}$ для каждого $\lambda \in \rho(A)$. При этом в $\mathcal{L}_A(H)$ можно ввести эквивалентные нормы, положив $\|B\|_A = \|B(A - \lambda I)^{-1}\|, \lambda \in \rho(A)$.

В работе рассматривается оператор $A - B$, где $B \in \mathcal{L}_A(H)$. Дополнительные условия на операторы A и B будут приведены в §2. К оператору $A - B$ применяется метод подобных операторов [Баскаков, Ускова, 2018], [Baskakov, Krishtal, Uskova, 2018], [Baskakov, Krishtal, Uskova, 2019]. В основе метода лежит преобразование подобия исследуемого оператора к оператору вида

$$\tilde{A} = A - P_{(n)}YP_{(n)} - \sum_{|i|>n, i \in \mathbb{J}} P_iYP_i, n \in \mathbb{Z}_+ = \mathbb{Z} \cup \{0\}, \quad (3)$$

где ограниченный оператор Y есть решение некоторого нелинейного операторного уравнения (подробности см. в §3, 5). Преимущество оператора \tilde{A} из формулы (3) заключается в том, что подпространства $H_k, |k| > n, k \in \mathbb{J}$ и $H_{(n)}, n \in \mathbb{Z}_+$, являются для него инвариантными.

Далее оператор $A - B$ будем называть возмущенным оператором, оператор A – невозмущенным оператором, а оператор B – возмущением.

Метод подобных операторов имеет давнюю историю [Баскаков, 1983], [Баскаков, Дербушев, Щербаков, 2011] и применяется для исследования различных классов дифференциальных и разностных операторов (см. [Баскаков, 1983], [Баскаков, Дербушев, Щербаков, 2011], [Баскаков А. Г., Поляков Д. М. 2017], [Баскаков А. Г., Ускова Н. Б. 2018], Гаркавенко, Ускова, 2017. В данной работе приводится модификация метода подобных операторов для невозмущенного оператора у которого собственные значения «не разбегаются», в отличии от, например, работы [Баскаков, Поляков, 2017]. Это создает определенные трудности в применении метода подобных операторов. Поэтому приходится вводить некоторую весовую последовательность, отвечающую за скорость убывания матричных элементов оператора по строкам и по столбцам и получать условия применимости в терминах этой последовательности. Впервые весовая последовательность была введена в [Баскаков, Дербушев, Щербаков, 2011], результаты статей [Баскаков, Ускова, 2018], [Ускова, 2019], [Baskakov, Krishtal, Uskova, 2018], [Baskakov, Krishtal, Uskova, 2019], также получены с её использованием.

2. Пространства операторов. Условия на операторы A и B . Введем понятия операторной матрицы и матрицы операторов [Баскаков А. Г., 1997], [Baskakov., Krishtal, 2014], [Baskakov, Krishtal, Uskova, 2019], соответствующие некоторому разложению единицы проекторами $\{E_j, j \in \mathbb{J}\}$.

Определение 2.1. Операторной матрицей $\mathcal{X} = (X_{ij})_{i,j \in \mathbb{J}}$ называется отображение $\mathcal{X} : \mathbb{J} \times \mathbb{J} \rightarrow \text{End } H$. При этом операторная матрица $\mathcal{X} = (X_{ij})$ ассоциирована с разложением единицы $\{E_j, j \in \mathbb{J}\}$, если $X_{ij} = P_iX_{ij}P_j, i, j \in \mathbb{J}$.

Определение 2.2. Матрицей оператора $X \in \mathcal{L}_A(H)$ относительно разложения единицы проекторами $\{P_j, j \in \mathbb{J}\}$, определенными формулой (2), называется операторная матрица $\mathcal{X} = (X_{ij})$, для которой $X_{ij} = P_iXP_j, i, j \in \mathbb{J}$.

Определение 2.2 корректно, так как $P_iXP_j \in \text{End } H, i, j \in \mathbb{J}$.

Каждая операторная матрица \mathcal{X} , ассоциированная с разложением единицы $\{P_j, j \in \mathbb{J}\}$, определяет оператор $X : D(X) \subset H \rightarrow H$. При этом предполагается, что область определения оператора X , задаваемого матрицей \mathcal{X} , является максимальной из возможных. Пусть \mathcal{X} – некоторая операторная матрица, ассоциированная с разложением единицы $\{P_j, j \in \mathbb{J}\}$. Определим оператор $X : D(X) \subset H \rightarrow H$, полагая что $x \in H$ принадлежит $D(X)$ и $Xx = y \in H$, если $\sum_{n,m \in \mathbb{J}} X_{nm}x = \sum_{n,m \in \mathbb{J}} X_{nm}P_mx$ безусловно сходится к y . Отметим, что если $X \in \mathcal{L}_A(H)$, то его матрица $(X_{ij}), i, j \in \mathbb{J}$, определяет оператор, являющийся расширением оператора X . Также заметим что, из равенства операторной матрицы нулю следует, что соответствующий оператор из $\mathcal{L}_A(H)$ нулевой. Кроме того, матрица $(A_{ij}), i, j \in \mathbb{J}$, невозмущенного оператора A диагональна и $A_{ii} = \lambda_i I_i, i \in \mathbb{J}, A_{ij} = 0$ при $i \neq j$.

В настоящей работе все доказательства и результаты будут формулироваться в терминах матриц рассматриваемых операторов. Для простоты мы будем отождествлять оператор с его матрицей относительно введенной формулой (2) системы спектральных проекторов (проекторов Рисса) невозмущенного оператора A .

Далее нам потребуется понятие диагоналей оператора $X \in \mathcal{L}_A(H)$. Операторы $X_p \in \mathcal{L}_A(H), p \in \mathbb{Z}$, определяемые матрицами

$$(X_p)_{ij} = \begin{cases} X_{ij}, & i - j = p, \\ 0, & i - j \neq p. \end{cases}$$

Матрицы X_p назовем p -ми диагоналями оператора X из $\mathcal{L}_A(H)$.

Ниже нами будет использоваться двусторонний идеал $\mathfrak{S}_2(H) \subset \text{End } H$ операторов Гильберта-Шмидта. Через $\|X\|_2, X \in \mathfrak{S}_2(H)$ обозначим норму Гильберта-Шмидта.

Отметим, что для X из $\mathfrak{S}_2(H)$ его норму Гильберта-Шмидта можно выразить через норму матричных элементов формулой

$$\|X\|_2^2 = \sum_{i,j \in \mathbb{J}} \|X_{ij}\|_2^2. \quad (4)$$

Нужные нам свойства идеала $\mathfrak{S}_2(H)$ можно найти в [Гохберг, Крейн, 1965], [12].

Перейдем к условиям на операторы A и B , накладываемым в данной работе для применения метода подобных операторов.

Напомним, что спектр $\sigma(A)$ оператора A представим в виде $\sigma(A) = \bigcup_{n \in \mathbb{J}} \{\lambda_n\}$. Полупростота собственных значений $\lambda_n, n \in \mathbb{J}$ означает, в частности, выполнение равенств

$$AP_n = \lambda_n P_n, n \in \mathbb{J}. \tag{5}$$

Далее будет считаться всюду выполненным условие:

$$\sup_{i \in \mathbb{J}} \sum_{n \in \mathbb{J}/\{i\}} |\lambda_i - \lambda_n|^{-2} < \infty. \tag{6}$$

Отметим, что условие разделенности спектра (1) непосредственно вытекает из (6).

Также считаются выполненными следующие условия:

1)

$$\sum_{i \in \mathbb{J}} \|B_{ii}\|_2^2 < \infty; \tag{7}$$

2)

$$\sum_{i, j \in \mathbb{J}, i \neq j} \frac{\|B_{ij}\|_2^2}{(\lambda_i - \lambda_j)^2} < \infty; \tag{8}$$

3)

$$\sum_{i, j \in \mathbb{J}} \left\| \sum_{l \in \mathbb{J}, l \neq j} \frac{B_{il} B_{lj}}{\lambda_l - \lambda_j} \right\|_2^2 < \infty; \tag{9}$$

4) для любого $\epsilon > 0$ существует такое число $\lambda_\epsilon \in \rho(A)$, что

$$\|B(A - \lambda_\epsilon I)^{-1}\| < \epsilon. \tag{10}$$

В некоторых случаях мы не будем проверять выполнение условия (7) (см. замечание 4.1).

Отметим, что поставленные выше условия на операторы A и B автоматически выполнялись или предполагались в работах [Баскаков, Дербушев, Щербаков, 2011], [Баскаков., Ускова, 2018], [Криштал, Ускова, 2019], [Ускова, 2019], [Baskakov, Krishtal, Uskova, 2018], [Baskakov, Krishtal, Uskova, 2019].

Замечание 2.1. Для того, чтобы возмущение B принадлежало идеалу операторов Гильберта – Шмидта $\mathfrak{S}_2(H)$ необходимо и достаточно выполнение условия

$$\sum_{i, j \in \mathbb{J}} \|B_{ij}\|_2^2 < \infty. \tag{11}$$

При этом условия (7)–(10) выполняются автоматически и их проверка не проводится.

Замечание 2.2. Выполнение условия (7) означает, что оператор B_0 , являющийся нулевой диагональю оператора B , принадлежит $\mathfrak{S}_2(H)$ опять же в силу (4). По поводу формул (8), (9) см. замечание 4.2.

3. Метод подобных операторов. Абстрактная схема. Различные преобразования подобия широко используются в математике, начиная с приведения конечных матриц к диагональной форме. История и обзор операторов преобразования изложены, например, в работе [Ситник, Шишкина, 2019].

Определение 3.1. *Линейные операторы $\mathcal{E}_1 : D(\mathcal{E}_1) \subset H \rightarrow H$ и $\mathcal{E}_2 : D(\mathcal{E}_2) \subset H \rightarrow H$ называются подобными, если существует непрерывно обратимый оператор $V \in \text{End } H$, такой, что $VD(\mathcal{E}_2) = D(\mathcal{E}_1)$ и $\mathcal{E}_1 Vx = V\mathcal{E}_2 x, x \in D(\mathcal{E}_2)$. Оператор V называется оператором преобразования оператора \mathcal{E}_1 в оператор \mathcal{E}_2 . Оператор V также иногда называют сплетающим оператором.*

Подобные операторы интересны и широко используются в связи с тем, что зная спектральные свойства одного оператора, можно получить соответствующие свойства другого оператора.

Лемма 3.1. *Пусть операторы $\mathcal{E}_1 : D(\mathcal{E}_1) \subset H \rightarrow H$ и $\mathcal{E}_2 : D(\mathcal{E}_2) \subset H \rightarrow H$ подобны и $\mathcal{E}_1 V = V\mathcal{E}_2$. Тогда:*

- 1) их образы $Im\mathcal{E}_1$ и $Im\mathcal{E}_2$ связаны равенством $Im\mathcal{E}_1 = V(Im\mathcal{E}_2)$;
- 2) их спектры $\sigma(\mathcal{E}_1)$ и $\sigma(\mathcal{E}_2)$ такие, что $\sigma(\mathcal{E}_1) = \sigma(\mathcal{E}_2)$;
- 3) пусть e – собственный вектор оператора \mathcal{E}_2 , $\mathcal{E}_2 e = \lambda e$, тогда $V e$ – собственный вектор оператора \mathcal{E}_1 , причем $\mathcal{E}_1 V e = \lambda V e$;

4) пусть $Q \in \text{End } H$ – спектральный проектор, построенный по некоторому спектральному множеству σ оператора \mathcal{E}_2 . Тогда спектральный проектор $\tilde{Q} \in \text{End } H$, построенный по спектральному множеству σ для оператора \mathcal{E}_1 , определяется равенством

$$\tilde{Q} = VQV^{-1}.$$

Немного затронем вопросы истории метода подобных операторов. Первоначально этот метод предложил К. О. Фридрихс [Данфорд, Шварц, 1974] для исследования возмущенных самосопряженных операторов с непрерывным спектром (метод Фридрихса). Р. Тернер развил метод Фридрихса (см. [Данфорд, Шварц, 1974]) для операторов с дискретным спектром. А. Г. Баскаков продолжил развитие метода Фридрихса с учетом идей Пуанкаре, Крылова, Боголюбова (см. [Баскаков, 1983], [Баскаков, Поляков, 2017], [Баскаков., Ускова, 2018]). В работах [Баскаков, 1985], [Баскаков, 1999] показана связь метода подобных операторов с заменой Крылова-Боголюбова. Отметим также, что метод подобных операторов имеет множество разновидностей. В данной работе основные положения метода будут излагаться в соответствии с [Баскаков, Ускова, 2018].

Мы далее будем называть трансформатором (термин М. Г. Крейна) оператор, действующий в пространстве операторов.

Основным понятием метода подобных операторов является понятие допустимой (для невозмущенного оператора) тройки. Она состоит из пространства \mathcal{M} допустимых возмущений и двух трансформаторов $J \in \text{End } \mathcal{M}$ и $\Gamma : \mathcal{M} \rightarrow \text{End } H$.

Определение 3.2. [Баскаков, Ускова, 2018] Для оператора A тройку (\mathcal{M}, J, Γ) назовем допустимой тройкой и \mathcal{M} – пространством допустимых возмущений, если выполняются следующие условия:

- 1) \mathcal{M} – банахово пространство со своей нормой $\|\cdot\|_*$, непрерывно вложенное $\mathcal{L}_A(H)$, т. е. существует постоянная $c > 0$ такая, что $\|X\|_A \leq c\|X\|_*$ для любого $X \in \mathcal{M}$;
- 2) J и Γ – ограниченные трансформаторы и $J^2 = J$;
- 3) $(\Gamma X)D(A) \subset D(A)$. Для любого оператора X из пространства \mathcal{M} выполнено равенство

$$A\Gamma Xx - \Gamma XAx = (X - JX)x,$$

для каждого вектора $x \in D(A)$. Кроме того, $Y = \Gamma X$ – единственное решение уравнения

$$AY - YA = X - JX, \tag{12}$$

и $JY = 0$;

4) для любых операторов X и Y из \mathcal{M} операторы $X\Gamma Y$, $(\Gamma X)Y$ также принадлежат \mathcal{M} . Кроме того, существует постоянная $\gamma > 0$, которая удовлетворяет неравенствам

$$\|\Gamma\| \leq \gamma \max\{\|X\Gamma Y\|_*, \|(\Gamma X)Y\|_*\} \leq \gamma\|X\|_*\|Y\|_*; \tag{13}$$

5) для всех X, Y из \mathcal{M} : $J((\Gamma X)JY) = 0$;

6) для любого оператора $X \in \mathcal{M}$ и произвольного $\epsilon > 0$ существует число λ_ϵ , которое принадлежит резольвентному множеству $\rho(A)$ такое, что выполняется неравенство

$$\|X(A - \lambda_\epsilon I)^{-1}\| < \epsilon. \tag{14}$$

Замечание 3.1. Согласно [Баскаков, 1983] условие 6) можно сформулировать так: для любого $X \in \mathcal{M}$, $\text{Im } \Gamma X \subset D(A)$ и $A\Gamma X \in \text{End } H$.

Пусть тройка (\mathcal{M}, J, Γ) – фиксированная допустимая тройка для оператора A .

Теорема 3.1. [Баскаков, Поляков, 2017] Пусть $B \in \mathcal{M}$ и выполнено неравенство

$$\|J\| \|B\|_* \gamma < 0.25, \tag{15}$$

то возмущенный оператор $A - B$ подобен оператору $A - JX_*$, где $X_* \in \mathcal{M}$ есть решение операторного уравнения

$$X = B\Gamma X - (\Gamma X)(JB) - (\Gamma X)J(B\Gamma X) + B = \Phi(X). \tag{16}$$

Оператор X_* может быть найден методом простых итераций, $X_0 = 0$, $X_1 = B, \dots$. Преобразование подобия оператора $A - B$ в оператор $A - JX_*$ осуществляет обратимый оператор $I + \Gamma X_* \in \text{End } H$ и $\Gamma X_* \in \mathcal{M}$. Отображение $\Phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ является сжимающим в шаре $\{X \in \mathcal{M} : \|X - B\|_* \leq 3\|B\|_*\}$.

Возмущение B не обязано принадлежать нужному (удобному) пространству допустимых возмущений. В этом случае удобно сначала сделать предварительное преобразование подобия данного возмущенного оператора $A - B$ в такой оператор $A - \tilde{B}$, где \tilde{B} уже есть элемент \mathcal{M} .

Предположение 3.1. Для оператора $B \in \mathcal{L}_A(H)$ и пространства допустимых возмущений \mathcal{M} существуют операторы $M, N \in \text{End } H$ удовлетворяющие условиям:

- 1) $\|N\| < 1$;
- 2) $ND(A) \subset D(A)$;
- 3) $BN, NM \in \mathcal{M}$;
- 4) $ANx - NAx = Bx - Mx, x \in D(A)$;
- 5) для любого $\epsilon > 0$ существует число $\lambda_\epsilon \in p(A)$ такое, что $\|B(A - \lambda_\epsilon I)^{-1}\| < \epsilon$.

Теорема 3.2. [Баскаков, Поляков, 2017] Пусть предположение 3.1 имеет место. Тогда оператор $A - B$ подобен оператору $A - M - C$, где $C = (I + N)^{-1}(BM - NM)$ и справедливо равенство

$$(A - B)(I + N) = (I + N)(A - M - C). \tag{17}$$

Замечание 3.2. Отметим, что если \mathcal{M} – двусторонний идеал в $\text{End } H$, то $C \in \mathcal{M}$. Если, более того, и $M \in \mathcal{M}$, тогда новое возмущение $M + C$ также принадлежит пространству допустимых возмущений \mathcal{M} .

Замечание 3.3. В [Баскаков, Поляков, 2017] и других работах, например, в [Baskakov, Krishtal, Uskova, 2019], Предложение 3.1 и теорема 3.2 сформулированы в других терминах.

В заключении параграфа сформулируем теорему, позволяющую ослабить условие (15) в частном случае $JB = 0$.

Теорема 3.3. Пусть $B \in \mathcal{M}$ и $JB = 0$. Тогда если

$$3\|J\|\|B\|_*\gamma < 1,$$

то оператор $A - B$ подобен оператору $A - JX_*$, где $X_* \in \mathcal{M}$ – решение нелинейного операторного уравнения

$$X = B\Gamma X - \Gamma X J(B\Gamma X) + B,$$

и оно может быть найдено методом простых итераций, положив $X_0 = 0, X_1 = B, \dots$

4. Предварительное преобразование подобия. В рассмотренном нами случае в качестве пространства допустимых возмущений удобно брать идеал операторов Гильберта – Шмидта $\mathcal{M} = \mathfrak{S}_2(H)$ (или более узкое пространство, определенное в §5.2). Однако, в общем случае $B \notin \mathfrak{S}_2(H)$, и поэтому необходимо сделать предварительное преобразование подобия оператора $A - B, B \in \mathcal{L}_A(H)$ в оператор $A - Q$, где $Q \in \mathfrak{S}_2(H)$.

Важно отметить, что если B уже принадлежит идеалу $\mathfrak{S}_2(H)$, то предварительное преобразование подобия не требуется.

Подчеркнем еще раз, что основное и предварительное преобразования подобия мы будем строить с использованием матриц операторов, причем операторы часто будут отождествляться со своими матрицами. Подход к предварительному преобразованию подобия, изложенный ниже, отличается от [Baskakov, Krishtal, Uskova, 2019].

Определим два линейных оператора M и N , участвующих в предварительном преобразовании подобия, своими матрицами, положив $M = (M_{ij}), N = (N_{ij}), i, j \in \mathbb{J}$ где

$$M_{ij} = \begin{cases} B_{ij}, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \quad N_{ij} = \begin{cases} \frac{B_{ij}}{\lambda_i - \lambda_j}, & i \neq j, \\ 0, & i = j. \end{cases} \tag{18}$$

Наряду с операторами M и N рассмотрим две последовательности операторов $M^{(n)}$ и $N^{(n)}, n \in \mathbb{Z}_+$, положив

$$M_{ij}^{(n)} = \begin{cases} B_{ij}, & i = j, \\ B_{ij}, & \max\{|i|, |j|\} \leq n, \\ 0, & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad N_{ij}^{(n)} = \begin{cases} \frac{B_{ij}}{\lambda_i - \lambda_j}, & i \neq j \text{ и } \min(|i|, |j|) \geq n, \\ 0, & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \tag{19}$$

$N^{(0)} = N, M^{(0)} = M$. Важно, что операторы $M^{(n)} - M$ и $N^{(n)} - N$ есть операторы конечного ранга.

Операторы $M, N, N^{(n)}$ и $M^{(n)}, n \in \mathbb{Z}_+$, есть операторы Гильберта – Шмидта. Действительно,

$$\|M\|_2^2 = \sum_{i \in \mathbb{J}} \|B_{ii}\|_2^2 < \infty, \tag{20}$$

$$\|N\|_2^2 = \sum_{i, j \in \mathbb{J}, i \neq j} \frac{\|B_{ij}\|_2^2}{|\lambda_i - \lambda_j|^2}. \tag{21}$$

Также очевидно, что

$$(BN)_{ij} = \sum_{l \in \mathbb{J}, l \neq j} \frac{B_{il}B_{lj}}{\lambda_l - \lambda_j} \tag{22}$$

и, следовательно,

$$\|BN\|_2^2 = \sum_{i,j \in \mathbb{J}} \left\| \sum_{l \neq j, l \in \mathbb{J}} \frac{B_{il}B_{lj}}{\lambda_l - \lambda_j} \right\|_2^2 < \infty. \tag{23}$$

Таким образом операторы N, M, BN принадлежат $\mathfrak{S}_2(H)$.

Посчитаем матричные элементы коммутатора $AN - NA$; учтем формулу (5):

$$P_i(AN - NA)P_j = (\lambda_i - \lambda_j)N_{ij} = \begin{cases} B_{ij}, & i \neq j, \\ 0, & i = j. \end{cases}$$

Матричные элементы коммутатора $AN - NA$ совпадают с матричными элементами матрицы $B - M$, т. е. $AN - NA = B - M$. Покажем, что $N(D(A)) \subset D(A)$. Пусть $\lambda_0 \in \rho(A)$, $x \in D(A)$, тогда

$$x = (A - \lambda_0 I)^{-1}y, \quad y \in H,$$

$$\begin{aligned} N(A - \lambda_0 I)^{-1}y &= \sum_{n,m \in \mathbb{J}, n \neq m} \frac{P_m Y P_n}{(\lambda_m - \lambda_n)(\lambda_n - \lambda_0)} = \\ &= \sum_{n,m \in \mathbb{J}, n \neq m} \frac{P_m Y P_n}{(\lambda_m - \lambda_n)(\lambda_m - \lambda_0)} = \sum_{n,m \in \mathbb{J}, n \neq m} \frac{P_m Y P_n}{(\lambda_m - \lambda_0)(\lambda_n - \lambda_0)} = \\ &= (A - \lambda_0 I)^{-1}Ny + (A - \lambda_0 I)^{-1}(B - M)x = (A - \lambda_0 I)^{-1}(Ny + (B - M)x) \in D(A). \end{aligned}$$

Для операторов M и N выполнены все условия предположения 3.1. Напомним, что условие 5) предположения 3.1 есть условие (9) на оператор B .

Заметим, что элементы матрицы оператора $B(A - \lambda_\epsilon I)^{-1}$ имеют вид $\left(\frac{B_{ij}}{\lambda_i - \lambda_\epsilon}\right)$, $i, j \in \mathbb{J}$, $\lambda_\epsilon \in \rho(A)$.

Далее также будет использоваться следующая простая

Лемма 4.1. *Для любого оператора $X \in \mathfrak{S}_2(H)$ имеет место равенство:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|X - P_{(n)} X P_{(n)}\|_2 = 0.$$

Из теоремы 3.2 и леммы 4.1 вытекает

Теорема 4.1. *Есть такое целое $k \geq 0$, что возмущенный оператор $A - B$ подобен оператору*

$$A - M^{(k)} - C^{(k)} = A - Q; C^{(k)} = (I + N^{(k)})(BN^{(k)} - N^{(k)}M^{(k)}),$$

где $C^{(k)}, N^{(k)}, M^{(k)}, N^{(k)}M^{(k)} \in \mathfrak{S}_2(H)$ и имеет место равенство

$$(A - B)(I + N^{(k)}) = (I + N^{(k)})(A - Q), Q \in \mathfrak{S}_2(H).$$

Замечание 4.1. Условие (6) на оператор B , гарантирующее принадлежность оператора M идеалу $\mathfrak{S}_2(H)$, в некоторых случаях можно обойти.

Приведем простой пример.

Пусть B_0 (нулевая диагональ оператора – возмущения B) определяется формулой $B_0 = b_0 I$, $b_0 \in \mathbb{C}$. Тогда $M_0 = b_0 I \notin \mathfrak{S}_2(H)$. В этом случае отнесем оператор $b_0 I$ к невозмущенному оператору. Вместо A невозмущенным считаем $A - b_0 I$, и $M = 0$

Замечание 4.2. Из формул (20) и (23) следует, что операторы M и BN , матричные элементы которых определены формулами (18) и (22) соответственно, принадлежат идеалу операторов Гилберта-Шмидта $\mathfrak{S}_2(H)$. Поэтому в некоторых случаях удобнее вместо проверки неравенств (20) и (23) проверять принадлежность соответствующих операторов идеалу $\mathfrak{S}_2(H)$. В таком случае условия (8), (9) на матрицу оператора B , обеспечивающие выполнение неравенств (20) и (23), также не проверяются.

5. Построение допустимых троек. В этом параграфе будут построены два различных семейства допустимых троек для невозмущенного оператора A с возмущением Q из идеала $\mathfrak{S}_2(H)$. Если у невозмущенного оператора A собственные значения «разбегаются», т. е. $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{dist}(\{\lambda_n\}, \sigma(A) \setminus \{\lambda_n\}) = \infty$, или норма $\|Q\|_2$ возмущения достаточно мала, то в качестве пространства допустимых возмущений можно использовать $\mathfrak{S}_2(H)$. В общем случае мы используем более «узкие» пространства \mathcal{M}_Q , построенные по возмущению Q . (см. §5.2)

5.1. Построение первого семейства допустимых троек $(\mathfrak{S}_2(H), J_m, \Gamma_m)$. В этом пункте в качестве пространства допустимых возмущений \mathcal{M} выступает идеал операторов Гильберта – Шмидта $\mathfrak{S}_2(H)$ из алгебры $End H$. Отметим, что можно считать A обратимым оператором, иначе, вместо A можно рассматривать оператор $A - \mu I, \mu \in \rho(A)$. Допустимые тройки для A и $A - \mu I$ будут одинаковыми.

Поскольку $\mathfrak{S}_2(H) \subset End H \subset \mathcal{L}_A(H)$, имеем $\|Xx\| = \|XA^{-1}Ax\| \leq \|XA^{-1}\| \|Ax\|, X \in \mathfrak{S}_2(H), x \in D(A)$. Таким образом, $\|X\|_A \leq \|XA^{-1}\|$.

Перейдем к построению трансформаторов $J, \Gamma \in End(\mathfrak{S}_2(H))$.

Для $X \in \mathfrak{S}_2(H)$ определим трансформаторы JX и ΓX матрицами:

$$(JX)_{ij} = \begin{cases} X_{ij}, i = j, \\ 0, i \neq j, \end{cases} \tag{24}$$

$$(\Gamma X)_{ij} = \begin{cases} \frac{X_{ij}}{\lambda_i - \lambda_j}, i \neq j, \\ 0, i = j. \end{cases} \tag{25}$$

Очевидно, что $JX = \sum_{n \in \mathbb{J}} P_n X P_n$ и выписанный ряд безусловно сходится в $\mathfrak{S}_2(H)$, $\|JX\|_2^2 = \sum_{i \in \mathbb{J}} \|P_i X P_i\|_2^2 \leq \|X\|_2^2$, т. е. из $X \in \mathfrak{S}_2(H)$ следует, что $JX \in \mathfrak{S}_2(H)$.

Покажем, что $\Gamma X \in \mathfrak{S}_2(H)$ для $X \in \mathfrak{S}_2(H)$.

Действительно,

$$\|\Gamma X\|_2^2 = \sum_{i, j \in \mathbb{J}, i \neq j} \frac{\|X_{ij}\|_2^2}{|\lambda_i - \lambda_j|^2} \leq \frac{1}{\beta^2} \sum_{i, j \in \mathbb{J}, i \neq j} \|X_{ij}\|_2^2 \leq \frac{1}{\beta^2} \|X\|_2^2, \tag{26}$$

где β определено формулой (1).

Теорема 5.1. *Тройка $(\mathfrak{S}_2(H), J, \Gamma)$ является допустимой тройкой для оператора A .*

Доказательство. Доказательство теоремы аналогично доказательству леммы 3.5 из [Baskakov, Krishtal, Uskova, 2019].

Наряду с трансформаторами $J, \Gamma \in End(\mathfrak{S}_2(H))$, введем в рассмотрение семейства трансформаторов $J_k, \Gamma_k \in End(\mathfrak{S}_2(H)), k \in \mathbb{Z}_+$, формулами

$$J_k X = P_{(k)} X P_{(k)} + \sum_{|i| > k, i \in \mathbb{J}} P_i X P_i, X \in \mathfrak{S}_2(H) \tag{27}$$

$$\Gamma_k X = \Gamma X - P_{(k)} \Gamma X P_{(k)} = \Gamma(X - J_k X), X \in \mathfrak{S}_2(H), \tag{28}$$

при этом $J_0 X = JX, \Gamma_0 X = \Gamma X$. Операторы $J_k X$ и $\Gamma_k X, k \in \mathbb{Z}_+$, определены корректно, все выше-описанные ряды сходятся в $\mathfrak{S}_2(H)$. Отметим, что операторы $JX - J_k X, \Gamma X - \Gamma_k X$ есть операторы конечного ранга. Поэтому имеет место

Теорема 5.2. *Тройка $(\mathfrak{S}_2(H), \Gamma_k X, J_k X)$ является допустимой для оператора A тройкой при любом $k \in \mathbb{Z}_+$.*

Из теоремы 5.1 и теоремы 3.1 следует

Теорема 5.3. *Пусть оператор Q такой, что*

$$\|Q\|_2 \leq \frac{\beta}{4}. \tag{29}$$

Тогда оператор $A - Q$ подобен оператору $A - JX_ = A - V, X_*, V \in \mathfrak{S}_2(H)$, имеющему диагональную операторную матрицу. Имеет место равенство*

$$(A - Q)(I + \Gamma X_*) = (I + \Gamma X_*)(A - V),$$

где оператор $X_ \in \mathfrak{S}_2(H)$ есть решение нелинейного операторного уравнения (16).*

Отметим, что довольно жесткое условие (29) можно снять в том случае, если собственные значения оператора A «разбегаются» т. е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} dist(\{\lambda_n\}, \sigma(A) \setminus \{\lambda_n\}) = \infty. \tag{30}$$

Тогда рассматривается тройка $(\mathfrak{S}_2(H), J_n, \Gamma_n)$ и константа γ , аналогично (26), оценивается следующей величиной

$$\gamma = \gamma_n = (dist(\{\lambda_n\}, \sigma(A) \setminus \{\lambda_n\}))^{-1},$$

при этом очевидно, что величину γ_n можно сделать малой.

Теорема 5.4. *При выполнении условия (30). Существует такое $m \in \mathbb{Z}_+$, что оператор $A - Q$ подобен оператору блочно-диагонального вида $A - V$ и*

$$(A - Q)(I + \Gamma_m X_*) = (I + \Gamma_m X_*)(A - V),$$

где операторы $V, X_* \in \mathfrak{S}_2(H)$ и X_* есть решение нелинейного операторного уравнения (16) с трансформаторами $J_m, \Gamma_m \in \text{End}(\mathfrak{S}_2(H))$, определенным формулами (27), (28).

Из теорем 5.3, 5.4, 4.1 вытекает

Теорема 5.5. *Пусть выполняется условие теоремы 5.3 или 5.4. Тогда исходный оператор $A - B$ подобен оператору $A - V, V \in \mathfrak{S}_2(H)$, имеющему матрицу диагонального (блочно-диагонального) вида. Оператором преобразования оператора $A - B$ в оператор $A - V$ служит оператор*

$$(I + M^{(k)})(I + \Gamma_m X_*) = I + U_{km},$$

где $U_{km} \in \mathfrak{S}_2(H)$.

Отметим, что для оператора Дирака из [Баскаков, Дербушев, Щербаков, 2011], [Ускова, 2019] или дифференциальных операторов первого порядка с инволюцией из [Баскаков, Ускова, 2018], [Криштал, Ускова, 2019], [Baskakov, Krishtal, Uskova, 2018] предположения теорем 5.3 и 5.4 не выполнено в общем случае. Поэтому для них строится другое семейство допустимых троек.

5.2. Построение допустимой тройки (M_Q, J_k, Γ_k) . Ниже будут использоваться пространства допустимых возмущений M_Q . По любому ненулевому оператору $X \in \mathfrak{S}_2(H)$ построим двустороннюю последовательность вещественных чисел вида

$$\alpha_n(X) = \|X\|_2^{-\frac{1}{2}} \max \left\{ \left(\sum_{|k| \geq n, k \in \mathbb{J}} \|P_k X\|_2^2 \right)^{\frac{1}{4}}, \left(\sum_{|k| \geq n, k \in \mathbb{J}} \|X P_k\|_2^2 \right)^{\frac{1}{4}} \right\}, n \in \mathbb{Z}. \quad (31)$$

Последовательность $(\alpha_n(X))_{n \in \mathbb{Z}}$ обладает следующими свойствами:

- 1) $\alpha_n(X) = \alpha_{-n}(X), n \in \mathbb{Z}$;
- 2) $\lim_{|n| \rightarrow \infty} \alpha_n(X) = 0, n \in \mathbb{Z}$;
- 3) $\alpha_n(X) \leq 1$ для всех $n \in \mathbb{Z}$;
- 4) $\alpha_n(X) \geq \alpha_{n+1}(X), n \geq 0$;
- 5) $\alpha_n(X) \neq 0$ для всех $n \in \mathbb{Z}$, если $P_{(m)} X P_{(m)} \neq X$ для всех $m \in \mathbb{Z}_+$;
- 6) конечна величина

$$\sum_{n \in \mathbb{J}} \frac{\|X P_n\|_2^2 + \|X P_n\|_2^2}{(\alpha_n(X))^2}.$$

Без ограничения общности в дальнейшем будем считать, что $P_{(n)} Q P_{(n)} \neq 0$ для всех $n \in \mathbb{Z}_+$.

Для любого оператора $X \in \mathfrak{S}_2(H)$ также зададим самосопряженный компактный оператор F :

$$F_X = \sum_{n \in \mathbb{J}} \alpha_n(X) P_n,$$

$F_X \in \text{End } H$ — функция от нормального оператора A и $\|F_X\|_\infty = \max |\alpha_n(X)| = 1$.

Пусть $F_Q = F$. Введем множество операторов $M_Q \subset \mathfrak{S}_2(H)$, представляемых в виде

$$X = X_l F, \quad X = F X_r,$$

где $X_l, X_r \in \mathfrak{S}_2(H)$. Зададим в M_Q норму $\|X\|_{M_Q} = \max\{\|X_l\|_2, \|X_r\|_2\}$, $\|X\|_2 \leq \|X\|_{M_Q}, X \in M_Q$.

Из свойства 5) последовательности $(\alpha_n(X))_{n \in \mathbb{Z}}$ следует, что M_Q является банаховым пространством.

Очевидно, что любой оператор X из $\mathfrak{S}_2(H)$ можно записать как

$$X = \left(\sum_{n \in \mathbb{J}} \frac{1}{\alpha_n(X)} X P_n \right) F_X = F_X \left(\sum_{n \in \mathbb{J}} \frac{1}{\alpha_n(X)} P_n X \right).$$

Следовательно, $Q \in M_Q$.

Отметим, что последовательность $\alpha : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}_+$ характеризует скорость убывания матричных элементов оператора $X \in \mathfrak{S}_2(H)$ по строкам и столбцам.

Поскольку $M_Q \subset \mathfrak{S}_2(H)$, то трансформаторы J_k и $\Gamma_k, k \geq 0$, задаваемые формулами (24), (25), (27), (28), определены и для операторов из M_Q . Более того,

$$J_k(X_l F) = (J_k X_l) F, \quad J_k(F X_r) = F(J_k X_r),$$

$$\Gamma(X_l F) = (\Gamma_k X_l) F, \quad \Gamma_k(F X_r) = F(\Gamma_k X_r),$$

где $X_r, X_l \in \mathfrak{S}_2(H)$.

Для оценки норм $\|\Gamma_k(XF)\|_2$ и $\|\Gamma_k(FX)\|_2, X \in \mathfrak{S}_2(H)$, рассмотрим две последовательности $(\alpha'_n), n \in \mathbb{N}$ и $(\tilde{\alpha}'_n), n \in \mathbb{N}$, определенные формулами

$$\alpha'_{n+1} = \max\{\lambda_l d_{jl}^{-1}, l, j \in \mathbb{J}, |l| \leq n, |j| > n\}, \tag{32}$$

$$\tilde{\alpha}'_n = (\beta^{-1} \alpha_n + \alpha'_n), n \in \mathbb{N}, \tag{33}$$

где $d_{ij} = \text{dist}(\sigma_i, \sigma_j), i, j \in \mathbb{J}$. Последовательности (α'_n) и $(\tilde{\alpha}'_n)$ принадлежат пространству сходящихся к нулю последовательностей, т. е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha'_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\alpha}'_n = 0. \tag{34}$$

Аналогично [Баскаков, Дербушев, Щербаков, 2011, Лемма 3] доказывается

Лемма 5.1. Для каждого $k \in \mathbb{Z}_+$ и $X \in \mathfrak{S}_2(H)$ имеют место оценки

$$\max\{\|\Gamma_k(XF)\|_2, \|\Gamma_k(FX)\|_2\} \leq \tilde{\alpha}'_{k+1} \|X\|_2.$$

Теорема 5.6. [Baskakov, Krishtal, Uskova, 2019, Proposition 3.7] Тройка (M_Q, J_k, Γ_k) является допустимой тройкой для невозмущенного оператора A для любого $k \in \mathbb{Z}_+$ и постоянная $\gamma = \gamma_k$ из определения 3.2 допускает оценку

$$\gamma_k \leq \tilde{\alpha}'_{k+1}, \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Из теоремы 5.6 и теоремы 3.1 следует

Теорема 5.7. Пусть целое $k \geq 0$ такое, что выполняется равенство

$$4\tilde{\alpha}'_{k+1} \|Q\|_{M_Q} < 1. \tag{35}$$

Тогда оператор $A - Q$ подобен блочно-диагональному оператору $A - J_k X_* = A - P_{(k)} X_* P_{(k)} - \sum_{|i|>k, i \in \mathbb{J}} P_i X_* P_i = A - V$, где $X_* \in M_Q$ – решение нелинейного уравнения (16). Оператор преобразования $A - Q$ в оператор $A - V$ есть оператор $I + \Gamma X_*$, $\Gamma X_* \in M_Q \subset \mathfrak{S}_2(H)$.

Теорема 5.8. В условиях теоремы 5.7 исходный оператор $A - B$ подобен оператору $A - V$, где V принадлежит $\mathfrak{S}_2(H)$ и имеет матрицу блочно-диагонального вида. Оператором преобразования оператора $A - B$ в оператор $A - V$ служит оператор

$$(I + M^{(k)})(I + \Gamma_m X_*) = I + U_{km}, U_{km} \in \mathfrak{S}_2(H), X_* \in \mathfrak{S}_2(H), m \geq 0.$$

6. Оценки спектральных характеристик оператора $A - B$.

6.1. Оценки спектра. Из теорем 5.5 и 5.7 следует очевидная

Лемма 6.1. $\sigma(A - B) = \sigma(A - V) = \sigma(A - P_{(m)} X_* P_{(m)} - \sum_{|i|>m} P_i X_* P_i)$, где X_* – решение операторного уравнения (16).

Особо подчеркнем, что оператор $A - V$ имеет блочно-диагональный вид, что существенно облегчает исследование его спектральных свойств.

Лемма 6.2. В условиях теоремы 5.5 или 5.7 спектр оператора $A - B$ представим в виде объединения взаимно пересекающихся конечных множеств $\tilde{\sigma}_{(m)}, \tilde{\sigma}_i, |i| > m$, причем

$$\tilde{\sigma}_{(m)} = \sigma((A - P_i X_*)|_{H_{(m)}}) = \sigma(\tilde{A}_{(m)}), \quad H_{(m)} = \text{Im} P_{(m)},$$

$$\tilde{\sigma}_i = \sigma((A - P_i X_*)|_{H_i}) = \sigma(\tilde{A}_i), \quad H_i = \text{Im} P_i, |i| > m, i \in \mathbb{J},$$

$$\sigma(A - B) = \sigma(\tilde{A}_{(m)}) \cup \left(\bigcup_{|i|>m, i \in \mathbb{J}} \sigma(\tilde{A}_i) \right) = \tilde{\sigma}_{(m)} \cup \left(\bigcup_{|i|>m, i \in \mathbb{J}} \tilde{\sigma}_i \right).$$

Доказательство. Для доказательства равенства (36) необходимо проверить два включения

$$\sigma(A - B) \subset \tilde{\sigma}_{(m)} \cup \left(\bigcup_{|i|>m, i \in \mathbb{J}} \tilde{\sigma}_i \right),$$

$$\tilde{\sigma}_{(m)} \cup \left(\bigcup_{|i|>m, i \in \mathbb{J}} \tilde{\sigma}_i \right) \subset \sigma(A - B).$$

Оператор $A - V$ перестановочен со всеми операторами $P_{(m)}, P_i, |i| > m$ и пространства $H_{(m)}, H_i, |i| > m$ является для него инвариантными.

Из компактности резольвенты оператора $A - V$ следует компактность резольвенты оператора $A - B$. Поэтому если $\lambda_0 \in \sigma(A - V)$, то существует собственный вектор $x_0 \in D(A)$ такой, что $(A - V)x_0 = \lambda_0 x_0$. Следовательно, имеют места равенства

$$\tilde{A}_{(m)} P_{(m)} x_0 = \lambda_0 P_{(m)} x_0, \quad \tilde{A}_i P_i x_0 = \lambda_0 x_0, |i| > m + 1.$$

Система проекторов $P_{(m)}, P_i, |i| > m$ образует разложение единицы: $x = P_{(m)} x + \sum_{|i|>m} P_i x, x \in H$, хотя бы один из векторов $P_{(m)} x_0, P_i x_0, |i| > m$ ненулевой. Следовательно, λ_0 – собственное значение каждого из операторов $\tilde{A}_{(m)}, \tilde{A}_i, |i| > m$.

Пусть $\lambda_0 \in \sigma(\tilde{A}_l)$ для некоторого $|l| > m$, тогда $\tilde{A}_l P_l x_0 = \lambda_0 P_l x_0, x_0 \in D(A)$ – соответствующий вектор. Применим оператор $A - V$ к вектору $x_0 = P_l x_0, |l| > m$, $(A - V)x_0 = (A - P_{(m)} X_* P_{(m)} - \sum_{|i|>m} P_i X_* P_i) P_l x_0 = (A P_l - P_l X P_l) P_l x_0 - \tilde{A}_l P_l x_0 = \lambda_0 P_l x_0$. Лемма доказана.

Замечание 6.1. В общем случае спектр оператора E с блочно-диагональной матрицей может не совпадать с объединением спектров его блоков E_i и даже с его замыканием. Приведем простой пример. У оператора E , заданного бесконечной блочно-диагональной матрицей вида

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & & & \\ 0 & 0 & & & & & & & \dots \\ & & 0 & 1 & 0 & & & & \\ & 0 & 0 & 0 & 1 & & & & \dots \\ & & & 0 & 0 & 0 & & & \\ & & & & & & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & 0 & & & & & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & & & & & & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & & \ddots \end{pmatrix},$$

спектральный радиус равен единице, и $\sigma(E_i) = \{0\}, i \in \mathbb{J}$.

Из леммы 6.2 следует, что важной задачей является вычисление спектра операторов $\tilde{A}_i, |i| > k, i \in \mathbb{J}$.

Вернемся к оператору X_* – решению нелинейного операторного уравнения (16) и оценим его блок $P_i X_* P_i$, который и используется далее в спектральном анализе. Имеем:

$$P_i X_* P_i = P_i Q \Gamma_m X_* P_i + P_i Q P_i,$$

откуда

$$P_i X_* P_i = P_i Q P_i + P_i Q \Gamma_m Q P_i + P_i Q \Gamma_m (X - Q) P_i = P_i Q P_i + T_{0i},$$

где оператор T_{0i} принадлежит идеалу ядерных операторов $\mathfrak{S}_1(H)$. Отметим также, что из теоремы 4.1 следует, что

$$P_i Q P_i = P_i B P_i + P_i (I + N^{(k)})^{-1} (B N^{(k)} - N^{(k)} M^{(k)}) P_i = P_i B P_i + P_i B N^{(k)} P_i + T_{1i}, \\ |i| > k, T_{1i} \in \mathfrak{S}_1(H).$$

Поэтому, собирая все вместе, получим равенства

$$P_i X_* P_i = P_i B P_i + P_i B N^{(k)} P_i + T_i, \quad T_i \in \mathfrak{S}_1(H).$$

Напомним также, что элементы матрицы $B N^{(k)}$ определены формулой (18), и, следовательно, при $|i| > \max\{k, m\}$ имеют место равенства

$$P_i B N^{(k)} P_i = \sum_{l \neq i} \frac{B_{il} B_{li}}{\lambda_l - \lambda_i}.$$

Определение 6.1. Число $\hat{\lambda}$, определенное формулой

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \lambda_i,$$

называется взвешенным средним значением собственных значений $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

Перед тем, как сформулировать основной результат данного параграфа, введем следующее обозначение: $l_i = \dim \text{Im} P_i, i \in \mathbb{J}$, и пусть матрицы $P_i B P_i$ и $P_i B N^{(k)} P_i, i \in \mathbb{J}, |i| > t$, состоят из элементов $b_{nj}^i, 1 \leq n, j \leq l_i$ и $\tilde{b}_{nj}^i, 1 \leq n, j \leq l_i$ соответственно.

Теорема 6.1. *Имеет место следующее асимптотическое представление:*

$$\hat{\lambda}_i = \lambda_i - \frac{1}{l_i} \sum_{n=1}^{l_i} b_{nn}^i - \frac{1}{l_i} \sum_{n=1}^{l_i} \tilde{b}_{nn}^i + \beta_i, \text{ где } \beta_i \in \ell_1(\mathbb{J}). \quad (36)$$

Доказательство. Подпространства $\text{Im} P_i, |i| > t$, конечномерны, а в конечномерном подпространстве спектральный след равен матричному.

Следствие 6.1. *Если $\dim \text{Im} P_i = 1, |i| > t, i \in \mathbb{J}$, то для каждого из собственных значений $\tilde{\lambda}_i, |i| > t$ исходного оператора $A - B$ имеет место асимптотическая формула*

$$\tilde{\lambda}_i = \lambda_i - b_{ii} - \sum_{l \neq i} \frac{b_{il} b_{li}}{\lambda_l - \lambda_i} + \beta_i, \text{ где } \beta_i \in \ell_1(\mathbb{J}). \quad (37)$$

Результат теоремы 6.1 можно сформулировать несколько иначе, в русле работы [Баскаков, Поляков, 2017]. Приведем соответствующую формулировку. Для этого нам понадобится последовательность матриц

$$\Psi_n = P_i B P_i + P_i B N^{(k)} P_i = B_{ii} + \sum_{l \neq i} \frac{B_{il} B_{li}}{\lambda_l - \lambda_i}.$$

Теорема 6.2. *Имеет место оценка*

$$\sum_{|n| > k} \frac{1}{\alpha_n^2} \sum_{l=1}^{l_i} |\tilde{\lambda}_{n,l} - \lambda_n|^2 < \infty,$$

где $\lambda_n, |n| > k$, – собственные значения невозмущенного оператора A , $\tilde{\lambda}_{n,l}$ – собственные значения блока $P_n(A - X_*)P_n$ и последовательность $\alpha : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ определена формулой (31). Более того,

$$\sigma_n = \{\lambda_n - \sigma(\Phi_n)\}, \quad |n| > k,$$

и Φ_n есть такая матрица, что последовательность

$$|\hat{\lambda}(\Phi_n) - \hat{\lambda}(\Psi_n)|, \quad |n| > k,$$

суммируема.

Замечание 6.2. Если к исходному оператору $A - B$ не применялось предварительное преобразование подобия (другими словами, если возмущение B изначально принадлежало идеалу $\mathfrak{S}_2(H)$), то формулы (36) и (37) переписутся в виде

$$\hat{\lambda}_i = \lambda_i - \frac{1}{l_i} \sum_{n=1}^{l_i} b_{nn}^i + \delta_i, \quad (38)$$

$$\tilde{\lambda}_i = \lambda_i - b_{ii} + \delta_i, \quad (39)$$

где последовательность δ_i принадлежит $\ell_1(\mathbb{J})$.

В формулах (38) и (39) учтено, что оператор $B G X_*$ принадлежит $\mathfrak{S}_1(H)$, если $B \in \mathfrak{S}_2(H)$.

6.2. Оценки спектральных проекторов. В этом параграфе изложение проводится в условиях подобия оператора $A - B$ оператору $A - Q, Q \in \mathfrak{S}_2(H)$. Напомним, что символом $P_l, l \in \mathbb{J}$, обозначены спектральные проекторы невозмущенного оператора A из формулы (2), $P_{(k)} = \sum_{|i| \leq k, i \in \mathbb{J}} P_i$. Обозначим через $\tilde{P}_n, |n| > k$, спектральные проекторы оператора $A - B$, построенные по спектральным множествам $\tilde{\sigma}_n$ из леммы 6.2, $\tilde{P}_{(k)} = \sum_{|i| \leq k} \tilde{P}_i$. Мы приходим к двум разложениям единицы:

$$I = P_{(k)} + \sum_{|i| > k} P_i, \quad I = \tilde{P}_{(k)} + \sum_{|i| > k} \tilde{P}_i.$$

Отметим, что $\tilde{P}_i = (I + U_{km})P_i(I + U_{km})^{-1}, \tilde{P}_{(k)} = (I + U_{km})P_{(k)}(I + U_{km})^{-1}$. Откуда

$$\tilde{P}_i - P_i = (U_{km}P_i - P_iU_{km})(I + U_{km})^{-1} \in \mathfrak{S}_2(H), \quad (40)$$

$$\tilde{P}_{(k)} - P_{(k)} = (U_{km}P_{(k)} - P_{(k)}U_{km})(I + U_{km})^{-1} \in \mathfrak{S}_2(H).$$

Для любого подмножества $\Omega \in \mathbb{Z} \setminus \{-k, \dots, -1, 0, 1, \dots, k\}$ (не обязательно конечного) через $P(\Omega)$ обозначим спектральные проекторы $P(\Omega) = \sum_{j \in \Omega \cap \mathbb{J}} P_j$, $\tilde{P}(\Omega) = \sum_{j \in \Omega \cap \mathbb{J}} \tilde{P}_j$. Очевидно, что $\tilde{P}(\Omega) - P(\Omega) = (U_{km}P(\Omega) - P(\Omega)U_{km})(I + U_{km})^{-1} \in \mathfrak{S}_2(H)$. Для любого оператора $X \in \mathfrak{S}_2(H)$ определим величину

$$\alpha(\Omega, X) = \max_{n \in \Omega} \alpha_n(X), \quad \Omega \subset \mathbb{Z},$$

где последовательность $\alpha : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ определена формулой (31). Отметим, что даже в случае использования первой допустимой тройки $(\mathfrak{S}_2(H), J_{(k)}, \Gamma_{(k)})$ для оценки проекторов удобнее брать последовательность $\alpha : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$.

Лемма 6.3. [Baskakov, Krishtal, Uskova, 2019]. *Имеет место оценка*

$$\max\{\|U_{km}P(\Omega)\|, \|P(\Omega)U_{km}\|\} \leq C(U_{km})\alpha(\Omega, U_{km}).$$

Теорема 6.3. [Baskakov, Krishtal, Uskova, 2019]. *Имеет место оценка*

$$\|\tilde{P}(\Omega) - P(\Omega)\|_2 \leq \alpha(\Omega, Q)C(U_{km}, Q),$$

где константа $C(U_{km}, Q) > 0$ не зависит от Ω .

Доказательство теоремы 6.3 вытекает из (40) и леммы 6.3.

Список литературы

1. Баскаков А. Г. 1985. Метод усреднения в теории возмущений линейных дифференциальных операторов. Дифференц. уравнения, 21(4): 555–562.
2. Баскаков А. Г. 1983. Методы абстрактного гармонического анализа в теории возмущений линейных операторов. Сиб. матем. журн., 24(1): 27–39.
3. Баскаков А. Г. 1997. Оценки элементов обратных матриц и спектральный анализ линейных операторов. Изв. РАН. Сер. Матем., 61(6): 3–26. DOI: <https://doi.org/10.4213/im164>
4. Баскаков А. Г. 1999. Об абстрактном аналоге преобразования Крылова-Боголюбова в теории возмущений линейных операторов. Функц. анализ и его прил., 33(2): 76–80. DOI: <https://doi.org/10.4213/faa357>
5. Баскаков А. Г., Дербушев А. В., Щербаков А. О. 2011. Метод подобных операторов в спектральном анализе оператора Дирака с негладким потенциалом. Изв. РАН. Сер. матем., 75(3): 3–28. DOI: <https://doi.org/10.4213/im4202>
6. Баскаков А. Г., Поляков Д. М. 2017. Метод подобных операторов в спектральном анализе оператора Хилла с негладким потенциалом. Матем. сб., 208(1): 3–47. DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8637>
7. Баскаков А. Г., Ускова Н. Б. 2018. Метод Фурье для дифференциальных уравнений первого порядка с инволюцией и группы операторов. Уфимск. матем. журн., 10(3): 11–34.
8. Бурлуцкая М. Ш. 2014. О смешанной задаче для уравнения с частными производными первого порядка с инволюцией и с периодическими краевыми условиями. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 54(1): 3–12. DOI: <https://doi.org/10.7868/S0044466914010050>
9. Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П. 2014. Смешанная задача для простейшего гиперболического уравнения первого порядка с инволюцией. Изв. Саратов. ун-та. Нов. серия. Сер. Математика, Механика, Информатика, 14(1): 10–20. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2014-14-1-10-20>
10. Гаркавенко Г. В., Ускова Н. Б. 2017. Метод подобных операторов в исследовании спектральных свойств разностных операторов с растущим потенциалом. Сиб. электр. матем. изв., 14: 673–689. DOI: <https://doi.org/10.17377/semi.2017.14.058>
11. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. 1965. Введение в теорию несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. М., Наука, 448 с.
12. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. 1974. Линейные операторы. Спектральные операторы, Т. 3. М., Мир, 662 с.

13. Криштал И. А., Ускова Н. Б. 2019. Спектральные свойства дифференциальных операторов первого порядка с инволюцией и группы операторов. Сиб. электр. матем. изв., 16: 1091–1132. DOI: <https://doi.org/10.33048/semi.2019.16.076>
14. Рудин У. 1975. Функциональный анализ. М., Мир, 449 с.
15. Ситник С. М., Шишкина Э. Л. 2019. Метод операторов преобразования для дифференциальных уравнений с оператором Бесселя. М., Физматлит, 220 с.
16. Ускова Н. Б. 2019. Спектральные свойства оператора Дирака с негладким потенциалом общего вида и группы операторов. Дифференц. уравнения, 55(8): 1154–1158. DOI: [10.1134/S0374064119080132](https://doi.org/10.1134/S0374064119080132)
17. Baskakov A. G., Krishtal I. A. 2014. Memory estimation of inverse operators. J. Funct. Anal., 267: 2551–2605. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jfa.2014.07.025>
18. Baskakov A. G., Krishtal I. A., Uskova N. B. 2018. Linear differential operator with an involution as a generation of an operator group. J. Oper. Matr., 12(3): 723–756. DOI: [10.7153/oam-2018-12-43](https://doi.org/10.7153/oam-2018-12-43)
19. Baskakov A. G., Krishtal I. A., Uskova N. B. 2019. Similarity techniques in the spectral analysis of perturbed operator matrices. J. Math. Anal. Appl., 477: 930–960. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2019.04.050>

References

1. Baskakov A. G. 1985. The averaging method in the theory of perturbations of linear differential operator. Differ. Equ., 21(4): 555–562. (in Russian)
2. Baskakov A. G. 1983. Methods of abstract harmonic analysis in the perturbation of linear operators. Siberian Math. J., 24(1): 17–32. (in Russian)
3. Baskakov A. G. 1997. Estimates for the elements of inverse matrices and the spectral analysis of linear operators. Izv. Math., 61(6): 1113–1135. DOI: [10.1070/IM1997v061n06ABEH000164](https://doi.org/10.1070/IM1997v061n06ABEH000164). (in Russian)
4. Baskakov A. G. 1999. An abstract analog of the Krylov-Bogolyubov transformation in the perturbation theory of linear operators. Funct. Anal. Appl., 33(2): 144–147. DOI: [10.1007/BF02465196](https://doi.org/10.1007/BF02465196). (in Russian)
5. Baskakov A. G., Derbushev A. V., Shcherbakov A. O. 2011. The method of similar operators in the spectral analysis of non-self-adjoint Dirac operators with non-smooth potentials. Izv. Math., 75(3): 445–469. DOI: [10.1070/IM2011v075n03ABEH002540](https://doi.org/10.1070/IM2011v075n03ABEH002540). (in Russian)
6. Baskakov A. G., Polyakov D. M. 2017. The method of similar operators in the spectral analysis of the Hill operator with nonsmooth potentials. Sb. Math., 208(1): 1–43. DOI: [10.1070/SM8637](https://doi.org/10.1070/SM8637). (in Russian)
7. Baskakov A. G., Uskova N. B. 2018. Fourier method for first order differential equations with an involution and groups of operators. Ufa Math. J., 10(3): 11–34. DOI: <https://doi.org/10.13108/2018-10-3-11>. (in Russian)
8. Burlutskaya M. Sh. 2014. Mixed problem for the first-order partial differential equation with involution and periodic boundary conditions. Comput. Math. Math. Phys., 54(1): 1–10. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0965542514010059>. (in Russian)
9. Burlutskaya M. Sh., Khromov A. P. 2014. Mixed problem for simplex hyperbolic first-order equations with involution. Izv. Saratov Univ. (N.S.). Ser. Math. Mech. Inform., 14(1): 10–20 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2014-14-1-10-20>
10. Garkavenko G. B., Uskova N. B. 2017. Method of similar operators in research of spectral properties of difference operators with growing potential. Siberian Electronic Math. Reports, 14: 673–689 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.17377/semi.2017.14.058>
11. Gohberg I. Ts., Krein M. G. 1969. An introduction to the theory of linear nonselfadjoint operators in Hilbert space. Providence, RI, Amer. Math. Soc., 378. (in Russian)
12. Dunford N., Schwartz J. T. 1973. Linear operators. Spectral operators. V. III. New York, Pure and Applied Mathematics, VII, Wiley-Interscience, 688 p. (in Russian)

13. Krishtal I. A., Uskova N. B. 2019. Spectral properties of first-order differential operators with an involution and groups of operators. *Siberian Electronic Math. Reports*, 16: 1091–1132. DOI: <https://doi.org/10.33048/semi.2019.16.076>. (in Russian)
14. Rudin W. 1973. *Functional analysis*. McGraw-Hill book company, 448. (in Russian)
15. Sitnik S. M., Shishkina E. L. 2019. The transmutation method for differential equations with a Bessel operator. *Fizmatlit*, 220 p (in Russian).
16. Uskova N. B. 2019. Spectral properties of the Dirac Operator with a nonsmooth potential of the general form and operator groups. *Differ. Equ.*, 55(8): 1154–1158. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0012266119080135>. (in Russian)
17. Baskakov A. G., Krishtal I. A. 2014. Memory estimation of inverse operators. *J. Funct. Anal.*, 267:2551–2605. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jfa.2014.07.025>
18. Baskakov A. G., Krishtal I. A., Uskova N. B. 2018. Linear differential operator with an involution as a generation of an operator group. *J. Oper. Matr.*, 12(3): 723–756. DOI: 10.7153/oam-2018-12-43
19. Baskakov A. G., Krishtal I. A., Uskova N. B. 2019. Similarity techniques in the spectral analysis of perturbed operator matrices. *J. Math. Anal. Appl.*, 477: 930–960. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2019.04.050>

Получена 08.04.2020

Баскаков Анатолий Григорьевич – профессор, ведущий научный сотрудник Северо-Осетинского государственного университета им. К. Л. Хетагурова
ул. Ватутина, 44–46, г. Владикавказ, Северная Осетия – Алания, Россия, 362025
E-mail: anatbaskakov@yandex.ru

Криштал Илья Аркадьевич – кандидат физико-математических наук, доцент, профессор Университета Северного Иллинойса
WH320 Department of Mathematical sciences, DeKalb, IL, USA, 60115
E-mail: ikrishtal@niu.edu

Ускова Наталья Борисовна – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент Воронежского государственного технического университета
ул. 20 лет Октября, 84, г. Воронеж, Россия, 394006
E-mail: nat-uskova@mail.ru

ОБ ОДНОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ В ПЛОСКОМ УГЛЕ ДЛЯ СИНГУЛЯРНОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ВТОРОГО ПОРЯДКА

Н. В. Королев, А. А. Ларин

(Статья представлена членом редакционной коллегии С. М. Ситником)

ВУНЦ ВВС «ВВА им. проф. Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина»,
г. Воронеж, 394064, Россия

E-mail: korolevn33@yandex.ru, dohior@yandex.ru

Аннотация. В работе решена спектральная задача специального вида для сингулярного эллиптического оператора второго порядка в неограниченном угловом секторе на плоскости. Показана перестройка собственных значений и изменение формы собственных функций при вариации угла раствора сектора. Установлена необходимость изменения граничных условий при трансформации области поиска решения от углового сектора к полуплоскости.

Ключевые слова: B -эллиптическое уравнение, собственные значения, собственные функции, задача Штурма-Лиувилля.

Для цитирования: Королев Н. В., Ларин А. А. 2020. Об одной спектральной задаче в плоском угле для сингулярного эллиптического дифференциального оператора второго порядка. Прикладная математика & Физика, 52(2): 86–92. DOI 10.18413/2687-0959-2020-52-2-86-92.

ON A SPECTRAL PROBLEM IN THE PLANE ANGLE FOR SECOND ORDER SINGULAR DIFFERENTIAL OPERATOR

N. V. Korolev, A. A. Larin

(Article submitted by a member of the editorial board C. M. Sitnik)

MESC AF «N. E. Zhukovsky and Y. A. Gagarin Air Force Academy»,
Voronezh, 394064, Russia

E-mail: korolevn33@yandex.ru, dohior@yandex.ru

Received April 21, 2020

Abstract. In this paper the spectral problem of a special form for the singular elliptic operator of the second order in an unbounded angular sector on a plane is solved. The rearrangement of eigenvalues and changing the shape of eigenfunctions with variations in the sector angle is shown. The necessity of changing the boundary conditions during the transformation of the solution search area from an angular sector to a half-plane is established.

Key words: B -elliptic equation, eigenvalues, eigenfunctions, Sturm-Liouville problem.

For citation: Korolev N. V., Larin A. A. 2020. On a spectral problem in the plane angle for second order singular differential. Applied Mathematics & Physics, 52(2): 86–92 (in Russian).

DOI 10.18413/2687-0959-2020-52-2-86-92.

1. Введение. Начиная с работы [Келдыш, 1951], в теории дифференциальных уравнений с частными производными сформировалось направление, в работах которого изучаются краевые задачи для сингулярных и вырождающихся эллиптических уравнений. Специфика постановок таких задач определяется как наличием особенностей в коэффициентах уравнений [Киприянов, 1997], так и допустимым поведением искомого решения в рассматриваемой области [Ландис, 1971; Катрахов, Ситник, 2018]. Последнее замечание относится даже к уравнениям с гладкими коэффициентами [Катрахов, Ситник, 2018]. Требования, предъявляемые к решению, такие как, например, его ограниченность, определяют особенность постановки соответствующих краевых условий. Примером такой задачи, в которой ищутся непрерывные, а потому локально ограниченные решения сингулярного эллиптического уравнения, подчиненные некоторому нелокальному условию, служит задача для стационарного уравнения Шредингера с кулоновским центрально-симметричным потенциалом. Актуальность подобной задачи в последнее время обусловлена исследованиями в области оптических свойств низкоразмерных систем, в которых достигается квантование энергетических

уровней носителей заряда хотя бы в одном направлении [Klingshirn, 2005]. В частности, особый интерес связан с процессами оптического поглощения и люминесценции в квантовых точках [Klimov, 2010; Gavrilenko, 2011], в том числе с участием донорно-акцепторных пар [Ovchinnikov et al., 2016; Mora-Ramos et al., 2020]. Известно, что форма таких объектов существенно меняет спектральные характеристики носителей заряда. Однако подобная вариация формы может приводить к необходимости формулировки новых граничных условий с целью сохранения корректности постановки математической задачи или возникновению особых точек в решении, для которых требуется его регуляризация. Ввиду актуальности математических исследований, проводимых при решении упомянутых задач, в данной работе изучается спектральная задача в плоском угле для сингулярного эллиптического оператора второго порядка, содержащего по переменной y дифференциальный оператор Бесселя $B_y = \partial^2/\partial y^2 + k \partial/(y \partial y)$ [Киприянов, 1997].

2. Постановка задачи. Пусть K – угол в полуплоскости $E_2^+ = \{(x, y) \in E_2 : y > 0\}$ с вершиной в точке $O = O(0, 0)$, границу которого образует замкнутый луч Γ и положительная часть оси Ox . Обозначим эту часть оси через Γ_0 и пусть $\omega \in (0, \pi)$ – раствор угла K . Предполагаем, что K – открытое множество, так что $\bar{K} = K \cup \Gamma \cup \Gamma_0$ (черта сверху обозначает замыкание множества в E_2).

В классе функций $C^2(K) \cap C^1(K \cup \Gamma_0) \cap C(\bar{K})$ будем рассматривать спектральную задачу вида

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{k}{y} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{E}{r} u = \lambda u, \quad (x, y) \in K, \tag{1}$$

$$u|_{\Gamma} = 0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{\Gamma_0} = 0. \tag{3}$$

В уравнении (1) E и k – положительные постоянные, $k > 1$; $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Помимо граничных условий (2) и (3) подчиним функцию $u(x, y)$ нелокальному условию

$$\int_K u^2(x, y) y^k dy dx < \infty.$$

Рассматриваемая спектральная задача имеет изолированные отрицательные собственные значения. Требуется найти эти собственные значения и отвечающие им собственные функции.

3. Решение краевой задачи. Следуя [Никифоров, Уваров, 1984; Титчмарш, 1961], воспользуемся методом разделения переменных. Для этого перейдем в задаче (1)–(3) к полярной системе координат по формулам $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, $r \geq 0$, $0 \leq \theta \leq \omega$ и, полагая $v(r, \theta) = u(r \cos \theta, r \sin \theta)$, получим следующую краевую задачу для непрерывной функции $v(r, \theta)$ в полуполосе $\Pi = \{(r, \theta) : 0 \leq r < \infty, 0 \leq \theta \leq \omega\}$:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{k+1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + k \cot \theta \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + \left(\lambda + \frac{E}{r} \right) v = 0, \quad r > 0, \quad 0 < \theta < \omega, \tag{4}$$

$$v(r, \theta)|_{\theta=\omega} = 0, \quad r \geq 0, \tag{5}$$

$$\frac{\partial v}{\partial \theta} \Big|_{\theta=0} = 0, \quad r > 0, \tag{6}$$

$$\int_{\Pi} v^2(r, \theta) r^{k+1} \sin^k \theta dr d\theta < \infty. \tag{7}$$

Разделение переменных в задаче (4)–(7) по формуле $v(r, \theta) = R(r)\Phi(\theta)$ приводит к спектральным задачам для функций $R(r)$ и $\Phi(\theta)$. Для угловой компоненты $\Phi(\theta)$ получаем задачу Штурма-Лиувилля вида

$$-\frac{d^2 \Phi}{d\theta^2} - k \cot \theta \frac{d\Phi}{d\theta} = \mu \Phi, \quad 0 < \theta < \omega, \tag{8}$$

$$\frac{d\Phi}{d\theta} \Big|_{\theta=0} = \Phi(\omega) = 0. \tag{9}$$

Каждому фиксированному μ будут соответствовать радиальные компоненты, которые являются решениями задачи

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{k+1}{r} \frac{dR}{dr} + \left(\lambda + \frac{E}{r} - \frac{\mu}{r^2} \right) R = 0, \quad 0 < r < \infty, \tag{10}$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} R(r) \text{ существует и конечен, } \int_{\Pi} R^2(r) r^{k+1} dr < \infty. \tag{11}$$

Решение задачи (8)–(10) получено в [Ларин, Кириллов, 2017]. Пусть $P_s^q(t)$ – присоединенная функция Лежандра первого рода аргумента t , определенная на разрезе [Бейтмен, Эрдейи, 1973], и пусть α_l – положительные решения уравнения

$$f(\alpha) = P_{\alpha+(k-1)/2}^{(1-k)/2}(\cos \omega) = 0, \tag{12}$$

которые будем считать занумерованными в порядке возрастания $l = 1, 2, \dots$ [Гобсон, 1931]. Тогда собственные значения (СЗ) задачи имеют вид $\mu_l = \alpha_l(\alpha_l + k)$, а отвечающие им собственные функции (СФ), с точностью до постоянного множителя, записываются в виде

$$\Phi_l(\theta) = (\sin \theta)^{(1-k)/2} P_{\alpha_l+(k-1)/2}^{(1-k)/2}(\cos \theta). \tag{13}$$

Заметим, что формулой (17) функции $\Phi_l(\theta)$ определяются только для $\theta \in (0, \omega]$. Доопределяя их в точке $\theta = 0$ по непрерывности, т. е. полагая $\Phi_l(0) = \lim_{\theta \rightarrow 0} \Phi_l(\theta)$, получим систему функций, принадлежащих классу $C^2[0, \omega]$ и удовлетворяющих граничным условиям (10).

Для решения спектральной задачи (11)–(12) с указанными СЗ $\mu = \mu_l$ фиксируем произвольный индекс l и перейдем к новой функции $S(r) = r^{(k+1)/2} R(r)$. Краевая задача для $S(r)$ имеет вид

$$\frac{d^2 S}{dr^2} + \frac{4\lambda r^2 + 4Er + 1 - (2\alpha_l + k)^2}{4r^2} S = 0, \quad r > 0, \tag{14}$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} S(r) r^{-(k+1)/2} \text{ существует и конечен, } \int_{\Pi} S^2(r) dr < \infty. \tag{15}$$

Решение (18) ищем в виде [Никифоров, Уваров, 1984]

$$S(r) = r^{\alpha_l+(k+1)/2} \exp(-\sqrt{-\lambda} r) y(r), \tag{16}$$

где $y(r)$ – новая неизвестная функция, для которой получаем уравнение гипергеометрического типа

$$r \frac{d^2 y}{dr^2} + (1 + 2\alpha_l + k - 2\sqrt{-\lambda} r) \frac{dy}{dr} + (E - \sqrt{-\lambda} (2\alpha_l + k + 1)) y = 0. \tag{17}$$

Условия (19) обеспечивают применимость теоремы о разрешимости гипергеометрического уравнения [Никифоров, Уваров, 1984], из которой следует, что СЗ λ исходной задачи, являющиеся параметром в уравнении (21), находятся из соотношения

$$E - \sqrt{-\lambda} (2\alpha_l + k + 1) = 2n\sqrt{-\lambda},$$

так что

$$\lambda = \lambda_{n,l} = -\frac{E^2}{(2n + 2\alpha_l + k + 1)^2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \tag{18}$$

Нетривиальные решения $y_{n,l}$ уравнения (21) определяются формулой Родрига [Никифоров, Уваров, 1984]

$$y_{n,l} = \frac{C_{n,l}}{r^{2\alpha_l+k}} \exp\left(\frac{2E}{2n + 2\alpha_l + k + 1} r\right) \frac{d^n}{dr^n} \left(r^{n+2\alpha_l+k} \exp\left(-\frac{2E}{2n + 2\alpha_l + k + 1} r\right) \right), \tag{19}$$

где $C_{n,l}$ – произвольные ненулевые постоянные. Из соотношений (20) и (23), а также тождества $R(r) = r^{(k+1)/2} S(r)$, получаем, что радиальные составляющие $R(r)$ решения $v(r, \theta)$, отвечающие фиксированному l , имеют вид

$$R_{n,l} = \frac{C_{n,l}}{r^{\alpha_l+k}} \exp\left(\frac{2E}{2n + 2\alpha_l + k + 1} r\right) \frac{d^n}{dr^n} \left(r^{n+2\alpha_l+k} \exp\left(-\frac{2E}{2n + 2\alpha_l + k + 1} r\right) \right), \tag{20}$$

где $n = 0, 1, 2, \dots$. Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 1 *Отрицательные собственные значения задачи (1)–(3) определяются равенством (22), а отвечающие им собственные функции в полярной системе координат записываются в виде*

$$u_{n,l}(r \cos \theta, r \sin \theta) = R_{n,l}(r) \Phi_l(\theta), \quad l = 1, 2, \dots, \quad n = 0, 1, \dots \tag{21}$$

где функции $R_{n,l}(r)$ и $\Phi_l(\theta)$ определяются равенствами (24) и (17), соответственно.

Отметим, что можно рассматривать подобную задачу и в предельном случае, когда $\omega = \pi$, т. е. в полуплоскости. В этом случае участок границы Γ переходит в замкнутый луч $\{(x, 0) : x \leq 0\}$, краевое условие (2) отсутствует, а граничное условие (3) ставится на всей прямой $y = 0$ с удаленной из нее точкой $O(0, 0)$.

При переходе к полярной системе координат условие (5) отсутствует, а условие (6) принимает вид

$$\left. \frac{\partial v}{\partial \theta} \right|_{\theta=0} = \left. \frac{\partial v}{\partial \theta} \right|_{\theta=\pi} = 0, \quad r > 0. \tag{22}$$

Новое условие (22) для функции $v(r, \theta)$ приводит к новому граничному условию в задаче (8)–(10) для функции $\Phi(\theta)$. Оно принимает вид $\Phi'(0) = \Phi'(\pi) = 0$. Собственные значения μ определяются последовательностью $\mu = \mu_l = l(l + k)$, где $l = 0, 1, \dots$, а соответствующие этим значениям собственные функции с точностью до постоянного множителя имеют вид

$$\Phi_l(\theta) = (\sin \theta)^{(1-k)/2} P_{l+(k-1)/2}^{(1-k)/2}(\cos \theta). \tag{23}$$

Отметим, что собственную функцию (23) представляют в этом случае алгебраические многочлены от аргумента $\cos \theta$ [Ларин, Кириллов, 2017].

СЗ задачи на полуплоскости определяются последовательностью

$$\lambda = \lambda_{n,l} = -\frac{E^2}{(2n + 2l + k + 1)^2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \tag{24}$$

а радиальные компоненты, отвечающие функции $\Phi_l(\theta)$ в представлении для функции $v(r, \theta)$, имеют вид

$$R_{n,l} = \frac{C_{n,l}}{r^{l+k}} \exp\left(\frac{E}{2n + 2l + k + 1} r\right) \frac{d^n}{dr^n} \left(r^{n+2l+k} \exp\left(-\frac{2E}{2n + 2l + k + 1} r\right) \right). \tag{25}$$

4. Обсуждение результатов. Рассмотрим спектр краевой задачи на полуплоскости $\theta \in [0, \pi]$ с граничными условиями (22). СЗ, определяемые формулой (24), представлены на рис. 1. Здесь и далее считаем, что $E = 1$ и $k = 2$, а также $C_{n,l} = 1$. Как видно, все СЗ, кроме первого, являются кратными со степенью кратности $\gamma = n + 1$. С ростом l спектр задачи сгущается, а сами значения стремятся к нулю.

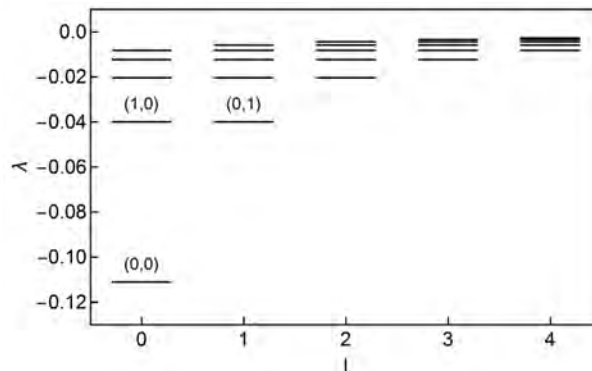


Рис. 1. Собственные значения (24) для различных пар чисел (n, l)
 Fig. 1. Eigenvalues (24) for various pairs numbers (n, l)

Для задачи в неограниченном угле на плоскости $\theta \in [0, \omega]$ картина несколько меняется. Характерное сгущение СЗ и их стремление к нулю с ростом l остается аналогичным задаче на полуплоскости, однако для произвольного угла ω вырождение СЗ снимается. Только в частном случае $\omega = \pi/2$ СЗ снова становятся вырожденными со степенью $\gamma = n + 1$, но в отличие от полуплоскости меняется сочетание индексов (n, l) кратных корней. Например, если $n = 2$, то кратными будут СЗ с индексами $(1, 1)$ и $(0, 3)$. При $n = 3$ кратными СЗ будут $(2, 1)$, $(1, 3)$, $(0, 5)$. На рис. 2 представлены серии СЗ при $l = 1, \dots, 5$ в случае $\omega = 11\pi/12$. Так, к примеру, для соседних серий СЗ выполняется неравенство $\lambda_{1,l} > \lambda_{0,l+1}$.

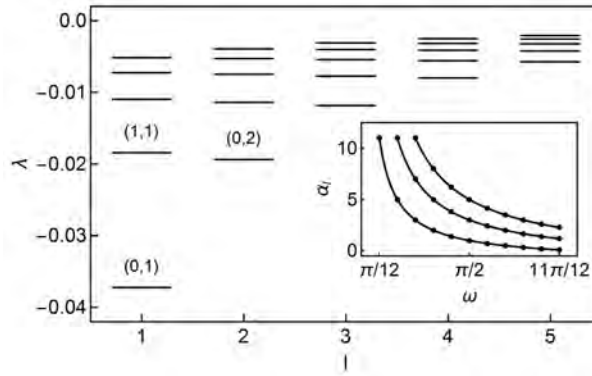


Рис. 2. Собственные значения (22) при различных парах чисел (n, l) для $\omega = 11\pi/12$.

Вставка: зависимость корней α_l уравнения (13) от угла ω

Fig. 2. Eigenvalues (22) for various pairs numbers (n, l) at $\omega = 11\pi/12$. Insert: roots α_l of the equation (13) as function of angle ω

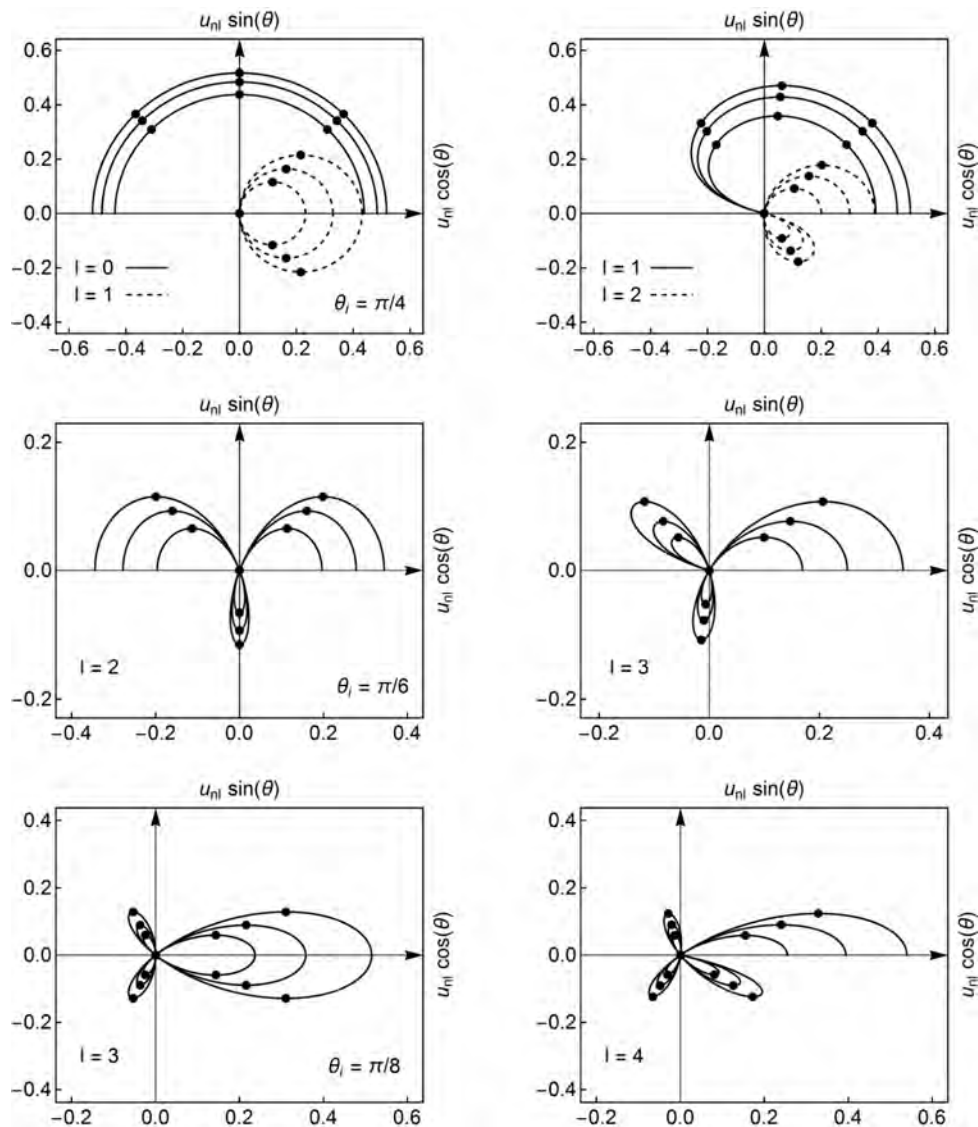


Рис. 3. График функции $u(r \cos \theta, r \sin \theta)$ при различных значениях l на полуплоскости $\omega = \pi$ (слева) и при угле $\omega = 11\pi/12$ (справа)

Fig. 3. Function $u(r \cos \theta, r \sin \theta)$ for various l on the half-plane $\omega = \pi$ (left) and $\omega = 11\pi/12$ (right)

Поскольку СЗ зависят от корней уравнения (13), т. е. зависят от величины угла ω , было выполнено численное решение уравнения (13) при различных ω . Указанные зависимости представлены на вставке к рис. 2 в случаях $l = 1, 2, 3$. Оказывается, что с ростом ω значения α_l убывают как функция $l\pi/\omega - 1$, а значит $\alpha_1 \rightarrow 0$ при $\omega \rightarrow \pi$. В результате приходим к спектру (24). Данная зависимость

указывает на естественность перехода от граничного условия на луче Γ (5) к условию (22). Вид СФ $u(r \cos \theta, r \sin \theta)$ определяется угловой компонентой $\Phi_l(\theta)$. Графики СФ в полярной системе координат при $n = 0$ представлены на рис. 3 в диапазоне изменения $r = 0.20, \dots, 0.90$. Слева представлены СФ для задачи в полуплоскости $\omega = \pi$, справа для задачи с углом $\omega < \pi$. Точками обозначены узлы сетки при фиксированном угле θ_i . Форма СФ зависит от четности l . Начиная со значений $l \geq 2$, рост l приводит к увеличению числа петель на графике в области начала координат, в то время как изменение n влияет только на абсолютное значение функции. Для задачи в неограниченном угле симметрия СФ нарушается (рис. 3, справа). Графики представлены при изменении $\theta \in [0, 11\pi/12]$. Как и в случае с собственными значениями, СФ в пределе при $\omega \rightarrow \pi$ по форме переходят к виду, полученному для задачи на полуплоскости при $\omega = \pi$.

4. Заключение. В работе выполнено исследование спектральной задачи для сингулярного эллиптического дифференциального оператора второго порядка, содержащего дифференциальное выражение Бесселя B_y . Для двумерного случая рассмотрены угловые секторы при угле раствора $\omega = \pi$ и $0 < \omega < \pi$. Показано, что спектр задачи является вырожденным только в случаях $\omega = \pi/2$ и $\omega = \pi$, однако очередность кратных корней может различаться. Численное решение уравнения с присоединенными функциями Лежандра позволило установить асимптотику СЗ при $0 < \omega < \pi$, которая указывает на предельный переход спектра рассматриваемого уравнения при $\omega \rightarrow \pi$. Получены собственные функции и продемонстрировано их изменение при вариации числа l .

Таким образом, в рамках поставленной задачи установлено, что для сохранения корректности постановки краевой задачи для сингулярного уравнения при переходе от задачи в угле раствором $\omega < \pi$ к задаче в полуплоскости необходимо изменение граничного условия Дирихле для луча Γ на условие Неймана.

Список литературы

1. Бейтмен Г., Эрдейи А. 1973. Высшие трансцендентные функции Т. 1. М., Наука, 296.
2. Гобсон Е. В. 1952. Теория сферических и эллипсоидальных функций. М., ИЛ, 476.
3. Катрахов В. В., Ситник С. М. 2018. Метод операторов преобразования и краевые задачи для сингулярных эллиптических уравнений. Современная математика. Фундаментальные направления, 64(2): 211–426.
4. Келдыш М. В. 1951. О некоторых структурах вырожденных уравнений эллиптического типа на границе области. Доклады Академии Наук СССР, 77(2): 181–183.
5. Киприянов И. А. 1997. Сингулярные эллиптические краевые задачи. М., Наука. Физматлит, 208.
6. Ландис Е. М. 1971. Уравнения второго порядка эллиптического и параболического типов. М., Наука, 288.
7. Ларин А. А., Кириллов В. П. 2017. Задача на собственные значения для одного обыкновенного дифференциального оператора с сингулярным коэффициентом. Сборник трудов X международной конференции «ПМТУКТ–2017» (Воронеж, 18–24 сентября 2017 г.). Воронеж, Изд-во Научная книга, 221–225.
8. Никифоров А. Ф., Уваров В. Б. 1984. Специальные функции математической физики. М., Наука, 344.
9. Титчмарш Э. Ч. 1961. Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка Ч. 2. М., ИЛ, 554.
10. Gavrilenko V. I. 2011. Optics of Nanomaterials. Singapore, Pan Stanford Publishing, 326.
11. Klingshirn C. 2005. Semiconductors Optics. Berlin, Springer-Verlag Heidelberg, 797.
12. Klimov V. I. 2010. Nanocrystal quantum dots. New York, CRC Press, 453.
13. Mora-Ramos M. E., Aouami A. El., Feddi E., Radu A., Restrepo R. L., Vinasco J. A., Morales A. L., Duque C. A. 2020. Donor impurity energy and optical absorption in spherical sector quantum dots. Heliyon, 6: e03194(11 pp).
14. Ovchinnikov O. V., Smirnov M. S., Korolev N. V., Golovinski P. A., Vitukhnovsky A. G. 2016. The size dependence recombination luminescence of hydrophilic colloidal CdS quantum dots in gelatin. Journal of Luminescence, 179: 413–419.

References

1. Bateman H., Erdelyi A. 1953. Higher transcendental functions T. 1. New York, McGraw-Hill, 325. (in Russian)
2. Hobson E. W. 1931. The theory of spherical and ellipsoidal harmonics. Cambridge, Cambridge University Press, 500. (in Russian)
3. Katrakhov V. V., Sitnik S. M. 2018. Metod operatorov preobrazovaniya i kraevye zadachi dlya singulyarnykh ellipticheskikh uravnenii [Method of transformation operators and boundary value problems for singular elliptic equations]. *Sovremennaya matematika. Fundamental'nye napravleniya*, 64(2): 211–426.
4. Keldysh M. V. 1951. O nekotorykh sluchayakh vyzhdeniya uravneniy ellipticheskogo tipa na granitse oblasti [On some structures of degenerate equations of elliptic type on the boundary of a region]. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 77(2): 181–183.
5. Kipriyanov I. A. 1997. Singulyarnye ellipticheskie kraevye zadachi [Singular elliptic boundary value problems], M., Nauka.Fizmatlit, 208.
6. Landis E. M. 1971. Uravnenie vtorogo poryadka ellipticheskogo i parabolicheskogo tipov [Second-order equations of elliptic and parabolic types]. M., Nauka, 288.
7. Larin A. A., Kirillov V. P. 2017. Zadacha na sobstvennye zhacheniya dlya odnogo obyknovennogo differentsial'nogo operatora s singulyarnym koeffitsientom [The eigenvalue problem for one ordinary differential operator with a singular coefficient]. *Sbornik trudov X mezhdunarodnoy konferentsii «PMTUKT–2017» (Voronezh, 18–24 sentyabrya 2017 g.)*. Voronezh, Izd-vo Nauchnaya kniga, 221–225.
8. Nikiforov A. F., Uvarov V. B. 1984. Special'nye funktsii matematicheskoi fiziki [Special functions of mathematical physics]. M., Nauka, 344.
9. Titchmarsh E. C. 1958. Eigenfunction expansions associated with second-order equations Ch. 2. Oxford, Clarendon Press, 404. (in Russian)
10. Gavrilenko V. I. 2011. Optics of Nanomaterials. Singapore, Pan Stanford Publishing, 326.
11. Klingshirn C. 2005. Semiconductors Optics. Berlin, Springer-Verlag Heidelberg, 797.
12. Klimov V. I. 2010. Nanocrystal quantum dots. New York, CRC Press, 453.
13. Mora-Ramos M. E., Aouami A. El., Feddi E., Radu A., Restrepo R. L., Vinasco J. A., Morales A. L., Duque C. A. 2020. Donor impurity energy and optical absorption in spherical sector quantum dots. *Heliyon*, 6: e03194(11 pp).
14. Ovchinnikov O. V., Smirnov M. S., Korolev N. V., Golovinski P. A., Vitukhnovsky A. G. 2016. The size dependence recombination luminescence of hydrophilic colloidal CdS quantum dots in gelatin. *Journal of Luminescence*, 179: 413–419.

Получена 21.03.2020

Королев Никита Викторович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики Военного учебно-научного центра Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина» (г. Воронеж) Министерства обороны Российской Федерации

ул. Ст. Большевиков, 54а, Воронеж, Россия,
E-mail: korolevn33@yandex.ru

Ларин Александр Александрович – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры математики Военного учебно-научного центра Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина» (г. Воронеж) Министерства обороны Российской Федерации

ул. Ст. Большевиков, 54а, Воронеж, Россия,
E-mail: dohior@yandex.ru

МНОГОМЕРНОЕ НЕАВТОНОМНОЕ УРАВНЕНИЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА СО СТЕПЕННЫМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ

И. В. Рахмелевич

(Статья представлена членом редакционной коллегии А. П. Солдатовым)

Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского,
г. Нижний Новгород, 603950, Россия

E-mail: igor-kitpd@yandex.ru

Аннотация. Исследовано неавтономное многомерное уравнение в частных производных второго порядка, правая часть которого содержит произвольную нелинейность по неизвестной функции и степенные нелинейности по её первым производным. Найдено решение этого уравнения типа бегущей волны в неявном виде. Для случая степенной нелинейности по неизвестной функции получены явные решения типа бегущей волны, в частности, в виде степенной, экспоненциальной и логарифмической функций. Также получены решения в виде квадратичного полинома и обобщённого монома, определены условия на параметры и правую часть уравнения, при которых данные решения существуют. Найдены частные решения, выраженные через функции от подмножеств независимых переменных, а также решения в виде линейной комбинации некоторых экспоненциальных функций. Проанализированы свойства найденных решений при различных параметрах уравнения.

Ключевые слова: нелинейность степенного типа, уравнение в частных производных с переменными коэффициентами, разделение переменных, решение типа бегущей волны.

Для цитирования: Рахмелевич И. В. 2020. Многомерное неавтономное уравнение второго порядка со степенными нелинейностями. Прикладная математика & Физика, 52(2): 93–104.

DOI 10.18413/2687-0959-2020-52-2-93-104.

MULTI-DIMENSIONAL NON-AUTONOMOUS SECOND ORDER EQUATION WITH POWER NONLINEARITIES

I. V. Rakhmelevich

(Article submitted by a member of the editorial board A. P. Soldatov)

Nizhniy Novgorod State University,
Nizhniy Novgorod, 603950, Russia

E-mail: igor-kitpd@yandex.ru

Received May 12, 2020

Abstract. We consider non-autonomous multi-dimensional partial differential equation of the second order, the right side of which contains arbitrary nonlinearity on the unknown function and power nonlinearities on its first partial derivatives. There is founded the solution of travelling wave type for this equation in the implicit form. There are received the explicit solutions of travelling wave type for the case of power nonlinearity on the unknown function. In particular, these solutions can be in the form of some elementary functions. There are also received the solutions in the form of quadratic polynomial and generalized monomial, and the conditions on the parameters and on the right side of equation are determined, under which these solutions exist. There are founded some solutions, which can be represented through the functions of independent variables subsets, in particular, in the form of sum and production of such functions, and the solutions of aggregated travelling wave type. Also there are received the solutions in the form of linear combination of some exponential functions. The properties of the founded solutions under the different parameters of equation are analysed.

Key words: power type nonlinearity, partial differential equation with variable coefficients, separation of variables, travelling wave type solution.

For citation: Rakhmelevich I. V. 2020. Multi-dimensional non-autonomous second order equation with power nonlinearities. Applied Mathematics & Physics, 52(2): 93–104 (in Russian). DOI 10.18413/2687-0959-2020-52-2-93-104.

Введение. В современной математической физике большое внимание уделяется исследованию решений уравнений в частных производных с различными типами нелинейностей. В частности,

результаты по уравнениям с нелинейностями степенного типа широко представлены как в известных пособиях и справочниках [Полянин, Зайцев, 2002], [Кудряшов, 2010], так и в оригинальных работах [Рахмелевич, 2016 б; 2017 а, б; 2018], [Zhdanov, 1994], [Grundland, Infeld, 1992], [Polyanin, 2019 а, б]. Так, результаты исследования двумерных гиперболических и эллиптических уравнений приведены в работах [Рахмелевич, 2017б,в], [Miller, Rubel, 1993]. При этом одним из наиболее эффективных является метод разделения переменных [Полянин, Зайцев, Журов, 2005]; также широко применяются методы аналитической теории дифференциальных уравнений [Кудряшов, 2010], методы группового анализа, метод дифференциальных связей, метод Кларксона – Крускала и другие [Polyanin, 2019 б]. В последние годы много работ посвящено исследованию неавтономных линейных и нелинейных уравнений [Рахмелевич, 2016б, 2018], [Polyanin, 2019 а, б]. Целью данной работы является исследование некоторых классов решений неавтономного уравнения в частных производных второго порядка, правая часть которого содержит степенные нелинейности по искомой функции и её первым производным.

1. Исходное уравнение и его простейшие решения. Рассмотрим уравнение в частных производных относительно неизвестной функции $u(X)$:

$$\sum_{i=1}^N a_i \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = g(u)F(X) \prod_{i=1}^N \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^{\beta_i}, \tag{1.1}$$

a_i, β_i – вещественные параметры, $g(u), F(X)$ – заданные функции. Здесь и далее будут использоваться обозначения: $X = \{x_1, \dots, x_N\}$ – множество независимых переменных; $I = \{1, \dots, N\}$ – множество значений индекса, нумерующего независимые переменные.

Следующая теорема определяет решения для уравнения (1.1), зависящие от линейной комбинации независимых переменных.

Теорема 1.1. Пусть $F(X) \equiv 1$. Тогда уравнение (1.1) имеет решение типа бегущей волны, которое может быть представлено в неявном виде:

1) при $\beta_\Sigma = 2$:

$$\sum_{n=1}^N c_n x_n - z_0 = V_0 \int \exp(-CG(u)) du; \tag{1.2}$$

2) при $\beta_\Sigma \neq 2$:

$$\sum_{n=1}^N c_n x_n - z_0 = (2 - \beta_\Sigma)^{\frac{1}{\beta_\Sigma - 2}} \int (CG(u) + A)^{\frac{1}{\beta_\Sigma - 2}} du. \tag{1.3}$$

В формулах (1.2), (1.3) c_n, z_0, V_0, A – произвольные постоянные; $\beta_\Sigma, C, G(u)$ определяются выражениями:

$$\beta_\Sigma = \sum_{i=1}^N \beta_i, \quad C = \frac{\prod_{i=1}^N c_i^{\beta_i}}{\sum_{i=1}^N a_i c_i^2}, \tag{1.4а}$$

$$G(u) = \int g(u) du, \tag{1.4б}$$

причём постоянные c_i должны удовлетворять условию:

$$\sum_{i=1}^N a_i c_i^2 \neq 0. \tag{1.5}$$

Доказательство. Решение уравнения (1.1) ищем в виде:

$$u(X) = U(z), \quad z = \sum_{n=1}^N c_n x_n. \tag{1.6}$$

Подставляя (1.6) в уравнение (1.1), получаем уравнение:

$$U''(z) \sum_{i=1}^N a_i c_i^2 = g(U)[U'(z)]^{\beta_\Sigma} \prod_{i=1}^N c_i^{\beta_i}. \tag{1.7}$$

Учитывая условие (1.5) и вводя функцию $G(U)$ согласно (1.4б), уравнение (1.7) преобразуется так:

$$U''(z)[U'(z)]^{1-\beta_\Sigma} = C \frac{d}{dz} G(U). \tag{1.8}$$

Проанализируем уравнение (1.8) для случаев, перечисленных в условии теоремы.

1. При $\beta_\Sigma = 2$ уравнение (1.8) запишется в виде:

$$\frac{U''(z)}{U'(z)} = C \frac{d}{dz} G(U). \quad (1.9)$$

В результате интегрирования (1.9) сводится к уравнению первого порядка:

$$\ln |U'(z)| = CG(U) - \ln V_0. \quad (1.10)$$

Разделяя переменные и интегрируя уравнение (1.10), получаем:

$$z - z_0 = V_0 \int \exp(-CG(U)) dU. \quad (1.11)$$

Учитывая (1.6), из (1.11) получаем решение в виде (1.2).

2. При $\beta_\Sigma \neq 2$ уравнение (1.8) преобразуем к виду:

$$\frac{d}{dz} \{ [U'(z)]^{2-\beta_\Sigma} - (2 - \beta_\Sigma)CG(U) \} = 0. \quad (1.12)$$

В результате интегрирования (1.12) получаем:

$$U'(z) = \{ (2 - \beta_\Sigma)(CG(U) + A) \}^{\frac{1}{2-\beta_\Sigma}}. \quad (1.13)$$

Интегрируя (1.13), находим:

$$z - z_0 = (2 - \beta_\Sigma)^{\frac{1}{\beta_\Sigma - 2}} \int (CG(U) + A)^{\frac{1}{\beta_\Sigma - 2}} dU. \quad (1.14)$$

Используя (1.6), получаем из (1.14) для данного случая решение в виде (1.3). Теорема доказана.

Рассмотрим теперь решения уравнения (1.1) типа бегущей волны в случае, когда $F(X) = f(z)$, причём z определяется выражением (1.6).

1. Пусть функции $F(X), g(u)$ определяются выражениями:

$$F(X) = \exp(\alpha z), \quad g(u) = g_0 u^\gamma, \quad (1.15)$$

где g_0, α, γ – вещественные параметры. Тогда предполагаемый вид решения уравнения (1.1) будет следующим:

$$u = U_0 \exp(z), \quad (1.16)$$

где U_0 – неизвестная постоянная, подлежащая определению в дальнейшем. Подставив (1.16) в (1.1) и учитывая (1.15), находим:

$$U_0 \exp(z) \sum_{i=1}^N a_i c_i^2 = g_0 U_0^{\beta_\Sigma + \gamma} \exp((\alpha + \beta_\Sigma + \gamma)z) \prod_{i=1}^N c_i^{\beta_i}. \quad (1.17)$$

Предполагая, что постоянные c_i удовлетворяют условию (1.5), и выполняя элементарные преобразования, из (1.17) получаем:

$$U_0^{1-\beta_\Sigma-\gamma} = g_0 C \exp((\alpha + \beta_\Sigma + \gamma - 1)z), \quad (1.18)$$

где C определяется выражением (1.4а). Уравнение (1.18) можно удовлетворить только в том случае, если параметры удовлетворяют условию:

$$\alpha + \beta_\Sigma + \gamma = 1. \quad (1.19)$$

Предполагая, что условие (1.19) выполняется, из (1.18) находим:

а) если $\beta_\Sigma + \gamma \neq 1$:

$$U_0 = (g_0 C)^{\frac{1}{1-\beta_\Sigma-\gamma}}, \quad (1.20а)$$

б) если $\beta_\Sigma + \gamma = 1$, то U_0 – произвольная, а постоянные c_i должны удовлетворять условию:

$$g_0 C = 1. \quad (1.20б)$$

2. Пусть функции $F(X), g(u)$ определяются выражениями:

$$F(X) = z^\alpha, \quad g(u) = g_0 u^\gamma. \quad (1.21)$$

Тогда предполагаем следующий вид решения уравнения (1.1):

$$u = U_0 z^\sigma, \quad (1.22)$$

где U_0, σ – неизвестные постоянные, подлежащие определению. Подставив (1.22) в (1.1), откуда с учётом (1.21) и (1.5) следует:

$$\sigma^{1-\beta_\Sigma} (\sigma - 1) z^{\sigma(1-\beta_\Sigma-\gamma)+\beta_\Sigma-\alpha-2} = g_0 C U_0^{\beta_\Sigma+\gamma-1}. \quad (1.23)$$

Уравнение (1.23) можно удовлетворить, если выполнено условие:

$$\sigma(\beta_\Sigma + \gamma - 1) + \alpha - \beta_\Sigma + 2 = 0. \quad (1.24)$$

а) если $\beta_\Sigma + \gamma \neq 1$, то из (1.23), (1.24) следует, что U_0, σ определяются выражениями:

$$\sigma = \frac{\beta_\Sigma - \alpha - 2}{\beta_\Sigma + \gamma - 1}, \quad U_0 = \left(\frac{g_0 C}{\sigma^{1-\beta_\Sigma} (\sigma - 1)} \right)^{\frac{1}{1-\beta_\Sigma-\gamma}}. \quad (1.25)$$

Если, кроме того, $\alpha + \gamma = -1$, то из (1.25) получаем $\sigma = 1$. Тогда из выражения (1.25) для U_0 следует, что при $\beta_\Sigma + \gamma < 1$ решение вида (1.22) не существует, а при $\beta_\Sigma + \gamma > 1$ $U_0 = 0$ – решение вырождается в тривиальное.

б) если $\beta_\Sigma + \gamma = 1$, то из (1.23), (1.24) следует, что U_0 – произвольная; причём решение (1.22) существует только при дополнительном условии:

$$\beta_\Sigma - \alpha - 2 = 0, \quad (1.26)$$

при этом σ должно удовлетворять уравнению:

$$\sigma^{1-\beta_\Sigma} (\sigma - 1) = g_0 C. \quad (1.27)$$

3. Пусть выполнены условия (1.21), причём $\gamma = 0$. Покажем, что в этом случае уравнение (1.1) может иметь логарифмическое решение:

$$u = U_0 \ln |z|. \quad (1.28)$$

Подставив (1.28) в (1.1) и с учётом (1.21), (1.5), имеем:

$$U_0^{1-\beta_\Sigma} = -g_0 C z^{\alpha-\beta_\Sigma+2}. \quad (1.29)$$

Это уравнение можно удовлетворить только в том случае, если выполнено условие (1.26).

а) если $\beta_\Sigma \neq 1$, то из (1.29) следует, что U_0 определяется выражением:

$$U_0 = (-g_0 C)^{\frac{1}{1-\beta_\Sigma}}, \quad (1.30)$$

б) если $\beta_\Sigma = 1$, то из (1.29) следует, что U_0 – произвольная; причём решение (1.28) существует только при дополнительном условии:

$$g_0 C = -1. \quad (1.31)$$

Итак, в результате проведённых выше рассуждений доказана следующая теорема:

Теорема 1.2. 1. Пусть функции $F(X), g(u)$ определяются выражениями (1.15), где z определяется второй формулой (1.6). Всюду в данной теореме предполагается, что коэффициенты c_i удовлетворяют условию (1.5). Пусть также параметры уравнения (1.1) удовлетворяют условию (1.19). Тогда уравнение (1.1) имеет экспоненциальное решение (1.16), причём:

а) если $\beta_\Sigma + \gamma \neq 1$, то постоянная U_0 определяется выражением (1.20а);

б) если $\beta_\Sigma + \gamma = 1$, то U_0 – произвольная, а решение (1.16) существует при дополнительном условии (1.20б).

2. Пусть функции $F(X), g(u)$ определяются выражениями (1.21). Тогда уравнение (1.1) имеет степенное решение (1.22), причём:

а) если $\beta_\Sigma + \gamma \neq 1$, то U_0, σ определяются выражениями (1.25);

б) если $\beta_\Sigma + \gamma = 1$, то U_0 – произвольная, а σ должно удовлетворять уравнению (1.27); при этом решение (1.22) существует только при дополнительном условии (1.26).

3. Пусть функции $F(X), g(u)$ определяются выражениями (1.21), где $\gamma = 0$, а также удовлетворяется условие (1.26). Тогда уравнение (1.1) имеет логарифмическое решение (1.28), причём:

а) если $\beta_\Sigma \neq 1$, то U_0 определяется выражением (1.30);

б) если $\beta_\Sigma = 1$, то U_0 – произвольная; а решение (1.28) существует только при дополнительном условии (1.31).

Теорема 1.3. Пусть функции $F(X), g(u)$ определяются выражениями:

$$F(X) = \prod_{i=1}^N (p_i x_i + q_i)^{-\beta_i}, \quad g(u) = g_0, \quad (1.32)$$

где p_i, q_i – вещественные параметры. Тогда уравнение (1.1) имеет решение в виде квадратичного полинома:

$$u(X) = U_0 \sum_{n=1}^N \left(\frac{p_n x_n^2}{2} + q_n x_n \right), \quad (1.33)$$

причём:

а) если $\beta_\Sigma \neq 1$, то U_0 выражается так:

$$U_0 = \left(\frac{1}{g_0} \sum_{i=1}^N a_i p_i \right)^{\frac{1}{\beta_\Sigma - 1}}; \quad (1.34a)$$

б) если $\beta_\Sigma = 1$, то U_0 – произвольная, при этом необходимо, чтобы параметры уравнения удовлетворяли условию:

$$\sum_{i=1}^N a_i p_i = g_0. \quad (1.34b)$$

Доказательство. Подставляя (1.33) в уравнение (1.1) и учитывая (1.32), получаем:

$$U_0^{\beta_\Sigma - 1} = \frac{1}{g_0} \sum_{i=1}^N a_i p_i. \quad (1.35)$$

При $\beta_\Sigma \neq 1$ из (1.35) следует, что функция (1.33) является решением уравнения (1.1), если U_0 определяется выражением (1.34a). В случае $\beta_\Sigma = 1$ уравнение (1.35) сводится к (1.34b), а постоянная U_0 может быть произвольной. Теорема доказана.

Теорема 1.4. Пусть функции $F(X), g(u)$ определяются выражениями:

$$F(X) = \sum_{i=1}^N \frac{b_i}{x_i^2} \prod_{i=1}^N x_i^{\alpha_i}, \quad g(u) = g_0 u^\gamma. \quad (1.36)$$

Тогда уравнение (1.1) имеет решение в виде обобщённого монома:

$$u(X) = U_0 \prod_{n=1}^N x_n^{\sigma_n}. \quad (1.37)$$

При этом возможны два случая:

1) если $\beta_\Sigma + \gamma \neq 1$, то σ_n, U_0 определяются выражениями:

$$\sigma_n = \frac{\beta_n - \alpha_n}{\beta_\Sigma + \gamma - 1}, \quad U_0 = \left(g_0 \prod_{n=1}^N \sigma_n^{\beta_n} \right)^{\frac{1}{1 - \beta_\Sigma - \gamma}}; \quad (1.38)$$

2) если $\beta_\Sigma + \gamma = 1$, то решение (1.37) существует, если при $\forall n \in I$ $\beta_n = \alpha_n$. Тогда σ_n, U_0 являются произвольными, но при этом σ_n должны удовлетворять условию:

$$g_0 \prod_{n=1}^N \sigma_n^{\beta_n} = 1. \quad (1.39)$$

Кроме того, во всех перечисленных выше случаях при $\forall n \in I$ должны быть выполнены условия:

$$b_n = a_n \sigma_n (\sigma_n - 1). \quad (1.40)$$

Доказательство. Подставляя (1.37) в уравнение (1.1), получаем:

$$\sum_{i=1}^N \frac{a_i \sigma_i (\sigma_i - 1)}{x_i^2} = g_0 [u(X)]^{\beta_\Sigma + \gamma - 1} \sum_{i=1}^N \frac{b_i}{x_i^2} \prod_{n=1}^N \sigma_n^{\beta_n} x_n^{\alpha_n - \beta_n}. \quad (1.41)$$

Уравнение (1.41) можно удовлетворить, если при $\forall n \in I$ выполняются условия:

$$\sigma_n (\beta_\Sigma + \gamma - 1) + (\alpha_n - \beta_n) = 0, \quad (1.42)$$

а также условия (1.40).

Если $\beta_\Sigma + \gamma \neq 1$, то из (1.42) следует, что σ_n определяется первым из выражений (1.38); из (1.41) следует, что U_0 определяется вторым из выражений (1.38). Если же $\beta_\Sigma + \gamma = 1$, то условия (1.42) выполняются, если при $\forall n \in I$ $\beta_n = \alpha_n$; при этом σ_n могут быть произвольными. Также из (1.41) в этом случае следует, что U_0 являются произвольной, при этом необходимо, чтобы σ_n удовлетворяли условию (1.39). Доказательство закончено.

Пусть теперь предполагаемый вид решения определяется формулой:

$$u(X) = U(z), \quad z = \sum_{n=1}^N \varphi_n(x_n), \quad (1.43)$$

где $\varphi_n(x_n)$ – некоторые функции, которые будут определены ниже. Используя (1.43), уравнение (1.1) можно записать в виде:

$$U''(z) \sum_{i=1}^N a_i [\varphi'_i(x_i)]^2 + U'(z) \sum_{i=1}^N a_i \varphi''_i(x_i) = g(U) F(X) [U'(z)]^{\beta_\Sigma} \prod_{i=1}^N [\varphi'_i(x_i)]^{\beta_i}, \quad (1.44)$$

Предположим, что функции $\varphi_i(x_i)$ таковы, что выполняется соотношение:

$$\sum_{i=1}^N a_i \varphi''_i(x_i) = P = \text{const}. \quad (1.45)$$

Из (1.45) следует, что в этом случае $\varphi_i(x_i)$ представляют собой квадратичные функции:

$$\varphi_i(x_i) = \frac{p_i x_i^2}{2} + q_i x_i + r_i. \quad (1.46)$$

Тогда уравнение (1.44) может быть сведено к обыкновенному дифференциальному уравнению (ОДУ) относительно $U(z)$, если выполнены условия:

$$a_i [\varphi'_i(x_i)]^2 = \lambda \varphi_i(x_i), \quad F(X) = \Phi(z) \prod_{i=1}^N [\varphi'_i(x_i)]^{-\beta_i}, \quad (1.47)$$

где $\Phi(z)$ – некоторая заданная функция; λ – вещественная постоянная. Тогда, подставляя (1.46) в первое из условий (1.47), находим:

$$p_i = \frac{\lambda}{2a_i}, \quad r_i = \frac{a_i q_i^2}{\lambda}. \quad (1.48)$$

В свою очередь, из (1.45) и (1.48) следует:

$$\sum_{i=1}^N a_i \varphi''_i(x_i) = \frac{N\lambda}{2}. \quad (1.49)$$

Тогда из (1.44) с учётом (1.47) и (1.49), получаем, что функция $U(z)$ должна удовлетворять следующему ОДУ:

$$zU''(z) + \frac{N}{2}U'(z) = \frac{g(U)}{\lambda} [U'(z)]^{\beta_\Sigma} \Phi(z). \quad (1.50)$$

Таким образом, в результате проведённых выше рассуждений доказана следующая теорема:

Теорема 1.5. Пусть функция $F(X)$ определяется выражением:

$$F(X) = \Phi(z) \prod_{i=1}^N (p_i x_i + q_i)^{-\beta_i}, \quad z = \sum_{i=1}^N \left(\frac{p_i x_i^2}{2} + q_i x_i + r_i \right). \quad (1.51)$$

Здесь $\Phi(z)$ – некоторая заданная функция; λ, q_i – вещественные постоянные; p_i, r_i выражаются по формулам (1.48). Тогда уравнение (1.1) имеет решение вида $u = U(z)$, причём $U(z)$ находится из уравнения (1.50).

2. Решения, зависящие от подмножеств независимых переменных. Пусть множество значений $I = \{1, \dots, N\}$ индекса n , нумерующего независимые переменные, представлено в виде объединения K подмножеств I_l ($l = 1, \dots, K$), причём $I_{l_1} \cap I_{l_2} = \emptyset$ при любых $l_1 \neq l_2$. Тогда множество переменных $X = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ также может быть представлено в виде объединения K непересекающихся подмножеств $X_l = \{x_n\}_{n \in I_l}$. Также здесь и далее всюду будем обозначать $\Xi = \{1, \dots, K\}$ – множество значений индекса l .

Агрегированными переменными будем называть переменные вида: $y_l = \sum_{n \in I_l} \varphi_n(x_n)$, где $\varphi_n(x_n)$ – некоторые заданные функции. Данный параграф посвящён исследованию решений, зависящих от функций некоторых подмножеств независимых переменных, и в частности, от агрегированных переменных. В простейшем случае агрегированные переменные представляют собой линейные комбинации исходных независимых переменных: $y_l = \sum_{n \in I_l} c_n x_n$.

Теорема 2.1. Пусть функция $F(X)$ определяется выражением:

$$F(X) = \exp \left(- \sum_{l=1}^K \alpha_l \sum_{n \in I_l} c_n x_n \right). \quad (2.1)$$

1. Пусть также $k \in \Xi$ – некоторое выбранное фиксированное значение, причём выполнены условия:

$$A_l \equiv \sum_{i \in I_l} a_i c_i^2 = 0 \quad (\forall l \neq k), \quad (2.2a)$$

$$\alpha_l = \beta_{\Sigma l} \quad (\forall l \neq k), \quad \alpha_k = \beta_{\Sigma k} - 1, \quad \beta_{\Sigma l} = \sum_{i \in I_l} \beta_i, \quad (2.2b)$$

$$g(u) = g_0. \quad (2.2в)$$

Тогда уравнение (1.1) имеет решение вида:

$$u(X) = \sum_{l=1}^K B_l \exp \left(\sum_{n \in I_l} c_n x_n \right), \quad (2.3)$$

где коэффициенты B_l связаны соотношением:

$$g_0 \prod_{l=1}^K P_l B_l^{\beta_{\Sigma l}} = A_k B_k, \quad P_l = \prod_{i \in I_l} c_i^{\beta_i}. \quad (2.4)$$

2. Пусть при $\forall l \in \Xi$ выполнены условия:

$$A_l = A \neq 0, \quad \alpha_l = \beta_{\Sigma l}, \quad g(u) = g_0 u. \quad (2.5)$$

Тогда уравнение (1.1) имеет решение вида (2.3), причём коэффициенты B_l связаны соотношением:

$$g_0 \prod_{l=1}^K P_l B_l^{\beta_{\Sigma l}} = A. \quad (2.6)$$

Доказательство. 1. Подставляя (2.3) в уравнение (1.1), с учётом (2.2в) получаем:

$$\sum_{l=1}^K A_l B_l \exp \left(\sum_{n \in I_l} c_n x_n \right) = g_0 \prod_{l=1}^K P_l B_l^{\beta_{\Sigma l}} \exp \left((\beta_{\Sigma l} - \alpha_l) \sum_{n \in I_l} c_n x_n \right). \quad (2.7)$$

Пусть выбрано такое $k \in \Xi$, что при $\forall l \neq k$ выполнены условия (2.2а). Тогда уравнение (2.7) можно привести к виду:

$$\frac{g_0 P_k}{A_k} B_k^{\beta_{\Sigma k} - 1} \exp \left((\beta_{\Sigma k} - \alpha_k) \sum_{n \in I_k} c_n x_n \right) \prod_{l \in \Xi \setminus \bar{k}} P_l B_l^{\beta_{\Sigma l}} \exp \left((\beta_{\Sigma l} - \alpha_l) \sum_{n \in I_l} c_n x_n \right) = 1. \quad (2.8)$$

Здесь использовано обозначение $\Xi_k^- = \Xi \setminus \{k\}$. Уравнение (2.8) может удовлетворяться, если выполнены условия (2.2б). Тогда оно сводится к следующему:

$$\frac{g_0}{A_k B_k} \prod_{l=1}^K P_l B_l^{\beta_{\Sigma l}} = 1,$$

откуда получаем соотношение (2.4).

2. Аналогичным образом, в случае, когда выполнены условия (2.5), подставляя (2.3) в уравнение (1.1), после некоторых преобразований получаем:

$$g_0 \prod_{l=1}^K P_l B_l^{\beta_{\Sigma l}} \exp\left(\left(\beta_{\Sigma l} - \alpha_l\right) \sum_{n \in I_l} c_n x_n\right) = A. \quad (2.9)$$

Уравнение (2.9) можно удовлетворить, если при $\forall l \in \Xi$ выполнено второе из условий (2.5). Тогда из (2.9) непосредственно следует соотношение (2.6). Теорема доказана.

Теорема 2.2. Пусть функции $g(u), F(X)$ удовлетворяют соотношениям:

$$g(u) = g_0 \exp(\lambda u), \quad F(X) = \prod_{l=1}^K f_l(X_l), \quad (2.10)$$

где $f_l(X_l)$ – некоторые заданные функции. Тогда уравнение (1.1) имеет решение вида

$$u(X) = \sum_{l=1}^K u_l(X_l), \quad (2.11)$$

в следующих случаях:

1. Если при $\forall l \in \Xi$ функции $u_l(X_l)$ удовлетворяют переопределённой системе уравнений:

$$\sum_{i \in I_l} a_i \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_i^2} = p_l, \quad f_l(X_l) \exp(\lambda u_l(X_l)) \prod_{i \in I_l} \left(\frac{\partial u_l}{\partial x_i}\right)^{\beta_i} = q_l, \quad (2.12)$$

где p_l, q_l – постоянные, удовлетворяющие условию:

$$\sum_{l=1}^K p_l = g_0 \prod_{l=1}^K q_l. \quad (2.13)$$

2. Если при $\forall l \in \Xi, \quad l \neq k$ функции $u_l(X_l)$ удовлетворяют переопределённой системе уравнений (2.11), а функция $u_k(X_k)$ удовлетворяет уравнению:

$$\sum_{i \in I_k} a_i \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i^2} = g_0 \tilde{q}_k f_k(X_k) \prod_{i \in I_k} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)^{\beta_i} - \tilde{p}_k, \quad (2.14)$$

где

$$\tilde{p}_k = \sum_{l \in \Xi_k^-} p_l, \quad \tilde{q}_k = \prod_{l \in \Xi_k^-} q_l, \quad \Xi_k^- = \Xi \setminus \{k\}. \quad (2.14a)$$

Здесь $k \in \Xi^-$ – некоторое выбранное фиксированное значение.

Доказательство. Подставляя (2.11) в уравнение (1.1) и учитывая (2.10), получаем:

$$\sum_{l=1}^K \hat{M}_l u_l(X_l) = g_0 \prod_{l=1}^K Q_l(X_l, u_l). \quad (2.15)$$

Здесь введены обозначения:

$$\hat{M}_l = \sum_{i \in I_l} a_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}, \quad Q_l(X_l, u_l) = f_l(X_l) \exp(\lambda u_l(X_l)) \prod_{i \in I_l} \left(\frac{\partial u_l}{\partial x_i}\right)^{\beta_i}. \quad (2.16)$$

Для уравнения (2.15) возможны два случая.

1. При $\forall l \in \Xi$ функции $u_l(X_l)$ удовлетворяют уравнениям:

$$Q_l(X_l, u_l) = q_l. \quad (2.17)$$

Тогда, подставляя (2.17) в (2.15), находим:

$$\sum_{l=1}^K \hat{M}_l u_l(X_l) = g_0 \prod_{l=1}^K q_l. \quad (2.18)$$

Правая часть уравнения (2.18) является константой, а левая часть представлена в виде суммы функций от разных переменных, поэтому функции $u_l(X_l)$ должны удовлетворять также уравнениям:

$$\hat{M}_l u_l(X_l) = p_l. \quad (2.19)$$

Из (2.17) и (2.19) с учётом (2.16) следует, что при $\forall l \in \Xi$ функции $u_l(X_l)$ должны удовлетворять системе (2.12). Подставив (2.19) в (2.18), получаем условие (2.13) для постоянных p_l, q_l .

2. При некотором $k \in \Xi$ $Q_k(X_k, u_k) \neq \text{const}$. Тогда существует такое $j \in I_k$, что $\frac{\partial Q_k}{\partial x_j} \neq 0$. Продифференцируем уравнение (2.15) по x_j и почленно разделив на $\frac{\partial Q_k}{\partial x_j}$, в результате получаем:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \hat{M}_k u_k(X_k) \right\} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_j} Q_k(X_k, u_k) \right\}^{-1} = g_0 \prod_{l=1, l \neq k}^K Q_l(X_l, u_l). \quad (2.20)$$

Так как левая часть уравнения (2.20) содержит только переменные X_k , а правая часть – только переменные X_l ($l \neq k$), то при $\forall l \in \Xi, l \neq k$ функции $u_l(X_l)$ должны удовлетворять уравнению (2.17). Рассуждая аналогично случаю 1, получаем, что эти функции должны также удовлетворять уравнению (2.19). Тогда, с учётом (2.17) и (2.19), уравнение (2.15) можно переписать в виде:

$$\hat{M}_k u_k(X_k) + \sum_{l=1, l \neq k}^K p_l = g_0 Q_k(X_k, u_k) \prod_{l=1, l \neq k}^K q_l. \quad (2.21)$$

Принимая во внимание (2.14а) и (2.16), получаем, что функция $u_k(X_k)$ должна удовлетворять уравнению (2.14). Теорема доказана.

Теорема 2.3. Пусть функции $g(u), F(X)$ удовлетворяют соотношениям:

$$g(u) = g_0 u^\gamma, \quad F(X) = \prod_{l=1}^K f_l(X_l), \quad (2.22)$$

где $f_l(X_l)$ – некоторые заданные функции. Тогда уравнение (1.1) имеет решение вида

$$u(X) = \prod_{l=1}^K u_l(X_l), \quad (2.23)$$

в следующих случаях:

1. Если при $\forall l \in \Xi$ функции $u_l(X_l)$ удовлетворяют переопределённой системе уравнений:

$$\sum_{i \in I_l} a_i \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_i^2} = p_l u_l(X_l), \quad f_l(X_l) [u_l(X_l)]^{\beta_{\Sigma} + \gamma - 1 - \beta_{\Sigma l}} \prod_{i \in I_l} \left(\frac{\partial u_l}{\partial x_i} \right)^{\beta_i} = q_l, \quad (2.24)$$

где p_l, q_l – постоянные, удовлетворяющие условию:

$$\sum_{l=1}^K p_l = g_0 \prod_{l=1}^K q_l. \quad (2.25)$$

2. Если при $\forall l \in \Xi, l \neq k$ функции $u_l(X_l)$ удовлетворяют переопределённой системе уравнений (2.24), а функция $u_k(X_k)$ удовлетворяет уравнению:

$$\sum_{i \in I_k} a_i \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i^2} = g_0 \tilde{q}_k f_k(X_k) [u_k(X_k)]^{\beta_{\Sigma} + \gamma - \beta_{\Sigma k}} \prod_{i \in I_k} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right)^{\beta_i} - \tilde{p}_k u_k(X_k), \quad (2.26)$$

где \tilde{p}_k, \tilde{q}_k определяются выражениями (2.14а).

Доказательство. Подставляя (2.23) в уравнение (1.1) и учитывая (2.22), получаем:

$$\sum_{l=1}^K \frac{1}{u_l(X_l)} \hat{M}_l u_l(X_l) = g_0 \prod_{l=1}^K Q_l(X_l, u_l). \quad (2.27)$$

В этом уравнении $Q_l(X_l, u_l)$ определяется выражением:

$$Q_l(X_l, u_l) = f_l(X_l)[u_l(X_l)]^{\beta_{\Sigma} + \gamma - 1 - \beta_{\Sigma l}} \prod_{i \in I_l} \left(\frac{\partial u_l}{\partial x_i} \right)^{\beta_i}, \quad (2.28)$$

а \hat{M}_l определяется выражением (2.16). Проводя для уравнения (2.27) с учётом (2.28) рассуждения, полностью аналогичные доказательству теоремы 2.2, получаем систему (2.24) с дополнительным условием (2.25) и уравнение (2.26). Теорема доказана.

Следующая теорема определяет возможность редукции уравнения (1.1) к уравнению меньшей размерности $K < N$ с использованием переменных бегущей волны; аналогичные процедуры редукции применялись в работах [Кудряшов, 2010], [Полянин, Зайцев, Журов, 2005], [Рахмелевич, 2016 б, 2017 б].

Теорема 2.4. Пусть функция $F(X)$ удовлетворяет соотношению:

$$F(X) = \prod_{l=1}^K f_l(y_l), \quad y_l = \sum_{n \in I_l} c_n x_n. \quad (2.29)$$

Тогда уравнение (1.1) имеет решение вида

$$u(X) = U(y_1, \dots, y_K), \quad (2.30)$$

причём функция $U(y_1, \dots, y_K)$ является решением уравнения:

$$\sum_{k=1}^K A_k \frac{\partial^2 U}{\partial y_k^2} = Cg(U) \prod_{k=1}^K \left\{ f_k(y_k) \left(\frac{\partial U}{\partial y_k} \right)^{\beta_{\Sigma k}} \right\}, \quad (2.31)$$

где C, A_k определяются выражениями:

$$C = \prod_{i=1}^N c_i^{\beta_i}, \quad A_k = \sum_{i \in I_k} a_i c_i^2. \quad (2.31a)$$

Доказательство. Доказательство проводится аналогично теоремам 2.2, 2.3 путем подстановки функции (2.30) в уравнение (1.1) и последующего преобразования этого уравнения к переменным y_k , в результате чего получаем уравнение (2.31). Теорема доказана.

Пример. Предположим, что $f_l(y_l) = y_l^{\alpha_l}$ при $\forall l \in \Xi$; $A_l = 0$ при $\forall l \in \Xi, \quad l \neq k$. При указанных предположениях будем искать решение уравнения (2.31) в виде:

$$U(y_1, \dots, y_K) = V(z), \quad z = \prod_{l=1}^K y_l^{\sigma_l}. \quad (2.32)$$

Без ограничения общности положим $\sigma_k = 1$; остальные показатели σ_l будут определены ниже. Подставляя (2.32) в (2.31), приходим к уравнению:

$$A_k V''(z) \prod_{l=1, l \neq k}^K y_l^{2\sigma_l} = Cg(V) \prod_{l=1}^K \left\{ f_l(y_l) \left(z V'(z) \frac{\sigma_l}{y_l} \right)^{\beta_{\Sigma l}} \right\}. \quad (2.33)$$

С помощью элементарных преобразований уравнение (2.33) приводим к виду:

$$V''(z) = B_k g(V) [z V'(z)]^{\beta_{\Sigma}} y_k^{\alpha_k - \beta_{\Sigma k}} \prod_{l=1, l \neq k}^K y_l^{\alpha_l - \beta_{\Sigma l} - 2\sigma_l}, \quad (2.34)$$

где $B_k = \frac{C}{A_k} \prod_{l=1}^K \sigma_l^{\beta_{\Sigma l}}$. Для того, чтобы уравнение (2.34) могло быть сведено к ОДУ относительно $V(z)$, должно выполняться условие:

$$y_k^{\alpha_k - \beta_{\Sigma k}} \prod_{l=1, l \neq k}^K y_l^{\alpha_l - \beta_{\Sigma l} - 2\sigma_l} = z^{\nu}. \quad (2.35)$$

Так как в силу сделанного выше предположения $\sigma_k = 1$, то из (2.35) следует:

$$\nu = \alpha_k - \beta_{\Sigma k}, \quad \nu \sigma_l = \alpha_l - \beta_{\Sigma l} - 2\sigma_l \quad (l \neq k). \quad (2.36)$$

Тогда из (2.36) находим показатели σ_l :

$$\sigma_l = \frac{\alpha_l - \beta_{\Sigma l}}{\alpha_k - \beta_{\Sigma k} + 2} \quad (l \neq k). \quad (2.37)$$

Из (2.34) получаем, что функция $V(z)$ должна удовлетворять следующему ОДУ:

$$V''(z) = B_k g(V) z^{\beta_{\Sigma} + \nu} [V'(z)]^{\beta_{\Sigma}}. \quad (2.38)$$

(2.32) представляет собой решение типа агрегированных бегущих волн [Рахмелевич, 2016б], причём функция $V(z)$ является решением ОДУ (2.38).

Таким образом, в данной работе исследовано неавтономное N -мерное уравнение с частными производными второго порядка, правая часть которого содержит произвольную нелинейность по неизвестной функции и нелинейности степенного типа по её первым производным. Найдено решение этого уравнения типа бегущей волны в неявном виде. Для случая степенной нелинейности по неизвестной функции получены явные решения типа бегущей волны, в частности, в виде степенной, экспоненциальной и логарифмической функций. Проанализировано, как влияют параметры уравнения на свойства найденных решений.

Список литературы

1. Кудряшов Н. А. 2010. Методы нелинейной математической физики. Долгопрудный: Изд-во «Интеллект», 368.
2. Полянин А. Д., Зайцев В. Ф. 2002. Справочник по нелинейным уравнениям математической физики: точные решения. М.: Физматлит, 432.
3. Полянин А. Д., Зайцев В. Ф., Журов А. И. 2005. Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики. М.: Физматлит, 256.
4. Рахмелевич И. В. 2016 а. О редукции многомерных уравнений первого порядка с мультиродной функцией от производных. Известия вузов. Математика, 4: 57–67.
5. Рахмелевич И. В. 2016 б. О решениях типа агрегированных бегущих волн для линейных уравнений в частных производных с переменными коэффициентами. Научные ведомости Белгородского университета. Математика. Физика, 43 (13): 30–38.
6. Рахмелевич И. В. 2017 а. О псевдополиномиальных решениях двумерного уравнения, содержащего произведение частных производных. Научные ведомости Белгородского университета. Математика. Физика, 47 (13): 45–50.
7. Рахмелевич И. В. 2017 б. О многомерных уравнениях в частных производных со степенными нелинейностями по первым производным. Уфимский математический журнал, 9 (1): 98–109.
8. Рахмелевич И. В. 2017 в. Двумерное эллиптическое уравнение с нелинейным источником, содержащим степени первых производных. Научные ведомости Белгородского университета. Математика. Физика. 49 (27): 33–41.
9. Рахмелевич И. В. 2018. Многомерное неавтономное уравнение, содержащее произведение степеней частных производных. Вестник Санкт-Петербургского государственного университета: Математика, механика, астрономия. 5(63), № 1: 119–130.
10. Grundland A.M., Infeld E. 1992. A family of non-linear Klein – Gordon equations and their solutions. Journal of Mathematical Physics, 33 (7): 2498–2503.
11. Miller J. (Jr.), Rubel L.A. 1993. Functional separation of variables for Laplace equations in two dimensions. Journal of Physics A, 26: 1901–1913.
12. Polyanin A. D. 2019 а. Construction of exact solutions in implicit form for PDEs: New functional separable solutions of non-linear reaction-diffusion equations with variable coefficients. International Journal of Non-Linear Mechanics, 111: 95–105.
13. Polyanin A. D. 2019 б. Comparison of the effectiveness of different methods for constructing exact solutions to nonlinear PDEs. Generalizations and new solutions. Mathematics, 7(5): 386. DOI 10.3390/math7050386.

14. Zhdanov R. Z. 1994. Separation of variables in the non-linear wave equation. *Journal of Physics A*, 27: L291-L297.

References

1. Kudryashov N. A. 2010. *Metody nelineynoy matematicheskoy fiziki [Methods of nonlinear mathematical physics]*. Dolgoprudny: Publ. «Intellect», 368.
2. Polyanin A. D., Zaytsev V. F. 2012. *Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations*, 2nd Edition. Boca Raton – London: Chapman and Hall – CRC Press, 1912 (in Russian).
3. Polyanin A. D., Zaytsev V. F., Zhurov A. I. 2005. *Metody resheniya nelineynykh uravneniy matematicheskoy fiziki i mekhaniki [Methods of solving of nonlinear equations of mathematical physics and mechanics]* M: Fizmatlit, 256.
4. Rakhmelevich I. V. 2016 a. Reduction of multidimensional first order equations with multi-homogeneous function of derivatives. *Russian Mathematics*. 60 (4): 47–55 (in Russian).
5. Rakhmelevich I. V. 2016 b. O resheniyakh tipa agregirovannykh begushikh voln dlya lineynykh uravneniy v chastnykh proizvodnykh s peremennymi koeffitsientami [On the solutions type of aggregated travelling waves for linear partial differential equations with variable coefficients] *Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics. Physics*, 43 (13): 30–38.
6. Rakhmelevich I. V. 2017 a. O psevdopolynomialnykh resheniyakh dvumernogo uravneniya, sodержashhego proizvedenie chastnykh proizvodnykh [On the pseudo-polynomial solutions of two-dimensional equation containing the production of partial derivatives] *Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics. Physics*, 47 (13): 45–50.
7. Rakhmelevich I. V. 2016 c. On multi-dimensional partial differential equations with power nonlinearities in first derivatives. *Ufa Mathematical Journal*, 8 (4): 98-108 (in Russian).
8. Rakhmelevich I. V. 2017 b. Dvumernoe ellipticheskoe uravnenie s nelineynym istochnikom, sodержashim stepeni pervykh proizvodnykh [Two-dimensional elliptic equation with nonlinear source containing powers of first derivatives] *Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics. Physics*, 49 (27): 33–41.
9. Rakhmelevich I. V. 2018. Mnogomernoe neavtonomnoe uravnenie, sodержashee proizvedenie stepeney chastnykh proizvodnykh [Multi-dimensional non-autonomous equation containing the production of powers of partial derivatives] *Vestnik SpBSU. Mathematics, mechanics, astronomy*, 5(63), No 1: 119–130.
10. Grundland A. M., Infeld E. 1992. A family of non-linear Klein – Gordon equations and their solutions. *Journal of Mathematical Physics*, 33 (7): 2498–2503.
11. Miller J. (Jr.), Rubel L. A. 1993. Functional separation of variables for Laplace equations in two dimensions. *Journal of Physics A*, 26: 1901–1913.
12. Polyanin A. D. 2019 a. Construction of exact solutions in implicit form for PDEs: New functional separable solutions of non-linear reaction-diffusion equations with variable coefficients. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 111: 95–105.
13. Polyanin A. D. 2019 b. Comparison of the effectiveness of different methods for constructing exact solutions to nonlinear PDEs. Generalizations and new solutions. *Mathematics*, 7(5): 386. DOI 10.3390/math7050386.
14. Zhdanov R. Z. 1994. Separation of variables in the non-linear wave equation. *Journal of Physics A*, 27: L291-L297.

Получена 12.05.2020

Рахмелевич Игорь Владимирович – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры математических и естественнонаучных дисциплин Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского
 пр. Гагарина, 23, г. Нижний Новгород, Россия,
 E-mail: igor-kitpd@yandex.ru

*Посвящается 100-летию
со дня рождения одного
из основателей воронежской
математической школы –
М. А. Красносельского*

ОБ ИСТОРИИ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ (1900-е – 1960-е гг.) И ВКЛАДЕ М. А. КРАСНОСЕЛЬСКОГО ¹

Е. М. Богатов

(Статья представлена членом редакционной коллегии Ю. П. Вирченко)

Старооскольский технологический институт им. А. А. Угарова (филиал) Национального
исследовательского технологического университета «МИСиС»,
г. Старый Оскол, 309516, Россия

Филиал Национального исследовательского технологического университета «МИСиС»
в г. Губкине Белгородской области,
г. Губкин, 309180, Россия

E-mail: embogатов@inbox.ru

Аннотация. Целью работы является изучение вклада зарубежных и отечественных математиков, в особенности М. А. Красносельского, в развитие теории линейных и нелинейных положительных операторов за период с середины 1900-х гг. до конца 1960-х гг.

Метод. Исследование основано на анализе оригинальных работ О. Перрона, Ф. Г. Фробениуса, Р. Ентча, П. С. Урысона, М. Г. Крейна, М. А. Рутмана, М. А. Красносельского и др. в контексте общемирового процесса развития функционального анализа.

Результат. Вклад отечественных учёных в области положительных операторов оказался больше, чем вклад остальной части мирового математического сообщества в рассматриваемый период. Советские математики М. Г. Крейн и его ученик М. А. Рутман в 1940-е гг. создали теорию конусов и *линейных* положительных операторов A в бесконечномерном пространстве и применили её к исследованию разрешимости уравнений вида $Ax = \lambda x$. Благодаря усилиям другого ученика М. Г. Крейна – М. А. Красносельского – с середины 1950-х гг. теория положительных операторов приобрела своё значение, как общий метод для решения широкого класса задач *качественного* характера, относящихся к анализу *нелинейных* операторных уравнений (в том числе, доказательство новых теорем о неподвижной точке и структуре спектра положительного оператора A , исследование бифуркационных значений параметра μ в уравнении вида $x = A(x, \mu)$, обоснование метода последовательных приближений для уравнения $Ax = \lambda x$ с нелинейным оператором A в конусе банахова пространства и т.п.). Кроме того, в рамках развитой М. А. Красносельским теории удалось решить ряд задач прикладного характера.

Обсуждение. Анализ достижений в области положительных операторов показал, что в отдельно взятой стране (СССР) могут быть сформированы условия для успешного создания и развития целого научного направления. Огромное значение здесь имеет масштаб учёных, стоящих у истоков этого направления – М. Г. Крейна и М. А. Красносельского.

Ключевые слова: история нелинейного функционального анализа, теорема Перрона – Фробениуса, теорема Ентча, конусная теорема Красносельского, положительные операторы, теория конусов, уравнение Гаммерштейна, уравнение Урысона.

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект 20-011-00402.

Для цитирования: Богатов Е. М. Об истории положительных операторов (1900-е – 1960-е гг.) и вкладе М. А. Красносельского. Прикладная математика & Физика, 52(2): 105–127.

DOI 10.18413/2687-0959-2020-52-2-105-127.

¹Работа представляет собой расширенный и дополненный вариант доклада на Воронежской зимней математической школе С. Г. Крейна – 2020 [Богатов, 2020], а также выступлений на XXV годичной научной конференции ИИЕТ РАН им. С. И. Вавилова, секция История математики, [Богатов, 2019 а] и на XVI международной конференции «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории [Богатов, 2019 б]»

ON THE HISTORY OF THE POSITIVE OPERATORS (1900s – 1960s)
AND THE CONTRIBUTION OF M. A. KRASNOSEL'SKII

Egor Bogatov

(Article submitted by a member of the editorial board Yu. P. Virchenko)

Stary Oskol Technological Institute of National Research University of Science and Technology «MISIS»,
Stary Oskol, 309516, Russia;
Branch of National Research University of Science and Technology «MISIS» in Gubkin town of Belgorod Region
Gubkin, 309180, Russia

E-mail: embogatov@inbox.ru

Received May 20, 2020

Abstract. Goal. The aim of the work is studying of the contribution of foreign and domestic mathematicians, in particular M. A. Krasnoselskii, to the development of the theory of linear and nonlinear positive operators for the period from the mid-1900s until the end of the 1960s.

Method. The study is based on an analysis of original works of O. Perron, G. Frobenius, R. Jentzsch, P. S. Urysohn, M. G. Krein, M. A. Rutman, M. A. Krasnoselskii and others in the context of the global process of development of functional analysis.

Result. The contribution of domestic scientists in the field of positive operators was larger than that of the rest of the world mathematical community in the period under review. Soviet mathematicians M. G. Krein and his student M. A. Rutman in the 1940s created the theory of cones and linear positive operators A in space of infinite dimension. They applied this theory to the study of the solvability of equations of the form $Ax = \lambda x$. Thanks to the efforts of another Krein student – M. A. Krasnoselskii - the theory of positive operators has become a general method for solving a wide class of problems of a qualitative nature, related to the analysis of nonlinear operator equations, since the mid 1950s (proof of new fixed point theorems and theorems about the spectrum structure of the operator A), investigation of the bifurcation value of the parameter μ in the equation $x = A(x, \mu)$, substantiation of the successive approximations method for the equation $Ax = \lambda x$ in a cone of Banach space for nonlinear operator A and so on). Besides, in the framework of the theory created by Krasnoselskii, a number of important applied problems were solved.

Discussion. Analysis of developments in the field of positive operators showed that in one country (USSR) may be formed conditions for the successful creation and development of a separate scientific field. Of great importance here is the scale of the scientists who stood at the origins of this direction – M. G. Krein and M. A. Krasnoselskii.

Key words: history of nonlinear functional analysis, Perron-Frobenius theorem, Jentzsch theorem, Krasnosel'skii cone theorem, positive operators, theory of cones, Hammerstein equation, Urysohn equation.

Acknowledgements: The work is supported by RFBR, project 20-011-00402.

For citation: Bogatov E. M. 2020. On the history of the positive operators (1900s – 1960s) and the contribution of M. A. Krasnosel'skii. Applied Mathematics & Physics, 52(2): 105–127 (in Russian).

DOI 10.18413/2687-0959-2020-52-2-105-127.

1. Введение. С начала появления первых работ по положительным операторам прошло уже более 100 лет, а середины XX в. интерес к этой теме стал расти в геометрической прогрессии (см., например, список литературы в [Аманн, 1976]), поэтому её осмысление уже давно назрело. Несмотря на это, историко-математические исследования в данном направлении, по-видимому, не проводились. Кроме того, некоторые западные математики, публикующие монографии по положительным операторам в серьёзных издательствах (см., например, [Aliprantis, Burkinshaw, 2006]), в историческом предисловии не упоминают основополагающие работы о матричных положительных операторах О. Перрона [Perron, 19076], Ф. Г. Фробениуса [Frobenius, 1908; Frobenius, 1909] и их последователя Р. Ентча с его результатами о положительной разрешимости линейных интегральных уравнений [Jentzsch, 1912].

Трудно также объяснить отсутствие среди «отцов-основателей» обсуждаемой теории таких известных учёных, как М. А. Красносельский, опубликовавший монографию по положительным решениям операторных уравнений² [Красносельский, 1962], В. И. Опойцев [Опойцев, 1977] и многих других отечественных математиков.

Автор постарается в каком-то смысле восстановить историческую справедливость и беспристрастно проследить зарождение и развитие теории положительных операторов, начиная с работ Ш. Ф. Штурма 1830-х гг. и заканчивая исследованиями Красносельского и его учеников до конца 1960-х гг.

Будут найдены ответы на следующие вопросы:

²Она была переведена на английский язык в 1964 г. издательством Noordhoff.

1. Когда возникла вышеупомянутая теория и чем было обусловлено её появление?
2. На каком этапе развития теории к исследованиям подключились отечественные математики?
3. Каковы ключевые моменты развития теории положительных операторов?
4. Чем был мотивирован приход М. А. Красносельского в данную область? Каких результатов он достиг, какие инструменты использовал?
5. Как соотносились достижения представителей воронежской математической школы с результатами других учёных, в том числе и иностранных?
6. Какое продолжение получила эта тема в 1960 – 1970-е гг.?
7. Какое воздействие оказала теория положительных операторов на развитие функционального анализа?

Настоящее исследование продолжает цикл работ автора по истории нелинейного функционального анализа (см. [Богатов,2017], [Богатов,2018], [Богатов,2019a], [Bogatov,2020]).

2. Предыстория: положительные матрицы и линейные интегральные уравнения.

В 1907 г. появилась работа немецкого математика Оскара Перрона о положительных собственных значениях матриц с положительными элементами. Основной интерес для нас представляет теорема о существовании наибольшего по модулю, положительного собственного значения матрицы

$$A = \{a_{ij} > 0\}, \text{ где}$$

$$Ax = \lambda x, \tag{1}$$

которому соответствует вектор с положительными координатами [Perron, 1907 b; с. 261].

Интерес Перрона к положительным матрицам был обусловлен³ задачами из алгебры малых колебаний, восходящих к исследованиям французского математика Шарля Франсуа Штурма. Приведём характерный пример [Sturm, 1833; Гантмахер, Крейн, 1950]. Пусть имеется упругая струна, нагруженная массами в некоторых внутренних точках s_i (см. рис. 1).

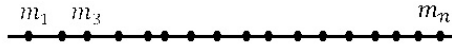


Рис. 1. Упругая струна, нагруженная массами
Fig. 1. Elastic string loaded by masses

Её поперечные перемещения удовлетворяют линейному дифференциальному уравнению

$$y(x, t) = - \sum_{k=1}^n K(x, s_k) m_k \ddot{y}_k,$$

где $K(x, s)$ – функция влияния струны.

Если предполагать наличие гармонических колебаний, то для отыскания амплитуд прогиба в точках s_i мы придём к системе линейных уравнений

$$u_i = p^2 \sum_{k=1}^n a_{ik} m_k u_k, \tag{2}$$

где $a_{ik} = K(s_i, s_k) \geq 0$ есть коэффициенты влияния. Матрица $A = \{a_{ik}\}$ системы (2) неотрицательна. Результаты Перрона были распространены на матрицы с неотрицательными элементами его соотечественником Фердинандом Георгом Фробениусом [Frobenius, 1908; Frobenius, 1909].

Начало XX в. ознаменовалось интересом к линейным интегральным уравнениям с точки зрения аналогии с матричными уравнениями [Stewart, 2014]. Исследования Фредгольма, Гильберта и Шмидта [Fredholm, 1903; Hilbert, 1904; Schmidt, 1907 a; Schmidt, 1907 b] открывали дорогу для обобщения т. Перрона – Фробениуса на уравнения Фредгольма:

$$y(s) = \lambda \int_a^b K(s, t) y(t) dt. \tag{3}$$

³См. его статью [Perron, 1907 a], напечатанную в том же номере журнала *Mathematische Annalen*, что и [Perron, 1907 b].

Актуальность данного обобщения подтверждалась также тем, что уравнение вида (3) (при непрерывном $K(s, t) > 0$ с заменой dt на $d\sigma(t)$) позволяет найти амплитуду колебаний упругого континуума при непрерывном распределении масс [Fredholm, 1906; Wateman, 1910, p.420-421]. Указанное исследование было выполнено учеником Фробениуса, немецким математиком Робертом Йентчем в 1912 г. Соответствующая теорема (в несколько упрощённой форме) выглядела так [Jentzsch, 1912; с. 225].

Пусть функция $K(s, t)$ положительна и непрерывна для любых $s, t \in (a, b)$, тогда существует наименьшее по модулю, простое вещественное собственное значение $\lambda_0 = \min |\lambda|$ уравнения (3), которому соответствует положительная на интервале (a, b) функция $y_0(s)$.

3. Нелинейные интегральные уравнения с положительным ядром. Дальнейшее развитие линейной теории уравнений с положительными решениями тормозилось отсутствием общей теории операторов, как таковой (она сложилась к концу 1920-х гг. – см., например, [Bernkopf, 1966; Богатов, Мухин, 2016]). В итоге в течение примерно 15 лет новых результатов о положительной разрешимости уравнения (1) в линейном случае получено не было.

Параллельно с линейной шло развитие теории нелинейных интегральных уравнений [Schmidt, 1908]. Здесь себя проявил представитель московской математической школы Павел Самуилович Урысон. Он обратился к теме положительных решений задач на собственные значения для нелинейных интегральных уравнений в 1918 г.⁴ Не будучи знаком с результатами Ентча, он рассмотрел условия положительной разрешимости уравнения

$$y = \mu A_0 y, \quad (4)$$

с нелинейным оператором

$$A_0 y(x) = \int_a^b K(x, s, y(s)) ds. \quad (5)$$

Проводя свои исследования [Урысон, 1923], Урысон, по-видимому, руководствовался логикой развития самой математики. Однако здесь необходимо отметить, что он был хорошо знаком с задачами гидродинамического характера⁵, приводящими к уравнениям вида (5), что могло оказать своё влияние на выбор объекта исследования.

Используя в качестве основного инструмента метод последовательных приближений, Урысон доказал теорему о существовании положительных решений уравнения (5) в предположении о том, что $K(x, y, 0) \equiv 0$ и что производная $K'_u(x, y, u)$ непрерывна, положительна и монотонно убывает с возрастанием u ($u \geq 0$). Он показал, что *положительные собственные функции оператора A_0 существуют при условии, что значения μ принадлежат некоторому интервалу (μ_P, μ_Q)* , где числа μ_P и μ_Q – это наибольшие собственные значения определённых⁶ линейных интегральных операторов P и Q . Каждому $\mu \in (\mu_P, \mu_Q)$ соответствует единственное положительное решение $y(x, \mu)$ [Урысон, 1951; с. 50-51].

Отметим, что цитированная работа Урысона опередила своё время и не была оценена его современниками по достоинству.

4. Обособление алгебры малых колебаний и выход на теорию моментов. Как уже было отмечено выше, источником исследований Перрона в области матричных уравнений служила теория малых колебаний. Новый круг идей был очерчен одесским математиком Марком Григорьевичем Крейном при более пристальном (по сравнению со Штурмом) изучении свойств матрицы коэффициентов влияния A_1 струны с точечными массами, закреплённой на обоих концах (см. рис. 1) [Крейн, 1934 б]. Оказалось, что существование осцилляционных свойств связано со следующей особенностью матрицы A_1 : *все миноры любых порядков этой матрицы неотрицательны*⁷. В результате исследований, проведённых Крейном совместно с его коллегой, Феликсом Рувимовичем Гантмахером в середине 1930-х гг. [Гантмахер, Крейн, 1935], [Gantmakher, Krein, 1935], [Gantmakher, Krein, 1937], был выделен важный класс так называемых *осцилляционных матриц* – вполне неотрицательных квадратных матриц A , некоторая степень которых A^k является вполне положительной матрицей. При этом был обнаружен следующий факт: основные спектральные свойства этих матриц (вещественность, *положительность* и простота характеристических чисел, определённые законы чередования знаков у координат собственных векторов и др.) являются общими как для симметричных, так и для несимметричных осцилляционных матриц⁸.

⁴Результат был опубликован на 5 лет позже и известности в то время не получил.

⁵См. его дневник в книге [Нейман, 1972; с. 71-77].

⁶Подробности будут ниже.

⁷Такие матрицы были названы М. Г. Крейном *вполне неотрицательными*.

⁸Тема оказалась настолько актуальной, что монография, подытожившая цикл исследований по этой теме [Гантмахер, Крейн, 1950], была переведена на немецкий и английский языки.

Параллельно с теорией осцилляционных матриц Крейн активно занимался исследованиями по теории моментов [Крейн, 1933; Крейн, 1934 а; Крейн, 1937; Крейн, 1938 а], и этот его интерес был не случаен⁹. Применительно к малым колебаниям нити с бусинами, проблема моментов состоит в определении масс бусин и их расположении таким образом, чтобы частоты колебаний нити имели наперёд заданные значения (подробности см., например, в Дополнении II книги [Гантмахер, Крейн; 1950]).

Математическая постановка задачи (*L*-проблема моментов), исследованием которой занимался Крейн, состояла в следующем [Крейн, 1938 а; с. 199]:

Каковы необходимые и достаточные условия, налагаемые на числа c_1, \dots, c_n , чтобы существовала непрерывная функция ограниченной вариации $\varphi(t)$, удовлетворяющая условиям

$$\int_a^b x_i(t)d\varphi(t) = c_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (6)$$

$$\Delta\varphi_1 \leq \Delta\varphi \leq \Delta\varphi_2 \quad \forall \Delta t,$$

где функции ограниченной вариации $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ удовлетворяют условию $\Delta\varphi_1 < \Delta\varphi_2 \forall \Delta t$?

Проблема моментов волновала умы математиков, в том числе отечественных – П. Л. Чебышева и А. А. Маркова – с конца XIX в. (см. [Kjeldsen, 1993]; исторические комментарии в [Крейн, Нудельман, 1973]). Поиски путей её решения привели венгерского математика Марселя Рисса к возможности использования идей функционально-аналитического характера [Riesz, 1923]. Он, в частности, показал, что проблема моментов, соответствующая последовательности $\{c_i\}$ (см. (6)), имеет неубывающее решение $\varphi(t)$ в том и только в том случае, когда линейный функционал $T : f(t) \rightarrow \mathbf{R}$, определённый по правилу

$$T(t^n) = c_n > 0,$$

положителен.

Это означало, что любая положительная на отрезке $[a, b]$ линейная комбинация вида

$$x(t) = \sum_{k=1}^n \alpha_k t^k > 0, \quad \alpha_k \in \mathbf{R}$$

преобразуется функционалом T в положительное число: $T(x(t)) > 0$.

Через 5 лет понятие положительного функционала было обобщено на бесконечномерный случай братом М. Рисса, Фридьешем Риссом (результат был изложен на VIII Международном Математическом конгрессе [Riesz, 1928]). Он назвал функционал A , определённый на множестве непрерывных функций $\{f\}$, *положительным*, если $f > 0$ влечёт $Af > 0$.

5. Возникновение теории конусов в банаховых пространствах. В конце 1920-х – начале 1930-х гг. функциональный анализ уже выделился в отдельную дисциплину [Bourbaki, 1974; Dieudonne, 1981; Birkhoff, Kreyszig, 1984]. Действуя в рамках функционально-аналитической идеологии и опираясь на подход М. Рисса к решению задач из теории моментов, Крейн ввёл в рассмотрение положительные линейные функционалы, определённые на последовательностях функций $w_k(t) \subset E, t \in I$ так, что¹⁰

$$w(t) = \sum_{k=1}^n \alpha_k w_k(t) > 0 \Rightarrow Bw > 0. \quad (7)$$

Крейн показал [Крейн, 1938а, с. 127], что множество возможных значений функционала B является *коническим выпуклым* множеством, что помогло свести изучение моментных последовательностей $\{c_n\}$ к исследованию геометрии выпуклых тел в конечномерном пространстве. Более того, содержательная интерпретация области определения функционала B позволила Крейну осуществить переход к бесконечномерному случаю: *позитивность функционала в пространстве E постулировалась, как его способность преобразовывать элементы некоторого конуса $K \subset E$ в неотрицательные* (в обычном смысле) элементы [Крейн, 1937; с. 227].

При этом конус в пространстве E представлял собой множество элементов, удовлетворяющее следующим условиям:

⁹Эти же вопросы были предметом научных изысканий Перрона параллельно с изучением свойств положительных матриц [Peron, 1913].

¹⁰Отметим, что при $\alpha_k \geq 0$ линейная комбинация в (7) станет *конической* комбинацией.

1. $x \in K \Rightarrow \lambda x \in K$ при $\lambda \geq 0$;
2. $x, y \in K \Rightarrow (x + y) \in K$;
3. $x \in K; x \neq \theta \Rightarrow -x \in E \setminus K$.

Такое определение давало возможность наилучшим образом использовать геометрию банахова пространства E , к тому времени уже хорошо разработанную силами львовской математической школы [Banach, 1932, Гл. VIII; Mazur, 1933]. Здесь, в частности, сыграла свою роль теорема Асколи-Мазура о существовании опорной к конусу гиперплоскости: она обеспечила наличие хотя бы одного позитивного функционала в E^* [Крейн, 1939].

Подтверждением правомерности выделения конусов банахова пространства на роль «эквивалента» множества положительных функций явилась также изоморфность конуса K сепарабельного пространства E множеству функций $\{y(x) \in C[a, b], y(x) \geq 0\}$, доказанная Крейном в 1939 г. [Гроссберг, Крейн, 1939]. Крейн также показал, что совокупность положительных функционалов образует конус в сопряжённом пространстве, что, в частности, даёт возможность выйти на доказательство теоремы Маркова о неподвижной точке [Крейн, 1939].

Идея дальнейшего использования конусов банахова пространства была «навеяна» топологическим доказательством теоремы Перрона – Фробениуса, предложенным советским математиком Павлом Сергеевичем Александровым и его немецким коллегой Хейнцем Хопфом [Alexandroff, Hopf, 1935, с. 480-481]. Они рассмотрели конечномерный оператор A , оставляющий октант $K(x_i > 0)$ инвариантным, и доказали существование неподвижной точки нелинейного оператора F :

$$F(x) = \frac{Ax}{f(Ax)} \quad (8)$$

на основе теоремы Брауэра¹¹ [Brouwer, 1911].

Однако при переходе в бесконечномерное пространство нужна была другая теорема о неподвижной точке¹². Теорема о том, что вполне непрерывный оператор A , преобразующий выпуклое множество банахова пространства E в себя, имеет неподвижную точку, была доказана в 1930-м г. польским математиком Юлиушем Шаудером [Schauder, 1930]. Для применения теоремы Шаудера в контексте доказательства существования решений операторных уравнений вида

$$Ax = \lambda x, \quad x \in K \subset E, \quad (9)$$

удобнее всего было иметь дело с инвариантными относительно конуса операторами: $AK \subset K$. Первыми это заметили М.Г. Крейн [Крейн, 1939] и его ученик Моисей Аронович Рутман [Рутман, 1938]. Практически сразу свойство $AK \subset K$ было включено в определение положительного оператора [Rutman, 1940, с. 94]. Строго говоря, линейный оператор A был назван *положительным*, если

1. $AK \subset K, K \subset E$;
2. $\exists x_0 \in K, c > 0; c \in \mathbf{R}: Ax_0 - cx_0 \in K$.

Использование идеи Александрова-Хопфа и аналогов формулы (8) помогли Рутману доказать операторный аналог теорем Перрона-Фробениуса и Энтча для вполне непрерывных линейных операторов, оставляющих инвариантным воспроизводящий¹³ конус $K \subset E$.

Находясь под влиянием теории осцилляционных матриц, Рутман дал определение *вполне позитивного* оператора, некоторая натуральная степень которого преобразует любой граничный элемент конуса в его внутренний элемент¹⁴ [Rutman, 1940, с. 65]

$$\forall (u \in \partial K) \exists (n \in \mathbf{N}) [A^n u \in K].$$

Такое нововведение позволило усилить теорему Энтча следующим образом:

¹¹О существовании неподвижной точки непрерывного отображения, преобразующего выпуклое множество $S \subset R^n$ в себя. В данном случае роль S играл симплекс, получающийся при пересечении гиперплоскости $f(x) = 1$ с октантом K .

¹²Историю метода неподвижной точки см., например, в [Богатов, 2018; Богатов, 2019 а].

¹³Конус K называется *воспроизводящим*, если любой элемент $z \in E$ представляется в виде разности $z = x - y$, где $x, y \in K$. Это понятие (как и многие другие геометрические понятия теории конусов) принадлежат Крейну. Оно впервые появилось в его неопубликованной довоенной монографии «Теория конусов в пространстве Банаха и её приложения» – см. ссылку в работе [Крейн, Рутман, 1948, с. 7].

¹⁴Здесь предполагается, что конус K имеет внутренние элементы, то есть телесен.

Вполне непрерывный линейный оператор A , вполне позитивный относительно конуса K , имеет в этом конусе один и только один собственный вектор. Соответствующее ему собственное значение является наибольшим по модулю собственным значением оператора A .

Поскольку теорема Шаудера не предполагала линейности оператора A в уравнении (9), логично было бы сделать шаги в определении *нелинейных* положительных операторов и доказательстве разрешимости соответствующих уравнений. Однако естественному ходу событий помешала война и до середины 1950-х гг.¹⁵ новые результаты в данной области в СССР не публиковались.

С другой стороны, топологические идеи Александрова и Хопфа получили распространение и на Западе, в результате чего в 1944 г. вышла работа американского математика немецкого происхождения Эриха Роте [Rothe, 1944]. Он рассмотрел спектральную задачу $Ax = \lambda x$ в гильбертовом пространстве H и доказал аналог теоремы Ентча для нелинейных вполне непрерывных операторов, заданных на сфере положительных функций пространства H , опираясь на соотношение вида (8), теорему Шаудера и геометрию пространства H .

Роте, по-видимому, не был знаком с цитированными выше работами Крейна и Рутмана.

6. Становление теории конусов. Нелинейные положительные операторы. Подход, предложенный Роте, не допускал обобщение на произвольные банаховы пространства даже в линейном случае. В то время, как всестороннее исследование геометрии банаховых пространств с конусом, результаты которого были изложены в большой статье¹⁶ [Крейн, Рутман, 1948], заложили основы для распространения идей теории положительных операторов в функциональном анализе и его приложениях.

Прежде, чем перейти к нелинейным задачам, отметим, что Крейн и Рутман смогли ослабить требования к линейному оператору A в (8) и (9), заменив полную непрерывность – непрерывностью в слабой топологии для случая, когда пространство E – рефлексивно [Крейн, Рутман, 1948; Теорема 4.1]. Это стало возможным благодаря введению в сопряжённое пространство E^* топологии, порождённой системой окрестностей $U_\varepsilon(f_0)$ вида

$$U_\varepsilon(f_0) = \{f \in E^* : |f(x_i) - f_0(x_i)| < \varepsilon; \quad i = 1, 2, \dots, n\},$$

где $f_0 \in E^*$, и применению теоремы Тихонова¹⁷ о неподвижной точке [Tychonoff, 1935] с учётом того, что всякая замкнутая сфера в E^* представляет собой бикомпакт в указанной (слабой) топологии.

Нелинейный операторный аналог теоремы Ентча был доказан Рутманом для положительных операторов, удовлетворяющих условию *монотонности*¹⁸

$$x \succ y \Rightarrow Ax \succ Ay \quad \text{for all } x, y \in K \tag{10}$$

и ограничение на рост значений оператора A вдоль некоторого луча внутри конуса:

$$\exists (u \in K; \quad c > 0, \varepsilon > 0) [A(tu) \succ ctu] \quad \forall (t \in [0, \varepsilon]). \tag{11}$$

В одномерном случае условие Рутмана (11) допускает геометрическую интерпретацию (см. рис. 2, $v = tu$).

Требования (10)-(11) к нелинейному оператору A позволили Рутману сделать заключение о том, что при их выполнении задача (9) всегда имеет положительное решение ($\lambda > 0, x \in K$), причём норма элемента x может выбрана произвольно [Крейн, Рутман, 1948; с. 92].

С конусной тематикой был хорошо знаком и другой ученик М. Г. Крейна, Марк Александрович Красносельский, работавший вместе с Крейном в Институте Математики АН УССР с 1947 по 1952 г. [Боголюбов, Ишлинский, Канторович, 1981]. В то время Красносельский разрабатывал топологические методы теории нелинейных интегральных уравнений, и теория положительных операторов входила в круг его научных интересов [Красносельский, 1951].

Помимо семинаров Крейна по функциональному анализу, он посещал также семинары Н. Н. Боголюбова и Н. М. Крылова по нелинейной механике. Отправными пунктами исследований Красносельского являлись упомянутый выше результат Урысона¹⁹, а также задача об определении форм потери устойчивости шарнирно-опёртого стержня переменной жёсткости, сводящаяся к уравнению Урысона (4)-(5).

¹⁵В 1947 г. по этой теме вышла совместная работа академика Н. Н. Боголюбова и младшего брата М. Г. Крейна – Селиам Крейна [Боголюбов, Крейн, 1947].

¹⁶Эта статья вошла в «золотой фонд» достижений отечественной математики.

¹⁷Если X – выпуклый бикомпакт, в локально-выпуклом линейном топологическом пространстве, то при непрерывном отображении X в себя существует неподвижная точка.

¹⁸В неравенстве (10) $x \succ y$ равносильно тому, что $x - y \in K$. Тем самым в пространство E вводится упорядочивание.

¹⁹К тому времени был опубликован сборник трудов Урысона [Урысон, 1951], и Красносельский был одним из первых, кто обратил должное внимание на его статью по нелинейным интегральным уравнениям.

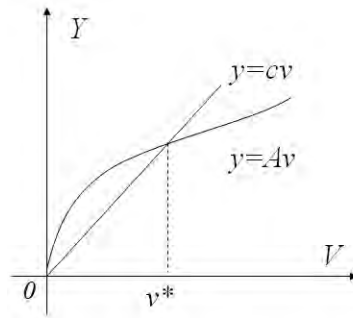


Рис. 2. Геометрический смысл условия Рутмана – существование пересечения вогнутой функции с наклонной прямой

Fig.2. The geometric meaning of the Rutman condition is the intersection of a concave function with an oblique line

7. Вклад М. А. Красносельского в теорию положительных операторов: 1950-е – 1960-е гг.

... Создание и развитие теории конусов во многом связано с научной деятельностью М. А. Красносельского, которому принадлежит серия ярких результатов, составляющих каркас теории, служащих источником её роста вширь и вглубь²⁰.

Красносельский не ограничился применением теории конусов к доказательству теорем существования решений уравнений вида (9). Он стал рассматривать эту теорию, как дополнительную возможность (наряду с вариационными методами, теорией ветвления и теорией степени отображения) для изучения качественных свойств решений уравнения (9) для нелинейных операторов A .

Для дальнейшего целесообразно выделить основные линии развития теории конусов в работах Красносельского до конца 1960-х гг.:

1. Введение в рассмотрение монотонных минорант.
2. Получение аналогов утверждений теории Урысона.
3. Проверка теории конусов на модельных задачах нелинейной механики.
4. Совмещение методов теории конусов с другими методами нелинейного анализа.
5. Расширение и углубление теории конусов.
6. Выход на приложения.

Перейдём к линии 1. Теорема Рутмана имела ограниченную область применения: положительные операторы, удовлетворяющие её условиям, обязательно должны быть *монотонными*. Понятно, что в общем случае нелинейность не обязана быть монотонной (например, если ядро имеет вид $K(s, u) \equiv s \cdot \sin(u)$) и здесь нужен какой-то другой инструмент для исследований.

Подсказка для выхода из положения нашлась в статье Урысона [Урысон, 1951, с. 239], который ввёл в рассмотрение функции $P(x, s)$ и $Q(x, s)$ (ядра линейных операторов), удовлетворяющие следующим условиям

$$P(x, s) > K_y(x, s, y) > Q(x, s). \quad (12)$$

С помощью этих ядер (а, следовательно, и соответствующих операторов), и проводилась оценка собственных значений оператора (5). Оценки (12) скорее всего и помогли Красносельскому сформулировать понятие *монотонной миноранты*²¹ B нелинейного оператора A [Красносельский, 1951], как оператора, удовлетворяющего условиям теоремы Рутмана и неравенству

$$Ax \succ Bx.$$

При этом в качестве миноранты B оказалось удобным использовать линейный положительный²² оператор. Позже пришло понимание того, что в ряде случаев для B подходит сильная производная по конусу в нуле оператора A [Красносельский, 1962; с. 119].

²⁰Цит. по предисловию к книге [Опойцев, Хуродзе, 1984].

²¹Понятие операторной миноранты было впервые, по-видимому, дано Ф. Риссом [Riesz, 1928; p.144].

²²Красносельский упростил понятие положительного оператора, оставив для него только одно условие: $AK \subset K$.

Для дальнейшего рассмотрения Красносельскому оказалось удобным уточнить понятие вполне положительного оператора, данного Рутманом (см. выше).

Линейный положительный оператор A был назван Красносельским u_0 -ограниченным²³, если существует такой (ненулевой) элемент конуса $u_0 \in K$, что некоторая степень оператора A переводит произвольный элемент конуса u внутрь «конусного отрезка» $[\alpha u_0, \beta u_0]$:

$$\exists (u_0 \in K, u_0 \neq \theta) \forall (u \in K, u \neq \theta) \exists (n \in \mathbb{N}; \alpha, \beta > 0) [\beta u_0 \succ A^n u \succ \alpha u_0]. \quad (13)$$

Свойства u_0 -ограниченного оператора помогли доказать аналог Урысоновской теоремы о спектре²⁴, при условии, что система (12) заменяется на систему

$$P\varphi \succ A\varphi \succ Q\varphi, \quad \varphi \in K, \quad (14)$$

где P, Q : u_0 – ограничены и вполне непрерывны [Красносельский, Ладыженский, 1954, с. 329]. В частности, для оператора Урысона в качестве P подошёл оператор

$$P\varphi(x) = \int_a^b K_y(x, y, 0)\varphi(y)dy, \quad (15)$$

а в качестве Q – оператор

$$Q\varphi(x) = \int_a^b \lim_{u \rightarrow \infty} \left(\frac{K(x, y, u)}{u} \right) \varphi(y)dy. \quad (16)$$

[Красносельский, Ладыженский, 1959, с. 121].

Переключимся на линию 2. При исследовании неотрицательной разрешимости неоднородного интегрального уравнения

$$y(x) = \int_a^b K(x, s, y(s))ds + f(x)$$

Урысон наложил некоторые ограничения на ядро $K(x, s, y)$, основными из которых являются предположения о положительности производной $K_y(x, s, y)$ и её убывании при возрастании y [Урысон, 1923, с. 238]. По сути, требования Урысона заключались в предположении *вогнутости* функции $h(y) = K(x, s, y)$.

Развивая эту идею в рамках теории конусов, Красносельский и Ладыженский получили аналогичные результаты для абстрактных операторных уравнений [Красносельский, Ладыженский, 1959]. При этом вместо обычной вогнутости ими была определена и использована так называемая u_0 -вогнутость.

Положительный оператор A был назван u_0 -вогнутым, если он *монотонен, переводит произвольный элемент конуса u внутрь конусного отрезка $[\alpha u_0, \beta u_0]$ и рост его значений вдоль всех лучей, лежащих в конусе, характеризуется специальным образом:*

$$\forall x \in K (x \succ \gamma u_0, \gamma > 0) \forall [\alpha, \beta] \subset (0, 1) \exists \eta > 0 :$$

$$A(tx) \succ (1 + \eta)tAx, \quad t \in [a, b].$$

При таком определении оператор Урысона A_0 оказался u_0 -вогнутым для $u_0 \equiv 1$ в конусах неотрицательных функций пространств $C[a, b]$ и $L^p[a, b]$.

Поскольку основным методом, используемым Урысоном в упомянутой выше работе [Урысон, 1923], являлся метод последовательных приближений, естественно было осуществить его развитие в рамках теории конусов. Кроме того, этот вопрос имеет важное практическое значение. Соответствующий результат был получен Красносельским вместе с Бахтиным в 1958 г. [Бахтин, Красносельский, 1958]:

Пусть уравнение $Ax = x$ с u_0 -вогнутым оператором A имеет в конусе K ненулевое решение x^ . Тогда последовательность $x_n = Ax_{n-1}$ сходится по u_0 -норме²⁵ к x^* при любом выборе начального приближения $x_0 \in K$.*

Таким образом, обсуждаемый метод оказался сходящимся не только при любом выборе начального приближения, но и без предположения о непрерывности оператора A .

²³Вполне положительные операторы могут служить примером u_0 -ограниченных операторов, где u_0 – любой внутренний элемент конуса [Красносельский, Ладыженский, 1954, с. 326].

²⁴Позитивный спектр A принадлежит отрезку $[\lambda_Q, \lambda_P]$, где λ_P, λ_Q – положительные собственные значения операторов P и Q , которым соответствуют положительные собственные векторы.

²⁵По определению, $\|x\|_{u_0} = \min_{-\alpha u_0 \succ x \succ \alpha u_0} \alpha$. Из сходимости по u_0 -норме вытекает обычная сходимость; обратное неверно [Бахтин, Красносельский, 1958, с. 18-19].

Применение данной теоремы к уравнению Урысона приводит к следующему (неожиданному) результату: в условиях существования положительного решения y уравнения (4) к этому решению равномерно сходятся приближения

$$y_n(t) = \mu \int_a^b K(t, s, y_{n-1}(s)) ds \quad n = 1, 2, \dots$$

для любой неотрицательной функции $y_n(t)$, не равной нулю тождественно [Бахтин, Красносельский, 1961, с. 319].

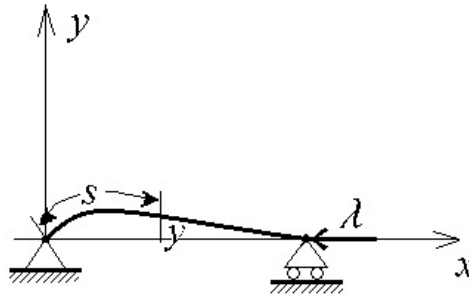


Рис. 3. Продольный изгиб стержня сосредоточенной силой
Fig. 3. Longitudinal bending of the rod by concentrated force

Очередная ветвь развития теории конусов относится к исследованию форм потери устойчивости шарнирно-опёртого стержня переменной жёсткости [Бахтин, Красносельский, 1955]. Оказалось, что нелинейный интегральный оператор, возникающий при описании формы прогиба стержня (см. рис. 3):

$$\varphi(s) = \lambda \rho(s) \int_0^1 K(s, t) \varphi(t) dt \sqrt{1 - \left[\int_0^1 K'_s(s, t) \varphi(t) dt \right]^2}, \quad (17)$$

не обладает свойством u_0 -вогнутости. Это послужило стимулом для отыскания более широкого класса операторов, которые содержали бы класс u_0 -вогнутых операторов и для которых была бы справедливой развитая ранее теория. Такие операторы были найдены²⁶ Красносельским [Красносельский, 1956, с. 288]; они были названы u_0 -монотонными.

Оператор A u_0 -монотонен, если он вогнут и $\varphi_1 \succ \varphi_2 \Rightarrow \exists (\alpha > 0) [A\varphi_1 - A\varphi_2 \succ \alpha u_0]$.

Полученные результаты Красносельскому и Бахтину позволили сделать ряд выводов о том, как меняется форма потери устойчивости стержня при изменении нагрузки на него [Бахтин, Красносельский, 1955, с. 623]:

Теорема. *Оператор A_1 из (17) u_0 -монотонен, $u_0 = \rho(s)(1 - s)$. Критические силы в задаче о продольном изгибе совпадают с собственными значениями линейного оператора*

$$\varphi(s) = \lambda \rho(s) \int_0^1 K(s, t) \varphi(t) dt.$$

Большой общности удалось достигнуть при введении двух конусов в пространства Банаха: K и K_1 ($K \subset K_1$), один из которых – «широкий» – вводился для определения положительности, а второй – «узкий» – для определения монотонности. Это, помимо прочего, позволило Бахтину ввести новый класс вогнутых операторов ($\{K_1, u_0\}$ – вогнутые операторы), которые содержали u_0 -вогнутые и u_0 -монотонные операторы, как частный случай [Бахтин, 1957; с. 13], но для которых оставались справедливыми все утверждения теории Урысона.

Перейдём теперь к линии 4. На одной из стадий доказательства сходимости метода последовательных приближений Урысон использовал неравенство [Урысон, 1923; с. 238–239]

$$\int_a^b K(x, s, \varphi(s)) ds \leq CK'_y(x, \xi, 0), \quad \xi \in (a, b); \quad C = Const. \quad (18)$$

Оно было взято на заметку при развитии М.А. Красносельским теории конусов. Так как в (18) присутствует производная ядра нелинейного оператора A_0 , то ожидаемо использование операторной

²⁶Это произошло, по-видимому, в процессе доказательства обычной монотонности оператора A_1 , стоящего в правой части равенства (17).

производной для обобщения (18) и уточнения оценки оператора A в неравенстве (14). Это уточнение было выполнено с помощью сильной производной Фреше по конусу [Красносельский, Ладыженский, 1954, с. 330]:

$$P\varphi = A'(\theta)\varphi; \quad Q\varphi = A'(\infty)\varphi,$$

где оператор P удовлетворяет условию

$$\lim_{\|\varphi\| \rightarrow 0} \frac{\|A\varphi - P\varphi\|}{\|\varphi\|} = 0,$$

а оператор Q – условию

$$\lim_{\|\varphi\| \rightarrow \infty} \frac{\|A\varphi - Q\varphi\|}{\|\varphi\|} = 0. \tag{19}$$

Условие (19) было названо *условием асимптотической линейности* оператора A .

Например, для оператора Урысона производная Фреше в нуле – это оператор, заданный равенством (15); асимптотическая производная на бесконечности – оператор, заданный равенством (16).

Теперь можно сказать об использовании операторных производных при исследовании спектральных свойств нелинейных операторов. Оказалось, что для u_0 -вогнутых операторов справедлива *теорема о топологической структуре спектра* [Красносельский, Ладыженский, 1954, с. 331; 338]:

Пусть A – u_0 -вогнутый, вполне непрерывный оператор, асимптотически близкий к линейному u_0 -ограниченному оператору Q и имеющий в точке θ сильную производную Фреше P , являющуюся u_0 -ограниченным оператором.

Тогда позитивный спектр оператора A полностью заполняет интервал (λ_P, λ_Q) . Кроме того, положительные собственные векторы оператора A образуют непрерывную ветвь, выходящую из θ и уходящую в бесконечность²⁷, причём каждому собственному значению оператора A из позитивного спектра соответствует единственный положительный собственный вектор $v \neq \theta$.

При рассмотрении вопроса о положительных решениях уравнений с операторами, *зависящими от параметра*, наиболее естественным является применение топологических методов, в том числе принципа топологического продолжения. Здесь Красносельский использовал ранее разработанную им теорию вращения векторных полей в банаховых пространствах [Красносельский, 1956; Гл. II]. Это позволило, в частности, сравнительно просто доказать разрешимость уравнения

$$x = A(x, \mu) \tag{20}$$

и теорему о том, что решения уравнения (20) образуют непрерывную ветвь при условиях существования сильных производных $A'(\theta, \mu)$ и $A'(\infty, \mu)$ [Красносельский, 1956, Гл. V, §2], а также исследовать бифуркационное значение параметра μ в (20).

Кроме того, метод Бахтина-Красносельского позволил получить малые ненулевые решения $x(\lambda)$ уравнения

$$\lambda Ax = x$$

при $\lambda \approx \lambda_0$ ($\lambda > \lambda_0$), как предел последовательных приближений

$$x_n(\lambda) = \mu Ax_{n-1}(\lambda) \quad n = 1, 2, \dots$$

[Бахтин, Красносельский, 1961, с. 329], где μ находится в окрестности λ .

Перейдём к линии 5. Применяемые Красносельским топологические методы (см. выше) восходят к польскому математику Юлиушу Шаудеру [Schauder, 1930] и голландскому учёному Лейтзену Брауэру [Brauer, 1911]. Их идеи были развиты Красносельским в его первой монографии [Красносельский, 1956] и нашли своё продолжение в теории конусов в виде следующей теоремы²⁸ [Красносельский, 1960; с. 527].

Пусть вполне непрерывный оператор A сжимает или растягивает конус K . Тогда A имеет в конусе K по крайней мере одну ненулевую неподвижную точку.

Терминология, использованная в теореме, требует пояснения.

Оператор A ($A\theta = \theta$) *сжимает* конус K (см. рис. 4), если $\exists (R > 0, r > 0)$:

$$x - Ax \notin K, \quad x \in K, \quad \|x\| \geq R; \tag{21}$$

²⁷Множество положительных собственных векторов оператора A образует по определению *непрерывную ветвь, выходящую из θ и уходящую в бесконечность*, если не пусто пересечение этого множества с границей любого ограниченного открытого множества, содержащего θ [Красносельский, 1951, с. 482].

²⁸Специалист по нелинейному анализу, профессор М.К. Квонг (КНР), указывает на то, что данная теорема может быть интерпретирована за рамками метрического восприятия и тем самым *поставлена в один ряд с теоремами о неподвижной точке Брауэра и Шаудера* [Kwong, 2008; p.6].

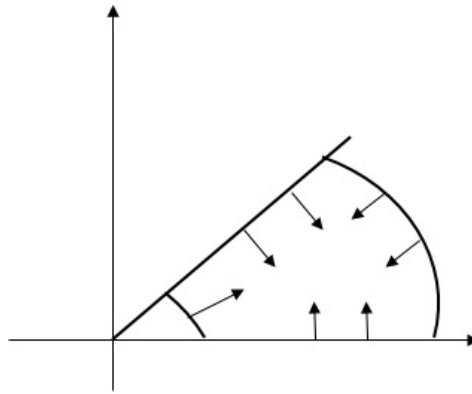


Рис. 4. Сжатие конуса K
Fig. 4. Cone K compression

$$Ax - x \notin K, \quad x \in K, \quad \|x\| \leq r. \quad (22)$$

Оператор A ($A\theta = \theta$) *растягивает* конус K (см. рис. 5), если

$$Ax - x \notin K, \quad x \in K, \quad \|x\| \geq R; \quad (23)$$

$$x - Ax \notin K, \quad x \in K, \quad \|x\| \leq r. \quad (24)$$

Отметим, что непосредственная проверка условий (22) и (23) представляет собой существенные трудности, в то время как свойства (21) и (24) могут быть выведены, к примеру, из монотонности нормы [Красносельский, 1960; с. 527]. Для преодоления этих трудностей Красносельский опять задействовал метод минорант (A_-) и мажорант (A_+). Идея заключалась в том, что

$$\text{если } Ax \succ A_-x, \text{ то } [(A_-x - x) \notin K \Rightarrow (Ax - x) \notin K].$$

Аналогичная импликация справедлива и для мажоранты A_+ . Это позволило переключиться на проверку более простых, по сравнению с (22) и (23), условий для линейного, u_0 -ограниченного оператора B [Красносельский, 1960; с. 528].

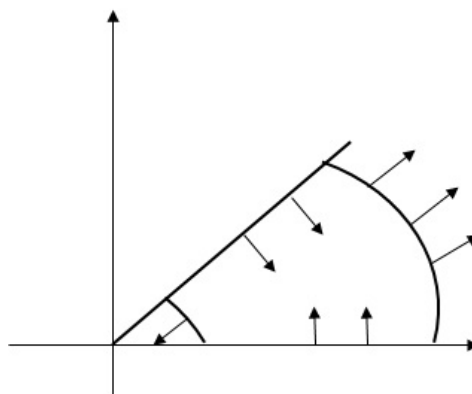


Рис. 5. Растяжение конуса K
Fig. 5. Cone K extension

Новый принцип неподвижной точки оказалось особенно удобным применять для тех нелинейных уравнений вида

$$Ax = x, \quad (25)$$

в которых оператор A дифференцируем в нуле и на бесконечности (см. линию 4).

Приведём одну из двух теорем (вторая формулируется аналогично).

Теорема. Пусть u_0 -ограниченный снизу ²⁹ линейный оператор B удовлетворяет условию $Bu_0 \succ (1 + \varepsilon)u_0$, где $\varepsilon > 0$. Тогда $Bx - x \notin K \quad \forall x \in K, \quad x \neq \theta$.

²⁹Оператор B был назван Красносельским u_0 -ограниченным снизу, когда каждому $x \in K, x \neq \theta$ соответствуют такие числа $p \in \mathbf{N}, \alpha \in \mathbf{R}$, что $B^p x \succ \alpha u_0$ [Красносельский, 1960; с. 528].

Подчеркнём, что конусная теорема о неподвижной точке Красносельского допускает обобщения на тот случай, когда уравнение (14) имеет *несколько неподвижных точек* [Красносельский, 1962; с. 164]. В частности, наличие нескольких решений уравнения Гаммерштейна

$$y(t) = \int_{\Omega} K(t, s)f(s, y(s))ds$$

в конусе неотрицательных функций пространства $C(\Omega)$ будет вытекать (в условиях «обобщённой» теоремы о неподвижной точке) из того, что функция $f(s, y)$ содержит участки быстрого и медленного роста по y [Красносельский, Стеценко, 1963; с. 123].

Линия 6 будет представлена в краткой форме.

Перечислим наиболее интересные, с нашей точки зрения, приложения³⁰ теории положительных операторов, которые не были упомянуты выше и которые вошли в монографию Красносельского [Красносельский, 1962; Гл. 7]:

1. Доказаны теоремы существования и единственности положительных решений задачи Дирихле для эллиптических уравнений второго порядка в конусе неотрицательных функций и исследованы некоторые свойства этих решений для уравнений, зависящих от параметра.
2. Выявлены условия существования положительных решений у системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Путь решения задачи заключался в нахождении конусов в фазовом пространстве, которые были бы инвариантны по отношению к сдвигам по траекториям системы³¹. Вывод о наличии периодических решений делался на основе существования неподвижной точки при сдвиге, соответствующем изменению времени на величину периода правых частей системы.
3. Найдены условия положительной разрешимости двухточечной краевой задачи вида

$$\begin{aligned} \ddot{x} + f(t, x, \dot{x}) &= 0, \\ x(0) = x(1) &= 0 \end{aligned}$$

в конусе неотрицательных функций, в зависимости от свойств функции $f(t, u, v)$.

4. Получены условия существования нетривиальных периодических решений автономных систем дифференциальных уравнений второго порядка с трением и без него.
5. Изучен вопрос о положительной разрешимости задачи Дирихле для уравнения Монжа – Ампера:

$$\frac{rt - s^2}{(1 + p^2 + q^2)^\alpha} = f(x, y, z, p, q); \quad (x, y, z) \in \Omega \subset \mathbf{R}^3, \quad (26)$$

где $p = z_x, q = z_y, r = z_{xx}, s = z_{xy}, t = z_{yy}; 0 \leq \alpha \leq 1$.

Основная идея – это обращение оператора, стоящего в левой части (26) и выявление его «полезных» свойств в конусе ограниченных неотрицательных функций.

8. Заключение. В последующие годы (середина 1960 – конец 1970-х) исследования нелинейных уравнений методами теории конусов значительно расширились. Отметим здесь отдельно наиболее весомые работы отечественных математиков:

- определение и использование понятия вращения положительного векторного поля – М. А. Красносельский, П. П. Забрейко и др. [Красносельский, Забрейко, 1975, Гл. 4, §3] (1965-1975 гг.);
- развитие метода последовательных приближений для уравнений с монотонными и нестягивающими операторами – М. А. Красносельский, В. Я. Стеценко [Красносельский, Стеценко, 1969] (1965-1970 гг.);
- построение теории псевдодогонутых и гетеротонных операторов – В. И. Опойцев [Опойцев, 1975; Опойцев, 1978] (вторая половина 1970-х гг.);
- появление новых разновидностей конусов и операторов в них – И. А. Бахтин [Бахтин, 1975; Бахтин, Бахтина, 1976] (середина 1970-х гг.);
- приложение теории конусов к нелинейным задачам устойчивости – В. И. Опойцев [Опойцев, 1977] (вторая половина 1970-х гг.)

³⁰Их список далеко не полон (см., например [Красносельский, Рудицкий, 1958, Гл. 4, §20]).

³¹Эта тема получила своё дальнейшее развитие в монографии [Красносельский, 1966].

и наиболее известные достижения зарубежных учёных:

- перенос теории конусов в локально-выпуклые пространства – Х. Шефер [Schaefer, 1958]-[Schaefer, 1960];
- доказательство существования трёх решений уравнения $Ax = x$ в конусе Г. Аман [Amann, 1972];
- обобщение «конусной теоремы о неподвижной точке» Красносельского – Т. Бенджамин [Benjamin, 1971] и Р. Нуссбаум [Nussbaum, 1973] (ослабление условий на преобразование границы), а также Р. Леггет и Л. Уильямс [Leggett, Williams, 1979] (использование областей более общего вида).

Подчеркнём, что исследования перечисленных выше западных математиков (кроме немецкого учёного Хельмута Шефера) были выполнены гораздо позже перевода монографии М. А. Красносельского на английский язык [Krasnosel'skii, 1964] и их авторы находились, безусловно, под её влиянием.

Таким образом, можно утверждать, что до конца 1970-х гг. *советские математики оставались на лидирующих позициях в теории конусов и положительных операторов.*

Подведём итог, перейдя к ответам на оставшиеся вопросы, сформулированные во введении:

1. *Ключевой момент* для начала развития теории положительных операторов – исследования Штурма малых колебаний механических систем (начало 1830-х гг.) и появление теоремы Перрона – Фробениуса о положительных собственных значениях матриц с положительными элементами (конец 1900-х гг.).
2. *Основная причина для возникновения теории конусов* в банаховых пространствах – исследование М. Г. Крейна по теории моментов (середина 1930-х гг.).
3. *Отправная точка для начала исследований нелинейных положительных операторов* – доказательство теоремы Перрона – Фробениуса топологическими методами, восходящими к Л. Брауэру (П. С. Александров, Х. Хопф – 1935 г.).
4. *Обособление теории линейных положительных операторов* произошло после опубликования М. Г. Крейном и М. А. Рутманом системообразующей статьи в журнале УМН (1948 г.).
5. *Переломный пункт в развитии теории положительных операторов* – её превращение в инструмент качественного исследования операторных уравнений (М. А. Красносельский, 1950-е гг.).
6. Оказалось, что *теория линейных положительных операторов является фундаментом для развития нелинейной теории*, поскольку
 - а) в нелинейном анализе используются операторы, представляющие собой композицию линейных и нелинейных операторов;
 - б) линейные операторы удобно использовать в качестве минорант и мажорант;
 - в) линейные операторы неизбежно возникают при определении операторных производных.
7. За 25 лет своего развития (1945-1970 гг.) *теория конусов обогатила функциональный анализ за счёт появления новых*
 - функциональных пространств;
 - типов операторов и функционалов;
 - теорем о неподвижной точке;
 - методов исследования спектральных свойств операторов;
 - применений производных операторов;
 - модификаций и применений метода последовательных приближений.

В заключение хотелось бы отметить, что интерес к исследованиям в обсуждаемой области до сих пор не ослабел как в России (см., например, [Кубекова, 2001], [Дорохов, 2009]), так и за рубежом ([Wang, 2003], [Webb, 2010]). По-видимому, эта тенденция будет сохраняться и дальше.

Благодарность. Автор выражает признательность профессору Р. Р. Мухину (СТИ НИТУ МИСИС, г. Старый Оскол) за полезные советы; участникам XXV Годишной научной конференции ИИЕТ РАН им. С. И. Вавилова, XVI международной конференции «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории» и Воронежской

зимней математической школе С. Г. Крейна – 2020 за внимание к работе и её обсуждение, а также В. П. Богатовой за перевод первоисточников с немецкого языка и помощь в доступе к оригинальным работам.

Список литературы

1. Ахиезер Н., Крейн М. 1938. О некоторых вопросах теории моментов. Харьков, гос. науч.-техн. изд-во Украины, 256.
2. Бахтин И. А. 1957. Об одном классе уравнений с положительными операторами. М.: ДАН СССР, 117(1): 13–16.
3. Бахтин И. А. 1975. Конусы в пространствах Банаха. Ч. 1. Воронеж: Воронеж. гос. пед. ин-т, 183.
4. Бахтин И. А., Бахтина А. А. 1976. Конусы в пространствах Банаха. Ч. 2. Воронеж: Воронеж. гос. пед. ин-т, 135.
5. Бахтин И. А., Красносельский М. А. 1955. К задаче о продольном изгибе стержня переменной жёсткости. М.: ДАН СССР, 105 (4): 621–624.
6. Бахтин И. А., Красносельский М. А. 1958. К теории уравнений с вогнутыми операторами. М.: ДАН СССР, 123 (1): 17–20.
7. Бахтин И. А., Красносельский М. А. 1961. Метод последовательных приближений в теории уравнений с вогнутыми операторами. Новосибирск, Сибирский мат. ж., 2.3 : 313–330.
8. Богатов, Е. М., Мухин Р. Р. 2016. Из истории нелинейных интегральных уравнений. Саратов, Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 24 (2): 77–114.
9. Богатов Е. М. 2017. Об истории развития нелинейных интегральных уравнений в СССР. Сильные нелинейности. Белгород, Науч. вед. БелГУ. Сер. Матем., Физ., 6 (46): 93–106.
10. Богатов Е. М. 2018. Об истории метода неподвижной точки и вкладе советских математиков (1920-е – 1950-е гг.). Тула, Чебышевский сборник, 19(2): 30–55.
11. Богатов Е. М. 2019. О развитии качественных методов решения нелинейных уравнений и некоторых последствиях. Саратов, Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика, 27(1): 96–114.
12. Богатов Е. М. 2019 а. О развитии теории конусов в работах отечественных математиков. XXV Годишная научная конференция ИИЕТ РАН им. С. И. Вавилова. Саратов: Амирит, 224–227.
13. Богатов Е. М. 2019 б. Об истории теории конусов и полупорядоченных пространств (в контексте развития нелинейного функционального анализа). Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории. Материалы XVI международ. конф., посвящ. 80-летию со дня рождения проф. Мишеля Деза (13–18 мая 2019). Тула, ТГПУ им. Л.Н. Толстого, 322–325.
14. Богатов Е. М. 2020. О развитии теории положительных операторов и вкладе М. А. Красносельского. Воронежская зимняя математическая школа С. Г. Крейна – 2020: материалы международ. конф. Ред. В.А. Костин. Воронеж: Изд.-полиграф. центр «Научная книга», 84–89.
15. Боголюбов Н. Н., Крейн С. Г. 1947. Про позитивні цілком неперервні оператори. Киев, Збірник праць Інституту математики Академії наук УРСР, 9: 130–139.
16. Боголюбов Н. Н., Ишлинский А. Ю., Канторович Л. В. и др. 1981. Марк Александрович Красносельский (к шестидесятилетию со дня рождения). М.: УМН, 36(2) : 215–220.
17. Гантмахер Ф. Р., Крейн М. Г. 1935. Об одном специальном классе детерминантов в связи с интегральными ядрами Kellog'a. М.: Матем. сб., 42(4) : 501–508.
18. Гантмахер Ф. Р., Крейн М. Г. 1950. Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем. М-Л.: ГИТТЛ, 360.
19. Гросберг Ю. И., Крейн М. Г. 1939. О разложении линейного функционала на положительные составляющие. М.: ДАН СССР, 15(3) : 721–724.

20. Дорохов А. Н. 2009. Положительные решения нелинейных уравнений в F -пространствах : Дис. ... кандидата физ.-мат. наук : 01.01.01. Воронеж, ВГУ, 94.
21. Красносельский М. А. 1951. Операторы с монотонной минорантой. М., ДАН СССР, 76 (4) : 481–484.
22. Красносельский М. А. 1954. Некоторые задачи нелинейного анализа. М.: УМН, 9:3(61): 57–114.
23. Красносельский М. А. 1956. Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. М.: ГИТЛ, 392.
24. Красносельский М. А. 1960. Неподвижные точки операторов, сжимающих или растягивающих конус. М.: Докл. АН СССР, 135(3): 527–530.
25. Красносельский М. А. 1962. Положительные решения операторных уравнений. М.: ФИЗМАТ-ГИЗ, 394.
26. Красносельский М. А. 1966. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. М.: Наука, 331.
27. Красносельский М. А., Забрыйко П. П. 1975. Геометрические методы нелинейного анализа. М.: Наука, 511.
28. Красносельский М. А., Ладыженский Л. А. 1954. Структура спектра положительных неоднородных операторов. М.: ГИТТЛ, Тр. ММО, 3: 321–346.
29. Красносельский М. А., Ладыженский Л. А. 1959. Об объёме понятия u_0 -вогнутого оператора. Казань, Изв. вузов. Матем., 5: 112–121.
30. Красносельский М. А., Рудицкий Я. Б. 1958. Выпуклые функции и пространства Орлича. М.: ГИФМЛ, 271.
31. Красносельский М. А., Стеценко В. Я. 1963. О некоторых нелинейных задачах, имеющих много решений. Новосибирск, Сиб. мат. ж., 4.1: 120–137.
32. Красносельский М. А., Стеценко В. Я. 1969. К теории уравнений с вогнутыми операторами. Новосибирск, Сиб. мат. ж., 10(3): 565–572.
33. Крейн М. 1934 а. Об одном обобщении исследований акад. Маркова о предельных величинах интегралов. М.: Тр. II Всесоюзного матем. съезда, 2: 152–154.
34. Крейн М. 1934 б. Об узлах гармонических колебаний механических систем некоторого специального типа. М.: Мат. сб. 41(2): 339–348.
35. Крейн М. Г. 1937. Про позитивні адитивні функціонали в лінійних нормованих просторах. Харків, Сообщ. Харьков. Математ. об-ва, XIV: 227–237.
36. Крейн М. Г. 1938. Общие теоремы о позитивных функционалах. В сб. Ахиезер Н., Крейн М. О некоторых вопросах теории моментов. Статья II, Харьков, гос. науч.-техн. изд-во Украины, 121–150.
37. Крейн М. Г. 1938. О позитивных функционалах в линейных нормированных пространствах. В сб. Ахиезер Н., Крейн М. О некоторых вопросах теории моментов. Статья III, Харьков, гос. науч.-техн. изд-во Украины, 151–170.
38. Крейн М. Г. 1938. L -проблема в абстрактном линейном нормированном пространстве. В сб. Ахиезер Н., Крейн М. О некоторых вопросах теории моментов. Статья IV, Харьков, гос. науч.-техн. изд-во Украины, 171–199.
39. Крейн М. Г. 1939. О линейных операторах, оставляющих инвариантным некоторое коническое множество. М.: ДАН СССР, 23(8): 749–752.
40. Крейн М. Г., Рутман М. А. 1948. Линейные операторы, оставляющие инвариантным конус в пространстве Банаха. М.: УМН, 3: 1(23) : 3–95.
41. Крейн М. Г., Нудельман А. А. 1973. Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. М.: Наука, 522.

42. Кубекова Б.С. 2001. Приближенные решения операторных уравнений с монотонными операторами в пространствах с двумя полуупорядоченностями. Дис. ... кандидата физ.-мат. наук : 01.01.01. Ростов-на-Дону, Рост. гос. ун-т., 118.
43. Нейман Л. С. 1972. Радость открытия (математик Павел Урысон). Научная редакция проф. В. А. Ефремовича. М.: Детская литература, 176.
44. Опойцев В. И. 1975. Гетерогенные и комбинированно-вогнутые операторы. Новосибирск, Сиб. мат. ж., 16(4): 781–792.
45. Опойцев В. И. 1977. Равновесие и устойчивость в моделях коллективного поведения. М.: Наука, 248.
46. Опойцев В. И. 1978. Обобщение теории монотонных и вогнутых операторов . М.: МГУ, Тр. ММО, 36: 237–273.
47. Опойцев В. И., Хуродзе Т. А. 1984. Нелинейные операторы в пространствах с конусом. Тбилиси, Изд-во Тбилисского унив., 270.
48. Рутман М. 1938. Об одном специальном классе вполне непрерывных операторов. М.: ДАН СССР, 18 (9): 625–627.
49. Урысон П. С. 1923. Об одном типе нелинейных интегральных уравнений. М., Матем. сб., 31: 236–255.
50. Урысон П. С. 1951. Труды по топологии и другим областям математики. т. 1, М.-Л., ГИТТЛ, 512.
51. Alexandroff P., Hopf H. 1935. Topologie. Berlin, Springer-Verlag, 649.
52. Aliprantis C. D., Burkinshaw O. 2006. Positive operators. Dordrecht, Springer Science & Business Media, V. 119, 376.
53. Amann H. 1972. On the number of solutions of nonlinear equations in ordered Banach spaces. Journal of functional analysis. 11(3): 346–384.
54. Amann H. 1976. Fixed point equations and nonlinear eigenvalue problems in ordered Banach spaces. Philadelphia, SIAM Review, 18(4) : 620–709.
55. Banach S. 1932. Théorie des operations linéaires. Warszawa, Monografie Matematyczne, I, 231.
56. Bateman H. 1910. Report on the history and present state of the theory of integral equations. London, British Ass. Adv. Sci., 345–424.
57. Benjamin T. B. 1971. A unified theory of conjugate flows. London, Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Math. and Phys. Sci., 269(1201): 587–643.
58. Bernkopf M. 1966. The development of function spaces with particular reference to their origins in integral equation theory. Springer, Arch. Hist. Ex. Sci., 3: 1–96.
59. Birkhoff G., Kreyszig E. 1984. The establishment of functional analysis. Amsterdam, Historia math., 11: 258–321.
60. Bogatov E. M. 2020. On the history of variational methods of non-linear equations investigations and the contribution of Soviet scientists (1920s – 1950s). Warszawa, Antiq. Math., 14 (1): to appear.
61. Bourbaki Nicolas. 1974. Éléments d’histoire des mathématiques. Paris, Hermann. 3e édition corrigé et augmenté. Paris, Hermann, 376.
62. Brouwer L. E. J. 1911. Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten. Leipzig, Math. Ann., 71: 97–115.
63. Gantmacher F. R., Krein M. G. 1935. Sur les matrices oscillatoires. Paris, CR Acad. Sci. Paris, 201 : 577–579.
64. Gantmakher F., Krein M. 1937. Sur les matrices completement non négatives et oscillatoires. Groningen, Compositio mathematica, 4: 445–476.
65. Dieudonné J. 1981. History of functional analysis. Amsterdam, North-Holland publishing company, 316.

66. Hilbert D. 1904. Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen. Vierte Mitteilung. Göttingen, Gött. Nachr.: 49–91.
67. Jentzsch R. 1912. Über Integralgleichungen mit positivem Kern. Berlin, J. Reine Angew. Math., 141: 235–244.
68. Frobenius G. 1908. Über Matrizen aus positiven Elementen, 1. Berlin, Sitzungsber. Königl. Preuss. Akad. Wiss.: 471–476.
69. Frobenius G. 1909. Über Matrizen aus positiven Elementen, 2. Berlin, Sitzungsber. Königl. Preuss. Akad. Wiss.: 514–518.
70. Fredholm I. 1903. Sur une classe d'équations fonctionnelles. Djursholm, Acta Math., 27: 365–390.
71. Fredholm I. 1906. Solution d'un problème fondamental de la théorie de l'élasticité. Stockholm, Ark. Math. Astronom. Fys., 2 (28) : 3–8.
72. Kjeldsen T. H. 1993. The early history of the moment problem. Amsterdam, Hist. Math., 20 (1) : 19–44.
73. Krasnosel'skii M. A. 1964. Positive solutions of operator equations. Groningen, Noordhoff, 381.
74. Krein M. 1933. Über eine neue Klasse von Hermiteschen Formen und über eine Verallgemeinerung des trigonometrischen Momentenproblems. Moscow, Bulletin de l'Académie des Sciences de l'URSS. Classe des sciences mathématiques et na, 9 : 1259–1275.
75. Kwong M. K. 2008. The topological nature of Krasnoselskii's cone fixed point theorem. London, Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications. 69 (3): 1–18.
76. Leggett R. W., Williams L. R. 1979. Multiple positive fixed points of nonlinear operators on ordered Banach spaces. Bloomington, Indiana University Math. J. 28 (4) : 673–688.
77. Lützen J. 1984. Sturm and Liouville's work on ordinary linear differential equations. The emergence of Sturm-Liouville theory. Springer-Verlag GmbH, Arch. Hist. Exact Sci., 29 (4): 309–376.
78. Mazur S. 1933. Über konvexe Mengen in linearen normierten Räumen. Lwów, Studia Math., 4: 70–84.
79. Nussbaum R. D. 1973. Periodic solutions of some nonlinear, autonomous functional differential equations. II. Amsterdam, Journal of Differential Equations, 14(2): 360–394.
80. Padovani F. 2009. Collected Works of Charles François Sturm. Basel, Birkhäuser, 808.
81. Perron O. 1907. Grundlagen für eine Theorie des Jacobischen Kettenbruchalgorithmus. Leipzig, Math. Annalen, 64(2) : 1–76.
82. Perron O. 1907. Zur Theorie der Matrices. Leipzig, Math. Annalen, 64 (2): 248–263.
83. Perron O. 1913. Erweiterung eines Markoffschen Satzes über die Konvergenz gewisser Kettenbrüche. Leipzig, Math. Annalen, 74 : 545–554.
84. Riesz M. 1923. Sur le probleme des moments. Troisieme Note. Stokholm, Ark. Mat. Fys., 16 : 1–52.
85. Riesz F. 1928. Sur la décomposition des opérations fonctionnelles linéaires. Bolonia, Atti del Congresso Internazionale dei Matematici, 1928. V. 3 : 143–148.
86. Rothe E. 1944. On non-negative functional transformations. Baltimore, Johns Hopkins University Press, American J. Math., 66(2): 245–254.
87. Rutman M. A. 1940. Sur les opérateurs totalement continus linéaires laissant invariant un certain cone. Moscow, Mat. Sb. (N.S.), 8(50):77–96.
88. Schaefer H. H. 1958. Halbgeordnete lokalkonvexe Vektorräume I. Leipzig, Math. Ann., 135:115–141.
89. Schaefer H. H. 1959. Halbgeordnete lokalkonvexe Vektorräume II. Leipzig, Math. Ann., 138: 254–286.
90. Schaefer H. H. 1960. Halbgeordnete lokalkonvexe Vektorräume III. Leipzig, Math. Ann., 141:113–142.

91. Schauder J. 1930. Der Fixpunktsatz in Funktionalräumen. Kraków, *Studia Math.* 2: 171–180.
92. Schmidt E. 1907. Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen. I Teil. Entwicklung willkürlichen Funktionen nach System vorgeschriebener. Leipzig, *Math. Ann.*, 63: 433–476.
93. Schmidt E. 1907. Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen. II. Teil. Auflösung der allgemeinen linearen Integralgleichung. Leipzig, *Math. Ann.*, 64:161–174.
94. Schmidt E. 1908. Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen. III Teil. Über die Auflösung der nichtlinearen Integralgleichung und die Verzweigung ihrer Lösungen. Leipzig, *Math. Ann.*, 65:370–399.
95. Stewart G. W. 2014. FREDHOLM, HILBERT, SCHMIDT Three Fundamental Papers on Integral Equations. URL: <http://www.cs.umd.edu/~stewart/FHS.pdf> (дата обращения 03.03.2019).
96. Sturm C. 1833. Analyse d'un mé moire sur les propriétés gé né rales des fonctions, qui dépendent d'é quations différentielles linéaires du second ordre. Paris, L'Institut. *Journ. Acad. et Soc.* 11: 219–223.
97. Tychonoff A. 1935. Ein Fixpunktsatz. Leipzig, *Math. Ann.*, 111: 767–776.
98. Wang H. 2003. On the number of positive solutions of nonlinear systems. Amsterdam, *J. Math. Analysis Appl.*, 281(1): 287–306.
99. Webb J. R. L. 2010. Solutions of nonlinear equations in cones and positive linear operators. London, *J. of London Math. Soc.*, 82(2) : 420–436.

References

1. Akhiezer N., Krein M. 1938. On some issues of the theory of moments. Kharkov, gos. nauch.-tech. izd-vo of Ukraine, 256 (In Russian).
2. Bahtin I. A. 1957. On a class of equations with positive operators. Moscow, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 117(1): 13–16 (In Russian).
3. Bahtin I. A. 1975. Cones in Banach spaces. I. Textbook. Voronezh, Voronezh gos. ped. inst., 183 (In Russian).
4. Bahtin I. A., Bahtina A. A. 1976. Cones in Banach spaces. II. Textbook. Voronezh, Voronezh gos. ped. inst., 135 (In Russian).
5. Bahtin I. A., Krasnosel'skii M. A. 1955. On the problem of longitudinal bending of a rod of variable stiffness. Moscow, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 105 (4): 621–624 (In Russian).
6. Bahtin I. A., Krasnosel'skii M. A. 1958. On the theory of equations with concave operators. Moscow, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 123 (1): 17–20 (In Russian).
7. Bakhtin I. A., Krasnosel'skii M. A. 1961. The method of successive approximations in the theory of equations with concave operators. Novosibirsk, *Sibirsk. Mat. Zh.*, 2: 313–330.
8. Bogatov E. M., Mukhin R. R. 2016. About the history of nonlinear integral equations. Saratov, *Izvestiya VUZ. Applied nonlinear dynamics*, 24 (2): 77–114 (In Russian).
9. Bogatov E. M. 2017. On the history of the development of nonlinear integral equations in the USSR. High nonlinearities. Belgorod, *Scientific bulletin of BelSU. Ser. Mat., Phys.*, 6 (46): 93–106 (In Russian).
10. Bogatov E. M. 2018. On the history of the fixed point method and the contribution of the Soviet mathematicians (1920s – 1950s). Tula, *Čebyševskij sbornik*, 19(2): 30–55 (In Russian).
11. Bogatov E. M. 2019. On the development of qualitative methods for solving nonlinear equations and some consequences. Saratov, *Izvestiya VUZ. Applied nonlinear dynamics*, 27(1): 96–114 (In Russian).
12. Bogatov E. M. 2019 a. On the development of cone theory in the works of domestic mathematicians. Annual scientific conference of IHST RAS, Saratov: Amirit, 224–227 (In Russian).

13. Bogatov E. M. 2019 b. On the history of the theory of cones and semi-ordered spaces (in the context of the development of nonlinear functional analysis). Algebra, number theory and discrete geometry: modern problems, applications and problems of history. Materials XVI Int. conf., Tula, TGPU im. L. N. Tolstogo, 322–325 (In Russian).
14. Bogatov E. M. 2020. On the development of the theory of positive operators and the contribution of M. A. Krasnoselskii. Voronezh Winter Mathematical School S. G. Krein 2020: Materials Int. conf. Voronezh, Nauchnaya kniga, 84–89 (In Russian).
15. Bogoliubov N. N. 2005. Collection of Scientific Papers: in 12 vol. Vol. I. Mathematics, 1925–1990. V. S. Vladimirov, A. D. Sukhanov eds. Moscow, Nauka, 775.
16. Bogolyubov N. N. , Ishlinskii A. Yu. , Kantorovich L. V. and others. 1981. Mark Aleksandrovich Krasnosel'skii (on his sixtieth birthday). Moscow, Russian Math. Surveys, 36(2): 205–212.
17. Gantmakher F., Krein M. 1935. Sur une classe spéciale de déterminants ayant le rapport aux noyaux de Kellog. Moscow, Mat. Sb., 42(4): 501–508.
18. Gantmakher F. R., Krein M. G. 1961. Oscillation matrices and kernels and small vibrations of mechanical systems. 2d ed. corr. and expanded. Oak Ridge, 408.
19. Grosberg Yu. I., Krein M. G. 1939. On the decomposition of a linear functional into positive components. Moscow, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 15(3): 721–724.
20. Dorokhov A. N. 2009. Positive solutions of nonlinear equations in F -spaces: PhD Thesis. Voronezh, VSU, 94.
21. Krasnosel'skii M. A. 1951. Operators with monotonic minorant. Moscow, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 76 (4) : 481–484.
22. Krasnosel'skii M. A. 1954. Some problems of nonlinear analysis. Moscow, Uspekhi Mat. Nauk, 9:3(61): 57–114 (In Russian).
23. Krasnosel'skii M. A. 1964. Topological Methods in the Theory of Nonlinear Integral Equations. Oxford, Pergamon, 395.
24. Krasnosel'skii M. A. 1960. Fixed points of cone-compressing or cone-extending operators. Moscow, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 135(3): 527–530 (In Russian).
25. Krasnosel'skii M. A. 1962. Polozhitel'nye resheniya operatornykh uravnenii. Moscow, FIZMATGIZ, 394 (In Russian).
26. Krasnosel'skii M. A. 1968. The Operator of Translation Along the Trajectories of Differential Equations (Translations of Mathematical Monographs, Vol 19). Providence, AMS, 294.
27. Krasnosel'skii M. A., Zabreiko P. P. 1984. Geometrical methods of nonlinear analysis (Vol. 263). Berlin ; New York, Springer-Verlag, 409.
28. Krasnosel'skii M. A., Ladyzhenskii L. A. 1954. The structure of the spectrum of positive nonhomogeneous operators. Moscow, GITTL, Tr. Mosk. Mat. Obs., 3: 321–346.
29. Krasnosel'skii M. A., Ladyzhenskii L. A. 1959. The scope of the concept of a u_0 -concave operator. Kazan, Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat., 5 : 112–121.
30. Krasnosel'skii M. A., Rutitski, Ya. B. 1961. Convex functions and Orlicz spaces. Translated from the first Russian edition. Groningen, Noordhoff, 249.
31. Krasnosel'skii M. A., Steysenko V.Ya. 1963. On some nonlinear problems that have many solutions. Novosibirsk, Sibirsk. Mat. Zh., 4.1: 120–137 (In Russian).
32. Krasnosel'skii M. A., Steysenko V.Ya. 1969. On the theory of equations with concave operators. Novosibirsk, Sibirsk. Mat. Zh., 10(3): 565–572 (In Russian).
33. Krein M. 1934. About one generalization of Acad. Markov research on limit values of integrals. Moscow, Proceedings of the 2nd All-Union Mathem. Congress, 2: 152-154 (In Russian).
34. Krein Mark. 1934. Über die Knoten der harmonischen Schwingungen einiger spezieller mechanischer Systeme. Moscow, Mat. Sb., 41(2): 339–348.

35. Krein M. G. 1937. On the positive additive functionals in linear normed spaces. Kharkiv, Communications Kharkov Math. Soc., 14: 227–237. (In Ukrainian).
36. Krein M. G. 1938. General theorems on positive functionals. In the Coll. Sci. Works Akhiezer N., Krein M. On some issues of the theory of moments. Paper II, Kharkov, gos. nauch.-tech. izd-vo of Ukraine, 121–150 (In Russian).
37. Krein M. G. 1938. On the positive functionals in normed linear spaces. In the Coll. Sci. Works Akhiezer N., Krein M. On some issues of the theory of moments. Paper III, Kharkov, gos. nauch.-tech. izd-vo of Ukraine, 151–170 (In Russian).
38. Krein M. G. 1938. L-problem in an abstract linear normed space. In the Coll. Sci. works Akhiezer N., Krein M. On some issues of the theory of moments. Paper III, Kharkov, gos. nauch.-tech. izd-vo of Ukraine, 171–199 (In Russian).
39. Krein M.G. 1939. On linear operators that leave some conic set invariant. Moscow, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 23(8): 749–752 (In Russian).
40. Krein M. G., Rutman M. A. 1948. Linear operators leaving invariant a cone in a Banach space. Moscow, Uspekhi Mat. Nauk, 3:1(23): 3–95.
41. Krein M. G., Nudelman A. A. 1977. The Markov moment problem and extremal problems. (Translations of Mathematical Monographs). Providence, AMS, 417.
42. Kubekova B. S. 2001. Approximate solutions of operator equations with monotone operators in spaces with two semi-orders. : PhD Thesis, Rostov-on-Don, Rostov State Univ., 118.
43. Neiman L. S. 1972. The joy of discovery (mathematician Pavel Urysohn). Prof. V.A. Efremovich scientific editorship. Moscow, Detskaya literatura, 176 (In Russian).
44. Opoitsev V. I. 1975. Heterogeneous and combined concave operators. Novosibirsk, Sibirsk. Mat. Zh., 16(4): 781–792 (In Russian).
45. Opoitsev V. I. 1977. Equilibrium and stability in models of collective behavior. Moscow, Nauka, 248 (In Russian).
46. Opoitsev V. I. 1978. Generalization of the theory of monotone and concave operators, Moscow, MSU, Tr. Mosk. Mat. Obs., 36: 237–273.
47. Opoitsev V. I., Hurudze T. A. 1984. Nonlinear operators in spaces with a cone. Tbilisi, Izd-vo Tbilisskogo univ., 270 (In Russian).
48. Rutman M. 1938. On a special class of completely continuous operators. Moscow, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 18 (9): 625–627 (In Russian).
49. Urysohn P. 1923. Sur une classe d'équations intégrales non lineaires, Moscow, Mat. Sb., 31(2): 236–255.
50. Urysohn P. S. 1951. Works on topology and other areas of mathematics. Vol. 1. Moscow-Leningrad, GITTL, 512 (In Russian).
51. Alexandroff P., Hopf H. 1935. Topologie. Berlin, Springer-Verlag, 649.
52. Aliprantis C. D., Burkinshaw O. 2006. Positive operators. Dordrecht, Springer Science & Business Media, V. 119, 376.
53. Amann H. 1972. On the number of solutions of nonlinear equations in ordered Banach spaces. Journal of functional analysis. 11(3): 346–384.
54. Amann H. 1976. Fixed point equations and nonlinear eigenvalue problems in ordered Banach spaces. Philadelphia, SIAM Review, 18(4) : 620–709.
55. Banach S. 1932. Théorie des opérations linéaires. Warszawa, Monografje Matematyczne, I, 231.
56. Bateman H. 1910. Report on the history and present state of the theory of integral equations. London, British Ass. Adv. Sci., 345–424.
57. Benjamin T. B. 1971. A unified theory of conjugate flows. London, Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Math. and Phys. Sci., 269(1201): 587–643.

58. Bernkopf M. 1966. The development of function spaces with particular reference to their origins in integral equation theory. Springer, Arch. Hist. Ex. Sci., 3: 1–96.
59. Birkhoff G., Kreyszig E. 1984. The establishment of functional analysis. Amsterdam, Historia math., 11: 258–321.
60. Bogatov E. M. 2020. On the history of variational methods of non-linear equations investigations and the contribution of Soviet scientists (1920s – 1950s). Warszawa, Antiq. Math., 14 (1): to appear.
61. Bourbaki Nicolas. 1974. Éléments d’histoire des mathématiques. Paris, Hermann. 3e édition corrigé et augmenté. Paris, Hermann, 376.
62. Brouwer L. E. J. 1911. Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten. Leipzig, Math. Annal., 71: 97–115.
63. Gantmacher F. R., Krein M. G. 1935. Sur les matrices oscillatoires. Paris, CR Acad. Sci. Paris, 201 : 577–579.
64. Gantmakher F., Krein M. 1937. Sur les matrices complètement non négatives et oscillatoires. Groningen, Compositio mathematica, 4: 445–476.
65. Dieudonné J. 1981. History of functional analysis. Amsterdam, North-Holland publishing company, 316.
66. Hilbert D. 1904. Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen. Vierte Mitteilung. Göttingen, Gött. Nachr.: 49–91.
67. Jentzsch R. 1912. Über Integralgleichungen mit positivem Kern. Berlin, J. Reine Angew. Math., 141: 235–244.
68. Frobenius G. 1908. Über Matrizen aus positiven Elementen, 1. Berlin, Sitzungsber. Königl. Preuss. Akad. Wiss.: 471–476.
69. Frobenius G. 1909. Über Matrizen aus positiven Elementen, 2. Berlin, Sitzungsber. Königl. Preuss. Akad. Wiss.: 514–518.
70. Fredholm I. 1903. Sur une classe d’équations fonctionnelles. Djursholm, Acta Math., 27: 365–390.
71. Fredholm I. 1906. Solution d’un problème fondamental de la théorie de l’élasticité. Stockholm, Ark. Math. Astronom. Fys., 2 (28) : 3–8.
72. Kjeldsen T. H. 1993. The early history of the moment problem. Amsterdam, Hist. Math., 20 (1) : 19–44.
73. Krasnosel’skii M. A. 1964. Positive solutions of operator equations. Groningen, Noordhoff, 381.
74. Krein M. 1933. Über eine neue Klasse von Hermiteschen Formen und über eine Verallgemeinerung des trigonometrischen Momentenproblems. Moscow, Bulletin de l’Académie des Sciences de l’URSS. Classe des sciences mathématiques et na, 9 : 1259–1275.
75. Kwong M. K. 2008. The topological nature of Krasnoselskii’s cone fixed point theorem. London, Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications. 69 (3): 1–18.
76. Leggett R. W., Williams L. R. 1979. Multiple positive fixed points of nonlinear operators on ordered Banach spaces. Bloomington, Indiana University Math. J. 28 (4) : 673–688.
77. Lützen J. 1984. Sturm and Liouville’s work on ordinary linear differential equations. The emergence of Sturm-Liouville theory. Springer-Verlag GmbH, Arch. Hist. Exact Sci., 29 (4): 309–376.
78. Mazur S. 1933. Über konvexe Mengen in linearen normierten Räumen. Lwów, Studia Math., 4: 70–84.
79. Nussbaum R. D. 1973. Periodic solutions of some nonlinear, autonomous functional differential equations. II. Amsterdam, Journal of Differential Equations, 14(2): 360–394.
80. Padovani F. 2009. Collected Works of Charles François Sturm. Basel, Birkhäuser, 808.
81. Perron O. 1907. Grundlagen für eine Theorie des Jacobischen Kettenbruchalgorithmus. Leipzig, Math. Annalen, 64(2) : 1–76.

82. Perron O. 1907. Zur Theorie der Matrices. Leipzig, Math. Annalen, 64 (2): 248–263.
83. Perron O. 1913. Erweiterung eines Markoffschen Satzes über die Konvergenz gewisser Kettenbrüche. Leipzig, Math. Annalen, 74 : 545–554.
84. Riesz M. 1923. Sur le probleme des moments. Troisieme Note. Stokholm, Ark. Mat. Fys., 16 : 1–52.
85. Riesz F. 1928. Sur la dé composition des opérations fonctionnelles linéaires. Bolonia, Atti del Congresso Internazionale dei Matematici, 1928. V. 3 : 143–148.
86. Rothe E. 1944. On non-negative functional transformations. Baltimore, Johns Hopkins University Press, American J. Math., 66(2): 245–254.
87. Rutman M. A. 1940. Sur les opérateurs totalement continus linéaires laissant invariant un certain cone. Moscow, Mat. Sb. (N.S.), 8(50): 77–96.
88. Schaefer H. H. 1958. Halbgeordnete lokalkonvexe Vektorräume I. Leipzig, Math. Ann., 135: 115–141.
89. Schaefer H. H. 1959. Halbgeordnete lokalkonvexe Vektorräume II. Leipzig, Math. Ann., 138: 254–286.
90. Schaefer H. H. 1960. Halbgeordnete lokalkonvexe Vektorräume III. Leipzig, Math. Ann., 141:113–142.
91. Schauder J. 1930. Der Fixpunktsatz in Funktionalräumen. Kraków, Studia Math. 2: 171–180.
92. Schmidt E. 1907. Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen. I Teil. Entwicklung willkürlichen Funktionen nach System vorgeschriebener. Leipzig, Math. Ann., 63: 433–476.
93. Schmidt E. 1907. Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen. II. Teil. Auflösung der allgemeinen linearen Integralgleichung. Leipzig, Math. Ann., 64:161–174.
94. Schmidt E. 1908. Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen. III Teil. Über die Auflösung der nichtlinearen Integralgleichung und die Verzweigung ihrer Losungen. Leipzig, Math. Ann., 65:370–399.
95. Stewart G. W. 2014. FREDHOLM, HILBERT, SCHMIDT Three Fundamental Papers on Integral Equations. URL: <http://www.cs.umd.edu/~stewart/FHS.pdf> (date of the access 03.03.2019).
96. Sturm C. 1833. Analyse d'un mé moire sur les propriétés générales des fonctions, qui dépendent d'é quations différentielles linéaires du second ordre. Paris, L'Institut. Journ. Acad. et Soc. 11: 219–223.
97. Tychonoff A. 1935. Ein Fixpunktsatz. Leipzig, Math. Ann., 111: 767–776.
98. Wang H. 2003. On the number of positive solutions of nonlinear systems. Amsterdam, J. Math. Analysis Appl., 281(1): 287–306.
99. Webb J. R. L. 2010. Solutions of nonlinear equations in cones and positive linear operators. London, J. of London Math. Soc., 82(2): 420–436.

Получена 20.05.2020

Богатов Егор Михайлович – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры высшей математики и информатики Старооскольского технологического института (филиала) Национального исследовательского технологического университета «МИСиС»

мкр. Макаренко, 42, г. Старый Оскол, 309516, Россия;

Доцент кафедры горного дела филиала Национального исследовательского технологического университета «МИСиС» в г. Губкине Белгородской области

ул. Комсомольская, 16, г. Губкин, 309180, Россия

E-mail: embogatov@inbox.ru

**КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО МОДИФИЦИРОВАННОГО
УРАВНЕНИЯ ВЛАГОПЕРЕНОСА И РАЗНОСТНЫЕ МЕТОДЫ ИХ ЧИСЛЕННОЙ
РЕАЛИЗАЦИИ**

М. Х. Бештоков

(Статья представлена членом редакционной коллегии А. П. Солдатовым)

Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН,
г. Нальчик, 360000, Россия

E-mail: beshtokov-murat@yandex.ru

Аннотация. Рассмотрены начально-краевые задачи с условиями первого и третьего рода для обобщенного модифицированного уравнения влагопереноса с дробной по времени производной. На равномерной сетке построены разностные схемы, аппроксимирующие эти задачи. Для решения этих задач в предположение существования регулярного решения получены априорные оценки в дифференциальной и разностной формах. Из этих оценок следуют единственность и непрерывная зависимость решения от входных данных задачи, а также сходимость со скоростью $O(h^2 + \tau^2)$.

Ключевые слова: Краевые задачи, априорная оценка, модифицированное уравнение влагопереноса, дифференциальное уравнение дробного порядка, дробная производная Капуто.

Для цитирования: Бештоков М. Х. 2020. Краевые задачи для обобщенного модифицированного уравнения влагопереноса и разностные методы их численной реализации. Прикладная математика & Физика, 52(2): 128–138. DOI 10.18413/2687-0959-2020-52-2-128-138.

**BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR THE GENERALIZED MODIFIED
MOISTURE TRANSFER EQUATION AND DIFFERENCE METHODS FOR THEIR
NUMERICAL IMPLEMENTATION**

M. KH. Beshtokov

(Article submitted by a member of the editorial board A. P. Soldatov)

Institute of Applied Mathematics and Automation KBSC RAS,
Nalchik, 360000, Russia

E-mail: beshtokov-murat@yandex.ru

Received May 28, 2020

Abstract. Initial boundary value problems with conditions of the first and third kind for a generalized modified moisture transfer equation with a time-fractional derivative are considered. Difference schemes approximating these problems are constructed on a uniform grid. To solve these problems, assuming the existence of a regular solution, a priori estimates in differential and difference forms are obtained. From these estimates follow the uniqueness and continuous dependence of the solution on the input data of the problem, as well as convergence with the speed $O(h^2 + \tau^2)$.

Key words: Boundary Value Problems, a Priori Estimation, Modified Moisture Transfer Equation, Fractional Order Differential Equation, Caputo Fractional Derivative.

For citation: Beshtokov M. KH. 2020. Boundary value problems for the generalized modified moisture transfer equation and difference methods for their numerical implementation. Applied Mathematics & Physics, 52(2): 128–138 (in Russian).

DOI 10.18413/2687-0959-2020-52-2-128-138.

1. Введение. Псевдопараболическими уравнениями в математической литературе последнего времени называют уравнения вида

$$u_t - Au_t - Bu = f(x, t),$$

где A и B — операторы второго или более высокого порядка по пространственным переменным [Свешников, Альшин, Корпусов, Плетнер, 2007]. Вопросы, связанные с влагопереносом в почвогрунтах, приводят к псевдопараболическим уравнениям [Чудновский, 1976, с.137].

Локальные и нелокальные начально-краевые задачи для такого вида уравнений, как линейных, так и нелинейных, в цилиндрической области $Q = G \times (0, T)$, $G \subset R^n$, изучены достаточно хорошо (см., например, [Турбин, 2013; Шергин, Пятков, 2014; Юлдашев, 2016; Юлдашев, 2017; Lyubanova, 2017]).

Многие ученые стали в последнее время изучать уравнения, содержащие дробные производные по временной и пространственным переменным, в связи с тем, что в рамках классической теории дифференциальных уравнений целочисленных порядков многие процессы и явления окружающей среды не поддаются описанию, так как имеют свойство нелокальности и нелинейности как по пространству, так и по времени. Такие явления и процессы обычно описывают с помощью теории дробного исчисления и встречаются они в механике, физике при описании сложных систем различной природы [Gao, Sun, Sun, 2015; Cui, 2013; Gao, Sun, Zhang, 2014; Pang, Sun, 2012; Calcagni, 2012].

Работы [Pimenov, Hendy, 2016a; Pimenov, Hendy, 2016b; Pimenov, 2018] посвящены исследованию различных краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных дробного порядка с эффектом запаздывания по времени. В физическом аспекте понятия память, последствие, запаздывание, наследственность считаются очень близкими.

В настоящей же работе в случае операторов A и B второго порядка для модифицированного уравнения влагопереноса с переменными коэффициентами и дробной по времени производной в смысле Капуто, будут исследоваться первая и третья краевые задачи.

Приближенным методам решения краевых задач для различных уравнений дробного порядка посвящены работы автора [Бештоков, 2018a; Бештоков, 2018b; Бештоков, 2019; Бештоков, Водахова, 2019].

2. Постановка первой краевой задачи. В прямоугольнике $\bar{Q}_T = \{(x, t) : 0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$ рассмотрим первую краевую задачу для обобщенного уравнения влагопереноса

$$\partial_{0t}^\alpha u = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \partial_{0t}^\alpha \frac{\partial}{\partial x} \left(\eta(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + r(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} - q(x, t)u + f(x, t),$$

$$0 < x < l, 0 < t \leq T, \tag{1}$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, 0 \leq t \leq T, \tag{2}$$

$$u(x, 0) = u_0(x), 0 \leq x \leq l, \tag{3}$$

где

$$0 < c_0 \leq k(x, t), \eta(x), q(x, t), r_x(x, t) \leq c_1, \quad |r(x, t)|, |k_x(x, t)| \leq c_2,$$

$$k(x, t) \in C^{1,0}(Q_T), \eta(x) \in C^1[0, l], r(x, t), q(x, t), f(x, t) \in C(Q_T),$$

$$u(x, t) \in C^{2,0}(Q_T) \cap C^{1,0}(\bar{Q}_T), \partial_{0t}^\alpha u(x, t) \in C(Q_T), \tag{4}$$

$\partial_{0t}^\alpha u = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{u_\tau(x, \tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau$, – дробная производная Капуто порядка α , $0 < \alpha < 1$, $c_i, i = 0, 1, 2 = const > 0$.

Далее предполагается, что дифференциальная задача (1)–(3) имеет единственное решение, обладающее нужными по ходу изложения производными.

В работе будем использовать обозначения $M_i = const > 0$, $i = 1, 2, \dots$, которые зависят только от входных данных рассматриваемой задачи.

3. Априорная оценка в дифференциальной форме.

Теорема 1. Пусть условия (4) выполнены, тогда для решения задачи (1)–(3) справедлива оценка

$$\|u\|_{W_2^1(0,l)}^2 + D_{0t}^{-\alpha} \|u\|_{W_2^1(0,l)}^2 \leq M \left(D_{0t}^{-\alpha} \|f\|_0^2 + \|u_0(x)\|_{W_2^1(0,l)}^2 \right),$$

где $M = const > 0$, зависит только от входных данных задачи (1)–(3), $D_{0t}^{-\alpha} u = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{ud\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}}$ – дробный интеграл Римана – Лиувилля порядка α , $0 < \alpha < 1$, $\|u\|_{W_2^1(0,l)}^2 = \|u\|_0^2 + \|u_x\|_0^2$.

Доказательство. Получим априорную оценку решения задачи (1)–(3) в дифференциальной форме. Для этого умножим уравнение (1) скалярно на u :

$$\left(\partial_{0t}^\alpha u, u \right) = \left((ku_x)_x, u \right) + \left(\partial_{0t}^\alpha (\eta u_x)_x, u \right) + \left(ru_x, u \right) - \left(qu, u \right) + \left(f, u \right), \tag{5}$$

где $(a, b) = \int_0^l abdx$, $(a, a) = \|a\|_0^2$, – скалярное произведение и норма, где a, b – заданные на $[0, l]$ функции.

Пользуясь леммой [Алиханов, 2010], получим

$$\left(\partial_{0t}^\alpha u, u\right) \geq \frac{1}{2} \left(1, \partial_{0t}^\alpha u^2\right) = \frac{1}{2} \partial_{0t}^\alpha \|u\|_0^2, \quad (6)$$

$$\left((ku_x)_x, u\right) = \int_0^l u(ku_x)_x dx = uk u_x|_0^l - \int_0^l k u_x^2 dx, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \left(\partial_{0t}^\alpha (\eta u_x)_x, u\right) &= \int_0^l u \partial_{0t}^\alpha (\eta u_x)_x dx = u \partial_{0t}^\alpha (\eta u_x)|_0^l - \int_0^l \eta(x) u_x \partial_{0t}^\alpha u_x dx \leq \\ &\leq u \partial_{0t}^\alpha (\eta u_x)|_0^l - \frac{1}{2} \int_0^l \eta \partial_{0t}^\alpha (u_x)^2 dx, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\left(r u_x, u\right) = \int_0^l r u_x u dx = \frac{1}{2} r u^2|_0^l - \frac{1}{2} \int_0^l r_x u^2 dx \leq \frac{1}{2} r u^2|_0^l - \frac{c_0}{2} \|u\|_0^2, \quad (9)$$

$$\left(qu, u\right) = \int_0^l q u^2 dx \geq c_0 \|u\|_0^2, \quad (10)$$

$$\left(f, u\right) = \int_0^l f u dx \leq \varepsilon \|u\|_0^2 + M_1(\varepsilon) \|f\|_0^2. \quad (11)$$

Принимая во внимание преобразования (6)–(11), из (5) находим

$$\begin{aligned} \partial_{0t}^\alpha \|u\|_0^2 + \frac{1}{2} \int_0^l \eta \partial_{0t}^\alpha (u_x)^2 dx + 2c_0 \|u_x\|_0^2 + 3c_0 \|u\|_0^2 \leq \\ \leq 2u \left(ku_x + \partial_{0t}^\alpha (\eta u_x)\right)|_0^l + r u^2|_0^l + 2\varepsilon \|u\|_0^2 + M_1(\varepsilon) \|f\|_0^2. \end{aligned} \quad (12)$$

Выбирая $\varepsilon = c_0$, из (12) с учетом (2) получаем

$$\partial_{0t}^\alpha \|u\|_0^2 + \int_0^l \eta \partial_{0t}^\alpha (u_x)^2 dx + \|u\|_0^2 + \|u_x\|_0^2 \leq M_2 \|f\|_0^2. \quad (13)$$

Применяя к обеим частям (13) оператор дробного интегрирования $D_{0t}^{-\alpha}$, из (13) находим

$$\|u\|_{W_2^1(0,l)}^2 + D_{0t}^{-\alpha} \|u\|_{W_2^1(0,l)}^2 \leq M \left(D_{0t}^{-\alpha} \|f\|_0^2 + \|u_0(x)\|_{W_2^1(0,l)}^2 \right), \quad (14)$$

где $M = const > 0$, зависит только от входных данных задачи (1)–(3).

Из (14) следуют единственность и непрерывная зависимость решения от входных данных задачи (1)–(3).

4. Устойчивость и сходимость разностной схемы. Решим задачу (1)–(3) с помощью метода конечных разностей. Для этого дифференциальной задаче (1)–(3) поставим в соответствие на равномерной сетке $\bar{\omega}_{h\tau}$ разностную схему со вторым порядком точности по h и τ :

$$\Delta_{0t_j+\sigma}^\alpha y = \varkappa_i^j \left(a_i^j y_{\bar{x}}^{(\sigma)} \right)_{x,i} + \Delta_{0t_j+\sigma}^\alpha \left(\gamma_i y_{\bar{x}} \right)_{x,i} + b_i^{-j} a_i^j y_{\bar{x},i} + b_i^{+j} a_{i+1}^j y_{x,i}^{(\sigma)} - a_i^j y_i^{(\sigma)} + \varphi_i^j, \quad (x, t) \in \omega_{h,\tau}, \quad (15)$$

$$y_0^{(\sigma)} = y_N^{(\sigma)} = 0, \quad (16)$$

$$y(x, 0) = u_0(x), \quad (17)$$

где $\Delta_{0t_j+\sigma}^\alpha y = \frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=0}^j c_{j-s}^{(\alpha,\sigma)} y_t^s$ – дискретный аналог дробной производной Капуто порядка α , $0 < \alpha < 1$ [Alikhanov, 2015].

$$a_0^{(\alpha,\sigma)} = \sigma^{1-\alpha}, \quad a_l^{(\alpha,\sigma)} = (l + \sigma)^{1-\alpha} - (l - 1 + \sigma)^{1-\alpha}, \quad l \geq 1,$$

$$b_l^{(\alpha,\sigma)} = \frac{1}{2-\alpha} \left[(l + \sigma)^{2-\alpha} - (l - 1 + \sigma)^{2-\alpha} \right] - \frac{1}{2} \left[(l + \sigma)^{1-\alpha} + (l - 1 + \sigma)^{1-\alpha} \right], \quad l \geq 1,$$

$$\text{при } j = 0, \quad c_0^{(\alpha,\sigma)} = a_0^{(\alpha,\sigma)};$$

$$\text{при } j > 0, \quad c_s^{(\alpha, \sigma)} = \begin{cases} a_0^{(\alpha, \sigma)} + b_1^{(\alpha, \sigma)}, & s = 0, \\ a_s^{(\alpha, \sigma)} + b_{s+1}^{(\alpha, \sigma)} - b_s^{(\alpha, \sigma)}, & 1 \leq s \leq j-1, \\ a_j^{(\alpha, \sigma)} - b_j^{(\alpha, \sigma)}, & s = j, \end{cases}$$

$$a_i^j = k(x_{i-0.5}, t^{j+\sigma}), \quad \gamma_i = \eta(x_{i-0.5}), \quad b_i^j = \frac{r(x, t^{j+\sigma})}{k(x_i, t^{j+\sigma})}, \quad \varphi_i^j = f(x_i, t^{j+\sigma}), \quad \sigma = 1 - \frac{\alpha}{2},$$

$$c_s^{(\alpha, \sigma)} > \frac{1-\alpha}{2}(s+\sigma)^{-\alpha} > 0, \quad y^{(\sigma)} = \sigma y^{j+1} + (1-\sigma)y^j, \quad d_i^j = d(x_i, t^{j+\sigma}).$$

Теорема 2. Пусть условия (4) выполнены, тогда существует такое τ_0 , что если $\tau \leq \tau_0$, то для решения разностной задачи (15)–(17) справедлива оценка

$$\|y^{j+1}\|_{W_2^1(0,l)}^2 \leq M \left(\|y^0\|_{W_2^1(0,l)}^2 + \max_{0 \leq j' \leq j} \|\varphi^{j'}\|_0^2 \right).$$

где $M = \text{const} > 0$, не зависящая от h и τ .

Доказательство. Найдем методом энергетических неравенств априорную оценку в разностной форме, для этого введем скалярные произведения и норму в следующем виде:

$$(u, v) = \sum_{i=1}^{N-1} u_i v_i h, \quad (u, v] = \sum_{i=1}^N u_i v_i h, \quad (u, u) = (1, u^2) = \|u\|_0^2.$$

Умножим теперь (15) скалярно на $y^{(\sigma)}$:

$$\begin{aligned} (\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y, y^{(\sigma)}) &= (\mathcal{K}(ay_{\bar{x}}^{(\sigma)})_x, y^{(\sigma)}) + (\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha (\gamma_i y_{\bar{x}}), y^{(\sigma)}) + (b^- ay_{\bar{x}}^{(\sigma)}, y^{(\sigma)}) + \\ &+ (b^+ a^{(+1)} y_x^{(\sigma)}, y^{(\sigma)}) - (dy^{(\sigma)}, y^{(\sigma)}) + (\varphi, y^{(\sigma)}). \end{aligned} \tag{18}$$

Преобразуем суммы, входящие в тождество (18), с учетом (16) и леммы [Alikhanov, 2015]

$$(\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y, y^{(\sigma)}) \geq \frac{1}{2} (1, \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha (y^2)); \tag{19}$$

$$\begin{aligned} (\mathcal{K}(ay_{\bar{x}}^{(\sigma)})_x, y^{(\sigma)}) &= \mathcal{K}ay_{\bar{x}}^{(\sigma)} y^{(\sigma)} \Big|_0^N - (ay_{\bar{x}}^{(\sigma)}, (\mathcal{K}y^{(\sigma)})_{\bar{x}}] = - (a\mathcal{K}_{\bar{x}}, y_{\bar{x}}^{(\sigma)} y^{(\sigma)}) - (a\mathcal{K}^{(-1)}, (y_{\bar{x}}^{(\sigma)})^2] \leq \\ &\leq - (a\mathcal{K}_{\bar{x}}, y_{\bar{x}}^{(\sigma)} y^{(\sigma)}) - \frac{1}{(1+hM_1)} (a\mathcal{K}, (y_{\bar{x}}^{(\sigma)})^2]; \end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned} (\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha (\gamma y_{\bar{x}})_x, y^{(\sigma)}) &= y^{(\sigma)} \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha (\gamma y_{\bar{x}}) \Big|_0^N - (\gamma, y_{\bar{x}}^{(\sigma)} \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha (y_{\bar{x}})] \leq \\ &\leq - \left(\frac{\gamma_i}{2}, \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha (y_{\bar{x}})^2 \right] \leq - \frac{c_0}{2} \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha \|y_{\bar{x}}\|_0^2; \end{aligned} \tag{21}$$

$$(dy^{(\sigma)}, y^{(\sigma)}) \geq c_0 \|y^{(\sigma)}\|_0^2; \tag{22}$$

$$(\varphi, y^{(\sigma)}) \leq \varepsilon \|y^{(\sigma)}\|_0^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \|\varphi\|_0^2. \tag{23}$$

Принимая во внимание преобразования (19)–(23), из (18) находим

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2}, \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha (y^2) \right) + \frac{1}{(1+hM_1)} (a\mathcal{K}, (y_{\bar{x}}^{(\sigma)})^2] + \frac{c_0}{2} \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha \|y_{\bar{x}}\|_0^2 &\leq - (a\mathcal{K}_{\bar{x}}, y_{\bar{x}}^{(\sigma)} y^{(\sigma)}) + (b^- ay_{\bar{x}}^{(\sigma)}, y^{(\sigma)}) + \\ &+ (b^+ a^{(+1)} y_x^{(\sigma)}, y^{(\sigma)}) - c_0 \|y^{(\sigma)}\|_0^2 + \varepsilon \|y^{(\sigma)}\|_0^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \|\varphi\|_0^2. \end{aligned} \tag{24}$$

Выбирая $\varepsilon = \frac{c_0}{2}$, из (24) находим

$$\begin{aligned} \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha \|y\|_0^2 + c_0 \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha \|y_{\bar{x}}\|_0^2 + M_2 \|y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\|_0^2 + c_0 \|y^{(\sigma)}\|_0^2 &\leq - (a\mathcal{K}_{\bar{x}}, y_{\bar{x}}^{(\sigma)} y^{(\sigma)}) + (b^- a, y_{\bar{x}}^{(\sigma)} y^{(\sigma)}) + \\ &+ (b^+ a^{(+1)} y_x^{(\sigma)}, y^{(\sigma)}) + M_3 \|\varphi\|_0^2. \end{aligned} \tag{25}$$

Преобразуем первое, второе и третье слагаемые в правой части (25). Тогда получим

$$-\left(a\chi_{\bar{x}}, y_{\bar{x}}^{(\sigma)} y^{(\sigma)} \right) + \left(b^- a, y_{\bar{x}}^{(\sigma)} y^{(\sigma)} \right) + \left(b^+ a^{(+1)}, y_x^{(\sigma)}, y^{(\sigma)} \right) \leq M_4 \left(\|y^{(\sigma)}\|_0^2 + \|y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\|_0^2 \right). \quad (26)$$

Учитывая (26), из (25) получаем

$$\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha \|y\|_{W_2^1(0,l)}^2 + \|y^\sigma\|_{W_2^1(0,l)}^2 \leq M_5 \|y^\sigma\|_{W_2^1(0,l)}^2 + M_6 \|\varphi\|_0^2, \quad (27)$$

где $\|y\|_{W_2^1(0,l)}^2 = \|y\|_0^2 + \|y_{\bar{x}}\|_0^2$.

Перепишем (27) в другой форме

$$\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha \|y\|_{W_2^1(0,l)}^2 \leq M_7^\sigma \|y^{j+1}\|_{W_2^1(0,l)}^2 + M_8^\sigma \|y^j\|_{W_2^1(0,l)}^2 + M_9 \|\varphi\|_0^2. \quad (28)$$

На основании леммы 3 [Бештоков, 2018] из (28) получаем

$$\|y^{j+1}\|_{W_2^1(0,l)}^2 \leq M \left(\|y^0\|_{W_2^1(0,l)}^2 + \max_{0 \leq j' \leq j} \|\varphi^{j'}\|_0^2 \right), \quad (29)$$

где $M = const > 0$, не зависящая от h и τ .

Из (29) следуют единственность и непрерывная зависимость решения от входных данных задачи (15)–(17), а также в силу линейности задачи (1)–(3) сходимость со скоростью $O(h^2 + \tau^2)$.

5. Постановка третьей краевой задачи и априорная оценка в дифференциальной форме. Рассмотрим третью краевую задачу для уравнения (1)

$$\begin{cases} \Pi(0, t) = \beta_1(t)u(0, t) - \mu_1(t), \\ -\Pi(l, t) = \beta_2(t)u(l, t) - \mu_2(t), \end{cases} \quad (30)$$

где

$$0 < c_0 \leq k, \eta \leq c_1, |\beta_1, \beta_2, r, q, r_x, k_x| \leq c_2, \Pi(x, t) = k(x, t)u_x + \partial_{0t}^\alpha(\eta u_x). \quad (31)$$

Теорема 3. Пусть условия (4), (31) выполнены, тогда для решения задачи (1), (30), (3) справедлива оценка

$$\|u\|_{W_2^1(0,l)}^2 + D_{0t}^{-\alpha} \|u_x\|_0^2 \leq M \left(D_{0t}^{-\alpha} (\|f\|_0^2 + \mu_1^2(t) + \mu_2^2(t)) + \|u_0(x)\|_{W_2^1(0,l)}^2 \right),$$

где $M = const > 0$, зависит только от входных данных задачи (1), (30), (3).

Доказательство. Умножим уравнение (1) скалярно на u :

$$\left(\partial_{0t}^\alpha u, u \right) = \left((ku_x)_x, u \right) + \left(\partial_{0t}^\alpha(\eta u_x)_x, u \right) + \left(ru_x, u \right) - \left(qu, u \right) + \left(f, u \right). \quad (32)$$

Преобразуем третье и четвертое слагаемые в правой части (32)

$$\left(ru_x, u \right) = \int_0^l r u u_x dx \leq \frac{c_2}{2} \int_0^l u^2 dx + \frac{c_2}{2} \int_0^l u_x^2 dx \leq \frac{c_2}{2} \left(\|u\|_0^2 + \|u_x\|_0^2 \right). \quad (33)$$

$$-\left(qu, u \right) = - \int_0^l q u^2 dx \leq c_2 \|u\|_0^2. \quad (34)$$

С учетом преобразований (6)–(8), (11), (33), (34) из (32) находим

$$\frac{1}{2} \partial_{0t}^\alpha \|u\|_0^2 + \frac{1}{2} \int_0^l \eta \partial_{0t}^\alpha (u_x)^2 dx + c_0 \|u_x\|_0^2 \leq u \Pi(x, t)|_0^l + M_1 \left(\|u\|_0^2 + \|u_x\|_0^2 \right) + M_2 \|f\|_0^2. \quad (35)$$

Оценим первое слагаемое в правой части (35)

$$\begin{aligned} u \Pi(x, t)|_0^l &= \Pi(l, t)u(l, t) - \Pi(0, t)u(0, t) = u(l, t) \left(\mu_2(t) - \beta_2(t)u(l, t) \right) + \\ &+ u(0, t) \left(\mu_1(t) - \beta_1(t)u(0, t) \right) = -\beta_2(t)u^2(l, t) + \mu_2(t)u(l, t) - \beta_1(t)u^2(0, t) + \mu_1(t)u(0, t) \leq \\ &\leq M_3 \left(u^2(0, t) + u^2(l, t) \right) + \frac{1}{2} \left(\mu_1^2(t) + \mu_2^2(t) \right) \leq M_4 \left(\|u\|_0^2 + \|u_x\|_0^2 \right) + \frac{1}{2} \left(\mu_1^2(t) + \mu_2^2(t) \right). \end{aligned} \quad (36)$$

Учитывая (36), из (35) получим

$$\frac{1}{2} \partial_{0t}^\alpha \|u\|_0^2 + \frac{1}{2} \int_0^t \eta \partial_{0t}^\alpha (u_x)^2 dx + \|u_x\|_0^2 \leq M_5 \|u\|_{W_2^1(0,t)}^2 + M_6 \left(\|f\|_0^2 + \mu_1^2(t) + \mu_2^2(t) \right). \quad (37)$$

Применяя к (37) оператор дробного интегрирования $D_{0t}^{-\alpha}$, получаем

$$\|u\|_{W_2^1(0,t)}^2 + D_{0t}^{-\alpha} \|u_x\|_0^2 \leq M_5 D_{0t}^{-\alpha} \|u\|_{W_2^1(0,t)}^2 + M_7 \left(D_{0t}^{-\alpha} (\|f\|_0^2 + \mu_1^2(t) + \mu_2^2(t)) + \|u_0(x)\|_{W_2^1(0,t)}^2 \right). \quad (38)$$

На основании леммы [Алиханов, 2010] оценим первое слагаемое в правой части (38).

Пусть $y(t) = D_{0t}^{-\alpha} \|u\|_{W_2^1(0,t)}^2$, $\partial_{0t}^\alpha y(t) = \|u(x,t)\|_{W_2^1(0,t)}^2$, тогда получаем

$$D_{0t}^{-\alpha} \|u\|_{W_2^1(0,t)}^2 \leq M_8 \left(D_{0t}^{-2\alpha} (\|f\|_0^2 + \mu_1^2(t) + \mu_2^2(t)) + \|u_0(x)\|_{W_2^1(0,t)}^2 \right). \quad (39)$$

В силу того, что для любой неотрицательной функции $g(t)$, интегрируемой на $[0, T]$, справедливо неравенство

$$D_{0t}^{-2\alpha} g(t) \leq \frac{t^\alpha \Gamma(\alpha)}{\Gamma(2\alpha)} D_{0t}^{-\alpha} g(t), \quad (40)$$

то из (38) с учетом (39) и (40) находим оценку

$$\|u\|_{W_2^1(0,t)}^2 + D_{0t}^{-\alpha} \|u_x\|_0^2 \leq M \left(D_{0t}^{-\alpha} (\|f\|_0^2 + \mu_1^2(t) + \mu_2^2(t)) + \|u_0(x)\|_{W_2^1(0,t)}^2 \right), \quad (41)$$

где $M = const > 0$, зависит только от входных данных задачи (1), (30), (3).

Из (41) следуют единственность и непрерывная зависимость решения от входных данных задачи (1), (30), (3).

6. Устойчивость и сходимость разностной схемы. Дифференциальной задаче (1), (30), (3) поставим в соответствие на равномерной сетке $\bar{\omega}_{h\tau}$ разностную схему со вторым порядком точности по h и τ :

$$\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y = \varkappa_i^j \left(a_{i,i}^j y_{\bar{x}}^{(\sigma)} \right)_{x,i} + \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha \left(\gamma_i y_{\bar{x}} \right)_{x,i} + b_i^{-j} a_{i,i}^j y_{\bar{x},i}^{(\sigma)} + b_i^{+j} a_{i+1,i}^j y_{x,i}^{(\sigma)} - d_{i,i}^j y_i^{(\sigma)} + \varphi_i^j, \quad (x, t) \in \omega_{h,\tau}, \quad (42)$$

$$\varkappa_0 a_{1,y_{x,0}}^{(\sigma)} + \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha \left(\gamma_1 y_{\bar{x},0} \right) = \tilde{\beta}_1 y_0^{(\sigma)} + 0.5h \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y_0 - \tilde{\mu}_1, \quad t \in \bar{\omega}_\tau, \quad x = 0, \quad (43)$$

$$-\left(\varkappa_N a_{N,y_{\bar{x},N}}^{(\sigma)} + \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha \left(\gamma_N y_{\bar{x},N} \right) \right) = \tilde{\beta}_2 y_N^{(\sigma)} + 0.5h \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y_N - \tilde{\mu}_2, \quad t \in \bar{\omega}_\tau, \quad x = l, \quad (44)$$

$$y(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \bar{\omega}_h, \quad (45)$$

где

$$\tilde{\beta}_1(t_{j+\sigma}) = \beta_1(t_{j+\sigma}) + 0.5hd_0^j, \quad \tilde{\beta}_2(t_{j+\sigma}) = \beta_2(t_{j+\sigma}) + 0.5hd_N^j,$$

$$\tilde{\mu}_1(t_{j+\sigma}) = \mu_1(t_{j+\sigma}) + 0.5h\varphi_0, \quad \tilde{\mu}_2(t_{j+\sigma}) = \mu_2(t_{j+\sigma}) + 0.5h\varphi_N,$$

$\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y = \frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=0}^j c_{j-s}^{(\alpha,\sigma)} y_t^s$ – дискретный аналог дробной производной Капуто порядка α , $0 < \alpha < 1$.

Перепишем (42)–(45) в операторном виде

$$\begin{cases} \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y = \bar{\Lambda}(t_{j+\sigma})y^{(\sigma)} + \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha \bar{\delta}(t)y + \bar{\Phi}, \\ y(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \bar{\omega}_h, \end{cases} \quad (46)$$

где

$$\bar{\Lambda}(t_{j+\sigma})y^{(\sigma)} = \begin{cases} \tilde{\Lambda}y_i^{(\sigma)} = \varkappa \left(ay_{\bar{x}}^{(\sigma)} \right)_x + b^- ay_{\bar{x}}^{(\sigma)} + b^+ a^{(+1)} y_x^{(\sigma)} - dy^{(\sigma)}, \quad i = \overline{1, N-1}, \\ \Lambda^- y_0^{(\sigma)} = \frac{\varkappa_0 a_{1,y_{x,0}}^{(\sigma)} - \tilde{\beta}_1 y_0^{(\sigma)}}{0.5h}, \quad i = 0, \\ \Lambda^+ y_N^{(\sigma)} = \frac{-\varkappa_N a_{N,y_{\bar{x},N}}^{(\sigma)} - \tilde{\beta}_2 y_N^{(\sigma)}}{0.5h}, \quad i = N, \end{cases}$$

$$\bar{\delta}y = \begin{cases} \delta y_i = \left(\gamma_i y_{\bar{x}} \right)_x, \quad i = \overline{1, N-1}, \\ \delta^- y_0 = \frac{2}{h} \left(\gamma_1 y_{x,0} \right)_t, \quad i = 0, \\ \delta^+ y_N = -\frac{2}{h} \left(\gamma_N y_{\bar{x},N} \right)_t, \quad i = N, \end{cases} \quad \bar{\Phi} = \begin{cases} \varphi = \varphi_i, \quad i = \overline{1, N-1}, \\ \varphi^- = \frac{2}{h} \tilde{\mu}_1, \quad i = 0, \\ \varphi^+ = \frac{2}{h} \tilde{\mu}_2, \quad i = N, \end{cases}$$

$$\varkappa^* = \begin{cases} \varkappa = \frac{1}{1 + \frac{0.5h|r|}{1^k}}, \\ \varkappa_0 = \frac{1}{1 + \frac{0.5h|r_0|}{k_{0.5}}}, \quad r_0 \leq 0, \\ \varkappa_N = \frac{1}{1 + \frac{0.5h|r_N|}{k_{N-0.5}}}, \quad r_N \geq 0, \end{cases} \quad t^* = t^{j+1/2}.$$

Теорема 4. Пусть условия (4), (31) выполнены, тогда существует такое τ , что если $\tau \leq \tau_0$ то для решения разностной задачи (42), (45) справедлива оценка

$$\|y^{j+1}\|_{W_2^1(0,l)}^2 \leq M \left(\|y^0\|_{W_2^1(0,l)}^2 + \max_{0 \leq j' \leq j} \left(\|\varphi^{j'}\|_0^2 + \mu_1^2 + \mu_2^2 \right) \right),$$

где $M = \text{const} > 0$, не зависящая от h и τ .

Доказательство. Умножим (46) теперь скалярно на $y^{(\sigma)}$:

$$\left[\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y, y^{(\sigma)} \right] = \left[\bar{\Lambda}(t_{j+\sigma})y^{(\sigma)}, y^{(\sigma)} \right] + \left[\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha \bar{\delta}y, y^{(\sigma)} \right] + \left[\Phi, y^{(\sigma)} \right], \quad (47)$$

где $[u, v] = \sum_{i=0}^N u_i v_i \bar{h}$, $\bar{h} = \begin{cases} 0.5h, i = 0, N, \\ h, i \neq 0, N, \end{cases}$ $[u, u] = [1, u^2] = \|u\|_0^2$, $(u, v) = \sum_{i=1}^N u_i v_i h$.

Оценим суммы, входящие в (47)

$$\left[\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y, y^{(\sigma)} \right] \geq \frac{1}{2} \left[1, \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha (y^2) \right], \quad (48)$$

$$\begin{aligned} \left[\bar{\Lambda}(t_{j+\sigma})y^{(\sigma)}, y^{(\sigma)} \right] &= \left(\tilde{\Lambda}(t_{j+\sigma})y^{(\sigma)}, y^{(\sigma)} \right) + 0.5hy_0^{(\sigma)}\Lambda^-y_0^{(\sigma)} + 0.5hy_N^{(\sigma)}\Lambda^+y_N^{(\sigma)} = \left(\varkappa(ay_{\bar{x}}^{(\sigma)})_{\bar{x}}, y^{(\sigma)} \right) + \\ &+ \left(b^-ay_{\bar{x}}^{(\sigma)}, y^{(\sigma)} \right) + \left(b^+a^{(+1)}y_x^{(\sigma)}, y^{(\sigma)} \right) - \left(dy^{(\sigma)}, y^{(\sigma)} \right) + \varkappa_0a_1y_{x,0}^{(\sigma)}y_0^{(\sigma)} - \tilde{\beta}_1(y_0^{(\sigma)})^2 - \varkappa_Na_Ny_{\bar{x},N}^{(\sigma)}y_N^{(\sigma)} - \\ &- \tilde{\beta}_2(y_N^{(\sigma)})^2 = - \left(ay_{\bar{x}}^{(\sigma)}, (\varkappa y^{(\sigma)})_{\bar{x}} \right) + \left(b^-a, y_{\bar{x}}^{(\sigma)}y^{(\sigma)} \right) + \left(b^+a^{(+1)}, y_x^{(\sigma)}y^{(\sigma)} \right) - \left(dy^{(\sigma)}, y^{(\sigma)} \right) - \\ &- \tilde{\beta}_1(y_0^{(\sigma)})^2 - \tilde{\beta}_2(y_N^{(\sigma)})^2. \end{aligned} \quad (49)$$

Преобразуем слагаемые в правой части (49)

$$\begin{aligned} - \left(ay_{\bar{x}}^{(\sigma)}, (\varkappa y^{(\sigma)})_{\bar{x}} \right) + \left(b^-a, y_{\bar{x}}^{(\sigma)}y^{(\sigma)} \right) + \left(b^+a^{(+1)}, y_x^{(\sigma)}y^{(\sigma)} \right) &= - \left(a\varkappa^{(-1)}, (y_{\bar{x}}^{(\sigma)})^2 \right) - \left(a\varkappa_{\bar{x}}, y_{\bar{x}}^{(\sigma)}y^{(\sigma)} \right) + \\ + \left(b^-a, y_{\bar{x}}^{(\sigma)}y^{(\sigma)} \right) + \left(b^+a^{(+1)}, y_x^{(\sigma)}y^{(\sigma)} \right) &\leq - \left(\frac{\varkappa a}{1 + hM_1}, (y_{\bar{x}}^{(\sigma)})^2 \right) + M_1 \left(\|y^{(\sigma)}\|_0^2 + \|y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\|_0^2 \right), \end{aligned} \quad (50)$$

$$\begin{aligned} - \left(dy^{(\sigma)}, y^{(\sigma)} \right) - \tilde{\beta}_1(y_0^{(\sigma)})^2 - \tilde{\beta}_2(y_N^{(\sigma)})^2 &= - \left(d, (y^{(\sigma)})^2 \right) - 0.5hd_0(y_0^{(\sigma)})^2 - 0.5hd_N(y_N^{(\sigma)})^2 - \beta_1(y_0^{(\sigma)})^2 - \\ - \beta_2(y_N^{(\sigma)})^2 &= - \left[d, (y^{(\sigma)})^2 \right] - \beta_1(y_0^{(\sigma)})^2 - \beta_2(y_N^{(\sigma)})^2 \leq M_2 \left(\|y^{(\sigma)}\|_0^2 + \|y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\|_0^2 \right). \end{aligned} \quad (51)$$

Учитывая (50), (51), из (49) находим

$$\left[\bar{\Lambda}(t_{j+\sigma})y^{(\sigma)}, y^{(\sigma)} \right] \leq -M_3 \|y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\|_0^2 + M_4 \left(\|y^{(\sigma)}\|_0^2 + \|y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\|_0^2 \right). \quad (52)$$

$$\begin{aligned} \left[\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha \bar{\delta}y, y^{(\sigma)} \right] &= \left(\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha \delta y, y^{(\sigma)} \right) + 0.5hy_0^{(\sigma)}\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha \delta^-y_0 + 0.5hy_N^{(\sigma)}\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha \delta^+y_N = \\ &= - \left(y_{\bar{x}}^{(\sigma)}, \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha (\gamma_i y_{\bar{x}}) \right) \leq - \left(\frac{\gamma}{2}, \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha (y_{\bar{x}})^2 \right) \leq - \frac{c_0}{2} \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha \|y_{\bar{x}}\|_0^2. \end{aligned} \quad (53)$$

$$\begin{aligned} \left[\bar{\Phi}, y^{(\sigma)} \right] &= (\varphi, y^{(\sigma)}) + 0.5hy_0^{(\sigma)}\varphi^- + 0.5hy_N^{(\sigma)}\varphi^+ = [\varphi, y^{(\sigma)}] + \mu_1 y_0^{(\sigma)} + \mu_2 y_N^{(\sigma)} \leq \\ &\leq M_5 \left(\|y^{(\sigma)}\|_0^2 + \|y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\|_0^2 \right) + M_6 \left(\|\varphi\|_0^2 + \mu_1^2 + \mu_2^2 \right). \end{aligned} \quad (54)$$

Принимая во внимание преобразования (48)–(54), из (47) находим

$$\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha \|y\|_{W_2^1(0,l)}^2 + M_3 \|y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\|_0^2 \leq M_7 \|y^{(\sigma)}\|_{W_2^1(0,l)}^2 + M_6 \left(\|\varphi\|_0^2 + \mu_1^2 + \mu_2^2 \right), \quad (55)$$

где $\|y\|_{W_2^1(0,l)}^2 = \|y\|_0^2 + \|y_{\bar{x}}\|_0^2$.

Из (55) на основании леммы 3 [Бештоков, 2018] находим оценку

$$\|y^{j+1}\|_{W_2^1(0,l)}^2 \leq M \left(\|y^0\|_{W_2^1(0,l)}^2 + \max_{0 \leq j' \leq j} (\|[\varphi^{j'}]\|_0^2 + \mu_1^2 + \mu_2^2) \right), \quad (56)$$

где $M = const > 0$, не зависящая от h и τ .

Из (56) следуют единственность и непрерывная зависимость решения от входных данных задачи (42), (45), а также в силу линейности задачи (1), (30), (3) сходимость со скоростью $O(h^2 + \tau^2)$.

7. Алгоритм приближенного решения разностной задачи, аппроксимирующей третью краевую задачу для обобщенного модифицированного уравнения влагопереноса. Приведем разностную схему (42)–(45) к расчетному виду для приближенного решения. Тогда уравнение (42) приводится к следующему виду

$$A_i y_{i-1}^{j+1} - C_i y_i^{j+1} + B_i y_{i+1}^{j+1} = -F_i^j, \quad i = \overline{1, N-1}, \quad (57)$$

где

$$A_i = \tau \sigma \varkappa_i^j a_i^j + \gamma_i \frac{\tau^{1-\alpha} c_0^{(\alpha, \sigma)}}{\Gamma(2-\alpha)} - \tau h \sigma b_i^{-j} a_i, \quad B_i = \tau \sigma \varkappa_i^j a_{i+1}^j + \gamma_{i+1} \frac{\tau^{1-\alpha} c_0^{(\alpha, \sigma)}}{\Gamma(2-\alpha)} + \tau h \sigma b_i^{+j} a_{i+1},$$

$$C_i = A_i + B_i + h^2 \frac{\tau^{1-\alpha} c_0^{(\alpha, \sigma)}}{\Gamma(2-\alpha)} + \tau \sigma h^2 d_i^j,$$

$$F_i^j = AA_i y_{i-1}^j - CC_i y_i^j + BB_i y_{i+1}^j + h^2 \tau \varphi_i^j - h^2 \frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=0}^{j-1} c_{j-s}^{(\alpha, \sigma)} (y_i^{s+1} - y_i^s) +$$

$$+ \frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=0}^{j-1} c_{j-s}^{(\alpha, \sigma)} \left((\gamma_{i+1} y_{i+1})^{s+1} - (\gamma_{i+1} y_{i+1})^s \right) -$$

$$- \frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=0}^{j-1} c_{j-s}^{(\alpha, \sigma)} \left(((\gamma_i + \gamma_{i+1}) y_i)^{s+1} - ((\gamma_i + \gamma_{i+1}) y_i)^s \right) +$$

$$+ \frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=0}^{j-1} c_{j-s}^{(\alpha, \sigma)} \left((\gamma_i y_{i-1})^{s+1} - (\gamma_i y_{i-1})^s \right),$$

$$AA_i = \tau(1-\sigma) \varkappa_i^j a_i^j - \gamma_i \frac{\tau^{1-\alpha} c_0^{(\alpha, \sigma)}}{\Gamma(2-\alpha)} - \tau h(1-\sigma) b_i^{-j} a_i,$$

$$BB_i = \tau(1-\sigma) \varkappa_i^j a_{i+1}^j - \gamma_{i+1} \frac{\tau^{1-\alpha} c_0^{(\alpha, \sigma)}}{\Gamma(2-\alpha)} + \tau h(1-\sigma) b_i^{+j} a_{i+1},$$

$$CC_i = AA_i + BB_i - h^2 \frac{\tau^{1-\alpha} c_0^{(\alpha, \sigma)}}{\Gamma(2-\alpha)} + \tau(1-\sigma) h^2 d_i^j.$$

Краевое условие (43) принимает вид

$$y_0 = \varkappa_1 y_1 + \mu_1, \quad (58)$$

где

$$\varkappa_1 = \frac{\tau \sigma \varkappa_0 a_1 + \gamma_1 \frac{\tau^{1-\alpha} c_0^{(\alpha, \sigma)}}{\Gamma(2-\alpha)}}{\tau \sigma \varkappa_0 a_1^j + \gamma_1 \frac{\tau^{1-\alpha} c_0^{(\alpha, \sigma)}}{\Gamma(2-\alpha)} + \sigma h \tau \tilde{\beta}_1^j + 0.5 h^2 \frac{\tau^{1-\alpha} c_0^{(\alpha, \sigma)}}{\Gamma(2-\alpha)}},$$

$$\mu_1 = \left[\tilde{\mu}_1 h \tau - (1-\sigma) h \tau \tilde{\beta}_1 y_0^j + \tau(1-\sigma) \varkappa_0 a_1 (y_1^j - y_0^j) - \gamma_1 \frac{\tau^{1-\alpha} c_0^{(\alpha, \sigma)}}{\Gamma(2-\alpha)} (y_1^j - y_0^j) + 0.5 h^2 \frac{\tau^{1-\alpha} c_0^{(\alpha, \sigma)}}{\Gamma(2-\alpha)} y_0 - \right.$$

$$\left. - 0.5 h^2 \frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=0}^{j-1} c_{j-s}^{(\alpha, \sigma)} (y_0^{s+1} - y_0^s) + \frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=0}^{j-1} c_{j-s}^{(\alpha, \sigma)} \left((\gamma_1 y_1)^{s+1} - (\gamma_1 y_1)^s \right) - \right.$$

$$\left. - \frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=0}^{j-1} c_{j-s}^{(\alpha, \sigma)} \left((\gamma_1 y_0)^{s+1} - (\gamma_1 y_0)^s \right) \right] / \left[\tau \sigma \varkappa_0 a_1^j + \gamma_1 \frac{\tau^{1-\alpha} c_0^{(\alpha, \sigma)}}{\Gamma(2-\alpha)} + \sigma h \tau \tilde{\beta}_1^j + 0.5 h^2 \frac{\tau^{1-\alpha} c_0^{(\alpha, \sigma)}}{\Gamma(2-\alpha)} \right].$$

Краевое условие (44) принимает вид

$$y_N = \varkappa_2 y_{N-1} + \mu_2, \tag{59}$$

где

$$\begin{aligned} \varkappa_2 = & \frac{\tau\sigma \varkappa_N a_N + \gamma_N \frac{\tau^{1-\alpha} c_0^{(\alpha,\sigma)}}{\Gamma(2-\alpha)}}{\tau\sigma \varkappa_N a_N^j + \gamma_N \frac{\tau^{1-\alpha} c_0^{(\alpha,\sigma)}}{\Gamma(2-\alpha)} + \sigma h \tau \tilde{\beta}_2^j + 0.5h^2 \frac{\tau^{1-\alpha} c_0^{(\alpha,\sigma)}}{\Gamma(2-\alpha)}}, \\ \mu_2 = & \left[\tilde{\mu}_2 h \tau - (1-\sigma) h \tau \tilde{\beta}_2 y_N^j - \tau(1-\sigma) \varkappa_N a_N (y_N^j - y_{N-1}^j) + \gamma_N \frac{\tau^{1-\alpha} c_0^{(\alpha,\sigma)}}{\Gamma(2-\alpha)} (y_N^j - y_{N-1}^j) + \right. \\ & + 0.5h^2 \frac{\tau^{1-\alpha} c_0^{(\alpha,\sigma)}}{\Gamma(2-\alpha)} y_N - 0.5h^2 \frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=0}^{j-1} c_{j-s}^{(\alpha,\sigma)} (y_N^{s+1} - y_N^s) - \\ & - \frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=0}^{j-1} c_{j-s}^{(\alpha,\sigma)} \left((\gamma_N y_N)^{s+1} - (\gamma_N y_N)^s \right) + \\ & \left. + \frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=0}^{j-1} c_{j-s}^{(\alpha,\sigma)} \left((\gamma_N y_{N-1})^{s+1} - (\gamma_N y_{N-1})^s \right) \right] / \left[\tau\sigma \varkappa_N a_N^j + \gamma_N \frac{\tau^{1-\alpha} c_0^{(\alpha,\sigma)}}{\Gamma(2-\alpha)} + \right. \\ & \left. + \sigma h \tau \tilde{\beta}_2^j + \frac{h^2}{2} \frac{\tau^{1-\alpha} c_0^{(\alpha,\sigma)}}{\Gamma(2-\alpha)} \right]. \end{aligned}$$

Таким образом, с учетом (57)–(59), решение разностной схемы (42)–(45) можно найти методом прогонки.

8. Заключение. В работе исследованы начально-краевые задачи с условиями первого и третьего рода для обобщенного модифицированного уравнения влагопереноса с дробной по времени производной. На равномерной сетке построены разностные схемы, аппроксимирующие эти задачи. Для решения этих задач в предположение существования регулярного решения получены априорные оценки в дифференциальной и разностной формах. Из этих оценок следуют единственность и непрерывная зависимость решения от входных данных задачи, а также сходимость со скоростью $O(h^2 + \tau^2)$.

Список литературы

1. Алиханов А. А. 2010. Априорные оценки решений краевых задач для уравнений дробного порядка. Дифференц. уравнения, 46(5): 660–666.
2. Бештоков М. Х. 2018. Локальные и нелокальные краевые задачи для вырождающихся и невырождающихся псевдопараболических уравнений с дробной производной Римана – Лиувилля. Дифференц. уравнения, 54(6): 763–778.
3. Бештоков М. Х. 2018. К краевым задачам для вырождающихся псевдопараболических уравнений с дробной производной Герасимова – Капуто. Известия вузов. Математика, 62(10): 3–16.
4. Бештоков М. Х. 2019. Краевые задачи для нагруженных псевдопараболических уравнений дробного порядка и разностные методы их решения. Известия высших учебных заведений. Математика, Известия вузов. Математика, 63(2): 3–12.
5. Бештоков М. Х., Водахова В. А. 2019. Сеточные методы решения нелокальных краевых задач для уравнения конвекции-диффузии дробного порядка с вырождением. Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика, 51(3):347–365.
6. Свешников А. А., Альшин А. Б., Корпусов М. О. Плетнер Ю. Д. 2007. Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа. М., Физматлит, 736.
7. Чудновский А. Ф. 1976. Теплофизика почв. М., Наука, 352.
8. Турбин М. В. 2013. Исследование начально-краевой задачи для модели движения жидкости Гершель – Балкли. Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика, 2: 246–257.
9. Шергин С. Н., Пятков С. Г. 2014. О некоторых классах обратных задач для псевдопараболических уравнений. Математические заметки СВФУ, 21(2): 106–116

10. Юлдашев Т. К. 2016. Нелинейное интегро-дифференциальное уравнение псевдопараболического типа с нелокальным интегральным условием. Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1: Математика. Физика, 1(32): 11–23.
11. Юлдашев Т. К. 2017. Нелокальная краевая задача для неоднородного псевдопараболического интегро-дифференциального уравнения с вырожденным ядром. Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1: Математика. Физика, 1(38): 42–54.
12. Alikhanov A. A. 2015. A new difference scheme for the time fractional diffusion equation. Journal of Computational Physics, 280: 424–438.
13. Lyubanova A. Sh. 2017. The inverse problem for the nonlinear pseudoparabolic equation of filtration type, J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys., 10(1): 4–15.
14. Gao G. H., Sun H. W., Sun Z. Z. 2015. Stability and convergence of finite difference schemes for a class of time-fractional sub-diffusion equations based on certain superconvergence. J. Comput. Phys., 280: 510–528.
15. Cui M. 2013. Convergence analysis of high-order compact alternating direction implicit schemes for the two-dimensional time fractional diffusion equation. Numer. Algorithms, 62: 383–409.
16. Gao G. H., Sun Z. Z., Zhang H. 2014. A new fractional numerical differentiation formula to approximate the Caputo fractional derivative and its applications. J. Comput. Phys., 259: 33–50.
17. Pang H. K., Sun H. W. 2012. Multigrid method for fractional diffusion equations. J. Comput. Phys., 231: 693–703.
18. Calcagni G. 2012. Geometry of Fractional Spaces. Adv. Theor. Math. Phys., 16(2): 549–644.
19. Pimenov V. G., Hendy A. S. 2016. An implicit numerical method for the solution of the fractional advection-diffusion equation with delay. Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN, 22(2): 218–226.
20. Pimenov V. G., Hendy A. S. 2016. Fractional analog of crank-nicholson method for the two sided space fractional partial equation with functional delay. Ural Math. J., 2(1): 48–57.
21. Pimenov V. G. 2018. Numerical methods for fractional advection-diffusion equation with heredity. J. Math. Sci. (N. Y.), 230(5): 737–741.

References

1. Alihanov A. A. 2010. Apriornye ocenki reshenij kraevykh zadach dlya uravnenij drobnogo poryadka [Priori Estimates for Solutions of Boundary Value Problems for Fractional-Order Equations] Differenc. uravneniya, 46(7): 949–961.
2. Beshtokov M. H. 2018. Lokal'nye i nelokal'nye kraevye zadachi dlya vyrozhdnyushchih i nevyrozhdnyushchih pсевдопараболических уравнений s drobnoj proizvodnoj Rimana-Liuvillya [Local and Nonlocal Boundary Value Problems for Degenerating and Nondegenerating Pseudoparabolic Equations with a Riemann-Liouville Fractional Derivative] Differenc. uravneniya, 54(6): 758–774.
3. Beshtokov M. H. 2018. K kraevym zadacham dlya vyrozhdnyushchih pсевдопараболических уравнений s drobnoj proizvodnoj Gerasimova-Kaputo [To Boundary-Value Problems for Degenerating Pseudo- parabolic Equations With Gerasimov-Caputo Fractional Derivative] Russian Mathematics, 62(10): 1–14.
4. Beshtokov M. H. 2019. Kraevye zadachi dlya nagruzhennykh pсевдопараболических уравнений drobnogo poryadka i raznostnye metody ih resheniya [Boundary-Value Problems for Loaded Pseudoparabolic Equations of Fractional Order and Difference Methods of Their Solving] Russian Mathematics. 63(2): 1–10.
5. Beshtokov M. H., Vodakhova V. A. 2019. Setevyye metody resheniya nelokal'nykh kraevykh zadach dlya uravneniy konveksii-diffuzii drobnogo poryadka s vyrozhdniyem [Grid methods for solving nonlocal boundary value problems for the convection-diffusion equation of fractional order with degeneration]. Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics. Physics, 51(3): 347–365.
6. Sveshnikov A. A., Alshin A. B., Korpusov M. O. Pletner Yu. D. 2007. Lineynyye i nelineynyye uravneniya sobolevskogo tipa. [Linear and nonlinear Sobolev type equations] M., Fizmatlit, 736.

7. Chudnovskij A.F. 1976. Teplofizika pochv [Thermophysics of soils] M., Nauka, 352.
8. Turbin M. V. 2013. Issledovaniye nachal'no-krayevoy zadachi dlya modeli dvizheniya zhidkosti Gershel'-Balkli [Investigation of the initial-boundary value problem for the Herschel-Balkley fluid motion model] Bulletin of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics, 2: 246–257.
9. Shergin S. N., Pyatkov S. G. 2014. O nekotorykh klassicheskikh zadachakh dlya psevdoparabolicheskikh uravneniy [On some classes of inverse problems for pseudo-parabolic equations]. Matematicheskiye zametki SVFU, 21(2): 106–116.
10. Yuldashev T. K. 2016. Nelineynoe integro-differentsialnoe uravnenie psevdoparabolicheskogo tipa s nelokalnym integralnym uslovиеm [Nonlinear Integro-Differential Equation of Pseudoparabolic Type With Nonlocal Integral Condition]. Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya 1, Matematika. Fizika [Science Journal of Volgograd state university. Mathematics. Physics] 1(32): 11–23.
11. Yuldashev T. K. 2017. Nelokal'naya krayevaya zadacha dlya neodnorodnogo psevdoparabolicheskogo integrirovaniya s differentsial'nym uravneniyem s vyrozhdennym yadrom [Nonlocal boundary value problem for a nonhomogeneous pseudoparabolic-type integro-differential equation with degenerate kernel] Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya 1, Matematika. Fizika [Science Journal of Volgograd state university. Mathematics. Physics], 1(38): 42–54.
12. Alikhanov A. A. 2015. A new difference scheme for the time fractional diffusion equation. Journal of Computational Physics, 280: 424–438.
13. Lyubanova A. Sh. 2017. The inverse problem for the nonlinear pseudoparabolic equation of filtration type, J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys., 10(1): 4–15.
14. Gao G. H., Sun H. W., Sun Z. Z. 2015. Stability and convergence of finite difference schemes for a class of time-fractional sub-diffusion equations based on certain superconvergence. J. Comput. Phys., 280: 510–528.
15. Cui M. 2013. Convergence analysis of high-order compact alternating direction implicit schemes for the two-dimensional time fractional diffusion equation. Numer. Algorithms, 62: 383–409.
16. Gao G.H., Sun Z.Z., Zhang H. 2014. A new fractional numerical differentiation formula to approximate the Caputo fractional derivative and its applications, J. Comput. Phys. 259: 33–50.
17. Pang H.K., Sun H.W. 2012. Multigrid method for fractional diffusion equations, J. Comput. Phys., 231: 693–703.
18. Calcagni G. 2012. Geometry of Fractional Spaces. Adv. Theor. Math. Phys., 16(2): 549–644.
19. Pimenov V. G., Hendy A. S. 2016. An implicit numerical method for the solution of the fractional advection-diffusion equation with delay. Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN, 22(2): 218–226.
20. Pimenov V. G., Hendy A.S. 2016. Fractional analog of Crank-Nicholson method for the two-sided space fractional partial equation with functional delay // Ural Math. J., 2(1): 48–57.
21. Pimenov V. G. 2018. Numerical methods for fractional advection-diffusion equation with heredity. J. Math. Sci. (N. Y.), 230(5): 737–741.

Получена 28.05.2020

Бештоков Мурат Хамидбиевич – кандидат физико-математических наук, доцент, ведущий научный сотрудник Института прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН
ул. Шортанова, 89А, г. Нальчик, 360000, Россия
E-mail: beshtokov-murat@yandex.ru

THE CRITERION FOR THE UNIQUE SOLVABILITY OF THE DIRICHLET
AND POINCARÉ SPECTRAL PROBLEMS FOR THE MULTIDIMENSIONAL EULER
– DARBOUX – POISSON EQUATION

S. A. Aldashev

(Article submitted by a member of the editorial board V. B. Vasilyev)

STS, Institute of mathematics and mathematical modeling KN MES RK,
Almaty, 050010, Republic of Kazakhstan

E-mail: aldash51@mail.ru

Received May 28, 2020

Abstract. In the cylindrical region of Euclidean space for the multi-dimensional Euler – Darbu – Poisson equation, the spectral problems of Dirichle and Poincare are considered. The solution is sought in the form of decomposition by multidimensional spherical functions. The theorem of existence and uniqueness of the classical solution has been proved. Conditions of unique solvability of the assigned tasks are obtained, which depend significantly on the height of the cylinder.

Key words: Criteria, Spectral Problems, Multidimensional Equation, Cylindrical Domain, Bessel Function.

For citation: Aldashev S. A. 2020. The criterion for the unique solvability of the Dirichlet and Poincare spectral problems for the multidimensional Euler-Darboux-Poisson equation. Applied Mathematics & Physics, 52(2): 139–145.

DOI 10.18413/2687-0959-2020-52-2-139-145.

КРИТЕРИЙ ОДНОЗНАЧНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ СПЕКТРАЛЬНЫХ ЗАДАЧ
ДИРИХЛЕ И ПУАНКАРЕ ДЛЯ МНОГОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА –
ДАРБУ – ПУАССОНА

С. А. Алдашев

(Статья представлена членом редакционной коллегии В. Б. Васильевым)

ГНС, Институт математики и математического моделирования КН МОН РК,
г. Алматы, 050010, Республика Казахстан

E-mail: aldash51@mail.ru

Получена 28 мая 2020

Аннотация. В цилиндрической области евклидова пространства для многомерного уравнения Эйлера – Дарбу – Пуассона рассматриваются спектральные задачи Дирихле и Пуанкаре. Решение ищется в виде разложения по многомерным сферическим функциям. Доказаны теоремы существования и единственности классического решения. Получены условия однозначной разрешимости поставленных задач, которые существенно зависят от высоты цилиндра.

Ключевые слова: критерий, спектральные задачи, многомерное уравнение, цилиндрическая область, функция Бесселя.

Для цитирования: Алдашев С. А. 2020. Критерий однозначной разрешимости спектральных задач Дирихле и Пуанкаре для многомерного уравнения Эйлера – Дарбу – Пуассона. Прикладная математика & Физика. 52(2): 139–145. DOI 10.18413/2687-0959-2020-52-2-139-145.

1. Introduction Two-dimensional spectral problems for hyperbolic equations are extensively studied (see for example [Kalmenov, 1993; Moiseev, 1988; Sabito, 2000; He K. Ch. 2000]), and their multivariate analogues are studied in [Aldashev, 2003; Aldashev, 2005; Aldashev, 2006; Aldashev, 2014]. This is because three or more independent variables have difficulties of a fundamental nature. There is a highly attractive and convenient method of singular integral equations. Applied for two-dimensional problems, it cannot be used in virtue of absence of complete theory of multidimensional singular integral equations. The theory of multidimensional spherical functions, by contrast, is quite fully studied. These functions have important applications in mathematical physics, in theoretical physics, and in the theory of multidimensional singular integral equations. The author proposes that in solving the spectral problems of Dirichle and Poincare

for the multidimensional Euler-Darbu-Poisson equation, the decomposition by spherical functions should be used.

2. Statement of the problem and result. Let Ω_β be the cylindrical region of the Euclidean space E_{m+1} points (x_1, \dots, x_m, t) , bounded by the cylinder $\Gamma = \{(x, t) : |x| = 1\}$, by the planes $t = \beta > 0$ and $t = 0$, of where $|x|$ is a the length of the vector $x = (x_1, \dots, x_m)$. The parts of these surfaces that form the boundary $\partial\Omega_\beta$ of the domain Ω_β , are denoted by $\Gamma_\beta, S_\beta, S_0$ respectively. In the region Ω_β we consider the multidimensional Euler-Darboux-Poisson equation with the spectral real parameter γ

$$\Delta_x u - u_{tt} - \frac{\alpha}{t} u_t = \gamma u, \tag{1}$$

where Δ_x is the Laplacian operator with respect to the variables $x_1, \dots, x_m, m \geq 2, \alpha$ — and a is a real number.

By $u_\alpha(x, t)$ we denote the solution of equation (1) for given α .

As multidimensional Dirichlet and Poincare problems, we consider the following problems.

Problem 1. Find a solution to equation (1) in the region Ω_β from the class $C(\overline{\Omega}_\beta \setminus S_0) \cap C^2(\Omega_\beta)$, satisfying the boundary conditions

$$u_\alpha|_{S_0} = 0, \quad u_\alpha|_{\Gamma_\beta} = 0, \quad u_\alpha|_{S_\beta} = 0, \quad \alpha < 1; \tag{2}$$

$$\frac{u_\alpha}{\ln t}|_{S_0} = 0, \quad u_\alpha|_{\Gamma_\beta} = 0, \quad u_\alpha|_{S_\beta} = 0, \quad \alpha = 1; \tag{3}$$

$$(t^{\alpha-1} u_\alpha)|_S = 0, \quad u_\alpha|_{\Gamma_\beta} = 0, \quad u_\alpha|_{S_\beta} = 0, \quad \alpha > 1. \tag{4}$$

Problem 2. Find a solution to equation (1) in a domain Ω_β from the class $C(\overline{\Omega}_\beta \setminus S_0) \cap C^2(\Omega_\beta)$, satisfying the boundary conditions

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial t}|_{S_0} = 0, \quad u_\alpha|_{\Gamma_\beta} = 0, \quad u_\alpha|_{S_\beta} = 0, \quad \alpha \geq 0; \tag{5}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} t^\alpha (u_\alpha - u_{\alpha,1}) = 0, \quad u_\alpha|_{\Gamma_\beta} = 0, \quad u_\alpha|_{S_\beta} = 0, \quad \alpha < 0, \tag{6}$$

where $u_{\alpha,1}(x, t)$ is the solution of the Cauchy problem for equation (1) with data $u_{\alpha,1}(x, 0) = \tau(x), \frac{\partial}{\partial t} u_{\alpha,1}(x, 0) = 0$.

Further, it is convenient for us to move from the Cartesian coordinates x_1, \dots, x_m, t to spherical $r, \theta_1, \dots, \theta_{m-1}, t, r \geq 0, 0 \leq \theta_1 < 2\pi, 0 \leq \theta_i \leq \pi, i = 2, 3, \dots, m - 1$.

Let $\{Y_{n,m}^k(\theta)\}$ be a system of linearly independent spherical functions of order $n, 1 \leq k \leq k_n, (m - 2)!n!k_n = (n + m - 3)!(2n + m - 2), \theta = (\theta_1, \dots, \theta_{m-1})$.

Then the following result is valid.

Theorem. 1) If $\gamma \leq -\mu_{s,n}^2$, then for all α problems 1 and 2 have only zero solutions.

2) If $\alpha \leq 0$ or $\alpha \geq 2$, then for $\gamma > -\mu_{s,n}^2$ problem 1 has only a trivial solution, if and only if

$$\sin \beta \sqrt{\gamma + \mu_{s,n}^2} \neq 0, \quad s = 1, 2, \dots \tag{7}$$

3) For $0 < \alpha < 2$ and $\gamma > -\mu_{s,n}^2$ problem 1 has only a zero solution if and only if, the condition

$$\cos \beta \sqrt{\gamma + \mu_{s,n}^2} \neq 0, \quad s = 1, 2, \dots \tag{8}$$

4) The solution of Problem 2 for $\gamma > -\mu_{s,n}^2$ for any α is only trivial if and only if relation (8) holds, where $\mu_{s,n}$ are positive zeros of the Bessel functions of the first kind $J_{n+\frac{(m-2)}{2}}(z)$.

We note that for $\alpha = 0$ this theorem was obtained in [Aldashev,2010; Aldashev, 2011].

3. Information of tasks 1 and 2 to two-dimensional problems. In spherical coordinates, the equation (1) has the form

$$u_{rr} + \frac{m-1}{r} u_r - \frac{1}{r^2} \delta u - u_{tt} - \frac{\alpha}{t} u_t = \gamma u, \tag{9}$$

$$\delta \equiv - \sum_{j=1}^{m-1} \frac{1}{g_j \sin^{m-j-1} \theta_j} \frac{\partial}{\partial \theta_j} \left(\sin^{m-j-1} \theta_j \frac{\partial}{\partial \theta_j} \right), \quad g_1 = 1, \quad g_j = (\sin \theta_1 \dots \sin \theta_{j-1})^2, \quad j > 1.$$

It is well known [Mikhlin, 1962], that the spectrum of the operator δ consists of eigenvalues $\lambda_n = n(n + m - 2), n = 0, 1, \dots$, each of which corresponds to k_n orthonormal eigenfunctions $Y_{n,m}^k(\theta)$.

Since the desired solutions to problems 1 and 2 belong to the class $C^2(\Omega_\beta)$, they can be sought in the form of a series

$$u_\alpha(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \bar{u}_{\alpha,n}^k(r, t) Y_{n,m}^k(\theta), \tag{10}$$

where $\bar{u}_{\alpha,n}^k(r, t)$ are functions to be determined.

Substituting (10) into (9), using the orthogonality of the spherical functions $Y_{n,m}^k(\theta)$ [Mikhlin, 1962], we obtain

$$L_\alpha \bar{u}_{\alpha,n}^k = \bar{u}_{\alpha,nrr}^k + \frac{m-1}{r} \bar{u}_{\alpha,nr}^k - \bar{u}_{\alpha,ntt}^k - \frac{\alpha}{t} \bar{u}_{\alpha,nt}^k - \frac{\lambda_n}{r^2} \bar{u}_{\alpha,n}^k - \gamma \bar{u}_{\alpha,n}^k = 0, \quad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 0, 1, \dots,$$

which, using the substitution $\bar{u}_{\alpha,n}^k(r, t) = r^{\frac{(1-m)}{2}} \bar{u}_{\alpha,n}^k(r, t)$ reduces to the equation

$$L_\alpha u_{\alpha,n}^k = u_{\alpha,nrr}^k - u_{\alpha,ntt}^k - \frac{\alpha}{t} u_{\alpha,nt}^k + \frac{\bar{\lambda}_n}{r^2} u_{\alpha,n}^k - \gamma \bar{u}_{\alpha,n}^k = 0, \quad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 0, 1, \dots, \tag{11_\alpha}$$

$$\bar{\lambda}_n = \frac{(m-1)(3-m) - 4\lambda_n}{4}.$$

Further, from the boundary conditions (2)–(6) for the functions $u_{\alpha,n}^k(r, t)$ by virtue of (9), we respectively have

$$u_{\alpha,n}^k(r, 0) = 0, \quad u_{\alpha,n}^k(1, t) = 0, \quad u_{\alpha,n}^k(r, \beta) = 0, \quad \alpha < 1, \quad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 0, 1, \dots, \tag{12}$$

$$\frac{u_{\alpha,n}^k}{\ln t} \Big|_{t=0} = 0, \quad u_{\alpha,n}^k(1, t) = 0, \quad u_{\alpha,n}^k(r, \beta) = 0, \quad \alpha = 1, \quad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 0, 1, \dots, \tag{13}$$

$$(t^{\alpha-1} u_{\alpha,n}^k) \Big|_{t=0} = 0, \quad u_{\alpha,n}^k(1, t) = 0, \quad u_{\alpha,n}^k(r, \beta) = 0, \quad \alpha > 1, \quad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 0, 1, \dots, \tag{14}$$

$$\frac{\partial u_{\alpha,n}^k}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \quad u_{\alpha,n}^k(1, t) = 0, \quad u_{\alpha,n}^k(r, \beta) = 0, \quad \alpha \geq 0, \quad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 0, 1, \dots, \tag{15}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} t^\alpha (u_{\alpha,n}^k - u_{\alpha,n}^{k,1}) = 0, \quad u_{\alpha,n}^k(1, t) = 0, \quad u_{\alpha,n}^k(r, \beta) = 0, \quad \alpha < 0, \quad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 0, 1, \dots \tag{16}$$

In this way, problems 1 and 2 are reduced to two-dimensional spectral Dirichlet and Poincare problems for equation (11_α). The solution to these problems will be studied in sections 4 and 5.

Along with equation (11_α) we consider the equation

$$L_0 u_{0,n}^k \equiv u_{0,nrr}^k - u_{0,ntt}^k + \frac{\bar{\lambda}_n}{r^2} u_{0,n}^k - \gamma \bar{u}_{0,n}^k = 0, \tag{11_0}$$

which, using the change of variables $\xi = \frac{r+t}{2}, \eta = \frac{r-t}{2}$ reduces to the equation

$$M u_{0,n}^k \equiv u_{0,n\xi\eta}^k + \frac{\bar{\lambda}_n}{(\xi + \eta)^2} u_{0,n}^k = \gamma \bar{u}_{0,n}^k. \tag{17}$$

Solution of the Cauchy problem for (17) with data'

$$u_{0,n}^k(\xi, \xi) = \tau_n^k(\xi), \quad \left(\frac{\partial u_{0,n}^k}{\partial \xi} - \frac{\partial u_{0,n}^k}{\partial \eta} \right) \Big|_{\xi=\eta} = \nu_n^k(\xi), \quad 0 \leq \xi \leq \frac{1}{2}$$

has the form [Aldashev, 1991].

$$u_{0,n}^k(\xi, \eta) = \frac{1}{2} \tau_n^k(\eta) R(\eta, \eta; \xi, \eta) + \frac{1}{2} \tau_n^k(\xi) R(\xi, \xi; \xi, \eta) + \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\eta}^{\xi} [\nu_n^k(\xi_1) R(\xi_1, \xi_1; \xi, \eta) - \tau_n^k(\xi_1) \frac{\partial}{\partial N} R(\xi_1, \eta_1; \xi, \eta) \Big|_{\xi_1=\eta_1}] d\xi_1 + \gamma \int_{\frac{1}{2}}^{\xi} \int_0^{\eta} u_{0,n}^k(\xi_1, \eta_1) R(\xi_1, \eta_1; \xi, \eta) d\xi_1 d\eta_1, \tag{18}$$

where $R(\xi_1, \eta_1; \xi, \eta) = P_\mu \left[\frac{(\xi_1 - \eta_1)(\xi - \eta) + 2(\xi\eta + \xi_1\eta_1)}{(\xi_1 + \eta_1)(\xi + \eta)} \right] = P_\mu(z)$ is the Riemann function for the equation $M u_{0,n}^k = 0$ [Copson, 1958], $P_\mu(z)$ is the Legendre function, $\mu = n + \frac{(m-3)}{2}$,

$$\frac{\partial}{\partial N} \Big|_{\xi=\eta} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \Big|_{\xi=\eta}.$$

4. Functional relationship between solutions of the Cauchy problem for equations (11_α) and (11₀). First, we present some properties of the operator $L_α$, that are necessary for further studies.

1⁰. If $u_α$ is a solution of the equation $L_α u = 0$, then the function

$$u_{2-α} = t^{α-1} u_α \tag{19}$$

is a solution of the equation $L_{2-α} u = 0$.

2⁰. If $u_α$ is a solution of the equation $L_α u = 0$, then the function

$$\frac{1}{t} \frac{\partial u_α}{\partial t} = u_{α+2} \tag{20}$$

is a solution of the equation $L_{α+2} u = 0$.

3⁰. The operator $L_α$ has the property

$$L_α u_α = t^{1-α} L_{2-α} (t^{α-1} u_α). \tag{21}$$

These properties are established in the same way as they were proved ([Weinstein, 1954]) for the equation

$$\Delta_x u - u_{tt} - \frac{\alpha}{t} u_t = 0. \tag{22}$$

From equality (19) we have $u_{2-α-2p} = t^{α+2p-1} u_{α+2p}$ to which, applying formula (20) p times, and then (19), we obtain

$$u_{2-α} = \left(\frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^p (t^{α+2p-1} u_{α+2p}). \tag{23}$$

Let $p \geq 0, q \geq 0$ be the smallest integers satisfying the inequalities $α + 2p \geq m - 1, 2 - α + 2q \geq m - 1$.

Proposition 1. If $u_{0,n}^{k,2}(r, t)$ is a solution to the Cauchy problem for equation (11₀) satisfying the condition

$$u_{0,n}^{k,2}(r, 0) = 0, \frac{\partial}{\partial t} u_{0,n}^{k,2}(r, 0) = \nu_n^k(r), \tag{24}$$

then function

$$u_{\alpha,n}^{k,2}(r, t) = \gamma_{-\alpha} t^{-\alpha} \int_0^1 u_{0,n}^{k,2}(r, \xi t) \xi (1 - \xi^2)^{-\frac{\alpha}{2}-1} d\xi \equiv \gamma_{-\alpha} \Gamma\left(-\frac{\alpha}{2}\right) D_{0t^2}^{\frac{\alpha}{2}} u_{0,n}^{k,2}(r, t), \tag{25}$$

for $\alpha < 0$ it will be a solution of the equation (11_α), satisfying the condition

$$u_{\alpha,n}^{k,2}(r, 0) = 0, \lim_{t \rightarrow 0} t^\alpha \frac{\partial}{\partial t} u_{\alpha,n}^{k,2}(r, t) = \nu_n^k(r). \tag{26}$$

If $0 < \alpha < 1$, then the function

$$\begin{aligned} u_{\alpha,n}^{k,2}(r, t) &= \gamma_{2-k+2q} \left(\frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^q \left[t^{1-k+2q} \int_0^1 u_{0,n}^{k,1}(r, \xi t) (1 - \xi^2)^{q-\frac{\alpha}{2}} d\xi \right] \equiv \\ &\equiv \gamma_{2-\alpha+2q} 2^{q-1} \Gamma(q_1 - \frac{\alpha}{2} + 1) D_{0t^2}^{\frac{\alpha}{2}-1} \left[\frac{u_{0,n}^{k,1}(r, t)}{t} \right] \end{aligned} \tag{27}$$

is a solution of the equation (11_α) with the initial data (26), where $\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{\alpha}{2}) \gamma_\alpha = 2 \Gamma(\frac{\alpha+1}{2})$, $\Gamma(z)$ is the gamma function, $D_{0t^2}^\alpha$ is the Riemann-Liouville operator [Nakhushev, 2006], and $u_{0,n}^{k,1}(r, t)$ is a solution of equation (11₀) with the initial conditions

$$u_{0,n}^{k,1}(r, 0) = \frac{\nu_n^k(r)}{(1-\alpha)(3-\alpha)\dots(2q+1-\alpha)}, \frac{\partial}{\partial t} u_{0,n}^{k,1}(r, 0) = 0. \tag{28'}$$

Proposition 2. If $u_{0,n}^{k,1}(r, t)$ is a solution to the Cauchy problem for equation (11₀) satisfying the condition

$$u_{0,n}^{k,1}(r, 0) = \tau_n^k(r), \frac{\partial}{\partial t} u_{0,n}^{k,1}(r, 0) = 0, \tag{28}$$

then function

$$u_{\alpha,n}^{k,1}(r, t) = \gamma_\alpha \int_0^1 u_{0,n}^{k,1}(r, \xi t) (1 - \xi^2)^{\frac{\alpha}{2}-1} d\xi \equiv 2^{-1} \gamma_\alpha \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) t^{1-\alpha} D_{0t^2}^{-\frac{\alpha}{2}} \left[\frac{u_{0,n}^{k,1}(r, t)}{t} \right], \tag{29}$$

for $\alpha > 0$ is a solution of equation (11_α) , satisfying condition (28).

Proposition 3. If $u_{0,n}^{k,1}(r, t)$ is a solution to the Cauchy problem for equation (11_0) satisfying condition (28), then the function

$$u_{1,n}^{k,1}(r, t) = \int_0^1 u_{0,n}^{k,1}(r, \xi t) (1 - \xi^2)^{-\frac{1}{2}} \ln[t(1 - \xi^2)] d\xi \tag{30}$$

is a solution to the problem for the equation $L_1 u_{1,n}^k = 0$ with initial data

$$\frac{u_{1,n}^{k,1}}{\ln t} \Big|_{t=0} = \tau_n^k(r). \tag{31}$$

The evidence for the above statements is established similarly how they were proved for equation (22) and multidimensional wave equations $\Delta_x u - u_{tt} = 0$ [Aldashev, 1991; Aldashev, 1976; Tersenov, 1973; Tersenov, 1982].

We give some corollaries from Propositions 2, 3. We first consider the case $\alpha < 0$, $\alpha \neq -(2r + 1)$, $r = 0, 1, \dots$. If $u_{0,n}^{k,1}(r, t)$ is the solution of the Cauchy problem for (11_0) with data

$$u_{0,n}^{k,1}(r, 0) = \frac{\tau_n^k(r)}{(\alpha - 1) \dots (\alpha + 2p - 1)}, \quad \frac{\partial}{\partial t} u_{0,n}^{k,1}(r, 0) = 0, \tag{32}$$

then it follows from statement 2 that

$$u_{\alpha+2p,n}^{k,1}(r, t) = \gamma_{\alpha+2p} \int_0^1 u_{0,n}^{k,1}(r, \xi t) (1 - \xi^2)^{\frac{\alpha}{2} + p - 1} d\xi$$

is a solution of the equation $L_{\alpha+2p} u = 0$, satisfying the initial condition (32).

Then from relations (23) and (19) it follows that the function

$$u_{\alpha,n}^{k,1}(r, t) = t^{1-\alpha} \left(\frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^p \left(t^{\alpha+2p-1} u_{\alpha+2p,n}^{k,1} \right) \equiv \gamma_{k+2p} 2^{p-1} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2} + p\right) t^{1-\alpha} D_{0t^2}^{-\frac{\alpha}{2}} \left[\frac{u_{0,n}^{k,1}(r, t)}{t} \right] \tag{33}$$

is a solution to equation (11_α) and satisfies condition (28).

Now let $\alpha = -(2r + 1)$. If $u_{0,n}^{k,1}(r, t)$ is a solution to the Cauchy problem for (11_0) with data (28), then it is easy to obtain from (19), (23) and from Proposition 3 that

$$u_{-(2r+1),n}^{k,1}(r, t) = t^{2(r+1)} \left(\frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{r+1} \left[\int_0^1 u_{0,n}^{k,1}(r, \xi t) (1 - \xi^2)^{-\frac{1}{2}} \ln(t(1 - \xi^2)) d\xi \right] \tag{34}$$

is a solution to the Cauchy problem for (11_α) , satisfying the condition (28).

Using [Nakhushev, 2000] the relation (34) can be written as

$$u_{-(2r+1),n}^{k,1}(r, t) = \frac{a}{2} t^{2(r+1)} D_{0t^2}^{r+\frac{1}{2}} \left[\frac{u_{0,n}^{k,1}(r, t)}{t} \right], \quad a = \frac{1}{2} \Gamma'(1) - \frac{\Gamma'(\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}} - \ln t. \tag{35}$$

5. Proof of the theorem for problem 1. 1) Case $\alpha < 1$. Given formulas (25) and (27), we reduce problem (11_α) , (12) to the Dirichlet problem for (11_0) with data

$$u_{\alpha,n}^{k,2}(r, 0) = 0, \quad u_{\alpha,n}^{k,2}(1, t) = 0, \quad u_{\alpha,n}^{k,2}(r, \beta) = 0, \quad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 0, 1, \dots, \tag{36}$$

for $\alpha \leq 0$ and to the Poincare problem for equation (11_0) , with the condition

$$\frac{\partial}{\partial t} u_{\alpha,n}^{k,2}(r, 0) = 0, \quad u_{\alpha,n}^{k,2}(1, t) = 0, \quad u_{\alpha,n}^{k,2}(r, \beta) = 0, \quad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 0, 1, \dots, \tag{37}$$

for $0 < \alpha < 1$.

The following are shown in [9, 10]: 1) If $\gamma \leq -\mu_{s,n}^2$ then problems (11_0) , (36) and (11_0) , (37) have only zero solutions; 2) For $\gamma > -\mu_{s,n}^2$ problem (11_0) , (36) has only a trivial solution if and only if the condition (7) is satisfied; 3) For $\gamma > -\mu_{s,n}^2$ problem (11_0) , (37) has only a zero solution if and only if relation (8) holds.

Further, using Statements 1-3, we establish similar results for the problem (11_α) , (12).

2) Case $\alpha = 1$. The solution to problem (11 $_{\alpha}$), (13) will be sought in the form

$$u_{1,n}^k(r, t) = u_{1,n}^{k,1}(r, t) + u_{1,n}^{k,2}(r, t), \tag{38}$$

where $u_{1,n}^{k,1}(r, t)$ is solution of the equation (11 $_1$), with data $\left. \frac{u_{1,n}^{k,1}}{\ln t} \right|_{t=0} = 0$, and $u_{1,n}^{k,2}(r, t)$ is solution of the Poincare problem for (11 $_1$) with the condition

$$\frac{\partial}{\partial t} u_{1,n}^{k,2}(r, 0) = 0, u_{1,n}^{k,2}(1, t) = -u_{1,n}^{k,1}(1, t), u_{1,n}^{k,2}(r, \beta) = -u_{1,n}^{k,1}(r, \beta), k = \overline{1, k_n}, n = 0, 1, \dots \tag{39}$$

By virtue of (30), (18) of $u_{1,n}^{k,1}(r, t) \equiv 0$. Further, using formula (29), we reduce problem (11 $_1$), (39) to the Poincare problem (11 $_0$), (37).

Using formulas (21), (19) problem (11 $_{\alpha}$), (14) is reduced to the case $\alpha < 1$. studied.

Thus, it follows from (10) that Theorem 1 is valid for Problem 1.

6. Proof of Theorem 1 for Problem 2. Now we consider Problem 2, which is reduced to problems (11 $_{\alpha}$), (15) and (11 $_{\alpha}$), (16).

If $\alpha \geq 0$, then it follows from (29) that problem (11 $_{\alpha}$), (15) reduces to the Poincare problem for equation (11 $_0$) with data (37).

For $\alpha < 0$, $\alpha \neq -(2r + 1)$, $r = 0, 1, \dots$ we will look for a solution to problem (11 $_{\alpha}$), (16) in the form (38), where $u_{\alpha,n}^{k,2}(r, t)$ is a solution to the Cauchy problem for (11 $_{\alpha}$) with the condition

$$u_{\alpha,n}^{k,2}(r, 0) = 0, \lim_{t \rightarrow 0} t^{\alpha} \frac{\partial}{\partial t} u_{\alpha,n}^{k,2}(r, t) = 0, \tag{40}$$

and $u_{\alpha,n}^{k,1}(r, t)$ is solution of the Poincare problem for (11 $_{\alpha}$) with condition (39).

Problem (11 $_{\alpha}$), (40) by virtue of formula (25) reduces to the homogeneous Cauchy problem for (11 $_0$) with data $u_{0,n}^{k,2}(r, 0) = 0, \frac{\partial}{\partial t} u_{0,n}^{k,2}(r, t) = 0$, which has the trivial solution that follows from (18).

Problem (11 $_{\alpha}$), (39) by virtue of (33) is reduced to Poincare problem (11 $_0$), (37).

Further, let $\alpha = -(2r + 1)$. We look for a solution to problem (11 $_{\alpha}$), (16) in the form (38), where $u_{\alpha,n}^{k,2}(r, t)$ is the solution to the Cauchy problem (11 $_{\alpha}$), (40), and $u_{\alpha,n}^{k,1}(r, t)$ is solution to the Poincare problem for (11 $_{\alpha}$) with the condition (39).

Since $u_{\alpha,n}^{k,2}(r, t) \equiv 0$, as shown earlier, by virtue of (35) problem (11 $_{\alpha}$), (39) reduces to the Poincare problem (11 $_0$), (37).

Therefore, the validity of theorem 1 follows from (10) and it is proved for problem 2.

References

1. Aldashev S. A. 2003. Spectral Darboux-Protter problems for a class of multidimensional hyperbolic equations. Ukr. Mat. Zh., 55(1): 100–108 (in Russian).
2. Aldashev S. A. 2005. Criterion for the existence of eigenfunctions of the Darboux-Protter spectral problem for degenerate multidimensional hyperbolic equations. Diff. equat., 41I(6): 795–801 (in Russian).
3. Aldashev S. A. 2006. Criterion for the existence of eigenfunctions of Darboux-Protter spectral problems for the multidimensional Euler-Darboux-Poisson equation. Izv.vuzov.Matem., 2: 3–10 (in Russian).
4. Aldashev S. A. 2014. Criterion for unambiguous solvability of the Dirichlet spectral problem in a cylindrical domain for multidimensional hyperbolic equations with a wave operator. Samara., Vestnik SamGTU, ser. fiz-mat sciences, 3(36): 21–30 (in Russian).
5. Aldashev S. A. 2010. Criterion of volterrity of the Dirichlet spectral problem in a cylindrical domain for a multidimensional wave equation. Almaty., Izvestiya NAN RK, ser.fiz-mat. sciences, 1(269): 3–5 (in Russian).
6. Aldashev S. A. 2011. Criterion of unambiguous solvability of the Poincare spectral problem in a cylindrical domain for a multidimensional wave equation. Materials of the I-international conference of young scientists «Math. modeling of fractal processes, related problems of analysis and computer science». Nalchik., Institute PMA KBSC Russian Academy of Sciences, 33–39 (in Russian).
7. Aldashev S. A. 1991. Boundary value problems for multidimensional hyperbolic and mixed equations, Almaty., Gylym, 170 (in Russian).

8. Aldashev S. A. 1976. On some boundary value problems for a class of singular partial differential equations. *Differents.equations*, 12(6): 3–14 (in Russian).
9. Kalmenov T. Sh. 1993. Boundary value problems for linear partial differential equations of hyperbolic type *Shymkent.*, Gylym, 32 (in Russian).
10. Copson E.T. 1958. On the Riemann-Green function. *J.Rath Mech and Anal.*, 1: 324–348.
11. Mikhlin S. G. 1962. *Multidimensional singular integrals and integral equations*, M., Fizmatgiz, 254 (in Russian).
12. Moiseev E. N. 1988. *Equation of mixed type with spectral parameters* M., MGU, 150 (in Russian).
13. Nakhushev A. M. 2006. *Problems with displacement for partial differential equations*, M., Nauka, 287 (in Russian).
14. Nakhushev A. M., 2000. *The Elements of fractional calculus and their applications*, Nalchik., KBSC RAN, 298 (in Russian).
15. Sabitov K. B., Piyasov R. R. 2000. On the incorrectness of boundary value problems for a class of hyperbolic equations. *Izv.vuzov.Math.*, 5.: 59–60 (in Russian).
16. Tersenov S. A. 1973. *Introduction to the theory of equations degenerating on the boundary*, Novosibirsk., NGU, 144 (in Russian).
17. Tersenov S. A. 1982. *Introduction to the theory of parabolic type equations with a changing direction of time*, Novosibirsk., IM SOAN USSR, 167 (in Russian).
18. He K. Ch. 2000. On eigenfunctions of homogeneous boundary value problems for an elliptic equation with Bessel operators. *Non-classical equations of mathematical physics*. Novosibirsk. IM SO RAN, 128–135 (in Russian).
19. Weinstein A. 1954. On the wave equation and the equation of Euler-Poisson. *The Fifth symposium in applied Math.* MC Graw-Hill, New York, 137–147.

Получена 28.05.2020

Алдашев Серик Аймурзаевич – доктор физико-математических наук, профессор ГИС института математики и математического моделирования КН МОН РК,
ул. Пушкина, 165, г. Алматы, 050010, Республика Казахстан
E-mail: aldash51@mail.ru

О СЕЧЕНИЯХ ПРОИЗВОДЯЩИХ РЯДОВ В ЗАДАЧАХ
О РЕШЕТОЧНЫХ ПУТЯХ

С. С. Ахтамова, В. Ю. Гришунов, А. П. Ляпин, С. А. Тихомиров

(Статья представлена членом редакционной коллегии С. М. Ситником)

Лесосибирский педагогический институт – филиал Сибирского федерального университета,
г. Лесосибирск, 662544, Россия

ООО «Интермедиа»,
г. Санкт-Петербург, 191167, Россия

Сибирский федеральный университет,
г. Красноярск, 660041, Россия

Ярославский государственный педагогический университет им. К. Д. Ушинского,
г. Ярославль, 150000, Россия

E-mail: ahtamova-ss@mail.ru; vitaliqmetaliq@gmail.com; aplyapin@sfu-kras.ru; satikhomirov@mail.ru

Аннотация. В данной работе получена рекуррентная формула для сечений производящих рядов числа путей на целочисленной решетке и доказано, что сечения производящей функции для решеточных путей являются рациональными функциями (аналог теоремы Муавра).

Ключевые слова: разностные уравнения, решеточные пути, производящая функция, сечение.

Для цитирования: Ахтамова С. С., Гришунов В. Ю., Ляпин А. П., Тихомиров С. А., 2020. О сечениях производящих рядов в задачах о решеточных путях. Прикладная математика & Физика, 52(2): 146–151. DOI 10.18413/2687-0959-2020-52-2-146-151.

ON SECTIONS OF GENERATING SERIES IN LATTICE PATH PROBLEMS

S. S. Akhtamova, V. Yu. Grishunov, A. P. Lyapin, S. A. Tikhomirov

(Article submitted by a member of the editorial board C. M. Sitnik)

Lesosibirskij Pedagogical Institute – branch of Siberian Federal University,
Lesosibirsk, 662544, Russia

LLC «Intermedia»,
St. Petersburg, 191167, Russia

Siberian Federal University,
Krasnoyarsk, 660041, Russia

Yaroslavl State Pedagogical University named after K. D. Ushinsky,
Yaroslavl, 150000, Russia

E-mail: ahtamova-ss@mail.ru; vitaliqmetaliq@gmail.com; aplyapin@sfu-kras.ru; satikhomirov@mail.ru

Received June 10, 2020

Abstract. In this paper a recurrence formula for the sections of the generating series of the number of paths on an integer lattice is obtained and it is proved that the sections of the generating function for the lattice paths are rational functions (an analogue of the Moivre theorem).

Key words: difference equations, lattice paths, generating function, section

For citation: Akhtamova S. S., Grishunov V. Y., Lyapin A. P., Tikhomirov S. A. 2020. On Sections Of Generating Series In Lattice Path Problems. Applied Mathematics & Physics, 52(2): 146–151 (in Russian). DOI 10.18413/2687-0959-2020-52-2-146-151.

1. Введение. В перечислительном комбинаторном анализе известна задача о перечислении решёточных путей: для набора векторов $\Delta = \{\alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^N\} \subset \mathbb{Z}^n$, требуется вычислить количество способов, которыми можно прийти из начала координат в точку $x \in \mathbb{Z}^n$, используя только шаги из набора Δ . К числу известных путей на целочисленной решетке можно отнести пути Дика, Моцкина и Шредера (см. [Bousquet-Mélou, Petkovšek, 2000]). Отметим, что пути Дика связаны как со

словами Дика, так и с диаграммами Юнга, деревьями и другими объектами перечислительного комбинаторного анализа (см. [Стенли, 2005], [Lyapin, Chandragiri, 2019]).

Если обозначить искомое число путей через $f(x)$, то известно (см. [6]), что $f(x)$ удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$f(x) - f(x - \alpha^1) - \dots - f(x - \alpha^N) = 0, x \in \mathbb{Z}^n. \quad (1)$$

Мощным средством исследования свойств функции $f(x)$ являются производящие функции (см. [Стенли, 1990]), то есть функции вида

$$F(z) = \sum_{x \in K} f(x)z^x, \quad (2)$$

которые позволяют эффективно использовать методы комплексного анализа для исследования свойств функции $f(x)$.

Абрахам Муавр в 1722 году доказал, что в *одномерном случае* степенной ряд $F(z)$ представляет собой рациональную функцию тогда и только тогда, когда его коэффициенты удовлетворяют рекуррентному соотношению (линейному разностному уравнению) с постоянными коэффициентами (см. [Moivre, 1724]). А именно, коэффициенты разложения в степенной ряд рациональной функции

$$F(z) = \frac{1}{c_k z^k + c_{k-1} z^{k-1} + \dots + c_0} = \sum_{x=0}^{\infty} f(x)z^x, \quad (3)$$

где $c_i \in \mathbb{C}, i = 0, \dots, k$ – некоторые постоянные, удовлетворяют рекуррентному соотношению (разностному уравнению) для последовательности $\{f(x)\}_{x=0}^{\infty}$, все элементы которой, начиная с k -го, вычисляются через $k - 1$ предыдущих:

$$c_k f(x - k) + c_{k-1} f(x - k + 1) + \dots + c_0 f(x) = 0, x \geq k. \quad (4)$$

Доказательство этого факта можно найти в [1], в главе, посвященной рациональным производящим функциям.

В общем случае, значения функции

$$f(x) = \varphi(x), x = 0, \dots, k - 1 \quad (5)$$

задаются произвольно, а задача (4)–(5) называется *задачей Коши* для разностного уравнения (4), а (5) – функцией начальных данных.

В *многомерном случае* ситуация гораздо сложнее и связана со свойствами и структурой конуса K и, как следствие, различными видами разностных уравнений, описывающих число путей на целочисленной решетке. Отметим работу [Levy, Lessman, 1992], в которой для двумерного случая рассмотрены способы построения общих решений для некоторых видов разностных уравнений. В монографии [Даджион, Мерсеро, 1988] двумерные разностные уравнения использовались в теории цифровой обработки многомерных сигналов для конструирования цифровых рекурсивных фильтров. В случае двух переменных задача об устойчивости цифрового рекурсивного фильтра решена в работе [Tsih, 1993]. В статье [Bousquet-Mélou, Petkovšek, 2000] многомерные разностные уравнения изучались с точки зрения применения к задачам перечислительного комбинаторного анализа. В ней сформулирована задача Коши для многомерного линейного разностного уравнения и доказана теорема существования и единственности решения этой задачи. В работе [Leinartas, 2007] приведена формула для решения задачи Коши с использованием понятия фундаментального решения. Ричард Стенли выделяет следующие классы производящих функций: *D-финитные* \supset *алгебраические* \supset *рациональные*, и рассматривает последние как «наиболее полезный» класс производящих функций (см. [Стенли, 1990]). В работе [Некрасова, 2014] исследуются производящие функции решений разностного уравнения в рациональных конусах целочисленной решетки. Для рядов Лорана с носителями в таких конусах определено понятие D-финитности и приведено достаточное условие, при котором из рациональности (алгебраичности, D-финитности) производящей функции начальных данных задачи Коши следует рациональность (алгебраичность, D-финитность) производящей функции решения. В данной работе доказан многомерный аналог теоремы Муавра (теорема 1), получена рекуррентная формула для сечений производящего ряда $F(z)$ и доказано, что сечения производящего ряда для решеточных путей являются рациональными функциями (следствие из теоремы 1).

2. Основные результаты. Рассмотрим набор векторов $\Delta = \{\alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^N\} \subset \mathbb{Z}_{\geq}^n$ и рассмотрим конус

$$K = \{\alpha^1 x_1 + \dots + \alpha^N x_N, x_1, \dots, x_N \in \mathbb{Z}_{\geq}\} \subset \mathbb{Z}_{\geq}^n, \quad (6)$$

натянутый на вектора из набора Δ и лежащий в неотрицательном октанте. Известно (см., например, [Bousquet-Mélou, Petkovšek, 2000]), что производящий ряд для числа решеточных путей из начала координат в точку $x \in \mathbb{Z}_{\geq}^n$ сходится и имеет вид

$$F(z) = \frac{1}{1 - z_1^{\alpha_1^1} \dots z_n^{\alpha_n^1} - \dots - z_1^{\alpha_1^N} \dots z_n^{\alpha_n^N}}. \quad (7)$$

Определим сечение $\hat{F}^k(\hat{z}), k = 0, 1, 2, \dots$ производящего ряда $F(z)$ для числа решёточных путей с шагами из Δ следующим образом

$$\hat{F}^k(\hat{z}) = \sum_{\hat{z} \in \mathbb{Z}_{\geq}^{n-1}} f(k, \hat{x}) \hat{z}^{\hat{x}}, \quad (8)$$

где $\hat{z} = (z_2, z_3, \dots, z_n), \hat{x} = (x_2, x_3, \dots, x_n)$ (см. [Некрасова Т.И. 2014.], [Lipshitz, 1989]). В таких обозначениях будет иметь место запись $z = (z_1, \hat{z})$ и $x = (x_1, \hat{x})$. Заметим, что $\hat{F}^0(\hat{z}) = F(0, \hat{z})$, а сами сечения представляют коэффициенты разложения функции $F(z)$ в степенной ряд по переменной z_1 . Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Сечения $\hat{F}^k(\hat{z})$ производящего ряда $F(z_1, \hat{z})$ для решёточных путей с шагами из Δ удовлетворяют рекуррентному соотношению*

$$c_k(\hat{z})\hat{F}^{n-k}(\hat{z}) + c_{k-1}(\hat{z})\hat{F}^{n-k+1}(\hat{z}) + \dots + c_0(\hat{z})\hat{F}^n(\hat{z}) = 0, \quad (9)$$

с коэффициентами $c_l(\hat{z}) = \sum_{\alpha: \alpha_1^i=l} z_2^{\alpha_2^i} \dots z_n^{\alpha_n^i}, l = 0, \dots, k$.

Доказательство. Сгруппируем слагаемые в знаменателе производящей функции (7) по степеням z_1 и разложим ее в степенной ряд по z_1 :

$$F(z) = \frac{1}{c_k(\hat{z})z_1^k + c_{k-1}(\hat{z})z_1^{k-1} + \dots + c_0(\hat{z})z_1^0} = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}^n(\hat{z})z_1^n,$$

где $c_l(\hat{z}) = \sum_{\alpha: \alpha_1^i=l} z_2^{\alpha_2^i} \dots z_n^{\alpha_n^i}, l = 0, \dots, k$.

Домножим обе части этого равенства на знаменатель

$$(c_k(\hat{z})z_1^k + c_{k-1}(\hat{z})z_1^{k-1} + \dots + c_0(\hat{z})z_1^0) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}^n(\hat{z})z_1^n = 1$$

и преобразуем левую часть

$$\begin{aligned} & (c_k(\hat{z})z_1^k + c_{k-1}(\hat{z})z_1^{k-1} + \dots + c_0(\hat{z})) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}^n(\hat{z})z_1^n = \\ & = \sum_{n=k}^{\infty} \left(c_k(\hat{z})\hat{F}^{n-k}(\hat{z}) + c_{k-1}(\hat{z})\hat{F}^{n-k+1}(\hat{z}) + \dots + c_0(\hat{z})\hat{F}^n(\hat{z}) \right) \cdot z_1^n + \\ & \quad + \left(c_{k-1}(\hat{z})\hat{F}^0(\hat{z}) + c_{k-2}(\hat{z})\hat{F}^1(\hat{z}) + \dots + c_0\hat{F}^{k-1}(\hat{z}) \right) \cdot z_1^{k-1} + \\ & \quad + \left(c_{k-2}(\hat{z})\hat{F}^0(\hat{z}) + \dots + c_0(\hat{z})\hat{F}^{k-2}(\hat{z}) \right) \cdot z_1^{k-2} + \dots + \\ & \quad + \left(c_1(\hat{z})\hat{F}^0(\hat{z}) + c_0(\hat{z})\hat{F}^1(\hat{z}) \right) \cdot z_1 + c_0(\hat{z})\hat{F}^0(\hat{z}), \end{aligned}$$

затем, приравняв выражения при одинаковых степенях z_1 , получим, что

$$\begin{cases} c_0(\hat{z})\hat{F}^0(\hat{z}) = 1 \\ c_1(\hat{z})\hat{F}^0(\hat{z}) + c_0(\hat{z})\hat{F}^1(\hat{z}) = 0 \\ \dots \\ c_{k-2}(\hat{z})\hat{F}^0(\hat{z}) + \dots + c_0(\hat{z})\hat{F}^{k-2}(\hat{z}) = 0 \\ c_{k-1}(\hat{z})\hat{F}^0(\hat{z}) + c_{k-2}(\hat{z})\hat{F}^1(\hat{z}) + \dots + c_0\hat{F}^{k-1}(\hat{z}) = 0 \end{cases} \quad (10)$$

и для всех $n \geq k$ справедливо искомое рекуррентное соотношение:

$$c_k(\hat{z})\hat{F}^{n-k}(\hat{z}) + c_{k-1}(\hat{z})\hat{F}^{n-k+1}(\hat{z}) + \dots + c_0(\hat{z})\hat{F}^n(\hat{z}) = 0.$$

Для доказательства обратного утверждения умножим левую часть данного равенства на z^k и просуммируем по всем $n \geq k$. В итоге получим производящую функцию для решеточных путей. Теорема доказана.

Замечание 1. Отметим, что данная теорема справедлива для произвольной переменной z_j , где $j = 1, \dots, n$.

Замечание 2. По аналогии с задачей Коши (4)–(5) для линейного разностного уравнения, можно сформулировать задачу Коши для уравнения (9), функция начальных данных $\hat{F}^k(\hat{z}) = \hat{\Phi}^k(\hat{z})$, $k = 0, 1, \dots, n - 1$ которой может быть найдена из системы (10).

Замечание 3. Сечения производящего ряда $F(z)$ имеют и комбинаторный смысл, а именно функция $\hat{F}^k(\hat{z})$ является производящей функцией для числа путей с шагами из набора Δ , выходящих из начала координат и оканчивающихся на гиперплоскости $x_1 = k$.

Из теоремы 1 автоматически получается аналог теоремы Муавра для сечений производящих рядов числа путей на целочисленной решетке.

Следствие. Сечения $\hat{F}^k(\hat{z})$ производящего ряда $F(z_1, \hat{z})$ для решёточных путей с шагами из набора Δ принадлежат к классу рациональных функций.

3. Примеры. Пример 1. Рассмотрим набор векторов

$$\Delta = \{(1, 0, 1), (2, 2, 2), (1, 2, 3), (3, 1, 2), (3, 2, 1), (2, 1, 2)\}.$$

Производящая функция числа путей на целочисленной решетке будет иметь вид

$$F(z_1, z_2, z_3) = \frac{1}{1 - z_1(z_3 + z_2^2 z_3^3) - z_1^2(z_2^2 z_3^2 + z_2 z_3^2) - z_1^3(z_2 z_3^2 + z_2^2 z_3)},$$

причем в обозначениях из теоремы $c_0(z_2, z_3) = 1$, $c_1(z_2, z_3) = -z_3 - z_2^2 z_3^3$, $c_2(z_2, z_3) = -z_2^2 z_3^2 - z_2 z_3^2$, $c_3(z_2, z_3) = -z_2 z_3^2 - z_2^2 z_3$. Разностное уравнение имеет вид

$$F^n(z_2, z_3) - (z_3 + z_2^2 z_3^3)F^{n-1}(z_2, z_3) - (z_2^2 z_3^2 + z_2 z_3^2)F^{n-2}(z_2, z_3) - (z_2 z_3^2 + z_2^2 z_3)F^{n-3}(z_2, z_3) = 0.$$

Пример 2. Отметим связь сечений производящих рядов с многочленами Фибоначчи и Пелля (см. [Luzon, Magon, 2010]).

Рассмотрим пути на целочисленной решетке, образованные набором шагов $\Delta = \{(1, 1), (2, 0)\}$. Функция $f(x_1, x_2)$ числа таких путей из начала координат в точку (x_1, x_2) удовлетворяет разностному уравнению

$$f(x_1, x_2) - f(x_1 - 1, x_2 - 1) - f(x_1 - 2, x_2) = 0,$$

а ее производящий ряд сходится и имеет вид $F(z_1, z_2) = (1 - z_1 z_2 - z_1^2)^{-1}$. Обозначим $F^n(z_2) = \sum_{x_2 \geq 0} f(n, x_2) z_2^{x_2}$ – сечения производящего ряда. По теореме 1 такие сечения удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$F^n(z_2) - z_2 F^{n-1}(z_2) - F^{n-2}(z_2) = 0$$

с начальными данными $F^0(z_2) = 1$, $F^1(z_2) = z_2$. Продолжая вычисления, получим известную последовательность многочленов Фибоначчи:

$$\begin{aligned} F^2(z_2) &= z_2^2 + 1, \\ F^3(z_2) &= z_2^3 + 2z_2, \\ F^4(z_2) &= z_2^4 + 3z_2^2 + 1, \\ F^5(z_2) &= z_2^5 + 4z_2^3 + 3z_2, \\ &\dots \end{aligned}$$

Рассмотрим пути на целочисленной решетке, образованные набором шагов $\Delta = \{(1, 1), (1, 1)(2, 0)\}$, для удобства будем считать, что шаг $(1, 1)$ имеет кратность 2 или что существует два таких шага разного цвета. Функция $f(x_1, x_2)$ числа таких путей из начала координат в точку (x_1, x_2) удовлетворяет разностному уравнению

$$f(x_1, x_2) - 2f(x_1 - 1, x_2 - 1) - f(x_1 - 2, x_2) = 0,$$

а ее производящий ряд сходится и имеет вид $F(z_1, z_2) = (1 - 2z_1 z_2 - z_1^2)^{-1}$. По теореме 1 его сечения $F^n(z_2)$ удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$F^n(z_2) - 2z_2 F^{n-1}(z_2) - F^{n-2}(z_2) = 0$$

с начальными данными $F^0(z_2) = 1, F^1(z_2) = 2z_2$. Продолжая вычисления, получим известную последовательность многочленов Пелля:

$$\begin{aligned} F^2(z_2) &= 4z_2^2 + 1, \\ F^3(z_2) &= 8z_2^3 + 4z_2, \\ F^4(z_2) &= 16z_2^4 + 12z_2^2 + 1, \\ &\dots \end{aligned}$$

4. Заключение. Полученное рекуррентное соотношение для сечений производящих рядов числа путей на целочисленной решетке позволяет разработать компьютерный алгоритм для вычисления таких сечений.

Список литературы

1. Даджион Д., Мерсеро О. 1988. Цифровая обработка многомерных сигналов. Пер. с англ. М., Мир, 487. (Dudgeon D. E., Mersereau R. M. 1983. Multidimensional digital signal processing. Englewood Cliffs, NJ : Prentice-Hall, 400).
2. Лейнартас Е. К., Ляпин А. П. 2009. О рациональности многомерных возвратных степенных рядов. Журнал Сибирского федерального университета. Математика и физика, 2(2): 449–455.
3. Некрасова Т. И. 2014. Об иерархии производящих функций решений многомерных разностных уравнений. Изв. Иркутского гос. ун-та. Сер. Математика, 9: 91–102.
4. Стенли Р. 2005. Перечислительная комбинаторика. Деревья, производящие функции и симметрические функции. М., Мир, 767.
5. Стенли Р. 1990. Перечислительная комбинаторика. М., Мир, 440.
6. Bousquet-Mélou M., Petkovšek M. 2000. Linear recurrences with constant coefficients: the multivariate case. Discrete Mathematics, 225: 51–75.
7. Leinartas E. K. 2007. Multiple Laurent series and fundamental solutions of linear difference equations, Siberian Math. J., 48(2): 268–272.
8. Levy H., Lessman F. 1992. Finite difference equations. Dover Publication, 278.
9. Lipshitz L. 1989. D-Finite power series. Journal of Algebra, 122: 353–373.
10. Luzon A., Moron M. A. 2010. Recurrence relations for polynomial sequences via Riordan matrices. Linear Algebra and its Applications, 433: 1422–1446. DOI:10.1016/j.laa.2010.05.021
11. Lyapin A. P., Chandragiri S. 2019. Generating functions for vector partitions and a basic recurrence relation. Journal of Difference Equations and Applications, 25(7): 1052–1061. DOI: 10.1080/10236198.2019.1649396
12. Moivre A. 1724. De fractionibus algebraicis radicalitate immunibus ad fractiones simpliciores reducendis, deque summandis terminis quarumdam serierum aequali intervallo a se distantibus. Philosophical transactions, 176.
13. Nekrasova T. I. 2015. On the Cauchy Problem for Multidimensional Difference Equations in Rational Cone. Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics, 8(2): 184–191.
14. Tsikh A. K. 1993. Conditions for absolute convergence of the Taylor coefficient series of a meromorphic function of two variables. Math. USSR-Sb, 74(2): 337–360.

References

1. Dudgeon D. E., Mersereau R. M. 1983. Multidimensional digital signal processing. Englewood Cliffs, NJ : Prentice-Hall, 400.
2. Leinartas E. K., Lyapin A. P. 2009. On the Rationality of Multidimensional Recursive Series. Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics, 2(2): 449–455 (in Russian).

3. Nekrasova T. I. 2014. On the hierarchy of generating functions for solutions of multidimensional difference equations *Izv. Irkutsk Gos. Univ. Ser. Matematika*, 9: 91–103 (in Russian).
4. Stanley R. 1997. *Enumerative combinatorics. Trees and the Composition of Generating Functions*. Cambridge University Press, 600.
5. Stanley R. 1997. *Enumerative combinatorics*. Cambridge University Press, 326.
6. Bousquet-Mélou M., Petkovšek M. 2000. Linear recurrences with constant coefficients: the multivariate case. *Discrete Mathematics*, 225: 51–75.
7. Leinartas E.K. 2007. Multiple Laurent series and fundamental solutions of linear difference equations, *Siberian Math. J.*, 48(2): 268–272.
8. Levy H., Lessman F. 1992. *Finite difference equations*. Dover Publication, 278.
9. Lipshitz L. 1989. D-Finite power series. *Journal of Algebra*, 122: 353–373.
10. Luzon A., Moron M. A. 2010. Recurrence relations for polynomial sequences via Riordan matrices. *Linear Algebra and its Applications*, 433: 1422–1446. DOI:10.1016/j.laa.2010.05.021
11. Lyapin A. P., Chandragiri S. 2019. Generating functions for vector partitions and a basic recurrence relation. *Journal of Difference Equations and Applications*, 25(7): 1052–1061. DOI:10.1080/10236198.2019.1649396
12. Moivre A. 1724. De fractionibus algebraicis radicalitate immunibus ad fractiones simpliciores reducendis, deque summendis terminis quarundam serierum aequali intervallo a se distantibus. *Philosophical transactions*, 176.
13. Nekrasova T. I. 2015. On the Cauchy Problem for Multidimensional Difference Equations in Rational Cone. *Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics*, 8(2): 184–191.
14. Tsikh A. K. 1993. Conditions for absolute convergence of the Taylor coefficient series of a meromorphic function of two variables. *Math. USSR-Sb.*, 74(2): 337–360.

Получена 10.06.2020

Ахтамова Светлана Станиславовна – кандидат педагогических наук, доцент, доцент кафедры высшей математики, информатики и естествознания Лесосибирского педагогического института – филиала Сибирского федерального университета

ул. Победы, 42, г. Лесосибирск, Красноярский край, Россия, 662544

E-mail: ahtamova-ss@mail.ru

Гришунов Виталий Юрьевич – разработчик C#/JavaScript, ООО «Интермедиа»

Невский пр-т, 2В, г. Санкт-Петербург, Ленинградская обл., Россия, 191167

E-mail: vitaliqmetaliq@gmail.com

Ляпин Александр Петрович – кандидат физико-математических наук, доцент базовой кафедры вычислительных и информационных технологий института математики и фундаментальной информатики Сибирского федерального университета

пр. Свободный, 79, г. Красноярск, Россия, 660041

E-mail: aplyapin@sfu-kras.ru

Тихомиров Сергей Александрович – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры геометрии и алгебры физико-математического факультета Ярославского государственного педагогического университета

ул. Республиканская, 108/1, г. Ярославль, Россия, 150000

E-mail: satikhomirov@mail.ru

ФИЗИКА. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 537.533.79; 538.97

DOI 10.18413/2687-0959-2020-52-2-152-168

О ВЛИЯНИИ АСИММЕТРИИ ОТРАЖЕНИЯ НА КОГЕРЕНТНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЭЛЕКТРОНОВ В КРИСТАЛЛАХ

И. Е. Внуков^{1*}, И. С. Волков¹, Ю. А. Гопонов¹, М. А. Сиднин¹, Р. А. Шатохин²

(Статья представлена членом редакционной коллегии А. В. Носковым)

¹ Белгородский национальный исследовательский университет,
г. Белгород, 308015, Россия

² Белгородский университет кооперации, экономики и права,
г. Белгород, 308023, Россия

E-mail: vnukov@bsu.edu.ru

Аннотация. Модифицирована предложенная ранее методика расчета выхода дифрагированных реальных фотонов в совершенных кристаллах с использованием подхода Дарвина и Принса о многократных переотражениях фотонов на отражающих плоскостях кристалла с помощью метода Монте-Карло. Обсуждается влияние асимметрии отражающей плоскости относительно выходной поверхности на выход дифрагированного излучения. Анализируются результаты измерений угловых распределений излучения параметрического рентгеновского излучения (ПРИ) релятивистских электронов в кристаллах, в которых отражающая плоскость была не перпендикулярна выходной поверхности. Показано, что форма угловых распределений излучения быстрых электронов в тонких кристаллах может быть с достаточной точностью описана в рамках кинематической теории ПРИ с учетом вклада дифракции реальных фотонов как для симметричной, так и для асимметричной геометрии рассеяния. Информации для вывода о соотношении абсолютных значений измеренных выходов излучения с расчетными не достаточно. Необходимы измерения выходов излучения или угловых распределений для двух идентичных отражающих плоскостей с разным значением асимметрии в одинаковых экспериментальных условиях.

Ключевые слова: Кристалл, дифракция, моделирование, метод Монте-Карло, асимметрия, параметрическое рентгеновское излучение, сопоставление результатов расчета и эксперимента

Для цитирования: Внуков И. Е., Волков И. С., Гопонов Ю. А., Сиднин М. А., Шатохин Р. А. 2020. О влиянии асимметрии отражения на когерентное излучение релятивистских электронов в кристаллах. Прикладная математика & Физика, 52(2): 152–168. DOI 10.18413/2687-0959-2020-52-2-152-168.

INFLUENCE OF REFLECTION ASYMMETRY ON COHERENT EMISSION OF RELATIVISTIC ELECTRONS IN CRYSTALS

I. E. Vnukov^{1*}, I. S. Volkov¹, Yu. A. Goponov¹, M. A. Sidnin¹, R. A. Shatokhin²

(Article submitted by a member of the editorial board A. V. Noskov)

¹ Belgorod National Research University,
Belgorod, 308015, Russia

² Belgorod University of Cooperation, Economics and Law,
Belgorod, 308023, Russia

E-mail: vnukov@bsu.edu.ru

Received June 15, 2020

Abstract. The previously proposed method for calculating the yield of diffracted real photons is modified using the Darwin and Prince approach for multiple re-reflections of photons on the reflecting planes of the crystal using the Monte Carlo method. The influence of the asymmetry of the reflecting plane relative to the output surface on the output of diffracted radiation is discussed. The results of measurements of the angular distributions of parametric X-ray radiation (PXR) of relativistic electrons in crystals in which the reflecting plane was not perpendicular to the output surface are analyzed. It is shown that the shape of the angular distributions of the emission of fast electrons in thin crystals can be described with sufficient accuracy in the framework of the kinematic theory of PXR taking into account the contribution of the diffraction of real photons for both symmetric and asymmetric scattering geometry. Information for the conclusion about the ratio of the measured radiation outputs absolute values with the calculated ones is not enough. It is necessary to measure the radiation yields or angular distributions for two identical reflective planes with different asymmetry values for the same experimental conditions.

Key words: Crystal, diffraction, simulation, Monte Carlo method, asymmetry, parametric x-ray radiation, comparison of calculation results and experiment.

For citation: Vnukov I. E., Volkov I. S., Goponov Yu. A., Sidnin M. A., Shatokhin R. A. 2020. Influence of reflection asymmetry on coherent emission of relativistic electrons in crystal. *Applied Mathematics & Physics*, 52(2): 152–168 (in Russian). DOI 10.18413/2687-0959-2020-52-2-152-168.

1. Введение. Электромагнитное излучение, возникающее при взаимодействии быстрых частиц с внешними полями и атомными структурами, активно изучается более ста лет (см., например, [Rullhusen et al., 1999] и цитируемую там литературу). Интерес к этим исследованиям обусловлен широким применением этого излучения в различных областях науки и техники. В зависимости от механизма этого взаимодействия меняются спектрально-угловые характеристики и интенсивность получаемого излучения. Одним из таких механизмов является параметрическое рентгеновское излучение (ПРИ), генерируемое при прохождении быстрых заряженных частиц через кристаллы и обнаруженное более тридцати лет назад. Интерес к этому типу излучения обусловлен его монохроматичностью и удобством использования, поскольку оно испускается под большим углом к направлению движения частиц, определяемым разворотом плоскости кристалла, на которой происходит процесс дифракции поля частицы, и связан, в основном, с поиском новых источников интенсивного рентгеновского излучения с перестраиваемой длиной волны, альтернативных накопителям.

В первом приближении ПРИ может рассматриваться как когерентное рассеяние собственного электромагнитного поля частицы на электронных оболочках периодически расположенных атомов мишени [Гарибян, Ян Ши 1971; Барышевский, Феранчук, 1971]. По аналогии с процессом дифракции рентгеновских лучей в кристаллах [Джеймс, 1950] существует два подхода к описанию ПРИ. Кинематический подход предполагает, что многократное отражение фотонов ПРИ на плоскостях кристалла пренебрежимо мало, и его можно не учитывать [Nitta, 1991; Brenzinger et al., 1997]. В динамической теории ПРИ, см, например, [Гарибян, Ян Ши 1971; Барышевский, Феранчук 1971; Барышевский, Дубовская 1991; Nasonov, Noskov 2003; Блажевич, Носков 2006; Blazhevich, Noskov 2008] и цитируемую там литературу, этот процесс учитывается явным образом и считается определяющим.

С позиций более общей теории поляризационного тормозного излучения (ПТИ) быстрых заряженных частиц на атомах среды [Амусья и др., 1987] процесс параметрического рентгеновского излучения рассматривается как когерентное ПТИ быстрых заряженных частиц в монокристаллах [Лапко, Насонов 1990]. В рамках этого подхода показано [Nitta, 1996], что для совершенных кристаллов вклад динамических эффектов в ПРИ не превышает 10%, поэтому кинематического приближения должно быть вполне достаточно для описания экспериментальных данных. К такому же результату недавно пришли авторы статьи [Papadakis, Trikalinos 2013], в которой показано, что различие результатов расчета в обоих подходах не превышает 6-7%, проявляется в уменьшении выхода излучения в расчетах с использованием динамической теории и наблюдается, в основном, в диапазоне энергий электронов несколько сотен МэВ. Это же подтверждается сопоставлением результатов измерений с расчетами, показавшим, что кинематическая теория ПРИ описывает экспериментальные результаты для совершенных кристаллов с погрешностью не хуже 10-15% [Brenzinger et al., 1997; Goponov et al., 2017].

Единственным уверенно наблюдавшимся проявлением динамических эффектов в ПРИ является так называемое ПРИ вперед [Bagyshevsky, 1997], обнаруженное в кристаллах вольфрама и кремния в работах [Алейник и др., 2004; Backe et al., 2005] в области энергий фотонов $\omega < \gamma\omega_p$, где γ – Лоренц-фактор частицы, а ω и ω_p – частота излученного фотона и плазменная частота среды. Отметим, что в случае ПРИ под большими углами к направлению движения частицы такого ограничения нет.

Из динамической теории дифракции рентгеновского излучения в совершенных кристаллах, см., например, [Пинскер, 1982] известно, что в случае так называемой асимметричной дифракции, когда отражающая плоскость не перпендикулярна выходной поверхности или не совпадает с ней, соотношение выходов дифрагированного излучения и излучения, распространяющегося вдоль направления падения фотона на кристалл, отличаются от симметричного случая.

В уже цитированных статьях [Блажевич, Носков 2006; Blazhevich, Noskov 2008] и других работах этих авторов, посвященных теоретическому описанию ПРИ в рамках динамической теории, утверждается, что такое же различие должно наблюдаться и в параметрическом рентгеновском излучении. Степень этого различия зависит от величины асимметрии отражения $\epsilon = \sin(\delta' + \Theta_B) / \sin(\delta' - \Theta_B)$, см., например, [Блажевич, Носков 2006]. Здесь δ' – угол между поверхностью мишени и отражающими плоскостями, а Θ_B – угол между направлением движения электрона и отражающей плоскостью. В тонком непоглощающем кристалле при наличии асимметрии отражения поля частицы соотношение интенсивностей ПРИ, рассчитанных с использованием

динамической и кинематической теории, должно быть близко к величине ϵ [Блажевич, Носков 2006].

В одной из последних работ этой группы [Blazhevich, Noskov 2019] опубликована интерпретация результатов эксперимента [Takabayashi et al., 2017], в котором проведены измерения ПРИ электронов с энергией 255 МэВ в кристалле алмаза с большой гранью перпендикулярной оси $\langle 001 \rangle$ и толщиной 50 микрон для угла наблюдения $\Theta_D = 32.2^\circ$ и отражающих плоскостей (110) и (111). Плоскость (110) перпендикулярна поверхности мишени, то есть $\epsilon = 1$, а две плоскости типа (111) повернуты относительно неё на угол $\pm 35.26^\circ$, что соответствует значениям угла $\delta' = 54.74^\circ$ и 125.26° . Это позволяет в одних и тех же экспериментальных условиях проводить измерения для $\epsilon = 0.658$ и $\epsilon = 1.520$. Эксперимент [Takabayashi et al., 2017] выполнен для ориентации с $\epsilon = 0.658$, поэтому регистрируемый выход излучения должен быть почти в два раза меньше, чем результаты расчета с использованием кинематической теории ПРИ, см. [Blazhevich, Noskov 2019], рисунок 3.

Не все специалисты согласны с утверждением о столь значимой роли угла между направлением отражающей плоскости и поверхностью мишени в процессе генерации ПРИ. В частности, в статье [Artru, 2019], дискутирующей с работой [Blazhevich, Noskov 2019], подчеркивается, что асимметрия отражения поля частицы может привести к изменению соотношения между потоками излучения, вылетающего из кристалла в направлении движения первичной частицы (ПРИ вперед) и Брэгговского отражения (обычное ПРИ), однако полная интенсивность рожденного в кристалле излучения не должна зависеть от угла между отражающими плоскостями и поверхностью мишени.

Эксперимент [Takabayashi et al., 2017] выполнен с помощью рентгенографической пластины (imagine plate – IP). Этот прибор измеряет поглощенную дозу, оставленную прошедшим через него излучением, то есть в случае ПРИ обусловленную вкладом всех порядков отражения, а его эффективность и энергетический отклик зависит от энергии фотонов. Поэтому прямое сопоставление результатов измерений с расчетами для отражений (220) и (111), сделанное в работе [Blazhevich, Noskov 2019], представляется недостаточно корректным.

Большинство измерений по исследованию ПРИ релятивистских частиц в кристаллах, см., например, обзоры [Потылицын, 1998; Лобко, 2006] и цитированные там работы, выполнено для кристаллов с симметричной геометрией отражения. Можно отметить только эксперимент [Brenzinger et al., 1997], в котором с помощью полупроводникового детектора в одних и тех же экспериментальных условиях проведены измерения выходов ПРИ в кристалле кремния с ориентацией $\langle 001 \rangle$, как и в эксперименте [Takabayashi et al., 2017]. Измерения выполнены для отражающих плоскостей (110), (111) и (112). Известно, что в кристалле с такой ориентацией плоскости типа (111) и (112) направлены под углом к плоскости (001), совпадающей с поверхностью кристаллической мишени, поэтому в процессе этих измерений регистрировалось ПРИ для случая асимметричного рассеяния поля частицы.

Известно, см., например, [Brenzinger et al., 1997; Балдин и др., 2006] и цитируемую там литературу, что в Брэгговском направлении кроме ПРИ распространяются дифрагированное переходное излучение (ДПИ) и дифрагированное тормозное излучение (ДТИ), на выход которых может влиять асимметрия отражения. Первый механизм реализуется в области энергий фотонов $\omega < \gamma\omega_p$, а второй при выполнении противоположного условия. Если $\omega \sim \gamma\omega_p$, то необходимо учитывать вклад обоих механизмов излучения. Величина вклада, обусловленного этими механизмами излучения, в полный выход излучения зависит от условий измерений и достаточно подробно анализировалась в работах [Балдин и др., 2006; Бакланов и др., 2007].

Вклад дифракции реальных фотонов тормозного и переходного излучений максимален в случае использования тонких кристаллов. Переходное излучение (ПИ) формируется вблизи входной границы мишени, поэтому интенсивность ДПИ практически не зависит от толщины кристалла, тогда как интенсивность ПРИ пропорциональна толщине мишени и сравнительно слабо зависит от многократного рассеяния частиц в ней, поскольку характерный угол вылета фотонов ПРИ $\Theta_{ph} = \sqrt{\gamma^{-2} + \omega_p^2/\omega^2}$, как правило, значимо больше угла многократного рассеяния ϑ_{ms} электронов в кристалле. Угловое распределение тормозного излучения существенно уже углового распределения ПРИ и, вследствие этого, сильнее зависит от многократного рассеяния, поэтому с ростом толщины кристалла интенсивность ДТИ растёт существенно медленнее, чем выход ПРИ [Бакланов и др., 2007].

Наличие разногласий в процессе описания ПРИ в кристаллах с асимметричной геометрией рассеяния поля частицы [Artru, 2019; Blazhevich, Noskov 2019] наряду с уверенным проявлением влияния асимметрии отражения на выход рентгеновского излучения в совершенных кристаллах [Пинскер, 1982] позволяет считать сопоставление результатов измерений, где реализовывалась геометрия асимметричного рассеяния, с результатами расчетов, учитывающих вклад всех возможных механизмов излучения, важным и актуальным.

2. Учет влияния асимметрии отражения рентгеновского излучения относительно поверхности кристалла на выход излучения. Для анализа влияния асимметрии отражения на

выход дифрагированного излучения воспользуемся методикой, предложенной в работе [Laktionova et al., 2014] и основанной на подходе Дарвина и Принса [Джеймс, 1950; Пинскер, 1982] о многократных переотражениях фотонов на плоскостях кристалла.

В интересующих нас экспериментах измерялась зависимость выхода излучения в фиксированный коллиматор от угла ориентации кристалла Θ [Brenzinger et al., 1997] и зависимость выхода излучения в единичный элемент координатно чувствительного детектора от его положения относительно центра рефлекса, то есть вертикальное $Y(\theta_y)$ или горизонтальное $Y(\theta_x)$ угловые распределения [Takabayashi et al., 2017]. Ориентационные зависимости выхода ДПИ и ДТИ (см., например, [Brenzinger et al., 1997]) могут быть представлены в виде:

$$Y_{DTR}(\Theta) = \int_{\Delta\omega(\Theta, \Theta_D)} d\omega \int_{\Delta\Omega(\Theta, \Theta_D)} \frac{d^2 I_{TR}^*}{d\omega d\Omega} R(\omega, \vec{n}, \vec{g}, \Theta_D) d\Omega. \quad (1)$$

$$Y_{DB}(\Theta) = \int_0^T dt \int_{\Delta\omega(\Theta, \Theta_D)} d\omega \int_{\Delta\Omega(\Theta, \Theta_D)} \frac{d^2 I_{BS}^*}{d\omega d\Omega} R(\omega, \vec{n}, \vec{g}, \Theta_D) d\Omega, \quad (2)$$

где $\frac{d^2 I_{TR,BS}^*}{d\omega d\Omega}$ спектрально-угловое распределение интенсивности переходного (тормозного) излучения с учетом расходимости электронного пучка и, в случае регистрации дифрагированного тормозного излучения, многократного рассеяния, а $\Delta\Omega(\Theta, \Theta_D)$ и $\Delta\omega(\Theta, \Theta_D)$ область интегрирования по телесному углу и спектральному диапазону излучения, для которых дифрагированное излучение после отражения может попасть в детектор, расположенный под углом Θ_D , для угла ориентации кристалла Θ . $R(\omega, \vec{n}, \vec{g}, \Theta_D)$ – отражающая способность для данного направления векторов распространения фотона и обратной решетки плоскости кристалла, на которой происходит отражение, \vec{n} и \vec{g} , соответственно. T – толщина кристалла.

Угловое распределение дифрагированного излучения определяется аналогичным образом. В частности, вертикальное угловое распределение дифрагированного переходного излучения записывается следующим образом:

$$Y_{DTR}(\theta_y) = \int_{\Delta\omega(\theta_y, \theta_x, \Theta_D)} d\omega \int_{\Delta\Omega(\theta_y, \theta_x, \Theta_D)} \frac{d^2 I_{TR}^*}{d\omega d\Omega} R(\omega, \vec{n}, \vec{g}, \Theta_D) d\Omega, \quad (3)$$

где $\Delta\omega(\theta_y, \theta_x, \Theta_D)$, $\Delta\Omega(\theta_y, \theta_x, \Theta_D)$ – спектральный и угловой диапазоны, для которых дифрагированное излучение после отражения может попасть в элемент детектора, расположенный под углами θ_y , θ_x относительно центра рефлекса.

Для определения выхода дифрагированного излучения с помощью выражений (1)-(3) необходима информация об отражающей способности кристалла $R(\omega, \vec{n}, \vec{g}, \Theta_D)$. В соответствии с методикой [Laktionova et al., 2014] для фиксированного направления распространения излучения \vec{n} из пучка со спектрально-угловым распределением $\frac{d^2 I}{d\omega d\Omega}$ при выполнении брэгговского условия для квантов с энергией ω отражаются только фотоны в энергетическом интервале

$$\Delta\omega = \omega \cos(\Theta_B) / \sin(\Theta_B) \Delta\Theta, \quad (4)$$

где Θ_B – угол между направлением вектора \vec{n} и отражающей плоскостью с вектором обратной решетки \vec{g} , направленным по нормали к ней.

Для неполяризованного излучения и отсутствия поглощения величина $\Delta\Theta$ определяется следующим образом [Джеймс, 1950]:

$$\Delta\Theta = 2 \cdot \eta \Delta\theta_0, \quad (5)$$

где $\Delta\theta_0 = \frac{2 \cdot \delta}{\sin 2\Theta_B}$ – поправка к углу Брэгга Θ_B из-за преломления волны в кристалле, $\delta = (\omega_0/\omega)^2/2$ – отличие показателя преломления от 1, а $\eta = \frac{1}{2} \frac{f(\vec{g})}{f(0)} (1 + \cos(2\Theta_B))$, где $f(\vec{g})$ – Фурье-компонента пространственного распределения электронов в атоме кристалла, $(f(0) = z$, где z – число электронов в атоме).

В качестве оценки характерного параметра модели – длины первичной экстинкции можно использовать выражение [Джеймс, 1950]:

$$l_{ex} = d / (2\bar{\xi} \sin \Theta_B), \quad (6)$$

где d – межплоскостное расстояние, а $\exp(-2\bar{\xi})$ – ослабление интенсивности первичной волны при пролете через одну плоскость:

$$2\bar{\xi} = \frac{\pi d^2 N F}{n} \frac{e^2}{mc^2}. \quad (7)$$

Здесь N – концентрация рассеивающих центров, $F = \frac{|S(\vec{g})|f(\vec{g})\exp(-Ag^2/2)}{f(0)}$ – структурный множитель, $|S(\vec{g})|$ – структурный фактор элементарной ячейки кристалла, $\exp(-Ag^2/2)$ – фактор Дебая-Уоллера, где A – средний квадрат амплитуды тепловых колебаний атомов кристалла, а n – порядок отражения.

Для участка кристалла с толщиной t , много меньше длины первичной экстинкции l_{ex} , вероятность отражения фотонов с энергией ω и направлением движения \vec{n} , для которых выполняется брэгговское условие, пропорциональна количеству пересекаемых ими плоскостей [Джеймс, 1950]. Следовательно, зависимость числа квантов, не испытавших отражение, от длины пути в кристалле может быть записана в виде $N_\gamma(t) = N_\gamma(0)\exp(-t/l_{ex})$ [Джеймс, 1950], где $N_\gamma(0)$ – число фотонов в начальной точке.

Для учета поглощения и рассеяния фотонов вследствие процессов, не связанных с дифракцией, зависимость числа фотонов, не испытавших взаимодействие, от пройденного в кристалле пути можно переписать в виде:

$$N_\gamma(\omega, \vec{n}, t) = N_\gamma(\omega, \vec{n}, 0)\exp(-\mu_{tot}(\omega, \vec{g}, \vec{n})t), \quad (8)$$

где $\mu_{tot}(\omega, \vec{g}, \vec{n}) = \mu(\omega) + \mu_{dif}(\omega, \vec{g}, \vec{n})$ – полный линейный коэффициент поглощения излучения с энергией ω , для направления отражающей плоскости кристалла \vec{g} и направления движения фотона \vec{n} . Здесь $\mu(\omega)$ – линейный коэффициент поглощения излучения с энергией ω в материале кристалла за счет процессов фотопоглощения, когерентного и некогерентного рассеяний на отдельных атомах, а $\mu_{dif}(\omega, \vec{g}, \vec{n}) = 1/l_{ex}(\omega, \vec{g}, \vec{n})$, где $l_{ex}(\omega, \vec{g}, \vec{n})$ – длина первичной экстинкции для фотонов, энергия и направление движения которых удовлетворяет брэгговскому условию. Если это условие не выполняется, длина первичной экстинкции равна бесконечности, то есть излучение проходит через кристалл, как через неупорядоченное вещество.

Возможность такой формы записи позволяет использовать хорошо известный в экспериментальной физике метод статистического моделирования прохождения фотонов через вещество, смотри, например, [Аккерман и др., 1986], и для процесса их прохождения через кристалл в условиях дифракции.

Процесс прохождения фотонов через ориентированный кристалл моделировался следующим образом. Для падающего на кристалл или родившегося в нём фотона с энергией ω и направлением движения \vec{n} , удовлетворяющего брэгговскому условию в кристалле, определялись величины $\mu(\omega)$, $\mu_{dif}(\omega, \vec{g}, \vec{n})$ и $\mu_{tot}(\omega, \vec{g}, \vec{n})$. Для определения $\mu(\omega)$ использовались значения сечений взаимодействия фотонов с веществом, приведенные в [Berger et al., 2017]. Затем разыгрывался пробег фотона до точки взаимодействия $t = \ln \xi / \mu_{tot}$, где ξ – случайное число от нуля до единицы. Далее определялись координаты точки взаимодействия. Если эта точка не принадлежала кристаллу, история фотона заканчивалась, и розыгрыш начинался снова.

Если взаимодействие произошло внутри кристалла, разыгрывалось, какой процесс произошел: дифракция или какой-либо из процессов на отдельном атоме. Поскольку вероятность фотона попасть в детектор с малой угловой апертурой в результате последующих перерассеяний пренебрежимо мала, в последнем случае фотон считался поглощенным, история розыгрыша фотона заканчивалась, и моделирование начиналось снова.

Если произошла дифракция, процесс розыгрыша повторялся до тех пор, пока фотон не выходил из кристалла или не поглощался в нём. Проверка вылета фотона из кристалла осуществлялась по значению проекции точки взаимодействия на нормаль к выходной поверхности. Смещение фотона вследствие дифракции в плоскости, перпендикулярной направлению распространения, как правило, не учитывалось, поскольку толщина кристаллов, которые нас интересуют, не превышает несколько сотен микрон.

Для каждого вылетевшего из кристалла фотона запоминалось количество отражений. Вероятность попадания дифрагированного фотона в детектор, заменяющая в данном случае отражающую способность $R(\omega, \vec{n}, \vec{g}, \Theta_D)$ при расчете выхода дифрагированного излучения в соответствии с выражениями (1) – (3), определялась отношением количества фотонов, испытавших в кристалле нечетное число отражений, то есть вылетевших из него в направлении брэгговского рассеяния, к числу розыгрышей.

Методика [Laktionova et al., 2014] разрабатывалась, в основном, для расчета дифракции тормозного излучения, которое в достаточно хорошем приближении можно считать неполяризованным. Для описания вклада ДПИ в выход когерентного излучения релятивистских электронов в тонких кристаллах [Goropov, Laktionova, Sidnin et al., 2017] методика [Laktionova et al., 2014] была доработана с учетом необходимости учета зависимости отражающей способности от поляризации излучения.

Известно, что переходное излучение, которое возникает на передней грани мишени при падении на её поверхность релятивистских электронов и может затем дифрагировать внутри кристалла,

линейно поляризовано в плоскости вылета [Гарибян, Ян Ши 1983]. Вектор напряженности электрического поля испущенных фотонов E лежит в плоскости, содержащей вектор скорости электрона и волновой вектор испущенного фотона, то есть направление вектора E зависит от азимутального угла вылета фотона.

Для удобства сопоставления с выражениями, приведенными в работах по динамической теории ПРИ и ДПИ [Блажевич, Носков 2006; Blazhevich, Noskov 2008; Blazhevich, Noskov 2019], азимутальный угол φ отсчитывается от плоскости, содержащей вектор скорости электрона $\vec{\beta}$ и вектор обратной решетки отражающей плоскости кристалла \vec{g} . Как известно, см., например, [Джеймс, 1950], отражающая способность рентгеновского излучения кристаллом зависит от поляризации падающего на него излучения. Для излучения поляризованного вдоль плоскости, она пропорциональна $f(\vec{g})/z$. Для излучения, поляризованного перпендикулярно плоскости появляется множитель $\cos(2\Theta_B)$. В терминах цитированных работ это перпендикулярная и параллельная компоненты поляризации.

С учетом поляризации переходного излучения выражения (1) и (3) для расчета ориентационных зависимостей и угловых распределений интенсивности ДПИ должны состоять из двух слагаемых с компонентами интенсивности излучения, обладающими разными поляризациями, $(\frac{d^2 I_{TR}^*}{d\omega d\Omega})_{\perp(\parallel)}$ и отражающими способностями $R_{\perp(\parallel)}(\omega, \vec{n}, \vec{g}, \Theta_D)$. Для углов падения электронов на кристалл меньше $\pi/2$ и малого значения расходимости электронного пучка σ' по сравнению с характерным углом излучения γ^{-1} спектрально-угловую плотность переходного излучения можно записать в следующем виде [Гарибян, Ян Ши 1983]:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2 I_{TR}^*}{d\omega d\Omega}\right)_{\perp} &= \frac{d^2 I_{TR}^*}{d\omega d\Omega} \sin^2(\varphi) \\ \left(\frac{d^2 I_{TR}^*}{d\omega d\Omega}\right)_{\parallel} &= \frac{d^2 I_{TR}^*}{d\omega d\Omega} \cos^2(\varphi), \end{aligned} \quad (9)$$

где $(\frac{d^2 I_{TR}^*}{d\omega d\Omega})_{\perp}$ и $(\frac{d^2 I_{TR}^*}{d\omega d\Omega})_{\parallel}$ интенсивность излучения, поляризованного поперек и вдоль плоскости отсчета.

Ширина спектральной области отражения $\Delta\omega_{\perp(\parallel)}$ для каждой из компонент определяется аналогично выражениям (4)-(5).

$$\begin{aligned} \Delta\omega_{\perp(\parallel)} &= \omega \cos(\Theta_B) / \sin(\Theta_B) \Delta\Theta_{\perp(\parallel)} \\ \Delta\Theta_{\perp} &= \frac{\delta}{\sin 2\Theta_B} \frac{|S(\mathbf{g})| f(\mathbf{g}) \exp(-Ag^2/2)}{f(0)}. \\ \Delta\Theta_{\parallel} &= \Delta\Theta_{\perp} \cdot \cos(2\Theta_B) \end{aligned} \quad (10)$$

Зависимость отражающей способности от поляризации излучения приводит к аналогичной зависимости длины первичной экстинкции l_{ex} . Для перпендикулярной поляризации она определяется в соответствии с выражениями (6), (7). Для параллельной поляризации её можно записать:

$$l_{ex}^{\parallel} = \frac{l_{ex}^{\perp}}{\cos(2\Theta_B)}. \quad (11)$$

Здесь необходимо отметить, что в уже цитированных работах по динамической теории ДПИ [Блажевич, Носков 2006; Blazhevich, Noskov 2008] используется похожая методика определения спектральной ширины области отражения рентгеновского излучения совершенными кристаллами, причем соответствующие формулы, после приведения их к одинаковому виду, совпадают с (10). Значения величин длин первичной экстинкции, получаемых в соответствии с выражениями (6), (7) и (11), отличаются от значений этих величин, получаемых по формулам, приведенным в цитированных работах, примерно на 20%, что, по-видимому, обусловлено разным пониманием этой величины и самого процесса первичной экстинкции в подходах, основанных на прохождении волн [Блажевич, Носков 2006; Blazhevich, Noskov 2008] и фотонов [Джеймс, 1950] через кристалл.

Для лучшего понимания методологии расчета и влияния асимметрии отражающих плоскостей относительно выходной поверхности на процесс прохождения излучения через кристалл на рисунке 1 приведены три возможных ориентации кристалла с гранью, совпадающей с плоскостью (001), относительно направления распространения фотонов, что соответствует геометрии экспериментов [Brenzinger et al., 1997; Takabayashi et al., 2017]. Кристаллы развернуты так, что угол между направлением отражающих плоскостей (111), (110), (11 $\bar{1}$) и фотона – Θ_B во всех случаях один и тот же, соответственно рисунки 1a, 1б и 1в для $\epsilon < 1$, $\epsilon = 1$ и $\epsilon > 1$. Регистрирующая аппаратура расположена слева относительно направления фотонов. Там же показан процесс последовательных переотражений фотонов, рожденных на поверхности мишени или падающих на неё, при прохождении через

кристалл для каждой из ориентаций. Вне зависимости от ориентации кристалла фотоны могут испытать нечетное количество отражений и вылететь в брэгговском направлении (1), поглотиться в нем (2), либо испытать четное число переотражений и вылететь в первоначальном направлении (3).

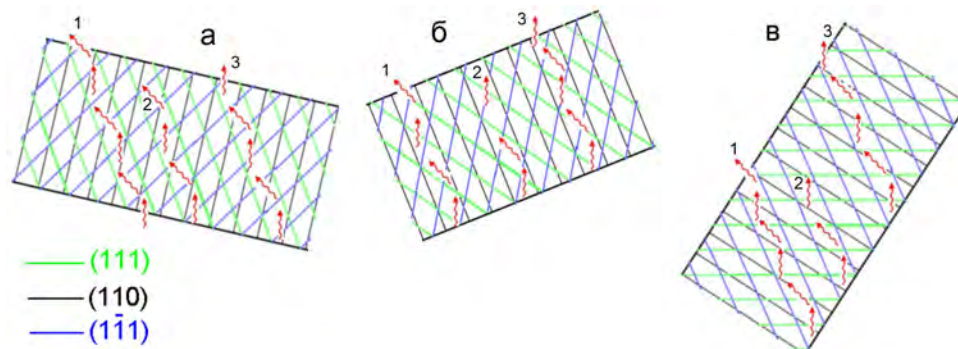


Рис. 1. Ориентации кристалла с выходной гранью (001) для получения когерентного излучения от отражающих плоскостей (111), (110) и ($\bar{1}\bar{1}$)

Fig. 1. Orientation of crystals with an exit face (001) to obtain coherent radiation from reflecting planes (111), (110) and ($\bar{1}\bar{1}$)

Из рисунка видно, что при каждом переотражении фотон меняет направление движения, поэтому его путь в кристалле больше $T/\cos(\Theta_B \pm \delta)$, что обычно предполагается при анализе процесса прохождения рентгеновского излучения через ориентированные кристаллы. По этой же причине средняя длина пути фотона в кристалле без учета поглощения близка к полусумме длин путей вдоль первоначального направления и брэгговского отражения. По порядку величины среднее число отражений равно отношению длины пути фотона в кристалле к длине первичной экстинкции. Как и раньше, T – толщина кристалла, имеющего форму параллелепипеда, Θ_B – угол между направлением движения фотона и плоскостью кристалла, $\delta=35.26^\circ$ – угол между нормалью к поверхности кристалла, совпадающей с направлением плоскости (110), и отражающими плоскостями типа (111). Использование угла $\delta = \pi/2 - \delta'$ вместо δ' , вводимого авторами вышеупомянутых работ [Блажевич, Носков 2006; Blazhevich, Noskov 2008], представляется более наглядным с точки зрения описания геометрии измерений.

Главной особенностью кристаллов с асимметричной геометрией рассеяния является отличие угла вылета фотонов из мишени относительно нормали к её поверхности от угла Брэгга. В частности, для ориентации на рисунке 1а с величиной $\epsilon < 1$ угол вылета дифрагированного фотона больше угла Брэгга, а для вылетевшего в первоначальном направлении меньше него. Для ориентации с $\epsilon > 1$ обратная ситуация, фотон, вылетевший в направлении брэгговского отражения, покидает кристалл почти вдоль нормали к поверхности мишени, а летящий в первоначальном направлении под большим углом к ней. В результате вероятность вылета фотона вдоль каждого из возможных направлений уже не одинакова, как для симметричной геометрии (см. рисунок 1б), а отличается в ϵ раз.

Для подтверждения вышесказанного воспользуемся тем, что для вышедших из кристалла фотонов средняя длина свободного пробега совпадает с длиной первичной экстинкции. Фотон, движущийся в том или ином направлении, вылетит из кристалла, если испытает отражение на расстоянии $l < l_{ex} \cdot \cos(\delta \mp \Theta_B)$ от выходной поверхности кристалла. Следовательно, отношение вероятностей вылета фотона в каждом из направлений равно отношению этих расстояний $\cos(\delta \mp \Theta_B) / \cos(\delta \pm \Theta_B)$ и после замены δ на δ' совпадает с величиной $\epsilon = \sin(\delta' + \Theta_B) / \sin(\delta' - \Theta_B)$ [Блажевич, Носков 2006; Blazhevich, Noskov 2008]. Не сложно заметить, что при переходе от ориентации на рисунке 1а к ориентации на рисунке 1в числитель и знаменатель в формуле для ϵ меняются местами.

В качестве иллюстрации вышесказанного на рисунке 2 приведено распределение фотонов по числу отражений в направлениях брэгговского рассеяния (кривая 1) и первоначального движения (зависимость 2) до их вылета из кристалла для условий эксперимента [Takabayashi et al., 2017] и толщины кристалла 0.25 мм, то есть фотонов, испытавших до вылета из кристалла нечетное (1) и четное (2) число отражений. Полная площадь под каждой зависимостью $P_{1,2} = \sum_{i=1}^{n_{max}} \rho_{1,2}(n)$ соответствует вероятности вылета фотона в том или ином направлении. Расчет выполнен для толщины кристалла 0.25 мм, а не 50 микрон как в эксперименте, поскольку для толщины кристалла 50 микрон из-за меньшего количества отражений различия формы распределений для разных ориентаций менее заметны.

В цитируемой работе для угла поворота плоскости (110), перпендикулярной к выходной поверхности мишени, относительно направления электронов $\Theta_B=16.2^\circ$ (рисунок 1б) реализовывалась

геометрия симметричного отражения на плоскостях (110). Для получения асимметричного отражения на плоскостях (111) с $\epsilon=0.658$ кристалл разворачивался относительно направления падения электронного пучка на угол $\Theta = \delta - \Theta_B = 17.3^\circ$ в противоположном направлении (рисунок 1а).

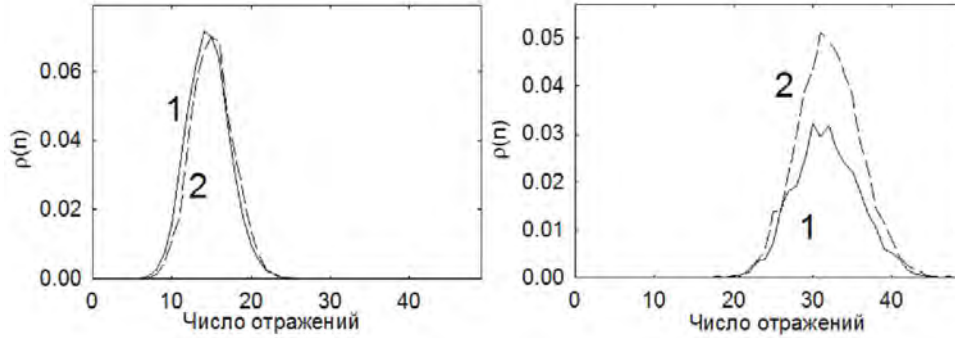


Рис. 2. Распределение по числу отражений фотонов до вылета из кристалла для условий эксперимента [Takabayashi et al., 2017] и толщины кристалла 0.25 мм. а – симметричное отражение на плоскостях (110); б – асимметричное отражение на плоскостях (111)

Fig. 2. Distribution by the number of photon reflections before exit from the crystal for the experimental conditions [Takabayashi et al., 2017] and crystal thickness 0.25 mm. a – symmetric reflection on the (110) planes; b – asymmetric reflection on the (111) planes

Из рисунка 2а видно, что для симметричной геометрии рассеяния распределения по числу отражений до вылета фотона из кристалла для обоих направлений практически совпадают, как и вероятности вылета $P_1 \approx 0.485$, $P_2 \approx 0.467$. Из-за поглощения фотонов в кристалле величина $P = P_1 + P_2$ меньше 1. Можно отметить незначительный сдвиг распределения 1 относительно распределения 2, обусловленный тем, что сначала идет отражение в направлении брэгговского рассеяния и только затем переотражение в направлении первоначального движения. По этой же причине $P_1 > P_2$.

Из-за статистического характера процесса прохождения фотонов через кристалл наблюдается разброс числа отражений относительно среднего $\bar{n} \sim 0.5T/l_{ex} \approx 14.6$, где T – средняя длина пути фотонов до вылета из кристалла. Ширина распределений $\Delta n/\bar{n} \sim 0.35$, где \bar{n} и Δn – центр тяжести распределения и ширина на полувысоте.

Для асимметричной геометрии (рисунок 2б) различие между распределениями более существенно. В соответствии с замечанием о соотношении вероятностей вылета в направлениях брэгговского отражения и первоначального движения для $\epsilon < 1$ распределение 1 ниже распределения 2, $P_1 \approx 0.319$ меньше $P_2 \approx 0.500$, а их отношение $P_1/P_2 \approx 0.639$ близко к величине асимметрии $\epsilon=0.658$. Центр тяжести распределения $\bar{n} \sim 0.5T/l_{ex} \approx 31.9$ сдвинут в сторону большего числа отражений из-за изменения длины первичной экстинкции фотонов с $l_{ex}^{220}=9.22$ микрона до $l_{ex}^{111}=5.11$ микрон вследствие уменьшения энергии фотонов с $\omega_{220}=17.692$ кэВ до $\omega_{111}=10.834$ кэВ. Следует напомнить, что для асимметричного отражения длина пути фотонов в кристалле больше, чем для симметричного, что также приводит к увеличению количества отражений.

Зависимости, приведенные на рисунке 2, получены для излучения с перпендикулярной компонентой поляризации. В соответствии с выражениями (10), (11) для параллельной компоненты поляризации область полного отражения в $\cos 2\Theta_B$ раз меньше, а длина первичной экстинкции во столько же раз больше. Поэтому выход излучения и число переотражений до вылета из кристалла во столько же раз меньше, при сохранении соотношения $P_1/P_2 \sim \epsilon$. Выход ДТИ рассчитывается таким же образом с учетом рождения фотонов внутри кристалла и отсутствием учета поляризации. То есть интенсивности компонент с перпендикулярной и параллельной поляризацией одинаковы и не зависят от азимутального угла вылета фотона.

3. Сопоставление результатов измерений с расчетом. В работе [Goponov, Laktionova, Sidnin et al., 2017] показано, что кинематическая теория ПРИ с учетом вкладов ДТИ и ДПИ описывает результаты измерений в тонких кристаллах с точностью не хуже 10-15%. Поэтому для сопоставления результатов измерений для асимметричного отражения поля частицы [Brenzinger et al., 1997; Takabayashi et al., 2017] с расчетом воспользуемся этим же подходом. Для расчета ПРИ использовалась формула для спектрального углового распределения излучения, полученная в кинематическом приближении в работе [Nitta, 1991]. Для расчета вклада дифрагированного тормозного излучения использовались результаты работы [Клейнер и др., 1992], учитывающие подавление интенсивности тормозного излучения из-за эффекта плотности. Для расчета ДПИ использовалось спектрально-угловое распределение переходного излучения, описываемое формулой Гарибяна. Предполагалось, что оно рождается непосредственно при влете в кристалл и дифрагирует в нем. Расходимость электронного пучка, многократное рассеяние частиц в кристалле, угол коллимации

излучения и другие экспериментальные условия учитывались в соответствии с методикой, описанной в работе [Bogomazova et al., 2003].

Наиболее информативным для сопоставления результатов измерений с расчетом представляется эксперимент [Brenzinger et al., 1997], в котором проведены абсолютные измерения угловой плотности выхода излучения электронов с энергией 855 МэВ для отражающих плоскостей (110), (111), (112) кристалла кремния толщиной 124 микрона с помощью полупроводникового детектора (ППД) с апертурой коллиматора $\varnothing=1$ мм, который располагался под углом $\Theta_D=45^\circ$ на расстоянии 101 см от кристалла. Это позволило экспериментально разделить вклады различных порядков отражения, в отличие от эксперимента [Takabayashi et al., 2017], где использованная регистрирующая аппаратура не дала возможности это сделать.

Как упоминалось во введении и видно из рисунка 1, для регистрации ПРИ от рефлекса (111) детектором, расположенным с левой стороны относительно направления электронного пучка, кристалл с большой гранью, совпадающей с плоскостью (001), может быть повернут вокруг вертикальной оси, совпадающей с кристаллографической осью $\langle 1\bar{1}0 \rangle$, на угол $\delta - \Theta_B$ по часовой стрелке, либо на угол $\delta + \Theta_B$ в противоположную сторону. В первом случае должно наблюдаться излучение от плоскости (111) с $\epsilon=0.547$, а во втором от плоскости $(1\bar{1}\bar{1})$ и $\epsilon=1.827$. В обоих случаях отсчет углов идет от совпадения нормали к поверхности мишени и направления электронного пучка. Плоскости типа $(11\bar{2})$ перпендикулярны плоскостям (111), поэтому измерения для рефлекса (224) также были выполнены для асимметричной геометрии.

Результаты расчетов угловой плотности выхода излучения в рамках кинематической теории ПРИ, выполненных авторами цитируемой работы, совпали с результатами измерений с точностью до погрешности нормировки $\sim \pm 10\%$. Такое же согласие получено в работе [Goronov, Laktionova, Sidnin et al., 2017], где был дополнительно учтен вклад дифракции фотонов переходного и тормозного излучений. В работе [Brenzinger et al., 1997] приведены значения угловой плотности выхода излучения для первого порядка отражения в максимуме горизонтального углового распределения, что соответствует углу наблюдения $\theta_x \sim \Theta_{ph}$ относительно центра рефлекса, и отражающих плоскостей (110), (111) и (112). Для точного сопоставления результатов измерений и расчетов с целью поиска вклада асимметрии в выход ПРИ, ДПИ и ДТИ этой информации недостаточно, поскольку вклад дифракции реальных фотонов сосредоточен в центре углового распределения [Laktionova et al., 2014].

Более интересным представляется сопоставление результатов измерений угловых распределений плотности излучения для отражающей плоскости (111) и двух порядков отражения (111) и (333), так же приведенных в цитируемой работе, с расчетом. Как отмечено выше, получить отражение (111) в кристалле с такой геометрией можно двумя способами. На рисунке 3 приведено измеренное горизонтальное распределение угловой плотности излучения $J = Y/\Delta\Omega$, где Y – выход фотонов на один электрон, а $\Delta\Omega$ – телесный угол, перекрываемый детектором, для порядка отражения (111) с энергией фотонов $\omega = 5.17$ кэВ. Здесь же приведены рассчитанные угловые распределения для отражающих плоскостей (111) и $(1\bar{1}\bar{1})$, соответственно, кривые 1 и 2.

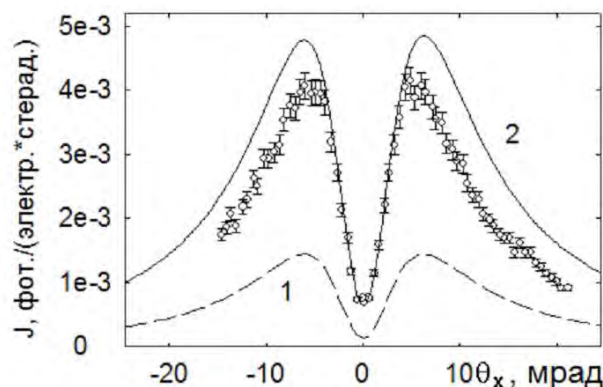


Рис. 3. Горизонтальное угловое распределение для отражения (111) в эксперименте [Brenzinger et al., 1997]. Точки – эксперимент; кривые – расчет для отражающих плоскостей (111) и $(1\bar{1}\bar{1})$ (см. рисунок 1)
Fig. 3. The horizontal angular distribution for the reflection of (111) in the experiment [Brenzinger et al., 1997]. Points – experiment; curves – calculation for reflecting planes (111) and $(1\bar{1}\bar{1})$ (see Figure 1)

Различие в интенсивности излучения для этих отражающих плоскостей не связано с динамическими эффектами в излучении, а обусловлены различием длин путей электронов, излучение которых может выйти из кристалла. Для подтверждения вышесказанного воспользуемся тем, что при выполнении условия $l_a \ll T$, где T и l_a толщина кристалла и длина поглощения излучения с энергией ω , фотоны могут выйти из кристалла только если их путь в нем не превышает $l_a \approx 20$ микрон. Для ориентации (111) это соответствует длине пути излучающего электрона

$l_e = l_a \cos(\delta + \Theta_B) / \cos(\delta - \Theta_B) \sim 11$ микрон, то есть путь электрона значительно меньше пути фотона (см. рис. 1а). В данном случае направление движения электрона в кристалле соответствует фотону, движущемуся в первоначальном направлении. В случае генерации излучения на плоскости $(1\bar{1}\bar{1})$ $l_e = l_a \cos(\delta - \Theta_B) / \cos(\delta + \Theta_B) \sim 37$ микрон. Поскольку выход ПРИ пропорционален длине пути электрона в кристалле, то для плоскости $(1\bar{1}\bar{1})$ выход излучения в три с лишним раза больше, чем для плоскости (111) . Если l_a значительно больше толщины кристалла T , как например для излучения третьего порядка отражения с $\omega \approx 15.5$ кэВ и $l_a \approx 420$ микрон, то отношение выходов излучения пропорционально отношению длин путей электронов $l_e = T / \cos(\delta - \Theta_B)$ и $l_e = T / \cos(\delta + \Theta_B)$ для отражений (111) и $(1\bar{1}\bar{1})$, соответственно.

Следует подчеркнуть, что в цитируемой работе детектор оставался на месте, а измерение зависимости выхода излучения относительно центра рефлекса осуществлялось за счет изменения угла ориентации кристалла, то есть измерялась ориентационная зависимость, а не угловое распределение. В соответствии с закономерностью $\Theta_D = 2\Theta_B$ в случае, если отражающая плоскость направлена вертикально, угловое распределение в два раза шире ориентационной зависимости, чем и воспользовались авторы [Brenzinger et al., 1997]. Расчеты показывают, между угловым распределением и растянутой в два раза ориентационной зависимостью есть незначительная разница. Однако, следуя авторам цитируемой работы, будем говорить об угловом распределении излучения.

Как видно из рисунка 3, зависимость 2 для отражающей плоскости $(1\bar{1}\bar{1})$ существенно ближе к экспериментальным данным, чем зависимость 1. Полученное в результате расчета значение угловой плотности излучения $J_{calc} = 4.8 \cdot 10^{-3}$ фотон/(электрон*стерадиан) хорошо согласуется с измеренным значением $J_{exp} = (4.5 \pm 0.5) \cdot 10^{-3}$ фотон/(электрон*стерадиан) [Brenzinger et al., 1997]. Следовательно, эксперимент [Brenzinger et al., 1997] выполнен для отражающей плоскости $(1\bar{1}\bar{1})$. Различие рассчитанной и измеренной зависимостей может быть обусловлено погрешностью нормировки или, что более вероятно, поглощением фотонов материалом передней стенки детектора. Вклад дифракции реальных фотонов не учитывался, так как выход тормозного излучения подавлен эффектом плотности, а вклад ДПИ пренебрежимо мал, поскольку толщина кристалла более чем в пять раз превышает длину поглощения фотонов с такой энергией.

На рисунке 4а приведены рассчитанные угловые распределения выхода ПРИ, ДТИ, ДПИ и суммарного выхода когерентного излучения для порядка отражения (333) , соответственно, зависимости 1-4. Расчет выполнен для регистрации излучения от отражающей плоскости $(1\bar{1}\bar{1})$. На рисунке 4б приведены измеренные и рассчитанные распределения угловой плотности излучения. Следует отметить, что для отражающей плоскости (111) выход излучения будет примерно в два раза ниже.

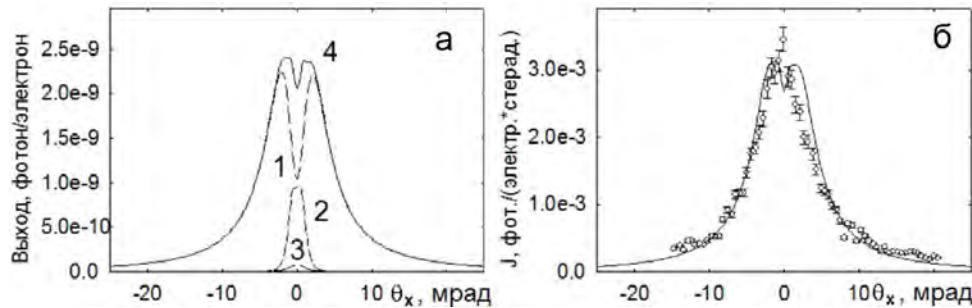


Рис. 4. Горизонтальное угловое распределение для отражения (333) и отражающей плоскости $(1\bar{1}\bar{1})$. а – Рассчитанные зависимости выхода излучения: 1 – ПРИ; 2 – ДПИ; 3 – ДТИ; 4 – ПРИ+ДПИ+ДТИ. б – распределение угловой плотности излучения. Точки – эксперимент [Brenzinger et al., 1997], кривая – расчет
Fig. 4. The horizontal angular distribution for the reflection (333) and the reflecting plane $(1\bar{1}\bar{1})$. а – Calculated dependences of the radiation yield: 1 – PXR; 2 – DTR; 3 – DB; 4 – PXR + DTR + DB. б – distribution of the angular density of radiation. Points – experiment [Brenzinger et al., 1997], curve – calculation

Из рисунка 4 а видно, что вклад ДПИ и ДТИ существенно изменил угловое распределение регистрируемого излучения. Из-за дифракции реальных фотонов и меньшего характерного угла вылета фотонов ПРИ провал в центре углового распределения (см. рисунок 3) практически отсутствует. Дополнительной причиной изменения соотношений вкладов ПРИ и дифрагированных реальных фотонов является разная зависимость их интенсивности от величины $f(\vec{g})$, как было отмечено в [Бакланов и др., 2007]. Интенсивность ПРИ пропорциональна $|f(\vec{g})|^2$, а интенсивность ДПИ и ДТИ величине $f(\vec{g})$. Вклад ДПИ, в том числе и из-за асимметрии отражения, сопоставим с интенсивностью в максимуме ПРИ. Вклад ДТИ сравнительно мал, так как $\omega_{333}=15.51$ кэВ $<$ $\gamma\omega_p=51.53$ кэВ. Как и для отражения $(1\bar{1}\bar{1})$ наблюдается удовлетворительное согласие результатов измерений и расчетов.

Следует отметить, что учет асимметрии отражающей плоскости относительно выходной поверхности увеличил вклад дифракции реальных фотонов на $\sim 30\%$. Это значительно улучшило согласие

результатов измерений с расчетом. Без него провал в центре зависимости был бы глубже, а согласие хуже. Необходимо подчеркнуть, что сопоставление результатов измерений работы [Brenzinger et al., 1997] и расчета не включает каких-либо масштабирующих коэффициентов за исключением предположения о геометрии измерений.

Уже упоминавшийся эксперимент [Takabayashi et al., 2017] выполнен для кристалла алмаза и следующих экспериментальных условий. Энергия электронов 255 МэВ, расходимость электронного пучка 0.25 мрад. Характерные размеры пучка на мишени в вертикальной и горизонтальной плоскости $\sigma_y \approx 0.9$ мм, $\sigma_x \approx 0.3$ мм, соответственно. Большая грань кристалла алмаза толщиной 50 $\mu\text{м}$ перпендикулярна оси $\langle 001 \rangle$. Для получения когерентного излучения от плоскости (110) с энергией фотонов $\omega_{220} = 17.7$ кэВ и $\Theta_{ph} \approx 2.9$ мрад кристалл разворачивался на угол $\Theta = \Theta_D/2 = 16.1^\circ$ вокруг вертикальной оси по направлению к детектору, а для исследования излучения от плоскости (111) с $\omega_{111} = 10.9$ кэВ и $\Theta_{ph} \approx 4.0$ мрад на угол 19.16° в противоположную сторону (см. рисунки 1б и 1а).

В качестве детектора использовалась позиционно-чувствительная рентгенографическая пластина типа SR (Imagine plate – IP) с химическим составом BaFBr:Eu²⁺, пространственным разрешением не хуже 50 $\mu\text{м}$, толщиной 112 $\mu\text{м}$ и плотностью 3.07 г/см³ [Meadowcroft et al., 2008], установленная на расстоянии 1 м от кристалла под углом $\Theta_D = 32.2^\circ$. В отличие от полупроводникового детектора IP-пластина регистрирует не отдельные фотоны, а поглощенную дозу, оставленную излучением в её рабочем объеме [Takabayashi et al., 2017]. Другими словами, регистрируется суммарное угловое распределение фотонов всех порядков отражения с учетом зависимости эффективности детектора и его отклика от их энергии. Под откликом детектора понимается средняя энергия, оставленная фотоном в детекторе.

В процессе обработки результатов измерений эксперимента [Takabayashi et al., 2017], опубликованных в работе [Внуков и др., 2019], для сопоставления результатов измерений и расчетов с помощью метода Монте-Карло по аналогии с методикой, описанной в работе [Goronov, Sidnin, Vnukov et al., 2017], проведено моделирование зависимости эффективности (кривая 1) и отклика IP-пластины (кривая 2) от энергии регистрируемого излучения. При проведении моделирования учитывалось только наличие атомов бария, брома и фтора, поскольку концентрация атомов европия в веществе детектора мала. Результаты моделирования приведены на рисунке 5.

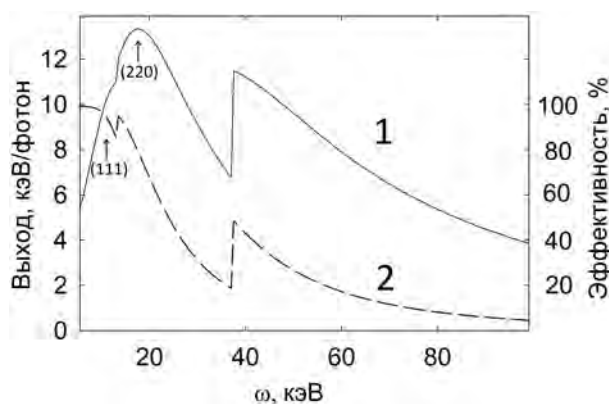


Рис. 5. Зависимость эффективности (1) и энергетического отклика (2) IP-пластины от энергии фотонов
Fig. 5. Dependence of the efficiency (1) and energy response (2) of an IP on the photon energy

Из рисунка видно, что эффективность детектора спадает с ростом энергии фотонов, за исключением области энергий вблизи края фотопоглощения бария, где наблюдается скачок эффективности. Зависимость энергетического отклика уменьшается более плавно, чем эффективность регистрации, то есть вклад более жесткого излучения в показания детектора выше. В частности, для одинаковой интенсивности излучения с энергиями $\omega_{220} = 17.7$ кэВ и $\omega_{111} = 10.9$ кэВ в первом случае показания детектора будут выше, так как энергетические отклики $\Delta E_{220} = 14.2$ кэВ/фотон и $\Delta E_{111} = 10.53$ кэВ/фотон, указанные стрелками на рисунке 5, отличаются почти в полтора раза.

Для подтверждения вывода о влиянии характеристик IP-пластины на измеряемые распределения на рисунке 6а приведены результаты расчета вертикальных угловых распределений выхода излучения для отражающей плоскости (111) и трех порядков отражения. Расчет выполнен для перемещения квадратного детектора со стороной 0.3 мм через центр рефлекса с учетом условий эксперимента [Takabayashi et al., 2017], включая размер пучка электронов на мишени и поглощение излучения на пути от кристалла до детектора [Внуков и др., 2019]. На рисунке 6б приведены угловые распределения отклика детектора при регистрации фотонов для трех порядков отражения (кривые 1-3) и результирующее угловое распределение – точки. Учтен вклад всех механизмов излучения, то есть ПРИ, ДПИ и ДТИ, причем для первого порядка отражения вклад дифрагированных

реальных фотонов в центре рефлекса не превышает 7% от интенсивности в максимуме, что сопоставимо с увеличением интенсивности излучения в минимуме зависимости из-за влияния конечных размеров пучка частиц на мишени [Внуков и др., 2019].

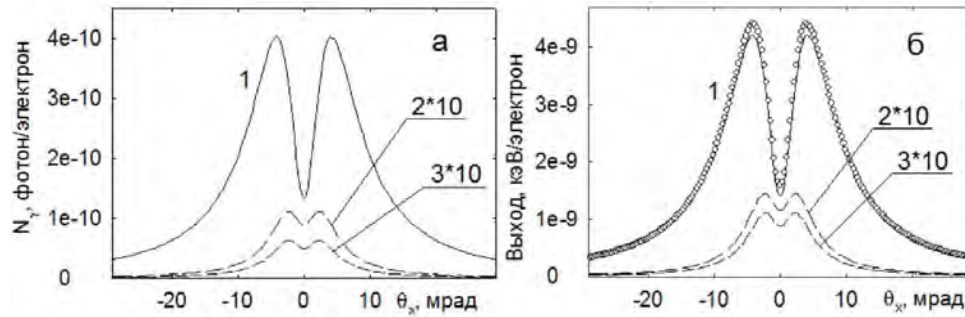


Рис. 6. Вертикальные угловые распределения для отражения от плоскости (111) и условий эксперимента [Takabayashi et al., 2017]. а – распределения фотонов для 1-3 порядков отражения. б – распределения энергии, оставленной фотонами в детекторе. Кривые – распределения для отдельных порядков отражения. Точки – результирующая зависимость

Fig. 6. Vertical angular distributions for reflection from the (111) plane and experimental conditions [Takabayashi et al., 2017]. а – photon distribution for 1-3 orders of reflection. б – distribution of energy left by photons in the detector. Curves are distributions for individual reflection orders. Points are the resulting dependency

Из рисунка видно, что вклад второго и третьего порядков отражения не превышает 2-3 процентов от интенсивности первого порядка отражения, поэтому форма углового распределения, измеренного с помощью IP-пластины, близка к угловому распределению фотонов первого порядка отражения, чем воспользовались для сопоставления результатов эксперимента с расчетом авторы работы [Blazhevich, Noskov 2019]. В то же время следует отметить, что форма результирующего углового распределения, измеряемая прибором, (точки) отличается от распределения для первого порядка отражения – кривая 1 на рисунке 6б. Наблюдается отличие и в соотношении интенсивности излучения и показаний детектора в процессе регистрации отдельных порядков отражения.

На рисунке 7 приведены результаты измерений вертикальных угловых распределений излучения для отражающих плоскостей (111) и (110), полученные в эксперименте [Takabayashi et al., 2017] с помощью IP-пластины, соответственно, точки и треугольники. Здесь же приведены расчетные зависимости. Из-за отсутствия информации об абсолютной чувствительности IP-пластины совмещение расчетных зависимостей с измеренными осуществлено с помощью масштабного множителя. Более подробное сопоставление результатов измерений и расчетов приведено в работе [Внуков и др., 2019].

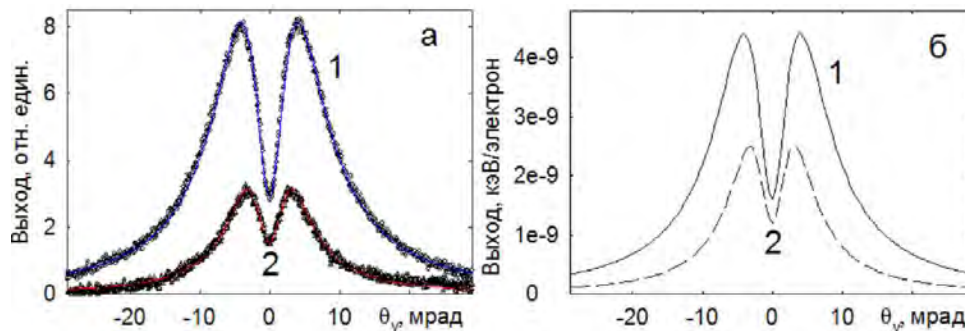


Рис. 7. Вертикальные угловые распределения излучения в эксперименте [Takabayashi et al., 2017]. а – измеренные и рассчитанные распределения для отражений (111) и (220), соответственно, точки, треугольники и кривые 1, 2. б – результаты расчета

Fig. 7. Vertical angular distributions of radiation in an experiment [Takabayashi et al., 2017]. а – measured and calculated distributions for reflections (111) and (220), respectively, points, triangles and curves 1, 2. б – calculation results

Как видно из рисунка, наблюдается хорошее согласие результатов измерений с расчетом во всем диапазоне углов наблюдения, что подтверждает правильность учета соотношения вкладов ПРИ и дифракции реальных фотонов и влияния размера пучка на кристалле на измеряемое угловое распределение. Подчеркнем, что такое же согласие наблюдается и для горизонтальных угловых распределений [Внуков и др., 2019].

Вместе с тем, следует отметить, что нормировочные константы для обеих отражающих плоскостей отличаются, см. соотношение зависимостей 1, 2 на рисунках 7а и 7б. Отношение измеренного выхода излучения для плоскости (111) с меньшей энергией фотонов к расчету больше, чем для плоскости (110). По-видимому, это обусловлено неполнотой информации о характеристиках IP-пластины. Например, меньшие значения ее толщины или плотности, чем использованные при проведении моделирования, могут привести именно к такому результату.

Другой причиной может быть неадекватность кинематической теории ПРИ для описания характеристик излучения в случае асимметричного рассеяния поля частицы [Блажевич, Носков 2006; Blazhevich, Noskov 2008; Blazhevich, Noskov 2019]. Следует подчеркнуть, что отношение зарегистрированного выхода излучения для плоскости (111) с асимметричной геометрией рассеяния к расчету в кинематическом приближении выше, чем для плоскости (110), тогда как в соответствии с цитированными работами оно должно быть в ϵ раз меньше.

Ответ на вопрос, какая из причин является правильной, может быть получен только при измерении характеристик излучения для двух идентичных отражающих плоскостей с разным значением асимметрии в одинаковых экспериментальных условиях. Например, для отражающих плоскостей (111) и ($\bar{1}\bar{1}$), либо для перпендикулярных им ($11\bar{2}$) и ($\bar{1}\bar{1}\bar{2}$) кристалла алмаза или кремния с входной гранью, перпендикулярной оси $\langle 001 \rangle$, см. рисунок 1.

4. Заключение. Результаты проведенных исследований кратко могут быть сформулированы следующим образом:

1) С помощью метода Монте-Карло реализован подход Дарвина и Принса о многократных переотражениях рентгеновских фотонов на отражающих плоскостях кристалла, учитывающий поляризацию излучения и возможность асимметрии отражающих плоскостей относительно выходной поверхности.

2) Асимметрия отражающей плоскости относительно выходной поверхности кристаллической мишени приводит к изменению соотношения интенсивности отраженных фотонов и вылетевших в первоначальном направлении в $\epsilon = \sin(\delta' \pm \Theta_B) / \sin(\delta' \mp \Theta_B)$ раз, где δ' – угол между поверхностью мишени и отражающей плоскостью, а Θ_B – угол между направлением фотона и плоскости.

3) Кинематическая теория ПРИ с учетом вклада дифракции реальных фотонов описывает результаты измерений угловых распределений излучения быстрых электронов в тонких кристаллах в направлении брэгговского рассеяния с погрешностью не хуже 10-15% как для симметричной, так и для асимметричной геометрии рассеяния поля частицы относительно выходной грани мишени.

4) Для окончательного ответа на вопрос о влиянии асимметрии рассеяния на интенсивность ПРИ необходимы измерения для идентичных отражающих плоскостей и разных значений асимметрии в одинаковых экспериментальных условиях.

Список литературы

1. Аккерман А. Ф., Грудский М. Я., Смирнов В. В. 1986. Вторичное электронное излучение из твердых тел под действием гамма-квантов. М.: Энергоатомиздат, 186.
2. Алейник А. Н., Балдин А. Н., Богомазова Е. А. и др. 2004. Экспериментальное обнаружение параметрического рентгеновского излучения вдоль скорости релятивистских электронов, движущихся в кристалле вольфрама. Письма в ЖЭТФ, 80(6): 447.
3. Амусья М. Я., Буймистров В. М., Зон Б. А. и др. 1987. Поляризационное тормозное излучение. М.: Наука, 320.
4. Бакланов Д. А., Балдин А. Н., Внуков И. Е., Нечаенко Д. А., Шатохин Р. А. 2007. Соотношение вкладов дифрагированного тормозного излучения и параметрического рентгеновского излучения в совершенных кристаллах. Вестник Харьковского национального университета имени В. Н. Каразина, 763. Серия физическая, «Ядра, частицы, поля», 1(33): 41–56.
5. Балдин А. Н., Внуков И. Е., Калинин Б. Н., Каратаева Е. А. 2006. О вкладе дифракции реальных фотонов в наблюдаемые спектры параметрического рентгеновского излучения электронов в совершенных кристаллах. Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования, 4: 72–85.
6. Барышевский В. Г., Феранчук И. Д. 1971. О переходном излучении гамма-квантов в кристалле. ЖЭТФ, 61: 944.
7. Барышевский В. Г., Дубовская И. Я. 1991. Дифракционные явления в процессах спонтанного и коллективного излучения релятивистских заряженных частиц в кристаллах. Итоги науки и техники. Сер. Пучки заряженных частиц и твердое тело, 4: 129–225.

8. Блажевич С. В., Носков А. В. 2006 Зависимость характеристик когерентного рентгеновского излучения релятивистского электрона в толстом кристалле от ориентации его входной поверхности. *Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования*, 4: 23–29.
9. Внуков И. Е., Гопонов Ю. А., Сиднин М. А., Шатохин Р. А., Sumitani K., Takabayashi Y. 2019. Измерение поперечных размеров пучка электронов по угловому распределению их когерентного излучения в кристалле. *Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования*, 6: 57–67.
10. Гарибян Г. М., Ян Ши 1971 Квантовая микроскопическая теория излучения равномерно движущейся заряженной частицы в кристалле. *ЖЭТФ*, 61: 930.
11. Гарибян Г. М., Ян Ши 1983 Рентгеновское переходное излучение. Ер.: Изд. АН АрмССР, 320.
12. Джеймс Р. 1950. Оптические принципы дифракции рентгеновских лучей. М.: Изд. Иностран. Лит, 464.
13. Клейнер В. П., Насонов Н. Н., Шляхов Н. А. 1992 Поляризационное тормозное излучение быстрой заряженной частицы в конденсированной среде. *УФЖ*, 37(1): 48.
14. Лапко В. П., Насонов Н. Н. 1990. О параметрическом механизме излучения быстрых заряженных частиц в конденсированной среде. *ЖТФ*, 1: 160–162.
15. Лобко А.С. 2006. Экспериментальные исследования параметрического рентгеновского излучения. Мн.: БГУ, 201.
16. Пинскер З.Г. 1982. Рентгеновская кристаллооптика. Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 392.
17. Потылицын А.П. 1998. Параметрическое рентгеновское излучение – обнаружение, исследования, возможности применения. *Изв. ВУЗов «Физика»*, 41(4): 26–31.
18. Artru X. 2019. Comment about the article Interpretation of the results of the experiment on generation of parametric X-radiation by relativistic electrons in a single-crystal target, by S. V. Blazhevich and A.V. Noskov. *Nucl. Instr. and Meth. in Phys. Res. B*, 441: 126–127.
19. Backe H., Rueda A., Lauth W., Glawiter N., El-Ghazaly M., Kunz P., Weber T. 2005. Forward diffracted parametric X radiation from a silicon single crystal. *Nucl. Instr. Meth. B*, 234: 138–147.
20. Baryshevsky V. G. 1997. Parametric X-ray radiation at a small angle near the velocity direction of the relativistic particle. *Nucl. Instr. and Meth. in Phys. Res. B*, 122: 13–18.
21. Berger M. J., Hubbell J. H. et al. 2017. Photon Cross Sections Database. NIST Standard Reference Database 8 (XGAM), <http://www.nist.gov/pml/data/xcom/index.cfm>
22. Blazhevich S. V., Noskov A. V. 2019. Interpretation of the results of the experiment on generation of parametric X-radiation by relativistic electrons in a single-crystal target. *Nucl. Instr. and Meth. in Phys. Res.*, 441: 119–125.
23. Blazhevich S. V., Noskov A. V. 2008 Coherent X-radiation of relativistic electrons in a single crystal under asymmetric reflection conditions. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section B: Beam Interactions with Materials and Atoms-Vol*, 266: 3770–3776.
24. Bogomazova E. A., Kalinin B. N., Naumenko G. A. et al. 2003. Diffraction of real and virtual photons in a pyrolytic graphite crystal as source of intensive quasimonochromatic X-ray beam. *Nucl. Instr. Meth. Phys. Res.*, 201: 276.
25. Brenzinger K.H., Herberg C., Limburg B. et. al. 1997. Investigation of the production mechanism of parametric X-ray radiation. *Z. Phys*, 358: 107.
26. Brenzinger K.-H., Limburg B., Backe H., Dambach S., Euteneuer H., Hagenbuck F., Herberg C., Kaiser K.H., Ketting O., Kube G. 1997. How narrow is the linewidth of parametric X-ray radiation. *Phys. Rev. Lett*, 279: 2462–2465.
27. Goponov Yu. A., Sidnin M. A., Vnukov I. E., Behrens C., Kube G., Lauth W., Gogolev A. S., Potylitsyn A. P. 2017. Spatial distribution of PXR generated by 855 MeV electrons: Comparison of simulation results with experimental data. *Nucl Instrum. Methods*, 402: 83.

28. Goponov Yu. A., Laktionova S. A., Sidnin M. A., Vnukov I. E. 2017. Ratio of the contributions real and virtual photons diffraction in thin perfect crystals. Comparison of calculation and experiment. Nucl. Instrum. Methods, 402: 92.
29. Laktionova S. A., Pligina O. O., Sidnin M. A., Vnukov I. E. 2014. Influence of real photons diffraction contribution on parametric X-ray observed characteristics. J. Phys.: Conf. Ser, 517.
30. Meadowcroft A. L., Bentley C. D., Stott E. N. 2008. Evaluation of the sensitivity and fading characteristics of an image plate system for x-ray diagnostics. Rev. Sci. Instrum, 79.
31. Nasonov N., Noskov A. 2003. On the parametric X-rays along an emitting particle velocity. Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section B: Beam Interactions with Materials and Atoms, 201(1): 67–77.
32. Nitta H. 1991. Kinematical theory of parametric X-ray radiation. Phys. Lett, 158: 270.
33. Nitta H. 1996. Theoretical notes on parametric X-ray radiation. Nucl. Instr. and Meth. in Phys. Res. B., 115: 401–404.
34. Papadakis J., Trikalinos C. 2013 Comparison of the results of kinematic and dynamic approximations for parametric X-ray radiation in the Bragg direction. Physica status solidi b-basic solid state physics, 250: 1410–1417.
35. Rullhusen R., Artru X., Dhez P. 1999. Novel Radiation Sources Using Relativistic Electrons. Singapore: World Scientific.
36. Takabayashi Y., Korotchenko K.B., Pivovarov Yu.L., Tuhfatullin T.A. 2017. Angular distributions of parametric X-ray radiation from a diamond crystal. Nucl. Instrum. Methods. B., 402: 79.

References

1. Akkerman A. F., Grudsky M. Ya., Smirnov V. V. 1986. Secondary electronic radiation from solids under the influence of gamma rays. M.: Energoatomizdat, 186 (in Russian).
2. Aleinik A. N., Baldin A. N., Bogomazova E. A. et al. 2004. Experimental Observation of Parametric X-Ray Radiation Directed Along the Propagation Velocity of Relativistic Electrons in a Tungsten Crystal. JETP Letters, 80: 393–397.
3. Amusya M. Ya., Buymistrov V. M., Zon B. A. et al. 1987. Polarization bremsstrahlung. M.: Nauka, 1987, 320 (In Russian).
4. Baklanov D. A., Baldin A. N., Vnukov I. E., Nechaenko D. A., Shatokhin R. A. 2007. The ratio of the contributions of diffracted bremsstrahlung and parametric x-ray radiation in perfect crystals. Bulletin of the Kharkov National University named after V. N. Karazin, 763.-physical series, «Nuclei, particles, fields», 1 (33): 41–56 (in Russian).
5. Baldin A. N., Vnukov I. E., Kalinin B. N., Karataeva E. A. 2006. About Real Photon Diffraction Contribution into Measured PXR Spectrum in Perfect Crystals. The Journal of Surface Investigation. X-ray, Synchrotron and Neutron Techniques.- vyp. 4: 72–85 (in Russian).
6. Baryshevsky V. G., Feranchuk I. D. 1971. On transition gamma-quantum radiation in crystal. Sov. Phys. JETP, 34: 502.
7. Baryshevsky V. G., Dubovskaya I. Ya. 1991. Diffraction phenomena in the processes of spontaneous and collective radiation of relativistic charged particles in crystals. Results of science and technology. Ser. Beams of charged particles and a solid structures, 4: 129–225.
8. Blazhevich S. V., Noskov A. V. 2006. Dependence of the Characteristics of Relativistic Electron Coherent X-Radiation in Thick Crystal on Its Input Surface Orientation. The Journal of Surface Investigation. X-ray, Synchrotron and Neutron Technique, 4: 23–29 (in Russian).
9. Vnukov I. E., Goponov Yu. A., Sidnin M. A., Shatokhin R. A., Sumitani K., Takabayashi Y. 2019. Measuring the Transverse Sizes of an Electron Beam by the Angular Distribution of the Coherent Radiation of Electrons in a Crystal. Journal of Surface Investigation: X-ray, Synchrotron and Neutron Techniques, 13: 515–524.
10. Garibyan G. M., Yan Shi 1971 Quantum microscopic theory of radiation by a charged particle moving uniformly in a crystal. Sov. Phys. JETP, 34: 495.

11. Garibyan G. M., Yan Shi 1983 X-ray transition radiation. -Er .: Ed. AN ArmSSR, 320 (in Russian).
12. James R. 1950. The optical principles of the diffraction of X-rays. London: G. Bell and Sons, 464.
13. Kleiner V.P., Nasonov N. N., Shlyakhov N. A. 1992. Polarization bremsstrahlung of a fast charged particle in a condensed medium. Ukr. Phys. J, 37(1): 48 (in Russian).
14. Lapko V. P., Nasonov N. N. 1990. Parametric mechanism of radiation of fast charged particles in a condensed medium. JTP.-Iss, 1: 160–162 (in Russian).
15. Lobko A. S. 2006. Experimental studies of parametric x-ray radiation. Mn.: BSU, 201 (in Russian).
16. Pinsker Z. G. 1984. Dynamical Scattering of X-rays in Crystals. -Berlin: Springer, 392.
17. Potylitsyn A. P. 1998. Parametric X-ray radiation – detection, research, application possibilities. Izv. VUZov. «Physics», 41(4): 26–31 (in Russian).
18. Artru X. 2019. Comment about the article Interpretation of the results of the experiment on generation of parametric X-radiation by relativistic electrons in a single-crystal target, by S.V. Blazhevich and A.V. Noskov. Nucl. Instr. and Meth. in Phys. Res. B., 441: 126–127.
19. Backe H., Rueda A., Lauth W., Glawiter N., El-Ghazaly M., Kunz P., Weber T. 2005. Forward diffracted parametric X radiation from a silicon single crystal. Nucl. Instr. Meth. B., 234: 138–147.
20. Baryshevsky V. G. 1997. Parametric X-ray radiation at a small angle near the velocity direction of the relativistic particle. Nucl. Instr. and Meth. in Phys. Res. B., 122: 13–18.
21. Berger M. J., Hubbell J. H. et al. 2017. Photon Cross Sections Database. NIST Standard Reference Database 8 (XGAM), <http://www.nist.gov/pml/data/xcom/index.cfm>
22. Blazhevich S. V., Noskov A. V. 2019. Interpretation of the results of the experiment on generation of parametric X-radiation by relativistic electrons in a single-crystal target. Nucl. Instr. and Meth. in Phys. Res. B., 441: 119–125.
23. Blazhevich S. V., Noskov A. V. 2008 Coherent X-radiation of relativistic electrons in a single crystal under asymmetric reflection conditions. Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section B: Beam Interactions with Materials and Atoms, 266: 3770–3776.
24. Bogomazova E. A., Kalinin B. N., Naumenko G. A. et al. 2003. Diffraction of real and virtual photons in a pyrolytic graphite crystal as source of intensive quasimonochromatic X-ray beam. Nucl. Instr. Meth. Phys. Res, 201: 276.
25. Brenzinger K. H., Herberg C., Limburg B. et. al. 1997. Investigation of the production mechanism of parametric X-ray radiation. Z. Phys. 358: 107.
26. Brenzinger K.-H., Limburg B., Backe H., Dambach S., Euteneuer H., Hagenbuck F., Herberg C., Kaiser K.H., Ketting O., Kube G. 1997. How narrow is the linewidth of parametric X-ray radiation. Phys. Rev. Let., 279: 2462–2465.
27. Goponov Yu. A., Sidnin M. A., Vnukov I. E., Behrens C., Kube G., Lauth W., Gogolev A. S., Potylitsyn A. P. 2017. Spatial distribution of PXR generated by 855 MeV electrons: Comparison of simulation results with experimental data. Nucl Instrum. Methods., 402: 83.
28. Goponov Yu. A., Laktionova S. A., Sidnin M. A., Vnukov I. E. 2017. Ratio of the contributions real and virtual photons diffraction in thin perfect crystals. Comparison of calculation and experiment. Nucl. Instrum. Methods, 402: 92.
29. Laktionova S. A., Pligina O. O., Sidnin M. A., Vnukov I. E. 2014. Influence of real photons diffraction contribution on parametric X-ray observed characteristics. J. Phys.: Conf. Ser., 517.
30. Meadowcroft A. L., Bentley C. D., Stott E. N. 2008. Evaluation of the sensitivity and fading characteristics of an image plate system for x-ray diagnostics. Rev. Sci. Instrum., 79.
31. Nasonov N., Noskov A. 2003. On the parametric X-rays along an emitting particle velocity. Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section B: Beam Interactions with Materials and Atoms -Vol. 201.- № 1.-P. 67-77.
32. Nitta H. 1991. Kinematical theory of parametric X-ray radiation. Phys. Lett., 158: 270.

33. Nitta H. 1996. Theoretical notes on parametric X-ray radiation. Nucl. Instr. and Meth. in Phys. Res. B., 115: 401–404.
34. Papadakis J., Trikalinos C. 2013 Comparison of the results of kinematic and dynamic approximations for parametric X-ray radiation in the Bragg direction. Physica status solidi b-basic solid state physics., 250: 1410–1417.
35. Rullhusen R., Artru X., Dhez P. 1999. Novel Radiation Sources Using Relativistic Electrons. Singapore: World Scientific.
36. Takabayashi Y., Korotchenko K.B., Pivovarov Yu.L., Tukhfatullin T.A. 2017. Angular distributions of parametric X-ray radiation from a diamond crystal. Nucl. Instrum. Methods. B., 402: 79.

Получена 15.06.2020

Внуков Игорь Евгеньевич – доктор физико-математических наук, профессор кафедры общей и прикладной физики института инженерных и цифровых технологий Белгородского государственного национального исследовательского университета

ул. Победы, 85, г. Белгород, Россия, 308015

E-mail: vnukov@bsu.edu.ru

Волков Иван Сергеевич – аспирант кафедры теоретической и математической физики института инженерных и цифровых технологий Белгородского государственного национального исследовательского университета

E-mail: volkov_ivan_mb@mail.ru

Гопонов Юрий Александрович – аспирант кафедры теоретической и математической физики института инженерных и цифровых технологий Белгородского государственного национального исследовательского университета

E-mail: beijod93@mail.ru

Сиднин Михаил Александрович – стажер кафедры теоретической и математической физики института инженерных и цифровых технологий Белгородского государственного национального исследовательского университета

E-mail: mikhailsidnin@gmail.com

Шатохин Роман Александрович – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры организации и технологии защиты информации Белгородского университета кооперации, экономики и права,

ул. Садовая, 116а, г. Белгород, Россия, 38023

E-mail: ShatokhinR@yandex.ru