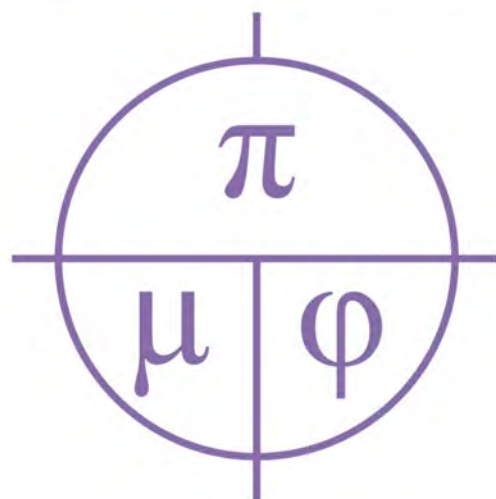


ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА & ФИЗИКА

APPLIED MATHEMATICS & PHYSICS





Прикладная математика & Физика

2020. Том 52, № 3

Основан в 1995 г. Журнал включен в Перечень ВАК рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней кандидата и доктора наук (01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ, 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление, 01.04.07 – физика конденсированного состояния). Ранее журнал издавался под названием «Научные ведомости Белгородского государственного университета. Математика. Физика».

УЧРЕДИТЕЛЬ:

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Белгородский государственный национальный исследовательский университет».

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:

Главный редактор: В. Б. Васильев, доктор физико-математических наук, НИУ «БелГУ»;

Заместители главного редактора: С. М. Ситник, доктор физико-математических наук, НИУ «БелГУ», Математика; А. В. Носков, доктор физико-математических наук, НИУ «БелГУ», Физика. Математическое моделирование;

Ответственный секретарь: О. В. Чернова, кандидат физико-математических наук, НИУ «БелГУ».

ЧЛЕНЫ РЕДАКЦИОННОЙ КОЛЛЕГИИ:

Ю. А. Алхутов, д-р физ.-мат. наук, Владимир, Россия;
А. Ашыралыев, д-р физ.-мат. наук, Алматы, Казахстан;
С. В. Блажевич, д-р физ.-мат. наук, Белгород, Россия;
А. Н. Беляков, д-р физ.-мат. наук, Белгород, Россия;
А. Г. Брусенцев, д-р физ.-мат. наук, Белгород, Россия;
Ю. П. Вирченко, д-р физ.-мат. наук, Белгород, Россия;
А. В. Глушак, д-р физ.-мат. наук, Белгород, Россия;
С. Б. Дабагов, д-р физ.-мат. наук, Москва, Россия;
А. Н. Куликов, д-р физ.-мат. наук, Ярославль, Россия;
Д. М. Левин, д-р физ.-мат. наук, Тула, Россия;
И. С. Ломов, д-р физ.-мат. наук, Москва, Россия;
В. В. Меньших, д-р физ.-мат. наук, Воронеж, Россия;
А. И. Назаров, д-р физ.-мат. наук, Санкт-Петербург, Россия;
Е. Ю. Панов, д-р физ.-мат. наук, Великий Новгород, Россия;
О. М. Пенкин, д-р физ.-мат. наук, Алматы, Казахстан;
И. П. Половинкин, д-р физ.-мат. наук, Воронеж, Россия;
Е. В. Радкевич, д-р физ.-мат. наук, Москва, Россия;
А. П. Солдатов, д-р физ.-мат. наук, Москва, Россия;
В. Е. Федоров, д-р физ.-мат. наук, Челябинск, Россия;
М. В. Шитикова, д-р физ.-мат. наук, Воронеж, Россия;
А. А. Шибков, д-р физ.-мат. наук, Тамбов, Россия.

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор). Выходит 4 раза в год.

Выпускающий редактор: Л. П. Коханова Гарнитура Times. Уч. изд. л.: 5,3

Корректурa: Ю. В. Ивахненко Дата выхода 30.09.2020.

Компьютерная верстка: О. В. Чернова Оригинал-макет подготовлен отделом

Оригинал-макет: В. Б. Васильев объединенной редакции научных журналов НИУ «БелГУ»

E-mail: vasilyev_v@bsu.edu.ru 308015, г. Белгород, ул. Победы, 85.

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

Ю. П. Вирченко

Мультипотентные множества в однородных коммутативных моноидах и бинарная проблема Гольдбаха **173**

А. Г. Баскаков, И. А. Криштал, Н. Б. Ускова

Метод подобных операторов в спектральном анализе операторных бесконечных матриц. Примеры I. **185**

Н. В. Королев, А. А. Ларин

Об одной задаче на собственные значения для сингулярного эллиптического оператора, рассматриваемого в модельной трехмерной области **195**

В. Ш. Ройтенберг

О структуре множества грубых однородных полиномиальных векторных полей на плоскости **204**

ФИЗИКА. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

А. В. Бердниченко, С. И. Кучеев

Доменная переориентация нематика в поле $p - n$ перехода в сенсоре пара органических реагентов **214**

В. С. Захвалинский, Е. А. Пиллюк, Т. Б. Никуличева, Н. О. Исаева, А. В. Неженцев

Электрические и оптические свойства тонких пленок $(\text{Cd}_{1-x-y}\text{Zn}_x\text{Mn}_y)_3\text{As}_2$ ($x + y = 0.4$; $y = 0.04$), полученных магнетронным распылением **224**

Некролог

234



Applied Mathematics & Physics

2020. Volume 52, № 3

Founded in 1995. The journal is included into the List of Higher Attestation Commission of peer-reviewed scientific publications where the main scientific results of dissertations for obtaining scientific degrees of a candidate and doctor of science should be published (01.01.01 – material, complex and functional analysis, 01.01.02 – differential equations, dynamical systems and optimal control, 01.04.07 – condensed matter physics). Previously, the magazine was published under the title «Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics. Physics».

FOUNDER:

Federal state autonomous educational establishment of higher education
«Belgorod National Research University».

EDITORIAL BOARD:

Chief Editor: V. B. Vasilyev, Dr.Sc., Ph.D., Belgorod National Research University;
Deputy Editor-in-Chief: S. M. Sitnik, Dr.Sc., Ph.D., Belgorod National Research University, Mathematics;
A. V. Noskov, Dr.Sc., Ph.D., Belgorod National Research University, Physics. Mathematical modeling;
Executive Secretary: O. V. Chernova, PhD, Belgorod National Research University.

EDITORIAL BOARD MEMBERS:

Yu. A. Alkhutov, Dr.Sc., Ph.D., Vladimir, Russia;
A. Ashyralyev, Dr.Sc., Ph.D., Almaty, Kazakhstan;
S. V. Blazhevich, Dr.Sc., Ph.D., Belgorod, Russia;
A. N. Belyakov, Dr.Sc., Ph.D., Belgorod, Russia;
A. G. Brusentsev, Dr.Sc., Ph.D., Belgorod, Russia;
Yu.P. Virchenko, Dr.Sc., Ph.D., Belgorod, Russia;
A. V. Glushak, Dr.Sc., Ph.D., Belgorod, Russia;
S. B. Dabagov, Dr.Sc., Ph.D., Moscow, Russia;
A. N. Kulikov, Dr.Sc., Ph.D., Yaroslavl, Russia;
D. M. Levin, Dr.Sc., Ph.D., Tula, Russia;
I. S. Lomov, Dr.Sc., Ph.D., Moscow, Russia;
V. V. Menshih, Dr.Sc., Ph.D., Voronezh, Russia;
A. I. Nazarov, Dr.Sc., Ph.D., St. Petersburg, Russia;
E. Yu. Panov, Dr.Sc., Ph.D., Velikiy Novgorod, Russia;
O. M. Penkin, Dr.Sc., Ph.D., Almaty, Kazakhstan;
I. P. Polovinkin, Dr.Sc., Ph.D., Voronezh, Russia;
E. V. Radkevich, Dr.Sc., Ph.D., Moscow, Russia;
A. P. Soldatov, Dr.Sc., Ph.D., Moscow, Russia;
V. E. Fedorov, Dr.Sc., Ph.D., Chelyabinsk, Russia;
M. V. Shitikova, Dr.Sc., Ph.D., Voronezh, Russia;
A. A. Shibkov, Dr.Sc., Ph.D., Tambov, Russia.

The journal has been registered at the Federal service for supervision of communications information technology and mass media (Roskomnadzor). Publication frequency: 4 /year.

Commissioning Editor L. P. Kokhanova
Proofreading Yu. V. Ivakhnenko
Computer imposition O. V. Chernova
Dummy layout by V. B. Vasilyev
E-mail: vasilyev_v@bsu.edu.ru

Typeface Times. Publisher's signature: 5,3
Date of publishing 30.09.2020.
The layout is presented by Department of the united
Editorial Board of Scientific Journals Belgorod
National Research University
Address: 85 Pobeda St., Belgorod, 308015, Russia

CONTENTS

MATHEMATICS

<i>Yu. P. Virchenko</i>	
Multipotent sets in uniform commutative monoids and binary Goldbach problem	173
<i>A. G. Baskakov, I. A. Krishtal, N. B. Uskova</i>	
The method of similar operators in the spectral analysis of infinite operator matrices. Examples I.	185
<i>N. V. Korolev, A. A. Larin</i>	
On a problem of eigenvalues for a singular elliptic operator considered in the model three-dimensional domain	195
<i>V. Sh. Roitenberg</i>	
On the structure of the set of homogeneous polynomial vector fields on the plane	204

PHYSICS. MATHEMATICAL MODELING

<i>A. V. Berdnichenko, C. I. Kucheev</i>	
Domain reorientation of nematic in $p - n$ junction field in sensor of organic reagents vapor	214
<i>V. S. Zakhvalinskii, E. A. Pilyuk, T. B. Nikulicheva, N. O. Isaeva, A. V. Nejencev</i>	
Electrical and optical properties of thin films $(\text{Cd}_{1-x-y}\text{Zn}_x\text{Mn}_y)_3\text{As}_2$ ($x + y = 0.4$; $y = 0.04$) prepared by magnetron sputtering	224
Obituary	234

МАТЕМАТИКА

УДК 512.532
MSC 06F05, 20M14, 11P32

DOI 10.18413/2687-0959-2020-52-3-173-184

МУЛЬТИПОТЕНТНЫЕ МНОЖЕСТВА В ОДНОРОДНЫХ КОММУТАТИВНЫХ МОНОИДАХ И БИНАРНАЯ ПРОБЛЕМА ГОЛЬДБАХА

Ю. П. Вирченко

Белгородский национальный исследовательский университет,
Белгород, 308015, Россия

E-mail: virch@bsu.edu.ru

Аннотация. Вводится понятие о k -потентных множествах в моноидах, $k \in \mathbb{N}$. Устанавливаются их простейшие свойства. Выделяется класс однородных моноидов, обладающих набором образующих элементов. Устанавливаются простейшие необходимые свойства того, чтобы фиксированное множество в таком моноиде было k -потентным. При наличии коммутативности в моноидах устанавливается изоморфизм каждого из них моноиду $\mathbb{N}_+^{\mathfrak{J}}$ с соответствующим ему множеством меток \mathfrak{J} . Для коммутативных однородных моноидов, обладающих множеством образующих, доказываются необходимые и достаточные условия для k -потентности их подмножеств. Дается приложение этого результата к анализу т. н. бинарной проблемы Гольдбаха в аддитивной теории чисел.

Ключевые слова: коммутативность, моноид, мультипотентное множество, однородность, простое число, цикл.

Для цитирования: Вирченко Ю. П. 2020. Мультипотентные множества в однородных коммутативных моноидах и бинарная проблема Гольдбаха. Прикладная математика & Физика. 52(3): 173–184.

DOI 10.18413/2687-0959-2020-52-3-173-184

MULTIPOTENT SETS IN UNIFORM COMMUTATIVE MONOIDS AND BINARY GOLDBACH PROBLEM

Yu. P. Virchenko

Belgorod National Research University,
Belgorod, 308015, Russia

E-mail: virch@bsu.edu.ru

Received July 7, 2020

Abstract. The concept of k -potent sets in monoids, $k \in \mathbb{N}$ is introduced. Their simple properties are found. The class of uniform monoids with generated elements is selected. The simplest necessary conditions are found in order the fixed set in such monoids is the k -potent one. It is proved that each commutative uniform monoid with the system of generated elements is isomorphic to the monoid $\mathbb{N}_+^{\mathfrak{J}}$ with the correspond label set \mathfrak{J} . For such monoids the necessary and sufficient conditions of the k -potentiality of sets in it are proved. It is proposed the application of such a result to the analysis of the so-called binary Goldbach problem in additive number theory.

Key words: commutativity, monoid, multipotent set, uniformity, prime, cycle.

For citation: Virchenko Yu. P. 2020. Multipotent sets in uniform commutative monoids and binary Goldbach problem. Applied Mathematics & Physics. 52(3): 173–184 (in Russian). DOI 10.18413/2687-0959-2020-52-3-173-184

1. Введение. Понятие о мультипотентных, в частности, квадратентных множествах в моноидах возникает, естественным образом, как обобщение представления о множествах, которые являются объектом изучения в некоторых задачах аддитивной теории чисел, связанных с суммами чисел со специальными свойствами. Таковыми являются, например, задача о представлении чисел из \mathbb{N} в виде сумм n -х степеней фиксированного числа натуральных чисел – т. н. проблема Варинга [15] или задача о представлении всех нечетных чисел в виде сумм трех простых чисел – проблема Гольдбаха [3]. Замечательно, что при алгебраическом анализе указанных задач оказывается важным только лишь то, что на изучаемом множестве \mathfrak{A} элементов задана, обозначаемая посредством знака $+$, бинарная алгебраическая ассоциативная операция коммутативной композиции так, что для любых двух элементов $x \in \mathfrak{A}$, $y \in \mathfrak{A}$ определен элемент $x + y \in \mathfrak{A}$. Задание ассоциативной операции превращает множество \mathfrak{A} в *полугруппу*, в частности, коммутативную. В связи с таким положением, настоящая работа посвящена описанию общей абстрактной постановки и выработки подхода к решению указанных выше и родственных им задач.

Пусть \mathfrak{A} — полугруппа с единицей e , в общем случае, некоммутативная, то есть \mathfrak{A} является моноидом [1]. Операцию композиции обозначим посредством $*$. В соответствии с этим, степень d любого элемента $x \in \mathfrak{A}$ будем обозначать посредством x_*^d . Наличие единицы не ограничивает общности рассмотрения, так как любую полугруппу \mathfrak{A} , при отсутствии в ней единицы, всегда можно дополнить новым элементом e , который обладает свойствами единицы, то есть для любого элемента $x \in \mathfrak{A}$ имеет место $x * e = e * x = x$, при этом расширив таблицу умножения в \mathfrak{A} .

Определим, на основе операции $*$ в моноиде \mathfrak{A} , аналогичную операцию на классе $P(\mathfrak{A}) = \{\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A} : \mathfrak{B} \neq \emptyset\}$ всех непустых подмножеств из \mathfrak{A} . Пусть $\mathfrak{B}_j \subset \mathfrak{A}$, $j = 1, 2$ — любая пара подмножеств из \mathfrak{A} . Определим подмножество $\mathfrak{B} = \{x : x = y_1 * y_2, y_j \in \mathfrak{B}_j, j = 1, 2\} \subset \mathfrak{A}$, которое мы будем обозначать посредством $\mathfrak{B}_1 * \mathfrak{B}_2$ так, что

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_1 * \mathfrak{B}_2. \quad (1)$$

Отображение $\mathfrak{A} \times \mathfrak{A} \mapsto \mathfrak{A}$, которое сопоставляет паре $\langle \mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2 \rangle$ множество (1), определяет на классе $P(\mathfrak{A})$ бинарную ассоциативную и коммутативную операцию $*$, тем самым, превращает этот класс в коммутативный моноид, единицей которого служит одноэлементное подмножество $\{e\}$. На основе операции $*$ на классе $P(\mathfrak{A})$ вводится понятие о степени $d \in \mathbb{N}$ любого подмножества $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$, которую мы будем обозначать, также как и в моноиде \mathfrak{A} , посредством \mathfrak{B}_*^d . А именно, для любого $d \in \mathbb{N}$ положим $\mathfrak{B}_*^{d+1} = \mathfrak{B}_*^d * \mathfrak{B}$, $d \in \mathbb{N}$ и, посредством этого соотношения, определим, индуктивным образом, множества \mathfrak{B}_*^d , $d \in \mathbb{N}$. Введем теперь базовое понятие k -потентного множества.

Определение 1. Подмножество \mathfrak{B} моноида \mathfrak{A} будем называть мультипотентным порядка $k \in \mathbb{N}$ (k -потентным), если имеет место равенство $\mathfrak{B}_*^k = \mathfrak{A}$.

В частности, при $k = 2$ такое множество \mathfrak{B} мы будем называть квадрупотентным. Для него имеет место

$$\mathfrak{B}_*^2 = \{x \in \mathfrak{A} : x = y * z, y, z \in \mathfrak{B}\} = \mathfrak{A}. \quad (2)$$

Основной задачей развиваемой далее теории мультипотентных множеств является установление признаков, на основе которых можно было бы судить, является ли k -потентным заданное подмножество $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$.

2. Моноиды. Пусть \mathfrak{B} — подмоноид моноида \mathfrak{A} , то есть такое подмножество $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$, которое замкнуто относительно операции $*$ так, что для любой пары подмножеств $\mathfrak{B}_j \subset \mathfrak{B}$, $j = 1, 2$ имеет место $\mathfrak{B}_1 * \mathfrak{B}_2 \subset \mathfrak{B}$.

Определение 2. Пусть $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{A}$. Подмоноид $M(\mathfrak{C})$ называется минимальным по отношению к \mathfrak{C} , если любой подмоноид \mathfrak{B} , содержащий \mathfrak{C} , обязательно содержит $M(\mathfrak{C})$.

Множество \mathfrak{C} будем называть порождающим минимальный моноид $M(\mathfrak{C})$. В частности, если $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{A}$ и $M(\mathfrak{C}) = \mathfrak{A}$, то \mathfrak{C} порождает моноид \mathfrak{A} . Справедливо утверждение.

Теорема 1. Для любого моноида \mathfrak{A} и любого множества $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{A}$ существует единственный минимальный моноид $M(\mathfrak{C}) \subset \mathfrak{A}$.

□ Рассмотрим множество

$$\mathfrak{B} = \bigcup_{d=0}^{\infty} \mathfrak{C}_*^d, \quad \mathfrak{C}_*^0 = \{e\}. \quad (3)$$

Пусть x_j , $j = 1 \div d$ — набор любых отличных от e элементов моноида, не обязательно различных между собой. Тогда элемент $x_1 * \dots * x_d \in \mathfrak{B}_*^d$ и, согласно определению моноида, он принадлежит любому моноиду, содержащему элементы x_j , $j = 1 \div d$. Следовательно, любой такой элемент принадлежит $M(\mathfrak{C})$ и поэтому, ввиду произвольности $d \in \mathbb{N}$, $M(\mathfrak{C}) \supset \mathfrak{B}$.

С другой стороны, \mathfrak{B} является моноидом, ввиду замкнутости этого множества относительно операции $*$. В самом деле, если $y_j \in \mathfrak{B}$; $j = 1, 2$, то существуют такие числа $d_1 \in \mathbb{N}_+$ и $d_2 \in \mathbb{N}_+$, что $y_j \in \mathfrak{B}_*^{d_j}$; $j = 1, 2$. Тогда существуют такие последовательности $\langle x_1^{(j)}, \dots, x_{d_j}^{(j)} \rangle$ элементов из \mathfrak{C} , что $y_j = x_1^{(j)} \dots x_{d_j}^{(j)}$, $j = 1, 2$. Отсюда следует, что $y_1 * y_2 = x_1^{(1)} * \dots * x_{d_1}^{(1)} * x_1^{(2)} * \dots * x_{d_2}^{(2)} \in \mathfrak{B}_*^{d_1} * \mathfrak{B}_*^{d_2} = \mathfrak{B}_*^{d_1+d_2}$, то есть $y_1 * y_2 \in \mathfrak{B}$.

Так как \mathfrak{B} — моноид, содержащий \mathfrak{C} , то $\mathfrak{B} \supset M(\mathfrak{C})$. Из полученных двух противоположных включений следует, что $\mathfrak{B} = M(\mathfrak{C})$. ■

Следствие 1. Минимальный моноид $M(\mathfrak{C})$, порожденный множеством $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{A}$, состоит из всех произведений $x = x_1 * x_2 * \dots * x_l$, составляемых из компонент последовательностей $\langle x_1, x_2, \dots, x_l \rangle$, где $x_j \in \mathfrak{C}$, $j = 1 \div l$, $l \in \mathbb{N}$. Если моноид \mathfrak{A} коммутативен, то элементы x моноида $M(\mathfrak{C})$ определяются множеством пар $\{(y_j, m_j); j = 1 \div d\}$, где x_j — различные элементы из \mathfrak{C} , $m_j \in \mathbb{N}$, $j = 1 \div d$ и каждый из них представим в виде $m_1 y_1 + \dots + m_d y_d$, $m_1 + \dots + m_d = l$ с $m_j y_j \equiv (y_j)_+^{m_j}$, $j = 1 \div d$.

Определение 3. Если для моноида \mathfrak{A} найдется такое порождающее его множество \mathfrak{B}_0 , которое не содержит в себе никакого другого множества, порождающего моноид \mathfrak{A} , то множество \mathfrak{B}_0 называется системой образующих элементов моноида \mathfrak{A} , а его элементы — образующими моноида.

Замечание 1. Для заданного моноида \mathfrak{A} система образующих не обязана существовать.

Замечание 2. Если для элемента x моноида \mathfrak{A} определен обратный ему элемент y такой, что $x * y = e$ (в частности, такое положение имеет место, если \mathfrak{A} является группой с операцией $*$), и если $x \in \mathfrak{B}_0$, то с точки зрения Определения 3, $y = x^{-1}$ может входить в \mathfrak{B}_0 как независимый элемент.

Если множество \mathfrak{A} конечно, то соответствующий моноид с операцией $*$ будем называть конечным. В противном случае – бесконечным. Приведем пример простейшего конечного моноида.

Пример 1. Моноид $\mathfrak{A} = \{0, 1, 2, \dots, d - 1\}$, $d \geq 2$ с операцией $*$ сложения по модулю d и единичным элементом $e = 0$. Этот моноид конечен, коммутативен и имеет один образующий элемент $x = 1$.

Заметим, что в случае, когда моноид \mathfrak{A} обладает множеством образующих, и он является минимальным для некоторого множества $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{A}$, $M(\mathfrak{C}) = \mathfrak{A}$, совсем необязательно, что образующие принадлежат \mathfrak{C} . В моноиде Примера 1 при $d = 6$ множество $\mathfrak{C} = \{2, 3\}$ его порождает, но содержит образующий элемент моноида – число 1. Будем говорить, что:

Определение 4. Моноид \mathfrak{A} содержит цикл, если в нем существует такой элемент a , для которого имеется пара элементов x и y , не совпадающих одновременно с e и таких, что выполняется равенство $x * a * y = a$.

Моноид примера 1 содержит цикл, у которого $a = e = 0$, $d = n$ и $y_j = 1$, $j = 1 \div n$, так как $1_n^1 = \underbrace{(1 + \dots + 1)}_n \bmod n = 0$ и $x_i = 0$, $i = 1 \div m$.

Легко видеть, что в конечных моноидах всегда имеется цикл, так как взяв произвольный элемент z конечного моноида \mathfrak{A} и построив последовательность $\langle z_l^l; l = 1 \div n \rangle$, ввиду конечности \mathfrak{A} , для любого элемента $z^m \equiv a$ получим, что при достаточно большом $n > m$ выполняется $a * z^{n-m} = a$.

Заметим также, что если моноид \mathfrak{A} с операцией $*$ для какого-то элемента x имеет обратный элемент x^{-1} , $e = x * x^{-1}$ и, в частности, если моноид является группой относительно этой операции, то он, тривиальным образом, содержит цикл $x = x * x^{-1} * x$.

В настоящей работе мы будем рассматривать моноиды, у которых отсутствуют циклы. В связи этим, введем

Определение 5. Если в моноиде \mathfrak{A} отсутствуют циклы, то такой моноид называется направленным. Имеет место

Теорема 2. Если моноид \mathfrak{A} направленный и обладает набором \mathfrak{B}_0 образующих его элементов, то этот набор определен однозначным образом.

□ Положим, имеются два набора \mathfrak{B}_0 и \mathfrak{B}'_0 образующих элементов так, что их симметрическая разность не пуста $(\mathfrak{B}'_0 \setminus \mathfrak{B}_0) \cup (\mathfrak{B}_0 \setminus \mathfrak{B}'_0) \neq \emptyset$. Положим, для определенности, что $x \in \mathfrak{B}_0 \setminus \mathfrak{B}'_0 \neq \emptyset$. Тогда этот элемент представим в виде композиции образующих набора $\mathfrak{B}'_0: x = x'_1 * \dots * x'_l$, $x'_j \in \mathfrak{B}'_0$, $j = 1 \div l$. В свою очередь, каждая из образующих x'_j представима в виде композиции образующих элементов из набора \mathfrak{B}_0 :

$$x'_j = x_{k_1^{(j)}} * \dots * x_{k_{m_j}^{(j)}}; \quad x_{k_s^{(j)}} \in \mathfrak{B}_0, \quad s = 1 \div m_j; \quad j = 1 \div l.$$

Отсюда следует, что

$$x = (x_{k_1^{(1)}} * \dots * x_{k_{l_1}^{(1)}}) * \dots * (x_{k_1^{(l)}} * \dots * x_{k_{m_l}^{(l)}}). \quad (4)$$

Если в последовательности сомножителей присутствует элемент x , как один из образующих элементов моноида \mathfrak{A} , то это означает, что в \mathfrak{A} имеется цикл и это противоречит направленности моноида. Если же в этой последовательности элемент x отсутствует, то это противоречит тому, что он входит в набор образующих элементов, так как, ввиду представления в виде (4), его можно исключить из набора \mathfrak{B}_0 . ■

Замечание 3. Если моноид \mathfrak{A} обладает системой образующих \mathfrak{B}_0 , то, согласно Теореме 1, каждый элемент $x \in \mathfrak{A}$ содержится в одном из множеств $(\mathfrak{B}_0)_s^d$, $d \in \mathbb{N}_+$. Однако, даже в случае направленности моноида \mathfrak{A} , число d определено, вообще говоря, не единственным образом.

В дальнейшем, мы полагаем, что рассматриваются только направленные и, следовательно, бесконечные моноиды. Приведем примеры таких моноидов. Имея в виду предмет настоящей работы, все моноиды в приводимых ниже примерах коммутативны.

В примерах 2-5 числовое множество \mathfrak{A} имеют счетную мощность. Это, во-первых, моноиды, связанные с натуральными числами.

Пример 2. Моноид $\mathfrak{A} = \mathbb{N} \cup \{0\} \equiv \mathbb{N}_+ = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ с операцией сложения натуральных чисел. Он имеет один образующий элемент $1 \in \mathbb{N}_+$. Единичей моноида является $0 \in \mathbb{N}_+$.

Пример 3. Моноид $\mathfrak{A} = \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ с операцией умножения натуральных чисел. Используя основную теорему арифметики, заключаем, что он имеет бесконечный набор \mathfrak{B}_0 образующих, которые представляются множеством простых натуральных чисел \mathfrak{P} .

Следующие примеры связаны с рациональными числами.

Пример 4. Моноид $\mathfrak{A} = \mathbb{Q} = \{p/q \in \mathbb{Q} : p \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{N}\}$, состоящий из положительных рациональных чисел. Он имеет бесконечный набор \mathfrak{B}_0 образующих, который состоит из всех дробей p/q , у которых числитель и знаменатель являются не равными друг другу простыми числами.

Пример 5. Моноид $\mathbb{Q}_+ = \mathbb{Q} \cup \{0\}$ с операцией сложения рациональных чисел. Он не обладает множеством образующих. Последнее связано с тем, что любое множество \mathfrak{B} дробей $p/q \in \mathbb{Q}_+$, которое могло бы быть множеством образующих, при любом s^{-1} , $s \in \mathbb{N}$, можно сузить, ограничив его только дробями из $\mathfrak{B} \cap (0, s^{-1})$.

Моноиды, связанные с положительными действительными числами, которые имеют мощность континуума.

Пример 6. Моноиды с множествами $\mathfrak{A} = (0, \infty)$ и $\mathfrak{A} = [0, \infty)$ с операциями умножения и сложения действительных чисел, соответственно. Они не имеют множества образующих по причине, указанной в предыдущем примере.

Пусть \mathfrak{A}_1 и \mathfrak{A}_2 – два моноида. Обозначим посредством $\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2$ моноид, который будем называть прямым произведением моноидов \mathfrak{A}_1 и \mathfrak{A}_2 , у которого множеством элементов служит декартово произведение множеств \mathfrak{A}_1 и \mathfrak{A}_2 , а операция композиции определена следующим образом. Для любых двух пар $a^{(1)} = \langle a_1^{(1)}, a_2^{(1)} \rangle$ и $a^{(2)} = \langle a_1^{(2)}, a_2^{(2)} \rangle$ из $\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2$ так, что $a_j^{(i)} \in \mathfrak{A}_i$, $i = 1, 2$; $j = 1, 2$, их композиция в моноиде $\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2$ равна $a^{(1)} * a^{(2)} \equiv \langle a_1^{(1)}, a_2^{(1)} \rangle * \langle a_1^{(2)}, a_2^{(2)} \rangle = \langle a_1^{(1)} * a_1^{(2)}, a_2^{(1)} * a_2^{(2)} \rangle$.

Понятие прямого произведения моноидов распространяется на произвольный упорядоченный набор $\langle \mathfrak{A}^{(j)}; j = 1 \div d \rangle$ моноидов индукцией по его длине d . А именно, прямое произведение $\mathfrak{A}_1 \times \dots \times \mathfrak{A}_d$ компонент этого набора определяется на основе индукционного шага

$$\mathfrak{A}_1 \times \dots \times \mathfrak{A}_d \times \mathfrak{A}_{d+1} = (\mathfrak{A}_1 \times \dots \times \mathfrak{A}_d) \times \mathfrak{A}_{d+1}$$

от значения d к $d + 1$.

Принимая данное определение прямого произведения моноидов, дальнейшие примеры направленных моноидов, в конструкции которых используются числовые множества, строятся на основе каждого из моноидов, указанных в примерах 2-6, посредством построения их прямых произведений, в частности, степеней (в смысле прямого произведения) одного и того же моноида, кратность которых может быть как конечной, так и бесконечной. В последнем случае кратность степени может иметь любое бесконечное кардинальное число. Легко видеть, что во всех моноидах, являющихся степенями одного из моноидов примеров 2-6, реализуется точно такая же ситуация, с точки зрения существования в них множества образующих, какая имеет место в исходном моноиде, степень которого рассматривается.

3. Минимальные k -потентные множества. Прежде всего, отметим справедливость простейших утверждений, связывающих операцию композиции в моноиде с булевыми операциями.

Лемма 1. Для любых подмножеств \mathfrak{B}_j , $j = 1, 2$ и \mathfrak{C} моноида \mathfrak{A} имеют место равенства

$$(\mathfrak{B}_1 \cup \mathfrak{B}_2) * \mathfrak{C} = (\mathfrak{B}_1 * \mathfrak{C}) \cup (\mathfrak{B}_2 * \mathfrak{C}), \quad (\mathfrak{B}_1 \cap \mathfrak{B}_2) * \mathfrak{C} = (\mathfrak{B}_1 * \mathfrak{C}) \cap (\mathfrak{B}_2 * \mathfrak{C}). \quad (5)$$

□ Положив, что $x \in \mathfrak{B}_1 \cup \mathfrak{B}_2$ и $y \in \mathfrak{C}$, то есть $x * y \in (\mathfrak{B}_1 \cup \mathfrak{B}_2) * \mathfrak{C}$, где, не ограничивая общности, $x \in \mathfrak{B}_1$, получим, что $x * y \in \mathfrak{B}_1 * \mathfrak{C}$ и, следовательно, $x * y \in (\mathfrak{B}_1 * \mathfrak{C}) \cup (\mathfrak{B}_2 * \mathfrak{C})$. Таким образом, ввиду произвольности x и y , $(\mathfrak{B}_1 \cup \mathfrak{B}_2) * \mathfrak{C} \subset (\mathfrak{B}_1 * \mathfrak{C}) \cup (\mathfrak{B}_2 * \mathfrak{C})$. Обратное включение доказывается аналогично и поэтому выполняется первое из равенств (5).

Пусть теперь $x \in \mathfrak{B}_1 \cap \mathfrak{B}_2$ и, как и ранее, $y \in \mathfrak{C}$. Тогда $x \in \mathfrak{B}_1$ и $x \in \mathfrak{B}_2$. Поэтому $x * y \in \mathfrak{B}_1 * \mathfrak{C}$ и, одновременно, $x * y \in \mathfrak{B}_2 * \mathfrak{C}$. Следовательно, $x * y \in (\mathfrak{B}_1 * \mathfrak{C}) \cap (\mathfrak{B}_2 * \mathfrak{C})$. Ввиду произвольности элементов x и y , имеет место включение $(\mathfrak{B}_1 \cap \mathfrak{B}_2) * \mathfrak{C} \subset (\mathfrak{B}_1 * \mathfrak{C}) \cap (\mathfrak{B}_2 * \mathfrak{C})$. Обратное включение доказывается аналогично и поэтому выполняется второе равенство в (5). ■

Индукцией по числу компонент, входящих, соответственно, в объединение и пересечение подмножеств моноида \mathfrak{A} , используя формулы (5), убеждаемся в справедливости следующих равенств.

Следствие 1. Для любого семейства множеств $\mathfrak{B}_j \subset \mathfrak{A}$, $j \in \Sigma$ и любого множества $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{A}$ имеют место равенства

$$\left(\bigcup_{j \in \Sigma} \mathfrak{B}_j \right) * \mathfrak{C} = \bigcup_{j \in \Sigma} (\mathfrak{B}_j * \mathfrak{C}), \quad \left(\bigcap_{j \in \Sigma} \mathfrak{B}_j \right) * \mathfrak{C} = \bigcap_{j \in \Sigma} (\mathfrak{B}_j * \mathfrak{C}). \quad (6)$$

Из формул (6), получаем

Следствие 2. Для любых семейств множеств $\mathfrak{B}_j \subset \mathfrak{A}$, $j \in \Sigma$ и $\mathfrak{C}_k \subset \mathfrak{A}$, $k \in \Gamma$ имеют место равенства

$$\left(\bigcup_{j \in \Sigma} \mathfrak{B}_j \right) * \left(\bigcup_{k \in \Gamma} \mathfrak{C}_k \right) = \bigcup_{j \in \Sigma, k \in \Gamma} (\mathfrak{B}_j * \mathfrak{C}_k), \quad \left(\bigcap_{j \in \Sigma} \mathfrak{B}_j \right) * \left(\bigcap_{k \in \Gamma} \mathfrak{C}_k \right) = \bigcap_{j \in \Sigma, k \in \Gamma} (\mathfrak{B}_j * \mathfrak{C}_k). \quad (7)$$

Следствие 3. Для любой монотонной последовательности $\langle \mathfrak{B}_n; n \in \mathbb{N} \rangle$ подмножеств из моноида \mathfrak{A} и любого подмножества $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{A}$ выполняются равенства теоретико-множественных пределов

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{C} * \mathfrak{B}_n = \mathfrak{C} * \lim_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{B}_n.$$

□ На основании монотонности последовательности $\langle \mathfrak{B}_n; n \in \mathbb{N} \rangle$, утверждение следует из (6). ■

Обратимся к изучению мультипотентных множеств в направленных моноидах.

Определение 6. k -потентное подмножество \mathfrak{B}_∞ моноида \mathfrak{A} будем называть минимальным, если оно не содержит в себе собственного подмножества \mathfrak{B} , которое является мультипотентным порядка k для моноида \mathfrak{A} .

Очевидно, что, в силу данного определения, любое k -потентное множество одновременно является l -потентным при любом $l > k$.

В отличие от понятия системы образующих элементов моноида, которая может отсутствовать, понятие минимального k -потентного множества обладает универсальностью, так как справедлива

Теорема 4. В любом моноиде \mathfrak{A} , для любого множества $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$ и при любом значении $k \in \mathbb{N}$ имеется, по крайней мере, одно минимальное k -потентное множество \mathfrak{B}_∞ , содержащее \mathfrak{B} .

□ Зафиксируем число $k \in \mathbb{N}$. Множество \mathfrak{A} является, тривиальным образом, k -потентным, так как $\mathfrak{A}^k = \mathfrak{A}$ и оно содержит \mathfrak{B} . Допустим, что оно не является минимальным. Тогда существует сужающаяся последовательность $\langle \mathfrak{B}_n; n \in \mathbb{N} \rangle$ k -потентных множеств, $\mathfrak{B}_{n+1} \subset \mathfrak{B}_n$, $(\mathfrak{B}_n)^k = \mathfrak{A}$, каждое из которых содержит \mathfrak{B} , но не является минимальным. Рассмотрим теоретико-множественный предел $\mathfrak{B}_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{B}_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{B}_n$. Это множество не пусто, оно содержит множество \mathfrak{B} и является k -потентным, так как

$$(\mathfrak{B}_\infty)^k = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{B}_n \right)^k = \lim_{n \rightarrow \infty} (\mathfrak{B}_n)^k = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{A} \right)^k = \mathfrak{A}$$

и, по построению, минимальным. ■

Замечание 4. Минимальное k -потентное множество, существование которого утверждается Теоремой 4 для произвольно выбранного множества \mathfrak{B} , не является, вообще говоря, минимальным в смысле определения 6. Если моноид \mathfrak{A} обладает системой образующих \mathfrak{B}_0 , то для того, чтобы минимальное k -потентное множество удовлетворяло Определению 6, нужно выбрать в качестве множества \mathfrak{B} множество \mathfrak{B}_0 .

В связи со сделанным замечанием следует также сказать, что при любом $k \in \mathbb{N}$ минимальное k -потентное множество, вообще говоря, не единственно даже в том случае, когда моноид обладает системой образующих элементов. Мы продемонстрируем такое положение на примере моноида \mathbb{N}_+ Примера 2. С этой целью мы покажем, как каждое минимальное k -потентное множество в этом моноиде строится на основе следующего алгоритма, который можно рассматривать как аналог решета Эратосфена в теории чисел.

Для любого множества $\mathfrak{C} \subset \mathbb{N}_+$ введем последовательность $\langle \mathfrak{C}_n; n \in \mathbb{N} \rangle$, $\mathfrak{C}_n = \mathfrak{C} \cap (I_n \cup \{0\})$, $I_n = \{1, \dots, n\}$. Пусть \mathfrak{C} является k -потентным. Тогда $(\mathfrak{C}_n)^k \cap I_n = I_n$. Обратно, если такое свойство выполняется для компонент последовательности $\langle \mathfrak{C}_n; n \in \mathbb{N} \rangle$, то множество $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{C}_n = \mathfrak{C}$ является k -потентным.

Заметим теперь, что для того чтобы подмножество $\mathfrak{C} \subset \mathbb{N}_+$ было минимальным k -потентным множеством, необходимо и достаточно, чтобы оно удовлетворяло следующему условию: должна отсутствовать такая расширяющаяся последовательность $\langle \mathfrak{C}'_n \subset I_n; n \in \mathbb{N} \rangle$, для бесконечного набора номеров $n \in \mathbb{N}$ которой множества \mathfrak{C}'_n — компоненты последовательности $\langle \mathfrak{C}_n; n \in \mathbb{N} \rangle$, соответствующей множеству \mathfrak{C} , являются собственными подмножествами \mathfrak{C}_n , и при этом для всех $n \in \mathbb{N}$ выполняется $(\mathfrak{C}'_n)^k \cap I_n = I_n$.

Основываясь на указанном замечании, опишем индуктивным образом алгоритм, в результате применения которого получается любое минимальное, в смысле Определения 6, k -потентное множество \mathfrak{B} в моноиде \mathbb{N}_+ .

Зададим, прежде всего, бесконечную последовательность номеров $\langle m_l \subset \mathbb{N}; l \in \mathbb{N} \rangle$. Множество \mathfrak{B} должно, согласно Теоремам 5 и 7, содержать элементы $\{0, 1\}$. Положим для заданного $l \in \mathbb{N}$ множество \mathfrak{C}_l уже определено. Для этого множества найдем такой минимальный номер $m \geq l$, для которого $\mathbb{N}_+ \setminus (\mathfrak{C}_l)^k = \emptyset$. Тогда определим $\mathfrak{C}_{l+1} = \mathfrak{C}_l \cup \{m\}$ таким образом, что $m \in I_m \setminus (\mathfrak{C}_l)^k$, если это множество не пусто и $m + 1 \neq m_l$. В противном случае, если хотя бы одно из этих условий нарушено, то положим $m = m + 1$.

Поступая описанным образом для каждого $l \in \mathbb{N}$, мы определяем множество $\mathfrak{C} = \lim_{l \rightarrow \infty} \mathfrak{C}_l$, которое, по построению, является минимальным k -потентным множеством в \mathbb{N}_+ , так как удаление из него любого номера приводит к удалению номера в \mathfrak{C}^k .

Ввиду имеющегося произвола выбора последовательности номеров $\langle m_l \subset \mathbb{N}; l \in \mathbb{N} \rangle$ и произвольности выбора очередного номера n при применении алгоритма на шаге l в случае, если $l \neq m_l$ для непустого множества номеров $l \in \mathbb{N} \setminus \{l : m_l \neq m\}$, минимальное k -потентное множество \mathfrak{C} в \mathbb{N}_+ не единственно. В частном случае, можно положить в качестве такого множества \mathfrak{C} , получаемому в результате применения описанного алгоритма, множество $\mathfrak{C} = \{kl + 1; l \in \mathbb{N}_+\}$.

Для направленных моноидов справедлива

Теорема 5. Любое k -потентное множество \mathfrak{B} в направленном моноиде \mathfrak{A} содержит единицу e моноида.

□ Допустим, что утверждение теоремы не имеет места. Тогда, так как $\mathfrak{B}^k = \mathfrak{A}$ и $e \in \mathfrak{A}$, то должны существовать такие элементы $x_j \in \mathfrak{B}$, $j = 1 \div k$, для которых $x_1 * \dots * x_k = e$. Однако, ввиду направленности

моноида \mathfrak{A} , то есть отсутствия в нем циклов, это равенство может иметь место только в случае, когда $x_j = e, j = 1 \div k$. ■

Следствие. Для любого k -потентного множества \mathfrak{B} выполняется $\mathfrak{B} * \mathfrak{A} = \mathfrak{A}$.

□ Это следует из того, что множество \mathfrak{B} содержит e . Тогда любой элемент x представим в виде $x * y = x$ с $y = e \in \mathfrak{B}$. ■

Далее, будем предполагать, что моноид \mathfrak{A} , наряду с направленностью, обладает системой образующих \mathfrak{B}_0 . Тогда справедливо следующее утверждение.

Теорема 6. Для любого направленного моноида \mathfrak{A} , обладающего системой образующих \mathfrak{B}_0 , при любом $k \in \mathbb{N}$, каждое k -потентное множество \mathfrak{B} содержит \mathfrak{B}_0 .

□ Допустим противное, что в системе \mathfrak{B}_0 образующих элементов моноида \mathfrak{A} имеется такой элемент x , который не содержится в \mathfrak{B} . Тогда, так как \mathfrak{B} является k -потентным, то в этом множестве найдется такая последовательность $\langle y_1, \dots, y_k \rangle, y_j \in \mathfrak{B}, j = 1 \div k$, что имеет место равенство $y_1 * \dots * y_k = x$. При этом каждый из элементов y_j представим в виде композиции $y_j = x_{k_1^{(j)}} * \dots * x_{k_{m_j}^{(j)}}$, где ее компонентами $x_{k_l^{(j)}}, l = 1 \div m_j$ являются образующие элементы моноида $\mathfrak{A}, j = 1 \div k$. Подстановка этих разложений элементов $y_j, j = 1 \div k$ в композицию $y_1 * \dots * y_k = x$ дает представление образующего элемента x в виде произведения, в состав которого входят только образующие элементы из \mathfrak{B}_0 .

Может реализоваться только один из двух случаев:

1) В списке всех компонент последовательностей $\langle x_{k_1^{(j)}}, \dots, x_{k_{m_j}^{(j)}} \rangle, j = 1 \div k$ отсутствует образующий элемент x .

2) Среди всех компонент последовательностей $\langle x_{k_1^{(j)}}, \dots, x_{k_{m_j}^{(j)}} \rangle, j = 1 \div k$ присутствует элемент x .

Если имеет место положение 1), то элемент x не может входить в систему образующих элементов \mathfrak{B}_0 ввиду минимальности ее выбора. Пусть имеет место положение 2) и l — номер последнего элемента из числа тех, которые входят в состав композиции $x = y_1 * \dots * y_k$ и в композиции которого присутствует образующий элемент x , а $k_s^{(l)}$ — номер такого элемента в композиции элемента y_l , что $x_{k_s^{(l)}}^{(l)} = x$ так, что он представляет последнее вхождение этого образующего элемента в композицию $y_l = x_{k_1^{(j)}} * \dots * x_{k_{m_j}^{(j)}}$.

Тогда в композиции $x = y_1 * \dots * y_k$ имеется цикл

$$(y_1 * \dots * y_{l-1} * x_{k_1^{(l)}} * \dots * x_{k_{s-1}^{(l)}}) * x * (x_{k_{s+1}^{(l)}} * \dots * x_{k_{m_l}^{(l)}} * y_{l+1} * \dots * y_k) = x. \quad \blacksquare$$

Введение понятия о k -потентных множествах полезно в том смысле, что на его основе допустимо введение множеств, порождающих направленный моноид \mathfrak{A} и обладающих определенной универсальностью в том смысле, что они существуют вне зависимости от существования в этом моноиде системы образующих элементов.

Прежде всего докажем следующее подготовительное утверждение.

Лемма 2. Для каждого множества $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$ существует сужающаяся последовательность $\langle \mathfrak{B}_k; k \in \mathbb{N} \rangle$ минимальных k -потентных множеств, каждое из которых содержит \mathfrak{B} .

□ В силу Теоремы 4, найдется минимальное 2-потентное множество \mathfrak{B}_2 , содержащее \mathfrak{B} . Пусть построена сужающаяся последовательность $\langle \mathfrak{B}_l; l = 1 \div k \rangle$ минимальных k -потентных множеств. Каждое k -потентное множество является $(k+1)$ -потентным множеством, так как, в силу следствия Теоремы 5, $(\mathfrak{B}_k)_*^{k+1} = \mathfrak{B}_k * (\mathfrak{B}_k)_*^k = \mathfrak{B}_k * \mathfrak{A} = \mathfrak{A}$. Выделим в таком $(k+1)$ -потентном множестве минимальное, согласно конструкции доказательства Теоремы 4, которое обозначим посредством \mathfrak{B}_{k+1} . Оно содержит \mathfrak{B} , по построению. ■

Теорема 7. Пусть моноид \mathfrak{A} направленный. Тогда для любой сужающейся последовательности $\langle \mathfrak{B}_k; k \in \mathbb{N} \rangle$ k -потентных множеств множество

$$\bar{\mathfrak{B}} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{B}_n$$

содержит систему \mathfrak{B}_0 образующих элементов моноида \mathfrak{A} , если она существует, и порождает моноид \mathfrak{A} .

□ Пусть e — единица моноида \mathfrak{A} . Если \mathfrak{B}_0 — множество его образующих элементов, которое может иметь любую мощность, то согласно Теореме 6, оно содержится в любом из множеств \mathfrak{B}_n . Следовательно, имеет место включение $\mathfrak{B}_0 \subset \bar{\mathfrak{B}}$.

Докажем, что минимальный моноид $M(\bar{\mathfrak{B}})$ всегда совпадает с моноидом \mathfrak{A} . Для двух сужающихся последовательностей $\langle \mathfrak{B}_m; m \in \mathbb{N} \rangle$ и $\langle \mathfrak{C}_n; n \in \mathbb{N} \rangle$ имеем

$$\left(\lim_{m \rightarrow \infty} \mathfrak{B}_m \right) * \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{C}_n \right) = \lim_{\substack{m \rightarrow \infty, \\ n \rightarrow \infty}} \mathfrak{B}_m * \mathfrak{C}_n = \lim_{\max\{m,n\} \rightarrow \infty} \mathfrak{B}_m * \mathfrak{C}_n = \lim_{l \rightarrow \infty} \mathfrak{B}_l * \mathfrak{C}_l.$$

Тогда, так как последовательность $\langle \mathfrak{B}_k; k \in \mathbb{N} \rangle$ в условии теоремы сужающаяся, $\bar{\mathfrak{B}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathfrak{B}_k$, то для нее, индукцией по $l \in \mathbb{N}$, используя утверждение Следствия 3, получаем

$$\bar{\mathfrak{B}}_*^{l+1} = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} (\mathfrak{B}_n)_*^l \right) * \left(\lim_{m \rightarrow \infty} \mathfrak{B}_m \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} (\mathfrak{B}_k)_*^{l+1}, \quad l \in \mathbb{N}.$$

Используя это соотношение, преобразуем выражение для $M(\bar{\mathfrak{B}})$, определяемое Теоремой 1:

$$M(\bar{\mathfrak{B}}) \equiv \bigcup_{l=0}^{\infty} \bar{\mathfrak{B}}_*^l = \bigcup_{l=0}^{\infty} \lim_{k \rightarrow \infty} (\mathfrak{B}_k)_*^l = \lim_{k \rightarrow \infty} \bigcup_{l=0}^{\infty} (\mathfrak{B}_k)_*^l.$$

Так как $(\mathfrak{B}_k)_*^l = \mathfrak{A}$ при $l \geq k$, то

$$M(\bar{\mathfrak{B}}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \bigcup_{l=0}^{k-1} (\mathfrak{B}_k)_*^l \cup \bigcup_{k=l}^{\infty} \mathfrak{A} = \mathfrak{A}. \quad \blacksquare$$

Теорема 8. Пусть моноид \mathfrak{A} с единицей $\{e\}$ направленный и обладает такой системой \mathfrak{B}_0 образующих элементов, что для любой возрастающей последовательности $\langle m_l; l \in \mathbb{N} \rangle$ номеров имеет место

$$\bigcap_{l=1}^{\infty} (\mathfrak{B}_0)_*^{m_l} = \emptyset. \quad (8)$$

Тогда существует последовательность $\langle \mathfrak{B}_k; k \in \mathbb{N} \rangle$ минимальных k -потентных множеств, определяемых неограниченно возрастающей последовательностью $\langle k; k \in \mathbb{N} \rangle$, для которой имеет место

$$\{e\} \cup \mathfrak{B}_0 = \bigcap_{k=1}^{\infty} \mathfrak{B}_k. \quad (9)$$

□ Для каждого $k \in \mathbb{N}$ положим $k_l = 1 + kl$, $l \in \mathbb{N}_+$. Рассмотрим множество

$$\mathfrak{B}_k = \{e\} \cup \bigcup_{l=0}^{\infty} (\mathfrak{B}_0)_*^{k_l}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Докажем, что каждая из компонент объединения является k -потентным множеством. На основании Теоремы 3, любой элемент $x \in \mathfrak{A}$ содержится в одном из множеств $(\mathfrak{B}_0)_*^n$, $n \in \mathbb{N}_+$. Тогда, используя свойства булевской алгебры, вычислим

$$\begin{aligned} (\mathfrak{B}_k)_*^k &= \left(\{e\} \cup \bigcup_{l=0}^{\infty} (\mathfrak{B}_0)_*^{k_l} \right)_*^k = \{e\} \cup \bigcup_{s=0}^k \left(\bigcup_{l=0}^{\infty} (\mathfrak{B}_0)_*^{k_l} \right)_*^s = \\ &= \{e\} \cup \bigcup_{s=0}^k \bigcup_{m_1, \dots, m_s=0}^{\infty} (\mathfrak{B}_0)_*^{k_{m_1}} * (\mathfrak{B}_0)_*^{k_{m_s}} = \\ &= \{e\} \cup \bigcup_{s=0}^k \bigcup_{m_1, \dots, m_s=0}^{\infty} (\mathfrak{B}_0)_*^{k_{m_1 + \dots + m_s}} = \{e\} \cup \bigcup_{s=0}^k \bigcup_{m_1, \dots, m_s=0}^{\infty} (\mathfrak{B}_0)_*^{s+k(m_1 + \dots + m_s)} = \\ &= \{e\} \cup \bigcup_{s=0}^k \bigcup_{m=0}^{\infty} \bigcup_{\substack{\langle m_1, \dots, m_s \rangle: \\ m_1 + \dots + m_s = m}} (\mathfrak{B}_0)_*^{km+s} = \bigcup_{n=0}^{\infty} (\mathfrak{B}_0)_*^n = \mathfrak{A}. \end{aligned}$$

По построению, множества \mathfrak{B}_k минимальны и

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} \mathfrak{B}_k = \{e\} \cup \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{l=0}^{\infty} (\mathfrak{B}_0)_*^{k_l} = \{e\} \cup \mathfrak{B}_0.$$

Это равенство получается в результате следующих преобразований:

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{l=0}^{\infty} (\mathfrak{B}_0)_*^{k_l} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{l=0}^{\infty} (\mathfrak{B}_0)_*^{1+kl} = \mathfrak{B}_0 * \bigcup_{l=0}^{\infty} \bigcap_{k=1}^{\infty} (\mathfrak{B}_0)_*^{kl} = \mathfrak{B}_0,$$

так как

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} (\mathfrak{B}_0)_*^{kl} = \emptyset,$$

ввиду (8). ■

Замечание 5. Ограничение (8) на систему образующих элементов в условии теоремы имеет место в случае коммутативности моноида (см. след. раздел) или в случае конечности \mathfrak{B}_0 .

Лемма 3. Для любых натуральных k и l степень $(\mathfrak{B}_{kl})_*^l = \mathfrak{C}_k$ любого kl -потентного множества \mathfrak{B}_{kl} является k -потентным множеством таким, что $\mathfrak{B}_{kl} \subset \mathfrak{C}_k$.

□ Утверждение следует из того, что k -я степень множества \mathfrak{B}_k равна $(\mathfrak{B}_k)_*^k = (\mathfrak{B}_{kl})_*^{lk} = \mathfrak{A}$, то есть множество \mathfrak{B}_k является k -потентным. При этом, очевидно, имеет место включение $\mathfrak{B}_{kl} \subset \mathfrak{B}_k$, так как, согласно своему определению, множество \mathfrak{B}_k содержит, в частности, все элементы $\underbrace{\mathfrak{B}_{kl} * e * \dots * e}_{l-1}$. ■

Замечание 6. Ввиду утверждения леммы, множества в последовательности $\langle \mathfrak{B}_k; k \in \mathbb{N} \rangle$ в утверждении Теоремы 8 можно подобрать таким образом, чтобы она была сужающейся. Для этого достаточно оставить в этой последовательности только те члены, чтобы для каждого фиксированного члена \mathfrak{B}_k из их числа, последующий член \mathfrak{B}_m , $m > k$ обладал свойством $\mathfrak{B}_m \subset \mathfrak{B}_k$. Например, можно положить $m = kn$. В этом случае \mathfrak{B}_{kn} является kn -потентным согласно утверждению Теоремы 8 и из определения множеств \mathfrak{B}_k следует, что имеет место $\mathfrak{B}_{kn} \subset \mathfrak{B}_k$.

Замечание 7. Формула (9) имеет место, вообще говоря, только для исключительных сужающихся последовательностей $\langle \mathfrak{B}_k; k \in \mathbb{N} \rangle$. Для демонстрации этого положения рассмотрим моноид Примера 2. Он имеет образующий элемент $x_1 = 1$. Для заданного $n \in \mathbb{N}$ построим последовательность $\langle x_l^{(n)}; l \in \mathbb{N}_+ \rangle$ согласно следующему алгоритму. Положим $x_0^{(n)} = 0, x_1^{(n)} = x_1, x_2^{(n)} = 2, x_3^{(n)} = 2n + 1$, где $2n = \max\{y : y = y_1 + \dots + y_n, y_j \in \{0, 1, 2\}\}$.

Далее, построим последовательно элементы

$$x_{l+1}^{(n)} = 1 + \max\{y : y = y_1 + \dots + y_n, y_j \in \{x_j^{(n)}; j = 0 \div l\}\}, \quad l \in \mathbb{N}.$$

Компоненты каждой последовательности с фиксированным $n \in \mathbb{N}$ образуют множество $\mathfrak{B}_n = \{x_j^{(n)}; j \in \mathbb{N}_+\}$. Оно является n -потентным по построению, так как суммы $y_1 + \dots + y_n, y_j \in \mathfrak{B}_n$ полностью заполняют промежуток между каждым числом $x_l^{(n)}$ и $x_{l+1}^{(n)}$. Кроме того, по построению, эти множества являются также минимальными и имеет место

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{B}_n = \{1, 2\}.$$

4. Коммутативные моноиды. В этом разделе мы рассмотрим более подробно коммутативные направленные моноиды \mathfrak{A} , которые обладают множеством образующих $x_j, j \in \mathfrak{J}$, где множество \mathfrak{J} либо конечно и содержит d элементов, либо оно бесконечно и обладает $\text{card}(\mathfrak{J}) = \aleph_s, s \in \mathbb{N}_+$. Операцию композиции в таких моноидах будем обозначать посредством знака $+$.

Определение 7. Направленный моноид \mathfrak{A} , обладающий набором \mathfrak{B}_0 образующих его элементов, назовем однородным, если имеет место $(\mathfrak{B}_0)_*^m \cap (\mathfrak{B}_0)_*^n = \emptyset$ при $n \neq m$.

Рассмотрим далее коммутативный моноид $\mathbb{N}_+^{\mathfrak{J}}$, где операцией композиции является покомпонентное сложение так, что каждый элемент a моноида представим в виде

$$a = \sum_{i \in \mathfrak{J}} m_i x_i \quad (10)$$

с $m_i \in \mathbb{N}_+$ и $x_i = \langle \delta_{ij}; j \in \mathfrak{J} \rangle, i \in \mathfrak{J}$ — множество образующих.

Для любых двух элементов a и

$$b = \sum_{j \in \mathfrak{J}} n_j x_j$$

с $n_j \in \mathbb{N}_+, j \in \mathfrak{J}$ их композиция представляется элементом

$$a + b = \sum_{i \in \mathfrak{J}} (m_i + n_i) x_i.$$

Теорема 9. Если моноид \mathfrak{A} обладает таким набором образующих $\mathfrak{B}_0 = \{x_j; j \in \mathfrak{J}\}$, для которого имеет место $(\mathfrak{B}_0)_*^n \cap (\mathfrak{B}_0)_*^m = \emptyset$ при $n \neq m$, коммутативен и направлен, то он изоморфен моноиду $\mathbb{N}_+^{\mathfrak{J}}$. При этом единица e моноида отображается в $\mathbf{0} \in \mathbb{N}_+^{\mathfrak{J}}$ и множество образующих $\mathfrak{B}_0 = \{x_j; j \in \mathfrak{J}\}$ моноида \mathfrak{A} отображается в множество $\{\langle \delta_{ij}; j \in \mathfrak{J} \rangle; i \in \mathfrak{J}\}$.

□ Сопоставим единице $e \in \mathfrak{A}$ элемент $\mathbf{0} \in \mathbb{N}_+^{\mathfrak{J}}$ и образующим x_i элементам — векторы $\langle \delta_{ij}; j \in \mathfrak{J} \rangle, i \in \mathfrak{J}$ множества $\mathbb{N}_+^{\mathfrak{J}}$. Тогда первое утверждение теоремы следует из представления каждого из элементов коммутативного моноида, указанного в Следствии 1 Теоремы 1. Ввиду отсутствия циклов в моноиде \mathfrak{A} , отображение в $\mathbf{0} \in \mathbb{N}_+^{\mathfrak{J}}$ однозначно.

Ввиду того, что множество образующих элементов в направленном моноиде \mathfrak{A} , согласно Теореме 2, единственно, его отображение в моноид $\mathbb{N}_+^{\mathfrak{J}}$ определено однозначным образом, с точностью до перестановки в нумерации элементов в $\{x_j; j \in \mathfrak{J}\}$. ■

Нашей дальнейшей задачей является найти необходимые и достаточные условия k -потентности множеств \mathfrak{B} в коммутативном направленном моноиде, обладающем системой образующих. Ввиду Теоремы 7, достаточно исследовать моноиды $\mathbb{N}_+^{\mathfrak{J}}$.

Любой элемент $a = \langle m_i \in \mathbb{N}_+; i \in \mathfrak{J} \rangle \in \mathbb{N}_+^{\mathfrak{J}}$ представляется в виде

$$a = \sum_{i \in \mathfrak{J}} m_i x_i. \quad (11)$$

Если \mathfrak{B} – k -потентное множество в \mathfrak{A} , то для элемента \mathfrak{A} найдется такой набор элементов b_1, \dots, b_k , что имеет место

$$a = \sum_{l=1}^k b_l.$$

Каждый элемент из этого набора имеет представление, аналогичное (11),

$$b_l = \sum_{j \in \mathfrak{J}} n_j^{(l)} x_j, \quad (12)$$

где $\langle n_j^{(l)} \in \mathbb{N}; j \in \mathfrak{J} \rangle$ и для каждого $l = 1 \div k$ множество тех номеров j , для которых $n_j^{(l)} \neq 0$ конечно.

Таким образом, для любого элемента $a \in \mathfrak{A}$ из k -потентного множества \mathfrak{B} в моноиде \mathfrak{A} должно иметь место представление

$$a = \sum_{j \in \mathfrak{J}} m_j x_j = \sum_{l=1}^k \sum_{j \in \mathfrak{J}} n_j^{(l)} x_j = \sum_{j \in \mathfrak{J}} x_j \sum_{l=1}^k n_j^{(l)}.$$

Ввиду однозначности разложения (11), это означает, что для любого набора натуральных чисел $\langle m_j; j \in \mathfrak{J} \rangle$, среди которых имеется только лишь конечное множество $\Delta(a)$, отличных от нуля, должна быть разрешима в натуральных числах система уравнений

$$m_j = \sum_{l=1}^k n_j^{(l)}, \quad j \in \Delta(a), \quad (13)$$

где $\langle n_j^{(l)}; j \in \mathfrak{J} \rangle \in \mathbb{N}_+^{\mathfrak{J}}$, $l = 1 \div k$. Таким образом, справедлива

Теорема 10. *Необходимым и достаточным условием того, чтобы множество $\mathfrak{B} \subset \mathbb{N}_+^{\mathfrak{J}}$ было k -потентным, является наличие в нем таких элементов, представляемых в виде (12), для которых разрешима система уравнений (13).*

Следствие 1. *Для любого элемента a направленного коммутативного моноида \mathfrak{A} , обладающего системой образующих элементов \mathfrak{B}_0 , представление (11) единственно.*

□ Воспользуемся изоморфизмом между моноидом \mathfrak{A} и $\mathbb{N}_+^{\mathfrak{J}}$ и положим $x_i = \langle \delta_{ij}; j \in \mathfrak{J} \rangle$, $i \in \mathfrak{J}$. Допустив, что имеются два различных представления a в виде (11) с такого типа образующими

$$a = \sum_{i \in \mathfrak{J}} m_i x_i, \quad a = \sum_{j \in \mathfrak{J}} n_j x_j,$$

находим

$$\sum_{i \in \mathfrak{J}} (m_i - n_i) x_i = 0.$$

Откуда $n_j = m_j$, $j \in \mathfrak{J}$. ■

Следствие 2. *Каждый элемент x направленного коммутативного моноида с системой образующих элементов \mathfrak{B}_0 принадлежит только одному из множеств $(\mathfrak{B}_0)_*^d$, $d \in \mathbb{N}_+$.*

□ Если $x \in (\mathfrak{B}_0)_*^d$, то в его представлении в виде (11) сумма $\sum_{j \in \mathfrak{J}} m_j$ равна d . ■

Теперь мы докажем утверждение, относящееся к моноидам, у которых $\mathfrak{J} \equiv I_d = \{1, \dots, d\}$ конечно. Оно имеет важное значение для приложений изложенной выше теории. Введем функцию, характеризующую распределение элементов в любом подмножестве $\mathfrak{B} \subset \mathbb{N}_+^d$:

$$\varphi_{\mathfrak{B}}(x_1, \dots, x_d) = |\{a \in \mathfrak{B} : a = \langle n_1, \dots, n_d \rangle \in \mathbb{N}_+^d, n_j \leq x_j, j = 1 \div d\}|, \quad \langle x_1, \dots, x_d \rangle \in \mathbb{R}_+^d.$$

Эта функция распределения не убывает.

Лемма 4. *Пусть $\varphi_{\mathfrak{C}}(x_1, \dots, x_d) = |\{a \in \mathfrak{C} : a = \langle n_1, \dots, n_d \rangle \in \mathbb{N}_+^d, n_j \leq x_j, j = 1 \div d\}|$, $\langle x_1, \dots, x_d \rangle \in \mathbb{R}_+^d$ – функция распределения некоторого множества \mathfrak{C} и пусть*

$$\varphi_{\mathfrak{C}}^{(j)}(n_1, \dots, n_d) = \varphi_{\mathfrak{C}}(n_1, \dots, n_j, \dots, n_d) - \varphi_{\mathfrak{C}}(n_1, n_2, \dots, n_j - 1, \dots, n_d) \in \{0, 1\}, \quad j = 1 \div d.$$

Для того, чтобы элемент $\langle n_1, \dots, n_d \rangle \in \mathbb{N}_+^d$ принадлежал множеству \mathfrak{C} , необходимо и достаточно, чтобы при любом $j = 1 \div d$ имело место равенство

$$\varphi_{\mathfrak{C}}^{(j)}(n_1, \dots, n_d) = 1. \quad (14)$$

□ В доказательстве нуждается только последнее утверждение. Если имеет место (14), то это означает одноэлементность множества $\{x \in \mathfrak{C} : x = \langle n'_1, \dots, n'_d \rangle \in \mathbb{N}_+^d; n'_l \leq n_l, l \neq j; n'_j = n_j\}$ при любом $j = 1 \div d$, так как при всех $j = 1 \div d$ имеет место

$$\begin{aligned} 1 &= |\{x \in \mathfrak{C} : x = \langle n'_1, \dots, n'_d \rangle \in \mathbb{N}_+^d; n'_l \leq n_l, l = 1 \div d\}| - \\ &\quad - |\{x \in \mathfrak{C} : x = \langle n'_1, \dots, n'_d \rangle \in \mathbb{N}_+^d; n'_l \leq n_l - \delta_{jl}, l = 1 \div d\}| = \\ &= |\{x \in \mathfrak{C} : x = \langle n'_1, \dots, n'_d \rangle \in \mathbb{N}_+^d; n'_l \leq n_l, l = 1 \div d\} \setminus \\ &\quad \{x \in \mathfrak{C} : x = \langle n'_1, \dots, n'_d \rangle \in \mathbb{N}_+^d; n'_l \leq n_l - \delta_{jl}, l = 1 \div d\}| = \\ &= |\{x \in \mathfrak{C} : x = \langle n'_1, \dots, n'_d \rangle \in \mathbb{N}_+^d; n'_l \leq n_l, l \neq j; n'_j = n_j\}|. \end{aligned}$$

Совокупность таких равенств с $j = 1 \div d$ эквивалентна

$$\begin{aligned} 1 &= \left| \bigcap_{j=1}^d \{x \in \mathfrak{C} : x = \langle n'_1, \dots, n'_d \rangle \in \mathbb{N}_+^d; n'_l \leq n_l, l \neq j; n'_j = n_j\} \right| = \\ &= \left| \{x \in \mathfrak{C} : x = \langle n_1, \dots, n_d \rangle \in \mathbb{N}_+^d\} \right|. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Теорема 11. Для того чтобы множество \mathfrak{B} было k -потентным, необходимо и достаточно, чтобы для любого элемента $\langle m_1, \dots, m_d \rangle \in \mathbb{N}_+^d$ одновременно выполнялись все неравенства

$$\sum_{\substack{\langle n_j^{(1)}, \dots, n_j^{(k)} \rangle: \\ n_j^{(1)} + \dots + n_j^{(k)} = m_j}} \prod_{l=1}^k \varphi^{(j)}(n_1^{(l)}, \dots, n_d^{(l)}) \geq 1, \quad j = 1 \div d$$

и имело место $\varphi(0, \dots, 0) = 1$.

□ Справедливость утверждения следует посредством применения для каждого $j = 1 \div d$ утверждений Теоремы 10 и Леммы 4. ■

В частности, при $k = 2, d = 1$ из теоремы получаем

Следствие. Для квадратентности множества $\mathfrak{B} \subset \mathbb{N}_+$ необходимо и достаточно, чтобы для его функции распределения $\varphi_{\mathfrak{B}}(x)$ имело место $\varphi_{\mathfrak{B}}(0) = 1$ и выполнялось неравенство

$$\sum_{n=1}^m [\varphi_{\mathfrak{B}}(n) - \varphi_{\mathfrak{B}}(n-1)] \cdot [\varphi_{\mathfrak{B}}(m-n) - \varphi_{\mathfrak{B}}(m-n-1)] \geq 1 \quad (15)$$

при всех $m \in \mathbb{N}$.

5. Приложение к проблеме Гольдбаха. В 1742 году в переписке между К. Гольдбахом и Л. Эйлером была высказана следующая гипотеза: Каждое чётное число, большее двух, можно представить в виде суммы двух простых чисел. Эта гипотеза получила название «бинарной проблемы Гольдбаха» (или проблемы Эйлера).

Первоначальная версия этой гипотезы (иногда называемая тернарной гипотезой Гольдбаха), написанная в письме Эйлеру от 7 июня 1742 года, гласит: «По крайней мере, кажется, что каждое число, которое больше 2, является суммой трех простых чисел» (см. [4], с. 421). Гольдбах рассматривал число 1 как простое. Такая условность в настоящее время не соблюдается. Поэтому в современной трактовке бинарная проблема Гольдбаха утверждает, что все положительные четные целые числа $2n$, большие 4, могут быть представлены в виде $p + q = 2n$ для $n \in \mathbb{N}$, где пару $\{p, q\}$ простых чисел иногда называют разбиением Гольдбаха.

Бинарная проблема Гольдбаха находится в стороне от каких-либо приложений в других разделах математики. Непонятна какая-либо ее практическая значимость. Отношение к ней очень точно выразил, и в свое время, Г. Х. Харди ([8], с. 19): «сравнительно легко делать умные догадки; действительно, есть утверждения, такие как теорема Гольдбаха, которые никогда не были доказаны и которые любой дилетант мог бы угадать». Однако, несмотря на такое положение, эта проблема привлекает своей загадочностью и, вместе с тем, спортивным интересом. Для ее решения привлекались (см. [2]), в разные периоды развития теории чисел, и привлекаются вплоть до настоящего времени (см., например, [6], [7],

[15], [17]) значительные интеллектуальные усилия. Однако, насколько нам известно, в настоящее время ее полное решение отсутствует. Предложенные методы исследования не позволили решить эту проблему в той ее исходной формулировке, которая приведена выше. Все сделанные к настоящему времени утверждения относительно найденного доказательства правильности бинарной проблемы Гольдбаха крайне сомнительны.¹⁾

В связи со сложностью обнаружения прямого доказательства правильности бинарной гипотезы Гольдбаха, много усилий было потрачено на получение каких-либо «приближенных» результатов, на основе которых можно было судить о существовании положительного решения проблемы. Одним из таких направлений является работа Т. Эстерманна [5], основанная на методе Виноградова И. М.

В этой работе показано, что *почти все чётные числа*, с точки зрения их распределения в множестве \mathbb{N} натуральных чисел, представимы в виде суммы двух простых чисел. Этот результат был несколько усилен Х. Монтгомери и Б. Вон [9]. Было показано, что существуют положительные константы c и C такие, что количество чётных чисел, не больших N , не представимых в виде суммы двух простых чисел, не превышает CN^{1-c} .

Другое направление для получения результатов, родственных бинарной проблеме Гольдбаха, было указано Л. Г. Шнирельманом, который в своей замечательной работе привел следующее утверждение [14]: *всякое целое положительное число x может быть разложено на сумму ограниченного числа L простых чисел, где L не зависит от x (L – число Шнирельмана).*

Развитие подхода, предложенного в этой работе, привело к существенному прогрессу. Если первоначально число Шнирельмана оценивалось как $L = 300000$, то к настоящему времени его оценка доведена до $L = 6$ [12].

Покажем, каким образом эта проблема может быть сформулирована в терминах моноида \mathbb{N}_+ (в такой формулировке единица включается в множество простых чисел).

Обозначим посредством \mathfrak{P} множество всех простых чисел. Нужно доказать, что каждое четное число $2(m+1)$, $m \in \mathbb{N}_+$ представимо в виде суммы двух простых $2(m+1) = p+q$, $p, q \in \mathfrak{P}$. Каждое простое число, большее 2, о которых идет речь в формулировке проблемы, нечетно. Таким образом, для этих чисел $p = 2r+1$, $q = 2s+1$; $r, s \in \mathbb{N}$ и $r+s = m$. Обратно, если $r, s \in \mathfrak{N}$, то $p+q = 2(r+s+1) = 2(m+1)$, $r+s+1 \equiv m+1$, $m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.

Добавим к этим числам $p = q = 1$, для которых $r, s = 0$, что соответствует добавлению чисел $p+q = 2(m+1)$ с $m = 0$ либо 1, для которых утверждение бинарной гипотезы Гольдбаха тривиально. В связи с этим, определим множество \mathfrak{B} равенством

$$\mathfrak{B} = \{t \in \mathbb{N}_+ : 2t+1 \in \mathfrak{P} \cup \{1\}\} \cup \{0\}.$$

Отсюда следует, что бинарная гипотеза Гольдбаха эквивалентна утверждению о том, что множество \mathfrak{B} в моноиде \mathbb{N}_+ должно обладать свойством $\mathfrak{B} + \mathfrak{B} = \mathbb{N}$, то есть быть мультипотентным с показателем $k = 2$.

Рассмотрим используемую в теории чисел функцию (см., например, [11])

$$\psi(x) \equiv |\{p \in \mathfrak{P} : p \leq x\}|, \quad x \in \mathbb{R}_+.$$

Тогда

$$\psi(x) = |\{l \in \mathbb{N} : 2l+1 \in \mathfrak{P}, 2l+1 \leq x\}| = |\{l \in \mathbb{N} : 2l+1 \in \mathfrak{P}, l \leq (x-1)/2\}|,$$

и, используя определение множества \mathfrak{B} , имеем

$$|\{l \in \mathfrak{B} : l \leq x\}| = |\{l \in \mathbb{N} : 2l+1 \in \mathfrak{P}, l \leq x\}| + 2 \equiv \psi(2x+1) + 2, \quad x \geq 2.$$

Полагая $\varphi_{\mathfrak{B}}(x) = \psi(2x+1) + 2$, на основании следствия Теоремы 11, получаем

Теорема 12. *Для того чтобы множество \mathfrak{B} было квадрупотентным, необходимо и достаточно, чтобы для любого $m \in \mathbb{N}$ имело место неравенство*

$$S(m) \equiv \sum_{n=1}^m [\psi(2n+1) - \psi(2n-1)] \cdot [\psi(2(m-n)+1) - \psi(2(m-n)-1)] \geq 1. \quad (16)$$

6. Заключение. В работе введено понятие мультипотентности множеств в моноидах, которое, при наличии однородности и коммутативности в таких алгебраических структурах, оказывается полезным при анализе задач аналитической теории чисел, связанных с представлениями натуральных чисел в виде сумм чисел, обладающих специальными свойствами. Выявлены самые общие свойства мультипотентных множеств и представлена формулировка в терминах таких множеств с показателем $k = 2$ известной бинарной проблемы Гольдбаха. Ключевым результатом работы, позволяющим анализировать задачи указанного выше типа, является Теорема 11.

¹⁾ Например, такое утверждение сделано в [10]. Анализ этой работы приведен в [13].

References

1. Bourbaki N. 1959. *Éléments de mathématique. Première partie, Les structures fondamentales de l'analyse, Livre II. Algèbre.* – Paris: Hermann & C, Éditeurs, 218 p.
2. Chudakov N. G. 1938. About Goldbach's problem. *Uspekhi matematicheskikh nauk.* 4: 14–33.
3. Correspondance mathématique et physique de quelques celebres geometres du XVIII-eme siecle (Band 1). 1743. St.-Petersbourg, 125–129.
4. Dickson L. E. 2005. Goldbach's Empirical Theorem: Every Integer is a Sum of Two Primes. In *History of the Theory of Numbers, Vol. 1: Divisibility and Primality.* New York: Dover, 421-424.
5. Estermann T. 1938. On Goldbach's problem: proof that almost all even positive integers are sums of two primes. *Proc. London Math. Soc.* 2(44): 307–314. doi:10.1112/plms/s2-44.4.307.
6. Guy R. K. 1994. *Goldbach's Conjecture in Unsolved Problems in Number Theory, 2nd ed.* New York: Springer-Verlag, 105-107.
7. Guy R. K. 2004. *Unsolved Problems in Number Theory, 3rd ed.* New York: Springer-Verlag.
8. Hardy, G. H. 1999. *Ramanujan: Twelve Lectures on Subjects Suggested by His Life and Work, 3rd ed.* New York: Chelsea.
9. Montgomery H. L., Vaughan R. C. 1975. The exceptional set in Goldbach's problem // *Acta Arithmetica.* 27: 353–370. doi:10.4064/aa-27-1-353-370.
10. Pogorzelski H. A. 1977. Goldbach Conjecture. *J. reine angew. Math.* 292: 1–12.
11. Prahar K. *Primzahlverteilung. Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, B. 91.*— Berlin: Springer-Verlag, 1957.— 508 p.
12. Ramaré O. 1995. On Šnirel'man's constant. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.* 22(4): 645–706.
13. Shanks D. 1985. *Solved and Unsolved Problems in Number Theory, 4th ed.* New York: Chelsea, 30-31 and 222.
14. Schnirelmann L. G. 1933. Über additive Eigenschaften von Zahlen. *Mathematische Annalen.* 107: 649–690.
15. Wang Y. 1984. *Goldbach Conjecture.* Singapore: World Scientific.
16. Waring E. 1770. *Meditationes algebraicae.* Cambridge.
17. Woon M. S. C. On Partitions of Goldbach's Conjecture / 4 Oct 2000. <https://arxiv.org/abs/math.GM/0010027>.

Получена 07.07.2020

Вирченко Юрий Петрович – доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры теоретической и математической физики института инженерных и цифровых технологий Белгородского государственного национального исследовательского университета

 <http://orcid.org/0000-0002-5413-6179>

ул. Победы, 85, г. Белгород, Россия, 308015

E-mail: virch@bsu.edu.ru

УДК 517.9
MSC 35P05

DOI 10.18413/2687-0959-2020-52-3-185-194

МЕТОД ПОДОБНЫХ ОПЕРАТОРОВ В СПЕКТРАЛЬНОМ АНАЛИЗЕ ОПЕРАТОРНЫХ БЕСКОНЕЧНЫХ МАТРИЦ. ПРИМЕРЫ I.

А. Г. Баскаков, И. А. Криштал, Н. Б. Ускова

(Статья представлена членом редакционной коллегии С. М. Ситником)

Северо-Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова,
г. Владикавказ, Северная Осетия – Алания, 362025, Россия

Университет Северного Иллинойса,
WH320 Department of Mathematical sciences, DeKalb, IL 60115, USA

Воронежский государственный технических университет,
г. Воронеж, 394006, Россия

E-mail: anatbaskakov@yandex.ru, ikrishtal@niu.edu, nat-uskova@mail.ru

Аннотация. В работе рассматриваются примеры применения метода подобных операторов к различным классам дифференциальных операторов первого порядка с периодическими краевыми условиями. А именно, к дифференциальным операторам с интегральным возмущением с суммируемым с квадратом ядром, с возмущением – дробным интегралом Римана – Лиувилля. Также в качестве примера рассматривается оператор, заданный своей трехдиагональной бесконечной матрицей.

Ключевые слова: метод подобных операторов, дифференциальный оператор первого порядка, спектр, спектральный проектор.

Благодарности: Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ, проект 19-01-00732.

Для цитирования: Баскаков А. Г., Криштал И. А., Ускова Н. Б. 2020. Метод подобных операторов в спектральном анализе операторных бесконечных матриц. Примеры I. Прикладная математика & Физика. 52(3): 185–194.

DOI 10.18413/2687-0959-2020-52-3-185-194

THE METHOD OF SIMILAR OPERATORS IN THE SPECTRAL ANALYSIS OF INFINITE OPERATOR MATRICES. EXAMPLES I.

A. G. Baskakov, I. A. Krishtal, N. B. Uskova

(Article submitted by a member of the editorial board S. M. Sitnik)

North Ossetian State University after K. L. Khetagurov,
Nizhny Novgorod, 603950, Russia

Northern Illinois University,
WH320 Department of Mathematical sciences, DeKalb, IL 60115, USA

Voronezh state technical University,
Voronezh, 394006, Russia

E-mail: anatbaskakov@yandex.ru, ikrishtal@niu.edu, nat-uskova@mail.ru

Received July 15, 2020

Abstract. We present several examples of the use of the method of similar operators in spectral analysis of various first order differential operators with periodic boundary conditions. In particular, we consider perturbations in the form of an integral operator with a square summable kernel, a Riemann-Liouville fractional integral, and an operator with a tri-diagonal infinite matrix.

Key words: similar operator method, first order differential operator, spectrum, spectral projection.

Acknowledgements: The work was carried out with partial financial support from the Russian Foundation for Basic Research, project 19-01-00732.

For citation: Baskakov A. G., Krishtal I. A., Uskova N. B. 2020. The method of similar operators in the spectral analysis of infinite operator matrices. Examples I. Applied Mathematics & Physics. 52(3): 185–194 (in Russian).

DOI 10.18413/2687-0959-2020-52-3-185-194

1. Предварительные результаты. В [1] приведена модификация метода подобных операторов для исследования спектральных свойств возмущенных линейных дифференциальных операторов первого порядка. Стандартную схему метода подобных операторов можно посмотреть в [2] – [4]; более общую, чем в [1], модификацию – в работе [10]. В данной статье приводятся примеры применения результатов из [1] без предварительного преобразования подобия. Отметим также, что эти примеры отличаются от примеров из [10].

Для удобства читателя вначале кратко напомним используемые далее конструкции.

Пусть \mathcal{H} – комплексное сепарабельное гильбертово пространство и \mathbb{J} – некоторое непустое подмножество из \mathbb{Z} . Пусть $A : D(A) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ – нормальный линейный замкнутый (невозмущенный) оператор, имеющий полупростые собственные значения $\lambda_n, n \in \mathbb{J}$, конечной кратности, и удовлетворяющие оценке $\text{dist}(\{\lambda_n\}, \sigma(A) \setminus \{\lambda_n\}) \geq \beta > 0$. Обозначим через P_n и $P_{(m)}, n \in \mathbb{J}, m \in \mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$, спектральные проекторы $P_n = P(\{\lambda_n\}, A)$ и $P_{(m)} = \sum_{|i| \leq m} P_i$. Пусть возмущение B принадлежит двустороннему идеалу операторов Гильберта-Шмидта $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Далее рассматривается возмущенный оператор $A - B$.

Каждому ограниченному оператору X ставится в соответствие его матрица (X_{ij}) , где $X_{ij} = P_i X P_j, i, j \in \mathbb{Z}$. Отметим, что ограниченный линейный оператор однозначно определяется своей матрицей. Определим трансформаторы (операторы в пространстве операторов) J и Γ с помощью их матриц, положив для $X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$

$$(JX)_{ij} = \begin{cases} X_{ij}, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \quad (\Gamma X)_{ij} = \begin{cases} \frac{X_{ij}}{\lambda_i - \lambda_j}, & i \neq j, \\ 0, & i = j. \end{cases} \quad (1)$$

Также введем семейства трансформаторов J_k и $\Gamma_k, k \in \mathbb{Z}_+$:

$$J_k X = P_{(k)} X P_{(k)} + \sum_{|i| > k, i \in \mathbb{J}} P_i X P_i, \quad (2)$$

$$\Gamma_k X = \Gamma X - P_{(k)} (\Gamma X) P_{(k)} = \Gamma (X - J_k X), \quad X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H}). \quad (3)$$

Теорема 1.1 [1]. Пусть $B \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ и выполнено условие

$$4\|B\|_2 < \beta. \quad (4)$$

Тогда оператор $A - B$ подобен оператору $A - JX_*$, $X_* \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, имеющему диагональную матрицу. Имеет место равенство $(A - B)(I + \Gamma X_*) = (I + \Gamma X_*)(A - JX_*)$, где оператор $X_* \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ есть решение нелинейного операторного уравнения

$$X = B\Gamma X - (\Gamma X)JB - (\Gamma X)J(B\Gamma X) + B. \quad (5)$$

Пусть возмущение $B \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ такое, что $JB = 0$. Тогда при выполнении условия

$$3\|B\|_2 < \beta \quad (6)$$

операторы $A - B$ и $A - JX_*$ подобны, где X_* есть решение нелинейного операторного уравнения

$$X = B\Gamma X - (\Gamma X)J(B\Gamma X) + B. \quad (7)$$

Отметим, что в [1] условия теоремы 1.1 сформулированы с использованием константы γ из [1, Определение 3.2] вместо константы β . Однако, в условиях настоящей работы, непосредственной проверкой легко убедиться, что константа γ равна β^{-1} .

Условия (4) и (6) теоремы 1.1 довольно жесткие; их можно избежать, если преобразованием подобия приводить оператор $A - B$ не к диагональному, а к блочно-диагональному виду. Для этого используют весовую последовательность $\alpha : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$, отвечающую за скорость убывания матричных элементов матрицы-возмущения B по строкам и столбцам (см. [1], [10]).

Для любого ненулевого оператора $X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ введем двустороннюю последовательность вещественных чисел вида

$$\alpha_n(X) = \|X\|_2^{-\frac{1}{2}} \max \left\{ \left(\sum_{|l| \geq n, l \in \mathbb{J}} \|P_l X\|_2^2 \right)^{\frac{1}{4}}, \left(\sum_{|l| \geq n, l \in \mathbb{J}} \|X P_l\|_2^2 \right)^{\frac{1}{4}} \right\}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Эта последовательность играет основополагающую роль в доказательстве теоремы о подобии (см. [1]). Без ограничения общности везде далее считается, что $P_{(n)} B P_{(n)} \neq 0$. Для оператора $X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ рассмотрим оператор $F_X : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, действующий по формуле

$$F_X x = \sum_{n \in \mathbb{J}} \alpha_n(X) P_n x, \quad x \in \mathcal{H}.$$

Положим $F = F_B$. Через $M_B \subset \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ обозначим банахово пространство операторов из $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ таких, что $X = X_l F$, $X = F X_r$, где $X_l, X_r \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ с нормой $\|X\|_{M_B} = \max\{\|X_l\|_2, \|X_r\|_2\}$.

Важно, что возмущение B принадлежит пространству M_B . Таким образом, пространство M_B состоит из таких операторов из $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, которые имеют скорость убывания элементов по строкам и столбцам такую же, как и оператор B .

Теорема 1.2 [1]. *Существует такое $k \in \mathbb{Z}_+$, что оператор $A - B$, $B \in M_B \subset \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, подобен оператору $A - J_k X_* = A - P_{(k)} X_* P_{(k)} - \sum_{|i|>k, i \in \mathbb{J}} P_i X_* P_i$, где X_* — решение нелинейного уравнения (5) с трансформаторами J_k, Γ_k и $X_* \in M_B \subset \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$.*

Последовательность $\alpha : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ впервые была введена в [5]. Но ее явный вид не выписывался ни в [5], ни в других работах по исследованию дифференциальных операторов первого порядка с инволюцией или оператора Дирака.

Введем следующие обозначения. Положим $l_i = \dim \text{Im } P_i$, $i \in \mathbb{J}$, и обозначим элементы матрицы оператора $P_i B P_i$ через (b_{nj}^i) , $1 \leq n, j \leq l_i$. Также, для любого оператора X , подчиненного оператору A , обозначим через $\widehat{\lambda}_i(X)$ среднее арифметическое (с учетом кратности) собственных значений оператора $P_i X P_i$, $i \in \mathbb{J}$.

Теорема 1.3 [1]. *Имеют место следующие асимптотические формулы.*

$$\widehat{\lambda}_i(A - B) = \lambda_i - \frac{1}{l_i} \sum_{n=1}^{l_i} b_{nn}^i + \delta_i, \quad i \in \mathbb{J}, \tag{8}$$

где $(\delta_i, i \in \mathbb{J})$ принадлежит ℓ_1 .

Следствие 1.1. *Пусть собственные значения $\lambda_i, i \in \mathbb{J}$, невозмущенного оператора A простые. Тогда*

$$\lambda_i(A - B) = \lambda_i - b_{ii} + \delta_i, \quad i \in \mathbb{J},$$

где $(\delta_i, i \in \mathbb{J})$ принадлежит ℓ_1 .

Далее приводятся примеры различных (интегро-)дифференциальных операторов, иллюстрирующие общие теоремы о подобии и оценках собственных значений. Во всех этих примерах через $L_2[0, \omega]$ обозначено гильбертово пространство измеримых по Лебегу на отрезке $[0, \omega]$ со значениями в \mathbb{C} и суммируемых с квадратом модуля (классов эквивалентности) функций. Скалярное произведение в $L_2[0, \omega]$ задается формулой

$$(x, y) = \frac{1}{\omega} \int_0^\omega x(s) \overline{y(s)} ds$$

и норма порождается этим скалярным произведением. Через $W_1^2[0, \omega]$ обозначено пространство Соболева абсолютно непрерывных функций из $L_2[0, \omega]$ с производными из $L_2[0, \omega]$ и скалярным произведением $(x, y) = (x, y) + (x', y')$, $x, y \in L_2[0, \omega]$.

2. Примеры. Пример 1. В пространстве $\mathcal{H} = L_2[0, \omega]$ рассмотрим интегро-дифференциальный оператор первого порядка $\mathfrak{L} : D(\mathfrak{L}) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$,

$$(\mathfrak{L}y)(t) = y'(t) - \int_0^\omega K(t, s)y(s)ds \tag{9}$$

с областью определения $D(\mathfrak{L}) = \{y \in W_2^1[0, \omega] : y(0) = y(\omega)\}$. Пусть ядро K интегрального оператора удовлетворяет условию

$$\int_0^\omega \int_0^\omega |K(t, s)|^2 ds dt < \infty. \tag{10}$$

Невозмущенным оператором считаем оператор $\mathfrak{L}_0 y = y'$, $y \in D(\mathfrak{L}_0) = D(\mathfrak{L})$, а возмущением — оператор $(By)(t) = \int_0^\omega K(t, s)y(s) ds$. Условие (10) означает принадлежность возмущения B идеалу $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$.

Спектральные свойства невозмущенного нормального оператора \mathfrak{L}_0 известны. Его простыми собственными значениями являются числа $\lambda_n = i2\pi n/\omega$, $n \in \mathbb{Z}$. Они соответствуют собственным векторам-функциям $e_n(t) = e^{\lambda_n t} = e^{i2\pi n t/\omega}$, $n \in \mathbb{Z}$. Спектральные проекторы $P_n = P(\{\lambda_n\}, \mathfrak{L}_0)$, $n \in \mathbb{Z}$, задаются формулами $P_n x = (x, e_n) e_n$, $n \in \mathbb{Z}$. Для невозмущенного оператора \mathfrak{L}_0 выполнено условие разделенности спектра с константой $\beta = 2\pi/\omega$.

Пусть ядро K имеет ряд Фурье вида $K(t, s) = \sum_{l, p \in \mathbb{Z}} \widehat{k}(l, p) e^{i2\pi l t/\omega} e^{i2\pi p s/\omega}$, $t, s \in [0, \omega]$; тогда из (10) следует $\sum_{l, p \in \mathbb{Z}} |\widehat{k}(l, p)|^2 < \infty$. Элементы числовой матрицы оператора возмущения определяются формулой

$$b_{lp} = \frac{1}{\omega} \widehat{k}(-l, p), \quad l, p \in \mathbb{Z}.$$

Используем допустимую тройку $(\mathfrak{S}_2(\mathcal{H}), J, \Gamma)$ из [1, § 5.1]. Отметим, что трансформаторы J и Γ задаются формулой (1). Таким образом, из теоремы 1.1 немедленно следует

Теорема 2.1. Пусть выполнено условие

$$4\|B\|_2 < \beta = \frac{2\pi}{\omega}. \tag{11}$$

Тогда оператор \mathfrak{Q} подобен оператору $\mathfrak{Q}_0 - \sum_{i \in \mathbb{Z}} P_i X_* P_i$, имеющему диагональную матрицу. При этом $X_* \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ есть решение нелинейного операторного уравнения (5). Преобразование подобия оператора \mathfrak{Q} в оператор $\mathfrak{Q}_0 - \sum_{i \in \mathbb{Z}} P_i X_* P_i$ осуществляет оператор $I + \Gamma X_* \in \text{End } \mathcal{H}$ с $\Gamma X_* \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$.

Заметим, что условие (11) на норму интегрального оператора B является ограничительным. Чтобы избежать этого, можно использовать допустимую тройку (M_B, J_k, Γ_k) из [1, § 5.2] и теорему 1.2. Но при ее использовании оператор \mathfrak{Q} преобразованием подобия приводится к оператору не диагонального, а блочно-диагонального вида.

Теорема 2.2. Существует такое целое $k \geq 0$, что оператор \mathfrak{Q} подобен оператору с матрицей блочно-диагонального вида

$$\mathfrak{Q}_0 - V_k = \mathfrak{Q}_0 - P_{(k)} X_* P_{(k)} - \sum_{|i| > k} P_i X_* P_i,$$

где оператор $X_* \in M_B \subset \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ есть решение нелинейного операторного уравнения (5).

Теорема 2.3. Для собственных значений $\tilde{\lambda}_n$, $|n| > k$ исходного оператора \mathfrak{Q} имеют место следующие асимптотические формулы

$$\tilde{\lambda}_n = i \frac{2\pi n}{\omega} - \widehat{k}(-n, n) + \beta_n,$$

где последовательность $(\beta_n, n \in \mathbb{Z})$ принадлежит ℓ_1 .

Утверждение теоремы 2.3 вытекает из теорем 2.1, 2.2.

Проиллюстрируем теперь вышеизложенные результаты для оператора B , заданного формулой

$$(By)(t) = c \int_0^1 tsy(s) ds, \quad y \in L_2[0, 1].$$

Таким образом, ядро интегрального оператора задается формулой $K(t, s) = ts$, $t, s \in [0, 1]$, ω в данном случае равно 1, и $c > 0$ — некоторая постоянная. В зависимости от величины константы c будет проводиться либо полная диагонализация матрицы оператора \mathfrak{Q} , либо блочная диагонализация.

Очевидно, что $\|B\|_2 = c/3$ и матрица оператора возмущения B состоит из элементов

$$B_{nm} = \begin{cases} \frac{c}{4\pi^2 nm}, & n, m \neq 0, \\ \frac{c}{i4\pi m}, & m \neq 0, \quad n = 0, \\ -\frac{c}{4\pi n}, & n \neq 0, \quad m = 0, \\ \frac{c}{4}, & m = n = 0. \end{cases}$$

Операторы JB и ΓB имеют матрицы, состоящие из элементов

$$(JB)_{nm} = \begin{cases} \frac{c}{4}, & m = n = 0, \\ \frac{c}{(2\pi n)^2}, & n = m \neq 0, \\ 0, & n = m, \end{cases} \quad (\Gamma B)_{nm} = \begin{cases} \frac{c}{i8\pi^2 nm(n-m)}, & n \neq m, \quad n, m \neq 0, \\ -\frac{c}{8\pi^2 n^2}, & n \neq 0, \quad m = 0, \\ -\frac{c}{8\pi^2 m^2}, & m \neq 0, \quad n = 0, \\ 0, & n = m. \end{cases}$$

Воспользуемся первой допустимой тройкой $(\mathfrak{S}_2(\mathcal{H}), J, \Gamma)$. В этом случае $\beta = 2\pi$.

Теорема 2.4. Пусть число $c > 0$ удовлетворяет условию

$$c < \frac{3\pi}{2}. \tag{12}$$

Тогда оператор

$$(\mathfrak{Q}y)(t) = \frac{dy}{dt} - c \int_0^1 tsy(s) ds$$

с областью определения $D(\mathfrak{Q})$, заданной периодическими краевыми условиями, подобен оператору $\mathfrak{Q}_0 - Y$, имеющему диагональную матрицу, состоящую из элементов $(i2\pi n - cy_n)$, $n \in \mathbb{Z}$, где последовательность y_n , $n \in \mathbb{Z}$, принадлежит пространству $\ell_2(\mathbb{Z})$ и $Y \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ — решение нелинейного операторного уравнения (5).

Пусть теперь число c не удовлетворяет условию (12). Тогда в качестве допустимой тройки используем тройку (M_B, J_n, Γ_n) из [1, § 5.2].

Оценим последовательность $\alpha : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}_+$ в явном виде. Для этого вычислим $\|P_k B\|_2^2$; отметим, что $\|P_k B\|_2^2$ и $\|BP_k\|_2^2$ оцениваются одной и той же величиной. Итак,

$$\begin{aligned} \|BP_n\|_2^2 &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} \|P_l BP_n\|_2^2 = 2 \sum_{l \geq 1} \|P_l BP_n\|_2^2 + \|P_0 BP_n\|_2^2 = 2 \sum_{l \geq 1} \frac{c^2}{16\pi^4 l^2 n^2} \\ &+ \frac{c^2}{16\pi^2 n^2} = \frac{c^2}{12\pi^2 n^2}; \end{aligned}$$

аналогично,

$$\|BP_0\|_2^2 \leq 2 \sum_{l \geq 1} c \frac{c^2}{16\pi^2 l^2} + \frac{c^2}{16} = \frac{c^2}{12}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{|l| \geq n} \|BP_k\|_2^2 &\leq \frac{c^2}{6\pi^2(n-1)}, \\ \left(\frac{3}{2\pi^2 n}\right)^{\frac{1}{4}} &\leq \alpha_n(B) \leq \left(\frac{3}{2\pi^2(n-1)}\right)^{\frac{1}{4}}. \end{aligned}$$

Итак, последовательность $\alpha : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ оценена. Очень важным является то, что оценка не зависит от c . Теперь оценим $\|B\|_2$:

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\|BP_n\|_2^2}{\alpha_n^2} &= 2 \sum_{n \geq 1} \frac{c^2}{12\pi^2 n^2} \left(\frac{2\pi^2 n}{3}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{12} c^2 \leq c^2 \left(\frac{\sqrt{2}}{6\sqrt{3}\pi} 2,61 + \frac{1}{12}\right), \\ \|B\|_2 &\leq c \left(\frac{2,61}{3\sqrt{6}\pi} + \frac{1}{12}\right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

В последней формуле учтено, что $\sum_{n \geq 1} n^{-\frac{3}{2}} \leq 2,61$, а также

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\|BP_n\|_2^2}{\alpha_n^2(B)} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\|P_n B\|_2^2}{\alpha_n^2(B)}.$$

Таким образом, из теоремы 2.2 вытекают

Теорема 2.5 *Существует такое целое $k \geq 0$, что оператор \mathfrak{Q} подобен оператору блочно-диагонального вида*

$$\mathfrak{Q}_0 - P_{(k)} Y P_{(k)} - \sum_{|i| > k} P_i Y P_i,$$

где $Y \in M_B \subset \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ есть решение нелинейного операторного уравнения (5).

Теорема 2.6 *Справедливы формулы:*

$$\tilde{\lambda}_n = i2\pi n - \frac{c}{4\pi^2 n^2} + \beta_n, \quad n \neq 0, \quad |n| > k,$$

где последовательность $(\beta_n, n \in \mathbb{Z})$ принадлежит ℓ_1 .

Отметим, что впервые последовательность $\alpha : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ была оценена в явном виде в работе [10] для интегро-дифференциального оператора первого порядка с ядром, отличным от приведенного выше. В [6] также приводится оценка явного вида этой последовательности, но, опять же, для другого ядра. В [11] рассматривались дифференциальные операторы второго порядка, возмущенные интегральным оператором. Для них также применялся метод подобных операторов, но использовалась другая модификация, близкая к модификации из [4].

Пример 2. Рассмотрим дифференциальный оператор $\mathfrak{Q} = \mathfrak{Q}_0 - B$ вида

$$(\mathfrak{Q}y)(t) = \frac{dy}{dt} - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-x)^{\alpha-1} y(x) dx, \quad t \in [0, 1], \quad \alpha \in \mathbb{C}, \quad \Re \alpha > 0,5,$$

где оператор $\mathfrak{Q}_0 : D(\mathfrak{Q}_0) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ определен в примере 1, $D(\mathfrak{Q}) = D(\mathfrak{Q}_0)$, $\omega = 1$. Через $\Gamma(\alpha)$ обозначена гамма-функция. Возмущением является оператор дробного интегрирования B , заданный формулой

$$(By)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-x)^{\alpha-1} y(x) dx, \quad y \in L_2[0, 1].$$

Этот оператор обычно называется дробным интегралом Римана-Лиувилля [11], [8], [9]; он ограничен на $L_p[0, 1]$, $p \in [1, \infty]$. В рассматриваемом случае ($\Re \alpha > 0.5$) оператор B есть интегральный оператор с суммируемым квадратом на $[0, 1] \times [0, 1]$ ядром и

$$\|B\|_2 \leq \frac{1}{|\Gamma(\alpha)|} ((2\Re \alpha - 1)2\Re \alpha)^{-1/2}.$$

Обозначим также через b_j , $j \in \mathbb{Z}$, диагональные элементы возмущения B , а именно

$$b_j = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \int_0^t (t-x)^{\alpha-1} e^{i2\pi j(x-t)} dx dt.$$

Из теорем 2.1 и 2.2 вытекает

Теорема 2.7. При выполнении условия

$$\pi|\Gamma(\alpha)|((2\Re \alpha - 1)2\Re \alpha)^{1/2} > 2$$

оператор \mathfrak{L} подобен диагональному оператору $\mathfrak{L}_0 - JY$, где $Y \in M_B \subset \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ есть решение уравнения (5). В общем случае, оператор \mathfrak{L} подобен блочно-диагональному оператору $\mathfrak{L}_0 - J_k Y$, $k \in \mathbb{Z}_+$, где $Y \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ есть решение уравнения (5). Для собственных значений $\tilde{\lambda}_n$, $n \in \mathbb{Z}$, оператора \mathfrak{L} имеют место асимптотические формулы

$$\tilde{\lambda}_n = i2\pi n - b_n + \beta_n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad |n| > k,$$

где последовательность $(\beta, n \in \mathbb{Z}) \in \ell_1$.

Пример 3. Результаты примера 1 легко обобщаются на случай, когда возмущение является интегральным оператором с матричным ядром. Приведем ниже соответствующий результат.

Пусть

$$\mathcal{H} = L_2([0, 1], \mathbb{C}^m) = L_2^m[0, 1] = \underbrace{L_2[0, 1] \times \dots \times L_2[0, 1]}_m$$

есть гильбертово пространство измеримых на $[0, 1]$ со значениями в \mathbb{C}^m и суммируемых с квадратом нормы функций. Скалярное произведение в $L_2^m[0, 1]$ определяется равенством $(f, g) = \sum_{i=1}^m (f_i, g_i)$, $f = (f_1, f_2, \dots, f_m) \in L_2^m[0, 1]$, $g = (g_1, g_2, \dots, g_m) \in L_2^m[0, 1]$, где (f_i, g_i) — скалярное произведение в $L_2[0, 1]$. Норма в $L_2^m[0, 1]$ порождается этим скалярным произведением: $\|f\|^2 = \sum_{i=1}^m \int_0^1 |f_i(x)|^2 ds$.

В пространстве $\mathcal{H} = L_2^m[0, 1]$ рассмотрим интегро-дифференциальный оператор

$$(\mathfrak{L}y)(t) = y'(t) - \int_0^1 K(t, s)y(s) ds$$

с областью определения $D(\mathfrak{L}) = \{y \in (W_2^1)^m[0, 1] : y(0) = y(1)\}$ с ядром K интегрального оператора, таким что

$$\int_0^1 \int_0^1 \|K(t, s)\|_2^2 ds dt < \infty. \tag{13}$$

В этом случае у невозмущенного оператора $\mathfrak{L}_0 y = y'$ собственные значения $\lambda_n = i2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, являются полупростыми, кратности m . Соответствующими собственными векторами являются функции

$$e_{n,j} = e^{i2\pi n \cdot} f_j, \quad n \in \mathbb{Z}, j = 1, 2, \dots, m,$$

где векторы f_j , $j = 1, 2, \dots, m$, образуют ортонормированный базис в \mathbb{C}^m и $P_n = P(\{\lambda_n\}, \mathfrak{L}_0)$, $n \in \mathbb{Z}$. Отметим, что условие (13) означает принадлежность возмущения B идеалу $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$.

Пусть ядро $K(t, s) = (k_{ij}(t, s))$ имеет следующее разложение в ряд Фурье $K(t, s) = \sum_{l,p \in \mathbb{Z}} \widehat{K}(l, p) e^{i2\pi lt} e^{i2\pi ps}$, где $\widehat{K}(l, p) = (\hat{k}_{ij}(l, p))$, $1 \leq i, j \leq m$.

Из теорем 1.1 и 1.3, вытекает

Теорема 2.8. Пусть

$$2 \left(\int_0^1 \int_0^1 \|K(t, s)\|_2^2 dt ds \right)^{1/2} < \pi.$$

Тогда оператор \mathfrak{L} подобен оператору $\mathfrak{L}_0 - \sum_{i \in \mathbb{Z}} P_i X_i P_i$, где $X_i \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ — решение уравнения (5). Спектр $\sigma(\mathfrak{L})$ оператора \mathfrak{L} допускает представление

$$\sigma(\mathfrak{L}) = \bigcup_{j \in \mathbb{J}} \tilde{\sigma}_j,$$

где каждое из множеств $\tilde{\sigma}_j$ содержит не более чем m собственных значений и для взвешенного среднего $\widehat{\lambda}_j$ этих собственных значений имеет место асимптотическая формула

$$\widehat{\lambda}_j = i2\pi j - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \widehat{k}_{ii}(j, j) + \beta'_j, \quad j \in \mathbb{Z},$$

где последовательность $(\beta'_i, i \in \mathbb{Z})$ принадлежит ℓ_1 .

В случае невыполнения условий теоремы 2.8 для оператора \mathfrak{L} можно построить, аналогично примеру 1, допустимую тройку (M_B, J_n, Γ_n) и получить, с использованием теорем 1.2 и 1.3 такую же оценку для взвешенных средних.

Пример 4. В пространстве $\mathcal{H} = l_2(\mathbb{Z})$ рассмотрим оператор $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, заданный трехдиагональной матрицей (a_{nj}) , где

$$a_{nj} = \begin{cases} an, & n = j, \\ b_1/n, & j = n - 1, \quad n \neq 0, \\ b_2/n, & j = n + 1, \quad n \neq 0, \\ 0, & \text{в остальных случаях;} \end{cases}$$

b_1, b_2 – некоторые комплексные числа, и $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Область определения $D(\mathcal{A})$ оператора \mathcal{A} состоит из таких последовательностей $x : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$, что $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |anx(n)|^2 < \infty$.

Представим оператор \mathcal{A} в виде $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 - \mathcal{B}$, где $(\mathcal{A}_0x)(n) = anx(n)$ и $\mathcal{B} = \mathcal{A}_0 - \mathcal{A}$, $D(\mathcal{A}_0) = D(\mathcal{A})$. Таким образом, матрица оператора \mathcal{A}_0 диагональна, а матрица оператора-возмущения \mathcal{B} имеет две ненулевые диагонали: первую и минус первую.

Очевидно, что $\mathcal{B} \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ и $\|\mathcal{B}\|_2^2 = 2(|b_1|^2 + |b_2|^2) \sum_{i \geq 1} i^{-2} = (|b_1|^2 + |b_2|^2)\pi^2/3$.

У невозмущенного оператора \mathcal{A}_0 простыми собственными значениями являются числа $\lambda_n = an$, $n \in \mathbb{Z}$, соответствующими собственными векторами e_n , $n \in \mathbb{Z}$, – векторы стандартного базиса в $l_2(\mathbb{Z})$ т. е. $e_n(j) = \delta_{nj}$, где δ_{nj} – символ Кронекера. Спектральный проектор $P_n = P(\{\lambda_n\}, \mathcal{A}_0)$, $n \in \mathbb{Z}$, задается формулой $P_n x = (x, e_n)e_n = x(n)e_n$, $x \in l_2(\mathbb{Z})$.

Пусть $X = (x_{ij})$, $X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Тогда операторы JX и ΓX , $X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ имеют матрицы

$$(JX)_{ij} = \begin{cases} x_{ii}, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \quad (\Gamma X)_{ij} = \begin{cases} \frac{x_{ij}}{a(i-j)}, & i \neq j, \\ 0, & i = j. \end{cases}$$

Из теоремы 1.1 немедленно следует

Теорема 2.9. Пусть числа a, b_1, b_2 таковы, что

$$\pi (3|b_1|^2 + 3|b_2|^2)^{1/2} < |a|. \tag{14}$$

Тогда оператор \mathcal{A} подобен оператору $\mathcal{A}_0 - JX_*$, $X_* \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, имеющему диагональную матрицу; оператор $X_* \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ есть решение нелинейного операторного уравнения (5).

Как и в примере 1, в случае невыполнения условия (14) можно использовать допустимую тройку из (M_B, J_n, Γ_n) .

Оценим и в этом случае явный вид последовательности $\alpha : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$. Так как

$$\begin{aligned} \|P_n \mathcal{B}\|_2^2 &= \frac{|b_1|^2 + |b_2|^2}{n^2}, \quad \|\mathcal{B}P_n\|_2^2 = \frac{|b_2|^2}{(n-1)^2} + \frac{|b_1|^2}{(n+1)^2}, \quad n \neq \pm 1, \\ \sum_{|l| \geq n} \|P_l \mathcal{B}\|_2^2 &\leq \frac{2(|b_1|^2 + |b_2|^2)}{n-1}, \quad n > 1, \quad \sum_{|l| \geq n} \|\mathcal{B}P_l\|_2^2 \leq \frac{2|b_2|^2}{n-2} + \frac{2|b_1|^2}{n}, \quad n \neq 2, \\ \|P_0 \mathcal{B}\|_2 &= 0, \quad \|\mathcal{B}P_0\|_2^2 = |b_1|^2 + |b_2|^2, \quad \|\mathcal{B}P_1\|_2 = |b_1|, \quad \|\mathcal{B}P_{-1}\|_2 = |b_2|, \end{aligned}$$

при $n > 2$ имеем

$$\alpha_n(\mathcal{B}) \leq \left(\frac{12}{\pi^2}\right)^{1/4} \max \left\{ \left(\frac{1}{n-1}\right)^{1/4}, \left(\left(\frac{|b_1|^2}{n} + \frac{|b_2|^2}{n-2}\right) \frac{1}{|b_1|^2 + |b_2|^2}\right)^{1/4} \right\}.$$

Тогда из теоремы 1.2 вытекает

Теорема 2.10. Существует такое $k \in \mathbb{Z}_+$, что оператор $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 - \mathcal{B}$ подобен оператору блочно-диагонального вида

$$\mathcal{A}_0 - P_{(k)} X_* P_{(k)} - \sum_{|j| > k} P_j X_* P_j,$$

где $P_{(k)} = \sum_{|i| \leq k} P_i$, $X_* \in M_B \subset \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ есть решение нелинейного операторного уравнения (5).

Из теорем 1.2, 1.3 вытекает

Теорема 2.11. Спектр $\sigma(\mathcal{A})$ оператора \mathcal{A} представим в виде

$$\sigma(\mathcal{A}) = \tilde{\sigma}_{(k)} \cup \left(\bigcup_{|i| > k} \{\tilde{\lambda}_i\} \right),$$

где множество $\tilde{\sigma}_{(k)}$ содержит не более $2k + 1$ собственных значений, $\tilde{\lambda}_i$, $|i| > k$, — простые изолированные собственные значения и

$$\tilde{\lambda}_i = ai + \eta_i, \quad |i| > k,$$

где последовательность $(\eta_i, |i| > k)$ принадлежит $\ell_1(\mathbb{Z})$.

Отметим, что библиографический обзор по трехдиагональным матрицам можно найти в [7]. Элементы матрицы \mathcal{A} удовлетворяют условиям [7, Пример 2]. Только, в отличие от [7], собственные значения диагональной матрицы не разбегаются.

Результаты примера 4 легко обобщаются на случай следующей блочной трехдиагональной матрицы.

Пусть $\mathcal{H} = l_2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^m)$. Рассмотрим матрицу \mathcal{A} вида

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \mathcal{A}_{0,-2} & \mathcal{C}_{-2} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \mathcal{B}_{-2} & \mathcal{A}_{0,-1} & \mathcal{C}_{-1} & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \mathcal{B}_{-1} & \mathcal{A}_{0,0} & \mathcal{C}_0 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \mathcal{B}_0 & \mathcal{A}_{0,1} & \mathcal{C}_1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \mathcal{B}_1 & \mathcal{A}_{0,2} & \mathcal{C}_2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

где $\mathcal{A}_{0,n}$, \mathcal{B}_n , \mathcal{C}_n , $n \in \mathbb{Z}$, комплекснозначные матрицы m -ого порядка и $\mathcal{A}_{0,n}$, $n \in \mathbb{Z}$, — симметрическая матрица.

Матрица \mathcal{A} определяет нормальный линейный оператор $\mathfrak{Q} : D(\mathfrak{Q}) \subset l_2 \rightarrow l_2$, действующий по формуле $(\mathfrak{Q}u)_n = -\mathcal{B}_{n-1}u_{n-1} + \mathcal{A}_{0,n}u_n - \mathcal{C}_n u_{n+1}$, $n \in \mathbb{Z}$, $u \in l_2$, где $D(\mathfrak{Q}) = \{u \in l_2 : \mathfrak{Q}u \in l_2\}$. Введем в рассмотрение также диагональный оператор $\mathfrak{Q}_0 : D(\mathfrak{Q}_0) = D(\mathfrak{Q}) \subset l_2 \rightarrow l_2$, действующий по формуле $(\mathfrak{Q}_0 u)_n = \mathcal{A}_{0,n}u_n$, $n \in \mathbb{Z}$ и $D(\mathfrak{Q}_0) = \{u \in l_2 : \sum_{n \in \mathbb{Z}} \|\mathcal{A}_{0,n}u_n\|^2 < \infty\}$.

Предположим, что $\sigma(\mathcal{A}_{0,n}) = \{\lambda_n\} = \sigma_n$, где λ_n , $n \in \mathbb{Z}$, — полупростые собственные значения кратности m , и выполнено условие

$$\text{dist}(\sigma_i, \sigma_j) \geq \beta > 0, \quad i \neq j, \quad i, j \in \mathbb{Z}.$$

Матрицы \mathcal{B}_n и \mathcal{C}_n , $n \in \mathbb{Z}$, таковы, что

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} (\|\mathcal{B}_n\|^2 + \|\mathcal{C}_n\|^2) < \infty.$$

Теорема 2.12. Существует такое $k \in \mathbb{Z}_+$, что оператор \mathfrak{Q} подобен блочно-диагональному оператору

$$\mathcal{L}_0 - P_{(k)} X_* P_{(k)} - \sum_{|i| > k} P_i X_* P_i,$$

где оператор $X_* \in M_B \subset \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ есть решение нелинейного операторного уравнения (5).

Далее можно применить теорему 1.3 для оценки взвешенных средних оператора \mathfrak{Q} .

Список литературы

1. Баскаков А. Г., Криштал И. А., Ускова Н. Б. 2020. Метод подобных операторов в спектральном анализе операторных бесконечных матриц. Прикладная математика & Физика, 52(2): 71–85. DOI: <https://doi.org/10.18413/2687-0959-2020-52-2-71-85>
2. Баскаков А. Г. 1983. Методы абстрактного гармонического анализа в теории возмущений линейных операторов. Сиб. матем. журн., 24(1): 21–39.
3. Баскаков А. Г. 1994. Спектральный анализ возмущенных неквазианалитических и спектральных операторов. Изв. РАН. Сер. матем., 58(4): 3–32.
4. Баскаков А. Г., Поляков Д. М. 2017. Метод подобных операторов в спектральном анализе оператора Хилла с негладким потенциалом. Матем. сб., 208(1): 3–47. DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8637>

5. Баскаков А. Г., Дербушев А. В., Щербаков А. О. 2011. Метод подобных операторов в спектральном анализе оператора Дирака с негладким потенциалом — Изв. РАН. Сер. матем., 75(3): 3–28.
DOI: <https://doi.org/10.4213/im4202>
6. Баскаков А. Г., Криштал И. А., Ускова Н. Б. 2019. Метод подобных операторов в исследовании спектральных свойств возмущенных дифференциальных операторов первого порядка. Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз., 171: 3–18.
DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2019-171-3-18>
7. Бройтигам И. Н., Поляков Д. М. 2019. Асимптотика собственных значений бесконечных блочных матриц. Уфимск. матем. журн., 11(3): 10–29.
8. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. 1987. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск, Наука и техника, 688.
9. Ситник С. М., Шишкина Э. Л. 2019. Метод операторов преобразования для дифференциальных уравнений с операторами Бесселя. М., Физматлит, 220.
10. Baskakov A. G., Krishtal I. A., Uskova N. B. 2019. Similarity techniques in the spectral analysis of perturbed operator matrices. J. Math. Anal. Appl., 477: 930–960. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2019.04.050>
11. Garkavenko G. V., Zgolich A. R., Uskova N. B. 2019. Spectral analysis of one class of the integro-differential operators. J. Phys.: Conf. Series, 1203: 012102. DOI: 10.1088/1742-6596/1203/1/012102
12. Riesz M. 1949. L'intégrale de Riemann-Liouville et le problème de Cauchy. Acta Math., 81: 1–223.
DOI: 10.1007/BF02395016

References


1. Baskakov A. G., Krishtal I. A., Uskova N. B. 2020. The method of similar operators in spectral analysis of infinite operator matrices. Applied Mathematics & Physics, 52(2): 71–85 (in Russian).
DOI: <https://doi.org/10.18413/2687-0959-2020-52-2-71-85>
2. Baskakov A. G. 1983. Methods of abstract harmonic analysis in the perturbation of linear operators. Siberian Math. J., 24(1): 17–32. (in Russian)
3. Baskakov A. G. 1995. Spectral analysis of perturbed nonquasianalytic and spectral operators. Izv. Math., 45(1): 1–31. DOI: 10.1070/IM1995v045n01ABEH001621. (in Russian)
4. Baskakov A. G., Polyakov D. M. 2017. The method of similar operators in the spectral analysis of the Hill operator with nonsmooth potentials. Sb. Math., 208(1): 1–43. DOI: 10.1070/SM8637. (in Russian)
5. Baskakov A. G., Derbushev A. V., Shcherbakov A. O. 2011. The method of similar operators in the spectral analysis of non-self-adjoint Dirac operators with non-smooth potentials. Izv. Math., 75(3): 445–469.
DOI: 10.1070/IM2011v075n03ABEH002540. (in Russian)
6. Baskakov A. G., Krishtal I. A., Uskova N. B., «Method of similar operators in the study of spectral properties of perturbed first-order differential operators», Proceedings of the Voronezh Winter Mathematical School «Modern Methods of Function Theory and Related Problems.» January 28 – February 2, 2019. Part 2, Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Sovrem. Mat. Pril. Temat. Obz., 171, VINITI, Moscow, 2019, 3–18.
<https://doi.org/10.36535/0233-6723-2019-171-3-18>. (in Russian)
7. Braeutigam I.N., Polyakov D.M. 2019. Asymptotics of eigenvalues of infinite block matrices. Ufa Math. J., 11(3): 11–28. DOI: 10.13108/2019-11-3-11. (in Russian)
8. Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. 1993. Fractional integrals and derivatives: theory and applications. New York, Gordon and Breach Science Publishers, 1006 p.
9. Sitnik S. M., Shishkina E. L. 2019. The transmutation method for differential equations with Bessel operators. Moscow, Fizmatlit, 220 p (in Russian).
10. Baskakov A. G., Krishtal I. A., Uskova N. B. 2019. Similarity techniques in the spectral analysis of perturbed operator matrices. J. Math. Anal. Appl., 477: 930–960. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2019.04.050>
11. Garkavenko G. V., Zgolich A. R., Uskova N. B. 2019. Spectral analysis of one class of the integro-differential operators. J. Phys.: Conf. Series, 1203: 012102. DOI: 10.1088/1742-6596/1203/1/012102

12. Riesz M. 1949. L'intégrale de Riemann-Liouville et le problème de Cauchy. Acta Math., 81: 1–223.
DOI: 10.1007/BF02395016

Получена 15.07.2020

Баскаков Анатолий Григорьевич – профессор, ведущий научный сотрудник Северо-Осетинского государственного университета им. К. Л. Хетагурова
ул. Ватутина, 44–46, г. Владикавказ, Северная Осетия – Алания, Россия, 362025
E-mail: anatbaskakov@yandex.ru

Криштал Илья Аркадьевич – кандидат физико-математических наук, доцент, профессор Университета Северного Иллинойса

 <http://orcid.org/id:0000-0001-7171-2177>

WN320 Department of Mathematical sciences, DeKalb, IL, USA, 60115

E-mail: ikrishtal@niu.edu

Ускова Наталья Борисовна – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент Воронежского государственного технического университета

 <http://orcid.org/0000-0002-9212-8786>

ул. 20 лет Октября, 84, г. Воронеж, Россия, 394006

E-mail: nat-uskova@mail.ru

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ДЛЯ СИНГУЛЯРНОГО
ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА, РАССМАТРИВАЕМОГО В МОДЕЛЬНОЙ ТРЕХМЕРНОЙ
ОБЛАСТИ

Н. В. Королев, А. А. Ларин

(Статья представлена членом редакционной коллегии С. М. Ситником)

ВУНЦ ВВС «ВВА им. проф. Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина»,
Воронеж, 394064, Россия

E-mail: korolevn33@yandex.ru

Аннотация. В работе решена спектральная задача для сингулярного эллиптического оператора второго порядка в трехмерной модельной области в виде полушара с вырезанным конусом в заданном направлении. Показана перестройка собственных значений, изменение их кратности и трансформация собственных функций при вариации угла раствора конуса.

Ключевые слова: собственные значения, собственные функции, задача Штурма – Лиувилля, функции Лежандра.

Для цитирования: Королев Н. В., Ларин А. А. 2020. Об одной задаче на собственные значения для сингулярного эллиптического оператора, рассматриваемого в модельной трехмерной области. Прикладная математика & Физика. 52(3): 195–203. DOI 10.18413/2687-0959-2020-52-3-195-203

ON A PROBLEM OF EIGENVALUES FOR A SINGULAR ELLIPTIC OPERATOR CONSIDERED
IN THE MODEL THREE-DIMENSIONAL DOMAIN

N. V. Korolev, A. A. Larin

(Article submitted by a member of the editorial board S. M. Sitnik)

MESC AF «N. E. Zhukovsky and Y. A. Gagarin Air Force Academy»,
Voronezh, 394064, Russia

E-mail: korolevn33@yandex.ru

Received July 25, 2020

Abstract. In this article, a spectral problem of a special form is solved for the second-order singular elliptic operator in a three-dimensional model domain the form of a hemisphere with a cone cut out in a given direction. The restructuring of the eigenvalues, the change in their multiplicity and the transformation of the eigenfunctions with variation of the cone angle are presented.

Key words: eigenvalues, eigenfunctions, Sturm-Liouville problem, Legendre functions.

For citation: Korolev N. V., Larin A. A. 2020. On a problem of eigenvalues for a singular elliptic operator considered in the model three-dimensional domain. Applied Mathematics & Physics. 52(3): 195–203 (in Russian).

DOI 10.18413/2687-0959-2020-52-3-195-203

1. Введение. Важность полных систем собственных функций модельных эллиптических операторов, рассматриваемых в двумерных и трехмерных областях, хорошо известна [7, 10]. Они находят применение в численном анализе, где берутся в качестве систем координатных функций для приближенного нахождения собственных значений и решений краевых задач более общего вида в той же области [8, 1, 12]. Вместе с этим полные системы собственных функций используются для аналитического решения нестационарных задач с тем же эллиптическим оператором [10].

В предлагаемой работе в модельной области пространства E^3 решена задача на собственные значения для сингулярного эллиптического оператора второго порядка, содержащего по одной из переменных дифференциальный оператор Бесселя $\partial^2 u / \partial z^2 + k \partial u / (z \partial z)$ и имеющего потенциал с особенностью в начале координат. Задача рассматривается в полушаре с удаленной из него конической областью. Найден в явном виде собственные значения и соответствующие им собственные функции, а также выяснен характер поведения этих функций вблизи начала координат.

2. Постановка задачи. Пусть $B(R_0) = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 < R_0, z > 0\}$ – часть шара с центром в точке $O(0, 0, 0)$ радиуса R_0 , расположенная в полупространстве $z > 0$ пространства E^3 , и пусть K_ω – коническая

область, границей которой является часть конуса $x \operatorname{tg} \omega = \sqrt{y^2 + z^2}$ при $\omega \in (\pi/2, \pi)$, $x < 0$. Положим $\Omega = B(R_0) \setminus \bar{K}_\omega$ (черта сверху обозначает замыкание множества в E^3), $\Gamma = \partial\Omega$ (рис. 1). Часть границы Γ , для точек которой $z > 0$, обозначим через Γ^+ и пусть $\Gamma_0 = \Gamma \setminus \Gamma^+$.

В области Ω рассмотрим задачу на собственные значения (СЗ) вида

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{k}{z} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{E}{r^2} u = \lambda u, \quad (x, y, z) \in \Omega, \tag{1}$$

$$u|_{\Gamma^+} = 0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{\Gamma_0} = 0, \tag{3}$$

где k и E – вещественные числа, причем $k > 0$, $E \geq 0$; $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Решения задачи (1) – (3) ищутся в классе функций $C^2(\Omega) \cap C^1(\Omega \cup \Gamma_0) \cap C(\bar{\Omega})$. Нетрудно видеть, что все СЗ λ этой задачи положительны. Требуется найти данные значения и отвечающие им собственные функции (СФ).

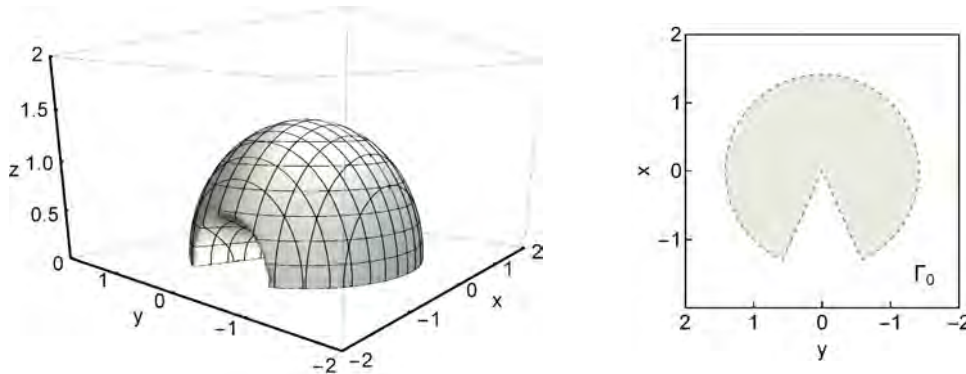


Рис. 1. Модельная трехмерная область Ω (слева) и часть границы Γ_0 в плоскости $z = 0$ (справа) при $\operatorname{tg} \omega = -0.2$ и $R_0 = 2$
 Fig. 1. Model three-dimensional domain Ω (left) and part of the boundary Γ_0 in the plane $z = 0$ (right) at $\operatorname{tg} \omega = -0.2$ and $R_0 = 2$

3. Решение спектральной задачи. Перейдём в исследуемой задаче к сферическим координатам по формулам

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta \cos \phi, \quad z = r \sin \theta \sin \phi, \quad r \geq 0, \quad 0 \leq \phi < 2\pi, \quad 0 \leq \theta \leq \pi,$$

и положим $v(r, \theta, \phi) = u(r \cos \theta, r \sin \theta \cos \phi, r \sin \theta \sin \phi)$. Тогда граничное условие (3) с учетом явного вида частной производной

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial r} \sin \theta \sin \phi + \frac{\partial v}{\partial \phi} \frac{1}{r} \frac{\cos \phi}{\sin \theta} + \frac{\partial v}{\partial \theta} \frac{1}{r} \cos \theta \sin \phi$$

переходит в граничное условие

$$\frac{\partial v}{\partial \phi} \Big|_{\phi=0} = \frac{\partial v}{\partial \phi} \Big|_{\phi=\pi} = 0, \quad 0 < r < R_0, \quad 0 < \theta < \omega.$$

В результате такого перехода получаем краевую задачу для функции $v(r, \theta, \phi)$ в параллелепипеде $\Pi = \{(r, \theta, \phi) : 0 \leq r \leq R_0, 0 \leq \theta \leq \omega, 0 \leq \phi \leq \pi\}$:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{k+2}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + (k+1) \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial \phi^2} + k \operatorname{ctg} \phi \frac{\partial v}{\partial \phi} \right) - E v + \lambda r^2 v \right) = 0, \quad 0 < r < R_0, \quad 0 < \theta < \omega, \quad 0 < \phi < \pi, \tag{4}$$

$$v(R_0, \theta, \phi) = 0, \quad 0 \leq \theta \leq \omega, \quad 0 \leq \phi \leq \pi, \tag{5}$$

$$v(r, \omega, \phi) = 0, \quad 0 \leq r \leq R_0, \quad 0 \leq \phi \leq \pi, \tag{6}$$

$$\frac{\partial v}{\partial \phi}(r, \theta, 0) = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial \phi}(r, \theta, \pi) = 0, \quad 0 < r < R_0, \quad 0 < \theta < \omega. \tag{7}$$

Следуя [9, 11], задачу (4) – (7) будем решать методом разделения переменных, полагая $v(r, \theta, \phi) = R(r)\Phi(\theta, \phi)$. В результате такого разделения переменных приходим к спектральным задачам для радиальной и угловой компонент.

Угловая компонента $\Phi(\theta, \phi)$ является решением задачи Штурма – Лиувилля

$$\begin{aligned} -\Delta_{\theta\phi}\Phi &= \mu\Phi, \quad 0 < \theta < \omega, \quad 0 < \phi < \pi, \\ \Phi(\omega, \phi) &= 0, \quad 0 \leq \phi \leq \pi, \\ |\Phi(\theta, \phi)| &\leq S(\mu), \quad 0 \leq \theta \leq \omega, \quad 0 \leq \phi \leq \pi, \\ \frac{\partial\Phi}{\partial\phi}\Big|_{\phi=0} &= \frac{\partial\Phi}{\partial\phi}\Big|_{\phi=\pi} = 0, \quad 0 < \theta < \omega, \\ \Delta_{\theta\phi} &= \frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2} + (k+1)\operatorname{ctg}\theta \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta} \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2} + k\operatorname{ctg}\phi \frac{\partial\Phi}{\partial\phi} \right), \end{aligned} \tag{8}$$

где $S(\mu)$ – верхняя грань для модуля функции $\Phi(\theta, \phi)$ на прямоугольнике $[0, \omega] \times [0, \pi]$. Интегрированием по частям легко убедиться, что задача (8) может иметь нетривиальные решения только при $\mu > 0$. Для нахождения радиальных составляющих $R(r)$, отвечающих фиксированному μ , получаем задачу Штурма – Лиувилля вида

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{k+2}{r} \frac{dR}{dr} + \left(\lambda - \frac{E+\mu}{r^2} \right) R = 0, \quad r > 0, \tag{9}$$

$$R(R_0) = 0, \quad R(r) \in C[0, R_0]. \tag{10}$$

Для решения задачи (8) также применим метод разделения переменных. Полагая $\Phi(\theta, \phi) = \Psi(\phi)\Theta(\theta)$, приходим к следующим двум краевым задачам:

$$\begin{aligned} -\frac{d^2\Psi}{d\phi^2} - k\operatorname{ctg}\phi \frac{d\Psi}{d\phi} &= \nu\Psi, \quad 0 < \phi < \pi, \\ \frac{d\Psi}{d\phi}\Big|_{\phi=0} &= \frac{d\Psi}{d\phi}\Big|_{\phi=\pi} = 0, \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2\Theta}{d\theta^2} + (k+1)\operatorname{ctg}\theta \frac{d\Theta}{d\theta} + \left(\mu - \frac{\nu}{\sin^2\theta} \right) \Theta &= 0, \quad 0 < \theta < \omega, \\ \Theta(\omega) = 0, \quad |\Theta(\theta)| &\leq S(\mu, \nu), \end{aligned} \tag{12}$$

где $S(\mu, \nu)$ – верхняя грань для модуля функции $\Theta(\theta)$ на отрезке $[0, \omega]$. Везде далее будем считать, что параметр $k > 1$ и не является нечётным числом.

Решение задачи (11) известно [5]. При выполнении условия $k > 1$ нетривиальные решения существуют только при значениях $\nu = \nu_n = n(n+k)$, $n = 0, 1, \dots$, при этом соответствующие СФ $\Phi_n(\phi)$ с точностью до постоянных множителей имеют вид

$$\Psi_n(\phi) = (\sin\phi)^{(1-k)/2} P_{n+(k-1)/2}^{(1-k)/2}(\cos\phi), \quad n = 0, 1, \dots \tag{13}$$

Символом вида $P_l^q(\cos\phi)$ в формуле (13) обозначена функция Лежандра первого рода от аргумента $\cos\phi$, определённая на разрезе [2]. В работе [5] также показано, что функции $\Phi_n(\phi)$ являются алгебраическими многочленами от $\cos\phi$.

Рассмотрим теперь задачу (12) при фиксированном ν_n . Делая замену переменной $t = \cos\theta$, $\cos\omega \leq t \leq 1$ и вводя новую функцию с помощью соотношения $\Theta(\theta) = \Theta(\arccos t) = \tilde{\Theta}(t)$, получаем для функции $\tilde{\Theta}(t)$ краевую задачу

$$(1-t^2) \frac{d^2\tilde{\Theta}}{dt^2} - (k+2)t \frac{d\tilde{\Theta}}{dt} + \left(\mu - \frac{\nu_n}{1-t^2} \right) \tilde{\Theta} = 0, \quad \cos\omega \leq t < 1,$$

$$\tilde{\Theta}(\cos\omega) = 0, \quad |\tilde{\Theta}(t)| \leq S(\mu, \nu), \quad \cos\omega \leq t \leq 1,$$

где $S(\mu, \nu)$ – верхняя грань для модуля функции $\tilde{\Theta}(t)$ на отрезке $[\cos\omega, 1]$. Определим новую функцию по формуле $\tilde{\Theta}(t) = (1-t^2)^{-k/4} T(t)$ и представим параметр μ в виде $\mu = \alpha(\alpha+k+1)$ при условии $\alpha > 0$. Тогда функция $T(t)$ должна удовлетворять уравнению для присоединённых функций Лежандра [2]

$$(1-t^2) \frac{d^2T}{dt^2} - 2t \frac{dT}{dt} + \left(\alpha + \frac{k}{2} \right) \left(\alpha + \frac{k}{2} + 1 \right) - \frac{(n+k/2)^2}{1-t^2} T = 0. \tag{14}$$

Общее решение (14) ищем в виде:

$$T(t) = D_1 P_{\alpha+k/2}^{\pm(n+k/2)}(t) + D_2 Q_{\alpha+k/2}^{\pm(n+k/2)}(t), \tag{15}$$

где D_1, D_2 – произвольные постоянные; $P_{\alpha+k/2}^{\pm(n+k/2)}(t)$ и $Q_{\alpha+k/2}^{\pm(n+k/2)}(t)$ – функции Лежандра первого и второго рода, определенные на разрезе, линейно независимые на отрезке $[\cos \omega, 1]$. Поскольку функции $\Theta(\theta)$ и $T(t)$ связаны соотношением $\Theta(\theta) = (\sin \theta)^{-k/2} T(\cos \theta)$, то общее решение уравнения (12) будет иметь вид

$$\Theta(\theta) = D_1 (\sin \theta)^{-k/2} P_{\alpha+k/2}^{\pm(n+k/2)}(\cos \theta) + D_2 (\sin \theta)^{-k/2} Q_{\alpha+k/2}^{\pm(n+k/2)}(\cos \theta). \tag{16}$$

Из двух функций Лежандра первого рода в представлении (16) возьмём функцию с отрицательным верхним индексом, поскольку

$$P_{\alpha+k/2}^{-n-k/2}(\cos \theta) \sim \frac{(\sin(\theta/2))^{n+k/2}}{\Gamma(n+k/2+1)} \quad \text{при } \theta \rightarrow 0.$$

В случае функции Лежандра второго рода оставим в (16) функцию с положительным верхним индексом, т. к.

$$Q_{\alpha+k/2}^{n+k/2}(\cos \theta) \sim 2^{(2n+k)/4-1} \Gamma\left(n + \frac{k}{2}\right) \cos\left(\pi n + \frac{\pi k}{2}\right) (1 - \cos \theta)^{-(2n+k)/4} \quad \text{при } \theta \rightarrow 0,$$

и поскольку k не является нечетным числом, то $Q_{\alpha+k/2}^{n+k/2}(\cos \theta) \rightarrow \infty$ при $\theta \rightarrow 0$ [2]. Ввиду неограниченности функций $(\sin \theta)^{-k/2} Q_{\alpha+k/2}^{n+k/2}(\cos \theta)$ в окрестности точки $\theta = 0$ получаем, что постоянная $D_2 = 0$. Таким образом, ограниченные решения уравнения (12) с точностью до постоянного множителя имеют вид

$$\Theta_n(\theta) = (\sin \theta)^{-k/2} P_{\alpha+k/2}^{-n-k/2}(\cos \theta).$$

Учитывая краевое условие (12), находим требуемые значения параметра α как положительные решения уравнения

$$P_{\alpha+k/2}^{-n-k/2}(\cos \omega) = 0. \tag{17}$$

Пусть $\alpha = \alpha_{n,m}, m = 1, 2, \dots$ – все его положительные решения, занумерованные, для определенности, в порядке возрастания [3, 7]. Тогда любое решение задачи Штурма – Лиувилля (12) с точностью до постоянного множителя может быть записано в виде

$$\Theta_{n,m}(\theta) = (\sin \theta)^{-k/2} P_{\alpha_{n,m}+k/2}^{-n-k/2}(\cos \theta), \quad \mu_{n,m} = \alpha_{n,m}(\alpha_{n,m} + k + 1), \tag{18}$$

а, следовательно, решения задачи (8) даются формулами

$$\begin{aligned} \Phi_{n,m}(\theta, \phi) &= (\sin \phi)^{(1-k)/2} (\sin \theta)^{-k/2} P_{n+(k-1)/2}^{(1-k)/2}(\cos \phi) P_{\alpha_{n,m}+k/2}^{-n-k/2}(\cos \theta), \\ \phi &\in (0, \pi), \theta \in (0, \omega], \\ \mu_{n,m} &= \alpha_{n,m}(\alpha_{n,m} + k + 1), \quad n = 0, 1, \dots, \quad m = 1, 2, \dots \end{aligned} \tag{19}$$

Для $\phi = 0, \phi = \pi$ и $\theta = 0$ функции $\Phi_{n,m}(\theta, \phi)$ доопределяются по непрерывности.

Решим теперь задачу (9) – (10) для каждого найденного $\mu_{n,m}$. Переходя в уравнении (9) к новой функции с помощью соотношения

$$R(r) = \bar{R}(r) r^{-(k+1)/2}$$

и производя затем при фиксированном λ замену переменной $z = \sqrt{\lambda} r$, получаем, что функция $Y(z) = \bar{R}(z/\sqrt{\lambda})$ удовлетворяет уравнению Бесселя [Лебедев, 1963] вида

$$Y'' + \frac{1}{z} Y' + \left(1 - \frac{E + (\alpha_{n,m} + (k+1)/2)^2}{z^2}\right) Y = 0.$$

Граничное условие (10) позволяет записать решения $Y(z)$ через функцию Бесселя первого рода $J_{s(n,m)}(z)$ порядка

$$s(n, m) = \sqrt{E + (\alpha_{n,m} + (k+1)/2)^2}, \tag{20}$$

а значит, радиальные составляющие $R(r)$ решения $v(r, \theta, \phi)$ с точностью до постоянного множителя имеют вид

$$R_{n,m}(r) = r^{-(k+1)/2} J_{s(n,m)}(\sqrt{\lambda} r).$$

Из граничного условия (10) находим СЗ искомой задачи

$$\lambda_{n,m,l} = \left(\frac{\beta_{s(n,m),l}}{R_0}\right)^2, \tag{21}$$

где $\beta_{s(n,m),l}$ – l -й положительный корень уравнения $J_{s(n,m)}(\beta) = 0$, $n = 0, 1, \dots$, $m = 1, 2, \dots$, $l = 1, 2, \dots$. Поэтому радиальные составляющие решений $v(r, \theta, \phi)$ определяются формулой

$$R_{n,m,l}(r) = r^{-(k+1)/2} J_{s(n,m)}\left(\frac{\beta_{s(n,m),l}}{R_0} r\right), \quad l = 1, 2, \dots \quad (22)$$

Таким образом, установлена справедливость следующего утверждения.

Теорема. Собственные значения спектральной задачи (1) – (3) определяются формулой (21), а соответствующие им собственные функции, записанные в сферической системе координат, имеют вид

$$u_{n,m,l}(r \cos \theta, r \sin \theta \cos \phi, r \sin \theta \sin \phi) = D_{n,m,l} R_{n,m,l}(r) \Phi_{n,m}(\theta, \phi), \quad (23)$$

где $D_{n,m,l}$ – произвольные ненулевые постоянные; функции $R_{n,m,l}(r)$ и $\Phi_{n,m}(\theta, \phi)$ определяются формулами (22) и (19), соответственно.

Отметим, что при $t \rightarrow 0$ справедливо соотношение $J_\rho(t) \sim t^\rho 2^{-\rho} (\Gamma(1+\rho))^{-1}$, $\rho > 0$, $t > 0$ [6]. Положим

$$\epsilon(n, m) = \sqrt{E + (\alpha_{n,m} + (k+1)/2)^2} - (k+1)/2, \quad n = 0, 1, \dots, \quad m = 1, 2, \dots$$

Из (22) теперь следует, что при $r \rightarrow 0$ каждая собственная функция $u_{n,m,l}(x, y, z)$ представляет собой величину $O(r^{\epsilon(n,m)})$ и положительный показатель $\epsilon(n, m)$ тем больше, чем больше параметр E .

Утверждение теоремы справедливо и в том случае, когда спектральная задача рассматривается в области $\Omega = B(R_0) \cap K_\omega$, где K_ω – коническая область, границей которой является часть конуса $x \operatorname{tg} \omega = \sqrt{y^2 + z^2}$, $x > 0$, $\omega \in (0, \pi/2)$. Вид СЗ и СФ сохраняется.

Рассмотрим теперь спектральную задачу того же вида в четверти шара, т. е. в пространственной области $\Omega = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 < R_0^2, z > 0, x > 0\}$, являющейся пересечением полушара $B(R_0)$ с полупространством $x > 0$. В этом случае краевое условие $\Theta(\pi/2) = 0$ в задаче (12) приводит к нахождению положительных корней уравнения

$$P_{\alpha+k/2}^{-n-k/2}(0) = 0. \quad (24)$$

Известно [13], что при любых μ и ν справедливо соотношение

$$P_\nu^\mu(0) = \frac{2^\mu \sqrt{\pi}}{\Gamma((1-\mu-\nu)/2)\Gamma(1+(\nu-\mu)/2)}, \quad (25)$$

правая часть которого обращается в нуль, если аргумент хотя бы одной из гамма-функций, записанных в знаменателе, совпадает с каким-либо полюсом гамма-функции. Учитывая (25), получаем, что уравнение (24) равносильно уравнению

$$\frac{2^{-n-k/2} \sqrt{\pi}}{\Gamma((1+n-\alpha)/2)\Gamma(1+(\alpha+n+k)/2)} = 0,$$

из которого следует, что

$$\alpha = \alpha_{n,m} = n + 2m + 1, \quad n = 0, 1, \dots, \quad m = 0, 1, \dots \quad (26)$$

Таким образом, в задаче для четверти шара вид корней $\alpha_{n,m}$ можно уточнить. Все они определяются соотношением (26), при этом формулы (19), (21) – (23) сохраняются. Все СЗ $\lambda_{n,m,l}$, отвечающие индексам n, m , таким, что $n + 2m \geq 2$, являются кратными.

4. Обсуждение результатов. Нахождение СЗ и СФ спектральной задачи (1) – (3) начинается с численного решения уравнения (17). Параметры в уравнении (1) приняты следующие: $k = 2$ и $E = 1$. На рис. 2 представлены корни $\alpha_{n,m}$ при фиксированных значениях $\omega = \pi/2$ (пунктирные линии) и $\omega = 7\pi/10$ (сплошные линии). С ростом ω величина корней уменьшается при сохранении их взаимного расположения для фиксированного n . Результаты численного счета совпадают с уточнением (26) в случае модельной области в виде четверти шара. Очевидно, $\alpha_{n,m}$ оказываются кратными. Аналогичное свойство корней было установлено для двумерной модельной области с углом раствора $\omega = \pi/2$. Отличительной особенностью задачи в трехмерной области от двумерного случая является, во-первых, вырождение некоторых корней $\alpha_{n,m}$ при $\omega \rightarrow \pi$, для которых положительные приращения индексов удовлетворяют условиям $\Delta n = \Delta m = 1$ и $n + m > 1$ (рис. 3). Во-вторых, зависимости $\alpha_{n,m}(\omega)$ нельзя аппроксимировать функцией $\pi l/\omega - 1$ [4].

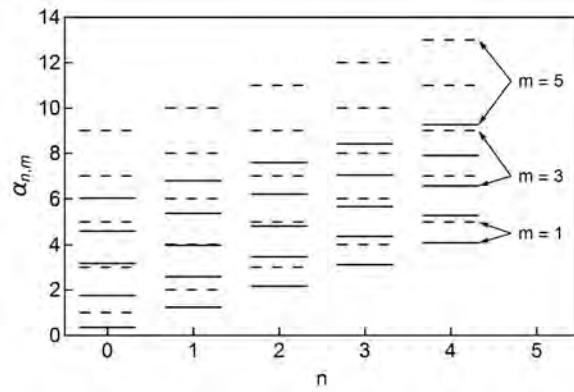


Рис. 2. Корни $\alpha_{n,m}$ уравнения (17) для первых 5 значений по n и m
 Fig. 2. Roots $\alpha_{n,m}$ of equation (17) for first 5 values of n and m

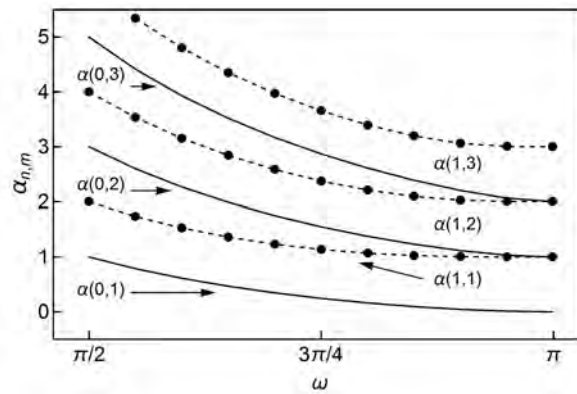


Рис. 3. Корни $\alpha_{n,m}$ уравнения (17) как функции угла ω
 Fig. 3 Roots $\alpha_{n,m}$ of equation (17) versus angle ω

На основе полученных $\alpha_{n,m}$ с учетом (20) выполнено численное решение трансцендентного уравнения $J_{s(n,m)}(\beta) = 0$, корни которого необходимы для вычисления СЗ (21). На рис. 4 представлен спектр рассматриваемой задачи $\lambda_{n,m,l}$ при различных значениях угла ω . Установленные закономерности указывают на вырождение СЗ при $\omega \rightarrow \pi$, для которых выполняются условия $\Delta n = \Delta m = 1, 2 \dots$ и $\Delta l = 0$, где Δl – приращение индекса l при фиксированных n и m . Это можно наблюдать на примере $\lambda_{1,1,1}$ и $\lambda_{0,2,1}$, $\lambda_{0,4,1}$ и $\lambda_{2,2,1}$ и т. п. В случаях, когда $\Delta n = \Delta m = \Delta l$, СЗ становятся вырожденными только при одном фиксированном значении угла ω . Например, при ω близких к $\pi/2$ ($\omega > \pi/2$), выполняется неравенство $\lambda_{1,2,1} > \lambda_{0,1,1}$, при $\omega \approx 0.51884\pi$ СЗ вырождаются, а далее с ростом ω получаем $\lambda_{1,2,1} < \lambda_{0,1,1}$. Аналогично СЗ $\lambda_{0,1,3}$ и $\lambda_{1,2,2}$ вырождаются при $\omega \approx 0.58718\pi$.

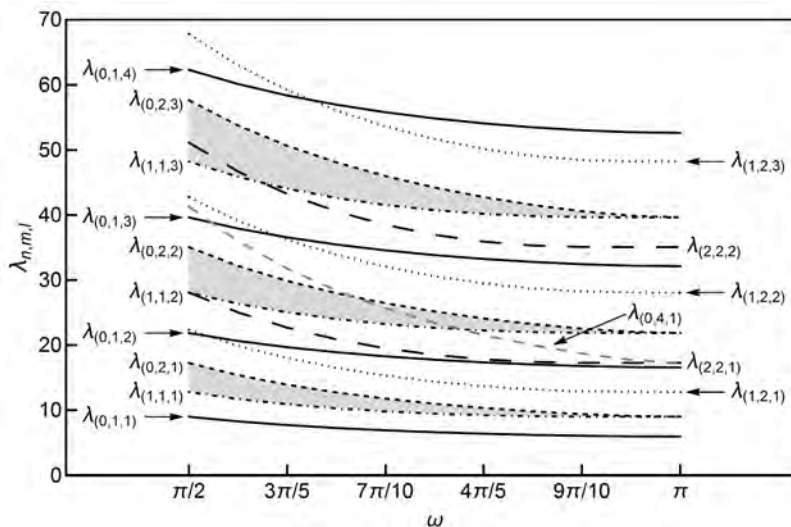


Рис. 4. Собственные значения $\lambda_{n,m,l}$ как функции угла ω
 Fig. 4. Eigenvalues $\lambda_{n,m,l}$ versus angle ω

В остальных случаях сочетания индексов СЗ n , m и l рост индекса m приводит к многократному вырождению для пар СЗ при изменении угла ω . Для примера на рис. 4 представлен график зависимости $\lambda_{0,4,1}(\omega)$, который пересекает аналогичные кривые для $\lambda_{0,1,3}$, $\lambda_{0,2,2}$, $\lambda_{1,1,2}$ и $\lambda_{2,2,1}$ при $\omega \approx 0.58718$, 0.66603 , 0.77547 и π , соответственно. Данная особенность перестройки СЗ указывает на то, что конфигурация спектра задачи (1)–(3) существенным образом зависит от угла раствора конической области K_ω .

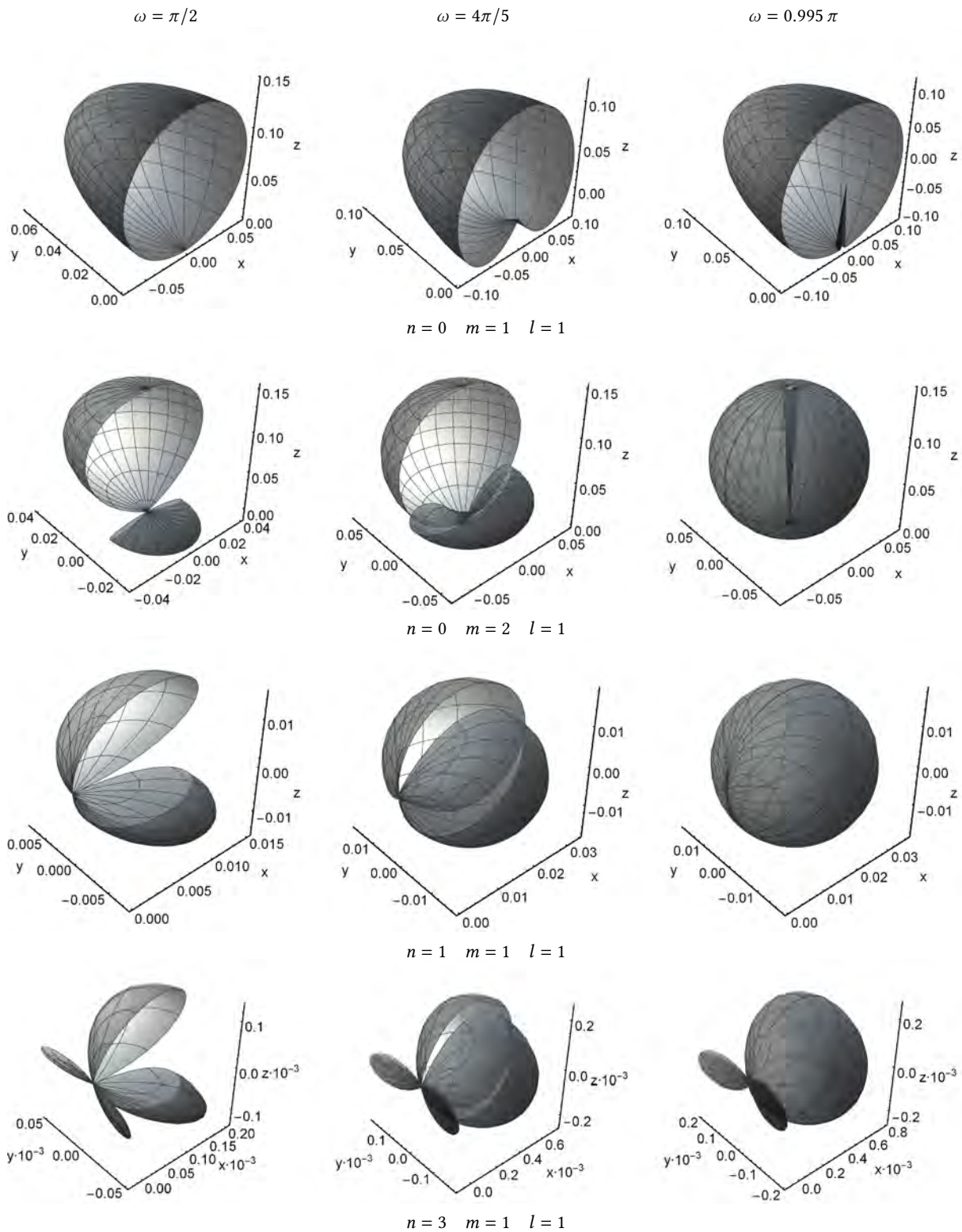


Рис. 5. Собственные функции (23) при различных индексах n , m и l
 Fig. 5. Eigenfunctions (23) for various indexes n , m and l

На рис. 5 представлены графики СФ (23) в сферической системе координат, где значения на координатных осях соответствуют $x = u_{n,m,l} \sin \theta \cos \phi$, $y = u_{n,m,l} \sin \theta \sin \phi$ и $z = u_{n,m,l} \cos \theta$; $D_{n,m,l} = 1$. Угол $\theta = 0$ соответствует «северному полюсу» графика, $\theta = \omega$ – «южному». По столбцам углы ω принимают зна-

чения: $\pi/2$, $4\pi/5$ и 0.995π . Значения индексов n , m и l приведены на рисунке. Форма СФ определяется, как и в случае двумерной модельной области, угловой компонентой, тогда как радиальная компонента влияет только на величину $u_{n,m,l}$. На полуинтервале $\omega \in [\pi/2, \pi)$ наблюдается трансформация СФ для всех $\lambda_{n,m,l}$ к случаю, который получается при рассмотрении в качестве модельной области полусфера $\Omega = B(R_0) = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 < R_0, z > 0\}$ с граничным условием Неймана (3) на участке границы Γ_0 .

5. Заключение. В работе выполнено исследование спектральной задачи для сингулярного эллиптического дифференциального оператора второго порядка специального вида в трехмерной модельной области в виде полусфера с вырезанным конусом K_ω . Установлены особенности перестройки спектра дифференциального оператора при изменении угла раствора ω конической области. В частности, определены случаи вырождения собственных значений в зависимости от сочетания индексов (n, m, l) и величины угла ω . Получен явный вид собственных функций и показана их трансформация при изменении модельной области.

Список литературы

1. Бабенко К. И. 1986. Основы численного анализа. М., Наука, 744.
2. Бейтмен Г., Эрдейи А. 1973. Высшие трансцендентные функции Т. 1. М., Наука, 296.
3. Гобсон Е. В. 1952. Теория сферических и эллипсоидальных функций. М., ИЛ, 476.
4. Королев Н. В., Ларин А. А. 2020. Об одной спектральной задаче в плоском угле для сингулярного эллиптического дифференциального оператора второго порядка. Прикладная математика и физика, 52(2): 86–92. DOI: 10.18413/2687-0959-2020-52-2-86-92.
5. Ларин А. А., Кириллов В. П. 2017. Задача на собственные значения для одного обыкновенного дифференциального оператора с сингулярным коэффициентом. Сборник трудов X международной конференции «ПМТУКТ–2017». Воронеж, Научная книга, 221–225.
6. Лебедев Н. Н. 1963. Специальные функции и их приложения. М., ФизМатГиз, 358.
7. Михлин С. Г. 1966. Численная реализация вариационных методов. М., Наука, 432.
8. Михлин С. Г. 1970. Вариационные методы в математической физике. М., Наука, 512.
9. Никифоров А. Ф., Уваров В. Б. 1984. Специальные функции математической физики. М., Наука, 344.
10. Свешников А. Г., Боголюбов А. Н., Кравцов В. В. 1993. Лекции по математической физике. М., МГУ, 352.
11. Титчмарш Э. Ч. 1961. Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка Ч. 2. М., ИЛ, 554 с.
12. Grisvard P. 1985. Elliptic problems in nonsmooth domains. London, Pitman Publishing Limited, 410.
13. Olver F. W. J., Lozier D. W., Boisvert R. F., Clark C. W. 2010. NIST Handbook of Mathematical Functions. Cambridge, Cambridge University Press, 951.

References

1. Babenko K. I. 1986. Osnovy chislennoy analiza [Numerical Analysis Basics]. M., Nauka, 744.
2. Bateman H., Erdelyi A. 1953. Higher transcendental functions V. 1. New York, McGraw-Hill, 325. (in Russian)
3. Hobson E. W. 1931. The theory of spherical and ellipsoidal harmonics. Cambridge, Cambridge University Press, 500. (in Russian)
4. Korolev N. V., Larin A. A. 2020. Ob odnoy spektral'noy zadache v ploskom ugle dlya singulyarnogo ellipticheskogo differentsial'nogo operatora vtorogo poryadka [On a spectral problem in a plane angle for a singular second-order elliptic differential operator]. Prikladnaya matematika & fizika, 52(2): 86–92. DOI: 10.18413/2687-0959-2020-52-2-86-92.

5. Larin A. A., Kirillov V. P. 2017. Zadacha na sobstvennye zhacheniya dlya odnogo obyknovennogo differentsial'nogo operatora s singulyarnym koeffitsientom [Eigenvalue problem for one ordinary differential operator with a singular coefficient]. Sbornik trudov X mezhdunarodnoy konferentsii «PMTUKT-2017». Voronezh, Nauchnaya kniga, 221–225.
6. Lebedev N. N. 1963. Spetsial'nye funktsii i ikh prilozheniya [Special functions and their applications]. M., FizMatGiz, 358.
7. Mikhlin S. G. 1966. Chislennaya realizatsiya variatsionnykh metodov [Numerical implementation of variational methods]. M., Nauka, 432.
8. Mikhlin S. G. 1970. Variatsionnye metody v matematicheskoy fizike [Variational methods in mathematical physics]. M., Nauka, 512.
9. Nikiforov A. F., Uvarov V. B. 1984. Spetsial'nye funktsii matematicheskoi fiziki [Special functions of mathematical physics]. M., Nauka, 344.
10. Sveshnikov A. G., Bogolyubov A. N., Kravtsov V. V. 1993. Lektsii po matematicheskoy fizike [Lectures on Mathematical Physics]. M., MGU, 352.
11. Titchmarsh E. C. 1958. Eigenfunction expansions associated with second-order equations Ch. 2. Oxford, Clarendon Press, 404.
12. Grisvard P. 1985. Elliptic problems in nonsmooth domains. London, Pitman Publishing Limited, 410.
13. Olver F. W. J., Lozier D. W., Boisvert R. F., Clark C. W. 2010. NIST Handbook of Mathematical Functions. Cambridge, Cambridge University Press, 951.

Получена 25.07.2020

Королев Никита Викторович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики Военного учебно-научного центра Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина» (г. Воронеж) Министерства обороны Российской Федерации

 <http://orcid.org/0000-0001-7670-0466>

ул. Старых Большевиков, 54а, Воронеж, 394064, Россия

E-mail: korolevn33@yandex.ru

Ларин Александр Александрович – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры математики Военного учебно-научного центра Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина» (г. Воронеж) Министерства обороны Российской Федерации

 <http://orcid.org/0000-0002-8064-1232>

ул. Старых Большевиков, 54а, Воронеж, 394064, Россия

E-mail: dohiorv@yandex.ru

О СТРУКТУРЕ МНОЖЕСТВА ГРУБЫХ ОДНОРОДНЫХ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ НА ПЛОСКОСТИ

В. Ш. Ройтенберг

(*Статья представлена членом редакционной коллегии Ю. П. Вирченко*)

Ярославский государственный технический университет,
Ярославль, 150023, Россия

E-mail: vroitenberg@mail.ru

Аннотация. Для грубых однородных полиномиальных векторных полей на плоскости вводится характеристика – тип векторного поля. Он представляет собой циклическую числовую последовательность. Два таких векторных поля топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда их типы совпадают или взаимно обратны. Описываются связные компоненты множества грубых однородных полиномиальных векторных полей фиксированной степени n . Два векторных поля принадлежат одной связной компоненте, если и только если они имеют один тип.

Ключевые слова: однородное полиномиальное векторное поле на плоскости, грубость, компонента связности, топологическая классификация.

Для цитирования: Ройтенберг В. Ш. 2020. О структуре множества грубых однородных полиномиальных векторных полей на плоскости. Прикладная математика & Физика. 52(3): 204–213. DOI 10.18413/2687-0959-2020-52-3-204-213

ON THE STRUCTURE OF THE SET OF HOMOGENEOUS POLYNOMIAL VECTOR FIELDS ON THE PLANE

V. Sh. Roitenberg

(*Article submitted by a member of the editorial board Yu. P. Virchenko*)

Yaroslavl State Technical University,
Yaroslavl, 150023, Russia

E-mail: vroitenberg@mail.ru

Received August 12, 2020

Abstract. The paper introduced a characteristic of structurally stable homogeneous polynomial vector fields on the plane – the type of the vector field. It is a cyclic integer sequence. Two such vector fields are topological equivalent if and only if their types coincided or are mutually inverse. The connected components of the set of structurally stable homogeneous polynomial vector fields of fixed degree n are described. Two vector fields belong to one connected component, if and only if they are of the same type.

Key words: planar homogeneous polynomial vector field, structural stability, connected component, topological classification.

For citation: Roitenberg V. Sh. 2020. On the structure of the set of homogeneous polynomial vector fields on the plane. Applied Mathematics & Physics. 52(3): 204–213. (in Russian) DOI 10.18413/2687-0959-2020-52-3-204-213

1. Введение. Понятие грубой динамической системы – системы, для которой топологическая структура фазового портрета не меняется при ее малых возмущениях, было введено А. А. Андроновым и Л. С. Понтрягиным [1] в 1937 году для динамических систем, заданных векторными полями (автономными дифференциальными уравнениями) на плоскости. В дальнейшем оно было обобщено на непрерывные и дискретные динамические системы на многообразиях любой размерности (под названием структурной устойчивости) и стало предметом многочисленных исследований. К настоящему времени получены необходимые и достаточные условия грубости в пространствах как непрерывных, так и дискретных динамических систем с C^1 -топологией на любом замкнутом многообразии [12, 13, 15, 14].

Топологическая классификация грубых векторных полей получена на двумерных многообразиях [14, 4]. Различные топологические инварианты грубых диффеоморфизмов на двумерных и трехмерных многообразиях вводились и исследовались в большом числе работ (см. [3]). Полная топологическая классификация получена, в частности, для диффеоморфизмов Морса – Смейла на таких многообразиях.

Естественно изучать грубость динамических систем относительно более узких классов таких систем. Фазовые портреты двумерных полиномиальных векторных полей, начиная с работ Пуанкаре, принято рассматривать на проективной плоскости [2]. Для пространства P_n полиномиальных векторных полей

степени $\leq n$ на плоскости имеются достаточные условия грубости. В [6] показано, что они выделяют в \mathbb{R}^n открытое всюду плотное множество Σ^0 . Однако необходимость этих условий не доказана. Топологической классификации векторных полей из Σ^0 нет даже при $n = 2$. Неизвестно даже возможное число предельных циклов. Оценка их числа – часть знаменитой 16-й проблемы Гильберта.

Для пространства $\mathbb{R}P_n$ однородных полиномиальных векторных полей степени n на плоскости ситуация проще. Однородные полиномиальные векторные поля – естественный класс полиномиальных векторных полей, инвариантных относительно однопараметрической группы растяжений плоскости. В работе [7] были получены необходимые и достаточные условия грубости в пространстве $\mathbb{R}P_n$; доказано, что множество $\Sigma^0\mathbb{R}P_n$ грубых векторных полей открыто и всюду плотно в $\mathbb{R}P_n$. В [8] изучались бифуркации векторных полей из $\mathbb{R}P_n$.

В настоящей работе будет дана полная топологическая классификация векторных полей из $\Sigma^0\mathbb{R}P_n$.

Важной задачей является нахождение условий, при которых две грубые системы можно соединить дугой, не содержащей бифуркационных точек. Иными словами, требуется описать связные компоненты множества грубых динамических систем. Для грубых систем на двумерных многообразиях эта задача рассматривалась в работах [11, 5]. Связные компоненты множества грубых дифференциальных уравнений на окружности с правыми частями – однородными тригонометрическими многочленами фиксированной степени изучались в статье [9].

В настоящей работе полностью описаны связные компоненты множества $\Sigma^0\mathbb{R}P_n$ грубых однородных полиномиальных векторных полей степени n .

2. Однородные векторные поля и их траектории в круге Пуанкаре и на проективной плоскости. Приведем некоторые определения, обозначения и результаты из [7, 8]. Мы рассматриваем на плоскости \mathbb{R}^2 однородные полиномиальные векторные поля степени $n \geq 1$

$$X(x, y) = P(x, y)\partial/\partial x + Q(x, y)\partial/\partial y,$$

где

$$P(x, y) = \sum_{i=0}^n p_i x^i y^{n-i}, \quad Q(x, y) = \sum_{i=0}^n q_i x^i y^{n-i}$$

есть однородные многочлены степени n . Для удобства не исключается случай равенства нулю всех коэффициентов p_i и q_i . Множество таких векторных полей обозначим $\mathbb{R}P_n$. Поле $X \in \mathbb{R}P_n$ отождествим с вектором $(p_0, p_1, \dots, p_n, q_0, q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{R}^{2n+2}$, а $\mathbb{R}P_n$ с пространством \mathbb{R}^{2n+2} . Фазовые портреты векторных полей из $\mathbb{R}P_n$ естественно рассматривать на круге Пуанкаре \mathbb{K} и на проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$.

Рассмотрим в \mathbb{R}^3 полусферу $\mathbb{K} = \{(X, Y, Z) \in \mathbb{R}^3 : X^2 + Y^2 + Z^2 = 1, Z \geq 0\}$. Она отождествляется с кругом Пуанкаре $\mathbb{K} = \{(X, Y) \in \mathbb{R}^2 : X^2 + Y^2 = 1, Z \geq 1\}$. Отождествим $\mathbb{K} \setminus \partial\mathbb{K}$ с \mathbb{R}^2 с помощью биекции $(X, Y, Z) \mapsto (x, y) = (X/Z, Y/Z)$.

Пусть $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, $O = (0, 0)$. Диффеоморфизм

$$\zeta : [0, \infty) \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{K} \setminus \{O\}, \quad \zeta(r, \varphi) := (X, Y) = \left(\cos \varphi / \sqrt{1+r^2}, \sin \varphi / \sqrt{1+r^2} \right)$$

задает в $\mathbb{K} \setminus \{O\}$ цилиндрические координаты (r, φ) . Выражение координат (x, y) точки из $\mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$ через координаты (r, φ) имеет вид $x = \cos \varphi / r$, $y = \sin \varphi / r$. Поэтому

$$X = R_*(r, \varphi)\partial/\partial r + \Phi_*(r, \varphi)\partial/\partial \varphi,$$

где

$$R_*(r, \varphi) = -r^{2-n}[P(\cos \varphi, \sin \varphi) \cos \varphi + Q(\cos \varphi, \sin \varphi) \sin \varphi],$$

$$\Phi_*(r, \varphi) = r^{1-n}[Q(\cos \varphi, \sin \varphi) \cos \varphi - P(\cos \varphi, \sin \varphi) \sin \varphi].$$

Векторное поле $\bar{X} = -rR(\varphi)\partial/\partial r + \Phi(\varphi)\partial/\partial \varphi$, где

$$R(\varphi) = R_X(\varphi) = P(\cos \varphi, \sin \varphi) \cos \varphi + Q(\cos \varphi, \sin \varphi) \sin \varphi, \tag{1}$$

$$\Phi(\varphi) = \Phi_X(\varphi) = Q(\cos \varphi, \sin \varphi) \cos \varphi - P(\cos \varphi, \sin \varphi) \sin \varphi, \tag{2}$$

определено в $\mathbb{K} \setminus \{O\}$ и имеет в $\mathbb{R}^2 \setminus \{O\} = \mathbb{K} \setminus \partial\mathbb{K} \setminus \{O\}$ те же ориентированные траектории, что поле X . В точках $\partial\mathbb{K}$ ($r = 0$) поле \bar{X} касается $\partial\mathbb{K}$. Поэтому $\partial\mathbb{K}$ состоит из траекторий поля \bar{X} . Траекториями векторного поля X в \mathbb{K} называются траектории векторного поля \bar{X} и точка O . Траектории, принадлежащие $\partial\mathbb{K}$, называются бесконечно удаленными.

Проективная плоскость $\mathbb{R}P^2$ получается из круга Пуанкаре отождествлением диаметрально противоположных точек $\partial\mathbb{K}$. Образы траекторий векторного поля X в \mathbb{K} при этом отождествлении называются траекториями векторного поля X в $\mathbb{R}P^2$. Так как

$$\Phi(\varphi + \pi) = (-1)^{n+1}\Phi(\varphi), \quad R(\varphi + \pi) = (-1)^{n+1}R(\varphi), \tag{3}$$

то траектории поля X в \mathbb{K} образуют разбиение \mathbb{K} . Из (3) также следует, что при нечетном n на траекториях в \mathbb{RP}^2 можно задать согласованную ориентацию, а при четном n это сделать нельзя.

Векторные поля $X, Y \in \text{HP}_n$ называются *топологически эквивалентными* в \mathbb{K} (в \mathbb{RP}^2), если существует гомеоморфизм $h : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ ($h : \mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2, h(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$), переводящий траектории поля X в \mathbb{K} (в \mathbb{RP}^2) в траектории поля Y в \mathbb{K} (в \mathbb{RP}^2) с сохранением ориентации на траекториях (на траекториях, лежащих в \mathbb{R}^2).

Векторное поле $X_0 \in \text{HP}_n$ называется *грубым* в \mathbb{K} (в \mathbb{RP}^2), если существует такая его окрестность U , что X_0 и любое векторное поле $X \in U$ топологически эквивалентны в \mathbb{K} (в \mathbb{RP}^2).

Согласно [7] векторное поле из HP_n является грубым в \mathbb{K} (в \mathbb{RP}^2), тогда и только тогда, когда либо оно имеет бесконечно удаленные особые точки, при этом все они являются гиперболическими, либо $\partial\mathbb{K}$ – гиперболическая замкнутая траектория (при нечетном n). Множество $\Sigma^0\text{HP}_n$ грубых векторных полей открыто и всюду плотно в пространстве HP_n .

3. Формулировки результатов. Пусть T_n – множество всех последовательностей

$$\tau = (\tau_1, \dots, \tau_m, \tau_{m+1}, \dots, \tau_{2m}),$$

таких, что $1 \leq m \leq n + 1$, $m = n + 1 \pmod{2}$, то есть m и $n + 1$ имеют одинаковую четность, $\tau_i = (\tau_i^1, \tau_i^2)$, $i \in \{1, 2, \dots, 2m\}$, где $\tau_i^1, \tau_i^2 \in \{-1, 1\}$ и выполняются условия

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, 2m\} \quad \tau_{i+1}^1 = -\tau_i^1 \quad (\text{здесь } \tau_{2m+1}^1 = -\tau_1^1), \tag{4}$$

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, m\} \quad \tau_{i+m} = \tau_i, \text{ если } n \text{ нечетно, } \tau_{i+m} = -\tau_i, \text{ если } n \text{ четно.} \tag{5}$$

Если последовательность $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_m, \tau_{m+1}, \dots, \tau_{2m}) \in T_n$, то любая последовательность

$$\tau' = (\tau'_1, \dots, \tau'_m, \tau'_{m+1}, \dots, \tau'_{2m})$$

полученная из нее циклической перестановкой: $\forall i \in \{1, 2, \dots, 2m\} \quad \tau'_{1+(i+p-1) \bmod (2m)} = \tau_i$, где $p \in \mathbb{Z}$, также принадлежит T_n . На T_n определим отношение эквивалентности: $\tau' \sim \tau$, если последовательность τ' получается из последовательности τ циклической перестановкой. Пусть $\bar{T}_n = T_n / \sim$ – фактормножество T_n по этому отношению. Класс эквивалентности, содержащий последовательность τ , будем обозначать $\bar{\tau}$. Класс эквивалентности, содержащий последовательность $-\tau$, будем обозначать $-\bar{\tau}$. Класс $\bar{\tau}^{-1} \in \bar{T}_n$, содержащий последовательность $(\tau_{2m}, \dots, \tau_{m+1}, \tau_m, \dots, \tau_1)$, назовем *обратным* к $\bar{\tau}$. Классы $\bar{\tau}$ и $\bar{\tau}^{-1}$ *взаимно обратны*, то есть $\bar{\tau} = (\bar{\tau}^{-1})^{-1}$. Для некоторых $\bar{\tau} \in \bar{T}_n \quad \bar{\tau}^{-1} = \bar{\tau}$. Обозначим $\bar{\tau}_{not}$ класс последовательностей $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_{n+1}, \tau_{n+2}, \dots, \tau_{2n+2}) \in T_n$, для которых $\tau_k^1 \tau_k^2 = -1$ при любом $k \in \{1, 2, \dots, 2n + 2\}$.

Пусть $S_0 = (0, \varphi_0 \bmod 2\pi)$ – бесконечно удаленная особая точка поля $X \in \Sigma^0\text{HP}_n$. Ее *типом* назовем упорядоченную пару чисел $\tau_0 = (\tau_0^1, \tau_0^2)$, где $\tau_0^1 = \text{sgn}\Phi'(\varphi_0)$, $\tau_0^2 := -\text{sgn}R(\varphi_0)$ – знаки характеристических чисел особой точки. Ввиду (3) $S_1 = (0, (\varphi_0 + \pi) \bmod 2\pi)$ также особая точка того же типа τ_0 , что и S_0 , если n нечетно, и противоположного типа $-\tau_0 = (-\tau_0^1, -\tau_0^2)$, если n четно.

Пусть $S_1 = (0, \varphi_1 \bmod 2\pi), \dots, S_m = (0, \varphi_m \bmod 2\pi), S_{m+1} = (0, (\varphi_1 + \pi) \bmod 2\pi), \dots, S_{2m} = (0, (\varphi_m + \pi) \bmod 2\pi)$ – все бесконечно удаленные особые точки поля $X \in \Sigma^0\text{HP}_n$, пронумерованные в циклическом порядке, то есть $\varphi_1 < \varphi_2 < \dots < \varphi_m < \varphi_1 + \pi$. Пусть $\tau_i = (\tau_i^1, \tau_i^2)$ – тип точки S_i . Последовательность $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_m, \tau_{m+1}, \dots, \tau_{2m})$ удовлетворяет условиям (4), (5) и потому принадлежит T_n . При другой нумерации бесконечно удаленных особых точек в циклическом порядке последовательность их типов $\tau' = (\tau'_1, \dots, \tau'_m, \tau'_{m+1}, \dots, \tau'_{2m})$ будет эквивалентна последовательности τ . Класс $\bar{\tau} \in \bar{T}_n$ назовем *типом векторного поля X* и обозначим $\bar{\tau}(X)$.

Теорема 1. А) Для любой последовательности $\tau \in T_n$, не принадлежащей классу $\bar{\tau}_{not}$, существует векторное поле $X \in \Sigma^0\text{HP}_n$, имеющее тип $\bar{\tau}$.

Б) Для любого векторного поля $X \in \Sigma^0\text{HP}_n$ его тип отличен от $\bar{\tau}_{not}$.

Теорема 1 доказана в разделе 4.

Теорема 2. 1) Два векторных поля из $\Sigma^0\text{HP}_n$, имеющие бесконечно удаленные особые точки, принадлежат одной связной компоненте $\Sigma^0\text{HP}_n$, тогда и только тогда они имеют один тип.

2) Два векторных поля из $\Sigma^0\text{HP}_n$, имеющие бесконечно удаленные особые точки, топологически эквивалентны в \mathbb{K} (в \mathbb{RP}^2) тогда и только тогда, когда их типы совпадают или взаимно обратны.

Доказательство теоремы 2 приведено в разделе 5.

Пусть теперь n нечетно и векторное поле $X \in \Sigma^0\text{HP}_n$ не имеет бесконечно удаленных точек. Тогда $\forall \varphi \in [0, 2\pi] \quad \Phi(\varphi) \neq 0$ и $\partial\mathbb{K}$ является гиперболической замкнутой траекторией поля X в \mathbb{K} , устойчивой (неустойчивой) при отрицательном (положительном) значении величины

$$h(X) = - \int_0^{2\pi} \frac{R(\varphi)}{\Phi(\varphi)} d\varphi.$$

Типом векторного поля X назовем упорядоченную пару чисел $T(X) = (T_1, T_2)$, где $T_1 = \text{sgn}\Phi(\varphi)$, $T_2 = \text{sgn}h(X)$. Таким образом, существует только 4 возможных типа грубых векторных полей без бесконечно удаленных точек: $(1, 1)$, $(1, -1)$, $(-1, 1)$ и $(-1, -1)$. Типы (T_1, T_2) и (T'_1, T'_2) будем считать взаимно обратными, если $T'_1 = -T_1$, а $T'_2 = T_2$.

Теорема 3. Для любой пары $T = (T_1, T_2)$, где $T_1, T_2 \in \{-1, 1\}$, существует векторное поле $X \in \Sigma^0\text{HP}_n$, не имеющее бесконечно удаленных точек и имеющее тип T .

Теорема 4. 1) Два векторных поля из $\Sigma^0\text{HP}_n$, не имеющие бесконечно удаленных особых точек, принадлежат одной связной компоненте множества $\Sigma^0\text{HP}_n$ тогда и только тогда, когда их типы совпадают.

2) Два векторных поля из $\Sigma^0\text{HP}_n$, не имеющие бесконечно удаленных особых точек, топологически эквивалентны в $\mathbb{K}(\mathbb{R}\mathbb{P}^2)$ тогда и только тогда, когда их типы совпадают или взаимно обратны.

Доказательства теорем 3 и 4 приведены в разделе 6.

4. Доказательство теоремы 1. Пусть $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_m, \tau_{m+1}, \dots, \tau_{2m}) \in T_n$, $\bar{\tau} \neq \bar{\tau}_{not}$. Покажем, что существует векторное поле из $\Sigma^0\text{HP}_n$, имеющее тип $\bar{\tau}$. Возможны два случая: (i) $\tau_k^2 = \tau_k^1$ при некотором $k \in \{1, \dots, 2m\}$ и (ii) $\tau_k^2 = -\tau_k^1$ при всех $k \in \{1, \dots, 2m\}$.

Рассмотрим случай (i). Из (1), (2) и определения типа векторного поля следует, что $\forall X \in \Sigma^0\text{HP}_n$ $\bar{\tau}(-X) = -\bar{\tau}(X)$. Поэтому без ограничения общности можно считать $\tau_1^2 = \tau_1^1 = -1$. Выберем числа $\varphi_k \in (-\pi/2, \pi/2)$, $k = 1, \dots, m$, так, чтобы $\varphi_k < \varphi_{k+1}$ при $k = 1, \dots, m-1$. Пусть также $\varphi_{m+1} = \varphi_1 + \pi$. Так как $m \leq n+1$, $m = n+1 \pmod{2}$, то определен однородный многочлен степени $n+1$

$$A(x, y) = (x^2 + y^2)^{\frac{n-m+1}{2}} \prod_{k=1}^m (x \sin \varphi_k - y \cos \varphi_k) = a_{n+1}x^{n+1} + a_nx^n y + \dots + a_1xy^n + a_0y^{n+1}.$$

Пусть N – число перемен знака в последовательности $\tau_1^2 = -1, \tau_2^2, \dots, \tau_m^2$. Возьмем $s = N$, если $N = n \pmod{2}$, и $s = N + 1$, если $N = n - 1 \pmod{2}$. Выберем числа $\varphi'_k \in (-\pi/2, \pi/2)$, $i = 1, \dots, s$, так, что $\varphi_1 < \varphi'_1 < \varphi'_2 < \dots < \varphi'_s$, а интервал $(\varphi_k, \varphi_{k+1})$, $k = 1, \dots, m-1$, содержит единственное такое число, если $\tau_{k+1}^2 = -\tau_k^1$, и не содержит таких чисел, если $\tau_{k+1}^2 = \tau_k^1$. Так как $s \leq m \leq n+1$ и $s = n \pmod{2}$, то число $n-s \geq 0$ и четно. Поэтому определен многочлен

$$B(x, y) = (x^2 + y^2)^{\frac{n-s}{2}} \prod_{i=1}^s (x \sin \varphi'_i - y \cos \varphi'_i) = b_nx^n + b_{n-1}x^{n-1}y + \dots + b_1xy^{n-1} + b_0y^n. \quad (6)$$

Поскольку $a_0 = (-1)^m \cos \varphi_1 \dots \cos \varphi_m$, $b_0 = (-1)^s \cos \varphi'_1 \dots \cos \varphi'_s$, $\varphi_k, \varphi'_i \in (-\pi/2, \pi/2)$, а $m-s$ нечетно, то $b_0 \neq 0$, а $-a_0/b_0 > 0$. Рассмотрим векторное поле $X^0 = P_0\partial/\partial x + Q_0\partial/\partial y$, где

$$P_0(x, y) = (-a_0/b_0)B(x, y) = -(a_0b_n/b_0)x^n - (a_0b_{n-1}/b_0)x^{n-1} - \dots - (a_0b_1/b_0)xy^{n-1} - a_0y^n, \quad (7)$$

$$Q_0(x, y) = a_{n+1}x^n + (a_n - a_0b_n/b_0)x^{n-1} + \dots + (a_1 - a_0b_1/b_0)y^n.$$

Для него имеем равенство

$$\Phi_{X^0}(\varphi) = A(\cos \varphi, \sin \varphi) = \prod_{k=1}^m (\sin(\varphi_k - \varphi)). \quad (8)$$

Так как $\Phi_{X^0}(\varphi_k) = 0$, $\cos \varphi_k \neq 0$, то из (1), (2) получаем равенство $R_{X^0}(\varphi_k) = P_{X^0}(\cos \varphi_k, \sin \varphi_k) \cos \varphi_k$. Отсюда и из (6), (7) имеем

$$\text{sgn}R_{X^0}(\varphi_k) = \text{sgn} \prod_{i=1}^s (\sin(\varphi'_i - \varphi_k)), \quad k = 1, \dots, m. \quad (9)$$

Из (8) следует, что особыми точками векторного поля X^0 на $\partial\mathbb{K}$ являются точки $S_k = (0, \varphi_k \pmod{2\pi})$, $S_{k+m} = (0, (\varphi_k + \pi) \pmod{2\pi})$, $k = 1, \dots, m$. Из (8) и (9) получаем, что типом точки S_k , $k = 1, \dots, m$, является пара $((-1)^k, \hat{\tau}_k^2)$, где

$$\hat{\tau}_k^2 = -\text{sgn} \prod_{i=1}^s (\sin(\varphi'_i - \varphi_k)). \quad (10)$$

Так как $\varphi'_i - \varphi_1 \in (0, \pi)$ при всех $i = 1, \dots, s$, то $\hat{\tau}_1^2 = \tau_1^2$. Вследствие выбора чисел φ'_i из (10) по индукции получаем $\hat{\tau}_k^2 = \tau_k^2$ при всех $k = 1, \dots, m$. Таким образом, поле X^0 имеет тип $\bar{\tau}$.

Рассмотрим случай (ii). Без ограничения общности можем считать $\tau_1^1 = -1, \tau_1^2 = 1$. Тогда $\tau_k^1 = (-1)^k, \tau_k^2 = (-1)^{k+1}, k = 1, \dots, m$. Выберем числа $\varphi_k \in (-\pi/2, \pi/2)$, $k = 1, \dots, m$ так же, как в случае (i). Пусть теперь $s = m + 1$. Тогда $s = n \pmod{2}$. Так как $\bar{\tau} \neq \bar{\tau}_{not}$, то $s \leq n$. Числа φ'_i , $i = 1, \dots, s$, выберем так, что

$$\varphi'_1 \in (-\pi/2, \varphi_1), \varphi'_k \in (\varphi_{k-1}, \varphi_k), \quad k = 2, \dots, m, \varphi'_{m+1} \in (\varphi_m, \pi/2). \quad (11)$$

Векторное поле X^0 определим так же, как в случае (i). Тогда тип особой точки S_k , $k = 1, \dots, m$, равен $((-1)^k, \hat{\tau}_k^2)$, где $\hat{\tau}_k^2$ находится по формуле (10). Вследствие (11) $\hat{\tau}_k^2 = (-1)^{k+1} = \tau_k^2$. Таким образом, X^0 имеет заданный тип $\bar{\tau}$.

Утверждение А) теоремы 1 доказано.

Предположим временно, что существует векторное поле $X \in \Sigma^0\text{HP}_n$, имеющее тип $\bar{\tau}_{\text{not}}$. Пусть $\varphi_1 < \varphi_2 < \dots < \varphi_{n+1}$ – все нули функции $\Phi = \Phi_X$ на промежутке $[\varphi_1, \varphi_1 + \pi)$. Сделав замену цилиндрических координат $(r, \varphi) \mapsto (r, \varphi - \varphi_1 - \pi/2 + \alpha)$, где $0 < \alpha < \varphi_1 + \pi - \varphi_{n+1}$, и сохранив прежние обозначения, мы можем считать, что векторное поле имеет особые точки $S_k = (0, \varphi_k \bmod 2\pi)$, $S_{k+n+1} = (0, (\varphi_k + \pi) \bmod 2\pi)$, $k = 1, \dots, n + 1$, где $-\pi/2 < \varphi_1 < \varphi_2 < \dots < \varphi_{n+1} < \pi/2$. Так как $\tau_1^1 \tau_1^2 = -1$, то $\Phi'(\varphi_1)P(\cos \varphi_1, \sin \varphi_1) > 0$ и потому найдется такое $\varphi_* \in (-\pi/2, \varphi_1)$, что $\Phi(\varphi_*)P(\cos \varphi_*, \sin \varphi_*) < 0$. Кроме того $\Phi(-\pi/2) = P(\cos(-\pi/2), \sin(-\pi/2))$. Поскольку $\text{sgn}\Phi(-\pi/2) = \text{sgn}\Phi(\varphi_*)$, то

$$P(\cos \varphi_*, \sin \varphi_*)P(\cos(-\pi/2), \sin(-\pi/2)) < 0,$$

и потому на интервале $(-\pi/2, \varphi_*)$ есть нуль функции $P(\cos \varphi, \sin \varphi)$. Так как $\tau_k^1 \tau_{k+1}^2 = -1$ при $k = 1, \dots, n$, то $P(\cos \varphi_k, \sin \varphi_k)P(\cos \varphi_{k+1}, \sin \varphi_{k+1}) < 0$. Следовательно, на каждом интервале $(\varphi_k, \varphi_{k+1})$, $k = 1, \dots, n$, есть нуль функции $P(\cos \varphi, \sin \varphi)$. Таким образом, эта функция имеет на интервале $(-\pi/2, \pi/2)$ не менее $(n+1)$ -го нуля. Но это противоречит тому, что тригонометрический полином степени n имеет на $(-\pi/2, \pi/2)$ не более n нулей. Из этого противоречия следует, что сделанное предположение неверно и потому справедливо утверждение Б) теоремы 1. На этом доказательство теоремы 1 завершено.

4. Доказательство теоремы 2. Пусть $(0, \varphi_k \bmod 2\pi)$, $(0, (\varphi_k + \pi) \bmod 2\pi)$, $k = 1, \dots, m$, где $\varphi_1 < \varphi_2 < \dots < \varphi_m < \varphi_1 + \pi$, – все особые точки поля $X \in \Sigma^0\text{HP}_n$, на $\partial\mathbb{K}$, а C – связная компонента $\Sigma^0\text{HP}_n$, содержащая X . Поскольку $\Phi_Y(\varphi)$ и $(\Phi_Y)'(\varphi)$ непрерывные функции от (φ, Y) , а производная $(\Phi_Y)'(\varphi_k) \neq 0$, $k = 1, \dots, m$, то существует такая окрестность $\mathcal{U}(X)$ поля X в C , что все особые точки векторного поля $Y \in \mathcal{U}(X)$ на $\partial\mathbb{K}$ имеют вид $(0, \tilde{\varphi}_k(Y) \bmod 2\pi)$, $(0, (\tilde{\varphi}_k(Y) + \pi) \bmod 2\pi)$, $k = 1, \dots, m$, где $\tilde{\varphi}_k$ – непрерывные функции, $\tilde{\varphi}_k(X) = \varphi_k$. Так как $(\Phi_Y)'(\tilde{\varphi}_k(Y))$ и $R_Y(\tilde{\varphi}_k(Y))$ непрерывные функции от $Y \in \mathcal{U}(X)$, то окрестность $\mathcal{U}(X)$ можно считать выбранной так, что для всех $Y \in \mathcal{U}(X)$ $\text{sgn}(\Phi_Y)'(\tilde{\varphi}_k(Y)) = \text{sgn}(\Phi_Y)'(\varphi_k)$, $\text{sgn}P_Y(\tilde{\varphi}_k(Y)) = \text{sgn}P_Y(\varphi_k)$, и потому $\bar{\tau}(Y) = \bar{\tau}(X)$. Следовательно, все векторные поля из C имеют один тип.

Пусть $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_m, \tau_{m+1}, \dots, \tau_{2m}) \in T_n$. Покажем, что любые два векторных поля $X_l = P_l \partial/\partial x + Q_l \partial/\partial y \in \Sigma^0\text{HP}_n$, $l \in \{0, 1\}$, имеющих тип $\bar{\tau}$, принадлежат одной компоненте связности множества $\Sigma^0\text{HP}_n$. Без ограничения общности можно считать, что $\tau_1^1 = -1$. Везде далее $I = [0, 1]$.

Лемма 1. Для каждого $l \in \{0, 1\}$ существует путь $u_l: I \rightarrow \Sigma^0\text{HP}_n$, $u_l(0) = X_l$ такой, что для векторного поля $\tilde{X}_l = u_l(1) = \tilde{P}_l \partial/\partial x + \tilde{Q}_l \partial/\partial y$ нули $\tilde{\varphi}_{l,k}$, $k = 1, \dots, m$, функции $\Phi_{\tilde{X}_l}(\varphi)$ на отрезке $[-\pi/2, \pi/2]$ можно пронумеровать так, что

$$-\pi/2 < \tilde{\varphi}_{l,1} < \tilde{\varphi}_{l,2} < \dots < \tilde{\varphi}_{l,m} < \pi/2 < \tilde{\varphi}_{l,m+1} = \tilde{\varphi}_{l,1} + \pi, \tag{12}$$

а особая точка $\tilde{S}_{l,k} = (0, \tilde{\varphi}_{l,k} \bmod 2\pi)$ имеет тип τ_k .

Доказательство. Пусть $S_{l,k} = (0, \varphi_{l,k} \bmod 2\pi)$, $k = 1, \dots, 2m$, где

$$\varphi_{l,1} < \varphi_{l,2} < \dots < \varphi_{l,m} < \varphi_{l,m+1} = \varphi_{l,1} + \pi < \dots < \varphi_{l,2m} = \varphi_{l,m} + \pi,$$

– все бесконечно удаленные особые точки поля X_l , $l \in \{0, 1\}$, пронумерованные так, чтобы тип точки $S_{l,k}$ равнялся τ_k . Обозначим $T^\theta: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T^\theta(x, y) = (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta)$ – вращение на угол θ . Для $\alpha \in I$ рассмотрим векторные поля $Y_l^\alpha = T^{-\theta_l(\alpha)} X_l T^{\theta_l(\alpha)} \in \text{HP}_n$, где $\theta_l(\alpha) = \alpha(\pi/2 - \varphi_{l,1} - \mu)$, $0 < \mu < \pi - (\varphi_{l,m} - \varphi_{l,1})$. Тогда $\Phi_{Y_l^\alpha}(\varphi) = \Phi_{X_l}(\varphi + \theta_l(\alpha))$ и потому $Y_l^\alpha \in \Sigma^0\text{HP}_n$. Отображение $I \ni \alpha \mapsto Y_l^\alpha$ – путь, соединяющий в $\Sigma^0\text{HP}_n$ векторное поле $X_l = Y_l^0$ с векторным полем $\tilde{X}_l = Y_l^1$, особые точки которого $\tilde{S}_{l,k} = (0, \tilde{\varphi}_{l,k} \bmod 2\pi)$, $k = 1, \dots, 2m$, где $\tilde{\varphi}_{l,k} = \varphi_{l,k} - \varphi_{l,1} - \pi/2 + \mu$, имеют тип τ_k . При $k = 1, \dots, m$ $\tilde{\varphi}_{l,k} \in (-\pi/2, \pi/2)$. Тем самым, лемма 1 доказана.

Так как $\Phi_{\tilde{X}_l}(-\pi/2) = \tilde{P}_l(\cos(-\pi/2), \sin(-\pi/2))$, а вследствие (12) при всех $\varphi \in (-\pi/2, \tilde{\varphi}_{l,1})$ имеем $\text{sgn}\Phi_{\tilde{X}_l}(\varphi) = -\tau_1^1 = 1$, то

$$\forall l \in \{0, 1\} \tilde{P}_l(\cos(-\pi/2), \sin(-\pi/2)) > 0. \tag{13}$$

Лемма 2. Для каждого $l \in \{0, 1\}$ существует путь $v_l: I \rightarrow \Sigma^0\text{HP}_n$ такой, что $v_l(0) = \tilde{X}_l$, а векторное поле $\hat{X}_l = v_l(1) = \hat{P}_l \partial/\partial x + \hat{Q}_l \partial/\partial y$ имеет те же бесконечно удаленные особые точки и того же типа, что и векторное поле \tilde{X}_l ,

$$\hat{P}_l(\cos \varphi, \sin \varphi) = \hat{c}_l(\varphi) \prod_{j=1}^{n_l} \sin(\hat{\varphi}'_{l,j} - \varphi), \tag{14}$$

где $\hat{c}_l(\varphi)$ – однородный тригонометрический многочлен четной степени $n - n_l \geq 0$ такой, что $\forall \varphi \hat{c}_l(\varphi) > 0$, $-\pi/2 < \hat{\varphi}'_{l,1} < \hat{\varphi}'_{l,2} < \dots < \hat{\varphi}'_{l,n_l} < \pi/2$, а каждый из интервалов $(-\pi/2, \tilde{\varphi}_{l,1})$, $(\tilde{\varphi}_{l,k}, \tilde{\varphi}_{l,k+1})$, $k = 1, \dots, m - 1$, и $(\tilde{\varphi}_{l,m}, \pi/2)$ содержит не более одного нуля $\hat{\varphi}'_{l,j}$ функции $\hat{P}_l(\cos \varphi, \sin \varphi)$.

Доказательство. Пусть $\tilde{P}_l(x, y) = \sum_{i=0}^n \tilde{p}_{l,i} x^i y^{n-i}$. Функция $\Phi_{\tilde{X}_l}$ – однородный тригонометрический многочлен степени $n + 1$:

$$\Phi_{\tilde{X}_l}(\varphi) = \sum_{i=0}^{n+1} a_{l,i} x^i y^{n+1-i}, \quad a_{l,0} = -\tilde{p}_{l,0}. \quad (15)$$

Из леммы 1 статьи [9] и неравенства (13) получаем, что

$$\tilde{P}_l(\cos \varphi, \sin \varphi) = c_l(\varphi) \prod_{j=1}^{r_l} \sin(\varphi'_{l,j} - \varphi),$$

где $c_l(\varphi)$ – однородный тригонометрический многочлен степени $n - r_l \geq 0$, $c_l(\varphi) > 0$ при всех φ , $-\pi/2 < \varphi'_{l,j} \leq \varphi'_{l,j+1} < \pi/2$ для $j = 1, \dots, r_l - 1$. Так как $\tilde{P}_l(\cos \tilde{\varphi}_{l,k}, \sin \tilde{\varphi}_{l,k}) = R_{\tilde{X}_l}(\tilde{\varphi}_{l,k}) \cos \tilde{\varphi}_{l,k} \neq 0$, то $\varphi'_{l,j} \neq \tilde{\varphi}_{l,k}$, $j = 1, \dots, r_l$, $k = 1, \dots, m$.

Пусть $\varphi'_{l,n_{l,k}}, \varphi'_{l,n_{l,k}+1}, \dots, \varphi'_{l,n_{l,k}+s_{l,k}}$ – нули функции $\tilde{P}_l(\cos \varphi, \sin \varphi)$, принадлежащие интервалу $(-\pi/2, \tilde{\varphi}_{l,1})$ при $k = 0$, интервалу $(\tilde{\varphi}_{l,k}, \tilde{\varphi}_{l,k+1})$ при $k = 1, \dots, m - 1$ и интервалу $(\tilde{\varphi}_{l,m}, \pi/2)$ при $k = m$. Введем функции

$$G_l^\theta(\varphi) = c_l(\varphi) \prod_{k=0}^m g_{l,k}^\theta(\varphi), \quad \theta \in I, \quad (16)$$

где $g_{l,k}^\theta(\varphi) \equiv 1$, если $\tilde{P}_l(\cos \varphi, \sin \varphi)$ не имеет нулей на k -м интервале,

$$g_{l,k}^\theta(\varphi) = (1 - \theta) \prod_{j=0}^{s_{l,k}} \sin(\varphi'_{l,n_{l,k}+j} - \varphi) + \theta(\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi)^{s_{l,k}/2} \prod_{j=0}^{s_{l,k}} \cos \varphi'_{l,n_{l,k}+j},$$

если $s_{l,k}$ нечетное,

$$g_{l,k}^\theta(\varphi) = \sin(\varphi'_{l,n_{l,k}} - \varphi) [(1 - \theta) \prod_{j=1}^{s_{l,k}} \sin(\varphi'_{l,n_{l,k}+j} - \varphi) + \theta(\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi)^{s_{l,k}/2} \prod_{j=1}^{s_{l,k}} \cos \varphi'_{l,n_{l,k}+j}],$$

если $s_{l,k}$ четное. Их можно представить в виде $G_l^\theta(\varphi) = P_l^\theta(\cos \varphi, \sin \varphi)$, где $P_l^\theta(x, y) = \sum_{i=0}^n p_{l,i,\theta} x^i y^{n-i}$. При $\theta = 0$ получаем $P_l^0 = \tilde{P}_l$. Кроме того, при всех $\theta \in I$ коэффициент $p_{l,0,\theta} = \tilde{p}_{l,0} = -a_{l,0}$.

Зададим путь $v_l: I \rightarrow \text{HP}_n$, положив $v_l(\theta) = X_l^\theta = P_l^\theta \partial / \partial x + Q_l^\theta \partial / \partial y$, где $Q_l^\theta(x, y) = a_{l,n+1} x^n + (a_{l,n} + p_{l,n,\theta}) x^{n-1} y + \dots + (a_{l,1} + p_{l,1,\theta}) y^n$. При любом $\theta \in I$

$$\Phi_{X_l^\theta}(\varphi) = \sum_{k=1}^{n+1} a_{l,k} \cos^k \varphi \sin^{n+1-k} \varphi - p_{l,0,\theta} \sin^{n+1} \varphi = \sum_{k=0}^{n+1} a_{l,k} \cos^k \varphi \sin^{n+1-k} \varphi = \Phi_{\tilde{X}_l}(\varphi).$$

Поэтому у всех векторных полей X_l^θ особые точки одни и те же. Так как $P_l^0 = \tilde{P}_l$, $\Phi_{X_l^\theta} = \Phi_{\tilde{X}_l}$, то $Q_l^0 = \tilde{Q}_l$, а потому и $v_l(0) = X_l^0 = \tilde{X}_l$. При всех $\theta \in I$ величины $\text{sgn} g_{l,k}^\theta(\tilde{\varphi}_{l,j})$, $j = 1, \dots, m$, $k = 0, 1, \dots, m$, отличны от нуля и постоянны. Поэтому и величины $\text{sgn} R_{X_l^\theta}(\tilde{\varphi}_{l,k}) = \text{sgn} P_l^\theta(\cos \tilde{\varphi}_{l,k}, \sin \tilde{\varphi}_{l,k})$, $j = 1, \dots, m$, отличны от нуля и постоянны для всех $\theta \in I$. Таким образом, $\forall \theta \in I$ поле $X_l^\theta \in \Sigma^0 \text{HP}_n$, а каждая его бесконечно удаленная особая точка имеет один и тот же тип.

Обозначим $\hat{X}_l = \hat{P}_l \partial / \partial x + \hat{Q}_l \partial / \partial y = X_l^1$. Пронумеруем числа $\varphi'_{l,n_{l,k}}$, для тех $k = 0, 1, \dots, m$, для которых $s_{l,k}$ четно, в порядке их возрастания номерами $1, \dots, n_l$, и обозначим $\hat{\varphi}'_{l,j}$ число с номером j . Тогда из равенств $P_l^1(\cos \varphi, \sin \varphi) = G_l^1(\varphi)$ и (16) получаем равенство (14). Числа $\hat{\varphi}'_{l,j}$, $j = 1, \dots, n_l$, удовлетворяют условиям, сформулированным в лемме 2. Следовательно, лемма 2 доказана.

Лемма 2. Существует путь $w: I \rightarrow \Sigma^0 \text{HP}_n$ такой, что при $l \in \{0, 1\}$ $w(l) = \hat{X}_l$.

Доказательство. Из (14), свойств чисел $\hat{\varphi}'_{l,j}$ и равенства $\hat{P}_l(\cos \tilde{\varphi}_{l,k}, \sin \tilde{\varphi}_{l,k}) = R_{\hat{X}_l}(\tilde{\varphi}_{l,k}) \cos \tilde{\varphi}_{l,k}$ получаем, что числа n_0 и n_1 равны числу перемен знака в последовательности $\tau_1^2, \dots, \tau_m^2, -\tau_{m+1}^2$ и потому совпадают: $n_1 = n_0$. Обозначим $I_{l,1} = (-\pi/2, \tilde{\varphi}_{l,1})$, $I_{l,k} = (\tilde{\varphi}_{l,k-1}, \tilde{\varphi}_{l,k})$, $k = 2, \dots, m$, $I_{l,m+1} = (\tilde{\varphi}_{l,m}, \pi/2)$. Пусть $\hat{\varphi}'_{l,p} \in I_{l,k_{l,p}}$ при $p = 1, \dots, n_0$. Покажем по индукции, что для любого $i = 1, \dots, n_0$

$$I_{0,k_{0,i}} = I_{1,k_{1,i}}. \quad (17)$$

Включение $\hat{\varphi}'_{l,1} \in I_{l,k_{l,1}}$ при $k_{l,1} = 1$ равносильно тому, что $\tau_1^2 = 1$, а при $k_{l,1} = 2, \dots, m - 1$ тому, что $\tau_k^2 = 1$ для $k = 1, \dots, k_{l,1} - 1$, а $\tau_{k_{l,1}-1}^2 \tau_{k_{l,1}}^2 = -1$. Поэтому $k_{0,1} = k_{1,1}$ и равенство (17) верно при $i = 1$. Пусть (17) верно для $i = 1, \dots, p - 1$. Тогда $k_{l,p} > k_{0,p-1} = k_{1,p-1}$ при $l \in \{0, 1\}$. Включение $\hat{\varphi}'_{l,p} \in I_{l,k_{l,p}}$ при $2 \leq k_{l,p} \leq m$ равносильно тому, что $\tau_k^2 \tau_{k+1}^2 = 1$ для $k = k_{l,p-1}, \dots, k_{l,p} - 1$, $\tau_{k_{l,p}-1}^2 \tau_{k_{l,p}}^2 = -1$, а при $k_{l,p} = m + 1$ равносильно

тому, что $p = n_0, \tau_m^2 = (-1)^n$. Следовательно, $k_{0,p} = k_{1,p}$ и (17) верно для $i = p$. По индукции получаем, что (17) верно при всех $i = 1, \dots, n_0$.

Для $\theta \in I$ обозначим $\tilde{\varphi}_{\theta,k} = (1 - \theta)\tilde{\varphi}_{0,k} + \theta\tilde{\varphi}_{1,k}, k = 1, \dots, m; \hat{\varphi}'_{\theta,j} = (1 - \theta)\hat{\varphi}'_{0,j} + \theta\hat{\varphi}'_{1,k}, j = 1, \dots, n_0$. Так как $-\pi/2 < \tilde{\varphi}_{\theta,k} < \tilde{\varphi}_{\theta,k+1} < \pi/2, k = 1, \dots, m - 1$, то $\forall \theta \in I$ определены интервалы $I_{\theta,1} = (-\pi/2, \tilde{\varphi}_{\theta,1}), I_{\theta,k} = (\tilde{\varphi}_{\theta,k-1}, \tilde{\varphi}_{\theta,k}), k = 2, \dots, m, I_{\theta,m+1} = (\tilde{\varphi}_{\theta,m}, \pi/2)$. Ввиду (17)

$$\forall j = 1, \dots, n_0 \forall \theta \in I \hat{\varphi}'_{\theta,j} \in I_{\theta,k_{\theta,j}}. \tag{18}$$

Так как $\hat{c}_0(\varphi) > 0, \hat{c}_1(\varphi) > 0$, то $\forall \theta \in I \hat{c}_\theta(\varphi) = (1 - \theta)\hat{c}_0(\varphi) + \theta\hat{c}_1(\varphi) > 0$.

Согласно лемме 1 из [9]

$$\Phi_{\hat{X}_l}(\varphi) = \hat{d}_l(\varphi) \prod_{k=1}^m \sin(\tilde{\varphi}_{l,k} - \varphi), l \in \{0, 1\}, \tag{19}$$

где $\hat{d}_l(\varphi)$ – однородный тригонометрический многочлен четной степени $n - 1 - m$, не обращающийся в нуль. Так как $\Phi_{\hat{X}_l}(-\pi/2) = \hat{P}_l(\cos(-\pi/2), \sin(-\pi/2))$, то из (14), (19) и неравенства $\hat{c}_l(\varphi) > 0$ следует, что $\hat{d}_l(\varphi) > 0, l \in \{0, 1\}$. Поэтому $\forall \theta \in I \hat{d}_\theta(\varphi) = (1 - \theta)\hat{d}_0(\varphi) + \theta\hat{d}_1(\varphi) > 0$. Пусть

$$\hat{c}_\theta(\varphi) \prod_{j=1}^{n_0} \sin(\hat{\varphi}'_{\theta,j} - \varphi) = \sum_{i=0}^n \hat{p}_{\theta,i} \cos^i \varphi \sin^{n-i} \varphi,$$

$$\hat{d}_\theta(\varphi) \prod_{k=1}^m \sin(\tilde{\varphi}_{\theta,k} - \varphi) = \sum_{i=0}^{n+1} \hat{a}_{\theta,i} \cos^i \varphi \sin^{n+1-i} \varphi.$$

Тогда $\hat{a}_{\theta,0} \neq 0$. Поскольку m и n_0 имеют разную четность, то $\kappa(\theta) = -\hat{p}_{\theta,0}/\hat{a}_{\theta,0} > 0$. Ввиду (14), (19) и (2) $\kappa(I) = 1$ при $l \in \{0, 1\}$. Зададим путь $w: I \rightarrow \text{HP}_n$, положив $\forall \theta \in I w(\theta) = \bar{X}^\theta = \bar{P}^\theta \partial/\partial x + \bar{Q}^\theta \partial/\partial y$, где $\bar{P}^\theta(x, y) = \sum_{i=0}^n \hat{p}_{\theta,i} x^i y^{n-i}$,

$$\bar{Q}^\theta(x, y) = \hat{a}_{\theta,n+1} \kappa(\theta) x^n + (\hat{p}_{\theta,n} + \hat{a}_{\theta,n} \kappa(\theta)) x^{n-1} y + \dots + (\hat{p}_{\theta,1} + \hat{a}_{\theta,1} \kappa(\theta)) y^n.$$

Тогда

$$\bar{P}^\theta(\cos \varphi, \sin \varphi) = \hat{c}_\theta(\varphi) \prod_{j=1}^{n_0} \sin(\hat{\varphi}'_{\theta,j} - \varphi), \tag{20}$$

$$\Phi_{\bar{X}^\theta}(\varphi) = \kappa(\theta) \sum_{i=0}^{n+1} \hat{a}_{\theta,i} \cos^i \varphi \sin^{n+1-i} \varphi = \kappa(\theta) \hat{d}_\theta(\varphi) \prod_{k=1}^m \sin(\tilde{\varphi}_{\theta,k} - \varphi). \tag{21}$$

При $\theta = l \in \{0, 1\}$ ввиду (14), (19) и равенства $\kappa(l) = 1$ имеем $\bar{P}^l = \hat{P}_l, \Phi_{\bar{X}^l} = \Phi_{\hat{X}_l}$, а потому и $w(l) = \bar{X}^l = \hat{X}_l$.

Из (18) и (20) следует, что $\text{sgn} R_{\bar{X}^\theta}(\tilde{\varphi}_{\theta,k}) = \text{sgn} \bar{P}^\theta(\cos \tilde{\varphi}_{\theta,k}, \sin \tilde{\varphi}_{\theta,k}), k = 1, \dots, m$, отличен от нуля для всех $\theta \in I$. Поскольку ввиду (21) $\tilde{\varphi}_{\theta,k}, k = 1, \dots, m$ – все нули функции $\Phi_{\bar{X}^\theta}$ на $[-\pi/2, \pi/2]$ и они простые, то для всех $\theta \in I \bar{X}^\theta \in \Sigma^0 \text{HP}_n$. Лемма 3 доказана.

Пусть u_1^{-1} и v_1^{-1} – пути, обратные к u_1 и v_1 , то есть $\forall \theta \in I u_1^{-1}(\theta) = u_1(1 - \theta), v_1^{-1}(\theta) = v_1(1 - \theta)$. Так как $u_l(1) = v_l(0), v_l(1) = w(l), l \in \{0, 1\}$, то определено произведение путей $u_0, v_0, w, v_1^{-1}, u_1^{-1}$ [10, с. 64] – путь $\xi = u_0 \cdot v_0 \cdot w \cdot v_1^{-1} \cdot u_1^{-1}: I \rightarrow \Sigma^0 \text{HP}_n$, соединяющий поле $\xi(0) = X_0$ и поле $\xi(1) = X_1$. На этом доказательство утверждения 1) теоремы 2 завершено.

Докажем утверждение 2) теоремы 2. Векторные поля X_1 и X_2 из $\Sigma^0 \text{HP}_n$, имеющие один тип, принадлежат одной связной компоненте множества $\Sigma^0 \text{HP}_n$ и потому топологически эквивалентны и в \mathbb{K} и в \mathbb{RP}^2 . Если типы X_1 и X_2 взаимно обратны, то отображение $T: (x, y) \mapsto (-x, y)$ переводит векторное поле X_2 в векторное поле $X_2^* = T^{-1} X_2 T \in \Sigma^0 \text{HP}_n$, имеющее тот же тип, что и X_1 . Поле X_1 топологически эквивалентно полю X_2^* , а потому и полю X_2 .

Если векторные поля X_1 и X_2 из $\Sigma^0 \text{HP}_n$, имеющие на $\partial \mathbb{K}$ особые точки, топологически эквивалентны в \mathbb{K} , то существует гомеоморфизм $h_\partial: \partial \mathbb{K} \rightarrow \partial \mathbb{K}$, переводящий особые точки в особые точки того же типа. Если этот гомеоморфизм сохраняет ориентацию, то сохраняется и циклический порядок особых точек и потому поля X_1 и X_2 одного типа. Если гомеоморфизм h_∂ меняет ориентацию, то он обращает циклический порядок особых точек и потому типы векторных полей X_1 и X_2 взаимно обратны.

Если рассматриваемые векторные поля X_1 и X_2 топологически эквивалентны в \mathbb{RP}^2 , то существует гомеоморфизм $h: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}, h(\partial \mathbb{K}) = \partial \mathbb{K}$, отображающий траектории поля X_1 на траектории поля X_2 с сохранением ориентации на траекториях, принадлежащих \mathbb{R}^2 ; при этом диаметрально противоположные точки $\partial \mathbb{K}$ переходят в диаметрально противоположные точки $\partial \mathbb{K}$. Если особая точка S_1 поля X_1 имеет тип (τ_1^1, τ_1^2) а особая точка $S_2 = h(S_1)$ поля X_2 имеет тип (τ_2^1, τ_2^2) , то $\tau_2^1 \tau_2^2 = \tau_1^1 \tau_1^2$. Гомеоморфизм h переводит $\omega(\alpha)$ -предельные множества траекторий поля X_1 , принадлежащих \mathbb{R}^2 , в $\omega(\alpha)$ -предельные

множества траекторий поля X_2 . Поэтому $\tau_1^2 = \tau_2^2$. Но тогда типы (τ_1^1, τ_1^2) и (τ_2^1, τ_2^2) особых точек S_1 и S_2 совпадают. Поскольку $h|_{\partial\mathbb{K}}: \partial\mathbb{K} \rightarrow \partial\mathbb{K}$ – гомеоморфизм, то он либо сохраняет, либо обращает циклический порядок особых точек на $\partial\mathbb{K}$. Следовательно, типы векторных полей X_1 и X_2 либо совпадают, либо противоположны.

5. Доказательство теорем 3 и 4. Пусть $n = 2k + 1$. Зададим векторные поля $Y, Z \in \text{HP}_n$, положив

$$Y(x, y) = x(x^2 + y^2)^k \partial/\partial x + y(x^2 + y^2)^k \partial/\partial y,$$

$$Z(x, y) = -y(x^2 + y^2)^k \partial/\partial x + x(x^2 + y^2)^k \partial/\partial y.$$

Сначала докажем теорему 3. Для векторного поля $Y + Z$ функции $R_{Y+Z}(\varphi) \equiv 1$ и $\Phi_{Y+Z}(\varphi) \equiv 1$. Поэтому поле $Y + Z$ не имеет бесконечно удаленных особых точек, а $h(Y + Z) = -2\pi < 0$. Таким образом, $Y + Z \in \Sigma^0\text{HP}_n$, $T(Y + Z) = (1, -1)$. Аналогично имеем $-Y + Z \in \Sigma^0\text{HP}_n$, $T(-Y + Z) = (1, 1)$, $Y - Z \in \Sigma^0\text{HP}_n$, $T(Y - Z) = (-1, -1)$ и $-Y - Z \in \Sigma^0\text{HP}_n$, $T(-Y - Z) = (-1, 1)$. Тем самым, теорема 3 доказана.

Перейдем к доказательству теоремы 4. Так как все траектории векторного поля $X \in \Sigma^0\text{HP}_n$ при $h(X) < 0$ ($h(X) > 0$) α -предельны (ω -предельны) к точке O и ω -предельны (α -предельны) к $\partial\mathbb{K}$ [5], то утверждение 2) теоремы очевидно. Докажем утверждение 1) теоремы.

Пусть C – компонента связности множества $\Sigma^0\text{HP}_n$, состоящая из векторных полей, не имеющих бесконечно удаленных особых точек. Так как $\Phi_V(\varphi)$ и $h(V)$ – непрерывные функции соответственно на $[0, 2\pi] \times \Sigma^0\text{HP}_n$ и $\Sigma^0\text{HP}_n$, то тип $T(V)$ непрерывно зависит от векторного поля $V \in C$ и потому постоянен для всех $V \in C$.

Для доказательства того, что два векторных поля из $\Sigma^0\text{HP}_n$, имеющих тип $(1, -1)$, принадлежат одной компоненте связности множества $\Sigma^0\text{HP}_n$, достаточно показать, что любое векторное поле $X \in \Sigma^0\text{HP}_n$ с $T(X) = (1, -1)$ можно соединить в $\Sigma^0\text{HP}_n$ путем с векторным полем $Y + Z$.

Пусть $R(\varphi) = R_X(\varphi)$, $\Phi(\varphi) = \Phi_X(\varphi)$. Выберем число

$$M > \max_{\varphi \in [0, 2\pi]} |R(\varphi)|. \tag{22}$$

Для любого $\theta \in I = [0, 1]$ имеем $\Phi_{X+\theta MY}(\varphi) = \Phi(\varphi)$, $R_{X+\theta MY}(\varphi) = R(\varphi) + \theta M$. Поскольку $\forall \varphi \in [0, 2\pi]$ $\Phi(\varphi) > 0$, а $h(X) < 0$, то

$$h(X + \theta MY) = - \int_0^{2\pi} \frac{R(\varphi) + \theta M}{\Phi(\varphi)} d\varphi = h(X) - \int_0^{2\pi} \frac{\theta M}{\Phi(\varphi)} d\varphi < 0.$$

Таким образом, $\forall \theta \in I$ $X + \theta MY \in \Sigma^0\text{HP}_n$. Отображение $g_1: I \ni \theta \mapsto X + \theta MY$ – путь в $\Sigma^0\text{HP}_n$, соединяющий векторные поля X и $X + MY$.

Для любых $\theta \in I$ и $\varphi \in [0, 2\pi]$ имеем с учетом неравенства (22)

$$\Phi_{X+MY+\theta Z}(\varphi) = \Phi(\varphi) + \theta > 0, \quad R_{X+MY+\theta Z}(\varphi) = R_{X+MY}(\varphi) = R(\varphi) + M > 0.$$

Поэтому

$$h(X + MY + \theta Z) = - \int_0^{2\pi} \frac{R(\varphi) + M}{\Phi(\varphi) + \theta} d\varphi < 0 \quad \text{и} \quad X + MY + \theta Z \in \Sigma^0\text{HP}_n.$$

Отображение $g_2: I \ni \theta \mapsto X + MY + \theta Z$ – путь в $\Sigma^0\text{HP}_n$, соединяющий векторные поля $X + MY$ и $X + MY + Z$.

Для любых $\theta \in I$ и $\varphi \in [0, 2\pi]$

$$\Phi_{\theta X+MY+Z}(\varphi) = \theta\Phi(\varphi) + 1 > 0, \quad R_{\theta X+MY+Z}(\varphi) = \theta R(\varphi) + M > 0.$$

Поэтому $h(\theta X + MY + Z) < 0$ и $\theta X + MY + Z \in \Sigma^0\text{HP}_n$. Следовательно, $g_3: I \ni \theta \mapsto (1 - \theta)X + MY + Z$ – путь в $\Sigma^0\text{HP}_n$, соединяющий векторные поля $X + MY + Z$ и $MY + Z$. Для любых $\theta \in I$ и $\varphi \in [0, 2\pi]$

$$\Phi_{((1-\theta)M+\theta)Y+Z}(\varphi) = 1 > 0, \quad R_{((1-\theta)M+\theta)Y+Z}(\varphi) = (1 - \theta)M + \theta > 0.$$

Поэтому $h(((1 - \theta)M + \theta)Y + Z) < 0$ и $((1 - \theta)M + \theta)Y + Z \in \Sigma^0\text{HP}_n$. Следовательно, $g_4: I \ni \theta \mapsto ((1 - \theta)M + \theta)Y + Z$ – путь в $\Sigma^0\text{HP}_n$, соединяющий векторные поля $MY + Z$ и $Y + Z$.

В итоге получаем, что путь $g = g_1 \cdot g_2 \cdot g_3 \cdot g_4$ – произведение путей g_1, g_2, g_3 и g_4 – соединяет в $\Sigma^0\text{HP}_n$ поле X с полем $Y + Z$.

Аналогично доказывается, что два векторных поля из $\Sigma^0\text{HP}_n$, имеющих общий тип $(1, 1)$ или $(-1, 1)$ или $(-1, -1)$, также принадлежат к одной компоненте связности множества $\Sigma^0\text{HP}_n$.

Утверждение 1) теоремы 4 доказано.

6. Заключение. В работе изучена структура множества $\Sigma^0\text{HP}_n$ грубых однородных полиномиальных векторных полей степени $n \geq 1$, заданных на плоскости. Для векторных полей из $\Sigma^0\text{HP}_n$ введена

характеристика – тип векторного поля, являющийся его полным топологическим инвариантом. Два векторных поля из $\Sigma^0\text{HP}_n$ топологически эквивалентны на проективной плоскости тогда и только тогда, когда их типы совпадают или взаимно обратны. Основным результатом работы состоит в том, что два векторных поля принадлежат одной связной компоненте множества $\Sigma^0\text{HP}_n$ тогда и только тогда, когда они имеют одинаковый тип.

Список литературы

1. Андронов А. А., Понтрягин Л. С. 1937. Грубые системы. Доклады АН СССР, 14(5): 247–250.
2. Андронов, А. А., Леонтович Е. А., Гордон И. И., Майер А. Г. 1966. Качественная теория динамических систем второго порядка. М., Наука. 568.
3. Гринес В. З., Починка О. В. 2011. Введение в топологическую классификацию каскадов на многообразиях размерности два и три. Москва–Ижевск, Регулярная и хаотическая динамика. 424.
4. Ошемков А. А., Шарко В. В. 1998. О классификации потоков Морса – Смейла на двумерных многообразиях. Мат. сб., 189(8): 93–140. DOI: 10.4213/sm341
5. Ройтенберг В. Ш. 2004. О связных компонентах множества векторных полей Морса – Смейла на двумерных многообразиях. Труды вторых Колмогоровских чтений, Ярославль, Изд-во ЯГПУ: 352 – 358.
6. Ройтенберг В. Ш. 2014. О типичных полиномиальных векторных полях на плоскости. Вестник Адыгейского государственного университета. Серия: Естественно-математические и технические науки. 4 (147): 13–21.
7. Ройтенберг В. Ш. 2018. О типичных однородных векторных полях на плоскости. Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки, 46(2): 15–26. DOI 10.21685/2072-3040-2018-2-2
8. Ройтенберг В. Ш. 2019. О бифуркациях однородных полиномиальных векторных полей на плоскости. Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика, 51(2): 398–404. DOI 10.18413/2075-4639-2019-51-2-192-202
9. Ройтенберг В. Ш. 2020. О структуре пространства однородных полиномиальных дифференциальных уравнений на окружности. Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: «Математика. Механика. Физика», 12(1): 21–30. DOI: 10.14529/mmph200203
10. Рохлин В. А., Фукс Д. Б. 1977. Начальный курс топологии. Геометрические главы. М., Наука. 488.
11. Gutierrez C., Melo W. 1977. The connected components of Morse–Smale vector fields on two-manifolds. Lecture Notes in Mathematics. 597. Springer-Verlag, 230–251.
12. Hayashi S. 1997. Connecting Invariant Manifolds and the Solution of C^1 -Stability and Ω -Stability Conjectures for Flows. Annals of Mathematics, 145(1): 81–137.
13. Peixoto M. M. 1962. Structural stability on two-dimensional manifolds. Topology, 1(2): 101–120.
14. Peixoto M. M. 1973. On the classification of flows on two-manifolds. Dynamical Systems, Academic Press, 389-419.
15. Robinson C. 1974. Structural stability of vector fields. Annals of Mathematics, 99(1): 154–175.
16. Robinson C. 1976. Structural stability of diffeomorphisms. J. Diff. Equations, 22(1): 28–73.

References

1. Andronov A. A., Pontrjagin L. S. 1937. Grubye sistemy [Rough systems]. Doklady AN SSSR, 14(5): 247–250.
2. Grines V., Pochinka O. 2011. Vvedenie v topologicheskuyu klassifikaciju kaskadov na mnogoobrazijah razmernosti dva i tri. [Introduction to the topological classification of cascades on manifolds of dimension two and three]. Moskva–Izhevsk, Reguljarnaja i haoticheskaja dinamika Publ. 424.
3. Andronov A. A., Leontovich E. A., Gordon I. I., Maier A. G. 1966. Kachestvennaja teorija dinamičeskikh sistem vtorogo porjadka [The qualitative theory of dynamical systems of second order]. Moscow, Nauka Publ. 568.

4. Oshemkov A. A., Sharko V. V. 1998. O klassifikacii potokov Morsa – Smejla na dvumernyh mnogoobrazijah [Classification of Morse-Smale flows on two-dimensional manifolds]. Sb. Math. 189(8): 1205–1250. DOI: 10.4213/sm341
5. Roitenberg V. Sh. 2004. O svjaznyh komponentah mnozhestva vektornyh polej Morsa–Smejla na dvumernyh mnogoobrazijah [On connected components of Morse–Smale vector fields on two-dimensional manifolds]. Trudy vtoryh Kolmogorovskih chtenij, Yaroslavl, YaGPU Publ: 352–358.
6. Roitenberg V. Sh. 2014. O tipichnyh polinomial’nyh vektornyh poljah na ploskosti [On generic polynomial vector fields on the plane]. Bulletin of the Adyghe State University. Series: Natural-Mathematical and Technical Sciences, 4 (147): 13–21.
7. Roitenberg V. Sh. 2018. O tipichnyh odnorodnyh vektornyh poljah na ploskosti [On generic homogeneous vector fields on the plane]. University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences, 46(2): 15–26. DOI 10.21685/2072-3040-2018-2-2
8. Roitenberg V. Sh. 2019. O bifurkacijah odnorodnyh polinomial’nyh vektornyh polej na ploskosti [On bifurcations of homogeneous polynomial vector fields on the plane]. Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics. Physics, 51(2): 398–404. DOI 10.18413/2075-4639-2019-51-2-192-202
9. Roitenberg V. Sh. 2020. O strukture prostranstva odnorodnyh polinomial’nyh differencial’nyh uravnenij na okruzhnosti [On the structure of the space of homogeneous polynomial differential equations on a circle]. Bulletin of the South Ural University. Series: Mathematics. Mechanics. Physics, 12(2): 21–30. DOI: 10.14529/mmph200203
10. Rochlin V. A., Fuchs D. B. 1977. Nachal’nyj kurs topologii. Geometricheskie glavy [Basic course of topology. Geometric chapters]. Moscow, Nauka Publ. 488.
11. Gutierrez C., Melo W. 1977. The connected components of Morse–Smale vector fields on two-manifolds. Lecture Notes in Mathematics, 597. Springer-Verlag: 230–251.
12. Hayashi S. 1997. Connecting Invariant Manifolds and the Solution of C^1 -Stability and Ω -Stability Conjectures for Flows. Annals of Mathematics, 145(1): 81–137.
13. Peixoto M. M. 1962. Structural stability on two-dimensional manifolds. Topology, 1(2): 101–120.
14. Peixoto M. M. 1973. On the classification of flows on two-manifolds. Dynamical Systems, Academic Press: 389–419.
15. Robinson C. 1974. Structural stability of vector fields. Annals of Mathematics, 99(1): 154–175.
16. Robinson C. 1976. Structural stability of diffeomorphisms. J. Diff. Equations, 22(1): 28–73.

Получена 12.08.2020

Ройтенберг Владимир Шлеймович – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры высшей математики, Ярославский государственный технический университет
Московский проспект, 88, Ярославль, 150023, Россия
E-mail: vroitenderg@mail.ru

ФИЗИКА. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 620.1.72:532.783

DOI 10.18413/2687-0959-2020-52-3-214-223

ДОМЕННАЯ ПЕРЕОРИЕНТАЦИЯ НЕМАТИКА В ПОЛЕ $p - n$ ПЕРЕХОДА В СЕНСОРЕ ПАРА ОРГАНИЧЕСКИХ РЕАГЕНТОВ

А. В. Бердниченко, С. И. Кучеев

Белгородский национальный исследовательский университет,
Белгород, 308015, Россия

E-mail: kucheev@bsu.edu.ru

Аннотация. Экспериментально исследовано формирование доменной текстуры в нематике в электрическом поле кремниевого $p - n$ перехода и влияние пара реагентов (диметилформамид, изопропиловый спирт, толуол) на однородно переориентированный нематик и домены. При пороговом напряжении инициатором зарождения линейно расположенных доменов являетсядвигающаяся вдоль линии $p - n$ перехода в однородно переориентированном нематике локальная неоднородность в ориентации молекул, скорость движения которой зависит от приложенного напряжения. Шаг периодичности в расположении доменов зависит от скорости движения этой неоднородности. Влияние пара реагентов на однородно переориентированный нематик полем $p - n$ перехода при фиксированном напряжении проявляется в виде изменения интенсивности отраженного света от переориентированной области нематика. Интенсивность возрастает по мере увеличения концентрации реагента. Для доменной текстуры, также при фиксированном напряжении, влияние пара проявляется в изменении шага периодичности их расположения вдоль линии $p - n$ перехода. Отмечаются два возможных вклада в механизм влияния пара реагентов, а именно: изменение параметра порядка и поверхностного натяжения нематика, причем последний фактор может носить явный градиентный характер, что позволяет по пространственному смещению доменов от линии $p - n$ перехода в прототипе сенсора определять направление на источник пара реагентов.

Ключевые слова: домены в жидком кристалле, кремниевый $p - n$ переход, сенсор пара.

Для цитирования: Бердниченко А. В., Кучеев С. И. 2020. Доменная переориентация нематика в поле $p - n$ перехода в сенсоре пара органических реагентов. Прикладная математика & Физика. 52(3): 214–223.

DOI 10.18413/2687-0959-2020-52-3-214-223

DOMAIN REORIENTATION OF NEMATIC IN $p - n$ JUNCTION FIELD IN SENSOR OF ORGANIC REAGENTS VAPOR

A. V. Berdnichenko, C. I. Kucheev

Belgorod National Research University,
Belgorod, 308015, Russia

E-mail: kucheev@bsu.edu.ru

Received September 11, 2020

Abstract. The formation of a domain texture in a nematic in the electric field of a silicon $p - n$ junction and the influence of reagent vapors (dimethylformamide, isopropyl alcohol, toluene) on a uniformly reoriented nematic and domains were experimentally studied. At a threshold voltage, the initiator of the generation of linearly located domains is a local heterogeneity in the orientation of the molecules moving along the $p - n$ junction line in a uniformly reoriented nematic, the speed of which depends on the applied voltage. The step of periodicity in the arrangement of domains depends on the speed of motion of this heterogeneity. The effect of reagents on a uniformly reoriented nematic by the $p - n$ junction field at a fixed voltage is manifested as a change in the intensity of reflected light from the reoriented region of the nematic. The intensity increases with increasing concentration of the reagent. For a domain texture, also at a fixed voltage, the effect of vapor is manifested in a change in the step of the periodicity of their location along the $p - n$ junction line. Two possible contributions to the mechanism of influence of reagents vapor are noted, namely: a change in the order parameter and surface tension of the nematic, the latter factor being clearly gradient in nature, which allows the spatial directional displacement of domains from the $p - n$ junction line in the sensor prototype to define the direction to the source of the reagent vapor.

Key words: domains in a liquid crystal, silicon $p - n$ junction, sensor of vapor.

For citation: Berdnichenko A. V., Kucheev C. I. 2020. Domain reorientation of nematic in $p - n$ junction field in sensor of organic reagents vapor. Applied Mathematics & Physics. 52(3): 214–223 (in Russian).

DOI 10.18413/2687-0959-2020-52-3-214-223

Введение. Жидкие кристаллы можно отнести к средам, которые перспективны с точки зрения использования в сенсорах следовых концентраций веществ химического и биологического происхождения. Это потенциальное для приложений свойство основано на присущей этим материалам анизотропии практически всех физических параметров, например, показателя преломления, диэлектрической проницаемости, подвижности носителей заряда и т. д. [4] и изменении анизотропии под влиянием примесных молекул. По опубликованным источникам наиболее информативными методами регистрации являются поляризационно-оптические [9], которыми в частности фиксируют: смещение точки перехода в изотропное состояние и изменение интерференционных цветов, обусловленное ориентационными переходами директора [8, 10], изменение энергии сцепления [12], а в случае использования холестериков – это сдвиг длины волны Брегговского отражения [5, 6, 7]. Однако при этом большинство прототипов сенсоров, в которых реализуется оптический метод регистрации, страдают существенным недостатком, связанным с возникающей в процессе регистрации реагента сложной интерференционной картины в плоскости жидкого кристалла [11], которую трудно свести в дальнейшем к некоторому интегральному ответу (например цифровому), что ожидается от таких типов приборов как сенсоры. Такая желаемая функциональность сенсора могла бы быть достигнута в случае однородно ориентированных жк материалов и остающимися таковыми в исследуемом диапазоне концентраций реагентов. Эта задача, в свою очередь, может быть решена в ячейках с геометрией, в которой выполняются два условия, а именно, открытая поверхность жк материала, и в нем осуществляется определенный электрооптический эффект, т. е. молекулы жк постоянно находятся под влиянием электрического поля. Здесь возможно ожидать наблюдение дополнительных ориентационных эффектов, вызванных изменением, например, параметра порядка вследствие внедрения примесных молекул в жк материал, но с сохранением определенной степени однородности ориентации молекул, которая задается внешним полем.

В литературе мало работ, в которых изучается влияние примесных молекул (реагентов) на жидкокристаллический слой, подвергнутый влиянию электрического поля выше порога Фредерикса. Одной из причин такого состояния дел является вынужденная практика использовать ячейки классической геометрии конденсаторного типа, в которых подразумевается использование двух твердотельных подложек, обеспечивающих подключение напряжения к жидкому кристаллу, но при этом ограничивающих контакт жк материала с внешней средой. В предлагаемой работе рассматривается влияние реагентов (пар легко испаряющихся органических жидкостей) на ход двух электрооптических эффектов в нематике в окрестности $p - n$ перехода, а именно, влияние пара на однородно переориентированный нематик и на доменную текстуру. Оба указанных электрооптических эффекта имеют место в нематике последовательно друг за другом при увеличении напряжения, приложенного к $p - n$ переходу, и реализуются с открытой поверхностью жидкого кристалла.

Эксперимент. В работе использовалась жк ячейка (структура) на основе кремниевой подложки n -типа проводимости с высоколегированным p -карманом. По границе соприкосновения p и n областей формируется $p - n$ переход с выходом на поверхность подложки. С целью исключения электрического контакта жк материала с «полюсами» $p - n$ перехода поверхность подложки была пассивирована пленкой окиси кремния (SiO_2). Отметим, что использование геометрии электродов с непосредственным электрическим контактом с жк материалом в условиях приложения электрического поля, например [11], может приводить к нежелательному электрохимическому разложению жк материала, в результате которого могут происходить ориентационные эффекты, не связанные с присутствием тестируемых реагентов. Гомеотропная ориентация нематика 5 обеспечивалась обработкой поверхности окиси кремния раствором лецитина в толуоле. Описание подобных ячеек с единичным p - n переходом или с группой $p - n$ переходов можно найти в [1, 2]. Наблюдение переориентации нематика из гомеотропного состояния в планарное, формирование доменов в переориентированном нематике, а также влияние пара соответствующего реагента на протекание выше указанных электрооптических эффектов наблюдались и фиксировались поляризационным микроскопом со скрещенными поляризаторами на отражение. В качестве локального источника пара реагента использовалась фильтровальная бумага, которой придается определенный размер и форма для фиксации воздушного зазора с поверхностью подложки [3]. Бумага смачивалась каплей(ми) соответствующей легкоиспаряющейся жидкости, и далее, располагалась вблизи (~ 3 см) слоя жидкого кристалла. Темп смачивания подбирался таким образом, чтобы в этой геометрии эксперимента обеспечивалось распространение пара реагента в сторону жк слоя с увеличивающейся концентрацией до перехода жк в изотропное состояние. Эта геометрия позволяет также найти особенности протекания электрооптических эффектов явно взаимосвязанных с выделенным пространственным направлением потока пара реагента. После перехода нематика в изотропное состояние источник пара реагента удалялся от прототипа сенсора.

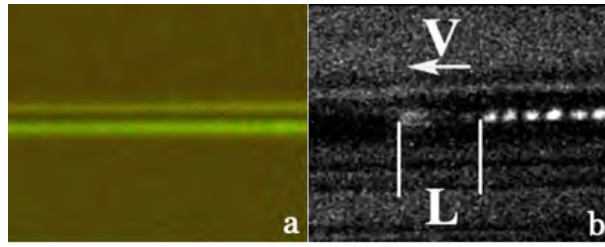


Рис. 1. а – переориентация нематика 5СВ в электрическом поле $p-n$ перехода. Плоскости поляризаторов под 45 град. к линии $p-n$ перехода. Напряжение – 4,5 В. Частота – 50 кГц.
 б – движение «лидера» в переориентированном нематике вдоль линии $p-n$ перехода справа налево со скоростью «V» и формирование доменов. Напряжение – 8.6 В. Частота – 50 кГц, $L = 30 \mu\text{м}$, шаг доменов $d = 10 \mu\text{м}$. Плоскости поляризаторов под 0(90) град. к линии $p-n$ перехода. Ячейка закрытого типа. Толщина жк слоя – 30 мкм
 Fig. 1. а – reorientation of a nematic 5CB in the electric field of the $p-n$ junction. Polarizer planes at 45 degrees to the $p-n$ junction line. Voltage – 4.5 V. Frequency – 50 kHz.
 б – movement of the «leader» along the $p-n$ junction line from right to left with a speed of «V» and the formation of domains. Voltage – 8.6 V. Frequency – 50 kHz, $L = 30 \mu\text{m}$, domain pitch $d = 10 \mu\text{m}$. Polarizer planes under 0 (90) degrees to the $p-n$ junction line. The cell is closed. The thickness of the LC layer is 30 microns

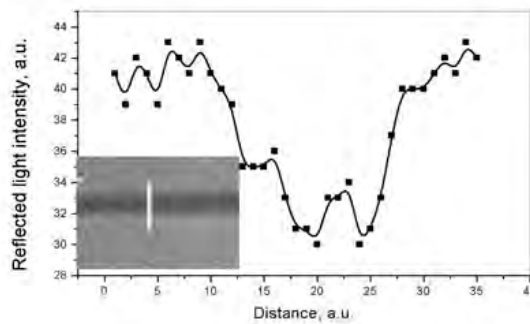


Рис. 2. Распределение интенсивности отраженного света (перпендикулярно линии $p-n$ перехода) от слоя переориентированного нематика 5СВ электрическим полем $p-n$ перехода. Напряжение – 4,5 В. Частота – 50 кГц.
 Вставка: фрагмент ячейки с переориентированным нематиком (горизонтальная темная полоса) на фоне гомеотропной текстуры. Линия $p-n$ перехода под 0(90) град. к плоскостям поляризаторов. Вертикальная метка – участок представленного распределения интенсивности отраженного света
 Fig. 2. The intensity distribution of the reflected light (perpendicular to the line of the $p-n$ junction) from the reoriented nematic 5CB by the electric field of the $p-n$ junction. Voltage – 4.5 V. Frequency – 50 kHz. Insert: a fragment of the cell with a reoriented nematic (horizontal dark stripe) against the background of a homeotropic texture. Line of $p-n$ junction is under 0 (90) degrees to the planes of the polarizers. A vertical mark is a section of the presented distribution of reflected light intensity

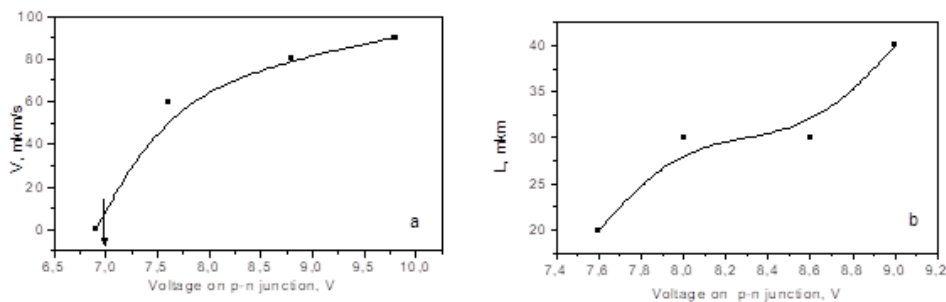


Рис. 3. а – зависимость скорости перемещения «лидера» от напряжения. Стрелка – пороговое напряжение возникновения «лидера». б – зависимость расстояния L между «лидером» и первым формирующимся доменом в доменной текстуре от напряжения. Толщина нематика 5СВ 30 мкм. Частота 50 кГц. Ячейка закрытого типа
 Fig. 3. а – dependence of the «leader» speed on voltage. The arrow is the threshold voltage of the «leader» formation. б – dependence of the distance L between the «leader» and the first domain on the voltage. The thickness of the nematic 5CB 30 microns. Frequency 50 kHz. The cell is closed

Первоначально рассмотрим однородную (преддоменную) переориентацию нематика, и появление доменной текстуры в закрытой ячейке (калиброванная толщина жк слоя позволяет более точно установить закономерности этих электрооптических эффектов) без доступа реагентов к жк материалу. При

прикладывании переменного напряжения к $p - n$ переходу в нематике над переходом происходит переориентация молекул жидкого кристалла. $P - n$ переход имеет вентильную вольтамперную характеристику, поэтому при запирающей фазе напряжения переориентация молекул обусловлена влиянием электрического поля, которое проникает из $p - n$ перехода через диэлектрик в слой жк, а при прямой фазе переменного напряжения переориентация обусловлена полем объемного заряда в жк материале при его релаксации.

В этой фазе напряжения фактически имеет место электрическое замыкание $p - n$ перехода. О накоплении объемного заряда и формировании поля объемного заряда противоположного полю $p - n$ перехода в жк материале косвенно указывает экспериментальный факт: при подключении однополярной ступеньки напряжения запирающей полярности имеет место кратковременная переориентация нематика с последующей релаксацией его в гомеотропное состояние ориентации, а при выключении этой ступеньки напряжения снова происходит кратковременная переориентация нематика, но уже под действием поля объемного заряда.

Выше упомянутая преддоменная переориентация нематика (при напряжении слегка выше порогового) в поляризованном свете проявляется в виде двух светлых полосок вдоль линии $p - n$ перехода на фоне темной гомеотропной текстуры, рис. 1. а (интерференционное окрашивание полосок, нежелательное с точки зрения детектирования реагента, наступает при дальнейшем увеличении напряжения). Рисунок иллюстрирует ситуацию, когда линия $p - n$ перехода расположена под углом 45 град. к плоскостям скрещенных поляризаторов. При таком относительном расположении $p - n$ перехода и поляризаторов интенсивность отраженного света от полос(ы) с переориентированным в них нематиком максимальна.

При повороте ячейки вокруг вертикальной оси, перпендикулярной плоскости ячейки, имеет место чередующееся через 90 град. изменение яркости от максимальной (отмечено выше) до минимальной величины, при которой полоса(ы) выглядит более темной, чем области нематика с исходной гомеотропной ориентацией (вставка, рис. 2).

Такой характер изменения яркости этих полосок показывает, что переориентированные молекулы лежат в плоскости перпендикулярной линии $p - n$ перехода, в которой также лежит вектор электрического поля. Более темный вид полосы переориентированного нематика в сравнении с областями нематика, не затронутыми влиянием электрического поля $p - n$ перехода, объясняется дополнительным поглощением света преимущественно планарно ориентированными молекулами нематика в этой полосе благодаря дихроизму молекул 5СВ, рис. 2.

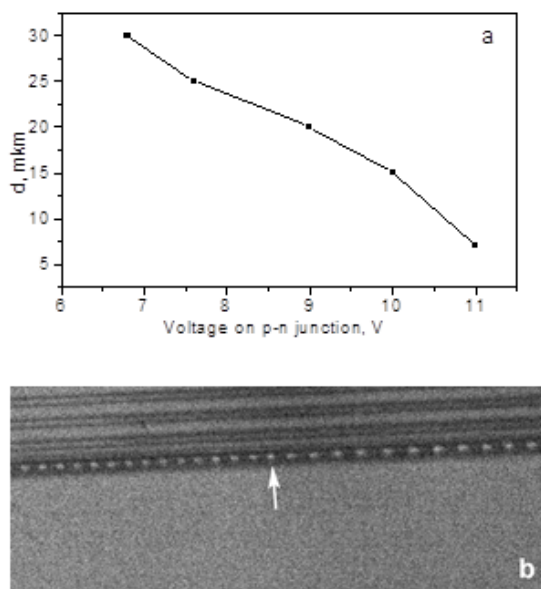


Рис. 4. а – типичная зависимость шага периодичности (d) расположения доменов в нематике 5СВ от напряжения (толщина жк слоя – 20мкм). б – варьирование шага периодичности доменов напряжением. Стрелка указывает место, где находился двигавшийся с правой стороны «лидер», когда напряжение было увеличено. Плоскости поляризаторов под 0(90) град. к линии $p - n$ перехода

Fig. 4. а – typical dependence of the periodicity step (d) of the location of domains in the 5СВ nematic on voltage (thickness of the LC layer is 20 μ m) б – variation of the step of domain periodicity by voltage. The arrow indicates the former location of the «leader» moving from the right side when the voltage has been increased. Polarizer planes under 0 (90) degrees to the $p - n$ junction line

При дальнейшем повышении напряжения на $p - n$ переходе вдоль его линии в полосе уже переориентированного нематика формируется доменная текстура. Картина появления линейно расположенных

доменов следующая. При соответствующем пороговом напряжении первоначально возникает локальное возмущение (далее «лидер») в однородно переориентированном нематике. «Лидер» начинает двигаться от места своего зарождения. Такими местами зарождения могут быть локальные неоднородности исходной ориентации нематика на поверхности подложки или изгибы (повороты) линии $p - n$ перехода. Скорость движения «лидера» зависит от напряжения приложенного к $p - n$ переходу, рис. 3. а. Домены непосредственно начинают формироваться последовательно друг за другом на некотором расстоянии L вслед за двигающимся «лидером» рис. 1. б. Расстояние L между «лидером» и первым формирующимся доменом тем больше, чем больше скорость движения «лидера». Типичная зависимость представлена на рис. 3. б. Когда «лидер» уже сформирован, скоростью его перемещения и направлением перемещения можно управлять напряжением. К примеру, его можно остановить и изменить направление его движения в обратную сторону при напряжениях ниже порогового. Отметим, что при обратном движении «лидера» к месту своего зарождения, домены будут соответственно поочередно исчезать перед двигающимся «лидером». Однако при ещё большем уменьшении напряжения домены исчезают уже одновременно вдоль всей линии $p - n$ перехода.

Периодичность расположения доменов (d) зависит от скорости перемещения «лидера» вдоль линии $p - n$ перехода, а именно, чем быстрее движется «лидер», тем меньший шаг доменной текстуры, рис. 4. а. Это позволяет варьировать шаг периодичности на любом выбранном участке линии $p - n$ перехода. Пример изменения периодичности доменов представлен на рис. 4. б.

Далее эксперименты проводились с открытыми ячейками. Отметим, что вышеописанные для закрытых ячеек преддоменная однородная переориентация нематика и доменная текстура, в ячейках с открытой поверхностью нематика происходят подобным образом. Принимая во внимание этот экспериментальный факт, следует считать некритичным фактор жесткости сцепления нематика на верхней поверхности (стекло для закрытой или воздух для открытой ячейки соответственно) на ход выше описанных ориентационных эффектов.

Рассмотрим влияние пара легкоиспаряющихся органических жидкостей на преддоменную однородную переориентацию нематика, а далее, на доменную текстуру. В работе исследовалось влияние пара диметилформамида (ДМ), изопропилового спирта и толуола.

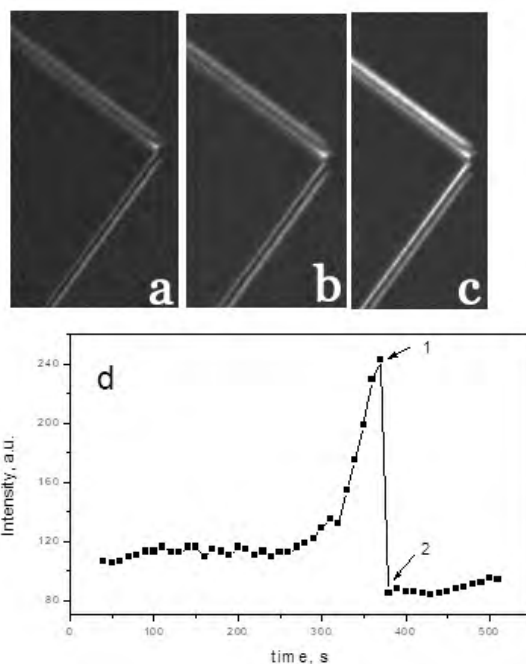


Рис. 5. Реакция переориентированного электрическим полем $p - n$ перехода слоя нематика 5CB с открытой поверхностью на пар ДМ. Время действия пара ДМ, сек: а – 0 (до действия пара), б – 300, с – 350, d – зависимость интенсивности света, отраженного от нематика в окрестности $p - n$ перехода, при действии пара ДМ с возрастающей концентрацией (стрелка 1 – переход в изотропное состояние). Плоскости поляризаторов под 45 град. к линии $p - n$ перехода. Стрелка 2 – возврат в жидкокристаллическое состояние. Напряжение 5 В, частота 50 кГц

Arrow 2 – return to the liquid crystal state. Voltage 5 V, frequency 50 kHz

Рис. 5 демонстрирует типичное проявление влияния пара ДМ с увеличивающейся концентрацией на переориентированный вдоль линии $p - n$ перехода нематик. Хорошо видно, рис. 5. а б с, что по

мере увеличения концентрации молекул ДМ в жк слое интенсивность отраженного света от нематика в окрестности $p - n$ перехода увеличивается, при этом выбор начального значения напряжения таков, что интерференционное окрашивание переориентированного нематика ещё не происходит. На рис. 5. d представлена зависимость интенсивности отраженного света от переориентированного нематика над n - поверхностью в окрестности $p - n$ перехода. Видно, что влияние пара ДМ начинает проявляться сравнительно задолго до фазового перехода в изотропное состояние (отмечен стрелкой 1). После удаления источника пара, и, соответственно, испарения определенного количества молекул ДМ из нематика, последний снова переходит в жидкокристаллическое состояние, причем начальная величина интенсивности отраженного света непосредственно после перехода (стрелка 2, рис. 5. d) меньше значений интенсивности отражения до действия пара ДМ. Продемонстрированную чувствительность области переориентированного нематика к инородным молекулам можно связать с изменением параметра порядка жидкого кристалла. При уменьшении параметра порядка эффективное влияние электрического поля, которое остается неизменным, на нематик будет уменьшаться при одновременном усилении вклада флуктуации в результирующее состояние ориентации молекул. Вышесказанное косвенно подтверждается характером распределения интенсивности отраженного света от переориентированного нематика при возрастании концентрации пара ДМ, рис. 6. Хорошо видно, что ширина темной полосы (впадина между n, p максимумами), которая характеризует эффективность влияния электрического поля на нематик, с увеличением времени действия пара ДМ уменьшается.

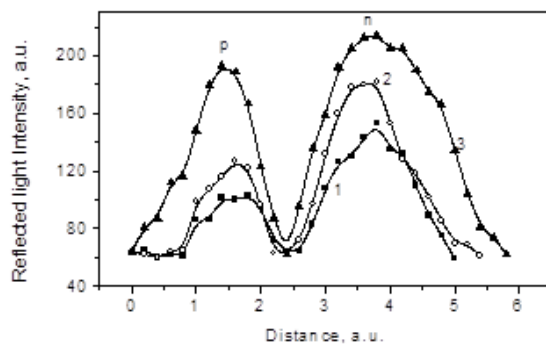


Рис. 6. Распределение интенсивности отраженного света от переориентированного нематика 5CB с открытой поверхностью поперёк линии $p - n$ перехода при действии пара ДМ. Длительность действия пара ДМ, сек: 1 – 0; 2 – 30; 3 – 60. n, p означают полосы переориентации нематика над соответствующими поверхностями $p - n$ перехода.

Плоскости поляризаторов под ~ 15 град. к линии $p - n$ перехода. Напряжение – 4В. Частота – 50 кГц
 Fig. 6. The intensity distribution of reflected light from a reoriented 5CB nematic layer with an open surface across the $p - n$ junction line under the action of a DM vapor. Duration of a DM vapor action, sec: 1 – 0; 2 – 30; 3 – 60. n, p means the nematic reorientation bands over the corresponding surfaces of the $p - n$ junction. Polarizer planes under ~ 15 degrees to the $p - n$ junction line. Voltage – 4V. Frequency – 50 kHz

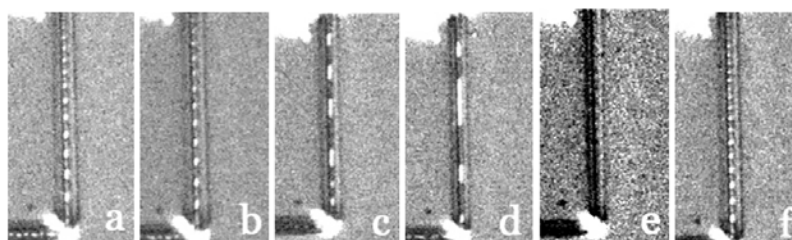


Рис. 7. Доменная текстура при возрастании концентрации пара ДМ. Время действия пара ДМ, сек.: a – 0, b – 50, c – 150, d – 300, e, f – доменная текстура после выхода жк из изотропного состояния. Ячейка с открытой поверхностью нематика 5CB. Напряжение – 6,5 В. Частота – 50 кГц. Плоскости поляризаторов под 0(90) град. к линии $p - n$ перехода

Fig. 7. Domain texture under increasing concentration of DM vapor. Duration of DM vapor, sec.: a – 0, b – 50, c – 150, d – 300, e, f – domain texture after an isotropic state. Cell with an open surface of the nematic 5CB. Voltage – 6.5 V. Frequency – 50 kHz. Polarizer planes under 0 (90) degrees to the $p - n$ junction line

Установлено влияние пара ДМ на периодичность в расположении доменов. Рис. 7. a, b, c, d демонстрирует ряд типичных изображений доменной текстуры в тонком слое нематика при увеличении концентрации ДМ (до перехода в изотропное состояние). На приведенных изображениях (на соответствующих участках, имеющих одинаковую толщину жк материала) видно увеличение шага периодичности в расположении доменов. После выхода из изотропного состояния наблюдается значительно уменьшенный

шаг периодичности доменов (рис. 7. е), который затем продолжает увеличиваться (рис. 7. ф) и в конечном итоге достигает исходного значения (рис. 7. а).

На рис. 8 представлены изображения доменов, сформированные в более толстом слое нематика ($\sim 50 - 60$ мкм) вдоль линии $p - n$ перехода при действии пара ДМ. В отличие от тонкого слоя, когда наблюдается периодичность доменов (рис. 7) только вдоль линии $p - n$ перехода, в «толстом» нематике в доменной текстуре дополнительно проявляется периодичность в отклонении от линии $p - n$ перехода. При этом в каждом отдельном домене, в свою очередь, наблюдаются определенные закономерности в распределении яркости отраженного света, связанные с соответствующим пространственным расположением директора.

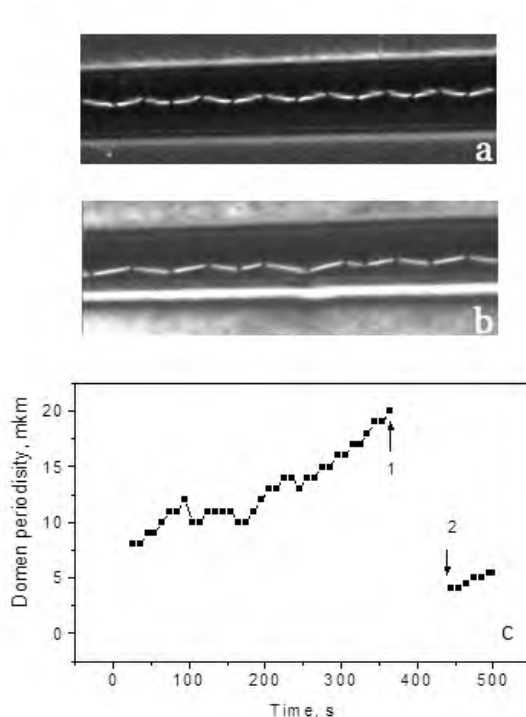


Рис. 8. Доменная текстура в «толстом» слое нематика при возрастании концентрации ДМ. а – исходная доменная текстура. б – время действия пара ДМ 200 секунд. в – зависимость шага расположения доменов от времени действия пара ДМ. Ячейка с открытой поверхностью нематика 5СВ. Напряжение – 6,5 В. Частота – 50 кГц.

Плоскости поляризаторов под $0(90)$ град. к линии $p - n$ перехода

Fig. 8. Domain texture in a thick nematic layer under increasing concentration of DM. а – original domain texture. б – the duration of DM vapor action is 200 seconds. в – dependence of the step of the arrangement of domains on the time of DM vapor action. Cell with an open surface of the nematic 5СВ. Voltage – 6.5 V. Frequency – 50 kHz. Polarizer planes under $0(90)$ degrees to the $p - n$ junction line

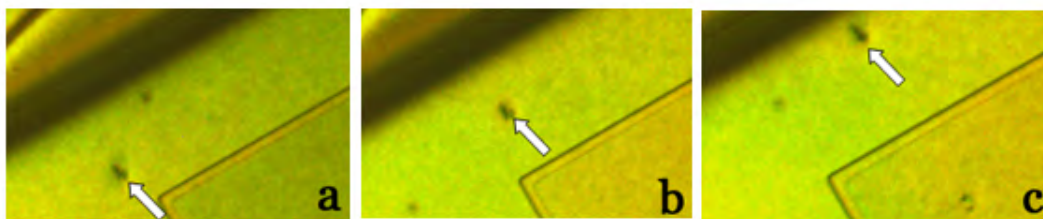


Рис. 9. Перемещение пылинки с поверхностью нематика в области вне действия поля $p - n$ перехода при градиентном влиянии пара изопропилового спирта. Ячейка с открытой поверхностью нематика 5СВ

Fig. 9. The movement of a speck of dust with a nematic surface in an area outside the action of the $p - n$ junction field under the gradient influence of isopropyl alcohol vapor. Cell with an open surface of the nematic 5СВ

По мере увеличения концентрации ДМ до перехода в изотропное состояние (отмечено стрелкой 1) шаг расположения доменов увеличивается, что отображено на рис. 8. в. После выхода из изотропного состояния (стрелка 2), начальный шаг в расположении доменов, как и в случае тонкого слоя жк (рис. 7. е), начинается с меньшей величины. Малый шаг периодичности расположения доменов после выхода из изотропного состояния связан с повышенной скоростью движения «лидера», которая в свою

очередь объясняется низкими значениями вязко-упругих параметров нематика сразу после выхода из изотропного состояния.

Ряд экспериментальных результатов указывают на возможный вклад фактора поверхностного натяжения нематика в общий механизм влияния пара реагента на ориентационное поведение директора. В условиях выделенного направления потока пара реагента с возрастающей интенсивностью можно допустить неоднородную по поверхности величину поверхностного натяжения нематика. В этом случае «стягивание» поверхности нематика в сторону, противоположную от источника пара, может проявиться по (1) перемещению микропылинок, (2) эффекту ориентации директора в потоке жк материала, а также (3) пространственному сдвигу структурных распределений директора. Все три отмеченные выше явления наблюдаются в экспериментах при использовании пара изопропилового спирта и толуола. Отметим, что для пара ДМ подобные проявления не столь явные.

Рис. 9 демонстрирует перемещение микропылинок вместе с поверхностью нематика при направленном потоке пара изопропилового спирта. Направление движения микропылинок и направление от источника пара совпадают. На этом же рисунке 9 демонстрируется практически однородная ориентация нематика, которая формируется в результате перехода из гомеотропного состояния ориентации в потоке жк вызванного стягиванием поверхности. Эффект наблюдается на большой площади поверхности нематика, где влияние электрического поля p - n перехода заведомо отсутствует. Доменная текстура (рис. 8. а) представляет собой пример определенного фиксированного в пространстве распределения директора с входом на поверхность жидкого кристалла. Рис. 10. а б демонстрирует эффект сдвига линейно расположенных доменов в сторону противоположную от источника пара (реагент – толуол).

Рисунок 10 (также как и рис. 9) демонстрирует ориентационный переход нематика из гомеотропного (темные области вне действия поля p – n перехода, рис. 10. а) в наклонное состояние (рис. 10. б) за счет ориентации директора в потоке, причем однородность интерференционного цвета по всей отмеченной области поверхности (рис. 10. б) подтверждает однородность ориентации директора (в потоке). После удаления источника пара движение пылинок меняется на обратное, а домены возвращаются в область линии p – n перехода.

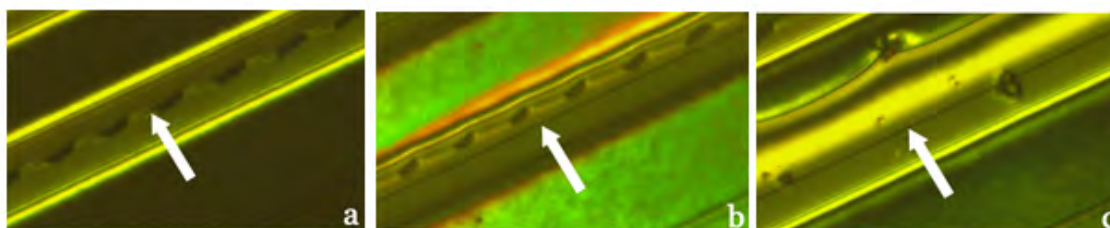


Рис. 10. а – доменная текстура до действия пара реагента. б – сдвиг доменов от линии p - n перехода при действии пара толуола. в – разрушение доменов перед фазовым переходом в изотропное состояние. Стрелка указывает на линию p – n перехода. Ячейка с открытой поверхностью нематика 5СВ. Напряжение – 6 В. Частота – 50 кГц.

Плоскости поляризаторов под 15 град. к линии p – n перехода

Fig. 10. а – domain texture prior to the action of the reagent vapor. б – domain shift from the p – n junction line under the action of toluene vapor. в – destruction of domains before the phase transition into an isotropic state. The arrow points to the p – n junction line. Cell with an open surface of the nematic 5СВ. Voltage – 6 V. Frequency – 50 kHz. Polarizer planes under 15 degrees to the p – n junction line

Заключение. Таким образом, в работе экспериментально продемонстрировано, что такие электрооптические эффекты, как преддоменная переориентация нематика и доменная текстура, имеющие место в электрическом поле p – n перехода, демонстрируют чувствительность к парам легкоиспаряющихся жидкостей, таких как диметилформамид, толуол, изопропиловый спирт. Для преддоменной однородной переориентации нематика в поле p – n перехода характерно увеличение интенсивности отраженного света, при этом выбором начального значения напряжения появление интерференционных цветов может быть исключено. Последнее позволяет упростить процедуру формирования выходного сигнала в прототипе сенсора. Доменная текстура, которая формируется вслед за преддоменной переориентацией нематика при увеличении напряжения, также демонстрирует чувствительность к пару реагентов. Чувствительность проявляется в увеличении шага периодичности доменов с ростом концентрации реагента в жк материале. Рассматривая доменную текстуру в роли дифракционной решетки, появляется потенциальная возможность регистрировать наличие пара реагента дифракционными методами. Для пара изопропилового спирта и толуола установлено существенно более сильное проявление влияния поверхностного натяжения, изменение которого в плоскости поверхности нематика вызывает ориентацию директора в потоке и смещение линейно расположенных доменов от линии p – n перехода.

Список литературы

1. Алексеева А. А., Богданов С. И., Кучеев С. И., Рыжикова Е. Ю. 2018. Переориентация нематика электрическим полем n перехода. Научные ведомости БелГУ, Сер. Математика. Физика, 50(4): 452–459.
2. Богданов С. И., Гудкова В. А., Колесников Д. А., Кучеев С. И., Плесканёв А. А. 2017. Дифракционная решетка, индуцированная электрическим полем $p-n$ переходов в нематической ячейке. Научные ведомости БелГУ, Сер. Математика. Физика, 27 (276), 49: 75–84.
3. Валетова Е. А., Колесников Д. А., Кучеев С. И. 2017. Адсорбция и переориентация нематика на наноразмерной углеродной плёнке, индуцированная парами органических растворителей. Научные ведомости БелГУ, Сер. Математика. Физика, 50(1): 64–72.
4. Blinov L. M., Chigrinov V. G. 1993. Electrooptic Effects in Liquid Crystal Materials. Springer New York, 464.
5. Chang C. K., Kuo H. L., Tang K. T. and Chiu S. W. 2011. Optical detection of organic vapors using cholesteric liquid crystals. Appl. Phys. Lett., 99: 073504(3pp).
6. Chang C. K., Kuo H. L. 2014. Liquid crystal gas sensor cell and the use thereof. Patent application number: 20140004004, Publication date: 2014-01-02.
7. Kek K. J., Lee J. J. Z. 2017. Chemical gas sensors using chiral nematic liquid crystals and its applications. Journal of the Society for Information Display, 25(6): 366–373.
8. Niu X., Zhong Y., Chen R., Wang F and Luo D. 2017. Highly sensitive and selective liquid crystal optical sensor for detection of ammonia . OPTICS EXPRESS , 25(12): 13549–13556.
9. Popov N., Honaker L. W., Popova M., Usol'tseva N., Mann E. K., Jáklí A. and Popov P. 2018. Thermotropic liquid crystal-assisted chemical and biological sensors. Materials, 11(1): 1–20.
<https://doi.org/10.3390/ma11010020>
10. Shibaev P. V., Wenzlick M., Murray J., Tantillo A. and Howard-Jennings J. 2015. Rebirth of Liquid Crystals for Sensoric Applications: Environmental and Gas Sensors Advances in Condensed Matter Physics, Volume 2015, Article ID 729186 (8 pp). <http://dx.doi.org/10.1155/2015/729186>
11. Zou Y., Namkung J., Lin Y., Ke D. and Lindquist R. G. 2011. Influence of a bias voltage on surface-driven orientational transitions for liquid crystal-based chemical and biological sensors. J. Phys. D: Appl. Phys. 44: 135103 (7pp).
12. Zou Y., Namkung J., Lin Y., Ke D. and Lindquist R. G. 2016. Interference colors of nematic liquid crystal films at different applied voltages and surface anchoring conditions. OPTICS EXPRESS , 19(4): 3297–3303.

References

1. Alekseeva A. A., Bogdanov S. I., Kucheev S. I., Rizhikova E. Yu. 2018. Pereorientaziya nematica elektricheskim polem n perehoda [Reorientation of nematic with electric field of n junction]. Belgorod State University Scientific Bulletin, Mathematics & Physics, 50(4): 452–459.
2. Bogdanov S. I., Gudkova V. A., Kolesnikov D. A., Kucheev S. I., Pleskanev A. A. 2017. Difrakzionnaya reshotka induzirovannaya elektricheskim polem $p-n$ perehodov v nematicheskoi yacheike [Diffraction grating induced with electric field of $p-n$ junctions in nematic cell]. Belgorod State University Scientific Bulletin, Mathematics & Physics, 27 (276), 49: 75–84.
3. Valetova E. A., Kolesnikov D. A., Kucheev S. I. 2017. Adsorbziya i pereorientaziya nematica na nanorazmernoi uglevodnoi plenke, induzirovannaya parami organicheskikh rastvoriltelei [Adsorption and reorientation of nematic on nano-dimensional carbon film induced by vapor of organic solvents]. Belgorod State University Scientific Bulletin, Mathematics & Physics, 50(1): 64–72.
4. Blinov L. M., Chigrinov V. G. 1993. Electrooptic Effects in Liquid Crystal Materials. Springer New York, 464.
5. Chang C. K., Kuo H. L., Tang K. T. and Chiu S. W. 2011. Optical detection of organic vapors using cholesteric liquid crystals. Appl. Phys. Lett., 99: 073504(3pp).

6. Chang C. K., Kuo H. L. 2014. Liquid crystal gas sensor cell and the use thereof. Patent application number: 20140004004, Publication date: 2014-01-02.
7. Kek K. J., Lee J. J. Z. 2017. Chemical gas sensors using chiral nematic liquid crystals and its applications. *Journal of the Society for Information Display*, 25(6): 366–373.
8. Niu X., Zhong Y., Chen R., Wang F and Luo D. 2017. Highly sensitive and selective liquid crystal optical sensor for detection of ammonia . *OPTICS EXPRESS* , 25(12): 13549–13556.
9. Popov N., Honaker L. W., Popova M., Usol'tseva N., Mann E. K., Jáklí A. and Popov P. 2018. Thermotropic liquid crystal-assisted chemical and biological sensors. *Materials*, 11(1): 1–20.
<https://doi.org/10.3390/ma11010020>
10. Shibaev P. V., Wenzlick M., Murray J., Tantillo A. and Howard-Jennings J. 2015. Rebirth of Liquid Crystals for Sensoric Applications: Environmental and Gas Sensors *Advances in Condensed Matter Physics*, Volume 2015, Article ID 729186 (8 pp). <http://dx.doi.org/10.1155/2015/729186>
11. Zou Y., Namkung J., Lin Y., Ke D. and Lindquist R. G. 2011. Influence of a bias voltage on surface-driven orientational transitions for liquid crystal-based chemical and biological sensors. *J. Phys. D: Appl. Phys.* 44: 135103 (7pp).
12. Zou Y., Namkung J., Lin Y., Ke D. and Lindquist R. G. 2016. Interference colors of nematic liquid crystal films at different applied voltages and surface anchoring conditions. *OPTICS EXPRESS* , 19(4): 3297–3303.

Получена 11.09.2020

Бердниченко Артем В. – аспирант Белгородского государственного национального исследовательского университета

ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия

E-mail: 946360@bsu.edu.ru

Кучеев Сергей Иванович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической и экспериментальной физики Белгородского государственного национального исследовательского университета

 http://orcid.org/ORCID_0000-0002-1623-2063

ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия

E-mail: kucheev@bsu.edu.ru

**ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ И ОПТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ТОНКИХ ПЛЕНОК $(\text{Cd}_{1-x-y}\text{Zn}_x\text{Mn}_y)_3\text{As}_2$
($x + y = 0.4$; $y = 0.04$), ПОЛУЧЕННЫХ МАГНЕТРОННЫМ РАСПЫЛЕНИЕМ**

В. С. Захвалинский, Е. А. Пилюк, Т. Б. Никуличева, Н. О. Исаева, А. В. Неженцев

Белгородский государственный национальный исследовательский университет,
г. Белгород, 308015, Россия

E-mail: pilyuk@bsu.edu.ru

Аннотация. В работе исследуются высококачественные тонкие пленки $(\text{Cd}_{1-x-y}\text{Zn}_x\text{Mn}_y)_3\text{As}_2$ ($x + y = 0.4$; $y = 0.04$), полученные напылением на непогреваемую кремниевую подложку ($T = 20^\circ\text{C}$). Измерена зависимость электропроводности от температуры в интервале от 10 К до 320 К. В области гелиевых температур определен диапазон реализации механизма прыжковой проводимости с переменной длиной прыжка по Шкловскому – Эфросу. В плотности локализованных состояний вычислены радиус локализации носителей заряда, ширина кулоновской и жесткой щелей. Определены энергия оптической щели и ширина состояний хвоста валентной зоны.

Ключевые слова: топологический изолятор, дираковский полуметалл, CZMA, тонкие пленки, прыжковая проводимость.

Благодарности: Работа выполнена при поддержке гранта Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских ученых – кандидатов наук, проект № МК-238.2020.2.

Для цитирования: Захвалинский В. С., Пилюк Е. А., Никуличева Т. Б., Исаева Н. О., Неженцев А. В. 2020. Электрические и оптические свойства тонких пленок $(\text{Cd}_{1-x-y}\text{Zn}_x\text{Mn}_y)_3\text{As}_2$ ($x + y = 0.4$; $y = 0.04$), полученных магнетронным распылением. Прикладная математика & Физика. 52(3): 224–233. DOI 10.18413/2687-0959-2020-52-3-224-233

**ELECTRICAL AND OPTICAL PROPERTIES OF THIN FILMS $(\text{Cd}_{1-x-y}\text{Zn}_x\text{Mn}_y)_3\text{As}_2$
($x + y = 0.4$; $y = 0.04$) PREPARED BY MAGNETRON SPUTTERING**

V. S. Zakhvalinskii, E. A. Pilyuk, T. B. Nikulicheva, N. O. Isaeva, A. V. Nejenцев

Belgorod National Research University,
Belgorod, 308015, Russia

E-mail: pilyuk@bsu.edu.ru

Received September 12, 2020

Abstract. The work investigates high-quality thin films $(\text{Cd}_{1-x-y}\text{Zn}_x\text{Mn}_y)_3\text{As}_2$ ($x + y = 0.4$; $y = 0.04$), obtained by sputtering on an unheated silicon substrate ($T = 20^\circ\text{C}$). The temperature dependence of the electrical conductivity was measured in the range from 10 K to 320 K. In the region of helium temperatures, the range of realization of the mechanism of hopping conductivity with variable long hopping according to Shklovsky-Efros was determined. The localization radius of charge carriers and the width of the Coulomb and hard gaps are calculated in the density of localized states. The energy of the optical gap and the width of states of the tail of the valence band are determined.

Key words: topological insulator, Dirac semimetal, CZMA, thin films, hopping conductivity.

Acknowledgements: The work is supported by a grant from the President of the Russian Federation for state support of young Russian scientists – candidates of sciences, project No. MK-238.2020.2.

For citation: Zakhvalinskii V. S., Pilyuk E. A., Nikulicheva T. B., Isaeva N. O., Nejenцев A. V. 2020. Electrical and optical properties of thin films $(\text{Cd}_{1-x-y}\text{Zn}_x\text{Mn}_y)_3\text{As}_2$ ($x + y = 0.4$; $y = 0.04$) prepared by magnetron sputtering. Applied Mathematics & Physics. 52(3): 224–233 (in Russian). DOI 10.18413/2687-0959-2020-52-3-224-233

1. Введение. Арсенид кадмия (Cd_3As_2), исследования которого начаты в 1930-е годы [20], в последнее время снова привлек значительное внимание [4, 7, 21, 6, 19]. Это связано с экспериментальным наблюдением фазы объёмного (3D) дираковского полуметалла (ДПМ) с применением фотоэмиссии с угловым разрешением (ARPES) [19, 5], предсказанного теоретически [23]. Сверхвысокая подвижность носителей заряда $9 \cdot 10^6 \text{ cm}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1}$ [15], большой коэффициент термоэдс [25] и устойчивость к поверхностному окислению [10] позволяют использовать Cd_3As_2 в оптоэлектронных устройствах [24, 18]. Кроме того, арсенид кадмия обладает очень сильным линейным магнетосопротивлением, аномальным эффектом Нернста [16], квантовым эффектом Холла [22] и киральной аномалией [14].

Твердые растворы $(\text{Cd}_{1-x-y}\text{Zn}_x\text{Mn}_y)_3\text{As}_2$ (CZMA) привлекают внимание исследователей из-за возможности контролировать ширину запрещенной зоны за счет изменения концентрации Zn. Легирование цинком может поднять инверсию зон в Cd_3As_2 , что приведет к переходу от топологического ДПМ к

полупроводнику [14]. О сохранении топологических свойств в твёрдых растворах арсенида кадмия говорят и результаты наблюдения фазы Берри в кристаллах твёрдых растворов $(\text{Cd}_{1-x-y}\text{Zn}_x\text{Mn}_y)_3\text{As}_2$ [26]. Пленки Cd_3As_2 и твердых растворов на его основе могут иметь аморфную, поликристаллическую и монокристаллическую структуру [11, 9, 8]. Свойства полученных пленок сильно зависят от типа подложки и условий их получения, таких как скорость напыления и температура подложки.

Настоящая работа посвящена исследованию тонких пленок $(\text{Cd}_{1-x-y}\text{Zn}_x\text{Mn}_y)_3\text{As}_2$ ($x + y = 0.4$; $y = 0.04$), полученных напылением на непогреваемую кремниевую подложку, исследованию механизма проводимости и спектра оптического поглощения.

2. Методы. Тонкие пленки твёрдых растворов $(\text{Cd}_{1-x-y}\text{Zn}_x\text{Mn}_y)_3\text{As}_2$ ($x + y = 0.4$; $y = 0.04$) получали методом высокочастотного магнетронного распыления на установке вакуумного напыления ВН-2000. Мишень была изготовлена из предварительно синтезированных небольших монокристаллов $(\text{Cd}_{0.6}\text{Zn}_{0.36}\text{Mn}_{0.04})_3\text{As}_2$. Синтез CZMA осуществлялся из стехиометрических количеств Cd_3As_2 , Zn_3As_2 и Mn_3As_2 . Бинары получали прямым сплавлением в вакууме из чистых (99,999%) Cd, Zn, Mn и As в графитизированных кварцевых ампулах. Cd_3As_2 и Zn_3As_2 были подвергнуты перегонке в паровой фазе для дополнительной очистки и выравнивания стехиометрии. Монокристаллы CZMA получали методом Бриджмена в вертикальной печи в присутствии градиента температуры $\Delta T \sim 1^\circ\text{C}/\text{см}$ и скоростью охлаждения вблизи точки плавления $2^\circ\text{C}/\text{час}$.

Напыление тонких пленок CZMA осуществлялось на непогреваемую подложку ($T = 20^\circ\text{C}$) в атмосфере аргона при давлении $8 \cdot 10^{-1}$ Па. Расстояние до подложки составляло 50 мм при подаваемой мощности 10 Вт. В качестве подложки была использована монокристаллическая пластина кремния марки КДБ-2 (100), покрытая термически выращенным SiO_2 , и стекло. Толщина пленок определялась временем напыления и составляла 50 нм.

Рентгенофазовый анализ (РФА) материала мишени и полученных пленок выполнялся с использованием рентгеновского дифрактометра Rigaku SmartLab (излучение CuK_α) при комнатной температуре.

Измерения электрофизических свойств тонких пленок CZMA проводили по стандартной шеститочечной схеме на установке на основе гелиевого криостата Janis CCS-350S в диапазоне температур 10-320 К и магнитных полях до 1 Тл. Для изготовления контактных площадок был использован индий, полученный магнетронным распылением. Крепление медных проводов к контактным площадкам осуществлялось также с помощью индия.

3. Результаты и обсуждение. По результатам рентгеновской дифракции кристаллы $(\text{Cd}_{0.6}\text{Zn}_{0.36}\text{Mn}_{0.04})_3\text{As}_2$ имели тетрагональную сингонию, пространственная группа $P4_2/nmc$, $a = b = 8.61(4)$ Å, $c = 12.25(7)$ Å. Дифрактограмма тонких пленок CZMA была типичной для аморфных материалов.

Концентрация и подвижность электронов, вычисленные из результатов измерений постоянной Холла, составили $3.2 \cdot 10^{21} \text{ см}^{-3}$ и $4.4 \cdot 10^2 \text{ см}^2\text{В}^{-1}\text{с}^{-1}$ при 10 К, соответственно. На рисунке 1 представлена температурная зависимость удельного сопротивления тонкой пленки $(\text{Cd}_{0.6}\text{Zn}_{0.36}\text{Mn}_{0.04})_3\text{As}_2$, нанесенной на холодную кремниевую подложку, в отсутствие магнитного поля.

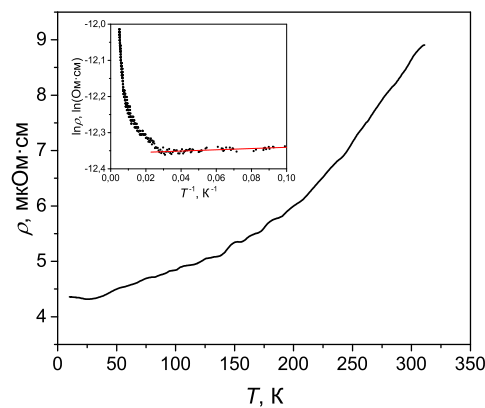


Рис. 1. Температурная зависимость удельного сопротивления тонкой пленки $(\text{Cd}_{0.6}\text{Zn}_{0.36}\text{Mn}_{0.04})_3\text{As}_2$, нанесенной на кремниевую подложку

Fig. 1. Temperature dependence of the resistivity of a thin film $(\text{Cd}_{0.6}\text{Zn}_{0.36}\text{Mn}_{0.04})_3\text{As}_2$ deposited on a silicon substrate

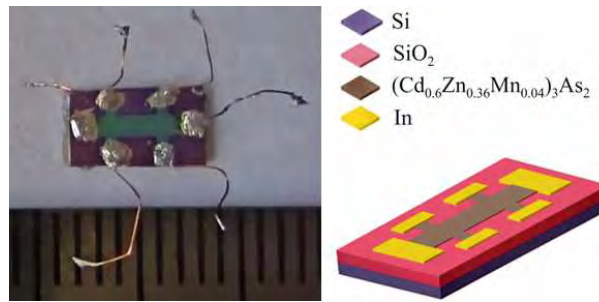


Рис. 2. Фотография и принципиальная схема стандартного шестизондового образца $(\text{Cd}_{0.6}\text{Zn}_{0.36}\text{Mn}_{0.04})_3\text{As}_2$, нанесенного на кремниевую подложку

Fig. 2. Photo and schematic diagram of a standard six-probe sample $(\text{Cd}_{0.6}\text{Zn}_{0.36}\text{Mn}_{0.04})_3\text{As}_2$ deposited on a silicon substrate

Из рисунка 1 видно, что значения $\rho(T)$ уменьшаются ниже 320 К до минимума при 25 К, за которым следует плавное увеличение ρ с дальнейшим уменьшением температуры. Аналогичное поведение наблюдается и для кристаллов [1, 2, 3]. При комнатной температуре (300 К) удельное сопротивление образцов составляет 9 мкОм·см, что ниже, чем в объемных образцах того же состава [2].

Как видно из вставки к рисунку 1, наклон графика $\ln \rho$ от T^{-1} показывает интервал активационного поведения между 10 и 35 К, что указывает на прыжковую проводимость по состояниям примесной зоны [3]. В случае прыжковой проводимости зависимость удельного сопротивления от температуры выражается как

$$\rho(T) = DT^m \exp\left(\frac{T_0}{T}\right)^p, \quad (1)$$

где D – постоянный коэффициент, T_0 – характеристическая температура, параметры m и p зависят от механизма прыжковой проводимости [13].

В зависимости от типа проводимости T_0 равняется $T_{0SE} = \frac{\beta_{SE}e^2}{\kappa k_B a}$ ($p = 1/2$) и $T_{0M} = \frac{\beta_M}{k_B g(\mu) a^3}$ ($p = 1/4$) в случае прыжковой проводимости с переменной длиной прыжка (ППДП) типа Шкловского – Эфроса (ШЭ) и ПППДП типа Мотта, соответственно. Здесь $\beta_{SE} = 2.8$, $\beta_M = 21$, κ – диэлектрическая проницаемость среды, $g(\mu)$ – плотность локализованных состояний (ПЛС) вблизи уровня Ферми μ .

Независимое определение параметров p и m возможно, если переписать уравнение (1) в виде

$$\ln\left(\frac{E_a}{k_B T} + m\right) = \ln p + p \ln T_0 + p \ln \frac{1}{T},$$

где E_a определяется, как локальная энергия активации:

$$E_a = \frac{d \ln \rho(T)}{d\left(\frac{1}{k_B T}\right)}.$$

При заданном значении m функция $\ln\left(\frac{E_a}{k_B T} + m\right)$ от $\ln\left(\frac{1}{T}\right)$ имеет линейную зависимость и значение параметра p определяется, как угол наклона этой прямой (рис. 3)

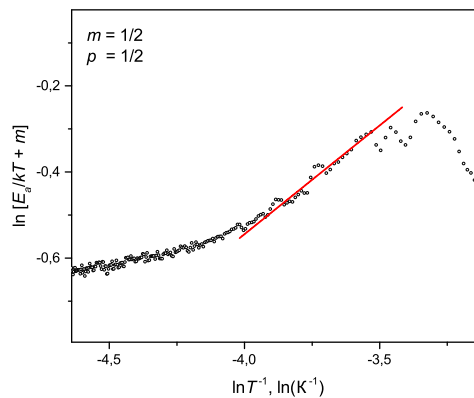


Рис. 3. Зависимость $\ln\left(\frac{E_a}{k_B T} + m\right)$ от $\ln\left(\frac{1}{T}\right)$ образца тонкой пленки $(\text{Cd}_{0.6}\text{Zn}_{0.36}\text{Mn}_{0.04})_3\text{As}_2$

Fig. 3. Dependence of $\ln\left(\frac{E_a}{k_B T} + m\right)$ on $\ln\left(\frac{1}{T}\right)$ of a thin film sample $(\text{Cd}_{0.6}\text{Zn}_{0.36}\text{Mn}_{0.04})_3\text{As}_2$

Таблица 1: Радиус локализации (a), диэлектрическая проницаемость (κ), ширина мягкой параболической щели (Δ), плотность локализованных состояний (g_0), ширина жесткой кулоновской щели (δ), постоянный коэффициент (D), характеристическая температура (T_{0SE}) и температура начала прыжковой проводимости (T_v) для образца тонкой пленки $(\text{Cd}_{0.6}\text{Zn}_{0.36}\text{Mn}_{0.04})_3\text{As}_2$.

Table 1. Localization radius (a), the dielectric constant (κ), soft parabolic slit width (Δ), density of localized states (g_0), hard Coulomb gap width (δ), constant coefficient (D), characteristic temperature (T_{0SE}) and the temperature of the onset of hopping conduction (T_v) for thin film sample $(\text{Cd}_{0.6}\text{Zn}_{0.36}\text{Mn}_{0.04})_3\text{As}_2$.

(a) Å	(κ)	(Δ) (мэВ)	(g_0) ($\text{см}^{-3} \cdot \text{мэВ}^{-1}$)	(δ) (мэВ)	(D) ($\text{Ом} \cdot \text{см} \cdot \text{К}^{-1/2}$)	(T_{0SE}) (К)	(T_v) (К)
18.6	904	1.9	$8.6 \cdot 10^{23}$	$0.68 \cdot 10^{-3}$	$2.99 \cdot 10^{-7}$	27.8	69.5

Параметры D и T_0 можно определить из графика на рис. 4, как коэффициенты в уравнении прямой, где угол наклона равен $T_0^{1/2}$, а $\ln D$ – точка пересечения с осью ординат. Определить ширину мягкой параболической щели Δ можно, зная характеристическую температуру T_{0SE} и температуру начала прыжковой проводимости T_v со стороны высоких температур:

$$\Delta \approx 0.5k_B\sqrt{T_{0SE}T_v}.$$

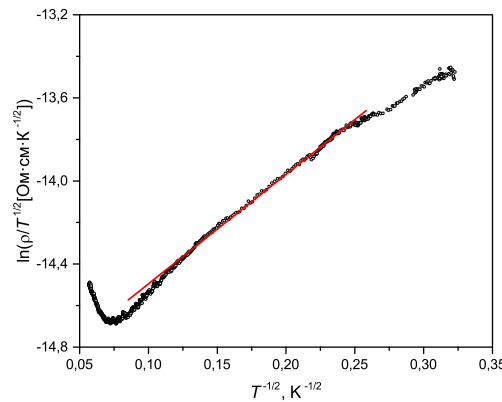


Рис. 4. Зависимость $\ln(\rho/T^{1/2})$ от $T^{-1/2}$ для образца тонкой пленки $(\text{Cd}_{0.6}\text{Zn}_{0.36}\text{Mn}_{0.04})_3\text{As}_2$

Fig. 4. Dependence of $\ln(\rho/T^{1/2})$ on $T^{-1/2}$ for a thin film sample $(\text{Cd}_{0.6}\text{Zn}_{0.36}\text{Mn}_{0.04})_3\text{As}_2$

Диэлектрическая проницаемость среды κ определяется из выражения $\Delta \approx U$, где энергия кулоновского отталкивания между дырками, находящимися на среднем расстоянии $R_h = 2(\frac{4\pi\rho_{77}}{3})^{-1/3}$, записывается как $U = \frac{e^2}{\kappa R_h}$. Для данного образца R_h составило 8.4 Å, диэлектрическая проницаемость среды κ имеет значение 904. ПЛС вне кулоновской щели g_0 при ПППДП типа ШЭ может быть определена из выражения:

$$g_0 = \frac{3\kappa^3(\Delta - \delta)^2}{\pi e^6}.$$

Ширину жесткой щели δ можно определить из выражения:

$$T_0 = \left(\frac{\delta}{2k_B\sqrt{T}} + \sqrt{\frac{\delta^2}{4k_B^2T} + T_{0SE}} \right)^2.$$

Средняя длина прыжка при понижении температуры растет пропорционально $T^{-1/4}$ (рис. 5) и может быть определена из следующего выражения:

$$\bar{r} \approx (g(\mu)\varepsilon_0(T))^{-1/3} \approx \left(\frac{T_0}{T} \right)^{1/4}.$$

Значения макроскопических и микроскопических параметров представлены в таблице 1.

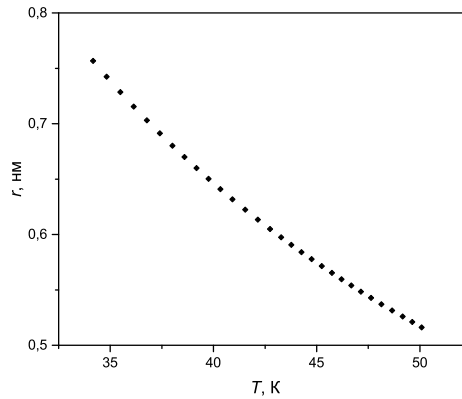


Рис. 5. Зависимость средней длины прыжка от температуры
 Fig. 5. Temperature dependence of the average jump length

Спектры пропускания были получены с образцов пленок $(\text{Cd}_{0.6}\text{Zn}_{0.36}\text{Mn}_{0.04})_3\text{As}_2$ на стекле в интервале 200–1000 нм на спектрофотометре СФ-2000 (рисунок 6).

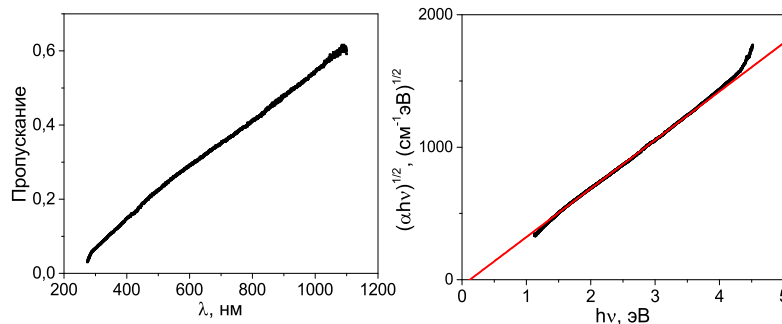


Рис. 6. Спектральная характеристика коэффициента пропускания и зависимость $(\alpha\hbar\omega)^{1/2}$ от $\hbar\omega$
 Fig. 6. Spectral characteristic of the transmittance and dependence of $(\alpha\hbar\omega)^{1/2}$ on $\hbar\omega$

В кристаллических полупроводниках существует четко определенная энергетическая щель между валентной зоной и зоной проводимости. В аморфных же полупроводниках распределение электронных состояний зоны проводимости и валентной зоны не обрывается резко на краях зоны, а появляются протяженные хвосты. Локализованные хвостовые состояния в аморфных полупроводниках обусловлены дефектами: разорванные и оборванные связи, пустоты, поры, трещины и другие макроскопические дефекты. Эти локализованные хвостовые состояния и глубокие дефектные состояния ответственны за многие уникальные свойства аморфных полупроводников. Существование хвостовых состояний в аморфных твердых телах оказывает глубокое влияние на межзонное оптическое поглощение. В отличие от кристаллических тел, поглощение фотонов в собственном аморфном твердом теле может также происходить при энергиях фотонов $\hbar\omega \leq E_0$ из-за наличия хвостовых состояний в запрещенной зоне, где E_0 – энергия оптической щели, которая обычно близка к щели подвижности – разности энергий между зоной проводимости и краями подвижности валентной зоны. При расчете коэффициента поглощения необходимо учитывать произведение плотностей состояний проводимости и валентных электронов [12]. Предполагая, что функции плотности состояний валентной зоны и зоны проводимости зависят от энергии как квадратный корень, можно получить коэффициент поглощения как [12]:

$$(\alpha\hbar\omega)^{1/2} = B^{1/2}(\hbar\omega - E_0), \tag{2}$$

$$B = \frac{1}{nc\epsilon_0} \left(\frac{e}{m_e^*} \right)^2 \left(\frac{L(m_e^*m_h^*)^{3/2}}{4\hbar^3} \right),$$

где α – коэффициент поглощения, B – постоянная Тауца, которая пропорциональна плотности состояний на краю поглощения аморфного полупроводника, m_e^* и m_h^* – эффективные массы электрона и дырки соответственно, L – среднее межатомное расстояние в образце, а n – показатель преломления. Построение графика $(\alpha\hbar\omega)^{1/2}$ как функции $\hbar\omega$ дает прямую линию, которую обычно называют графиком Тауца (рис. 6), по которой можно экспериментально определить энергию оптической щели E_0 . Коэффициент поглощения зависит от энергии фотона экспоненциально:

$$\alpha = \alpha_0 \exp\left(\frac{h\nu - E_0}{\Delta E}\right),$$

что приводит к образованию хвоста Урбаха, который возникает из-за структурного беспорядка [12]. Таким образом, оптическое поглощение в аморфных полупроводниках вблизи края поглощения обычно характеризуется тремя типами оптических переходов: первые два типа соответствуют $h\nu \leq E_0$, а третий соответствует $h\nu \geq E_0$. График зависимости коэффициента поглощения α от энергии фотона $h\nu$ имеет три различных области, А, В и С соответственно, которые соответствуют этим трем характерным оптическим переходам (рисунок 7).

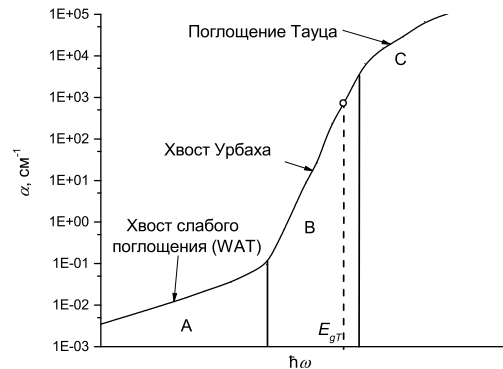


Рис. 7. Типичная спектральная зависимость коэффициента оптического поглощения в аморфных полупроводниках

Fig. 7. Typical spectral dependence of the optical absorption coefficient in amorphous semiconductors

В диапазоне малых коэффициентов поглощения А (также называемом хвостом слабого поглощения (WAT), где $\alpha < 10^{-1} \text{ см}^{-1}$, поглощение контролируется оптическими переходами из состояний хвоста в хвост. В аморфных полупроводниках в локализованный хвост вносят вклад дефекты. В некоторой степени, абсолютное значение поглощения в области А можно использовать для оценки плотности дефектов в материале. В области В, где обычно $10^{-1} < \alpha < 10^4 \text{ см}^{-1}$, поглощение связано с переходами из состояний локализованного хвоста над краем валентной зоны в расширенные состояния в зоне проводимости и/или из расширенных состояний в валентной зоне в состояния локализованного хвоста ниже зоны проводимости. Для многих аморфных полупроводников ΔE связано с шириной состояний хвоста валентной зоны (или зоны проводимости) и может использоваться для сравнения ширины локализованных состояний хвоста в материале. ΔE обычно составляет 0.05 – 0.1 эВ.

Практически во всех аморфных полупроводниках наблюдается экспоненциальная область В. Эту область (между 1.4 и 1.8 эВ) называют «хвостом Урбаха». Для ее описания было предложено несколько механизмов, таких как вариации ширины щели, обусловленные флуктуациями плотности, расширение края зоны или наличие экситонных состояний, индуцированных внутренними электрическими полями. Причиной появления хвоста также могут быть электронные переходы между локализованными состояниями в хвостах краев зон, причем предполагается, что плотность таких состояний экспоненциально спадает с энергией.

В области С поглощение контролируется переходами из протяженного состояния в протяженное. Область С – это хвост поглощения ниже 1.4 эВ, приписываемый оптическому возбуждению из дефектных состояний, находящихся глубоко в щели подвижности. Характер области С может быть связан с внутренними переходами и с плотностью состояний. Процедура определения плотности состояний заключается в измерении избыточного поглощения по сравнению с хвостом Урбаха. По интегральному избыточному поглощению области С можно определить количество дефектов (концентрацию). Край поглощения аморфных полупроводников не зависит от температуры в области низких температур, а при более высоких температурах он становится более размазанным. Величина E_{gT} соответствует тому значению энергии, при котором зависимость от $h\nu$ перестает быть линейной функцией.

Основным параметром, характеризующим оптические свойства аморфных пленок, является ширина оптической щели E_0 (Таус гар) [12], входящее в (2). Коэффициент поглощения α рассчитывали в соответствии с законом Ламберта – Бера (в предположении отсутствия рассеяния). Спектральные параметры представлены в таблице 2.

Уширение края оптического поглощения может быть связано с состояниями, создаваемыми этими примесями, или с увеличением средней амплитуды внутренних электрических полей за счет введения дополнительной концентрации заряженных центров.

Таблица 2: Ширина состояний хвоста валентной зоны (ΔE), энергия оптической щели (E_0), коэффициент (α_0) для образца тонкой пленки $(\text{Cd}_{0.6}\text{Zn}_{0.36}\text{Mn}_{0.04})_3\text{As}_2$.

Table 2. Width of states of the valence band tail (ΔE), optical gap energy (E_0), coefficient (α_0) for a thin film sample $(\text{Cd}_{0.6}\text{Zn}_{0.36}\text{Mn}_{0.04})_3\text{As}_2$.

ΔE (эВ)	E_0 (эВ)	α_0
0.5	0.12	1.27

4. Заключение. Таким образом, был синтезирован твердый раствор $(\text{Cd}_{1-x-y}\text{Zn}_x\text{Mn}_y)_3\text{As}_2$ ($x + y = 0.4$; $y = 0.04$) и проведен рентгенофазовый анализ, подтверждающий результаты синтеза. Напыление тонких пленок CZMA осуществлялось на непогреваемую подложку. В настоящей работе была исследована температурная зависимость электропроводности образца. Результаты анализа показали, что поведение сопротивления образцов подчиняется механизму прыжковой проводимости типа Шкловского – Эфроса с переменной длиной прыжка. Определены энергия оптической щели и ширина состояний хвоста валентной зоны.

Список литературы

1. Захвалинский В. С., Туан Ву Ван, Пиллюк Е. А., Петренко П. А. 2013. Получение и свойства разбавленного магнитного полупроводника $(\text{Cd}_{1-x-y}\text{Zn}_x\text{Mn}_y)_3\text{As}_2$. Современные наукоемкие технологии, 6: 56.
2. Захвалинский В. С. и др. 2012. Исследование гальваномагнитных свойств разбавленного магнитного полупроводника $(\text{Cd}_{1-x-y}\text{Zn}_x\text{Mn}_y)_3\text{As}_2$. Известия Юго-западного государственного университета. Серия: Физика и Химия, 2: 82–87.
3. Захвалинский В. С. и др. 2011. Исследование осцилляций Шубникова-де Гааза в α -фазе твердых растворов $(\text{Cd}_{1-x-y}\text{Zn}_x\text{Mn}_y)_3\text{As}_2$. Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика, 23(118): 215–219.
4. Amarnath R., Bhargavi K. S., Kubakaddi S. S. 2020. Thermoelectric transport properties in 3D Dirac semimetal Cd_3As_2 . Journal of Physics: Condensed Matter, 32(22): 225704 (12 p). DOI: 10.1088/1361-648X/ab720f.
5. Borisenko S. et al. 2014. Experimental realization of a three-dimensional Dirac semimetal. Physical review letters, 113(2) : 027603 (5 p). DOI: 10.1103/PhysRevLett.113.027603.
6. Crassee I. et al. 2018. 3D Dirac semimetal Cd_3As_2 : A review of material properties. Physical Review Materials, 2(12): 120302 (15 p). DOI: 10.1103/PhysRevMaterials.2.120302.
7. Chorsi H. T. et al. 2020. Widely Tunable Optical and Thermal Properties of Dirac Semimetal Cd_3As_2 . Advanced Optical Materials, 8(8) : 120302 (6 p). DOI: 10.1002/adom.201901192.
8. Cheng P. et al. 2016. Thickness-dependent quantum oscillations in Cd_3As_2 thin films. New Journal of Physics, 18. (8) : 083003 (9 p). DOI: 10.1088/1367-2630/18/8/083003.
9. Dubowski J. J., Williams D. F. 1985. Growth and properties of Cd_3As_2 films prepared by pulsed-laser evaporation. Canadian Journal of Physics, 63(6) : 815–818. DOI: 10.1139/p85-131.
10. Gao J. et al. 2019. Surface Reconstruction, Oxidation Mechanism, and Stability of Cd_3As_2 . Advanced Functional Materials. 29(26) : 1900965 (9 p). DOI: 10.1002/adfm.201900965.
11. Jarzabek B., Wieszka J., Cisowski J. 2004. Distribution of electronic states in amorphous Cd–As thin films on the basis of optical measurements. Journal of non-crystalline solids, 333(2): 206–211. DOI: 10.1016/j.jnoncrysol.2003.09.045.
12. Kasap S., Capper P. 2017. Springer handbook of electronic and photonic materials. Springer, 1538.
13. Laiho R. et al. 2008. Hopping conductivity of Ni-doped p-CdSb. J. Phys.: Condens. Matter, 20 : 295204–295211, DOI: 10.1088/0953-8984/20/29/295204.
14. Li C. Z. et al. 2015. Giant negative magnetoresistance induced by the chiral anomaly in individual Cd_3As_2 nanowires. Nature communications, 6(1) : 1–7. DOI: 10.1038/ncomms10137.

15. Liang T. et al. 2015. Ultrahigh mobility and giant magnetoresistance in the Dirac semimetal Cd_3As_2 . *Nature materials*, 14(3) : 280–284. DOI: 10.1038/nmat4143.
16. Liang T. et al. 2017. Anomalous Nernst effect in the dirac semimetal Cd_3As_2 . *Physical review letters*, 118(13) : 136601 (5 p). DOI: 10.1103/PhysRevLett.118.136601.
17. Lu H. et al. 2017. Topological phase transition in single crystals of $(\text{Cd}_{1-x}\text{Zn}_x)_3\text{As}_2$. *Scientific Reports*, 7(1) : 1–10. DOI: 10.1038/s41598-017-03559-2.
18. Meng Y. et al. 2018. Three-dimensional Dirac semimetal thin-film absorber for broadband pulse generation in the near-infrared. *Optics Letters*, 43(7) : 1503–1506. DOI: 10.1364/OL.43.001503.
19. Neupane M., Xu S., Sankar R. et al. 2014. Observation of a three-dimensional topological Dirac semimetal phase in high-mobility Cd_3As_2 . *Nat Commun*, 5 : 3786 (8 p). DOI: 10.1038/ncomms4786.
20. Stackelberg M. v., Paulu R. 1935. Untersuchungen an den Phosphiden und Arseniden des Zinks und Cadmiums. *Das Zn_3P_2 -Gitter*, *Zeitschrift für Physikalische Chemie*, 28B(1): 427-460. doi: <https://doi.org/10.1515/zpch-1935-2841>.
21. Sharafeev A. et al. 2017. Optical phonon dynamics and electronic fluctuations in the Dirac semimetal Cd_3As_2 . *Physical Review B*, 95(23) : 235148 (6 p). DOI: 10.1103/PhysRevB.95.235148.
22. Uchida M. et al. 2017. Quantum Hall states observed in thin films of Dirac semimetal Cd_3As_2 . *Nature communications*, 8(1) : 1–7. DOI: 10.1038/s41467-017-02423-1.
23. Wang Z. et al. 2013. Three-dimensional Dirac semimetal and quantum transport in Cd_3As_2 . *Physical Review B*, 88(12) : 125427 (6 p). DOI: 10.1103/PhysRevB.88.125427.
24. Wang Q. et al. 2017. Ultrafast broadband photodetectors based on three-dimensional Dirac semimetal Cd_3As_2 . *Nano letters*, 17(2) : 834–841. DOI: 10.1021/acs.nanolett.6b04084.
25. Zhou T. et al. 2016. Enhanced thermoelectric properties of the Dirac semimetal Cd_3As_2 . *Inorganic Chemistry Frontiers*, 3(12) : 1637–1643. DOI: 10.1039/C6QI00383D.
26. Zakhvalinskii V. S. et al. 2017. Anomalous cyclotron mass dependence on the magnetic field and Berry's phase in $(\text{Cd}_{1-x-y}\text{Zn}_x\text{Mn}_y)_3\text{As}_2$ solid solutions. *Journal of Physics: Condensed Matter*, 29(45) : 455701 (7p). DOI: 10.1088/1361-648X/aa8bdb.

References

1. Zakhvalinskiy V. S., Tuan Vu Van, Pilyuk Ye. A., Petrenko P. A. 2013. Polucheniye i svoystva razbavlenogo magnitnogo poluprovodnika $(\text{Cd}_{1-x-y}\text{Zn}_x\text{Mn}_y)_3\text{As}_2$ [Obtaining and properties of a diluted magnetic semiconductor $(\text{Cd}_{1-x-y}\text{Zn}_x\text{Mn}_y)_3\text{As}_2$]. *Sovremennyye naukoymkiye tekhnologii*, 6: 56.
2. Zakhvalinskiy V. S. i dr. 2012. Issledovaniye gal'vanomagnitnykh svoystv razbavlenogo magnitnogo poluprovodnika $(\text{Cd}_{1-x-y}\text{Zn}_x\text{Mn}_y)_3\text{As}_2$ [Investigation of the galvanomagnetic properties of a diluted magnetic semiconductor $(\text{Cd}_{1-x-y}\text{Zn}_x\text{Mn}_y)_3\text{As}_2$]. *Izvestiya Yugo-zapadnogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika i Khimiya*, 2: 82–87.
3. Zakhvalinskiy V. S. i dr. 2011. Issledovaniye ostsillyatsiy Shubnikova-de Gaaza v α -faze tverdykh rastvorov $(\text{Cd}_{1-x-y}\text{Zn}_x\text{Mn}_y)_3\text{As}_2$ [Investigation of Shubnikov-de Haas oscillations in the α -phase of solid solutions]. *Nauchnyye vedomosti Belgorodskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Matematika. Fizika*, 23(118): 215–219.
4. Amarnath R., Bhargavi K. S., Kubakaddi S. S. 2020. Thermoelectric transport properties in 3D Dirac semimetal Cd_3As_2 . *Journal of Physics: Condensed Matter*, 32(22) : 225704 (12 p). DOI: 10.1088/1361-648X/ab720f.
5. Borisenko S. et al. 2014. Experimental realization of a three-dimensional Dirac semimetal. *Physical review letters*, 113(2) : 027603 (5 p). DOI: 10.1103/PhysRevLett.113.027603.
6. Crassee I. et al. 2018. 3D Dirac semimetal Cd_3As_2 : A review of material properties. *Physical Review Materials*, 2(12) : 120302 (15 p). DOI: 10.1103/PhysRevMaterials.2.120302.
7. Chorsi H. T. et al. 2020. Widely Tunable Optical and Thermal Properties of Dirac Semimetal Cd_3As_2 . *Advanced Optical Materials*, 8(8) : 120302 (6 p). DOI: 10.1002/adom.201901192.

8. Cheng P. et al. 2016. Thickness-dependent quantum oscillations in Cd_3As_2 thin films. *New Journal of Physics*, 18. (8) : 083003 (9 p). DOI: 10.1088/1367-2630/18/8/083003.
9. Dubowski J. J., Williams D. F. 1985. Growth and properties of Cd_3As_2 films prepared by pulsed-laser evaporation. *Canadian Journal of Physics*, 63(6) : 815–818. DOI: 10.1139/p85-131.
10. Gao J. et al. 2019. Surface Reconstruction, Oxidation Mechanism, and Stability of Cd_3As_2 . *Advanced Functional Materials*. 29(26) : 1900965 (9 p). DOI: 10.1002/adfm.201900965.
11. Jarzabek B., Weszka J., Cisowski J. 2004. Distribution of electronic states in amorphous Cd–As thin films on the basis of optical measurements. *Journal of non-crystalline solids*, 333(2) : 206–211. DOI: 10.1016/j.jnoncrysol.2003.09.045.
12. Kasap S., Capper P. 2017. Springer handbook of electronic and photonic materials. Springer, 1538.
13. Laiho R. et al. 2008. Hopping conductivity of Ni-doped p-CdSb. *J. Phys.: Condens. Matter*, 20 : 295204–295211, DOI: 10.1088/0953-8984/20/29/295204.
14. Li C. Z. et al. 2015. Giant negative magnetoresistance induced by the chiral anomaly in individual Cd_3As_2 nanowires. *Nature communications*, 6(1) : 1–7. DOI: 10.1038/ncomms10137.
15. Liang T. et al. 2015. Ultrahigh mobility and giant magnetoresistance in the Dirac semimetal Cd_3As_2 . *Nature materials*, 14(3) : 280–284. DOI: 10.1038/nmat4143.
16. Liang T. et al. 2017. Anomalous Nernst effect in the dirac semimetal Cd_3As_2 . *Physical review letters*, 118(13) : 136601 (5 p). DOI: 10.1103/PhysRevLett.118.136601.
17. Lu H. et al. 2017. Topological phase transition in single crystals of $(\text{Cd}_{1-x}\text{Zn}_x)_3\text{As}_2$. *Scientific Reports*, 7(1) : 1–10. DOI: 10.1038/s41598-017-03559-2.
18. Meng Y. et al. 2018. Three-dimensional Dirac semimetal thin-film absorber for broadband pulse generation in the near-infrared. *Optics Letters*, 43(7) : 1503–1506. DOI: 10.1364/OL.43.001503.
19. Neupane M., Xu S., Sankar R. et al. 2014. Observation of a three-dimensional topological Dirac semimetal phase in high-mobility Cd_3As_2 . *Nat Commun*, 5 : 3786 (8 p). DOI: 10.1038/ncomms4786.
20. Stackelberg M. v., Paulu R. 1935. Untersuchungen an den Phosphiden und Arseniden des Zinks und Cadmiums. *Das Zn_3P_2 -Gitter*, *Zeitschrift für Physikalische Chemie*, 28B(1): 427–460. doi: <https://doi.org/10.1515/zpch-1935-2841>.
21. Sharafeev A. et al. 2017. Optical phonon dynamics and electronic fluctuations in the Dirac semimetal Cd_3As_2 . *Physical Review B*, 95(23) : 235148 (6 p). DOI: 10.1103/PhysRevB.95.235148.
22. Uchida M. et al. 2017. Quantum Hall states observed in thin films of Dirac semimetal Cd_3As_2 . *Nature communications*, 8(1) : 1–7. DOI: 10.1038/s41467-017-02423-1.
23. Wang Z. et al. 2013. Three-dimensional Dirac semimetal and quantum transport in Cd_3As_2 . *Physical Review B*, 88(12) : 125427 (6 p). DOI: 10.1103/PhysRevB.88.125427.
24. Wang Q. et al. 2017. Ultrafast broadband photodetectors based on three-dimensional Dirac semimetal Cd_3As_2 . *Nano letters*, 17(2) : 834–841. DOI: 10.1021/acs.nanolett.6b04084.
25. Zhou T. et al. 2016. Enhanced thermoelectric properties of the Dirac semimetal Cd_3As_2 . *Inorganic Chemistry Frontiers*, 3(12) : 1637–1643. DOI: 10.1039/C6QI00383D.
26. Zakhvalinskii V. S. et al. 2017. Anomalous cyclotron mass dependence on the magnetic field and Berry's phase in $(\text{Cd}_{1-x-y}\text{Zn}_x\text{Mn}_y)_3\text{As}_2$ solid solutions. *Journal of Physics: Condensed Matter*, 29(45) : 455701 (7p). DOI: 10.1088/1361-648X/aa8bdb.

Получена 12.09.2020

Захвалинский Василий Сергеевич – доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры теоретической и экспериментальной физики института инженерных и цифровых технологий Белгородского государственного национального исследовательского университета

 <http://orcid.org/0000-0001-7055-8243>

ул. Победы, 85, г. Белгород, 308015, Россия

E-mail: zakhvalinskii@bsu.edu.ru

Пилюк Евгений Александрович – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры теоретической и экспериментальной физики института инженерных и цифровых технологий Белгородского государственного национального исследовательского университета

 <http://orcid.org/0000-0003-4979-5724>

ул. Победы, 85, г. Белгород, 308015, Россия

E-mail: pilyuk@bsu.edu.ru

Никуличева Татьяна Борисовна – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры прикладной математики и компьютерного моделирования института инженерных и цифровых технологий Белгородского государственного национального исследовательского университета

 <http://orcid.org/0000-0001-6661-3959>

ул. Победы, 85, г. Белгород, 308015, Россия

E-mail: nikulicheva@bsu.edu.ru

Исаева Наталья Олеговна – магистрант второго года обучения кафедры теоретической и экспериментальной физики института инженерных и цифровых технологий Белгородского государственного национального исследовательского университета

ул. Победы, 85, г. Белгород, 308015, Россия

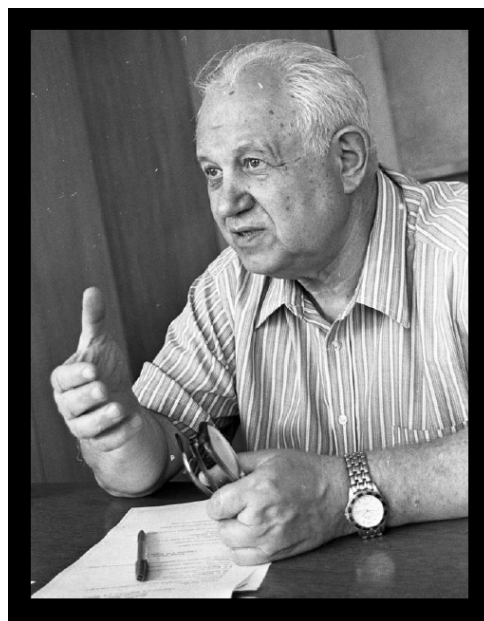
E-mail: 1124941@bsu.edu.ru

Неженцев Антон Васильевич – бакалавр третьего года обучения кафедры теоретической и экспериментальной физики института инженерных и цифровых технологий Белгородского государственного национального исследовательского университета

ул. Победы, 85, г. Белгород, 308015, Россия

E-mail: 1318586@bsu.edu.ru

НЕКРОЛОГ



25 августа в возрасте 90 лет ушел из жизни выдающийся ученый – академик Национальной Академии наук Украины Виктор Григорьевич Барьяхтар. Виктор Григорьевич внес большой вклад в теоретическую физику, в особенности в физику магнитных явлений в твердотельных средах. Уже в самом начале своей научной деятельности он, совместно с Пелетминским Сергеем Владимировичем и своим учителем Александром Ильичем Ахиезером, стал соавтором открытия явления магнитоакустического резонанса, внесенного в Государственный реестр открытий СССР. Это определило, в значительной степени, всю его дальнейшую плодотворную и счастливую жизнь в науке. Виктор Григорьевич награжден многочисленными наградами, отмечен многими научными премиями за вклад в теоретическую физику, научно-педагогическую деятельность и работу над безопасностью ядерной энергетики в бытность свою на посту вице-президента Национальной Академии наук Украины.

Для нас – группы профессоров Белгородского государственного университета, закончивших физико-технический факультет Харьковского университета – Виктор Григорьевич, прежде всего, был учителем, преподававшим нам не только статистическую физику, но и представлявшим пример рыцарского отношения к науке. Как говорится, большое видится издалека. Теперь, по прошествии стольких лет, осознаешь, как велико было влияние Виктора Григорьевича на нас – молодых теоретиков, в то время, когда мы работали вместе с ним в отделе теоретической физики Харьковского физико-технического института АН УССР. Он был в полном смысле этого слова наставником не только по многим научным вопросам, но и по многим жизненным проблемам, которые нас тогда волновали. Его влияние происходило и в каждодневном общении с ним, когда он приходил на территорию института в наш «теордомик», и в процессе работы руководимого им семинара по физике твердого тела в Харьковском Доме ученых.

После перехода Виктора Григорьевича на работу в Донецкий физико-технический институт АН УССР, где он руководил сначала теоретическим отделом, а затем стал заместителем директора и возглавил Донецкий научный центр Академии наук УССР, и впоследствии, после его перехода на работу в Киев, в аппарат академии наук, его связь с теоретическим отделом ХФТИ не прекратилась. При любой случайной встрече с ним, всегда, если представлялась возможность, можно было, воспользовавшись случаем, обсудить любой волновавший научный вопрос, любое текущее событие.

Одному из нас посчастливилось тесно общаться в рабочем порядке с Виктором Григорьевичем в ДонФТИ. Интересно было наблюдать, как он, несмотря на возрастание своих должностных обязанностей, все же не терял связь с каждодневной научной деятельностью, интересно было присутствовать при его обсуждении с большим числом сотрудников различных текущих вопросов не только организационного порядка, но и конкретных научных проблем. А в науке он был, прежде всего, физиком-теоретиком.

Сегодня, когда фундаментальная наука переживает далеко не лучшие времена, деятельность Виктора Григорьевича служит для нас источником надежды на то, что мы не зря занимались теоретической физикой. Мы сохраним о нем светлую память в наших сердцах.

Профессора Белгородского государственного национального исследовательского университета:
С. В. Блажевич, Ю. П. Вирченко, В. В. Красильников, Н. А. Чеканов