

Том 51, №4

Декабрь 2019

Научный рецензируемый журнал

Основан в 1995 г.

Журнал включен в Перечень ВАК рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней кандидата и доктора наук (01.01.00 – математика, 01.02.00 – механика, 01.04.00 – физика).

НАУЧНЫЕ ВЕДОМОСТИ

Белгородского государственного университета

Математика. Физика

BELGOROD STATE UNIVERSITY
SCIENTIFIC BULLETIN

Mathematics & Physics

Учредитель

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Белгородский государственный национальный исследовательский университет»

Издатель

НИУ «БелГУ»

Издательский дом «БелГУ»

Адрес редакции, издателя, типографии:
308015, г. Белгород, ул. Победы, 85

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор)

Свидетельство о регистрации средства массовой информации ПИ №ФС77-73510 от 31.08.2018

Выходит 4 раза в год

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ СЕРИИ ЖУРНАЛА

Главный редактор серии

А.В. Носков, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой теоретической и математической физики НИУ «БелГУ»

Заместитель главного редактора

Н.В. Малай, доктор физико-математических наук, профессор НИУ «БелГУ»

Ответственный секретарь

Р.А. Загороднюк, доцент НИУ «БелГУ», кандидат физико-математических наук

Члены редколлегии:

А. Ашыралыев, доктор физико-математических наук, профессор факультета математики Ближневосточного университета (Никосия, Турция); институт математики и математического моделирования (Алматы, Казахстан)

С.В. Блажевич, профессор НИУ «БелГУ», доктор физико-математических наук

А.Н. Беляков, профессор НИУ «БелГУ», доктор физико-математических наук

А.Г. Брусенцев, профессор БГТУ им. В.Г. Шухова, доктор физико-математических наук

В.Б. Васильев, заведующий кафедрой дифференциальных уравнений НИУ «БелГУ», доктор физико-математических наук

Ю.П. Вирченко, профессор НИУ «БелГУ», доктор физико-математических наук

Ю.П. Вирченко, профессор НИУ «БелГУ», доктор физико-математических наук

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

Галаев С.В.

Золотое сечение в геометрии η -Эйнштейновых субримановых многообразий с N-связностью 465

Куртова Л.Н.

Число решений одного уравнения, содержащего квадратичные формы с растущим дискриминантом 475

Махина Н.М.

Некоторые свойства классов ВМОА и интегральные оценки конформно отображающей функции в областях с границей типа Лаврентьева 487

Оруджев Э.Г., Зульфугарова Р.Т.

Об одной начально-граничной задаче для уравнения изгибных колебаний балки..... 496

Шипкина Э.Л.

Обобщенная дивергентная теорема и второе тождество Грина для В-эллиптических и В-гиперболических операторов..... 506

Тимашев А.С.

Расчёт конечномерной математической модели в задаче квадратичной экспоненциальной интерполяции..... 514

А.В. Глушак, профессор НИУ «БелГУ», доктор физико-математических наук

С.Б. Дабагов, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник лаборатории электронов высоких энергий ОЯФА ФИАН им. П.Н. Лебедева РАН

Д.М. Левин, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой физики Тульского государственного университета

В.В. Меньшиц, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математики и моделирования систем ФГКОУ ВО «Воронежский институт МВД России»

А.И. Назаров, доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В.А. Стеклова РАН

О.М. Пенжин, доктор физико-математических наук, профессор Научно-образовательного центра математики и кибернетики Казахстанско-британского технического университета, Алматы, Казахстан

И.П. Половинкин, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического и прикладного анализа факультета прикладной математики, информатики и механики Воронежского государственного университета

С.М. Ситник, доктор физико-математических наук, профессор НИУ «БелГУ»

А.П. Солдатов, доктор физико-математических наук, профессор кафедры дифференциальных уравнений НИУ «БелГУ», главный научный сотрудник Вычислительного центра им. А.А. Дородницына РАН

В.Е. Федоров, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой математического анализа математического факультета Челябинского государственного университета

А.А. Шибков, доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической и экспериментальной физики Тамбовского государственного университета им. Г.Р. Державина

Выпускающий редактор *Л.П. Котенко*

Корректурa *Ю.В. Иващенко*

Компьютерная верстка *Ю.П. Вирченко*

Оригинал-макет *А.В. Носков*

E-mail: noskov_a@bsu.edu.ru

Подписано в печать 24.12.2019

Формат 60×84/8

Гарнитура Times New Roman

Усл. п. л. 14,6

Заказ 297

Цена свободная

Тираж 1000 экз.

Дата выхода 30.12.2019

Подписной индекс в Объединённом каталоге «Пресса России» – 81631

Оригинал-макет подготовлен и тиражирован в Издательском доме «БелГУ»

Адрес: 308015 г. Белгород,

ул. Победы, 85

ФИЗИКА. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Аверин Г.В., Шевцова М.В.

Решение дифференциального уравнения состояния идеального газа в изопроцессах..... 522

Захвалинский В.С., Пилюк Е.А., Никуличева Т.Б., Иванчихин С.В., Япрынцев М.Н., Ерина Т.А.

Получение и механизмы электропроводности тонких пленок дираковского полуметалла Cd_3As_2 533

Ванько В.И.

Математическое моделирование движений расщепленного провода. Часть I: движение «в целом»..... 541

Голочалова А.В., Кулумбаев Э.Б.

Оптимизационная методика для расчета равновесной осесимметричной формы эритроцита..... 555

Тукмаков Д.А.

Численное моделирование отражения ударной волны в газовой взвеси для различных параметров дисперсной компоненты запыленной среды..... 565

Сведения об авторах 577

The journal is included into the List of Higher Attestation Commission of peer-reviewed scientific publications where the main scientific results of dissertations for obtaining scientific degrees of a candidate and doctor of science should be published (01.01.00 – Mathematics, 01.02.00 – Mechanics, 01.04.00 – Physics)

Founder

Federal state autonomous educational establishment of higher education «Belgorod National Research University»

Publisher

Belgorod State National Research University Publishing House "BelSU"
Address of editorial office, publisher, letterpress plant: 85 Pobeda St., Belgorod, 308015, Russia

The journal has been registered at the Federal service for supervision of communications information technology and mass media (Roskomnadzor)

Mass media registration certificate
PIN[®] FS 77 - 73510 31.08.2018

Publication frequency: 4 /year

**EDITORIAL BOARD
OF JOURNAL SERIES**

Chief editor

A.V. Noskov, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Head of the Department of Theoretical and Mathematical Physics (Belgorod National Research University)

Deputies of chief editor

N.V. Malay, Professor (Belgorod National Research University)

Editorial assistant

R.A. Zagorodnyuk, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, associated professor, (Belgorod National Research University)

Members of editorial board:

A. Ashyralyev, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of Mathematic faculty of Near East University (Nicosia, Turkey), Institute of Mathematic and Mathematical Modeling (Almaty, Kazakhstan)

S.V. Blazhevich, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor (Belgorod National Research University)

A.N. Belyakov, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor (Belgorod National Research University)

A.G. Brusentsev, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor (Belgorod Technological University named after V.G. Shukhov)

V.B. Vasiliev, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Head of the Department of Differential Equations

Yu.P. Virchenko, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor (Belgorod National Research University)

CONTENTS

MATHEMATICS

Galaev S.V.

Golden ration in geometry of η -Einstein sub-Riemannian manifolds with N-connection..... **465**

Kurtova L.N.

A number of solutions of the equation, which contains quadratic forms with a growing discriminant..... **475**

Makhina N.M.

Some properties of BMOA classes and integral estimates of conformal mapping functions in domains with Lavrentiev's type boundary **487**

Orudzhev E.G., Zulfugarova R.T.

About one initial-boundary problem for equation of bending beam vibrations **496**

Shishkina E.L.

Generalized divergent theorem and the second Green identity for B-elliptic and B-hyperbolic operators..... **506**

Timashev A.S.

Numerical solution to the finite-dimension problem of quadratic exponential interpolation..... **514**

A.V. Glushak, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor (Belgorod National Research University)

S.B. Dabagov, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Leading Researcher of the Electron Laboratory high energy of Department of Nuclear Physics and Astrophysics of Physical Institute of Russian Academy of Sciences after P.N. Lebedev

D.M. Levin, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Head of the Department of Physics (Tula State University)

V.V. Menshik, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of Department of Mathematics and Systems Modeling, Voronezh Institute of the Interior Ministry of Russian Federation

A.I. Nazarov, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, St. Petersburg Department of Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences

O.M. Penkin, National Research University, Kazakh-British Technical University, Center for Mathematics and Cybernetics, Almaty, Kazakhstan)

I.P. Polovinkin, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Department of Mathematical and Applied Analysis of the Faculty of Applied Mathematics, Informatics and Mechanics (Voronezh State University)

S.M. Sitnik, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor (Belgorod National Research University)

A.P. Soldatov, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Department of Differential Equations (Belgorod National Research University), Chief Researcher of the Computing Center after A.A. Dorodnitsyn RAS

V.E. Fedorov, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Head of the Department of Mathematical Analysis of Mathematical Faculty (Chelyabinsk State University)

A.A. Shibkov, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Department of Theoretical and Experimental Physics (Tambov State University after G.R. Derzhavin)

Commissioning Editor *L.P. Kotenko*
Proofreading *Yu.V. Ivakhnenko*
Computer imposition *Yu.P. Virchenko*

Dummy layout by *A.V. Noskov*
E-mail: noskov_a@bsu.edu.ru

Passed for printing 24.12.2019
Format 60×84/8
Typeface Times New Roman
Printer's sheets 14,6
Order 297
Circulation 1000 copies
Date of publishing: 30.12.2019

Subscription reference in The Russian Press common catalogue – 81631

Dummy layout is replicated at Publishing House «BelSU», Belgorod National Research University
Address: 85 Pobeda St., Belgorod, 308015, Russia

PHYSICS. MATHEMATICAL MODELING

Averin G.V., Shevtsova M.V.

Solving the differential equation of ideal gas condition at isoprocesses..... 522

Zakhvalinskii V.S., Pilyuk E.A., Nikulicheva T.B., Ivanchikhin S.V., Yaprntsev M.N., Erina T.A.

Preparation and conduction mechanisms of thin films of dirac semimetal Cd₃As₂..... 533

Vanko V.I.

Mathematical modelling split wire's movements. Part I: movement "on the whole"..... 541

Golochalova A.V., Kulumbaev E.B.

Optimization method for the calculation of the equilibrium axisymmetric shape of erythrocyte..... 555

Tukmakov D.A.

Numerical modeling of reflection of a shock wave in a gas suspension for various parameters of a dispersed component of a dusted medium 565

Information about Authors..... 577



**МАТЕМАТИКА
MATHEMATICS**

УДК 514.76

DOI 10.18413/2075-4639-2019-51-4-465-474

**ЗОЛОТОЕ СЕЧЕНИЕ В ГЕОМЕТРИИ η -ЭЙНШТЕЙНОВЫХ
СУБРИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЙ С N-СВЯЗНОСТЬЮ**
**GOLDEN RATION IN GEOMETRY OF η -EINSTEIN SUB-RIEMANNIAN
MANIFOLDS WITH N-CONNECTION**

**С.В. Галаев
S.V. Galaev**

Саратовский национальный исследовательский государственный
университет им. Н.Г. Чернышевского,
ул. Астраханская, 83, Саратов, 410012, Россия

National Research Saratov State University named after G.N. Chernyshevsky,
83 Astrahanskaya St, Saratov, 410012, Russia

E-mail: sgalaev@mail.ru

Аннотация

Вводится понятие специального субриманова многообразия (S-многообразия). S-многообразие — это субриманово многообразие M контактного типа с заданной на нем ассоциированной связностью ∇^A относительно которой структурный эндоморфизм Ψ многообразия M , определяемый равенством $\omega(\vec{x}, \vec{y}) = g(\Psi\vec{x}, \vec{y})$, ковариантно постоянен. Доказывается, что S-многообразие является η -Эйнштейновым многообразием тогда и только тогда, когда оно η -Эйнштейново относительно связности ∇^N , где N -эндоморфизм $N : D \rightarrow D$ распределения D многообразия M такой, что $\nabla^A N = 0$. В качестве примера эндоморфизма, удовлетворяющего условию $\nabla^A N = 0$, рассматривается эндоморфизм $N = \frac{\sqrt{5}}{2}F + \frac{1}{2}I$, удовлетворяющий тем самым соотношению $N^2 = N + 1$.

Abstract

The paper deals with a sub-Riemannian manifold M of contact type with a given associated connection ∇^A . Additionally it is assumed that the structure endomorphism Ψ defined by the equality $\omega(\vec{x}, \vec{y}) = g(\Psi\vec{x}, \vec{y})$ is covariantly constant with respect to the connection ∇^A . The obtained sub-Riemannian manifold is an analog of a Sasaki manifold. It is proved that the manifold M is η -Einstein if and only if it is η -Einstein with respect to the connection ∇^N , where $N : D \rightarrow D$ is an endomorphism of the distribution D of the manifold M such that $\nabla^A N = 0$. Let η be a 1-form defining the distribution D of the manifold M . If $rk(d\eta) = 2p$, $2p < n - 1$, $2p \neq 0$, where n is the dimension of the manifold M , on the sub-Riemannian manifold may be defined in a natural way an endomorphism N satisfying $N^2 = N + 1$ that is called a golden affinor structure. It is shown that the endomorphism N is covariantly constant



with respect to the connection ∇^A . As the central example, is considered the distribution D of a sub-Riemannian manifold M with zero Schouten tensor. The distribution D of the manifold M is itself a sub-Riemannian manifold with a golden affinor structure.

Ключевые слова: субриманово многообразие, внутренняя связность, ассоциированная связность, N -связность, η -Эйнштейново многообразие, золотое сечение.

Keywords: sub-Riemannian manifold; interior connection; associated connection; N -connection; η -Einstein manifold; golden ration.

1. Введение

Субримановым многообразием контактного типа называется риманово многообразие M размерности n , оснащенное субримановой структурой $(M, \vec{\xi}, \eta, g)$, где η и $\vec{\xi}$ 1-форма и единичное векторное поле, порождающие, соответственно, ортогональные между собой распределения D и D^\perp . На многообразиях с почти контактной метрической структурой наряду со связностью Леви-Чивита рассматривают связности с кручением [Галаев 2016; Гордеева 2009; Agricola 2015; Agricola 2014]. Эти связности могут быть как метрическими, так и неметрическими. Как правило, выбор подходящей связности связан с возможными приложениями почти контактных метрических структур в теоретической физике. В конце статьи предлагается краткий обзор наиболее часто используемых связностей с кручением. Субриманово многообразие является обобщением почти контактного метрического многообразия. На субримановом многообразии контактного типа определяется структурный эндоморфизм Ψ с помощью равенства $\omega(\vec{x}, \vec{y}) = g(\Psi\vec{x}, \vec{y})$. Если почти контактное метрическое многообразие представляет собой интерес как обобщение поверхности эрмитова пространства, то мотивация к исследованию субриманова многообразия вызвана необходимостью построения математических моделей в задачах теории управления и неголономной механики. Различие в происхождении почти контактных метрических многообразий и субримановых многообразий проявляется в выборе связностей, задающих параллельный перенос на многообразиях. Для почти контактных метрических многообразий, образующих специальный класс римановых многообразий, естественным является выбор связности Леви-Чивита. В геометрии субримановых многообразий используются связности, обеспечивающие параллельный перенос допустимых векторов вдоль допустимых кривых. В работах автора соответствующие связности определяются парой (∇, N) , где ∇ — внутренняя метрическая связность, а $N : D \rightarrow D$ — подходящий эндоморфизм распределения D . В случае субриманова многообразия естественно положить $N = \Psi$. В настоящей работе изучаются два эндоморфизма N , естественным образом возникающих на субримановом многообразии M : структурный эндоморфизм Ψ и эндоморфизм N , удовлетворяющий полиномиальному соотношению: $N^2 = N + 1$. Следуя устоявшимся традициям [Falcon 2009, Falcon 2008], будем называть эндоморфизм, удовлетворяющий последнему соотношению, золотой аффинорной структурой. В случае нулевого эндоморфизма ($N = 0$) N -связность получает название ассоциированной (с внутренней связностью) связности и обозначается ∇^A [Букушева 2017, Bukusheva 2011]. На изучаемое в работе субриманово многообразии M накладываются определенные ограничения. При этом многообразии M получает название специального субриманова многообразия, или, короче — S -многообразия. В качестве примера S -многообразия рассматривается распределение D субриманова многообразия с заданной на нем продолженной субримановой структурой.

2. Основные сведения о специальных субримановых многообразиях

Пусть M — риманово многообразие размерности n с заданной на нем субримановой структурой $(M, \vec{\xi}, \eta, g, D)$, где η и $\vec{\xi}$ 1-форма и единичное векторное поле, порождающие, соответственно, ортогональные между собой распределения D и D^\perp . Обычно исследование субримановых многообразий начинают с собственно субримановой структуры $(M, \vec{\xi}, \eta, g, D)$, переходя затем к структуре риманова многообразия, полагая, что $\vec{\xi}$ — единичное векторное поле и распределения D и D^\perp ортогональны между собой.

Внутренней линейной связностью ∇ [1-3 Букушева 2019] на субримановом многообразии называется отображение $\nabla : \Gamma(D) \times \Gamma(D) \rightarrow \Gamma(D)$, удовлетворяющее следующим условиям:

$$\begin{aligned} 1) \nabla_{f_1\vec{x}+f_2\vec{y}} &= f_1\nabla_{\vec{x}} + f_2\nabla_{\vec{y}}, \\ 2) \nabla_{\vec{x}}f\vec{y} &= (\vec{x}f)\vec{y} + f\nabla_{\vec{x}}\vec{y}, \\ 3) \nabla_{\vec{x}}(\vec{y} + \vec{z}) &= \nabla_{\vec{x}}\vec{y} + \nabla_{\vec{x}}\vec{z}, \end{aligned}$$

где $\Gamma(D)$ — модуль допустимых векторных полей (векторных полей, в каждой точке принадлежащих распределению D). Известно [Галаев 2016; Галаев 2017; Галаев 2001], что на субримановом многообразии существует единственная внутренняя связность ∇ с нулевым кручением, такая, что $\nabla_{\vec{x}}g(\vec{x}, \vec{y}) = 0$. Кручение внутренней линейной связности S по определению полагается равным

$$S(\vec{x}, \vec{y}) = \nabla_{\vec{x}}\vec{y} - \nabla_{\vec{y}}\vec{x} - P[\vec{x}, \vec{y}],$$

где $P : TM \rightarrow D$ — проектор, определяемый разложением $TM = D \oplus D^\perp$.

Тензорное поле, заданное на многообразии M , будем называть допустимым (к распределению D), если его значение в каждой точке многообразия обращается в нуль, если среди аргументов встречаются η или $\vec{\xi}$. Любое тензорное поле, не являющееся обязательно допустимым, будем называть голономным полем.

Дополнительно предположим, что $rk(d\eta) = 2p$, $0 < 2p < n - 1$. Пусть K — интегрируемое распределение, равное ядру формы $\omega = d\eta$. Помимо разложения $TM = D \oplus D^\perp$ на многообразии M возникает разложение $TM = L \oplus L^\perp \oplus D^\perp$, где $L^\perp = K \cap D$, а L — ортогональное ему подраспределение распределения D [Галаев 2017]. Кроме того, нам понадобятся разложения $\tilde{L} = L \oplus D^\perp$, $K = L^\perp \oplus D^\perp$, $TM = L \oplus K$. С помощью последнего разложения определяются проекторы $h : TM \rightarrow L$, $v : TM \rightarrow K$.

Пусть $N : D \rightarrow D$ — фиксированный эндоморфизм распределения D . Линейной связностью ∇^N (короче, N -связностью) называется линейная связность с кручением $S(\vec{x}, \vec{y})$, однозначно определяемая следующими условиями [Bukusheva 2011; Galaev 2018; Galaev 2015]:

$$\begin{aligned} 1) S(\vec{x}, \vec{y}) &= 2\omega(\vec{x}, \vec{y})\vec{\xi} + \eta(\vec{x})N\vec{y} - \eta(\vec{y})N\vec{x}, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \Gamma(TM), \\ 2) \nabla_{\vec{x}}^N g(\vec{y}, \vec{z}) &= 0, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \Gamma(D), \\ 3) \nabla_{\vec{x}}^N \vec{\xi} &= 0, \vec{x} \in \Gamma(TM), \\ 4) \nabla_{\vec{x}}^N \eta &= 0, \vec{x} \in \Gamma(TM). \end{aligned}$$

В случае нулевого эндоморфизма N -связность ∇^N будем называть ассоциированной связностью и обозначать ∇^A .



Будем называть многообразие M специальным субримановым многообразием (или, короче — S -многообразием), если выполняются следующие условия:

- 1) распределение $\tilde{L} = L \oplus D^\perp$ — интегрируемо;
- 2) тензорное поле $\mu(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = v\vec{z}g(h\vec{x}, h\vec{y}) - g(h[v\vec{z}, h\vec{x}], h\vec{y}) - g(h[v\vec{z}, h\vec{y}], h\vec{x})$ обращается в нуль;
- 3) структурное поле эндоморфизма Ψ ковариантно постоянно относительно ассоциированной связности: $\nabla^A \Psi = 0$.

Тензорное поле $\mu(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, по-видимому, впервые использовалось в работе [Bejancu 2012].

Пример S -многообразия. Пусть $M = \mathbb{R}^5$. (∂_n) ($\alpha = 1, \dots, 5$) — стандартный базис арифметического пространства. Определим на M 1-форму η , полагая, $\eta = dx^5 + x^2 dx^1$. Пусть $\vec{e}_1 = \partial_1 - x^2 \partial_5$. Зададим на M метрический тензор g , полагая, что векторы $(\sqrt{2}\vec{e}_1, \sqrt{2}\partial_2, \sqrt{2}\partial_3, \sqrt{2}\partial_4, \sqrt{2}\partial_5)$ образуют ортонормированный базис. Положим: $L = \text{span}(\vec{e}_1, \partial_2)$, $L^\perp = \text{span}(\partial_3, \partial_4)$. Учитывая равенство $[\vec{e}_1, \partial_2] = \partial_5$, заключаем, что распределение $\tilde{L} = L \oplus D^\perp$ интегрируемо. Два других входящих в определение S -многообразия свойства также проверяются непосредственно.

Карту $K(x^\alpha)$ ($\alpha, \beta, \gamma = 1, \dots, n$; $A, B, C = 1, \dots, n-1$; $a, b, c, e = 1, \dots, 2p$; $i, j, k = 2p+1, \dots, n-1$) многообразия M будем называть адаптированной к распределению D , если

- 1) $\partial_n = \vec{\xi}$;
- 2) $\Gamma(L^\perp) = \langle \partial_i \rangle$;
- 3) $\Gamma(\tilde{L}) = \langle \partial_a, \partial_n \rangle$.

Векторные поля $h(\partial_a) = \vec{e}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n$ порождают систему $L : L = \text{Span}(\vec{e}_a)$. Таким образом, мы имеем на многообразии M неголономное поле базисов $(\vec{e}_\alpha) = (\vec{e}_a, \partial_i, \partial_n)$. Непосредственно проверяется, что $[\vec{e}_a, \vec{e}_b] = 2\omega_{ba}\partial_n$. Условие $\vec{\xi} \in \ker \omega$ влечет справедливость равенства $\partial_n \Gamma_a^n = 0$. Из определения S -многообразия следует, что $\partial_n g_{ab} = 0$, $\partial_i g_{ab} = 0$.

Использование адаптированных координат не только упрощает доказательство теорем, но и в ряде случаев позволяет лучше понять строение изучаемых объектов.

Пусть $\tilde{\nabla}$ — связность Леви-Чивита и $\tilde{\Gamma}_{\beta\gamma}^\alpha$ — коэффициенты связности $\tilde{\nabla}$.

Предложение 1 [Букушева 2017; Галаев 2016; Галаев 2001]. Коэффициенты связности Леви-Чивита субриманова многообразия в адаптированных координатах имеют вид:

$$\tilde{\Gamma}_{AB}^C = \Gamma_{AB}^C, \quad \tilde{\Gamma}_{AB}^n = \omega_{BA} - C_{AB}, \quad \tilde{\Gamma}_{An}^B = \tilde{\Gamma}_{nA}^B = C_A^B + \psi_A^B, \quad \tilde{\Gamma}_{nA}^n = \tilde{\Gamma}_{nn}^n = 0,$$

где $\Gamma_{BC}^A = \frac{1}{2}g^{AD}(\vec{e}_B g_{CD} + \vec{e}_C g_{BD} - \vec{e}_D g_{BC})$, $\psi_A^B = g^{BC}\omega_{AC}$, $C_{AB} = \frac{1}{2}\partial_n g_{AB}$, $C_A^B = g^{BC}C_{AC}$.

Пусть, далее, F — поле допустимого эндоморфизма, определяемое разложением $D = L \oplus L^\perp$ таким образом, чтобы все векторы пространства L отвечали собственному значению $\lambda = 1$, а векторы L^\perp — собственному значению $\lambda = -1$. Из условий, входящих в определение S -многообразия, вытекает следующее предложение.

Предложение 2. Поле эндоморфизма F ковариантно постоянно относительно ассоциированной связности: $\nabla^A F = 0$.

Пусть I — тождественное преобразование распределения D , $I\vec{\xi} = 0$. Эндоморфизм $N = \sqrt{5}F/2 + I/2$ является допустимым эндоморфизмом, удовлетворяющим соотношению $N^2 = N + 1$. При этом равенство $\nabla^A F = 0$ влечет равенство $\nabla^A N = 0$.

Ранее автором были введены понятия допустимого интегрируемого тензорного поля



и (допустимого) почти нормального тензорного поля [Galaev 2015]. Допустимое тензорное поле t называется почти нормальным, если $\nabla^A t = 0$.

Коэффициенты связности ∇^N обозначим символами $G_{\beta\gamma}^\alpha$. Из определения N-связности следует, что ненулевые коэффициенты связности ∇^N в адаптированных координатах получают следующее представление:

$$G_{BC}^A = \frac{1}{2}g^{AD}(\vec{e}_{B}g_{CD} + \vec{e}_{C}g_{BD} - \vec{e}_{D}g_{BC}), \quad G_{nA}^B = N_A^B.$$

Теорема 1. Пусть t — почти нормальная аффинорная структура, заданная на S -многообразии. Тогда найдется атлас адаптированных карт, относительно которых компоненты эндоморфизма t постоянны.

□ Равенство $\nabla^A t = 0$ сводится в адаптированных координатах к равенствам $\nabla_{At}^C = \partial_{At}^C + \Gamma_{AD}^C t_B^D - \Gamma_{AB}^D t_D^C = 0$, $\nabla_n t_B^C = \partial_n t_B^C$. Равенство $\partial_{At}^C + \Gamma_{AD}^C t_B^D - \Gamma_{AB}^D t_D^C = 0$, (с учетом $\partial_n g_{AB} = 0$ и $\partial_n \Gamma_{AB}^C = 0$) можно интерпретировать как равенство, заданное относительно голономной карты. Таким образом, для доказательства теоремы достаточно воспользоваться следующим утверждением: аффинорная структура интегрируема тогда и только тогда, когда существует сохраняющая ее связность без кручения. ■

Понятие η -Эйнштейнова многообразия введено Окумурой [Гордеева 2009]. η -Эйнштейновым многообразием названо многообразие Сасаки с тензором Риччи \tilde{r} , имеющим следующее строение: $\tilde{r} = ag + b\eta \otimes \eta$, $a, b \in \mathbb{R}$. Позже понятие η -Эйнштейнова многообразия было перенесено на более широкий класс почти контактных метрических многообразий. В настоящей работе изучаются η -Эйнштейновы субримановы многообразия. Приводится описание таких многообразий в терминах N-связности. Коэффициенты связности ∇^N обозначим символами $G_{\beta\gamma}^\alpha$.

Непосредственно проверяется справедливость следующей теоремы.

Теорема 2. Линейная связность ∇^N , заданная на S -многообразии, является метрической в случае, когда $N = \Psi$, и неметрической, когда $N = \frac{\sqrt{5}}{2}F + \frac{1}{2}I$.

Используя адаптированные координаты, убеждаемся в справедливости следующего предложения.

Предложение 3. Для связности Леви-Чивита $\tilde{\nabla}$ и N-связности ∇^N выполняются следующие соотношения:

$$\nabla_{\vec{x}}^N \vec{y} = \tilde{\nabla}_{\vec{x}} \vec{y} - \eta(\vec{x})\tilde{\nabla}_{\vec{y}} \vec{\xi} - \eta(\vec{y})\tilde{\nabla}_{\vec{x}} \vec{\xi} + \omega(\vec{x}, \vec{y})\vec{\xi} + \eta(\vec{x})N\vec{y}.$$

Пусть $\tilde{R}(\vec{x}, \vec{y})\vec{z}$, $K(\vec{x}, \vec{y})\vec{z}$, $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \Gamma(TM)$, тензоры кривизны связностей $\tilde{\nabla}$, ∇^N соответственно.

Вычислим необходимые для дальнейшего ненулевые компоненты тензоров $\tilde{R}(\vec{x}, \vec{y})\vec{z}$, $K(\vec{x}, \vec{y})\vec{z}$. Имеем:

$$\tilde{R}_{ABC}^D = R_{ABC}^D + \Psi_A^D \omega_{CB} + \Psi_B^D \omega_{AC},$$

$$\tilde{R}_{AnC}^n = \partial_n \omega_{AC} + \Psi_C^E \omega_{EA},$$

$$\tilde{R}_{ABn}^D = 2\nabla_{[A} \Psi_{B]}^D,$$

$$\tilde{R}_{nCB}^A = -\nabla_C \Psi_B^A,$$

$$K_{nCB}^A = -\nabla_C N_B^A,$$

$$K_{ABC}^D = R_{ABC}^D.$$



Здесь $R_{ABC}^D = 2\vec{e}_{[A}\Gamma_{B]C}^D + 2\Gamma_{[A||E]}^D\Gamma_{B]C}^E$ — компоненты тензора кривизны Схоутена [1-3], определяемого равенством

$$R(\vec{x}, \vec{y})\vec{z} = \nabla_{\vec{x}}\nabla_{\vec{y}}\vec{z} - \nabla_{\vec{y}}\nabla_{\vec{x}}\vec{z} - \nabla_{P[\vec{x}, \vec{y}]\vec{z}} - P[Q[\vec{x}, \vec{y}], \vec{z}],$$

где $Q = 1 - P$.

Заметим, что $\partial_n\omega_{AC} = 0$, т. к. $d\omega = 0$.

Пусть $\tilde{r}(\vec{x}, \vec{y})$, $k(\vec{x}, \vec{y})$ — соответствующие тензорам $\tilde{R}(\vec{x}, \vec{y})\vec{z}$, $K(\vec{x}, \vec{y})\vec{z}$ тензоры Риччи. Назовем субриманово многообразии η -Эйнштейновым многообразием, если выполняется равенство

$$\tilde{r} = ag + b\eta \otimes \eta, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Теорема 3. Пусть M — S -многообразие. Тогда M является субримановым η -Эйнштейновым многообразием тогда и только тогда, когда M — η -Эйнштейново многообразие относительно связности ∇^N .

□ Вычислим компоненты тензоров Риччи k , \tilde{r} в адаптированных координатах. Имеем:

$$\tilde{r}_{AC} = k_{AC}, \quad \tilde{r}_{An} = \tilde{r}_{nA} = -\nabla_B\Psi_A^B, \quad \tilde{r}_{nn} = \Psi_A^B\Psi_B^A, \quad k_{An} = 0, \quad k_{nA} = -\nabla_B N_A^B, \quad k_{nn} = 0.$$

Пусть M — субриманово η -Эйнштейново многообразие. Из равенства $\tilde{r} = ag + b\eta \otimes \eta$ следует, что

$$\tilde{r}_{An} = \tilde{r}_{nA} = -\nabla_B\Psi_A^B = 0.$$

Из полученного выше равенства $k_{nA} = -\nabla_B N_A^B$ следует, что $k_{An} = k_{nA} = 0$. В свою очередь, воспользовавшись равенством $k_{nn} = 0$, мы можем записать верное равенство $k_{nn} = ag(\partial_n, \partial_n) - a\eta(\partial_n)\eta(\partial_n)$. Что и доказывает первую часть теоремы.

Пусть M — субриманово многообразие, являющееся η -Эйнштейновым многообразием относительно связности ∇^N :

$$k = ag + b\eta \otimes \eta.$$

В этом случае $k_{nA} = -\nabla_b N_A^B = 0$. Если $tr(\psi^2) = b$, $b \in \mathbb{R}$, то справедливо следующее равенство

$$\tilde{r}_{nn} = b = ag(\partial_n, \partial_n) + (b - a)\eta(\partial_n)\eta(\partial_n).$$

Так как $\tilde{r}_{AC} = k_{AC}$, окончательно получаем

$$\tilde{r} = ag + (b - a)\eta \otimes \eta. \quad \blacksquare$$

3. Распределение субриманова многообразия с продолженной структурой

Приведем еще один пример S -многообразия. Пусть D — распределение субриманова многообразия нулевой кривизны [Букушева 2017; Галаев 2009; Bukusheva 2011]. Векторные поля $(\vec{e}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n - \Gamma_{ac}^b x^{n+c} \partial_{n+b}, \partial_n, \partial_{n+a}) = (A_i)$ ($a, b, c = 1, \dots, n-1; i, j, k = 2n-1$) определяют [Bukusheva 2011] на распределении D как на гладком многообразии неголономное (адаптированное) поле базисов, а формы $(dx^a, \Theta^n = dx^a + \Gamma_a^n dx^a, \Theta^{n+a} = dx^{n+a} + \Gamma_{bc}^a x^{n+c} dx^b)$ — соответствующее поле кобазисов. Имеют место следующие структурные уравнения [Bukusheva 2011]:

$$[\vec{e}_a, \vec{e}_b] = 2\omega_{ba}\partial_n,$$

$$[\vec{e}_a, \partial_n] = x^{n+d}\partial_n\Gamma_{ad}^c\partial_{n+c},$$



$$[\vec{\epsilon}_a, \partial_{n+b}] = \Gamma_{ab}^c \partial_{n+c}.$$

Определим на многообразии D метрику \tilde{g} , подчиняющуюся равенствам:

$$\tilde{g}(\vec{x}^h, \vec{y}^h) = \tilde{g}(\vec{x}^v, \vec{y}^v) = g(\vec{x}, \vec{y}), \quad \tilde{g}(\vec{x}^h, \vec{y}^v) = \tilde{g}(\vec{x}^h, \partial_n) = \tilde{g}(\vec{x}^v, \partial_n) = 0.$$

Нетрудно установить справедливость следующего предложения.

Предложение 4. Многообразию D с заданной на нем метрикой \tilde{g} оснащено структурой S -многообразия.

Замечание 1. Задавая надлежащим образом эндоморфизм $N : D \rightarrow D$, получаем следующие классы N -связностей для случая почти контактных метрических многообразий:

1) Связность Бежанку ∇^B с нулевым эндоморфизмом $N = 0$. Бежанку определяет связность ∇^B на почти контактном метрическом многообразии с помощью формулы $\nabla_{\vec{x}}^B \vec{y} = \tilde{\nabla}_{\vec{x}} \vec{y} - \eta(\vec{x}) \tilde{\nabla}_{\vec{y}} \vec{\xi} - \eta(\vec{y}) \tilde{\nabla}_{\vec{x}} \vec{\xi} + (\omega + c)(\vec{x}, \vec{y}) \vec{\xi}$. В адаптированных координатах отличными от нуля компонентами $\Gamma_{\beta\gamma}^{B\alpha}$ связности ∇^B являются $\Gamma_{bc}^{Ba} = \Gamma_{bc}^a = \frac{1}{2} g^{ad} (\vec{\epsilon}_b g_{cd} + \vec{\epsilon}_c g_{bd} - \vec{\epsilon}_d g_{bc})$. В случае многообразия Сасаки тензор кривизны связности Бежанку совпадает с тензором кривизны Схоутена. Построенная Бежанку связность, вообще говоря, не является метрической. Так как $\nabla_n^B g_{ab} = \partial_n g_{ab}$, то метричность связности Бежанку эквивалентна K -контактности контактной метрической структуры. N -связность ∇^N на многообразии с почти контактной метрической структурой с заданным эндоморфизмом $N : D \rightarrow D$ может быть определена с помощью равенства $\nabla_{\vec{x}}^N \vec{y} = \nabla_{\vec{x}}^B \vec{y} + \eta(\vec{x}) N \vec{y}$.

2) Связность Танака-Вебстера ∇^{TW} определяется как единственная связность, удовлетворяющая следующим условиям:

- 1) $\nabla^{TW} \eta = 0$,
- 2) $\nabla^{TW} \vec{\xi} = 0$,
- 3) $\nabla^{TW} g = 0$,
- 4) $S(\vec{x}, \vec{y}) = 2\omega(\vec{x}, \vec{y}) \vec{\xi}, \vec{x}, \vec{y} \in \Gamma(D)$,
- 5) $S(\vec{\xi}, \varphi \vec{x}) = -\varphi S(\vec{\xi}, \vec{x}), \vec{x} \in \Gamma(TM)$.

Связность ∇^{TW} является N -связностью в случае, когда $N = C$.

3) Связность Схоутена-ван Кампена ∇^{Sk} определяется с помощью равенства: $\nabla_{\vec{x}}^{Sk} \vec{y} = (\tilde{\nabla}_{\vec{x}} \vec{y}^h)^h + (\tilde{\nabla}_{\vec{x}} \vec{y}^v)^v$, где $\vec{y}^h = p\vec{y}, \vec{y}^v = Q\vec{y}$. Непосредственно проверяется, что связность Схоутена-ван Кампена является N -связностью для случая, когда $N = C - \varphi$.

4) φ -связности исследовались в работе [3]. Для K -контактных метрических пространств φ -связность совпадает со связностью Схоутена-ван Кампена.

Замечание 2. В настоящее время продолжают активно изучаться почти контактные метрические многообразия с четверть симметрической связностью. Указанные в замечании 1 связности в весьма частном случае, когда $d\eta = 0$, являются четверть симметрическими связностями.

Заключение

Настоящая работа вносит определенный вклад в развитие геометрии многообразий Римана-Картана [Гордеева 2009; Agricola 2015, 2014], находящей применение в теории



гравитации Эйнштейна-Картана. Под многообразием Римана-Картана понимается риманово многообразие с линейной связностью, обладающей ненулевым кручением. Весьма интересной представляется задача классификации N -связностей в зависимости от свойств соответствующих им эндоморфизмов $N : D \rightarrow D$. Отдельный интерес представляет изучение N -связностей в случае, когда эндоморфизм $N : D \rightarrow D$ принадлежит классу металлических или других подобных структур [Falcon 2009, 2008; Goldberg 1970].

В предлагаемой статье впервые при исследовании субримановых многообразий рассматривается допустимая аффинорная структура, ассоциированная с золотым сечением. Рассматриваемая структура, как легко проверить, совместима с метрическим тензором: $g(N\vec{x}, \vec{y}) = g(\vec{x}, N\vec{y})$.

Список литературы

1. Букушева А.В. 2015. О геометрии контактных метрических пространств с φ -связностью. Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика, 17 (214) (40): 20–24.
2. Букушева А.В. 2016. Изометрические преобразования продолженных почти контактных метрических структур с метрикой полного лифта. Дифференциальная геометрия многообразий фигур, 47: 39–47.
3. Букушева А.В. 2019. Классификация почти контактных метрических структур на распределениях с внутренней симплектической связностью. Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика, 51(1): 20–24.
4. Букушева А.В., Галаев С.В. 2017. Геометрия почти контактных гиперкэлеровых многообразий. Дифференциальная геометрия многообразий фигур, 48: 32–41.
Галаев С.В. 2016. Обобщенный тензор кривизны Вагнера почти контактных метрических пространств. Чебышевский сборник, 3(59) (17): 53–63.
5. Галаев С.В. 2016. Допустимые гиперкомплексные структуры на распределениях сасакиевых многообразий. Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия. Математика. Механика. Информатика, 16(3): 263–272.
6. Галаев С.В. 2017. Почти контактные метрические многообразия с распределением нулевой кривизны. Научные ведомости Белгородского Государственного университета. Серия: Математика. Физика, 6(255) (46): 36–43.
7. Галаев С.В. 2017. О распределениях со специальной квази-сасакиевой структурой. Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1: Математика. Физика, 2(39): 6–17.
8. Галаев С.В., Гохман А.В. 2001. Почти симплектические связности на неголономном многообразии. Математика. Механика, 3: 28–31.
9. Гордеева И.А., Паньженский В.И., Степанов С.Е. 2009. Многообразия Римана-Картана, Итоги науки и техники (совр. мат-ка и ее прил-я), 123: 110–141.
10. Agricola I., Ferreira A.C. 2014 Einstein manifolds with skew torsion, Quart. J. Math., 65: 717–741.

11. Agricola I., Ferreira A.C., Friedrich Th. 2015. The classification of naturally reductive homogeneous spaces in dimensions $n \leq 6$. *Differential Geom. Appl.*, 39: 59–92.
12. Bejancu A. 2012. Curvature in sub-Riemannian geometry. *Journal of mathematical physics*, 53, 023513.
13. Bukusheva A.V., Galaev S.V. 2011. Almost contact metric structures defined by connection over distribution. *Bulletin of the Transilvania University of Brasov Series III: Mathematics, Informatics, Physics*, 4(53),2: 13–22.
14. Falcon S., Plaza A. 2008. The k-Fibonacci hyperbolic functions. *Chaos, Solitons, Fractals*, 38(2): 409–420.
15. Falcon S., Plaza A. 2009. The metallic ratios as limits of complex valued transformations, *Chaos, Solitons, Fractals*, 41(1): 1–13.
16. Falcon S., Plaza A. 2009. On k-Fibonacci sequences and polynomials and their derivatives, *Chaos, Solitons, Fractals*, 39(3): 1005–1019.
17. Galaev S.V. 2018. Admissible Hyper-Complex Pseudo-Hermitian Structures. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 39(1): 71–76.
18. Galaev S.V. 2015. Intrinsic geometry of almost contact Kahlerian manifolds. *Acta Mathematica Academiae Paedagogicae Nyiregyhaziensis*, 31(1): 35–46.
19. Goldberg S.I., Yano K. 1970. Polynomial structures on manifolds. *Kodai Math. Sem. Rep.*, 22: 199–218.

References

1. Bukusheva A.V. 2015. O geometrii kontaktnykh metricheskikh prostranstv s φ -svyaznost'yu [The geometry of the contact metric spaces φ -connection]. *Scientific Bulletin of Belgorod State University. Ser. Mathematics. Physics*, 17 (214) (40): 20–24.
2. Bukusheva A.V. 2016. Izometricheskie preobrazovaniya prodolzhenykh pochti kontaktnykh metricheskikh struktur s metrikoj polnogo lifta [Isometric transformations of extended almost contact metric structures with a full lift metric]. *Differentsialnaya geometriya mnogoobrazij figur*, 47: 39–47.
3. Bukusheva A.V. 2019. Klassifikaciya pochti kontaktnykh metricheskikh struktur na raspredeleniyah s vnutrennej simplekticheskoy svyaznost'yu [Classification of almost contact metric structures on distributions with internal simplistic connectivity]. *Scientific Bulletin of Belgorod State University. Ser. Mathematics. Physics*, 51(1): 20–24.
4. Bukusheva A.V., Galaev S.V. 2017. Geometriya pochti kontaktnykh giperkehlerovykh mnogoobrazij [Geometry of an almost contact hyper-Kahler manifolds]. *Differentsialnaya geometriya mnogoobrazij figur*, 48: 32–41.
5. Galaev S.V. 2016. Obobshchennyj tenzor krivizny Vagnera pochti kontaktnykh metricheskikh prostranstv [Generalized Wagner's curvature tensor of almost contact metric spaces]. *Chebyshevskii Sbornik*, 17, 3(59): 53–63.
6. Galaev S.V. 2016. Dopustimye giperkompleksnye struktury na raspredeleniyah sasakievych mnogoobrazij [Admissible hypercomplex structures on distributions of Sasakian manifolds]. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 16 (3): 263–272.



7. Galaev S.V. 2017. Pochti kontaktnye metriccheskie mnogoobraziya s raspredeleniem nulevoj krivizny [Almost contact metric manifolds with distribution of zero curvature]. Scientific Bulletin of Belgorod State University. Ser. Mathematics. Physics, 6(255), 46: 36–43.
8. Galaev S.V. 2017. O raspredeleniyah so special'noj kvazi-sasakiyevoy strukturoj [On Distributions with Special Quasi-Sasakian Structure]. Science Journal of VolSU. Mathematics. Physics, 2(39): 6–17.
9. Galaev S.V., Gokhman A.V. 2001. Pochti simplekticheskie svyaznosti na negolonomnom mnogoobrazii [Almost symplectic connections on nonholonomic manifold]. Matematika. Mekhanika, 3: 28–31.
10. Gordeeva, I.A., Panzhensky, V.I., Stepanov, S.E. 2009. Mnogoobraziya Rimana-Kartana [Riemann-Cartan manifolds]. Itogi nauki i tekhniki. M., 123, 110–141.
11. Agricola I., Ferreira A.C. 2014 Einstein manifolds with skew torsion, Quart. J. Math., 65: 717–741.
12. Agricola I., Ferreira A.C., Friedrich Th. 2015. The classification of naturally reductive homogeneous spaces in dimensions $n \leq 6$. Differential Geom. Appl., 39: 59–92.
13. Bejancu A. 2012. Curvature in sub-Riemannian geometry. Journal of mathematical physics, 53, 023513.
14. Bukusheva A.V., Galaev S.V. 2011. Almost contact metric structures defined by connection over distribution. Bulletin of the Transilvania University of Brasov Series III: Mathematics, Informatics, Physics, 4(53),2: 13–22.
15. Falcon S., Plaza A. 2008. The k-Fibonacci hyperbolic functions. Chaos, Solitons, Fractals, 38(2): 409–420.
16. Falcon S., Plaza A. 2009. The metallic ratios as limits of complex valued transformations, Chaos, Solitons, Fractals, 41(1): 1–13.
17. Falcon S., Plaza A. 2009. On k-Fibonacci sequences and polynomials and their derivatives, Chaos, Solitons, Fractals, 39(3): 1005–1019.
18. Galaev S.V. 2018. Admissible Hyper-Complex Pseudo-Hermitian Structures. Lobachevskii Journal of Mathematics, 39(1): 71–76.
19. Galaev S.V. 2015. Intrinsic geometry of almost contact Kahlerian manifolds. Acta Mathematica Academiae Paedagogicae Nyiregyhaziensis, 31(1): 35–46.
20. Goldberg S.I., Yano K. 1970. Polynomial structures on manifolds. Kodai Math. Sem. Rep., 22: 199–218.

Ссылка для цитирования статьи
For citation

Галаев С.В. 2019. Золотое сечение в геометрии η -Эйнштейновых субримановых многообразий с n -связностью. Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика. 51 (4): 465–474. DOI 10.18413/2075-4639-2019-51-4-465-474

Galaev S.V. 2019. Golden rasion in geometry of η -Einstein sub-riemannian manifolds with n -connection. Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics. Physics. 51 (4): 465–474 (in Russian). DOI 10.18413/2075-4639-2019-51-4-465-474

УДК 511.512

DOI 10.18413/2075-4639-2019-51-4-475-486

**ЧИСЛО РЕШЕНИЙ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ, СОДЕРЖАЩЕГО
КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ С РАСТУЩИМ ДИСКРИМИНАНТОМ**
**A NUMBER OF SOLUTIONS OF THE EQUATION, WHICH CONTAINS
QUADRATIC FORMS WITH A GROWING DISCRIMINANT**

Л.Н. Куртова

L.N. Kurtova

Белгородский государственный национальный исследовательский университет,
Россия, 308015, Белгород, ул. Победы, 85Belgorod National Research University,
85 Pobedy St., Belgorod, 308015, Russia

E-mail: kurtova@bsu.edu.ru

Аннотация

В работе рассматривается аналог классической проблемы делителей Ингама. Изучается бинарная аддитивная задача с квадратичными формами. Для числа решений уравнения $Q_1(\bar{m}) - Q_2(\bar{k}) = 1$ была получена асимптотическая формула. Данное уравнение содержит бинарные положительно определенные примитивные квадратичные формы, соответствующие классу идеалов мнимого квадратичного поля $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$. Дискриминант мнимого квадратичного поля является растущим параметром. Число решений уравнения ищется с весами $\exp(-(Q_1(\bar{m}) + Q_2(\bar{k}))/n)$ при росте параметра n . Доказательство асимптотической формулы проводится круговым методом с использованием оценок для двойных сумм Гаусса с учетом растущего дискриминанта и оценки А. Вейля для суммы Клоостермана.

Abstract

In this article, an analogue of the Ingam binary additive divisor problem is considered. A binary additive problem with quadratic forms is studied. The asymptotical formula of the number of solution of diophantine equation $Q_1(\bar{m}) - Q_2(\bar{k}) = 1$ is received. This equation contains binary positive defined primitive quadratic forms $Q_1(\bar{m})$ and $Q_2(\bar{k})$ corresponded to the ideal class of imaginary quadratic fields $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$. The discriminant of an imaginary quadratic field is a growing parameter. The number of solutions searched with weights $\exp(-(Q_1(\bar{m}) + Q_2(\bar{k}))/n)$ with the growth of the parameter n . Proof of the asymptotical formula is carried out by the circular method. The estimation of Gauss double sums with growing discriminant and estimation of Kloosterman's sum by A. Weil are used.

Ключевые слова: аддитивная задача, асимптотическая формула, число решений, двойная сумма Гаусса, сумма Клоостермана.

Key words: additive problem, asymptotic formula, number of solutions, double Gauss sum, Kloosterman sum.

Введение

В 1927 году А.Е. Ингам [Ingham, 1927] рассмотрел уравнение

$$x_1x_2 - x_3x_4 = 1, \quad x_1x_2 \leq n,$$

где $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{N}$, и элементарными методами получил асимптотическую формулу для числа его решений $J(n)$:

$$J(n) = \frac{6}{\pi^2} n \ln^2 n + O(n \ln n).$$

Рассмотренная проблема получила название неопределенной бинарной аддитивной проблемы делителей.

Важным этапом в изучении данной проблемы является использование кругового метода. Т. Эстерман в своей работе [Estermann, 1931] получил асимптотическую формулу:

$$J(n) = nP_2(\ln n) + R(n),$$

где $P_2(x)$ – многочлен 2-ой степени, а $R(n) = O(n^{11/12} \cdot \ln^{17/3} n)$. В этой формуле остаточный член имеет степенное понижение по сравнению с главным.

Дальнейшие исследования связаны с уточнением остатка в асимптотической формуле для $J(n)$.

Отметим работы Д.И. Исмоилова [Исмоилов, 1979] и Д.Р. Хиз-Брауна [Heath-Brown, 1979], в которых была получена оценка: $R(n) \ll n^{5/6+\varepsilon}$, где $\varepsilon > 0$ – сколь угодно малая постоянная. В первой работе использовались улучшенные оценки для суммы Клоостермана, а во второй – метод производящих функций.

Методами аналитической теории чисел Г.И. Архипов и В.Н. Чубариков [Архипов, Чубариков, 2006] получили новую оценку остатка: $R(n) \ll n^{3/4} \ln^4 n$.

В результате развития теории коэффициентов Фурье собственных функций оператора Лапласа, было получено новое представление суммы сумм Клоостермана. На основе этого представления Ж.-М. Дезуье и Х. Иванец [Deshouillers, Iwaniec, 1982] доказали, что $R(n) \ll n^{2/3+\varepsilon}$.

Кроме задачи, связанной с улучшением остаточного члена в проблеме делителей Ингама, рассматриваются различные обобщения и аналоги данной проблемы.

Ю.В. Линник [Линник, 1961], используя дисперсионный метод, получил полное решение неопределенной аддитивной проблемы делителей: $xy - x_1x_2 \cdots x_k = 1$, $xy \leq n$, где $x, y, x_1, x_2, \dots, x_k \in \mathbb{N}$.

Исследования автора посвящены бинарным аддитивным задачам с квадратичными формами, также относящимся к аналогам проблемы делителей Ингама.

В работе [Куртова, 2007] решена задача получения асимптотической формулы для числа решений уравнения $Q_1(\bar{m}) - Q_2(\bar{k}) = 1$, содержащего бинарные положительно определенные примитивные квадратичные формы, соответствующие классам идеалов мнимого квадратичного поля $F = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$, где d – отрицательное бесквадратное число. Полученная формула справедлива при $n \rightarrow \infty$. При этом дискриминант мнимого квадратичного поля является фиксированным параметром.

В данной работе рассматривается задача, когда дискриминант мнимого квадратичного поля является растущим параметром.

Пусть d – отрицательное бесквадратное число, $F = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ – мнимое квадратичное поле, $\delta_F = -D$ – дискриминант поля F ; $Q_i(\bar{m}) = \frac{1}{2} \bar{m}^t A_i \bar{m}$ – бинарные положительно определенные примитивные квадратичные формы с матрицами A_i , $\det A_i = D$, $i = 1, 2$.

Пусть

$$I(n, D) = \sum_{Q_1(\bar{m}) - Q_2(\bar{k}) = 1} e^{-(Q_1(\bar{m}) + Q_2(\bar{k}))/n}.$$



В работе проводится доказательство следующей теоремы.

Теорема. Пусть ε – произвольное положительное число, $\delta_F = -D$ – дискриминант поля F , $n \in \mathbb{N}$.

Тогда при $n \rightarrow \infty$ и $D \ll n^{1/8-\varepsilon}$ справедлива асимптотическая формула:

$$I(n, D) = \frac{2\pi^2 n}{D} \sum_{q=1}^{+\infty} q^{-4} \sum_{\substack{l=1, \\ (l,q)=1}}^q e^{-2\pi il/q} G_1(q, l, \bar{0}) G_2(q, -l, \bar{0}) + O(D^{1+\varepsilon} n^{3/4+\varepsilon}),$$

где $G_i(q, l, \bar{0}) = \sum_{\bar{m} \pmod q} \exp(2\pi il Q_i(\bar{m})/q)$ ($i = 1, 2$) – двойные суммы Гаусса. Сумма особого ряда асимптотической формулы положительна. Константа в знаке O абсолютная.

2. Вспомогательные леммы

Лемма 1. (Функциональное уравнение для двумерного тета-ряда) [Ogg, 1969, глава VI]. Пусть $Im\tau > 0$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^2$, $Q(\bar{n})$ – положительно определенная квадратичная форма дискриминанта δ_F с матрицей A ,

$$\theta(\tau, \bar{x}) = \sum_{\bar{n} \in \mathbb{Z}^2} \exp(2\pi i \tau Q(\bar{n} + \bar{x})).$$

Тогда

$$\theta(\tau, \bar{x}) = \frac{i}{\tau \sqrt{\delta_F}} \sum_{\bar{n} \in \mathbb{Z}^2} \exp\left(-\frac{\pi i}{\tau} \bar{n}^t A^{-1} \bar{n} + 2\pi i \bar{n}^t \bar{x}\right).$$

Лемма 2. [Лаврентьев, Шабат, 1958, глава VI]. Пусть $q, q', q'' \leq N$. Тогда справедливо равенство

$$\int_{-[q(q+q'')]^{-1}}^{[q(q+q')]^{-1}} \frac{e^{-2\pi i x}}{n^{-2} + 4\pi^2 x^2} dx = \frac{n}{2} + O(qN).$$

Лемма 3. (Оценка суммы Kloostermana) [Estermann, 1961], [Малышев, 1962]. Пусть $ll^* \equiv 1 \pmod q$, $K(q, u, v) = \sum_{\substack{l=1, \\ (l,q)=1}}^q \exp(2\pi i (ul + vl^*)/q)$ – сумма Kloostermana. Справедлива оценка

$$K(q, u, v) \ll \tau(q) q^{1/2} (u, v, q)^{1/2}.$$

Лемма 4. (Равенства и оценки для произведения двойных сумм Гаусса) Пусть $D = -\delta_F$; $Q_1(\bar{m}), Q_2(\bar{k})$ – бинарные положительно определенные примитивные квадратичные формы с дискриминантом D ; $(l, q) = 1$.

Пусть $(q, D) = D_1$, $ll^* \equiv 1 \pmod q$, $(D/D_1)(D/D_1)^* \equiv 1 \pmod q$, $q = 2^{\alpha_1} \dots p_s^{\alpha_s}$. Тогда

$$G_1(q, l, \bar{m}) G_2(q, -l, \bar{k}) = C_1(q, D) q^2 \exp\left(-2\pi i \frac{l^*}{q} C_2(q, D) (Q'_1(\bar{m}) - Q'_2(\bar{k}))\right).$$

Если $D_1 = 1$, то $C_1(q, D) = 1$, $C_2(q, D) = D^*$.

Если $D_1 > 1$, то $|C_1(q, D)| \leq D_1$, $C_2(q, D) = (D/D_1)^*/D_1$.



□ Случай, когда $(q, D) = 1$, подробно изложен в [Куртова, 2019]. Для квадратичных форм разных дискриминантов было получено равенство:

$$G_1(q, l, \bar{m})G_2(q, -l, \bar{k}) = C(q, \delta_{F_1}, \delta_{F_2})q^2 \exp\left(-2\pi i \frac{l^*}{q}(D_1^*Q'_1(\bar{m}) - D_2^*Q'_2(\bar{k}))\right),$$

где $C(q, \delta_{F_1}, \delta_{F_2}) = (-1)^{\frac{(2-\delta_{F_1}-\delta_{F_2})\alpha_1}{4}} \left(\frac{\delta_{F_1}\delta_{F_2}}{p_2^{\alpha_2}\dots p_s^{\alpha_s}}\right)$.

С учетом условия $\delta_{F_1} = \delta_{F_2} = -D$, можем считать, что $D_1^* = D_2^* = D^*$ и $C(q, \delta_{F_1}, \delta_{F_2}) = C_1(q, D) = (-1)^{\frac{(1-\delta_F)\alpha_1}{2}}$.

Так как или $\delta_F \equiv 1 \pmod{4}$, или $\alpha_1 = 0$, то $(-1)^{\frac{(1-\delta_F)\alpha_1}{2}} = 1$. Таким образом, если $(q, D) = 1$, то

$$G_1(q, l, \bar{m})G_2(q, -l, \bar{k}) = q^2 \exp\left(-2\pi i \frac{l^*D^*}{q}(Q'_1(\bar{m}) - Q'_2(\bar{k}))\right).$$

Для случая, когда $(q, D) > 1$, будем использовать точные формулы для сумм Гаусса от степени простого числа, которые доказаны в работах С.А. Гриценко [Гриценко, 2003], [Гриценко, 2012]. В работе [Куртова, 2014, с. 29] приводится равенство:

$$G_1(q, l, \bar{m})G_2(q, -l, \bar{k}) = C_1(q, D)q^2 \exp\left(-2\pi i \frac{l^*}{q}C_2(q, D)(Q'_1(\bar{m}) - Q'_2(\bar{k}))\right),$$

где

$$C_1(q, D) = C_3(D_1, Q'_1(\bar{m}), Q'_2(\bar{k}))D_1, \quad C_2(q, D) = (D/D_1)^*/D_1.$$

Параметр $C_3(D_1, Q'_1(\bar{m}), Q'_2(\bar{k})) \ll 1$, тогда $|C_1(q, D)| \leq D_1$. ■

Лемма 5. Пусть $V(q, D, \bar{m}, \bar{k}) = \sum_{\substack{l=1, \\ (l, q)=1}}^q e^{-2\pi i l/q} G_1(q, l, \bar{m})G_2(q, -l, \bar{k})$. Справедливы следующие оценки:

$$V(q, D, \bar{0}, \bar{0}) \ll (q, D)q^2,$$

$$V(q, D, \bar{m}, \bar{k}) \ll (q, D)q^{5/2+\varepsilon}.$$

□ Доказательство леммы будет проводится теми же методами, что и в работе [Куртова, 2014, с. 33]. При получении оценок будем учитывать, что параметр D растущий. Пусть $q = q_1q_2$, $(q_1, q_2) = 1$, $(q_1, D) = 1$; q_2 – либо 1, либо натуральное число, все простые делители которого делят D . Так как сумма Гаусса является вполне мультипликативной функцией, т. е.

$$G_1(q_1q_2, l, \bar{m}) = G_1(q_1, l_1q_2^2, \bar{m})G_1(q_2, l_2q_1^2, \bar{m}),$$

то и функция $V(q, D, \bar{m}, \bar{k})$ мультипликативна. Тогда

$$V(q_1q_2, D, \bar{m}, \bar{k}) = V_1(q_1, D, q_2, \bar{m}, \bar{k})V_2(q_2, D, q_1, \bar{m}, \bar{k}).$$

Оценим каждую из функций $V_1(q_1, D, q_2, \bar{m}, \bar{k})$ и $V_2(q_2, D, q_1, \bar{m}, \bar{k})$. Воспользуемся результатами из леммы 4.

Так как $(q_1, D) = 1$, то из равенства для произведений сумм Гаусса имеем

$$V_1(q_1, D, q_2, \bar{m}, \bar{k}) = q_1^2 \sum_{\substack{l_1=1, \\ (l_1, q_1)=1}}^{q_1} \exp\left(-2\pi i \frac{l_1}{q_1} - 2\pi i \frac{l_1^*(q_2^2)^*}{q_1} D^*(Q'_1(\bar{m}) - Q'_2(\bar{k}))\right).$$



К полученной сумме Клостермана $K(q_1, -1, -(q_2^2)^* D^*(Q_1'(\bar{m}) - Q_2'(\bar{k})))$ применим оценку из леммы 3. Тогда $V_1(q_1, D, q_2, \bar{m}, \bar{k}) \ll q_1^{5/2+\varepsilon}$.

В случае, когда $\bar{m} = \bar{0}, \bar{k} = \bar{0}$, можем улучшить данную оценку. Имеем:

$$V_1(q_1, D, q_2, \bar{0}, \bar{0}) = q_1^2 \sum_{\substack{l_1=1, \\ (l_1, q_1)=1}}^{q_1} e^{-2\pi i l_1 / q_1} = q_1^2 \mu(q_1) \ll q_1^2.$$

Так как $(q_2, D) > 1$, то из равенства для произведений сумм Гаусса имеем

$$V_2(q_2, D, q_1, \bar{m}, \bar{k}) = C_1(q_2, D) q_2^2 \sum_{\substack{l_2=1, \\ (l_2, q_2)=1}}^{q_2} \exp\left(-2\pi i \frac{l_2}{q_2} - 2\pi i \frac{l_2^* (q_1^2)^*}{q_2} C_2(q_2, D) (Q_1'(\bar{m}) - Q_2'(\bar{k}))\right).$$

К полученной сумме Клостермана $K(q_1, -1, -(q_1^2)^* C_2(q_2, D) (Q_1'(\bar{m}) - Q_2'(\bar{k})))$ применим оценку из леммы 3. Тогда $V_2(q_2, D, q_1, \bar{m}, \bar{k}) \ll (q_2, D) q_2^{5/2+\varepsilon}$.

В случае, когда $\bar{m} = \bar{0}, \bar{k} = \bar{0}$, можем улучшить данную оценку. Имеем:

$$V_2(q_2, D, q_1, \bar{0}, \bar{0}) = (q_2, D) q_2^2 \sum_{\substack{l_2=1, \\ (l_2, q_2)=1}}^{q_2} e^{-2\pi i l_2 / q_2} = (q_2, D) q_2^2 \mu(q_2) \ll (q_2, D) q_2^2.$$

Объединяем полученные оценки для $V_1(q_1, D, q_2, \bar{m}, \bar{k})$ и $V_2(q_2, D, q_1, \bar{m}, \bar{k})$. Так как $q = q_1 q_2, (q_1, D) = 1$, то $(q_2, D) = (q, D)$. ■

3. Доказательство теоремы

1. Используя круговой метод, можем сумму $I(n, D)$ записать в виде интеграла:

$$I(n, D) = \int_0^1 S_1(\alpha) S_2(\alpha) e^{-2\pi i \alpha} d\alpha,$$

где

$$S_1(\alpha) = \sum_{\bar{m} \in \mathbb{Z}^2} e^{(-1/n + 2\pi i \alpha) Q_1(\bar{m})}, \quad S_2(\alpha) = \sum_{\bar{k} \in \mathbb{Z}^2} e^{(-1/n - 2\pi i \alpha) Q_2(\bar{k})}.$$

Выберем $N = [\sqrt{n}]$, $\xi_{0,1} = [-\frac{1}{N}, \frac{1}{N}]$. Разобьем промежуток $[-\frac{1}{N}, 1 - \frac{1}{N}]$ числами ряда Фарея, отвечающего параметру N (см. [Виноградов, 2004]). Пусть $\frac{l''}{q''} < \frac{l}{q} < \frac{l'}{q'}$ – соседние дроби Фарея, $1 \leq l, q \leq N, q' \leq N, q'' \leq N$.

Будем рассматривать промежутки $\xi_{l,q} = [l/q - 1/q(q + q''), l/q + 1/q(q + q'')]$, для которых справедливы следующие свойства: $[-\frac{1}{N}, 1 - \frac{1}{N}] = \bigcup_{q=1}^N \bigcup_{\substack{l=0 \\ (l,q)=1}}^{q-1} \xi_{l,q}$, причем $\xi_{l,q} \cap \xi_{l',q'} = \emptyset$ при

$(l, q) \neq (l', q')$. Тогда

$$\begin{aligned} I(n, D) &= \sum_{q \leq N} \sum_{\substack{l=1, \\ (l,q)=1}}^q \int_{\xi_{l,q}} S_1(\alpha) S_2(\alpha) e^{-2\pi i \alpha} d\alpha = \\ &= \sum_{q \leq N} \sum_{\substack{l=1, \\ (l,q)=1}}^q e^{-2\pi i l / q} \int_{-[q(q+q'')]^{-1}}^{[q(q+q'')]^{-1}} S_1(l/q + x) S_2(l/q + x) e^{-2\pi i x} dx. \end{aligned}$$



2. Для сумм $S_1(l/q + x)$ и $S_2(l/q + x)$ проведем преобразования, связанные с разбиением по арифметическим прогрессиям с разностью q , которые позволят использовать для них функциональное уравнение из леммы 1.

$$\begin{aligned} S_1(l/q + x) &= \sum_{\bar{m} \in \mathbb{Z}^2} \exp((-n^{-1} + 2\pi il/q + 2\pi ix)Q_1(\bar{m})) = \\ &= \sum_{\substack{\bar{s} \pmod{q} \\ \bar{m} \equiv \bar{s} \pmod{q}}} e^{2\pi il/q Q_1(\bar{s})} \sum_{\substack{\bar{m} \in \mathbb{Z}^2 \\ \bar{m} \equiv \bar{s} \pmod{q}}} e^{(-n^{-1} + 2\pi ix)Q_1(\bar{m})} = \\ &= \sum_{\bar{s} \pmod{q}} e^{2\pi ial/q Q_1(\bar{s})} \theta\left(x + \frac{i}{2\pi n}q^2, \bar{s}/q\right), \end{aligned}$$

где для $\theta\left(x + \frac{i}{2\pi n}q^2, \bar{s}/q\right)$ применим функциональное уравнение из леммы 1.

Тогда для $S_1(l/q + x)$ получим равенство

$$S_1\left(\frac{l}{q} + x\right) = \frac{2\pi}{q^2 \sqrt{D}(n^{-1} - 2\pi ix)} \sum_{\bar{m} \in \mathbb{Z}^2} \exp\left(-\frac{2\pi^2 Q'_1(\bar{m})}{Dq^2(n^{-1} - 2\pi ix)}\right) G_1(q, l, \bar{m}).$$

Из полученного равенства выделим главное слагаемое, когда $\bar{m} = \bar{0}$. Тогда $S_1(l/q + x)$ можно представить в виде суммы: $S_1(l/q + x) = \varphi_1 + \Phi_1$, где

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{2\pi}{q^2 \sqrt{D}(n^{-1} - 2\pi ix)} G_1(q, l, \bar{0}), \\ \Phi_1 &= \frac{2\pi}{q^2 \sqrt{D}(n^{-1} - 2\pi ix)} \sum_{\substack{\bar{m} \in \mathbb{Z}^2 \\ \bar{m} \neq \bar{0}}} \exp\left(-\frac{2\pi^2 Q'_1(\bar{m})}{Dq^2(n^{-1} - 2\pi ix)}\right) G_1(q, l, \bar{m}). \end{aligned}$$

Аналогичные преобразования для второй суммы дают следующее представление для $S_2(l/q + x) = \varphi_2 + \Phi_2$, где

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= \frac{2\pi}{q^2 \sqrt{D}(n^{-1} + 2\pi ix)} G_2(q, -l, \bar{0}), \\ \Phi_2 &= \frac{2\pi}{q^2 \sqrt{D}(n^{-1} + 2\pi ix)} \sum_{\substack{\bar{k} \in \mathbb{Z}^2 \\ \bar{k} \neq \bar{0}}} \exp\left(-\frac{2\pi^2 Q'_2(\bar{k})}{Dq^2(n^{-1} + 2\pi ibx)}\right) G_2(q, -l, \bar{k}). \end{aligned}$$

3. В формулу для $I(n, D)$, полученную в пункте 1, подставим представления для функций $S_1(l/q + x)$ и $S_2(l/q + x)$. Тогда

$$I(n, D) = I_1 + I_2 + I_3 + I_4,$$

где

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{4\pi^2}{D} \sum_{q \leq N} q^{-4} \sum_{\substack{l=1, \\ (l,q)=1}}^q e^{-2\pi il/q} G_1(q, l, \bar{0}) G_2(q, -l, \bar{0}) \int_{-[q(q+q'')]^{-1}}^{[q(q+q')]^{-1}} \frac{e^{-2\pi ix} dx}{n^{-2} + 4\pi^2 x^2}, \\ I_2 &= \sum_{q \leq N} \sum_{\substack{l=1, \\ (l,q)=1}}^q e^{-2\pi il/q} \int_{-[q(q+q'')]^{-1}}^{[q(q+q')]^{-1}} \varphi_1 \Phi_2 e^{-2\pi ix} dx, \end{aligned}$$



$$I_3 = \sum_{q \leq N} \sum_{\substack{l=1, \\ (l,q)=1}}^q e^{-2\pi il/q} \int_{-[q(q+q'')]^{-1}}^{[q(q+q')]^{-1}} \varphi_2 \Phi_1 e^{-2\pi i x} dx,$$

$$I_4 = \sum_{q \leq N} \sum_{\substack{l=1, \\ (l,q)=1}}^q e^{-2\pi il/q} \int_{-[q(q+q'')]^{-1}}^{[q(q+q')]^{-1}} \Phi_1 \Phi_2 e^{-2\pi i x} dx.$$

Интеграл I_1 является главным членом асимптотической формулы. Для оставшихся интегралов проведем оценку сверху.

4. Вычислим интеграл I_1 , используя равенство из леммы 2. Тогда

$$I_1 = \frac{2\pi^2 n}{D} \sum_{q \leq N} q^{-4} \sum_{\substack{l=1, \\ (l,q)=1}}^q e^{-2\pi il/q} G_1(q, l, \bar{0}) G_2(q, -l, \bar{0}) + O(I_{1,1}),$$

где

$$I_{1,1} = \frac{N}{D} \sum_{q \leq N} q^{-3} \sum_{\substack{l=1, \\ (l,q)=1}}^q e^{-2\pi il/q} G_1(q, l, \bar{0}) G_2(q, -l, \bar{0}) = \frac{N}{D} \sum_{q \leq N} q^{-3} V(q, D, \bar{0}, \bar{0}).$$

Функцию $V(q, D, \bar{0}, \bar{0})$ оценим, используя неравенство из леммы 5. Получаем следующую оценку:

$$\begin{aligned} I_{1,1} &\ll \frac{N}{D} \sum_{q \leq N} q^{-3} |V(q, D, \bar{0}, \bar{0})| \ll \frac{N}{D} \sum_{q \leq N} (q, D) q^{-1} \ll \\ &\ll \frac{N}{D} \sum_{t|D} \sum_{q \leq \frac{N}{t}} q^{-1} \ll N^{1+\varepsilon} / D^{1-\varepsilon} \ll n^{1/2+\varepsilon} / D^{1-\varepsilon}. \end{aligned}$$

Оценим сумму

$$R = \frac{n}{D} \sum_{q > N} q^{-4} \sum_{\substack{l=1, \\ (l,q)=1}}^q e^{-2\pi il/q} G_1(q, l, \bar{0}) G_2(q, -l, \bar{0}) = \frac{n}{D} \sum_{q > N} q^{-4} V(q, D, \bar{0}, \bar{0}).$$

Снова используем лемму 5. Получаем, что

$$\begin{aligned} R &\ll \frac{n}{D} \sum_{q > N} q^{-4} |V(q, D, \bar{0}, \bar{0})| \ll \frac{n}{D} \sum_{q \leq N} (q, D) q^{-2} \ll \\ &\ll \frac{n}{D} \sum_{t|D} t^{-1} \sum_{q > \frac{N}{t}} q^{-2} \ll n^{1/2+\varepsilon} / D^{1-\varepsilon}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$I_1 = \frac{4\pi^2 n}{D} \sum_{q=1}^{+\infty} q^{-4} \sum_{\substack{l=1, \\ (l,q)=1}}^q e^{-2\pi il/q} G_1(q, l, \bar{0}) G_2(q, -l, \bar{0}) + O(n^{1/2+\varepsilon} / D^{1-\varepsilon}).$$



5. Оценка остаточных слагаемых I_2, I_3, I_4 существенно не отличается, поэтому рассмотрим доказательство только для I_4 :

$$I_4 = \sum_{q \leq N} \sum_{\substack{l=1, \\ (l,q)=1}}^q e^{-2\pi il/q} \int_{-[q(q+q'')]^{-1}}^{[q(q+q')]^{-1}} \Phi_1 \Phi_2 e^{-2\pi ix} dx.$$

Используем равенства для Φ_1, Φ_2 , полученные в пункте 2.

$$I_4 = \frac{4\pi^2}{D} \sum_{q \leq N} q^{-4} \int_{-[q(q+q'')]^{-1}}^{[q(q+q')]^{-1}} \frac{e^{2\pi ix} dx}{n^{-2} + 4\pi^2 x^2} \times \\ \times \sum_{\substack{\bar{m} \in \mathbf{Z}^2 \\ \bar{m} \neq \bar{0}}} \exp\left(-\frac{2\pi^2 Q'_1(\bar{m})}{q^2 D(n^{-1} - 2\pi ix)}\right) \sum_{\substack{\bar{k} \in \mathbf{Z}^2 \\ \bar{k} \neq \bar{0}}} \exp\left(-\frac{2\pi^2 Q'_2(\bar{k})}{q^2 D(n^{-1} + 2\pi ix)}\right) V(q, D, \bar{m}, \bar{k}).$$

Пусть θ – сколь угодно малое положительное число. Выделим интеграл малой длины:

$$\int_{-[q(q+q'')]^{-1}}^{[q(q+q')]^{-1}} = \int_{-[q(q+q'')]^{-1}}^{-[qn^{1/2+\theta}]^{-1}} + \int_{-[qn^{1/2+\theta}]^{-1}}^{[qn^{1/2+\theta}]^{-1}} + \int_{[qn^{1/2+\theta}]^{-1}}^{[q(q+q')]^{-1}}.$$

После проведенного разбиения I_4 представляется в виде суммы: $I_4 = I_{4,1} + I_{4,2} + I_{4,3}$.

6. Проведем оценку $I_{4,2}$. Прежде всего учтем, что $V(q, D, \bar{m}, \bar{k}) \ll (q, D)q^{5/2+\varepsilon}$. Тогда

$$I_{4,2} \ll \frac{1}{D} \sum_{q \leq N} (q, D)q^{-3/2+\varepsilon} \int_0^{[qn^{1/2+\theta}]^{-1}} \frac{dx}{n^{-2} + 4\pi^2 x^2} \times \\ \times \sum_{\substack{\bar{m} \in \mathbf{Z}^2 \\ \bar{m} \neq \bar{0}}} \exp\left(-\frac{2\pi^2 Q'_1(\bar{m})}{q^2 D(n^{-1} + 4\pi^2 x^2 n)}\right) \sum_{\substack{\bar{k} \in \mathbf{Z}^2 \\ \bar{k} \neq \bar{0}}} \exp\left(-\frac{2\pi^2 Q'_2(\bar{k})}{q^2 D(n^{-1} + 4\pi^2 x^2 n)}\right).$$

В полученной сумме по q выделим следующие слагаемые:

$$I_{4,2} \ll \sum_{q \leq n^{1/2-\theta}} \int_0^{[qn^{1/2+\theta}]^{-1}} + \sum_{n^{1/2-\theta} < q \leq N} \int_0^{[qn^{1/2+\theta}]^{-1}} = \sum_{41} + \sum_{42}.$$

Для \sum_{41} учитываем, что $q \leq n^{1/2-\theta}$ и $0 \leq x \leq [qn^{1/2+\theta}]^{-1}$. Получаем

$$\exp\left(-\frac{2\pi^2 Q'_i(\bar{m})}{q^2 D(n^{-1} + 4\pi^2 x^2 n)}\right) \ll \exp(-cn^{2\theta}/D),$$

где c – постоянная, $i = 1, 2$. Тогда

$$\sum_{\substack{\bar{m} \in \mathbf{Z}^2 \\ \bar{m} \neq \bar{0}}} \exp\left(-\frac{2\pi^2 Q'_1(\bar{m})}{q^2 D(n^{-1} + 4\pi^2 x^2 n)}\right) = O(D \exp(-cn^{2\theta})),$$



$$\sum_{\substack{\bar{k} \in \mathbb{Z}^2 \\ \bar{k} \neq \bar{0}}} \exp\left(-\frac{2\pi^2 Q'_2(\bar{k})}{q^2 D(n^{-1} + 4\pi^2 x^2 n)}\right) = O(D \exp(-cn^{2\theta})).$$

Проведем оценивание интеграла при условии, что $q \leq n^{1/2-\theta}$:

$$\int_0^{[qn^{1/2+\theta}]^{-1}} \frac{dx}{n^{-2} + 4\pi^2 x^2} \ll \int_0^{2\pi[qn^{1/2+\theta}]^{-1}} \frac{dt}{n^{-2} + t^2} \ll n^{3/2-\theta} q^{-1}.$$

После проведенных рассуждений получаем:

$$\sum_{41} \ll n^{3/2-\theta} D \exp(-cn^{2\theta}) \sum_{q \leq n^{1/2-\theta}} (q, D) q^{-5/2+\varepsilon} \ll n^{3/4+\varepsilon} D^{1+\varepsilon}.$$

Рассмотрим \sum_{42} . В данной сумме $q \leq N$ и $0 \leq x \leq [qn^{1/2+\theta}]^{-1}$, поэтому

$$\exp\left(-\frac{2\pi^2 Q'_i(\bar{m})}{q^2 D(n^{-1} + 4\pi^2 x^2 n)}\right) \ll \exp(-cQ'_i(\bar{m})/D),$$

где c – постоянная, $i = 1, 2$. Тогда

$$\sum_{\substack{\bar{m} \in \mathbb{Z}^2 \\ \bar{m} \neq \bar{0}}} \exp\left(-\frac{2\pi^2 Q'_1(\bar{m})}{q^2 D(n^{-1} + 4\pi^2 x^2 n)}\right) = O(D), \quad \sum_{\substack{\bar{k} \in \mathbb{Z}^2 \\ \bar{k} \neq \bar{0}}} \exp\left(-\frac{2\pi^2 Q'_2(\bar{k})}{q^2 D(n^{-1} + 4\pi^2 x^2 n)}\right) = O(D).$$

Для интеграла справедлива тривиальная оценка: $\int_0^{[qn^{1/2+\theta}]^{-1}} \frac{dx}{n^{-2} + 4\pi^2 x^2} \ll n \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} \ll n$.

В итоге получаем следующую оценку для суммы \sum_{42} :

$$\begin{aligned} \sum_{42} &\ll nD \sum_{n^{1/2-\theta} < q \leq N} (q, D) q^{-3/2+\varepsilon} \ll \\ &\ll nD \sum_{t|D} t^{-1/2+\varepsilon} \sum_{q < \frac{N}{t}} q^{-3/2+\varepsilon} \ll n^{3/4+\varepsilon} D^{1+\varepsilon}. \end{aligned}$$

Таким образом, $I_{4,2} = O(n^{3/4+\varepsilon} D^{1+\varepsilon})$.

7. Проведем оценку для $I_{4,3}$. Так как $V(q, D, \bar{m}, \bar{k}) \ll (q, D) q^{5/2+\varepsilon}$, $q \leq N$ и $[qn^{1/2+\theta}]^{-1} \leq x \leq [q(q + q')]^{-1}$, то

$$\left| \sum_{\substack{\bar{m} \in \mathbb{Z}^2 \\ \bar{m} \neq \bar{0}}} \exp\left(-\frac{2\pi^2 Q'_1(\bar{m})}{q^2 D_1(n^{-1} - 2\pi i x)}\right) \right| = O(D), \quad \left| \sum_{\substack{\bar{k} \in \mathbb{Z}^2 \\ \bar{k} \neq \bar{0}}} \exp\left(-\frac{2\pi^2 Q'_2(\bar{k})}{q^2 D_2(n^{-1} + 2\pi i x)}\right) \right| = O(D).$$

Кроме того, при $q \leq N$ справедлива следующая оценка интеграла:

$$\int_{[qn^{1/2+\theta}]^{-1}}^{[q(q+q')]^{-1}} \frac{e^{-2\pi i h x} dx}{n^{-2} + 4\pi^2 x^2} \ll \int_{[qn^{1/2+\theta}]^{-1}}^{+\infty} \frac{dx}{x^2} \ll qn^{1/2+\theta}.$$

После произведенных оценок получаем, что

$$I_{4,3} \ll n^{1/2+\theta} D \sum_{q \leq N} (q, D) q^{-1/2+\varepsilon} \ll n^{1/2+\theta} D \sum_{t|D} t^{1/2+\varepsilon} \sum_{q \leq N/t} q^{-1/2+\varepsilon} \ll n^{3/4+\theta+\varepsilon} D^{1+\varepsilon}.$$

Интеграл $I_{4,1}$ оценивается также, как $I_{4,3}$. Объединяя оценки, полученные в пунктах 6 и 7, можем утверждать, что $I_4 = O(n^{3/4+\varepsilon} D^{1+\varepsilon})$. Следовательно, остаточный член асимптотической формулы для $I(n, D)$ имеет оценку $O(n^{3/4+\varepsilon} D^{1+\varepsilon})$.

4. Заключение

Доказана асимптотическая формула для числа решений уравнения $Q_1(\bar{m}) - Q_2(\bar{k}) = 1$ с весами $\exp(-(Q_1(\bar{m}) + Q_2(\bar{k}))/n)$ при двух растущих параметрах $n \rightarrow \infty$ и $D \ll n^{1/8-\varepsilon}$. $D = -\delta_F$ является дискриминантом мнимого квадратичного поля $F = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$, и связан с квадратичными формами, входящими в уравнение. Для доказательства применяются новые оценки для сумм Гаусса, содержащих квадратичные формы, с учетом растущего дискриминанта.

Список литературы

1. Архипов Г.И., Чубариков В.Н. 2006. Об аддитивной проблеме делителей Ингама. Вестник Московского университета. Сер. 1. Математика. Механика. № 5: 32–35.
2. Виноградов И.М. 2004. Основы теории чисел. СПб-М., Лань, 167 с.
3. Гриценко С.А. 2003. О функциональном уравнении одного арифметического ряда Дирихле. Чебышевский сборник. Т. 4. Вып. 2: 53–67.
4. Гриценко С.А. 2012. Об одной аддитивной задаче и ее приложении к проблеме распределения нулей линейных комбинаций L-функций Гекке на критической прямой. Тр. МИАН. 276: 96–108.
5. Исмоилов Д.И. 1979. Об асимптотике представления чисел как разности двух произведений. Докл. АН Тадж. ССР. Т. 22, № 2: 75–79.
6. Кузнецов Н.В. 1980. Гипотеза Петерсона для параболических форм веса нуль и гипотеза Линника. Суммы сумм Клоостермана. Матем. сб. Т. 111(153). № 3: 334–383.
7. Куртова Л.Н. 2007. Об одной бинарной аддитивной задаче с квадратичными формами. Вестник Самарского государственного университета. Естественнонаучная серия. Математика. № 7(57): 107–121.
8. Куртова Л.Н. 2014. Бинарные аддитивные задачи с квадратичными формами. Дис. канд. физ.-мат. наук, Ульяновск. гос. университет, Ульяновск, 115 с.
9. Куртова Л.Н. 2019. Число решений уравнения с квадратичными формами разных дискриминантов. Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика Физика: Научный рецензируемый журнал. Белгород: Изд-во "БелГУ". № 3 (51): 374–386.
10. Лаврентьев М.А. Шабат Б.В. 1958. Методы теории функций комплексного переменного. М., Физматлит, 678 с.
11. Линник Ю.В. 1961. Дисперсионный метод в бинарных аддитивных задачах. Л., Изд-во ЛГУ, 208 с.

12. Малышев А.В. 1962. О представлении целых чисел положительными квадратичными формами. Труды математического института им. В.А. Стеклова АН СССР. Т. 65: 3–212.
13. Пачев У.М., Дохов Р.А. 2013. О двойных суммах Гаусса, соответствующих классам идеалов мнимого квадратичного поля. Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика. № 19(162). Вып. 32: 108–119.
14. Deshouillers J.-M., Iwaniec H. 1982. An additive divisor problem. J. London Math. Soc. V. 26(2): 1–14.
15. Estermann T. 1931. Uber die Darstellung einer Zahl als Differenz von zwei Produkten. J. Reine Angew. Math. V. 164: 173–182.
16. Estermann T. 1961. On Kloostermann's sum. Mathematika. 8: 83–86.
17. Heath-Brown D.R. 1979. The fourth power moment of the Riemann zeta-function. Proc. London Math. Soc. V. 38. № 3: 385–422.
18. Ingham A.E. 1927. Some asymptotic formulae in the theory of numbers. J. London Math. Soc. V. 2(7): 202–208.
19. Ogg A.P. 1969. Modular Forms and Dirichlet Series. N.-Y., W.A. Benjamin Inc., 211 p.
20. Weil A. 1948. On some exponential sums. Proc. Nat. Acad. Of Sci. 34: 204–207.

References

1. Arhipov G.I., Chubarikov V.N. 2006. Ob additivnoj probleme delitelej Ingama [On the Ingam additive problem]. Vestnik Moskovskogo universiteta. Ser. 1. Matematika. Mehanika. № 5: 32–35.
2. Vinogradov I.M. 2004. Osnovy teorii chisel [The basics of numbers theory]. SPb-M., Lan', 167 p.
3. Gritsenko S.A. 2003. O funkcional'nom uravnenii odnogo arifmeticheskogo rjada Dirihle [On the functional equation of an arithmetic Dirichlet series]. Chebyshevskij sbornik. T. 4. Vyp. 2: 53–67.
4. Gritsenko S.A. 2012. On an additive problem and its application to the problem of distribution of zeros of linear combinations of Hecke L-functions on the critical line. Proc. Steklov Inst. Math.. 276: 90–102. (in Russian).
5. Ismoilov D.I. 1979. Ob asimptotike predstavlenija chisel kak raznosti dvuh proizvedenij [On the asymptotic behavior of the representation of numbers as the difference of two products]. Dokl. AN Tadzh. SSR. T. 22, № 2: 75–79.
6. Kuznetsov N.V. 1981. Petersson's conjecture for cusp forms of weight zero and Linnik's conjecture. Sums of Kloosterman sums. Math. USSR-Sb. 39:3: 299–342. (in Russian).
7. Kurtova L.N. 2007. On a binary additive problem with quadratic forms. Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta. Estestvennonauchnaja serija. Matematika. № 7(57): 107–121. (in Russian).



8. Kurtova L.N. 2014. Binarnye additivnye zadachi s kvadraticnymi formami [Binary additive problems with quadratic forms]. Dis. kand. fiz.-mat. nauk, Ul'janovsk. gos. universitet, Ul'janovsk, 115 p.
9. Kurtova L.N. 2019. A number of solutions the equation with quadratic forms of different discriminants. Nauchnye vedomosti Belgorodskogo gosudarstvennogo universiteta. Serija: Matematika Fizika: Nauchnyj recenziruemyj zhurnal. Belgorod: Izd-vo "BelGU". № 3 (51): 374–386. (in Russian).
10. Lavrent'ev M.A. Shabat B.V. 1958. Metody teorii funkcij kompleksnogo peremennogo. M., Fizmatlit, 678 p.
11. Linnik Ju.V. 1961. Dispersionnyj metod v binarnyh additivnyh zadachah [Dispersion method in binary additive tasks]. L., Izd-vo LGU, 208 p.
12. Malyshev A.V. 1962. O predstavlenii celyh chisel polozhitel'nymi kvadraticnymi formami [On the representation of integers by positive quadratic forms]. Trudy matematicheskogo instituta im. V.A. Steklova AN SSSR. T. 65: 3–212.
13. Pachev U.M., Dohov R.A. 2013. About Gauss' double sums corresponding to classes of ideals of imaginary quadratic field. Nauchnye vedomosti Belgorodskogo gosudarstvennogo universiteta. Serija: Matematika. Fizika. № 19(162). Vyp. 32: 108–119. (in Russian).
14. Deshouillers J.-M., Iwaniec H. 1982. An additive divisor problem. J. London Math. Soc. V. 26(2): 1–14.
15. Estermann T. 1931. Über die Darstellung einer Zahl als Differenz von zwei Produkten. J. Reine Angew. Math. V. 164: 173–182.
16. Estermann T. 1961. On Kloostermann's sum. Mathematika. 8: 83–86.
17. Heath-Brown D.R. 1979. The fourth power moment of the Riemann zeta-function. Proc. London Math. Soc. V. 38. № 3: 385–422.
18. Ingham A.E. 1927. Some asymptotic formulae in the theory of numbers. J. London Math. Soc. V. 2(7): 202–208.
19. Ogg A.P. 1969. Modular Forms and Dirichlet Series. N.-Y., W.A. Benjamin Inc., 211 p.
20. Weil A. 1948. On some exponential sums. Proc. Nat. Acad. Of Sci. 34: 204–207.

Ссылка для цитирования статьи
Reference to article

Куртова Л.Н. 2019. Число решений одного уравнения, содержащего квадратичные формы с растущим дискриминантом. Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика. 51 (4): 475–486. DOI 10.18413/2075-4639-2019-51-4-475-486.

Kurtova L.N. 2019. A number of solutions of the equation, which contains quadratic forms with a growing discriminant. Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics. Physics. 51 (4): 475–486 (in Russian). DOI 10.18413/2075-4639-2019-51-4-475-486.

УДК 517.53

DOI 10.18413/2075-4639-2019-51-4-487-495

**НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА КЛАССОВ ВМОА
И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ КОНФОРМНО ОТОБРАЖАЮЩЕЙ
ФУНКЦИИ В ОБЛАСТЯХ С ГРАНИЦЕЙ ТИПА ЛАВРЕНТЬЕВА**
**SOME PROPERTIES OF BMOA CLASSES AND INTEGRAL ESTIMATES OF
CONFORMAL MAPPING FUNCTIONS IN DOMAINS
WITH LAVRENTIEV'S TYPE BOUNDARY**

Н.М. Махина
N.M. Makhina

Брянский государственный университет им. акад. И.Г. Петровского,
ул. Бежицкая, 14, Брянск, 241036, Россия

Bryansk State University named after acad. I.G. Petrovsky
14 Bezhitskaya St., Bryansk, 241036, Russia

E-mail: mahinanm@yandex.ru

Аннотация

Рассматривается задача оценки производной конформно отображающей функции в областях с границей типа Лаврентьева. Решение данной задачи тесно связано с хорошо известными свойствами функций типа *ВМОА*. Полученные результаты и используемый метод доказательства могут быть использованы при описании характеристик весовых пространств измеримых и аналитических функций на произведениях областей с указанными типами границ.

Abstract

We consider the problem of estimating the derivative of a conformal mapping function in domains with Lavrentiev type boundary. The solution of this problem is closely related to the well-known properties of *BMOA* type functions. The results obtained and the method of proof can be used to describe the characteristics of the weight spaces of measurable and analytic functions on the products of domains with specified types of boundary.

Ключевые слова: пространство *ВМОА*, кривая Лаврентьева, конформное отображение, проектор, произведение областей.

Key words: *BMOA* space, Lavrentiev curve, conformal mapping, projector, product of domains.

1. Введение

В теории функций комплексного переменного хорошо известна задача, связанная с рассмотрением свойств пространств аналитических в некоторой области функций в зависимости от характеристик на границу данной области.

Указанные свойства имеют непосредственное выражение, в том числе, и в виде различных оценок функции, конформно отображающей единичный круг $S = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ на изучаемую область.

Так, достаточно вспомнить хорошо известные и справедливые в произвольной области комплексной плоскости оценки Кебе, оценивающие модуль производной функции φ , конформно



отображающей единичный круг S на некоторую односвязную область G , через расстояние до границы области d [Голузин, 1966]:

$$\frac{1}{4} \frac{d(\varphi(z), \partial G)}{1 - |z|} \leq |\varphi'(z)| \leq 4 \frac{d(\varphi(z), \partial G)}{1 - |z|}.$$

Встает вопрос о возможности получения аналогов данных оценок, необходимость использования которых возникает в тех или иных классических задачах, например, в задачах построения ограниченных проекторов и базисов в пространствах аналитических функций в областях с границами того или иного типа.

Рассмотрим G – некоторую односвязную область на комплексной плоскости \mathbb{C} . Обозначим $H(G)$ – множество всех аналитических функций в области G . Напомним, что пространство Харди H^p , $0 < p \leq \infty$, [Duren, 1970] определяется как множество функций $f \in H(S)$, для которых

$$\|f\|_{H^p} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{0 < r < 1} M_p(r, f) < \infty,$$

где для $0 < r < 1$

$$M_p(r, f) = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta \right)^{1/p} \quad (0 < p < \infty); \quad M_\infty(r, f) = \sup_{\theta \in R} |f(re^{i\theta})|.$$

Пространство $BMOA$ состоит из тех функций $f \in H^1$, граничные значения которых имеют ограниченную среднюю осцилляцию на единичной окружности T [John, Nirenberg, 1961]:

$$\sup_{|a| < 1} \|f_a\|_1 < \infty, \quad f_a(z) = f\left(\frac{z+a}{1+\bar{a}z}\right) - f(a),$$

где $\|\cdot\|_1$ определена как норма пространства H^1 .

Пространство $VMOA$ является замыканием многочленов по $BMOA$ -норме [Sarason, 1975].

Напомним также определения некоторых классов кривых. Пусть класс (C) есть класс кривых Γ на комплексной плоскости, состоящих из конечного числа гладких дуг (Γ_j) , в точках стыка w_j , $j = \overline{1, n}$, образующих внутренние углы $\frac{\pi}{\alpha_j}$, $\frac{1}{2} \leq \alpha_j < +\infty$, $j = \overline{1, n}$, [Дзядык, 1977, с. 386].

Класс (A) есть класс асимптотически конформных кривых Γ на комплексной плоскости, если справедливо

$$\mu(\delta) = \sup_{w_1, w_2 \in \partial G} \sup_{w \in \Gamma'} \left(\frac{|w_1 - w| + |w_2 - w|}{|w_2 - w_1|} - 1 \right) \rightarrow 0, \quad \delta \rightarrow 0,$$

$$|w_1 - w_2| \leq \delta$$

где Γ' – кратчайшая дуга на границе $\Gamma = \partial G$, соединяющая точки w_1, w_2 (см. [Альфортс, 1969], для примера, и имеющуюся там литературу).

Пусть также класс (L) есть класс таких кривых Γ (кривых Лаврентьева), для которых $l(w_1, w_2) \leq c|w_1 - w_2|$, где w_1, w_2 – произвольные точки на Γ , $l(w_1, w_2)$ – длина кратчайшей дуги Γ' на кривой Γ , соединяющей точки w_1, w_2 ([Альфортс, 1969; Гарнетт, 1984, с. 280]).

В ряде работ автора [Ткаченко, 2009 а,б; Tkachenko, 2009; Шамоян, 2013; Shamoian, 2015; Махина, 2015; 2017; 2018] показано, что интегральные оценки модуля производной конформно отображающей функции тесно связаны с характеристиками границ рассматриваемых областей, которые, в свою очередь, определяются свойствами тех или иных классов аналитических функций.



Данные вопросы широко освещаются в работах как отечественных (см., например, [Пекарский, 2001, и литературу там], так и зарубежных ученых (см., например, [Galanopoulos et al., 2011, и литературу там]).

Так, например, в областях с кусочно-гладкими границами класса (C) [Дзядык, 1977] одним из свойств модуля производной конформно отображающей функции в окрестности угловой точки являются неравенства

$$c_1 |z - 1|^{\frac{1}{\alpha_j} - 1} \leq |\varphi'(z)| \leq c_2 |z - 1|^{\frac{1}{\alpha_j} - 1}, \quad c_1 > 0, \quad c_2 > 0;$$

в областях с асимптотически конформными границами класса (A) [Pommerenke, 1978] применяются свойства функций класса *VMOA*, принимающие следующий вид:

$$(1 - |z|) \left| \frac{\varphi''(z)}{\varphi'(z)} \right| \rightarrow 0, \quad |z| \rightarrow 1 - 0.$$

Указанные свойства классов (C) и (A) использованы автором при рассмотрении вопросов, связанных с оценками производных конформно отображающих функций, например, в работах [2017; 2018].

В данной статье на основании характеристик кривых класса (L), а точнее, их связи со свойствами функций из классов *VMOA*, получены новые интегральные оценки модуля производной конформно отображающей функции в областях с указанными границами.

2. Оценки модуля производной конформно отображающей функции

Напомним хорошо известные результаты.

Лемма 1 [Pommerenke, 1977]. Пусть *G* – некоторая односвязная область на комплексной плоскости, ограниченная кривой класса (L), $\varphi(z)$ – функция, конформно отображающая круг *S* на область *G*, *b* – произвольное положительное число. Тогда функция $f(z) = b \ln \varphi'(z)$, где выбрана главная ветвь логарифма, принадлежит классу *VMOA*.

Лемма 2 [Pommerenke, 1977]. Для функции $f \in VMOA$, $|t| < 1$, и произвольного $b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ существует такое $M = M(b)$, что справедливо неравенство

$$\frac{1}{2\pi} \int_{|q|=1} \left| e^{bf(s)} \right|^2 \frac{(1 - |t|^2)}{|1 - \bar{t}q|^2} |dq| \leq M \left| e^{bf(t)} \right|^2.$$

На основании указанных свойств получим новые оценки для конформно отображающей функции в областях с границами класса (L).

Теорема 1. Пусть *G* – некоторая односвязная область на комплексной плоскости \mathbb{C} , ограниченная кривой класса (L), $\varphi(z)$ – функция Римана, отображающая *S* на *G*, $\varphi(0) = \omega_0$, $\omega_0 \in G$, $\varphi'(0) > 0$. Тогда справедливы оценки

1) При $1 < p < +\infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $\beta > -1$, $1 < \frac{\gamma}{q} < \beta + 1$, $\eta \geq \beta + 1 - \frac{\gamma}{q}$:

$$\int_S \frac{|\varphi'(z)|^{\beta+2} (1 - |z|)^\beta \chi_\gamma^p(z)}{|1 - \bar{\zeta}z|^{\eta+2}} dm_2(z) \leq \frac{\tilde{c} |\varphi'(\zeta)|^{\beta+2} (1 - |\zeta|)^\beta \chi_\gamma^p(\zeta)}{(1 - |\zeta|)^\eta},$$

где $\chi_\gamma(\zeta) = (1 - |\zeta|)^{-\gamma/pq}$, \tilde{c} – некоторая положительная постоянная;

2) При $\beta > -1$, $\eta > \beta + 1$:

$$\int_S \frac{|\varphi'(z)|^{\beta+2} (1 - |z|)^\beta}{|1 - \bar{\zeta}z|^{\eta+2}} dm_2(z) \leq \frac{\tilde{c} |\varphi'(\zeta)|^{\beta+2} (1 - |\zeta|)^\beta}{(1 - |\zeta|)^\eta},$$



где \tilde{c} – некоторая положительная постоянная.

□ Докажем п. 1) Полагая $f = \frac{\beta+2}{2} \ln |\varphi'(z)|$, $z \in S$, $z = re^{i\sigma}$, учитывая утверждения лемм 1 и 2, имеем:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi'(e^{i\sigma})|^{\beta+2} \frac{(1-|t|^2)}{|1-\bar{t}e^{i\sigma}|^2} d\sigma \leq M |\varphi'(t)|^{\beta+2}, \quad (1)$$

где $0 < |t| < 1$.

Оценим теперь $I = \int_S \frac{|\varphi'(z)|^{\beta+2} (1-|z|)^\beta \chi_\gamma^p(z)}{|1-\bar{\zeta}z|^{\eta+2}} dm_2(z)$. Здесь и далее $c_i, i \geq 0$, – некоторые положительные постоянные, конкретные значения которых не играют никакой роли.

Пусть $\zeta = \rho e^{i\theta}$. Тогда

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 (1-r)^{\beta-\gamma/q} \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi'(re^{i\sigma})|^{\beta+2} \frac{|1-r\rho e^{i(\sigma-\theta)}|^2}{|1-r\rho e^{i(\sigma-\theta)}|^2} \frac{d\sigma dr}{|1-r\rho e^{i(\sigma-\theta)}|^\eta} \leq \\ &\leq c_0 \int_0^1 \frac{(1-r)^{\beta-\gamma/q}}{(1-r\rho)^\eta} \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi'(re^{i\sigma})|^{\beta+2} \frac{d\sigma dr}{|1-r\rho e^{i(\sigma-\theta)}|^2}. \end{aligned}$$

Поскольку функция $\varphi'(z) \neq 0$, $z \in S$, то $(\varphi'(z))^{\beta+2}$, $(\varphi'(0))^{\beta+2} > 0$, голоморфна в S . Функция $\Psi_\zeta(z) = \frac{1}{(1-\bar{\zeta}z)^2}$ также является голоморфной в S при фиксированном $\zeta \in S$. Следовательно, $\Psi_\zeta(z)(\varphi'(z))^{\beta+2}$ – голоморфная в S функция. Поэтому

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\varphi'(re^{i\sigma})|^{\beta+2} \frac{d\sigma}{|1-r\rho e^{i(\sigma-\theta)}|^2} = \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi'(re^{i\sigma})|^{\beta+2} |\Psi_\zeta(re^{i\sigma})| d\sigma = I_1(r)$$

монотонно растет на $[0, 1)$. Значит,

$$\begin{aligned} I_1(r) &= \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi'(re^{i\sigma})|^{\beta+2} \frac{d\sigma}{|1-r\rho e^{i(\sigma-\theta)}|^2} = \frac{1}{(1-\rho^2)} \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi'(re^{i\sigma})|^{\beta+2} \frac{(1-\rho^2)}{|1-r\rho e^{i(\sigma-\theta)}|^2} d\sigma \leq \\ &\leq \frac{1}{(1-\rho^2)} \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi'(e^{i\sigma})|^{\beta+2} \frac{(1-\rho^2)}{|1-\rho e^{i(\sigma-\theta)}|^2} d\sigma. \end{aligned}$$

Из оценки (1), положив $t = \zeta$, получим: $I_1(r) \leq \frac{c_1 |\varphi'(\rho e^{i\theta})|^{\beta+2}}{(1-\rho^2)}$.

То есть $I \leq \frac{c_2 |\varphi'(\rho e^{i\theta})|^{\beta+2}}{(1-\rho^2)} \int_0^1 \frac{(1-r)^{\beta-\gamma/q}}{(1-r\rho)^\eta} dr$.

Но $\int_0^1 \frac{(1-r)^{\beta-\gamma/q}}{(1-r\rho)^\eta} dr \leq \frac{c_3}{(1-\rho)^{\eta-\beta+\gamma/q-1}}$ при $1 < \frac{\gamma}{q} < \beta+1, \eta \geq \beta+1-\frac{\gamma}{q}$. Откуда получается

следующее неравенство $I \leq \frac{c_4 |\varphi'(\rho e^{i\theta})|^{\beta+2}}{(1-\rho)^{\eta-\gamma/q}}$.



$$\text{Итак, } \int_S \frac{|\varphi'(z)|^{\beta+2} (1-|z|)^\beta \chi_\gamma^p(z)}{|1-\bar{\zeta}z|^{\eta+2}} dm_2(z) \leq \frac{\tilde{c} |\varphi'(\zeta)|^{\beta+2}}{(1-|\zeta|)^{\gamma/q}}$$

при соответствующих условиях. Пункт 2) доказывается аналогично.

Повторяя рассуждения теоремы 1, несложно получить следующий результат.

Теорема 2. Пусть G – некоторая односвязная область на комплексной плоскости \mathbb{C} , ограниченная кривой класса (L) , $\varphi(z)$ – функция Римана, отображающая S на G , $\varphi(0) = \omega_0, \omega_0 \in G, \varphi'(0) > 0$. Тогда при $1 < p < +\infty$ справедливо неравенство:

$$\int_S \frac{|\varphi'(z)|^{\beta+2} (1-|z|)^\beta \chi_\gamma^p(z)}{|1-\bar{\zeta}z|^{\eta+2} |1-\bar{\xi}z|^\mu} dm_2(z) \leq \frac{\tilde{\tilde{c}} |\varphi'(\zeta)|^{\beta+2} (1-|\zeta|)^\beta \chi_\gamma(\zeta) \chi_\gamma^q(\xi)}{(1-|\zeta|)^{\eta+2-\frac{2}{p}} (1-|\xi|)^{\mu-\frac{2}{q}}},$$

где $\chi_\gamma(\zeta) = (1-|\zeta|)^{-\frac{\gamma}{pq}}$; $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \beta > -1, 0 < \frac{\gamma}{q} < \beta p + 1, \eta \geq \beta - 2 + \frac{3}{p} - \frac{\gamma}{pq}; \mu > 2 - \frac{\gamma}{q^2}, \tilde{\tilde{c}}$ – некоторая положительная постоянная.

3. Заключение

В работах автора, например, [Ткаченко, 2009] с помощью аналогов рассмотренных оценок построены, в том числе, ограниченные интегральные операторы в весовых пространствах аналитических функций.

Пусть $E_p(G)$ – хорошо известный класс Смирнова в области G . Обозначим через $L^p(G)$ – класс измеримых по Лебегу в области G функций, для которых

$$\|f\|_{L^p(G)}^p = \int_G |f(z)|^p dm_2(z) < +\infty, \quad 0 < p < +\infty,$$

где $dm_2(z)$ – плоская мера Лебега.

Из классической теоремы М. Рисса известно, что интеграл типа Коши на границе ∂G отображает пространство $L^p(G)$ на $E_p(G)$ при всех $1 < p \leq +\infty$. В то же время, исходя из классических результатов А.Н. Колмогорова, такой интегральный оператор не отображает пространство $L^1(G)$ на $E_1(G)$ даже в том случае, когда ∂G представляет собой единичную окружность. Дж. Ньюмен показал, что такого интегрального оператора вообще не существует. Однако в пространствах Бергмана существует ограниченный проектор по плоской мере Лебега из $L^1(G)$ на соответствующее пространство Бергмана. Эти результаты были получены Ф.А. Шамояном в случае гладких контуров при всех $0 < p \leq 1$. А при $1 < p \leq +\infty$ такие результаты можно вывести из результатов М. Рисса (см. [Ткаченко, 2009]).

Возможности распространения данных результатов на области с более общими границами рассматривались в работах отечественных и зарубежных авторов [Шихватов, 1976; Соловьев, 1985; Hedenmalm, 2002] и указанных выше работах автора.

Пусть $L_\beta^p(G)$ – класс измеримых по Лебегу в G функций f , для которых

$$\|f\|_{L_\beta^p(G)}^p = \int_G |f(w)|^p d^\beta(w, \partial G) dm_2(w) < +\infty, \quad \beta > -1, \quad 0 < p < +\infty,$$

$A_\beta^p(G)$ – подпространство пространства $L_\beta^p(G)$, состоящее из аналитических функций.

Теорема 3 ([Ткаченко, 2009]). Пусть G – односвязная область на комплексной плоскости, ограниченная кривой класса (L) , $\varphi(z)$ – функция, конформно отображающая S на G , $\varphi(0) = \omega_0, \omega_0 \in G, \varphi'(0) > 0, \psi$ – обратная функция для φ . Тогда интегральный оператор

$$F(w) = P_\eta(f)(w) = \frac{\eta+1}{\pi} \int_G \frac{(1-|\psi(\mu)|^2)^\eta}{(1-\overline{\psi(\mu)}\psi(w))^{\eta+2}} f(\mu) |\psi'(\mu)|^2 dm_2(\mu)$$



непрерывно отображает $L^p_\beta(G)$ на $A^p_\beta(G)$, $1 \leq p < +\infty$, $\beta > -1$, $\eta > 2(\beta + 1)$, причем

$$\|F\|_{A^p_\beta(G)} \leq c(\beta, p) \|f\|_{L^p_\beta(G)},$$

$c(\beta, p) = \text{const} > 0$.

Данная теорема устанавливается с применением аналога ядер М.М. Джрбашяна для области G и интегральных оценок модуля производной конформно отображающей функции (аналогов оценок теоремы 1).

Пусть G_j – некоторая односвязная область на комплексной плоскости, граница которой принадлежит классу Лаврентьева (L). Рассмотрим $\{G_j\}_{j=1}^m$ – множество таких областей и $\tilde{G} = G_1 \times \dots \times G_m$.

Обозначим $L^p_{\vec{\beta}}(\tilde{G})$ – множество измеримых в \tilde{G} функций таких, что

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^p_{\vec{\beta}}(\tilde{G})} &= \int_{\tilde{G}} |f(w)|^p d^{\vec{\beta}}(w, \partial G) dm_{2m}(w) = \\ &= \int_{G_1} \dots \int_{G_m} |f(w_1, \dots, w_m)|^p \prod_{j=1}^m d^{\beta_j}(w_j, \partial G_j) dm_2(w_j) < +\infty, \end{aligned}$$

где $0 < p < +\infty$, $\vec{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_m)$, $\beta_j > -1$, $j = \overline{1, m}$; $dm_{2m} = dm_2 \dots dm_2$ – мера Лебега на \tilde{G} . Пусть также $A^p_{\vec{\beta}}(\tilde{G}) = H(\tilde{G}) \cap L^p_{\vec{\beta}}(\tilde{G})$.

Автор предполагает возможность получения аналога теоремы 3 и использования оценок теоремы 1 и 2 при изучении в пространствах $L^p_{\vec{\beta}}(\tilde{G})$ операторов типа Бергмана следующего вида:

$$(P_{\vec{\eta}} f)(\vec{w}) = \prod_{j=1}^m \frac{\eta_j + 1}{\pi} \int_{G_j} \dots \int_{G_m} f(\mu_1, \dots, \mu_m) \prod_{j=1}^m \frac{(1 - |\psi_j(\mu_j)|^2)^{\eta_j} |\psi'_j(\mu_j)|^2}{(1 - \overline{\psi(\mu_j)})\psi(w_j)^{\eta_j+2}} dm_2(\mu_1) \dots dm_2(\mu_m),$$

где $\{\varphi_j\}_{j=1}^m$ – функции Римана, выполняющие отображение S на G_j , $\varphi_j(0) = \omega_0^j$, $\omega_0^j \in G_j$, $\psi_j = \varphi_j^{-1}$, $j = \overline{1, m}$.

Автор выражает благодарность профессору Шамояну Ф.А. за внимание к работе и Шамояну Р.Ф. за идеи возможного применения результатов работы.

Список литературы

1. Альфорс Л. 1969. Лекции по квазиконформным отображениям. М.: Мир, 133.
2. Гарнетт Дж. 1984. Ограниченные аналитические функции. М.: Мир, 469.
3. Голузин Г.М. 1966. Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 628.
4. Дзядык В.К. 1977. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. М.: Наука, 512.
5. Махина Н.М. 2015. О сопряженных пространствах к некоторым весовым пространствам аналитических функций. Вестник Брянского государственного университета, 2: 420–423.

6. Махина Н.М. 2017. Оценки производных аналитических и гармонических функций в некоторых областях комплексной плоскости. Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика, 2: 16–22.
7. Махина Н.М. 2018. Некоторые оценки конформно отображающей функции в областях с кусочно-гладкой и асимптотически конформной границей. Вестник Омского государственного университета, 23(3): 47–51.
8. Махина Н.М., Шамоян Ф.А. 2013. Базисы в весовых пространствах функций, аналитических в областях со спрямляемой границей. Вестник Брянского государственного университета, 4: 27–30.
9. Пекарский А.А. 2001. Рациональные приближения функций с производными из пространства В.И. Смирнова. Алгебра и анализ, 13(2): 165–190.
10. Соловьев А.А. 1985. Оценки в L_p интегральных операторов, связанных с пространствами аналитических и гармонических функций. Сибирский математический журнал, 26(3): 168–191.
11. Ткаченко Н.М. 2009. Весовые L_p -оценки аналитических и гармонических функций в односвязных областях комплексной плоскости: дисс. ... канд. ф.-м. наук. Брянск, 116.
12. Ткаченко Н.М. 2009. Линейные непрерывные функционалы в L_p -пространствах аналитических функций. Вестник Брянского государственного университета, 4: 100–105.
13. Шихватов А.М. 1976. Об L_p -пространствах функций, аналитических в области с кусочно-аналитической границей. Математические заметки, 20(4): 537–548.
14. Duren P.L. 2000. Theory of H_p Spaces. New York/London: Academic Press, 1970. Reprint: Mineola, New York, Dover, 292.
15. Galanopoulos P., Girela D., Hernandez R. 2011. Univalent Functions, VMOA and related spaces. Journal of Geometric Analysis, 21: 665–682.
16. Hedenmalm H. 2002. The dual of Bergman space on simply connected domains. Journal d'Analyse Mathématique, 88: 311–335.
17. John F., Nirenberg L. 1961. On functions of bounded mean oscillation. Communications on Pure and Applied Mathematics, 14: 415–426.
18. Sarason D. 1975. Functions of vanishing mean oscillation. Transactions of the American Mathematical Society, 297: 391–405.
19. Pommerenke Ch. 1977. Schlichte Functionen und analytische Functionen von beschränkter mittlerer Oszillation. Commentarii Mathematici Helvetici, 52: 591–602.
20. Pommerenke Ch. 1978. On univalent Functions, Bloch Functions and VMOA. Mathematische Annalen, 236 (3): 199–208.
21. Shamoyan R.F., Makhina N.M. 2015. On continuous linear functionals in some weighted functional classes on product domains. Siberian electronic mathematical reports, 12: 651–678.



22. Tkachenko N.M., Shamoyan F.A. 2009. The Hardy-Littlewood theorem and the operator of harmonic conjugate in some classes of simply connected domains with rectifiable boundary. *Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry*, 5(2): 192–210.

References

1. Al'fors L. 1969. *Lekcii po kvazikonformnym otobrazhenijam [Lectures on quasiconformal mappings]*. Moscow, Mir, 133.
2. Garnett J. 1984. *Ogranichennye analiticheskie funkicii [Bounded analytic functions]*. Moscow, Mir, 469.
3. Golusin G.M. 1966. *Geometricheskaja teorija funkcij kompleksnogo peremennogo [The geometrical theory of functions complex variable]*. Moscow, Nauka, 628.
4. Dzjadyk V.K. 1977. *Vvedenie v teoriju ravnomernogo priblizhenija funkcij polinomami [Introduction to the theory of uniform approximation of functions by polynomials]*. Moscow, Nauka, 512.
5. Makhina N.M. 2015. O sprjazhennyh prostranstvah k nekotorym vesovym prostranstvam analiticheskikh funkcij [On conjugate spaces to some weighted spaces of analytic functions]. *Vestnik Brjanskogo gosudarstvennogo universiteta*, 2: 420–423.
6. Makhina N.M. 2017. Ocenki proizvodnyh analiticheskikh i garmonicheskikh funkcij v nekotoryh oblastjah kompleksnoj ploskosti [Estimates of the derivatives of analytic and harmonic functions in some domains of the complex plane]. *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Serija: Fizika-matematika*, 2: 16–22.
7. Makhina N.M. 2018. Nekotorye ocenki konformno otobrazhajushhej funkicii v oblastjah s kusochno-gladkoj i asimptoticheski konformnoj granicej [Some estimates of a conformally mapping function in domains with a piecewise-smooth and asymptotically conformal boundary]. *Vestnik Omskogo gosudarstvennogo universiteta*, 23(3): 47–51.
8. Makhina N.M., Shamoyan F.A. 2013. Bazisy v vesovyh prostranstvah funkcij, analiticheskikh v oblastjah so sprjamljaemoj granicej [Bases in weighted spaces of functions analytic in domains with rectifiable boundary]. *Vestnik Brjanskogo gosudarstvennogo universiteta*, 4: 27–30.
9. Pekarskij A.A. 2001. Racional'nye priblizhenija funkcij s proizvodnymi iz prostranstva V.I. Smirnova [Rational approximations of functions with derivative in a V.I. Smirnov space]. *Algebra i analiz [St. Petersburg Mathematical Journal]*, 13(2): 165–190 [2002, 13(2), 281–300].
10. Solov'yov A.A. 1985. Estimates in L_p for integral operators associated with the space of analytic and harmonic functions. *Siberian Mathematical Journal*, 26(3): 168–191.
11. Tkachenko N.M. 2009. Vesovye L_p -ocenki analiticheskikh i garmonicheskikh funkcij v odnosvjaznyh oblastjah kompleksnoj ploskosti [Weighted L_p estimates analytic and harmonic functions in a simply domains of complex plane]. Ph. D. Dissertation, Bryansk, 116.
12. Tkachenko N.M. 2009. Linejnye nepreryvnye funkcionaly v L_p -prostranstvah analiticheskikh funkcij [Linear continuous functionals in L_p -spaces of analytic function]. *Vestnik Brjanskogo gosudarstvennogo universiteta*, 4: 100–105.



13. Shihvatov A.M. 1976. Ob L_p -prostranstvakh funkcij, analiticheskikh v oblasti s kusochno-analiticheskoj granicej [On L_p -spaces of functions analytic in a domain with piecewise analytic boundary]. *Matematicheskie zametki* [Mathematical Notes], 20(4): 537–548.
14. Duren P.L. 2000. *Theory of H_p Spaces*. New York/London: Academic Press, 1970. Reprint: Mineola, New York, Dover, 292.
15. Galanopoulos P., Girela D., Hernandez R. 2011. Univalent Functions, VMOA and related spaces. *Journal of Geometric Analysis*, 21: 665–682.
16. Hedenmalm H. 2002. The dual of Bergman space on simply connected domains. *Journal d'Analyse Mathematique*, 88: 311–335.
17. John F., Nirenberg L. 1961. On functions of bounded mean oscillation. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 14: 415–426.
18. Sarason D. 1975. Functions of vanishing mean oscillation. *Transactions of the American Mathematical Society*, 297: 391–405.
19. Pommerenke Ch. 1977. Schlichte Functionen und analytische Functionen von beschränkter mittlerer Oszillation. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 52: 591–602.
20. Pommerenke Ch. 1978. On univalent Functions, Bloch Functions and VMOA. *Mathematische Annalen*, 236 (3): 199–208.
21. Shamoyan R.F., Makhina N.M. 2015. On continuous linear functionals in some weighted functional classes on product domains. *Siberian electronic mathematical reports*, 12: 651–678.
22. Tkachenko N.M., Shamoyan F.A. 2009. The Hardy-Littlewood theorem and the operator of harmonic conjugate in some classes of simply connected domains with rectifiable boundary. *Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry*, 5(2): 192–210.

Ссылка для цитирования статьи
For citation

Махина Н.М. 2019. Некоторые свойства классов ВМОА и интегральные оценки конформно отображающей функции в областях с границей типа Лаврентьева. *Научные ведомости Белгородского государственного университета*. Серия: Математика. Физика. 51 (4): 487–495. DOI 10.18413/2075-4639-2019-51-4-487-495.

Makhina N.M. 2019. Some properties of BMOA classes and integral estimates of conformal mapping functions in domains with Lavrentiev's type boundary. *Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics. Physics*. 51 (4): 487–495 (in Russian). DOI 10.18413/2075-4639-2019-51-4-487-495.

УДК 517.906

DOI 10.18413/2075-4639-2019-51-4-496-505

**ОБ ОДНОЙ НАЧАЛЬНО-ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ
ИЗГИБНЫХ КОЛЕБАНИЙ БАЛКИ****ABOUT ONE INITIAL-BOUNDARY PROBLEM FOR EQUATION
OF BENDING BEAM VIBRATIONS****Э.Г. Оруджев, Р.Т. Зульфугарова
E.G. Orudzhev, R.T. Zulfugarova**

Бакинский Государственный Университет

ул. Академика Захида Халилова, 23, Баку, AZ1148, Азербайджан

^{1),2)}Baku State University,
23 Academic Zahid Khalilov St., Baku, AZ1148, Republic of Azerbaijan

E-mail: elsharorucov63@mail.ru, renazulfugarova94@gmail.com

Аннотация

В данной работе для неоднородного уравнения изгибных колебаний балки исследуется смешанная задача, содержащая в нераспадающихся граничных условиях производные по времени более высокого порядка, чем в уравнении. Дифференциальное выражение и краевые формы содержат не только главные части, но и производных низкого порядка. Смешанной задаче сопоставлены спектральная для уравнения 4-го порядка с несоизмеримыми степенями параметра в граничных условиях и задача Коши для уравнения 2-го порядка со спектральным параметром относительно переменной времени. Решение начально-краевой задачи построено в виде полного интегрального вычета от решений одномерной спектральной задачи и задачи Коши. При определенных условиях гладкости начальных данных, обращающихся в нуль вместе со всеми производными до некоторого порядка на концах интервала изменения пространственной переменной, доказано существование классического решения изучаемой начально-краевой задачи.

Abstract

This research is devoted for the inhomogeneous equation of bending vibrations of a beam, investigated mixed problem which non-decaying boundary conditions, higher-order time derivatives than in the equation. Differential expression and edge forms isn't contain only the main parts. The mixed problem is associated with the spectral for the fourth order equation with incommensurable degrees of the parameter in the boundary conditions and the Cauchy problem for the second order equation with the spectral parameter with respect to the time variable. The solution of the initial-boundary-value problem is constructed the form of complete integral residue from the solutions of the one-dimensional spectral problem and Cauchy problem. The existence of a classical solution to the studied initial-boundary-value problem is proved which under certain smoothness conditions for the initial data, vanishes together with all derivatives to a certain order at the ends of the variation interval of the spatial variable.

Ключевые слова: уравнение балки, начально-граничная задача, спектральный параметр, спектральная задача, полный интегральный вычет, функция Грина.

Keywords: beam equation, initial-boundary value problem, spectral parameter, spectral problem, full integral residue, Green's function.



1. Введение и постановка задачи

Многие задачи о колебаниях стержней, балок и пластин, которые имеют большое значение в строительной механике, приводят к дифференциальным уравнениям в частных производных более высокого порядка, чем уравнение струны. В инженерной практике часто встречаются балки, лежащие на сплошном упругом основании. Упругое основание рассматривается как система опирающихся на жесткое горизонтальное основание и не связанных между собой пружин, сжатие которых возрастает прямо пропорционально приложенной нагрузке. Коэффициент пропорциональности между нагрузкой и деформацией называется коэффициентом постели.

Рассмотрим однородную балку Эйлера-Бернулли со свободными концами, лежащую на упругом основании. Уравнение свободных изгибных колебаний [Айтбаева, 2014] запишется в виде

$$EJ \frac{\partial^4 u(x, t)}{\partial x^4} + ku(x, t) + \rho F \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = 0, \tag{1}$$

где $u = u(x, t)$ прогиб оси балки – просадка основания (балки); EJ – изгибная жесткость; ρ – плотность балки; F – площадь поперечного сечения; L – длина балки, $0 \leq x \leq L$. Величина $k = k_0 b > 0$ называется погонным коэффициентом постели, где b – ширина балки, а k_0 коэффициент постели. Для широкого класса задач о колебаниях балки краевые условия зависят от времени. Преобразование Лапласа может быть использовано для решения задачи о колебаниях балки Бернулли-Эйлера с краевыми условиями, зависящими от времени. Однако в более сложных случаях не удается выполнить обратное преобразование.

Предположим, что на балку действует сила $f(x, t)$, длина балки равна 1, $EJ \equiv \rho F \equiv 1$. Тогда уравнению (1) можно записать в виде

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^4 u(x, t)}{\partial x^4} + ku(x, t) = f(x, t). \tag{2}$$

Для определения колебания точек балки нужно задать граничные условия концах $x = 0$ и $x = 1$. Зададим краевые условия следующим образом:

$$u(0, t) = 0, \quad u_x''(0, t) - \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x \partial t} \Big|_{x=0} = 0, \tag{3}$$

$$u_x'''(1, t) = 0, \quad u_x'''(0, t) + \frac{\partial^4 u(x, t)}{\partial x \partial t^3} \Big|_{x=1} = 0, \quad 0 < t < T, \quad T - \text{заданное положительное число.}$$

При $t = 0$ должны выполняться начальные условия:

$$u(x, 0) = \varphi_0(x), \quad \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = \varphi_1(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \tag{4}$$

где $f(x, t)$ неоднородная часть уравнения (2), определяющая внешнее воздействие на балки, достаточно гладкая функция по обоим переменным; $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$ – функции, определяющие начальное положение оси балки.

В этой работе для неоднородного уравнения изгибных колебаний балки (2) изучим решение задачи с условиями (3) и (4) в прямоугольной области $D = \{(x, t) | 0 < x < 1, 0 < t < T\}$. Отметим, что в работе [Сабитов, 2015] изучены изгибные колебания балки для однородного уравнения (2) в случае двучленной левой части ($k = 0$) с краевыми условиями $u(0, t) = u_x'(0, t) = u(1, t) = u_x'(1, t) = 0, 0 \leq t \leq T$ с начальными условиями (4). Там же методами спектрального анализа доказаны теоремы единственности, существования и устойчивости решения из класса $u(x, t) \in C_{x,t}^{4,2}(D) \cap C_{x,t}^{2,1}(\bar{D})$. Эти же краевые условия были

рассмотрены в работе [Оруджев, Амирова, 2019] для уравнения 4-го порядка с двукратными характеристиками, где найдены формулы четырехкратного разложения по собственными и присоединенными функциями. А это соответствует случаю, когда условие (2) содержит слагаемую $P(\partial^2 u(x, t)/\partial x^2)$, где P отвечает действию продольной сжимающей нагрузки на балку. Поскольку краевые условия (3) содержат производные по времени, причем более высокого порядка, чем в уравнении, метод разделения переменных и метод преобразования Лапласа для решения задачи (2)–(4) не применимы. Подобная смешанная задача решена в работе [Оруджев, Намазова, 2019], когда краевые условия содержат производные по времени 2-го порядка. А в работе [Зульфугарова, 2015] решена смешанная задача для волнового уравнения с производными 3-го порядка по времени в одном из граничных условий. Здесь ввиду того, что в одном из граничных условий (3) содержится производное по t 3-го порядка нужно исследовать специально.

Заметим, что результаты работы [Orudzhev, 1998] можно применить для спектрального анализа колебаний бесконечной балки, когда в уравнении коэффициент постели является периодической функцией от x и на балку действует равномерно распределенная гармоническая сила, что может приводить к появлению непрерывного спектра и спектральных особенностей. Соответствующие результаты будут изложены в другой работе авторов.

2. Решение смешанной задачи (2)–(4)

Согласно работе [Расулов, 1986], смешанной задаче (2)–(4) сопоставляется две вспомогательные задачи:

1) Спектральная задача нахождения решения обыкновенного дифференциального уравнения

$$y^{(4)} - \lambda^4 y = h(x), \quad x \in (0, 1) \quad (5)$$

при граничных условиях

$$L_1(y) = y(0) = 0, \quad L_2(y) = y''(0) - \lambda^2 y'(0) = -\varphi'_0(0)$$

$$L_3(y) = y'''(0) - \lambda^2 y^{(5)}(1) = -\varphi_0^{(5)}(1) + \left(\frac{\partial f(x, 0)}{\partial x} \right)_{x=1} + \lambda^2 \frac{d}{dx} \int_0^\infty e^{-\lambda^2 t} f(x, t) dt \Big|_{x=1}, \quad (6)$$

$$L_4(y) = y'''(1) = 0,$$

где $h(x)$ – произвольная функция, обладающая непрерывной производной по замкнутой интервале $[0, 1]$;

2) Задача Коши для уравнения

$$\frac{\partial^2 z(x, t)}{\partial t^2} + (\lambda^4 + k) z(x, t) = f(x, t), \quad t \in (0, T) \quad (7)$$

при начальных условиях

$$\frac{\partial^k z(x, t)}{\partial t^k} \Big|_{t=0} = \varphi_k(x), \quad k = 0, 1. \quad (8)$$

Единственное решение задачи (5)–(6) можно представить в виде

$$y(x, \lambda, h) = \int_0^1 G(x, \xi, \lambda) h(\xi) d\xi + N(x, \lambda, \varphi_0, \varphi_1, f). \quad (9)$$



Здесь $G(x, \xi, \lambda) = \Delta(\lambda, \xi, \lambda) / \Delta(\lambda)$ является функцией Грина задачи (5)–(6),

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} L_1(y_1) & L_1(y_2) & L_1(y_3) & L_1(y_4) \\ L_2(y_1) & L_2(y_2) & L_2(y_3) & L_2(y_4) \\ L_3(y_1) & L_3(y_2) & L_3(y_3) & L_3(y_4) \\ L_4(y_1) & L_4(y_2) & L_4(y_3) & L_4(y_4) \end{vmatrix} \quad (10)$$

$$\Delta(x, \xi, \lambda) = \begin{vmatrix} g(x, \xi, \lambda) & y_1(x, \lambda) & y_2(x, \lambda) & y_3(x, \lambda) & y_4(x, \lambda) \\ L_1(g)_x & \dots & \dots & \dots & \dots \\ L_2(g)_x & \vdots & & \Delta(\lambda) & \\ L_3(g)_x & \vdots & & & \\ L_4(g)_x & \vdots & & & \end{vmatrix}, \quad (11)$$

$y_k(x, \lambda) = e^{\varepsilon_k \lambda x}$, $k = \overline{1, 4}$ являются фундаментальными системами решений однородного уравнения (5) и ε_k корни из 4-й степени 1, т. е. $\varepsilon_1 = -1$, $\varepsilon_2 = i$, $\varepsilon_3 = -i$, $\varepsilon_4 = 1$,

$$g(x, \xi, \lambda) = \pm \frac{\sum_{k=1}^4 W_{4k}(\xi, \lambda) y_k(x, \lambda)}{2W(\xi, \lambda)}, \quad \begin{matrix} + \text{ если } 0 \leq \xi \leq x \\ - \text{ если } 0 \leq x \leq \xi \end{matrix}, \quad (12)$$

$W(\xi, \lambda)$ – определитель Вронского от $y_k(x, \lambda)$, $k = \overline{1, 4}$; $W_{4k}(\xi, \lambda)$ – алгебраическое дополнение элемента $(4, k)$ в определителе $W(\xi, \lambda)$;

$$\Delta_1(x, \lambda, \varphi_0, \varphi_1, f) = \begin{vmatrix} 0 & e^{-\lambda x} & e^{i\lambda x} & e^{-i\lambda x} & e^{\lambda x} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ F_1 & \vdots & & \Delta(\lambda) & \\ F_2 & \vdots & & & \\ 0 & \vdots & & & \end{vmatrix}, \quad (13)$$

$$F_1 = -\varphi_0'(0), \quad F_2 = -\varphi_0^{(5)}(1) + \left(\frac{\partial f(x, 0)}{\partial x} \right)_{x=1} + \lambda^2 \frac{d}{dx} \int_0^\infty e^{-\lambda^2 t} f(x, t) dt \Big|_{x=1}.$$

Выражение (10) называется характеристическим определителем спектральной задачи (5)–(6). Его нули совпадают с собственными значениями этой задачи. Вычисления показывают, что

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda) = & \lambda^8 [(-4i + 4\lambda) e^{-i\lambda} + (-4\lambda - 4i) e^{i\lambda} + (-4i\lambda + 4i) e^{-\lambda} + (4i\lambda + 4i) e^{\lambda} + \\ & + (-2\lambda^5 - 2i\lambda^5 + 4i\lambda^4) e^{-\lambda(1+i)} + (2\lambda^5 - 2i\lambda^5 + 4i\lambda^5) e^{-\lambda(1-i)} + \\ & + (2i\lambda^5 + 2\lambda^5 + 4i\lambda^4) e^{\lambda(1+i)} + (2i\lambda^5 - 2\lambda^5 + 4i\lambda^4) e^{\lambda(1-i)}]; \end{aligned}$$

$$g(x, \xi, \lambda) = \pm \frac{1}{2\lambda^3} \left[\frac{1}{4} e^{\lambda(x-\xi)} - \frac{1}{4} e^{-\lambda(x-\xi)} - \frac{1}{4i} e^{i\lambda(x-\xi)} + \frac{1}{4i} e^{-i\lambda(x-\xi)} \right], \quad \begin{matrix} + \text{ если } \xi \leq x \\ - \text{ если } \xi \geq x \end{matrix}$$

$$W(\xi, \lambda) = 16i\lambda^6;$$

$$L_1(g)_x = -\frac{1}{8\lambda^3} \left[e^{-\lambda\xi} - e^{\lambda\xi} - \frac{1}{i} e^{-i\lambda\xi} + \frac{1}{i} e^{i\lambda\xi} \right], \quad (14)$$

$$L_2(g)_x = -\frac{1}{8\lambda} \left[e^{-\lambda\xi} - e^{\lambda\xi} + \frac{1}{i} e^{-i\lambda\xi} - \frac{1}{i} e^{i\lambda\xi} \right] + \frac{1}{8} \left[e^{-\lambda\xi} + e^{\lambda\xi} - e^{-i\lambda\xi} - e^{i\lambda\xi} \right],$$



$$L_3(g)_x = -\frac{1}{8} \left[e^{-\lambda\xi} + e^{\lambda\xi} + e^{-i\lambda\xi} + e^{i\lambda\xi} \right] - \frac{\lambda^4}{8} \left[e^{\lambda(1-\xi)} + e^{-\lambda(1-\xi)} - e^{i\lambda(1-\xi)} - e^{-i\lambda(1-\xi)} \right],$$

$$L_4(g)_x = \frac{1}{8} \left[e^{\lambda(1-\xi)} + e^{-\lambda(1-\xi)} + e^{i\lambda(1-\xi)} + e^{-i\lambda(1-\xi)} \right].$$

Осями λ -плоскости и биссектрисами координатных углов вся плоскость комплексного параметра λ разбивается на 8 секторов R_j , $j = \overline{1, 8}$.

Следуя работе [Лидский, Садовничий, 1968], нетрудно получить асимптотические представления для собственных значений спектральной задачи (5)–(6). Например, если взять сектор, где при нумерации $\varepsilon_1 = -1$, $\varepsilon_2 = i$, $\varepsilon_3 = -i$, $\varepsilon_4 = 1$ выполняется неравенство $\operatorname{Re}\lambda\varepsilon_1 \leq \operatorname{Re}\lambda\varepsilon_2 \leq 0 \leq \operatorname{Re}\lambda\varepsilon_3 \leq \operatorname{Re}\lambda\varepsilon_4$, можно получить следующее представление:

$$\lambda^{-11} e^{-(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\lambda} \Delta(\lambda) = \left[\left(2i + 2 + \frac{4i}{\lambda} \right) e^{\varepsilon_2\lambda} + \left(2i - 2 + \frac{4i}{\lambda} \right) e^{\varepsilon_3\lambda} + 1 \right] e^{-\varepsilon_3\lambda} + \frac{E(\lambda)}{\lambda} e^{\varepsilon_2\lambda}, \quad (15)$$

$|\lambda| \rightarrow \infty$ (здесь $E(\lambda)$ является ограниченной функцией при $|\lambda| \rightarrow \infty$). Откуда находим, что главные члены собственных значений в этом секторе являются

$$\lambda_v^{1,2} = [\ln |z_{1,2}| + i(\arg z_{1,2} + 2v\pi)] \varepsilon_2^{-1}, \quad v = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (16)$$

где $z_1 = \frac{\sqrt{31}-1}{16} + i\frac{(1+\sqrt{31})}{16}$; $z_2 = \frac{-\sqrt{31}-1}{16} + i\frac{(1-\sqrt{31})}{16}$.

С применением теоремы Руше [Лаврентьев, Шабат, 1973] получаем, что собственные значения в этом секторе имеют оценку $\lambda_v^{1,2} + O(v^{-1})$.

В общем случае, записывая $\Delta(\lambda)$ в виде $\Delta(\lambda) = \sum_{k=1}^4 P_k(\lambda) e^{\alpha_k\lambda}$, можно показать, что корни $\Delta(\lambda)$ расположены вдоль логарифмических цепей, идущих по длине нормалей к сторонам многоугольника, построенного из выпуклой оболочки точек $\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_9$ и для них при $n \rightarrow \infty$ справедливы асимптотические представления

$$\lambda_n \approx \frac{2\pi in}{\alpha_{s+1} - \alpha_s} \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{R_k(\ln n)}{n^k} \right\}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

где $R_k(\ln n) = \sum_{l=0}^k r_l^k \ln^l n$, r_l^l , $0 \leq l \leq k$ некоторые числа.

Для получения асимптотики $G(x, \xi, \lambda)$ в секторе, где выполняется вышенаписанное неравенство, умножим 2-й, 3-й, 4-й, 5-й столбцы $\Delta(x, \xi, \lambda)$ на $W_{4k}/2W$, предварительно перенумеруя столбцы соответственно по расположению ε_k , $k = \overline{1, 4}$ в неравенстве от левой стороны и сложим с соответствующими элементами 1-го столбца. Полученные таким образом элементы первого столбца обозначим через $g_0(x, \xi, \lambda)$, $g_1(\xi, \lambda)$, $g_2(\xi, \lambda)$, $g_3(\xi, \lambda)$, $g_4(\xi, \lambda)$:

$$g_0(x, \xi, \lambda) = \begin{cases} -\frac{1}{4\lambda^3} \left(e^{\lambda(x-\xi)} - ie^{i\lambda(x-\xi)} \right), & 0 \leq x \leq \xi \leq 1; \\ -\frac{1}{4\lambda^3} \left(e^{-\lambda(x-\xi)} - ie^{i\lambda(x-\xi)} \right), & 0 \leq \xi \leq x \leq 1; \end{cases}$$

$$g_1(\xi, \lambda) = -\frac{1}{4\lambda^3} \left(e^{-\lambda\xi} - ie^{i\lambda\xi} \right),$$

$$g_2(\xi, \lambda) = -\frac{1}{4\lambda} \left(e^{-\lambda\xi} + ie^{i\lambda\xi} - \lambda e^{-\lambda\xi} + \lambda e^{i\lambda\xi} \right),$$

$$g_3(\xi, \lambda) = -\frac{1}{4} \left(e^{-\lambda\xi} + e^{i\lambda\xi} - \lambda^4 e^{i\lambda(1-\xi)} + \lambda^4 e^{-\lambda(1-\xi)} \right),$$

$$g_4(\xi, \lambda) = \frac{1}{4} \left(e^{-\lambda(1-\xi)} + \frac{1}{4} e^{i\lambda(1-\xi)} \right).$$



Полученные элементы $g_0(x, \xi, \lambda)$, $g_1(\xi, \lambda)$, $g_2(\xi, \lambda)$, $g_3(\xi, \lambda)$, $g_4(\xi, \lambda)$ напишем на 1-м столбце $\Delta(x, \xi, \lambda)$ и раскроем этот детерминант по элементам первой строки и обозначим полученный детерминант через $\Delta_0(x, \xi, \lambda)$. В результате имеем следующее разложение:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta_0(x, \xi, \lambda)}{\Delta(\lambda)} &= g_0(x, \xi, \lambda) + \\ &+ \frac{1}{4}e^{-\lambda x} \left(\lambda^{-3} \left[e^{-\lambda \xi} + ie^{i\lambda \xi} \right] \frac{\Delta_{11}(\lambda)}{\Delta(\lambda)} - \lambda^{-1} \left[e^{-\lambda \xi} - ie^{i\lambda \xi} + \lambda e^{-\lambda \xi} - \lambda e^{i\lambda \xi} \right] \frac{\Delta_{21}(\lambda)}{\Delta(\lambda)} + \right. \\ &+ \lambda^{-1} \left[e^{-\lambda \xi} - \lambda e^{i\lambda \xi} + \lambda^5 e^{i\lambda(1-\xi)} - \lambda^5 e^{-\lambda(1-\xi)} \right] \frac{\Delta_{31}(\lambda)}{\Delta(\lambda)} + \left. \left[e^{-\lambda(1-\xi)} - e^{i\lambda(1-\xi)} \right] \frac{\Delta_{41}(\lambda)}{\Delta(\lambda)} \right) - \\ &- \frac{1}{4}e^{i\lambda x} \left(-\lambda^{-3} \left[e^{-\lambda \xi} + ie^{i\lambda \xi} \right] \frac{\Delta_{12}(\lambda)}{\Delta(\lambda)} - \lambda^{-1} \left[e^{-\lambda \xi} - ie^{i\lambda \xi} + \lambda e^{-\lambda \xi} - \lambda e^{-i\lambda \xi} \right] \frac{\Delta_{22}(\lambda)}{\Delta(\lambda)} + \right. \\ &+ \left. \left[e^{-\lambda \xi} - e^{i\lambda \xi} + \lambda^4 e^{i\lambda(1-\xi)} - \lambda^4 e^{-i\lambda(1-\xi)} \right] \frac{\Delta_{32}(\lambda)}{\Delta(\lambda)} + \left[e^{-\lambda(1-\xi)} - e^{i\lambda(1-\xi)} \right] \frac{\Delta_{42}(\lambda)}{\Delta(\lambda)} \right) - \\ &- \frac{1}{4}e^{-i\lambda x} \left(\lambda^{-3} \left[e^{-\lambda \xi} + ie^{i\lambda \xi} \right] \frac{\Delta_{13}(\lambda)}{\Delta(\lambda)} - \lambda^{-1} \left[e^{-\lambda \xi} - ie^{i\lambda \xi} + \lambda e^{-\lambda \xi} - \lambda e^{i\lambda \xi} \right] \frac{\Delta_{23}(\lambda)}{\Delta(\lambda)} + \right. \\ &+ \left. \left[e^{-\lambda \xi} - e^{i\lambda \xi} + \lambda^4 e^{i\lambda(1-\xi)} - \lambda^4 e^{-i\lambda(1-\xi)} \right] \frac{\Delta_{33}(\lambda)}{\Delta(\lambda)} - \left[e^{-\lambda(1-\xi)} - e^{i\lambda(1-\xi)} \right] \frac{\Delta_{43}(\lambda)}{\Delta(\lambda)} \right) - \\ &- \frac{1}{4}e^{\lambda x} \left(\lambda^{-3} \left[e^{-\lambda \xi} - ie^{i\lambda \xi} \right] \frac{\Delta_{14}(\lambda)}{\Delta(\lambda)} - \lambda^{-1} \left[e^{-\lambda \xi} - ie^{i\lambda \xi} + \lambda e^{-\lambda \xi} - \lambda e^{i\lambda \xi} \right] \frac{\Delta_{24}(\lambda)}{\Delta(\lambda)} - \right. \\ &- \left. \left[e^{-\lambda \xi} + e^{i\lambda \xi} + \lambda^4 e^{i\lambda(1-\xi)} - \lambda^4 e^{-\lambda(1-\xi)} \right] \frac{\Delta_{34}(\lambda)}{\Delta(\lambda)} + \left[e^{-\lambda(1-\xi)} - e^{i\lambda(1-\xi)} \right] \frac{\Delta_{44}(\lambda)}{\Delta(\lambda)} \right). \end{aligned} \quad (17)$$

В определителе $\Delta_{vp}(\lambda)$ при $p \leq 2$ в секторе R_j показательной функцией, имеющей наибольшую действительную часть, является функция $e^{\lambda(1-i)}$, а при $p \geq 3$ таких функций являются e^λ и $e^{-i\lambda}$. Умножая числитель и знаменатель $\frac{\Delta_0(x, \xi, \lambda)}{\Delta(\lambda)}$ на $\lambda^{-13} e^{\lambda(1-i)}$, подобно проведенной схеме [Оруджев, 1989] можно установить, что вне малых кругов $K_\delta(\lambda_v)$ радиуса δ с центрами в нулях $\Delta(\lambda)$ выполняется соотношение

$$G(x, \xi, \lambda) = O\left(\frac{1}{\lambda^3}\right), \quad |\lambda| \rightarrow \infty. \quad (18)$$

Это представление справедливо во всех секторах R_j , $j = \overline{1, 8}$. Аналогичным образом устанавливается, что вне малых окрестностей собственных значений имеет место и такая оценка

$$\frac{\Delta_1(x, \lambda, \varphi_0, \varphi_1, f)}{\Delta(\lambda)} = O\left(\frac{1}{\lambda^3}\right), \quad |\lambda| \rightarrow \infty. \quad (19)$$

Эти соотношения показывают, что спектральная задача (5)–(6) регулярна [Расулов, 1986; Оруджев, 1999]. Следовательно, для всякой непрерывной функции $h(x)$ имеет место формула разложения

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \sum_v \int_{C_v} \lambda^s d\lambda \int_0^1 G(x, \xi, \lambda) h(\xi) d\xi &= \begin{cases} h(x), & s = 3 \\ 0, & s < 3 \end{cases} \\ -\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \sum_v \int_{C_v} \lambda^3 \frac{\Delta_1(x, \lambda, \varphi_0, \varphi_1, f)}{\Delta(\lambda)} d\lambda &= 0, \end{aligned} \quad (20)$$



где C_v – простой замкнутый контур, окружающий только одну из корней $\Delta(\lambda)$ и v сумма распространяется на все полюсы функции Грина.

Нетрудно установить, что решение задачи Коши (7)–(8) представляется в виде

$$z(t, \lambda, x) = \varphi_0(x) \cos t\sqrt{\lambda^4 + k} + \frac{1}{\sqrt{\lambda^4 + k}} \cdot \sin t\sqrt{\lambda^4 + k} + \\ + \frac{1}{\sqrt{\lambda^4 + k}} \int_0^t f(x, \xi) \sin(t - \xi)\sqrt{\lambda^4 + k} d\xi, \quad (21)$$

здесь $\sqrt{\lambda^4 + k}$ – регулярная ветвь, положительная при $\lambda^4 + k > 0$.

Теорема 1. *Предположим, что выполняются следующие условия:*

1. Производные $\frac{d^m \varphi_0(x)}{dx^m}$ ($m = \overline{0, 6}$), $\frac{d^m \varphi_1(x)}{dx^m}$ ($m = \overline{0, 4}$) непрерывны на отрезке $[0, 1]$;

2. $\frac{d^m \varphi_0(x)}{dx^m} \Big|_{x=0} = \frac{d^m \varphi_0(x)}{dx^m} \Big|_{x=1} = 0$, ($m = \overline{0, 5}$)

$\frac{d^m \varphi_1(x)}{dx^m} \Big|_{x=0} = \frac{d^m \varphi_1(x)}{dx^m} \Big|_{x=1} = 0$, ($m = \overline{0, 3}$);

3. $f(x, t)$ при всех $x \in [0, 1]$ дважды непрерывно дифференцируема по t в интервале $[0, T]$, имеет непрерывную производную до четвертого порядка включительно по $x \in [0, 1]$ при всех $t \in [0, T]$ и $\frac{\partial f(x, 0)}{\partial x} \Big|_{x=1} = 0$.

Тогда существует единственное решение смешанной задачи (2)–(4), представленное в виде полного интегрального вычета

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \sum_v \int_{C_v} \lambda^3 d\lambda \int_0^1 G(x, \xi, \lambda) z(t, \xi, \lambda) d\xi. \quad (22)$$

□ Представим $u(x, t)$ в виде

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) \quad (23)$$

Обозначим $A_n = \varphi_{0n}$, $B_n = \frac{1}{\lambda_n^2 \sqrt{1+k/\lambda_n^4}}$, $C_n = \frac{1}{\lambda_n^2 \sqrt{1+k/\lambda_n^4}} f_{1n}$, где

$$\varphi_{0n} = \int_0^1 G(x, \xi, \lambda_n) \varphi_0(\xi) d\xi,$$

$$\varphi_{1n} = \int_0^1 G(x, \xi, \lambda_n) \varphi_1(\xi) d\xi,$$

$$f_{1n} = \int_0^t \sin \lambda_n^2 \sqrt{1+k/\lambda_n^4} f(\xi, \tau) d\tau.$$

Тогда из оценки $|u_n(x, t)| \leq |A_n| + |B_n| + |C_n|$ получим, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (|A_n| + |B_n| + |C_n|)$ является мажорантом написанного выше ряда и

$$\frac{\partial^{k+m} u(x, t)}{\partial x^k \partial t^m} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^{k+m} u_n(x, t)}{\partial x^k \partial t^m}, \quad k = \overline{0, 4}; \quad m = \overline{0, 3}.$$

Следовательно, имеет место эквивалентное соотношение

$$\frac{\partial^{k+m} u(x, t)}{\partial x^k \partial t^m} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{k+m} (|A_n| + |B_n| + |C_n|).$$

Дифференцировать три раза по t , четыре раза по x возможно, если ряды в правых частях последнего соотношения будут сходиться равномерно, что обеспечивается при выполнении условия 1)–4) теоремы. Единственность решения $u(x, t)$ получается непосредственно из (22). ■

Заключение

В исследовании доказано, что изучаемая начально-краевая задача для уравнения изгибных колебаний балки имеет классическое решение, если в одном из граничных условий имеются производные по времени более высокого порядка, чем в самом уравнении. При этом предполагаются определенные условия гладкости начальных данных, которые обращаются в нуль вместе со всеми производными до некоторого порядка на концах интервала изменения пространственной переменной, а также условия гладкости и обращение в нуль частной производной по длине балки в начальный момент времени на правом конце. Кроме того, необходимо условие о том, что коэффициент постели отличен от четвертой степени собственных значений, взятых с отрицательным знаком.

Это решение представлено в виде полного интегрального вычета и выражено через решения построенных специальным образом спектральной задачи и задачи Коши. Решение задачи Коши является ограниченным на точках спектра краевой задачи. Это решение определяется легко применяемым практически и относительно эффективным разложением, не использующим техники классических методов интегральных преобразований обобщенного метода Фурье, а также метода характеристик.

Список литературы

1. Аитбаева А.А. 2014. Определение коэффициента постели по собственным частотам колебаний балки. Труды Института Механики им. Р.Р.Мавлютова Уфимского научного центра РАН, вып. 10: 13–15.
2. Сабитов К.Б. 2015. Колебания балки с заделанными концами. Вестник Самарского государственного технического университета. Сер.Физ.-мат. Наук, Т.19, № 2:311–324.
3. Оруджев Э.Г., Амирова Л.И. 2019. Четырехкратное разложение по решению краевой задачи для дифференциального уравнения 4-го порядка с двухкратными характеристиками. Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика, Т.51, № 2:183–191.
4. Оруджев Э.Г., Намазова Н.М. 2019. Об одной смешанной задаче для уравнения колебания стержня, содержащей в граничных условиях производные по времени. Вестник Дагестанского государственного университета. Серия 1. Естественные науки, Т. 34, вып. 3: 66–72.



5. Зульфугарова Р.Т. 2015. О смешанных задачах для волнового уравнения, содержащих в граничных условиях производные по времени. *Journal of Contemporary Applied Mathematics*, V.5(1):29–34.
6. Расулов М.Л. 1986. Разложение функции в ряд полного интегрального вычета и решение смешанных задач. *ДАН СССР*, Т. 286, № 1: 42–46.
7. Лидский В.Б., Садовничий В.А. 1968. Асимптотические формулы для корней одного класса целых функций. *Математический сборник*, Т.75(117), № 4, 558–566.
8. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. 1973. *Методы теории функций комплексного переменного*. Москва, Наука, 735 с.
9. Оруджев Э.Г. 1989. О краевых задачах для дифференциального уравнения 4-го порядка, полиномиально зависящего от спектрального параметра. *ДАН Аз.ССР*, Т.45(10), 7–12.
10. Оруджев Э.Г. 1999. Краевые задачи для дифференциальных уравнений четкого порядка с кратными характеристиками. *Доклады Академии Наук, Российская Академия Наук*, 368(1): 14–17.
11. Orudzhev E.G. 1998. To spectral analysis of ordinary differential operators polynomially depending on a spectral parameter with periodic coefficients. *Proc. Inst. Math. Mech. Nati. Acad. Sci. Azerb* 8(15):169- 175.

References

1. Aitbaeva A.A. 2014. Opredelenie koeffitsenta posteli po sobstvennim chastotam kolebaniy balki. *Trudi Instituta Mexaniki im.R.R.Mavlyutova Ufimskogo nauchnogo tsentra RAN*, vip. 10:13–15.
2. Sabitov K.B. 2015. Kolebaniya balki s zadelannimi kontsami. *Vestnik Samarskogo qosudarstvennogo texnicheskogo universiteta. Ser.Fiz.-Mat. Nauk*, T.19, № 2:311–324.
3. Orudzhev E.G., Amirova L.I. 2019. Chetirekratnoe razlojenie po resheniyu kraevoy zadachi dlya differentsialnogo uravneniya 4-qo poryadka s dvukratnimi xarakteristikami. *Nauchnie vedomosti Belqorodskogo qosudarstvennogo universiteta. Seriya:Matematika. Fizika*, T. 51, № 2:183–191.
4. Orudzhev E.G., Namazova N.M. 2019. Ob odnoy smeshannoy zadache dlya uravneniya kolebaniya sterjnya, soderjashey v qranichnix usloviyax proizvodnie po vremeni. *Vestnik Daqestanskogo qosudarstvennogo universiteta. Seriya 1. Estestvennie nauki*, T. 34, vip. 3:66–72.
5. Zulfugarova R.T. 2015. O smeshannix zadachax dlya volnovogo uravneniya, soderjashix v qranichnix usloviyax proizvodnie po vremeni. *Journal of Contemporary Applied Mathematics*, V.5(1):29–34.
6. Rasulov M.L. 1986. Razlojenie funktsii v ryad polnoqo intlimitseqralnogo vicheta I reshenie smeshannix zadach. *DAN SSSR*, T. 286, № 1: 42–46.
7. Lidskiy V.B., Sadovnichiy V.A. 1968. Asimptoticheskie formuli dlya korney odnogo klassa tselix funktsiy. *Matematicheskiy sbornik*, T.75(117), № 4, 558–566.

8. Lavrentev M.A., Shabat B.V. 1973. Metodi teorii funktsiy kompleksnogo peremennogo. Moskva, Nauka, 735 p.
9. Orudzhev E.G. 1989. O kraevix zadachax dlya differentsialnogo uravneniya 4-go poryadka, polinomialno zavisyashego ot spektralnogo parametra. DAN Az.SSR, T.45(10), 7–12.
10. Orudzhev E.G. 1999. Kraevie zadachi dlya differentsialnix uravneniy chetkogo poryadka s kratnimi xarakteristikami. Dokladi Akademii Nauk, Rossiyskaya Akademiya Nauk, 368(1): 14–17.
11. Orudzhev E.G. 1998. To spectral analysis of ordinary differential operators polynomially depending on a spectral parameter with periodic coefficients. Proc. Inst. Math. Mech. Nati. Acad. Sci. Azerb 8(15):169- 175.

Ссылка для цитирования статьи
For citation

Оруджев Э.Г., Зулфугарова Р.Т. 2019. Об одной начально-граничной задаче для уравнения изгибных колебаний балки. Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика. 51 (4): 496–505. DOI 10.18413/2075-4639-2019-51-4-496-505.

Orudzhev E.G., Zulfugarova R.T. 2019. About one initial-boundary problem for equation of bending beam vibrations. Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics. Physics. 51 (4): 496–505 (in Russian). DOI 10.18413/2075-4639-2019-51-4-496-505.



УДК 517.9

DOI 10.18413/2075-4639-2019-51-4-506-513

**ОБОБЩЕННАЯ ДИВЕРГЕНТНАЯ ТЕОРЕМА И ВТОРОЕ ТОЖДЕСТВО
ГРИНА ДЛЯ В-ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ И В-ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ
ОПЕРАТОРОВ****GENERALIZED DIVERGENT THEOREM AND SECOND GREEN IDENTITY
OF V-ELLIPTIC AND V-HYPERBOLIC OPERATORS****Э.Л. Шишкина****E.L. Shishkina**

Высшая школа информатики и управления,
35-225, ул. Х. Зучарского, 2, Жешув, Польша

University of Information Technology and Management,
35-225, ul. mjr. H. Sucharskiego, 2, Rzeszow, Poland

E-mail: ilina_dico@mail.ru**Аннотация:**

В статье представлено обобщение дивергентной теоремы, устанавливающей связь между весовой дивергенцией векторного поля и производной по направлению от этой же векторного поля, подправленного степенными весами. Из этого обобщения следуют две формулы типа второго тождества Грина для случаев, когда в операторах эллиптического и гиперболического типов действует оператор Бесселя вместо второй производной. Классическое второе тождество Грина имеет большое значение в математической физике, поскольку, например, при его помощи устанавливается единственность решения задачи Коши для волнового уравнения. Обобщение этого тождества, полученное в статье, может быть использовано для доказательства единственности решения задачи Коши для общего уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу.

Abstract:

The article presents a generalization of the divergence theorem, which establishes a connection between the weight divergence of a vector field and the derivative in the direction from the same vector field corrected by power weights. From this generalization, two formulas of the type of the second Green identity follow for the cases when the Bessel operator acts instead of the each second derivative in the operators of elliptic and hyperbolic types. The classical second Green identity is of great importance in mathematical physics, because, for example, with its help the uniqueness of the solution of the Cauchy problem for the wave equation is established. The generalization of this identity obtained in the article can be used to prove the uniqueness of the solution of the Cauchy problem for the general Euler–Poisson–Darboux equation.

Ключевые слова: оператор Бесселя, обобщение дивергентной теоремы, обобщение формулы Грина, В-эллиптический оператор, В-гиперболический оператор.

Keyword: Bessel's operator, generalization of the divergence theorem, generalization of Green's formula, V-elliptic operator, V-hyperbolic operator.



1. Введение

Утверждение дивергентной теоремы представляет собой равенство между поверхностным и объемным интегралом с учетом расходимости векторного поля. Такие интегралы часто возникают в задачах механики, особенно в задачах вариационного исчисления в механике. В этой статье мы рассмотрим обобщение дивергентной теоремы на случай, когда дивергенция порождается оператором набла с весовыми множителями. Такой вариант дивергентной теоремы позволяет получать формулы Грина для дифференциальных выражений с сингулярными операторами Бесселя. В качестве примеров приложения обобщенной дивергентной теоремы приведены вторые тождества Грина для операторов эллиптического и гиперболического типов, где вместо каждой второй производной действует оператор Бесселя.

Основным объектом исследования в этой статье выступает *сингулярный дифференциальный оператор Бесселя* B_γ (см., например, [2], стр. 5) вида

$$(B_\gamma)t = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\gamma}{t} \frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{t^\gamma} \frac{\partial}{\partial t} t^\gamma \frac{\partial}{\partial t}, \quad t > 0, \quad \gamma \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Мы будем рассматривать В-эллиптический оператор вида

$$\Delta_\gamma = (\Delta_\gamma)_x = \sum_{k=1}^n (B_{\gamma_k})_{x_k} \tag{2}$$

и В-гиперболический оператор вида

$$\square_\gamma = (\square_\gamma)_x = (B_{\gamma_1})_{x_1} - \sum_{i=2}^n (B_{\gamma_i})_{x_i}. \tag{3}$$

Для оператора Δ_γ используется термин *оператор Лапласа–Бесселя* (см. [2, 6]).

Здесь доказывается обобщение дивергентной теоремы на случай взвешенной дивергенции и выводится вторая формула Грина для операторов вида Δ_γ и \square_γ .

Пусть \mathbb{R}^n – n -мерное евклидово пространство,

$$\mathbb{R}_+^n = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad x_1 > 0, \dots, x_n > 0\},$$

$$\overline{\mathbb{R}}_+^n = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0\},$$

$\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ – мультииндекс, состоящий из фиксированных положительных чисел γ_i , $i = 1, \dots, n$, и $|\gamma| = \gamma_1 + \dots + \gamma_n$.

Рассмотрим открытое множество Ω в \mathbb{R}^n , симметричное относительно каждой гиперплоскости $x_i = 0$, $i = 1, \dots, n$. Пусть $\Omega_+ = \Omega \cap \mathbb{R}_+^n$ и $\overline{\Omega}_+ = \Omega \cap \overline{\mathbb{R}}_+^n$ где

$$\overline{\mathbb{R}}_+^n = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0\}.$$

Имеем $\Omega_+ \subseteq \mathbb{R}_+^n$ и $\overline{\Omega}_+ \subseteq \overline{\mathbb{R}}_+^n$. Мы рассмотрим множество $C^m(\Omega_+)$, состоящее из m раз дифференцируемых на Ω_+ функций. Через $C^m(\overline{\Omega}_+)$ обозначим подмножество функций из $C^m(\Omega_+)$ таких, что все производные этих функций по x_i для любого $i = 1, \dots, n$ непрерывно продолжаются на $x_i = 0$. Класс $C_{ev}^m(\overline{\Omega}_+)$ состоит из функций $f \in C^m(\overline{\Omega}_+)$, таких, что $(\partial^{2k+1} f / \partial x_i^{2k+1})_{x=0} = 0$ для всех неотрицательных целых $k \leq m$ при $i = 1, \dots, n$ (см. [1] и [2], стр. 21 и далее).

Пусть $\vec{e} = (e_1, \dots, e_n)$ является ортонормированным базисом в \mathbb{R}^n ,

$$\nabla'_\gamma = \left(\frac{1}{x_1^{\gamma_1}} \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{1}{x_n^{\gamma_n}} \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$$



— первый взвешенный оператор набла,

$$\vec{F} = \vec{F}(x) = (F_1(x), \dots, F_n(x))$$

— векторное поле,

$$(\nabla'_\gamma \cdot \vec{F}) = \frac{1}{x_1^{\gamma_1}} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{1}{x_n^{\gamma_n}} \frac{\partial F_n}{\partial x_n}$$

— весовая дивергенция.

Рассмотрим в $\overline{\mathbb{R}}_+^n$ область G^+ , ограниченную кусочно-гладкой границей $S^+ \in \overline{\mathbb{R}}_+^n$. Таким образом, поверхность S^+ может быть представлена в виде объединения $S^+ = \bigcup_{k=1}^q S_k^+$ конечного числа частей S_k^+ без общих внутренних точек. Пусть для каждой внутренней точки S_k^+ существует окрестность, внутри которой поверхность S_k^+ представлена параметрическими уравнениями вида

$$x_i = \chi_i(y_1, \dots, y_{n-1}), \quad i = 1, \dots, n,$$

где $\chi_i(y)$, $y = (y_1, \dots, y_{n-1})$ имеет непрерывные первые производные и ранг матрицы Якоби $\left\| \frac{\partial(\chi_1, \dots, \chi_n)}{\partial(y_1, \dots, y_{n-1})} \right\|$ равен $n - 1$. Вектор

$$\vec{N} = \left\| \begin{array}{ccc} e_1 & \dots & e_n \\ \frac{\partial \chi_1(y)}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial \chi_n(y)}{\partial y_1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \chi_1(y)}{\partial y_{n-1}} & \dots & \frac{\partial \chi_n(y)}{\partial y_{n-1}} \end{array} \right\|$$

является нормальным в каждой точке $y \in S^+$ к поверхности S^+ за исключением точек соединения поверхностей S_k^+ , $k = 1, \dots, q$, в которых он не определен однозначно и не будет рассматриваться. Вектор

$$\vec{\nu} = \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|}$$

определяется с точностью до знака. Из двух возможных направлений $\vec{\nu}$ выберем внешнее по отношению к области G^+ . Такой вектор будем называть единичным вектором нормали к поверхности S^+ в точке y . Через η_i обозначим угол между вектором $\vec{\nu}$ и осью x_j , тогда

$$\vec{\nu} = e_1 \cos \eta_1 + \dots + e_n \cos \eta_n.$$



2. Обобщенная дивергентная теорема

Теорема 1. Пусть G^+ — область в \mathbb{R}_+^n такая, что каждая линия, перпендикулярная плоскости $x_i = 0, i = 1, \dots, n$, либо не пересекает G^+ или имеет один общий отрезок с G^+ (возможно вырождающийся в точку) вида

$$\alpha_i(x') \leq x_i \leq \beta_i(x'), \quad x' = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n), \quad i = 1, \dots, n.$$

Если $\vec{g} = (g_1(x), \dots, g_n(x))$ является непрерывно дифференцируемым в G^+ векторным полем и $\vec{F} = (F_1(x), \dots, F_n(x)), F_1(x) = x_1^{\gamma_1} g_1(x), \dots, F_n(x) = x_n^{\gamma_n} g_n(x)$, то справедлива формула

$$\int_{G^+} (\nabla'_\gamma \cdot \vec{F}) x^\gamma dx = \int_{S^+} (\vec{g} \cdot \vec{\nu}) x^\gamma dS, \tag{4}$$

где $\vec{\nu}$ — внешний вектор нормали поверхности S^+ .

□ Пусть i — фиксированное натуральное число между 1 и n включительно. Часть поверхности S^+ , определенную уравнением $x_i = \beta_i(x')$, обозначим S_u^+ , а часть поверхности S^+ , определенную уравнением $x_i = \alpha_i(x')$, обозначим S_d^+ , тогда

$$(\vec{\nu}, e_i) = \begin{cases} -\left[1 + \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial x_1}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial x_{i-1}}\right)^2 + \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial x_{i+1}}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial x_n}\right)^2\right]^{-1/2}, & x \in S_d^+; \\ \left[1 + \left(\frac{\partial \beta_i}{\partial x_1}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial \beta_i}{\partial x_{i-1}}\right)^2 + \left(\frac{\partial \beta_i}{\partial x_{i+1}}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial \beta_i}{\partial x_n}\right)^2\right]^{-1/2}, & x \in S_u^+. \end{cases}$$

Имеем

$$\int_{G^+} (\nabla'_\gamma \cdot \vec{F}) x^\gamma dx = \sum_{i=1}^n \int_{G^+} \frac{1}{x_i^{\gamma_i}} \frac{\partial F_i}{\partial x_i} x^\gamma dx.$$

Рассмотрим

$$\int_{G^+} \frac{1}{x_i^{\gamma_i}} \frac{\partial F_i}{\partial x_i} x^\gamma dx = \int_Q x_1^{\gamma_1} \dots x_{i-1}^{\gamma_{i-1}} x_{i+1}^{\gamma_{i+1}} \dots x_n^{\gamma_n} dx_1 \dots dx_{i-1} dx_{i+1} \dots dx_n \int_{\alpha_i(x')}^{\beta_i(x')} \frac{\partial F_i}{\partial x_i} dx_i,$$

где Q — проекция G^+ на $x_i = 0$. Интегрируя по x_i , получим

$$\int_{G^+} \frac{1}{x_i^{\gamma_i}} \frac{\partial F_i}{\partial x_i} x^\gamma dx = \int_Q F_i(x) \Big|_{x_i=\alpha_i(x')}^{x_i=\beta_i(x')} x_1^{\gamma_1} \dots x_{i-1}^{\gamma_{i-1}} x_{i+1}^{\gamma_{i+1}} \dots x_n^{\gamma_n} dx_1 \dots dx_{i-1} dx_{i+1} \dots dx_n.$$

Пусть $(x')^{\gamma'} = x_1^{\gamma_1} \dots x_{i-1}^{\gamma_{i-1}} x_{i+1}^{\gamma_{i+1}} \dots x_n^{\gamma_n}$, $dx' = dx_1 \dots dx_{i-1} dx_{i+1} \dots dx_n$. Тогда

$$\begin{aligned} \int_{G^+} \frac{1}{x_i^{\gamma_i}} \frac{\partial F_i}{\partial x_i} x^\gamma dx &= \int_Q F_i(x_1, \dots, x_{i-1}, \beta_i(x'), x_{i+1}, \dots, x_n) (x')^{\gamma'} dx' - \\ &\quad - \int_Q F_i(x_1, \dots, x_{i-1}, \alpha_i(x'), x_{i+1}, \dots, x_n) (x')^{\gamma'} dx' = \\ &= \int_Q F_i(x_1, \dots, x_{i-1}, \beta_i(x'), x_{i+1}, \dots, x_n) (\vec{\nu}, e_i) \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \beta_i}{\partial x_1}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial \beta_i}{\partial x_{i-1}}\right)^2 + \left(\frac{\partial \beta_i}{\partial x_{i+1}}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial \beta_i}{\partial x_n}\right)^2} (x')^{\gamma'} dx' + \\
& + \int_Q F_i(x_1, \dots, x_{i-1}, \alpha_i(x'), x_{i+1}, \dots, x_n)(\vec{\nu}, e_i) \times \\
& \times \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial x_1}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial x_{i-1}}\right)^2 + \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial x_{i+1}}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial x_n}\right)^2} (x')^{\gamma'} dx' = \\
& = \int_{S_u^+} F_i(x)(\vec{\nu}, e_i)(x')^{\gamma'} dS_u + \int_{S_d^+} F_i(x)(\vec{\nu}, e_i)(x')^{\gamma'} dS_d = \\
& = \int_{S_u^+} g_i(x)(\vec{\nu}, e_i)x^{\gamma} dS_u + \int_{S_d^+} g_i(x)(\vec{\nu}, e_i)x^{\gamma} dS_d = \int_{S^+} g_i(x) \cos \eta_i x^{\gamma} dS.
\end{aligned}$$

В результате, получим

$$\int_{G^+} (\nabla'_{\gamma} \cdot \vec{F}) x^{\gamma} dx = \sum_{i=1}^n \int_{S^+} g_i(x) \cos \eta_i x^{\gamma} dS = \int_{S^+} (\vec{g} \cdot \vec{\nu}) x^{\gamma} dS. \quad \blacksquare$$

Замечание 1. Предположим, что область $G^+ \in \overline{\mathbb{R}}_+^n$ есть объединение областей G_1^+, \dots, G_m^+ без общих внутренних точек. Пусть каждая область G_j^+ в $\overline{\mathbb{R}}_+^n$ такая, что каждая линия, перпендикулярная плоскости $x_i = 0$, $i = 1, \dots, n$, либо не пересекает G_j^+ либо имеет один общий с G_j^+ отрезок (возможно вырождающийся в точку) вида

$$\alpha_i^j(x') \leq x_i \leq \beta_i^j(x'), \quad x' = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n), \quad i = 1, \dots, n$$

и $\vec{F} = (F_1(x), \dots, F_n(x))$, $F_1(x) = x_1^{\gamma_1} g_1(x), \dots, F_n(x) = x_n^{\gamma_n} g_n(x)$, $\vec{g} = (g_1(x), \dots, g_n(x))$ — непрерывно дифференцируемое в G^+ векторное поле, тогда справедлива следующая формула

$$\int_{G^+} (\nabla'_{\gamma} \cdot \vec{F}) x^{\gamma} dx = \int_{S^+} (\vec{g} \cdot \vec{\nu}) x^{\gamma} dS, \quad (5)$$

где $S^+ \in \overline{\mathbb{R}}_+^n$ — кусочно-гладкая граница поверхности, $\vec{\nu}$ вектор нормали внешней стороны поверхности S^+ .

3. Второе тождество Грина для В-эллиптических и В-гиперболических операторов

Второе тождество Грина широко представлено в векторном анализе и имеет множество приложений, например используется при доказательстве единственности решения задачи Коши для волнового уравнения и уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу (см. [4]). Мы приведем обобщения второго тождества Грина на случай, когда в операторах эллиптического и гиперболического типов действует оператор Бесселя вместо второй производной.

Теорема 2. Пусть G^+ удовлетворяет условиям замечания 1. Если φ, ψ дважды непрерывно дифференцируемые функции, определенные на G^+ , такие что

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right|_{x_i=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right|_{x_i=0} = 0, \quad i = 1, \dots, n,$$



то справедлива вторая формула Грина для оператора Лапласа–Бесселя вида

$$\int_{G^+} (\psi \Delta_\gamma \varphi - \varphi \Delta_\gamma \psi) x^\gamma dx = \int_{S^+} \left(\psi \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{\nu}} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial \vec{\nu}} \right) x^\gamma dS. \tag{6}$$

□ Если φ, ψ — дважды непрерывно дифференцируемые функции, определенные в G^+ , такие, что

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \Big|_{x_i=0} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \Big|_{x_i=0} = 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

то, выбрав

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \psi \nabla_\gamma'' \varphi - \varphi \nabla_\gamma'' \psi = \left(\psi \cdot x_1^{\gamma_1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - \varphi \cdot x_1^{\gamma_1} \frac{\partial \psi}{\partial x_1}, \dots, \psi \cdot x_n^{\gamma_n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} - \varphi \cdot x_n^{\gamma_n} \frac{\partial \psi}{\partial x_n} \right) = \\ &= \left(x_1^{\gamma_1} \left(\psi \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \right), \dots, x_n^{\gamma_n} \left(\psi \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial x_n} \right) \right), \end{aligned}$$

получим вторую формулу Грина для оператора Лапласа–Бесселя. Действительно, в этом случае

$$\vec{g} = \left(\psi \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial x_1}, \dots, \psi \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial x_n} \right)$$

непрерывно дифференцируемое векторное поле, определенное в G^+ , и

$$\begin{aligned} (\nabla'_\gamma \cdot \vec{F}) &= (\nabla'_\gamma \cdot (\psi \nabla_\gamma'' \varphi - \varphi \nabla_\gamma'' \psi)) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{x_i^{\gamma_i}} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\psi \cdot x_i^{\gamma_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) - \frac{1}{x_i^{\gamma_i}} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\varphi \cdot x_i^{\gamma_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right) \right) = \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{x_i^{\gamma_i}} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \cdot x_i^{\gamma_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \psi \cdot \frac{1}{x_i^{\gamma_i}} \frac{\partial}{\partial x_i} x_i^{\gamma_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} - \frac{1}{x_i^{\gamma_i}} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \cdot x_i^{\gamma_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} - \varphi \cdot \frac{1}{x_i^{\gamma_i}} \frac{\partial}{\partial x_i} x_i^{\gamma_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right) = \\ &= \sum_{i=1}^n (\psi B_{\gamma_i} \varphi - \varphi B_{\gamma_i} \psi) = \psi \Delta_\gamma \varphi - \varphi \Delta_\gamma \psi, \end{aligned}$$

$$(\vec{g} \cdot \vec{\nu}) = \left(\psi \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \cos \eta_1 + \dots + \psi \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} \cos \eta_n \right) - \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \cos \eta_1 + \dots + \varphi \frac{\partial \psi}{\partial x_n} \cos \eta_n \right) = \psi \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{\nu}} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial \vec{\nu}}.$$

Применяя (5), получим (6). ■

Замечание 2. Для случая, когда весовая переменная только одна, эта формула приведена в [3] (формула (3)) другим методом.

Как следствие теоремы 2, получим формулу для интеграла со степенным весом $x^\gamma = x_1^{\gamma_1} \dots x_n^{\gamma_n}$, $\gamma_i > 0$, $i=1, \dots, n$ в случае, когда область интегрирования слева — это часть шара, принадлежащего ортанту \mathbb{R}_+^n .

Часть шара $|x| \leq r$, $|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ принадлежащего ортанту \mathbb{R}_+^n обозначим через $B_r^+(n)$. Границу множества $B_r^+(n)$ обозначим через $S_r^+(n)$. Эта граница состоит из части сферы $\{x \in \mathbb{R}_+^n : |x|=r\}$ и частей координатных гиперплоскостей $x_i=0$, $i=1, \dots, n$ таких, что $|x^i| \leq r$.

Следствие. Для $w \in C_{ev}^2(B_R^+(n))$ справедлива формула

$$\int_{B_R^+(n)} (\Delta_\gamma w(x)) x^\gamma dx = \int_{S_R^+(n)} \left(\frac{\partial w(x)}{\partial \vec{\nu}} \right) x^\gamma dS, \tag{7}$$

где $\vec{\nu}$ внешняя нормаль к $S_R^+(n)$.

Пусть

$$\diamond_{\gamma} = \left(x_1^{\gamma_1} \frac{\partial}{\partial x_1}, -x_2^{\gamma_2+1} \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, -x_n^{\gamma_n} \frac{\partial}{\partial x_n} \right).$$

Тогда

$$(\nabla'_{\gamma} \cdot \diamond_{\gamma}) = \square_{\gamma}.$$

Теорема 3. Пусть G^+ удовлетворяет условиям замечания 1. Если φ, ψ дважды непрерывно дифференцируемые функции, определенные в G^+ , такие что

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \Big|_{x_i=0} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \Big|_{x_i=0} = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Тогда справедлива вторая формула Грина для В-ультрагиперболического оператора вида

$$\int_{G^+} (\psi \square_{\gamma} \varphi - \varphi \square_{\gamma} \psi) x^{\gamma} dx = \int_{S^+} \left(\psi \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{\tau}} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial \vec{\tau}} \right) x^{\gamma} dS, \quad (8)$$

где $\vec{\tau} = (\cos \eta_1, -\cos \eta_2, \dots, -\cos \eta_n)$.

□ Пусть

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \psi \diamond_{\gamma} \varphi - \varphi \diamond_{\gamma} \psi = \\ &= \left(x_1^{\gamma_1} \left(\psi \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \right), -x_2^{\gamma_2} \left(\psi \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \right), \dots, -x_n^{\gamma_n} \left(\psi \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial x_n} \right) \right). \end{aligned}$$

Тогда

$$\vec{g} = \left(\psi \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial x_1}, - \left(\psi \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \right), \dots, - \left(\psi \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial x_n} \right) \right),$$

$$(\nabla'_{\gamma} \cdot \vec{F}) = \psi \square_{\gamma} \varphi - \varphi \square_{\gamma} \psi,$$

$$(\vec{g} \cdot \vec{\nu}) = \left(\psi \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \cos \eta_1 - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \cos \eta_1 \right) - \sum_{i=2}^n \left(\psi \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \cos \eta_i - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \cos \eta_i \right) = \psi \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{\tau}} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial \vec{\tau}},$$

где $\vec{\tau} = (\cos \eta_1, -\cos \eta_2, \dots, -\cos \eta_n)$. Применяя (5), получим (8). ■

Вторая формула Грина для В-ультра-гиперболического оператора может быть использована для доказательства единственности задачи Коши для общего уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу (см. [5]).

Список литературы

1. Житомирский Я.И. 1955. Задача Коши для систем линейных уравнений в частных производных с дифференциальными операторами типа Бесселя. Матем. сб. 36(78)(2):299–310.
2. Киприянов И.А. 1997. Сингулярные эллиптические краевые задачи. М.: Наука-Физматлит.
3. Киприянова Н.И. 1985. Формула среднего значения для собственной функции сингулярного дифференциального оператора. Дифференц. уравнен. XXI(11):1998–2001.
4. Курант Р., Гильберт Д. 1945. Уравнения математической физики. Т.2 М.-Л. : ГИТТЛ.
5. Ситник С.М., Шишкина Э.Л. 2019. Метод операторов преобразования для дифференциальных уравнений с операторами Бесселя. Москва: Физматлит, 2019.

6. Guliev V.S. 2006. Weighted inequality for fractional maximal functions and fractional integrals associated with the Laplace–Bessel differential operator. *Trans. Natl. Acad. Sci. Azerb. Ser. Phys.-Tech. Math. Sci.* 26(1):71–80.

References

1. Zhitomirskii Ya.I. 1955. Cauchy's problem for systems of linear partial differential equations with differential operators of Bessel type. *Mat. Sb. (N.S.)* 36(78)(2):299–310.
2. Kipriyanov I.A. 1997. *Singular Elliptic Boundary Value Problems*. M.: Nauka-Fizmtlit.
3. Kipriyanova N.I. 1985. Average formula for the eigenfunction of a singular differential operator. *Diff. eq.* 1985. XXI(11):1998–2001.
4. Courant R., Hilbert D. 1945. *Equations of mathematical physics. V.2 M.-L.* : GITTL.
5. Sitnik S.M., Shishkina E.L. 2019. *Transmutation operators method for differential equations with Bessel operators*. Moscow. Fizmatlit, 2019.
6. Guliev V.S. 2006. Weighted inequality for fractional maximal functions and fractional integrals associated with the Laplace–Bessel differential operator. *Trans. Natl. Acad. Sci. Azerb. Ser. Phys.-Tech. Math. Sci.* 26(1):71–80.

Ссылка для цитирования статьи For citation

Шишкина Э.Л. 2019. Обобщенная дивергентная теорема и второе тождество Грина для В-эллиптических и В-гиперболических операторов. *Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика.* 51 (4): 506–513. DOI 10.18413/2075-4639-2019-51-4-506-513.

Shishkina E.L. 2019. Generalized divergent theorem and second Green identity of B-elliptic and B-hyperbolic operators. *Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics. Physics.* 51 (4): 506–513 (in Russian). DOI 10.18413/2075-4639-2019-51-4-506-513.

УДК 519.651

DOI 10.18413/2075-4639-2019-51-4-514-521

**РАСЧЁТ КОНЕЧНОМЕРНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ
МОДЕЛИ В ЗАДАЧЕ КВАДРАТИЧНОЙ
ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ**

**NUMERICAL SOLUTION TO THE FINITE-DIMENSION PROBLEM
OF QUADRATIC EXPONENTIAL INTERPOLATION**

А.С. Тимашев

A.S. Timashev

Белгородский государственный национальный исследовательский университет,
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия

Belgorod National Research University,
85 Pobedy St, Belgorod, 308015, Russia

E-mail: aleksandrtim@rambler.ru

Аннотация

В статье рассматриваются аппроксимации сигналов при помощи целочисленных сдвигов квадратичных экспонент — функций Гаусса. Предложен метод нахождения узловой функции для данной задачи интерполяции, основанный на решениях усеченных систем линейных уравнений. Приведен основной результат о корректности решения системы линейных уравнений, лежащий в основе излагаемого подхода. Проведено краткое сравнение данного метода с известными ранее и перечислены приложения полученных результатов в теории сигналов.

Abstract

In this paper we consider approximations of functions using integer shifts of Gaussians — quadratic exponentials with parameters. A method is proposed to find coefficients of node functions by solving linear systems of equations. The main result is announced on correct solvability of the fundamental linear system. We compare results with known ones and briefly indicate applications to signal theory.

Ключевые слова: квадратичные экспоненты, функции Гаусса, интерполяция, цифровые сигналы.

Keywords: quadratic exponentials, Gauss functions, interpolation, digital signals.

1. Введение

В течение длительного времени основным инструментом приближений были разложения по полным ортогональным системам. Однако, за последние годы в различных разделах математики и прикладных областях оформился весьма широкий круг задач, решение которых требует использования разложений функций по неполным, переполненным или неортогональным системам. Такие задачи возникают, например, при изучении электрических или оптических сигналов, теории фильтрации, голографии, при моделировании процессов в томографии и медицине. Примерами переполненных систем являются фреймы, а неортогональных — всплески, системы Габора (когерентные состояния), функции Рвачёвых и другие.

Рассмотрим задачу о приближении достаточно произвольной функции в виде ряда по системе целочисленных сдвигов функции Гаусса (квадратичной экспоненты с параметрами). Известно, что эта система неполна в стандартных пространствах, тем не менее она часто и с успехом используется. Историю вопроса, основные результаты и многочисленные приложения см. в работах [Maz'ya, 2007; Kiselev, 2014; Zhuravlev, 2011; Minin, 2009].



2. Интерполяционная задача

Более точно, будет исследована следующая основная

Интерполяционная задача: рассмотрим произвольную функцию $f(x)$, заданную на всей оси $x \in \mathbb{R}$, и некоторый параметр $\sigma > 0$, который в вероятностных приложениях играет роль среднеквадратичного отклонения. Функция действительно может быть произвольного вида, так как мы работаем только с её значениями в целочисленных узлах. Будем искать интерполирующую функцию $\tilde{f}(x)$, также определённую на всей оси $x \in \mathbb{R}$, которая представляется в виде ряда по целочисленным сдвигам функции Гаусса

$$\tilde{f}(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k e^{-\frac{(x-k)^2}{2\sigma^2}} \tag{1}$$

и совпадает с исходной функцией во всех целых точках

$$f(m) = \tilde{f}(m), \quad m \in \mathbb{Z}. \tag{2}$$

Известны несколько подходов к решению поставленной задачи. При первом подходе решение ищется с помощью специальных функций, а именно тета-функций Якоби [Maz'ya, 2007]. Однако, как показано в [Zhuravlev, 2011; Minin, 2009], несмотря на теоретическую ценность этого подхода, он не имеет вычислительных перспектив, так как связан с делением на чрезвычайно малые знаменатели. Другой подход разрабатывался в [Zhuravlev, 2011; Minin, 2009], он основан на применении дискретного преобразования Фурье (ДПФ). Такой подход имеет определённую вычислительную ценность, но она достигается ценой усложнения алгоритма, при этом вычисления эффективны в достаточно узких диапазонах параметров и с небольшим числом разрядов в результатах. Чтобы преодолеть указанные трудности был предложен прямой метод решения поставленной задачи интерполяции, основанный на сведении её к решению конечных систем линейных уравнений [Ситник, 2013; Ситник, 2014, Ситник, Тимашов, 2014].

Существенным препятствием для развития этого метода являлось отсутствие результатов по доказательству однозначной разрешимости соответствующих систем линейных уравнений. В настоящей работе приведены результаты, устанавливающие требуемую однозначную разрешимость линейных систем. Эти результаты являются теоретическим обоснованием для разработки практических численных алгоритмов, избавленных от необходимости работы со специальными функциями или ДПФ. Также могут быть получены дальнейшие результаты для переполненных систем линейных уравнений и предельные свойства решений конечномерных систем.

Для дальнейшего изложения введём удобное обозначение для квадратичной экспоненты

$$e(\sigma, x, k) = e^{-\frac{(x-k)^2}{2\sigma^2}}. \tag{3}$$

Решение поставленной задачи сводится к нахождению последовательности неизвестных коэффициентов f_k из (1). Для этого, следуя стандартной схеме решения задач интерполяции, необходимо построить узловые функции для каждого узла интерполяции $x = m, m \in \mathbb{Z}$. В нашем случае достаточно построить одну *базисную узловую функцию* для узла при $x = 0$, которую мы будем искать в виде

$$G(\sigma, x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k e(\sigma, x, k). \tag{4}$$

Вывод определяющих соотношений и бесконечной системы линейных уравнений для нахождения коэффициентов базисной узловой функции известен, для полноты изложения мы кратко повторим эти выкладки, [Maz'ya, 2007; Kiselev, 2014; Zhuravlev, 2011; Minin, 2009].



Из (2) следует, что эта базисная узловая функция должна удовлетворять основному условию при всех $m \in \mathbb{Z}$:

$$G(\sigma, m) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k e(\sigma, m, k) = \sigma_{m0}, \quad (5)$$

где σ_{m0} есть символ Кронекера

$$\sigma_{m0} = \begin{cases} 1, & m = 0 \\ 0, & m \neq 0. \end{cases}$$

Предположим, что такая функция $G(\sigma, x)$, удовлетворяющая условию (5), уже найдена. Тогда нетрудно выписать формальное решение поставленной задачи. Действительно, функция

$$G_l(\sigma, x) = G(\sigma, x - l)$$

является узловой функцией для узла при $x = l$, так как при всех значениях m

$$G_l(\sigma, m) = G(\sigma, m - l) = \sigma_{ml}.$$

Тогда одним из решений поставленной интерполяционной задачи будет, очевидно, функция

$$\tilde{f}(x) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} f(l) G_l(\sigma, x), \quad (6)$$

так как при $x = m$ от суммы (6) остаётся только одно слагаемое:

$$f(m) G_m(\sigma, m) = f(m) \cdot 1 = f(m).$$

Чтобы перейти от представления решения в виде (6) к искомому представлению в виде (1), выполним необходимую подстановку. В результате получим с учетом (4):

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x) &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} f(l) G_l(\sigma, x) = \\ &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} f(l) G(\sigma, x - l) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} f(l) \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k e(\sigma, x - l, k) \end{aligned}$$

Введём новый индекс суммирования $j = l + k$ вместо $l = j - k$ и формально поменяем порядок суммирования. Тогда получим

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x) &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(j - k) g_k e(\sigma, x - j, k) = \\ &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_{l=-\infty}^{\infty} f(j - k) g_k \right\} e(\sigma, x - j, k) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} f_j e(\sigma, x, j), \end{aligned} \quad (7)$$

где искомые коэффициенты разложения представляются в виде (после замены индексов $j \rightleftharpoons k$, чтобы согласовать результат с (1)),

$$f_k = \sum_{j=-\infty}^{\infty} f(k - j) g_j, \quad (8)$$

где $f(m)$ — значения заданной функции в целых точках, а g_j — коэффициенты разложения базисной узловой функции (4).

Преобразуем систему уравнений:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k e(\sigma, m, k) = \sigma_{m0}, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Для этого введём новую переменную $q = e^{-\frac{1}{2\sigma^2}}$. Получим

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k q^{(m-k)^2} = \sigma_{m0}, \quad m \in \mathbb{Z}. \tag{9}$$

Для численного решения необходимо рассмотреть конечномерные усечения полученной бесконечной системы уравнений (9).

3. Переход к конечномерным аппроксимациям интерполяционной задачи

Как было показано выше, при решении задач интерполяции ключевым моментом является построение узловой функции. Перейдём теперь к рассмотрению конечномерных приближений первоначальной интерполяционной задачи, которые получаются в результате перехода от бесконечномерной системы к её конечномерным «усечениям». Этот естественный подход, основанный на приближении решений изучаемой интерполяционной задачи решениями конечномерных систем, рассматривался в работах [Ситник, 2013; Ситник, 2014, Ситник, Тимашов, 2014]. Разумеется, такой подход имеет свои ограничения, но вместе с тем он позволяет обойти некоторые сложности, возникающие при перечисленных выше других подходах, и расширяет возможности эффективного численного решения интерполяционной задачи, в том числе компьютерного.

Итак, будем искать приближения для узловой функции (4) $G(\sigma, x)$ в виде приближающей её функции $H(\sigma, x)$ в виде конечных сумм

$$H(n, x, \sigma) = \sum_{k=-n}^n d_k \cdot q^{(x-k)^2}, \quad q = \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\right), \quad 0 < q < 1, \tag{10}$$

при этом бесконечная система (9) заменяется конечной, причем число уравнений может быть больше числа неизвестных

$$H(n, m, j, \sigma) = \delta_{0j}, \quad j = -m, \dots, 0, \dots, m, \quad m \geq n. \tag{11}$$

В системе линейных уравнений, которая получается из условий (10)–(11), всего $2m + 1$ уравнений и $2n + 1$ неизвестных d_k , $-n \leq k \leq n$.

Перепишем систему уравнений, вытекающую из (10) – (11) в матричной форме:

$$A \cdot d = y, \tag{12}$$

где соответствующие элементы матрицы и вектора правой части представляются в виде

$$a_{ij} = q^{(i-j)^2}, \quad y_j = \delta_{0j}, \quad i = -n, \dots, 0, \dots, n, \quad j = -m, \dots, 0, \dots, m.$$

Для полученных при $m = n$ коэффициентов d_k приближённую узловую функцию будем обозначать как $H(n, x, \sigma)$, а при $m > n$, — как $H(n, m, x, \sigma)$.

Введём некоторые обозначения. Определитель Вандермонда размера n обозначим через Wx_1, \dots, x_n , определитель Вандермонда без l -ой строки и k -ого столбца — $W_{l,k}(x_1, \dots, x_n)$.



Для наглядности общие выкладки далее с определителями и матрицами произвольных порядков будем иллюстрировать объектами размером 5×5 и получающимися из них, например,

$$W(rx_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & x_1^4 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & x_2^4 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 & x_3^4 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 & x_4^4 \\ 1 & x_5 & x_5^2 & x_5^3 & x_5^4 \end{vmatrix},$$

$$W_{3,2}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \begin{vmatrix} 1 & x_1^2 & x_1^3 & x_1^4 \\ 1 & x_2^2 & x_2^3 & x_2^4 \\ 1 & x_4^2 & x_4^3 & x_4^4 \\ 1 & x_5^2 & x_5^3 & x_5^4 \end{vmatrix}.$$

Как известно,

$$W_{l,k}(x_1, \dots, x_n) = \sum x_{\alpha_1} x_{\alpha_2} \dots x_{\alpha_{n-k}} \cdot \prod_{n \geq i > j \geq 1, i \neq l, j \neq l} (x_i - x_j), \quad (13)$$

где сумма берется по всем сочетаниям $n - k$ чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-k}$ из набора $1, 2, \dots, n$.

Теперь основным объектом нашего изучения становится система линейных уравнений (12) с квадратной или прямоугольной матрицами. Далее используются обозначения, введённые в соотношениях (10)–(12).

Основные полученные результаты содержатся в двух теоремах.

Теорема 1. *Рассматриваемые конечномерные приближения для нахождения коэффициентов базисной узловой функции образуют однозначно разрешимые системы линейных уравнений при любых размерностях, их определители не равны нулю.*

Теорема 2. *При увеличении размерности конечномерных систем их решения стремятся к решению исходной бесконечной системы линейных уравнений для нахождения коэффициентов базисной узловой функции.*

Также проведено компьютерное исследование решений полученных конечномерных систем линейных уравнений численными методами при помощи математического пакета MATHEMATICA при широком наборе управляющих параметров, результаты представлены в графическом и табличном виде. Рассмотрено разложение указанным методом по целочисленным сдвигам функции Гаусса основного набора стандартных электрических сигналов: переключательных режимов, кусочно-постоянных, прямоугольных, треугольных, сложной формы, включая различные нерегулярные меандры. Выведен большой объём графиков для аппроксимаций этих сигналов, проанализированы ошибки приближений, вычислены количественные характеристики ошибок, среднеквадратичные и равномерные.

Представляется также перспективным использование данного метода при изучении дифференциальных уравнений Больцмана, а также с использованием теории операторов преобразования [Katrakhov, 2018; Sitnik, 2019].

4. Заключение

В работе получено теоретическое обоснование корректной разрешимости основной системы линейных уравнений для конечномерного приближения бесконечной системы, а также проведен достаточно существенный объём компьютерных вычислений.

Приведём список основных полученных результатов, см. также [Ситник, 2013; Ситник, 2014, Ситник, Тимашов, 2014].

- Рассмотрена задача об интерполяции произвольной функции по её значениям при целых значениях аргумента при помощи целочисленных сдвигов квадратичной экспоненты — функции Гаусса.
- К данной задаче сведена математическая модель приближения цифровых сигналов по значениям их отсчетов.
- Применён метод узловых функций для решения данной интерполяционной задачи.
- Проведено сведение интерполяционной задачи к бесконечной системе линейных уравнений.
- Проведена редукция бесконечной системы линейных уравнений к конечной.
- Доказано, что при всех допустимых значениях параметров q, σ исследуемые конечномерные системы линейных уравнений имеют единственное решение.
- Проведено компьютерное исследование решений полученных конечномерных систем линейных уравнений численными методами при помощи математического пакета МАТНЕМАТИСА при широком наборе управляющих параметров q, σ .
- Рассмотрено разложение указанным методом по целочисленным сдвигам функции Гаусса основного набора стандартных электрических сигналов: переключаемых режимов, кусочно-постоянных, прямоугольных, треугольных, сложной формы, включая различные нерегулярные меандры.

Список литературы

1. Минин Л.А., Ситник С.М., Журавлев М.В. 2009. О вычислительных особенностях интерполяции с помощью целочисленных сдвигов гауссовых функций. Научные ведомости Белгородского государственного университета. 13 (68); 17/2. С.89–99.
2. Ситник С.М., Тимашов А.С. 2013. Приложения экспоненциальной аппроксимации по целочисленным сдвигам функций Гаусса. Вестник Воронежского государственного университета инженерных технологий. 2; 56. С.90–94.
3. Ситник С.М., Тимашов А.С. 2014. Метод конечномерных приближений в задачах квадратичной экспоненциальной интерполяции сигналов. Вестник Воронежского института МВД России. 2. С. 163–171.
4. Ситник С.М. 2014. Обобщённые дискретные преобразования Фурье и их спектральные свойства. Новые информационные технологии в автоматизированных системах. Материалы семнадцатого научно-практического семинара. М.: Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН. С. 281–291.
5. Ситник С.М., Тимашов А.С. 2014. Вычислительные аспекты метода квадратичной экспоненциальной интерполяции в задачах теории сигналов. Новые информационные технологии в автоматизированных системах. Материалы семнадцатого научно-практического семинара. М.: Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН. С.292–300.
6. Katrakhov V.V. , Sitnik S.M. 2018. The transmutation method and boundary-value problems for singular elliptic equations. Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. 64; 2. P.211–426.



7. Kiselev E.A., Minin L.A., Novikov I.Ya., Sitnik S.M. 2014. On the Riesz Constants for Systems of Integer Translates. *Mathematical Notes*. 96; 1–2. P.228–238.
8. Maz'ya V., Schmidt G. 2007. *Approximate approximations*. Amer. Math. Soc. Mathematical Surveys and Monographs. 349p.
9. Sitnik S.M., Shishkina E.L. 2019. *Method of Transmutations for Differential Equations with Bessel operators*. Moscow, Fizmatlit. 224P.
10. Zhuravlev M.V., Kiselev E.A., Minin L.A., Sitnik S.M. 2011. Jacobi theta-functions and systems of integral shifts of Gaussian functions *Journal of Mathematical Science*, Springer. 2; 173. P.131–140.

References

1. Minin L.A., Sitneyk S.M., Zhuravlev M.V. 2009. O vy'chislitel'ny'kh osobennostiakh interpolatsii s pomoshch'iu tselochislenny'kh sdvigoov gaussovy'kh funktsii'. *Nauchny'e vedomosti Belgorodskogo gosudarstvennogo universiteta*. 13 (68); 17/2. С.89–99.
2. Sitneyk S.M., Timashov A.S. 2013. Prilozheniia e'ksponential'noi' approksimatsii po tselochislenny'm sdvigam funktsii' Gaussa. *Vestnyk Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta inzhenerny'kh tekhnologii'*. 2; 56. С.90–94.
3. Sitneyk S.M., Timashov A.S. 2014. Metod konechnomerny'kh priblizhenii' v zadachakh kvadrachnoi' e'ksponential'noi' interpolatsii signalov. *Vestnyk Voronezhskogo instituta MVD Rossii*. 2. С.163–171.
4. Sitneyk S.M. 2014. Obobshchyonny'e diskretny'e preobrazovaniia Fur'e i ikh spektral'ny'e svoi'stva. *Novy'e informatcionny'e tekhnologii v avtomatizirovanny'kh sistemakh. Materialy' semnadcatogo nauchno-prakticheskogo seminaru*. M.: Institut prikladnoi' matematiki im. M.V. Keldy'sha RAN. С.281–291.
5. Sitneyk S.M., Timashov A.S. 2014. Vy'chislitel'ny'e aspekty' metoda kvadrachnoi' e'ksponential'noi' interpolatsii v zadachakh teorii signalov. *Novy'e informatcionny'e tekhnologii v avtomatizirovanny'kh sistemakh. Materialy' semnadcatogo nauchno-prakticheskogo seminaru*. M.: Institut prikladnoi' matematiki im. M.V. Keldy'sha RAN. С. 292–300.
6. Katrakhov V.V. , Sitnik S.M. 2018. The transmutation method and boundary-value problems for singular elliptic equations. *Contemporary Mathematics. Fundamental Directions*. 64; 2. P.211–426.
7. Kiselev E.A., Minin L.A., Novikov I.Ya., Sitnik S.M. 2014. On the Riesz Constants for Systems of Integer Translates. *Mathematical Notes*. 96; 1–2. P.228–238.
8. Maz'ya V., Schmidt G. 2007. *Approximate approximations*. Amer. Math. Soc. Mathematical Surveys and Monographs. 349p.
9. Sitnik S.M., Shishkina E.L. 2019. *Method of Transmutations for Differential Equations with Bessel operators*. Moscow, Fizmatlit. 224P.
10. Zhuravlev M.V., Kiselev E.A., Minin L.A., Sitnik S.M. 2011. Jacobi theta-functions and systems of integral shifts of Gaussian functions *Journal of Mathematical Science*, Springer. 2; 173. P.131–140.



Ссылка для цитирования статьи
For citation

Тимашев А.С. 2019. Расчёт конечномерной математической модели в задаче квадратичной экспоненциальной интерполяции. Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика. 51 (4): 514–521. DOI 10.18413/2075-4639-2019-51-4-514-521.

Timashev A.S. 2019. Numerical solution to the finite-dimension problem of quadratic exponential interpolation. Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics. Physics. 51 (4): 514–521 (in Russian). DOI 10.18413/2075-4639-2019-51-4-514-521.



ФИЗИКА. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
PHYSICS. MATHEMATICAL MODELING

УДК 536.1; 514.8

DOI 10.18413/2075-4639-2019-51-4-522-532

РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ СОСТОЯНИЯ
ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА В ИЗОПРОЦЕССАХ
SOLVING THE DIFFERENTIAL EQUATION OF IDEAL GAS CONDITION
AT ISOPROCESSES**Г.В. Аверин, М.В. Шевцова**
G.V. Averin, M.V. ShevtsovaДонецкий национальный технический университет,
ул. Артема, 58, Донецк, 283001, Донецкая Народная республикаDonetsk National Technical University,
58 Artema St., Donetsk, 283001, Donetsk People's RepublicБелгородский государственный технологический университет им. В.Г. Шухова,
ул. Костюкова, 46, Белгород, 308012, РоссияBelgorod State Technological University named after V.G. Shoukhov,
46 Kostyukova St., Belgorod, 308012, Russia

E-mail: averin.gennadiy@gmail.com, masha_shev@mail.ru

Аннотация

В настоящей статье рассматривается описание пространства состояния идеального газа на основе решения квазилинейного дифференциального уравнения в частных производных первого порядка методом характеристик. Выведена формула решения в общем виде, а также ее варианты для случаев изохорного, адиабатного и изотермического процессов. При этом данные процессы описываются функциями времени. Предложена геометрическая интерпретация решений. С применением средств современной компьютерной математики представлены решения соответствующих дифференциальных уравнений в виде поверхностей в трехмерном пространстве термодинамических переменных (Q, v, p) .

Abstract

In this article we consider a special method of description the space of conditions of ideal gas. It is based on the solution of quasilinear partial differential equation of the first order. Geometrically the solution of this equation represent a surface in the space of thermodynamic variables (Q, v, p) . We solve this equation using method of characteristics which are defined by the system of the ordinary differential equations. We received the general solution's formula, and also its variants for the cases of isochoric, adiabatic and isothermic processes. Cauchy problem for the said differential equation is connected with finding of the integrated surface passing through the set curve of any process which can be presented in a parametrical form. We describe such process as time functions. It is given the geometrical representation of the space of ideal gas conditions at isoprocesses. We construct the following integrated surfaces using means of computer mathematics.

Ключевые слова: квазилинейное дифференциальное уравнение, геометрическая интерпретация, метод характеристик.

Keywords: quasilinear partial differential equation, geometrical representation, method of characteristics.

1. Введение

Классическая термодинамика является основой многих физических наук. Между тем построение ее теории имеет глубокую историю и до сих пор еще не завершено. Известно несколько попыток ее аксиоматизации: Афанасьевой-Эренфест [Афанасьева-Эренфест, 1928], Борна [Борн, 1964], Гухмана [1986], Каратеодори [Каратеодори, 1964], Петрова и Бранкова [Петров, 1986], Франкфурта [Франкфурт, 1964], Дьярмати [Gyarmati, 1962], Ландсберга [Landsberg, 1970], Лайеб [Lieb, 1999], Фалька и Юнга [Falk, 1959]. Однако вопрос аксиоматического обоснования системы изложения данной науки на настоящее время остается открытым: теория не является полной, многие ее аспекты противоречивы и запутаны, ряд положений не имеет логической ясности [Базаров, 1991], [Пригожин, 2002]. Решение этой проблемы позволило бы четко сформулировать и обосновать принципы существования энергии и энтропии в термодинамическом представлении, получить новые соотношения термодинамики и дать им область практического применения.

В работах авторов [Аверин, 2014(A), Averin, Zvyagintseva, 2016(E), Averin, Shevtsova, 2017(F)] было предложено применение методов и средств дифференциальной геометрии при построении моделей термодинамических состояний, процессов, соотношений и закономерностей. Перспективный подход в данном направлении лежит в анализе решений дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка и дифференциальных форм Пфаффа [Аверин, Звягинцева, 2016(C)], которые положены в основу теории термодинамики.

Модель идеального газа является эталонной, наглядной и простой, а главное, допускает геометрическую интерпретацию основных понятий и соотношений в трехмерном пространстве. Данное направление уже было затронуто в работе Млодзеевского [Млодзеевский, 1956]. Однако ясного представления о природе термодинамических процессов и их связи с пространственными геометрическими структурами наука на настоящий момент не имеет. Пути построения геометрической аксиоматики термодинамики представлены в работе [Аверин, Шевцова, 2016(D)]. Методы дифференциальной геометрии позволяют структурировать и четко описать пространство состояний термодинамических систем путем построения в трехмерном пространстве интегральных поверхностей, являющихся решениями квазилинейных дифференциальных уравнений первого порядка.

Современные средства компьютерной математики позволяют численными методами получить результаты решения данных уравнений. Такие результаты для изобарного процесса были даны в работе [Аверин, Шевцова, 2019(B)]. В настоящей статье рассмотрено аналитическое решение задачи Коши для изохорного, адиабатного и изотермического процессов. В системе компьютерной математики построены соответствующие интегральные поверхности.

2. Описание пространства состояний идеального газа

Одной из важнейших физических величин в термодинамике является количество теплоты Q , показывающее интенсивность теплового взаимодействия в результате теплообмена. Также на эмпирическом уровне вводится понятие теплоемкости c_l как теплофизической характеристики вещества. Для газов она обычно равна

$$c_l = \left(\frac{dQ}{dT} \right) \quad (1)$$

и представляет собой количество теплоты, необходимое для изменения эмпирической температуры T термодинамической системы на один градус в некотором процессе l .

Известно, что между величинами Q и T в любом процессе существует связь (1), при этом для идеального газа справедливы следующие равенства:

$$\frac{\partial Q}{\partial v} = c_p \frac{\partial T}{\partial v}, \quad \frac{\partial Q}{\partial p} = c_v \frac{\partial T}{\partial p}, \quad (2)$$

где c_p и c_v – теплоемкости идеального газа при постоянных давлении и объеме.

Поскольку, исходя из уравнения Клапейрона, температура имеет вид однородной функции второй степени и имеет частные производные, то:

$$T = \frac{1}{2} \left(v \frac{\partial T}{\partial v} + p \frac{\partial T}{\partial p} \right). \quad (3)$$

Уравнение (3) с учетом (2) может быть представлено в виде квазилинейного уравнения в частных производных первого порядка относительно величины Q :

$$\frac{v}{2c_p} \frac{\partial Q}{\partial v} + \frac{p}{2c_v} \frac{\partial Q}{\partial p} = T. \quad (4)$$

Решение $Q = Q(v, p)$ уравнения (4) геометрически представляет собой поверхность в пространстве (v, p, Q) , которая называется интегральной поверхностью.

Будем решать данное уравнение методом характеристик, которые определяются системой обыкновенных дифференциальных уравнений [Кошляков, 1970]:

$$2c_p \frac{dv}{v} = 2c_v \frac{dp}{p} = \frac{dQ}{T} = ds, \quad (5)$$

где s – некоторый вещественный параметр.

Задача Коши для уравнения (4) связана с нахождением интегральной поверхности $Q = Q(v, p)$, проходящей через некоторую кривую процесса l , которая может быть представлена в параметрической форме относительно времени t : $v_l = v_l(t)$, $p_l = p_l(t)$, $Q_l = Q_l(t)$.

Общее решение системы уравнений (5) имеет вид:

$$v = v_l \exp\left(\frac{s}{2c_p}\right), \quad p = p_l \exp\left(\frac{s}{2c_v}\right), \quad Q = Q_l + c_p \beta_1 \frac{p_l v_l}{R} \left(\exp\left(\frac{s}{c_p \beta_1}\right) - 1 \right), \quad (6)$$

где $\beta_1 = \frac{2c_v}{c_v + c_p}$, R – универсальная газовая постоянная. Чтобы получить интегральную поверхность в пространстве (v, p, Q) , задают кривую процесса в параметрическом виде и исключают величины s и t .

3. Изохорный процесс

Если процесс является изохорным, то линия процесса l , через которую должна проходить интегральная поверхность, может быть задана параметрическими уравнениями относительно времени t [Кириллин, Сычев, 1983]:

$$v_l = v_1 = const, \quad p_l = p_1 + \alpha_p t, \quad Q = c_v T = \frac{c_v (p_1 + \alpha_p t) v_1}{R}, \quad (7)$$

где v_1, p_1 – термодинамические параметры газа в начальной точке $t = 0$.



Из первого соотношения для удельного объема v :

$$e^s = \left(\frac{v}{v_1}\right)^{2c_p}.$$

Подставим (7) в (6), учитывая последнее выражение, имеем:

$$v = v_1 \exp\left(\frac{s}{2c_p}\right), \quad p = (p_1 + \alpha_p t) \exp\left(\frac{s}{2c_v}\right), \tag{8}$$

$$Q = c_v \frac{(p_1 + \alpha_p t)v_1}{R} + \frac{c_p \beta_1 (p_1 + \alpha_p t)v_1}{R} \left(\left(\frac{v}{v_1}\right)^{2/\beta_1} - 1 \right).$$

Поскольку

$$1 - \frac{c_p}{c_v} \beta_1 = \frac{c_v - c_p}{c_p + c_v} = -\beta_2, \quad \beta_2 = \frac{c_p - c_v}{c_p + c_v},$$

получим:

$$Q = c_v \frac{(p_1 + \alpha_p t)v_1}{R} \left(-\beta_2 + \frac{c_p}{c_v} \beta_1 \left(\frac{v}{v_1}\right)^{2/\beta_1} \right).$$

Заметим, что

$$\frac{2}{\beta_1} = \frac{c_p + c_v}{c_v} = k + 1, \quad p_1 + \alpha_p t = \frac{p}{\left(\frac{v}{v_1}\right)^{(c_p/c_v)}}.$$

Поэтому окончательно получаем:

$$Q = \frac{c_v p v}{R} \left(-\left(\frac{v}{v_1}\right)^{-k+1} \beta_2 + k \beta_1 \right). \tag{9}$$

Рассмотрим геометрическое решение данной задачи, применяя средства компьютерной математики. Пусть состояние идеального газа в начальный момент времени имеет параметры – давление $p_1 = 101325$ Па и объем $v_1 = 11,1272$ м³/кг. Положим, что при изохорном термодинамическом процессе в течение 100 секунд давление увеличилось до 299607,7043 Па, а температура изменилась от $T_1 = 273,15$ К до $T_2 = 373,15$ К. Зададим линию, через которую проходит интегральная поверхность:

$$p = p_1 + \alpha_p t, \quad v_1 = 11,1272, \quad Q = c_v \frac{(p_1 + \alpha_p t)v_1}{R}.$$

Учитывая, что процесс длится 100 секунд, можно рассчитать значение α_p , подставляя которое в формулу для Q , получим окончательное задание интегральной кривой. Геометрическое представление решения (9) показано на рисунке 1.

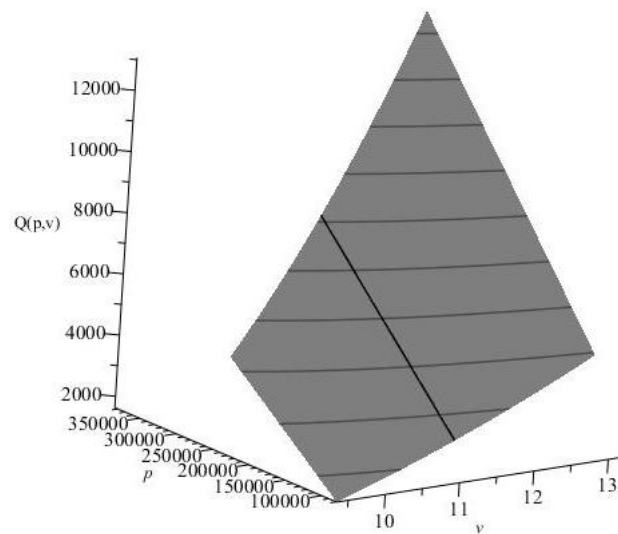


Рис. 1. Изохорный процесс

Fig. 1. Isochoric process

4. Адиабатный процесс

В случае адиабатного процесса мы имеем постоянное значение величины Q . Линия процесса l , через которую должна проходить интегральная поверхность, может быть представлена следующим образом:

$$v_l = v_1 + \alpha_v t, \quad p_l = p_1 + \alpha_p t, \quad Q = Q_1 = \text{const}. \quad (10)$$

Тогда общее решение системы (5):

$$v = (v_1 + \alpha_v t) \exp\left(\frac{s}{2c_p}\right), \quad p = p_1 \exp\left(\frac{s}{2c_v}\right), \quad (11)$$

$$Q = Q_1 + c_p \beta_1 \frac{(p_1 + \alpha_p t)(v_l + \alpha_v t)}{R} \left(\exp\left(\frac{s}{c_p \beta_1}\right) - 1 \right).$$

Подставляя p и v в выражение для Q , получим:

$$\begin{aligned} Q &= Q_1 + \frac{c_p \beta_1 p v}{R \exp\left(\frac{s}{2} \frac{c_p + c_v}{c_p c_v}\right)} \left(\exp\left(\frac{s}{c_p \beta_1}\right) - 1 \right) = \\ &= Q_1 + \frac{c_p \beta_1 p v}{R} - \frac{c_p \beta_1 p v}{R \exp\left(\frac{s}{c_p \beta_1}\right)}. \end{aligned} \quad (12)$$

Поскольку из (11)

$$e^s = \left(\frac{v}{v_1 + \alpha_v t} \right)^{2c_p},$$

в выражении для p получим:

$$p = (p_1 + \alpha_p t) \left(\frac{v}{v_1 + \alpha_v t} \right)^k = \frac{(p_1 + \alpha_p t) v^k}{(v_1 + \alpha_v t)^k}.$$

Таким образом:

$$p_1 + \alpha_p t = \frac{p(v_1 + \alpha_v t)}{v^k}. \tag{13}$$

Рассмотрим третье слагаемое в (12).

$$\frac{c_p \beta_1 p v}{R \exp\left(\frac{s}{c_p \beta_1}\right)} = \frac{c_p \beta_1 p v}{R \left(\frac{v}{v_1 + \alpha_v t}\right)^{1+k}} = \frac{c_p \beta_1 p v^{-k} (v_1 + \alpha_v t)^{1+k}}{R}. \tag{14}$$

Будем использовать соотношение для адиабатного процесса [Кириллин, Сычев, 1983]:

$$p_1 v_1^k = p_2 v_2^k. \tag{15}$$

Подставляя выражения p и v в (15), получим:

$$(v_1 + \alpha_v t)^k = \frac{p_1 v_1^k}{p_1 + \alpha_p t}. \tag{16}$$

Используя (13), имеем:

$$v_1 + \alpha_v t = \frac{p_1^{1/(2k)} v_1^{1/2} v^{1/2}}{p^{1/(2k)}}. \tag{17}$$

Подставляя (17) в (14), а затем в (12), окончательно получаем:

$$Q = Q_1 + \frac{c_p \beta_1 p v}{R} \left(1 - \left(\frac{p_1}{p}\right)^{\frac{k+1}{2k}} \left(\frac{v_1}{v}\right)^{\frac{k+1}{2}} \right). \tag{18}$$

Рассмотрим геометрическое решение данной задачи. Пусть состояние идеального газа в начальный момент времени имеет прежние параметры – давление $p_1 = 101325$ Па и объем $v_1 = 11, 1272$ м³/кг. Положим, что при адиабатном термодинамическом процессе в течении 100 секунд давление увеличилось до 296239,7579 Па, а температура изменилась от $T_1 = 273, 15$ К до $T_2 = 373, 15$ К. Зададим линию, через которую проходит интегральная поверхность:

$$p = p_1 + \alpha_p t, \quad v = v_1 + \alpha_v t, \quad Q_1 = 0.$$

Рассчитывая значения α_p и α_v , получаем окончательное задание интегральной кривой. Геометрическое представление решения (18) представлено на рисунке 2.

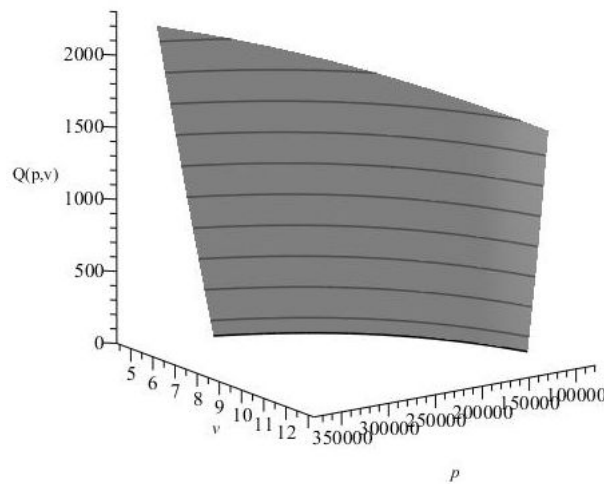


Рис. 2. Адиабатный процесс
Fig. 2. Adiabatic process



5. Изотермический процесс

Будем использовать соотношение давления p и объема v для изотермического процесса [Кириллин, Сычев, 1983]:

$$p_1 v_1 = p_2 v_2 \Rightarrow \frac{v_2}{v_1} = \frac{p_1}{p_2}. \quad (19)$$

Известно [Кириллин, Сычев, 1983], что изменение Q в этом случае подчиняется закону:

$$Q = RT \ln \frac{v_2}{v_1}.$$

Так как T постоянна, то, применяя (19), имеем:

$$p_1 v_1 \ln \frac{p_1}{p_2} = p_2 v_2 \ln \frac{p_1}{p_2}. \quad (20)$$

Зададим линию процесса l для получения интегральной поверхности:

$$p_l = p_1 + \alpha_p t, v_l = v_1 + \alpha_v t, Q_l = p_l v_l \ln \frac{v_2}{v_1}.$$

Подставим последние равенства в общее решение (6) системы (5). Получим:

$$p = (p_1 + \alpha_p t) \exp\left(\frac{s}{2c_v}\right), v = (v_1 + \alpha_v t) \exp\left(\frac{s}{2c_p}\right), \quad (21)$$

$$Q = Q_l + \frac{c_p \beta_1 p_l v_l}{R} \left(\exp\left(\frac{s}{c_p \beta_1}\right) - 1 \right) = p_l v_l \ln \frac{v_l}{v_1} + \frac{c_p \beta_1 p_l v_l}{R} \left(\exp\left(\frac{s}{c_p \beta_1}\right) - 1 \right).$$

Поскольку из (21)

$$e^s = \left(\frac{v}{v_1 + \alpha_v t} \right)^{2c_p},$$

то

$$p = (p_1 + \alpha_p t) \left(\frac{v}{v_1 + \alpha_v t} \right)^{c_p/c_v} = \frac{(p_1 + \alpha_p t)v^k}{(v_1 + \alpha_v t)^k}.$$

Отсюда имеем:

$$p_1 + \alpha_p t = \frac{p(v_1 + \alpha_v t)^k}{v^k}. \quad (22)$$

Рассмотрим выражение для Q из (21):

$$\begin{aligned} Q &= p_l v_l \left(\ln \frac{v_l}{v_1} + \frac{c_p \beta_1}{R} \left(\exp\left(\frac{s}{c_p \beta_1}\right) - 1 \right) \right) = \\ &= \frac{p v}{\exp\left(\frac{s}{c_p \beta_1}\right)} \left(\ln \frac{v_1 + \alpha_v t}{v_1} + \frac{c_p \beta_1}{R} \left(\exp\left(\frac{s}{c_p \beta_1}\right) - 1 \right) \right). \end{aligned}$$

Внесем экспоненту в скобки:

$$Q = p v \left(\left(\frac{v_1 + \alpha_v t}{v} \right)^{1+k} \ln \frac{v_1 + \alpha_v t}{v} + \frac{c_p \beta_1}{R} - \frac{c_p \beta_1}{R} \left(\frac{v_1 + \alpha_v t}{v} \right)^{1+k} \right).$$

Подставляя (22) в (19), имеем:

$$p_1 + \alpha_p t = \frac{p_1 v_1}{v_1 + \alpha_v t} = \frac{p(v_1 + \alpha_v t)^k}{v^k} \Rightarrow (v_1 + \alpha_v t)^{k+1} = \frac{p_1 v_1 v^k}{p}. \quad (23)$$

Будем использовать (23) в выводе выражения для Q :

$$Q = pv \left(\frac{p_1 v_1 v^k}{p v^{1+k}} \ln \left(\frac{(p_1 v_1 v^k)^{1/(k+1)}}{p^{1/(k+1)} v_1} \right) + \frac{c_p \beta_1}{R} - \frac{c_p \beta_1}{R} \frac{p_1 v_1 v^k}{p v^{1+k}} \right).$$

Внесем множитель pv в скобки:

$$Q = \frac{p_1 v_1}{k+1} \ln \left(\frac{p_1}{p} \left(\frac{v}{v_1} \right)^k \right) + \frac{c_p \beta_1}{R} pv - \frac{c_p \beta_1}{R} p_1 v_1.$$

Таким образом, получаем окончательное выражение для Q :

$$Q = \frac{c_p \beta_1}{R} pv + p_1 v_1 \left(\frac{1}{k+1} \ln \left(\frac{p_1}{p} \left(\frac{v}{v_1} \right)^k \right) - \frac{c_p \beta_1}{R} \right). \tag{24}$$

Геометрическое решение данной задачи включает задание интегральной кривой, исходя из соотношения для изотермического процесса (22). Состояние идеального газа в начальный момент времени имеет прежние параметры – давление $p_1 = 101325$ Па и объем $v_1 = 11,1272$ м³/кг. При изотермическом процессе в течении 100 секунд давление увеличилось до 299607,7043 Па, объем стал $v_2 = 3,7631$, а температура осталась прежней – 273,15 К. Линия, через которую проходит интегральная поверхность:

$$p = p_1 + \alpha_p t, v = v_1 + \alpha_v t, Q = (p_1 + \alpha_p t)(v_1 + \alpha_v t) \ln \frac{v_1 + \alpha_v t}{v_1}.$$

Геометрическое представление решения (24) показано на рисунке 3.

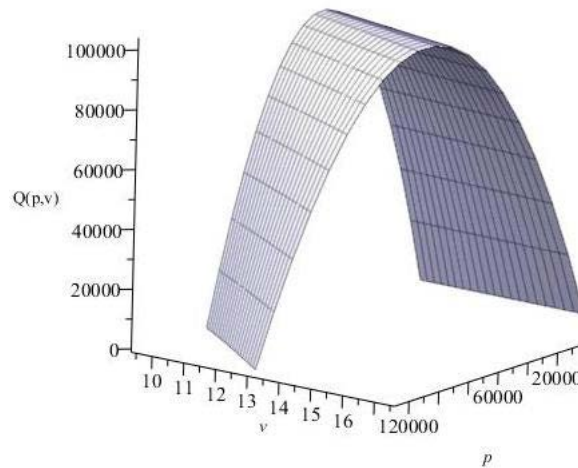


Рис. 3. Изотермический процесс
Fig. 3. Isothermic process

6. Заключение

Таким образом, получена геометрическая интерпретация решения уравнения (4) в виде интегральной поверхности в пространстве состояний идеального газа (v, p, Q) . Решение задачи Коши для данного уравнения произведено путем задания интегральной кривой, которая рассматривается как кривая процесса и задается функцией времени. Это дает возможность ввести в соотношения термодинамики время как параметрическую переменную, и тем самым предложить решение одного из проблемных вопросов классической термодинамики, связанного с

отсутствием времени в термодинамических уравнениях. При таком подходе устанавливается взаимосвязь между физическими понятиями и их математическими аналогами. При этом геометрическое представление имеет преимущество ясности и наглядности.

Поставленная задача решена для заданных изохорного, адиабатного и изотермического процессов, которые в каждом случае описываются зависимостями от времени с учетом сохранения постоянного значения по конкретному физическому параметру.

С помощью системы компьютерной математики представлено геометрическое решение задачи в виде интегральной поверхности, проходящей через заданную кривую процесса.

Список литературы

1. Аверин Г.В. 2014(А). Системодинамика. Донецк: Донбасс, 405 с.
2. Аверин Г.В., Шевцова М.В. 2019(В). Дифференциальные уравнения для описания пространства идеального газа. Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия Математика. Физика. Т. 51, №2: 270–279.
3. Афанасьева-Эренфест Т.А. 1928. Необратимость, односторонность и второе начало термодинамики. Журн. прикл. Физики. Т. 5, вып. 3–4: 3–28.
4. Базаров И.П. 1991. Термодинамика. Изд. 4-е. М.: Высшая школа, 376 с.
5. Борн М. 1964. Критические замечания по поводу традиционного изложения термодинамики. В кн.: Развитие современной физики: Пер. с нем. М.: Наука: 223–256.
6. Гухман А.А. 1986. Об основаниях термодинамики. М., Энергоатомиздат, 383 с.
7. Звягинцева А.В., Аверин Г.В. 2016(С). Интегрирование отдельных многомерных уравнений Пфаффа имеющих важное прикладное значение. Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия Математика. Физика. №27 (248). Выпуск 45: 102–114.
8. Каратеодори К. 1964. Об основаниях термодинамики. В кн.: Развитие современной физики: Пер. с нем. М.: Наука: 188–222.
9. Кириллин В.А., Сычев В.В., Шейндлин А.Е. 1983. Техническая термодинамика. М., Энергоатомиздат, 409 с.
10. Кошляков И.С. 1970. Уравнения в частных производных математической физики. М.: Вища школа, 712 с.
11. Млодзеевский А.Б. 1956. Геометрическая термодинамика. М.: Издательство МГУ, 94 с.
12. Петров Н., Бранков Й. 1986. Современные проблемы термодинамики. М.: Мир, 285 с.
13. Пригожин И., Кондепуди Д. 2002. Современная термодинамика. Пер. с англ. М.: Мир, 461 с.
14. Франкфурт У. 1964. К истории аксиоматики термодинамики. В кн.: Развитие совр. физики: Пер. с нем. М.: Наука: 257–292.
15. Шевцова М.В., Аверин Г.В., Звягинцева А.В. 2016(Д). К вопросу обоснования положений термодинамики методами дифференциальной геометрии многомерных пространств. Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия Математика. Физика. №27 (248). Выпуск 45: 36–44.

16. Averin G.V., Zviagintseva A.V., Shevtsova M.V. and Kurtova L.N. 2016(E). Probabilistic methods of a complex assessment of quantitative information. *Research Journal of Applied Sciences* 11 (7): 415–418.
17. Averin G.V., Zviagintseva A.V., Shevtsova M.V. and Kurtova L.N. 2017(F) Justification of Provisions of Thermodynamics by Methods of Differential Geometry of Multidimensional Spaces. *Journal of Engineering and Applied Sciences*. 12, 7830–7835.
18. Gyarmati I. 1962. On the Fundamentals of Thermodynamics. –*Acta Chim. Hung.* 30: 147–206.
19. Landsberg P.T. 1970. Main Ideas in the Axiomatics of Thermodynamics. *Pure and Appl. Chem.* 22: 215–227.
20. Lieb E. H., Yngvason J. 1999. The physics and mathematics of the second law of thermodynamics. *Physics Reports*. Vol. 310. № 1. Elsevier: 1–96.
21. Falk G. and Jung H. 1959. *Axiomatik der Thermodynamik*. Hdb. Phys. III/2. Berlin: 119–175.

References

1. Averin G.V. 2014(A). *Sistemodinamika [Systemdynamics]*. Doneck: Donbass, 405 p.
2. Averin G.V., Shevtsova M. V. 2019. *Differencialnye uravneniya dlja opisaniya prostranstva idealnogo gaza [The differential equations for description the space of condition of ideal gas]* *Nauchnye vedomosti Belgorodskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya Matematika. Fizika*. T. 51, №2: 270–279.
3. Afanas'eva-Jerenfest T.A. 1928. *Neobratimost', odnostoronnost' i vtoroe nachalo termodinamiki [Irreversibility, unilaterality and second law of thermodynamics]*. *Zhurn. prikl. Fiziki*. T. 5, Issue 3–4: 3–28.
4. Bazarov I.P. 1991. *Termodinamika [Thermodynamics]*. Izd. 4-e. M.: Vysshaya shkola, 376 p.
5. Born M. 1964. *Kriticheskie zamechanija po povodu tradicionnogo izlozhenija termodinamiki. V kn.: Razvitie sovremennoj fiziki [Critical remarks concerning a traditional statement of thermodynamics. In book: Development of modern physics]: Per. s nem. M.: Nauka: 223–256.*
6. Guhman A.A. 1986. *Ob osnovanijah termodinamiki [About the thermodynamics bases]*. M., Jenergoatomizdat, 383 p.
7. Zvyagintseva A.V., Averin G.V. 2016(C). *Integririrovanie otdelnykh mnogomernykh uravneniy Pfaffa imeyuschih vajnoe prikladnoe znachenie [Integration of some multidimensional Pfaff equations of important applications]* *Nauchnye vedomosti Belgorodskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya Matematika. Fizika*. №27 (248). Vyipusk 45: 102–114.
8. Karateodori K. 1964. *Ob osnovah termodinamiki. V kn.: Razvitie sovremennoj fiziki [About fundamentals of thermodynamics. In book: Development of modern physics] Per. s nem. M.: Nauka: 188–222.*
9. Kirillin V.A., Sychev V.V., Sheyndlin A.Ye. 1983. *Tekhnicheskaya termodinamika [Technical Thermodynamics]*. M., Jenergoatomizdat, 409 p.
10. Koshlyakov I.S. 1970. *Uravneniya v chastnykh proizvodnykh matematicheskoy fiziki [Partial Differential Equations of Mathematical Physics]* M.: Vischa shkola, 712 p.



11. Mlodzeevskij A.V. 1956. Geometricheskaja termodinamika [Geometrical thermodynamics] M.: Izdatelstvo MGU, 94 p.
12. Petrov N., Brankov J. 1986. Sovremennye problemy termodinamiki [Modern problems of thermodynamics] M.: Mir, 285 p.
13. Prigozhin I., Kondepudi D. 2002. Sovremennaya termodinamika [Modern thermodynamics]. Per. s angl. M.: Mir, 461 p.
14. Frankfurt U. 1964. K istorii aksiomatiki termodinamiki [In history of axiomatics of thermodynamics. In book: Development of modern physics] V kn.: Razvitie sovr. fiziki: Per. s nem. M.: Nauka: 257–292.
15. Shevtsova M.V., Averin G.V., Zvyagintseva. 2016(D). K voprosu obosnovaniya polozeniy termodinamiki metodami differentsialnoy geometrii mnogomernyih prostranstv [About justification of provisions of thermodynamics by methods of differential geometry of multidimensional spaces] Nauchnyie vedomosti Belgorodskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya Matematika. Fizika. №27 (248). Vyipusk 45: 36–44.
16. Averin G.V., Zviagintseva A.V., Shevtsova M.V. and Kurtova L.N. 2016(E). Probabilistic methods of a complex assessment of quantitative information. Research Journal of Applied Sciences 11 (7): 415–418.
17. Averin G.V., Zviagintseva A.V., Shevtsova M.V. and Kurtova L.N. 2017(F) Justification of Provisions of Thermodynamics by Methods of Differential Geometry of Multidimensional Spaces. Journal of Engineering and Applied Sciences. 12, 7830–7835.
18. Gyarmati I. 1962. On the Fundamentals of Thermodynamics. –Acta Chim. Hung. 30: 147–206.
19. Landsberg P.T. 1970. Main Ideas in the Axiomatics of Thermodynamics. Pure and Appl. Chem. 22: 215–227.
20. Lieb E. H., Yngvason J. 1999. The physics and mathematics of the second law of thermodynamics. Physics Reports. Vol. 310. № 1. Elsevier: 1–96.
21. Falk G. and Jung H. 1959. Axiomatik der Thermodynamik. Hdb. Phys. III/2. Berlin: 119–175.

Ссылка для цитирования статьи
For citation

Аверин Г.В., Шевцова М.В. 2019. Решение дифференциального уравнения состояния идеального газа в изопрцессах. Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика. 51 (4): 522–532. DOI 10.18413/2075-4639-2019-51-4-522-532.

Averin G.V., Shevtsova M.V. 2019. Solving the differential equation of ideal gas condition at isoprocesses. Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics. Physics. 51 (4): 522–532 (in Russian). DOI 10.18413/2075-4639-2019-51-4-522-532.



УДК 539.23

DOI 10.18413/2075-4639-2019-51-4-533-540

**ПОЛУЧЕНИЕ И МЕХАНИЗМЫ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТИ ТОНКИХ
ПЛЁНОК ДИРАКОВСКОГО ПОЛУМЕТАЛЛА Cd_3As_2**

**PREPARATION AND CONDUCTION MECHANISMS OF THIN FILMS
OF DIRAC SEMIMETAL Cd_3As_2**

**В.С. Захвалинский, Е.А. Пилук, Т.Б. Никуличева, С.В. Иванчихин,
М.Н. Япрынцеv, Т.А. Ерина**

**V.S. Zakhvalinskii, E.A. Pilyuk, T.B. Nikulicheva, S.V. Ivanchikhin,
M.N. Yaprintsev, T.A. Erina**

Белгородский государственный национальный исследовательский университет, Россия,
308015, г. Белгород, ул. Победы, 85

Belgorod National Research University, 85 Pobedy St, Belgorod, 308015, Russia

E-mail: zakhvalinskii@bsu.edu.ru

Аннотация

В работе описывается метод выращивания высококачественных тонких пленок Cd_3As_2 . Измерена зависимость электропроводности от температуры в интервале от 3 К до 300 К. В области гелиевых температур определен диапазон реализации механизма прыжковой проводимости с переменной длиной прыжка по Шкловскому-Эфросу. В плотности локализованных состояний вычислены радиус локализации носителей заряда, ширина кулоновской $\Delta = 0.095$ мэВ и жесткой щели $\delta = 0.002$ мэВ.

Abstract

In the article a method for growing high quality Cd_3As_2 thin films are described. The dependence of the conductivity on the temperature in the range from 3 K to 300 K. In the region of helium temperatures, range of realization of the Shklovskii-Efros type variable range hopping conductivity mechanisms was determined. In the density of localized states, the radius of localization of charge carriers, the Coulomb gap $\Delta = 0.095$ meV and the rigid gap $\delta = 0.002$ meV are calculated.

Ключевые слова: разбавленные магнитные полупроводники, дираковский полуметалл, арсенид кадмия, тонкие пленки, прыжковая проводимость.

Keywords: diluted magnetic semiconductors, Dirac semimetal, cadmium arsenide, thin films, hopping conductivity.

Введение

Топологические материалы, характеризующиеся нетривиальной топологией электронной зонной структуры, являются перспективными материалами и обладают свойствами квантового переноса носителей заряда [Murakami, 2007; Young, 2012; Hasan, 2010; Xu, Belopolski, 2015]. Дираковские топологические полуметаллы (ДТП) особое внимание привлекали после обнаружения в трехмерных (3D) материалах дираковских фермионов [Murakami, 2007; Young, 2012; Wang, 2013; Xu, 2015; Liu, 2014; Neupane, 2014; Jeon, 2014; Yang, 2014]. ДТП могут выступать в качестве 3D топологического изолятора [Hasan, 2010], полуметалла Вейля [Xu, Belopolski, 2015], двумерного (2D) топологического изолятора [Wang, 2013], за счет нарушения симметрии



в ДТГ [Murakami, 2007; Young, 2012]. Одним из наиболее широко известных 3D кристаллическим ДТГ является Cd_3As_2 [Wang, 2013], а его электронная зонная структура была непосредственно подтверждена фотоэлектронной спектроскопией с угловым разрешением (ARPES) и сканирующей туннельной спектроскопией (STS) [Wang, 2013; Xu, 2015; Liu, 2014; Neupane, 2014; Jeon, 2014]. Была также разработана классификационная схема ДТГ с точки зрения симметрии кристаллографической точечной группы симметрии [Yang, 2014].

Как правило, различные классы приборов в микроэлектронике представляют плёночные гетероструктуры, поэтому изготовление тонких плёнок ДТГ имеет решающее значение для изучения его потенциала в качестве прототипа топологических материалов. Подготовка высококачественных тонких плёнок ДТГ является очень сложной задачей. 3D Cd_3As_2 известен как стабильный полупроводник типа A^2B^5 , но из-за его высокой летучести получение качественных плёнок связано с необходимостью низкотемпературного роста [Liu, 2015; Zhao, 2016; Schumann, 2016]. Электронная структура Cd_3As_2 состоит из зон проводимости и валентных зон с инвертированной структурой, соприкасающихся для формирования трехмерных дираковских конусов с вершиной в точках Дирака $\pm k_D$. До настоящего времени большинство исследований явлений переноса, включая поверхностный перенос, были получены для объемных образцов [He, 2014; Liang, 2015; Moll, 2016; Feng, 2015; Zhang, 2015; Narayanan, 2015]. Таким образом, исследование тонких плёнок Cd_3As_2 открывает новые возможности для исследования квантового переноса, например, затворной модуляции [Wang, 2017].

В данной работе описывается метод получения высококачественных тонких плёнок Cd_3As_2 и исследование механизма проводимости.

Материалы и методика эксперимента

Плёнки Cd_3As_2 были получены вч-магнетронным распылением в атмосфере аргона при давлении $8 \cdot 10^{-3}$ мбар. Скорость напыления при подаваемой мощности 10 Вт и расстоянии мишень-подложки составляла около 1 нм/мин. В качестве подложки был использован сапфир, температура подложки в процессе напыления составляла 20°C . Мишень, которая использовалась в качестве катода, представляла собой поликристаллический диск диаметром 40 мм и толщиной 3 мм. Синтез Cd_3As_2 для мишени осуществлялся прямым сплавлением Cd и As в вакууме. Контроль качества полученного материала подложки осуществлялся методами рентгенофазового анализа (РФА) с использованием дифрактометра Rigaku Ultima IV (Rigaku corp., Япония) и энергодисперсионной рентгеновской спектроскопии (EDX) на растровом электронном микроскопе FEI Quanta 600 FEG (FEI Company, Голландия).

Рамановский спектр был получен при комнатной температуре с использованием спектрометра комбинационного рассеяния света (КРС) LabRam HR Evolution (HORIBA JOBIN YVON S.A.S., France) с использованием лазера с длиной волны 532 нм, мощностью 100 мВт. Размер сфокусированного светового пятна на поверхности образца составлял 500 нм. Спектральное разрешение составляло 0.5 см^{-1} .

Наличие фазы Cd_3As_2 в полученных плёнках подтверждается результатами спектроскопии комбинационного рассеяния (КРС). Спектр КРС, показанный на рис. 1, показывает наличие двух основных пиков в области 194 и 249 см^{-1} , которые являются характерными для тонких плёнок Cd_3As_2 [Suslov, 2019].

Исследование транспортных свойств проводили по стандартной четырехточечной схеме на установке Mini Cryogen Free Systems (Cryogenic Ltd, UK) в температурном диапазоне 3–300 К.

Анализ результатов и обсуждение

Для определения механизма проводимости полученных образцов тонких плёнок в области гелиевых температур проводится анализ зависимости удельного сопротивления от температуры в соответствии с [Shklovskii, 1984]:

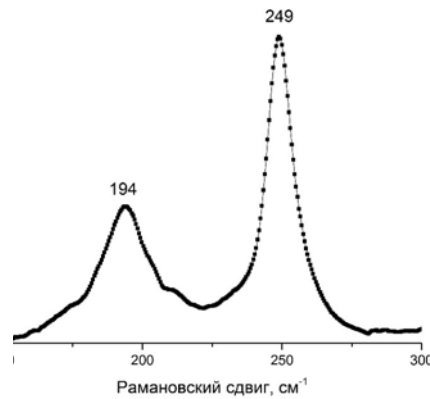


Рис. 1. Спектр КРС для тонкой пленки Cd_3As_2 , нанесенной на подложку из сапфира
 Fig. 1. Raman spectra for the thin films Cd_3As_2 deposited on a sapphire substrate

$$\rho(T) = \rho_0 \exp [E_A / (kT)], \tag{1}$$

где ρ_0 – предэкспоненциальный множитель, E_A – энергия активации, k – постоянная Больцмана.

Результаты, полученные при исследовании зависимости удельного сопротивления пленки Cd_3As_2 от температуры, приведены на рис. 2.

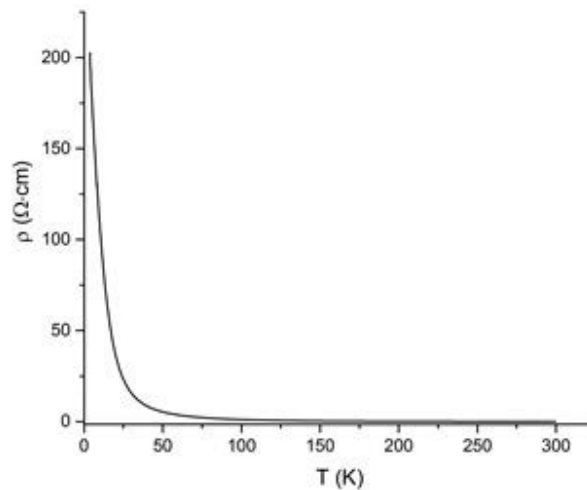


Рис. 2. Температурная зависимость удельного сопротивления тонкой пленки Cd_3As_2 , нанесенной на сапфировую подложку
 Fig. 2. Temperature dependence of resistivity of the thin film Cd_3As_2 deposited on a sapphire substrate

Удельное сопротивления образца может быть записано в универсальный форме:

$$\rho(T) = \rho_0 \exp \left[\left(\frac{T_0}{T} \right)^p \right] = AT^m \exp \left[\left(\frac{T_0}{T} \right)^p \right], \tag{2}$$

где T_0 – характеристическая температура. В случае $p = 1$ реализуется механизм проводимости по ближайшим узлам (в этом случае вместо T_0 обычно вводится энергия активации $E_0 \equiv kT_0$); $p = 1/4$ соответствует механизму проводимости с переменной длиной прыжка (ПППДП) моттовского типа [Mott, 1979], если $p = 1/2$ – ПППДП типа Шкловского-Эфроса (ШЭ) [Shklovskii, 1984]. Значение m определяется в зависимости от режима проводимости и вида волновой функции $\Gamma \equiv [(kT(T_0/T)^p a)/(2\hbar s)]^2$ локализованных носителей, соответственно. В уравнении (2) $T_0 = T_M$ или $T_0 = T_{SE}$ для $p = 1/4$ или $p = 1/2$ соответственно, где

$$T_M = \frac{\beta_M}{kg(\mu)a^3}, T_{SE} = \frac{\beta_{SE}e^2}{\kappa ka}, \quad (3)$$

κ – диэлектрическая постоянная, $\beta_M = 21$ и $\beta_{SE} = 2.8$ [Laiho, 2008].

При определении механизма прыжковой проводимости значение имеет не только параметр p в уравнении (2), но и зависимость от температуры стоящего в уравнении перед экспонентой множителя, которая задается степенной зависимостью от m . Поэтому оба параметра m и p необходимо определять одновременно и независимо. С учетом того, что локальная энергия активации, $E_a \equiv d \ln \rho / (d(kT))^{-1}$ [Laiho, 2008], можно представить уравнение (2) в виде:

$$\ln[E_a/(kT) + m] = \ln \rho + \rho \ln T_0 + \rho \ln(1/T). \quad (4)$$

Таким образом, для определённого режима прыжковой проводимости левая часть уравнения (4) будет представлять собой линейную функцию от $\ln(1/T)$ при заданном значении m , а следовательно, параметр p может быть определен по наклону зависимости $\ln[E_a/(kT) + m]$ от $\ln(1/T)$ (рис. 3).

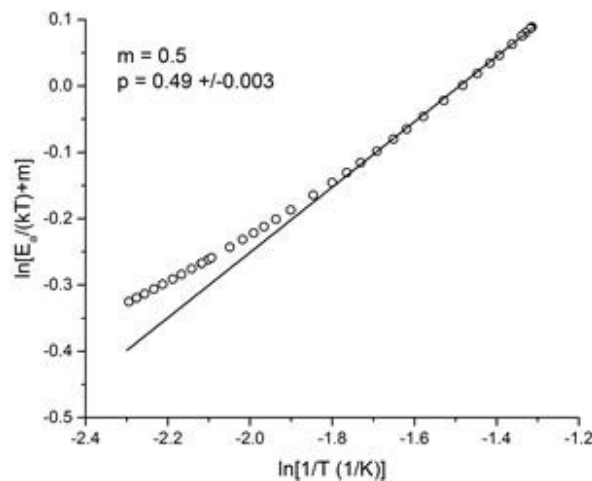


Рис. 3. Зависимость $\ln[E_a/(kT) + m]$ от $\ln(1/T)$ образца
Fig. 3. The plot of $\ln[E_a/(kT) + m]$ vs. $\ln(1/T)$ of the sample

При реализации ПППДП по закону Шкловского-Эфроса (ШЭ) плотность состояний $g(\varepsilon)$ не является постоянной из-за наличия кулоновской щели, в отличие от ПППДП по закону Мотта:

$$g(\varepsilon) \propto \left(\frac{\kappa}{e^2}\right)^d |\varepsilon|^{d-1}, g(0) = 0, \quad (5)$$

где d – это размерность пространства, энергия ε отсчитывается от ферми-уровня.



Для исследуемого образца механизм ПППДП по закону ШЭ реализуется в интервале низких температур $T = 3 \div 10$ К. Это можно объяснить тем, что механизм проводимости блокируется поверхностным рассеянием в тонкой пленке, и поэтому становится возможен механизм ПППДП. Данные, полученные для нулевого поля, позволяют определить плотность локализованных состояний, ширину кулоновской щели, радиус локализации носителя заряда, диэлектрическую проницаемость. Таким образом, найденные микроскопические параметры позволяют подтвердить сделанные выводы о механизмах прыжковой проводимости [Laiho, 2008].

Ширину мягкой кулоновской щели найдем из уравнения [Shklovskii, 1984]:

$$\Delta \approx \frac{\kappa}{2} \sqrt{TT_{SE}}. \tag{6}$$

Диэлектрическая постоянная κ может быть найдена из выражения $\Delta \approx U$, где $U = e^2/(\kappa R_h)$ – энергия кулоновского отталкивания между дырками, находящимися на среднем расстоянии $R_h = (4\pi p_{77}/3)^{-1/3}$. Здесь p_{77} – холловская концентрация носителей заряда при $T=77$ К в полях меньше 0.1 Тл. Вне кулоновской щели [Shklovskii, 1984] и вблизи уровня Ферми [Mott, 1979] ПЛС может быть определена из выражений:

$$g_0 = \frac{3\kappa^3(\Delta - \delta)^2}{\pi e^6} \cdot g(\mu) = \frac{N_A}{2k(T^3 T_M)^{1/4}}. \tag{7}$$

Ширина кулоновской щели в ПЛС уровня Ферми определяется в соответствии со следующим выражением [Laiho, 2008]:

$$W = \frac{N_A}{2g_0} + \frac{2}{3}\Delta. \tag{8}$$

Средняя длина прыжка определяется из выражения:

$$r \approx \left(\frac{a_B}{g(\mu)T} \right)^{1/4} \approx a_B \left(\frac{T_M}{T} \right)^{1/4}.$$

Полученные микроскопические параметры для тонкой пленки Cd_3As_2 указаны в таблице 1.

Таблица 1
Table 1

Микроскопические параметры для тонкопленочного образца Cd_3As_2
Microscopic parameters for the thin film sample Cd_3As_2

ρ_0 Ом·см,	E_A , мэВ	a , Å	κ	Δ , мэВ	W , мэВ	δ , мэВ	g , см ⁻³ мэВ ⁻¹	r , нм
$1,12 \cdot 10^4$	0,19	418	18,6	0,095	0,17	0,002	$6,76 \cdot 10^{15}$	37,9

Ширина кулоновской щели Δ составляет около половины ширины акцепторной зоны W , что соответствует режиму ПППДП ШЭ. Соотношения между Δ и шириной зоны локализованных состояний W согласуются с соответствующими значениями для предполагаемых механизмов проводимости при $B = 0$ Тл.

Благодарность

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 19-79-00152).

Список литературы

1. Feng, J. et al. 2015. Large linear magnetoresistance in Dirac semimetal Cd_3As_2 with Fermi surfaces close to the Dirac points. *Phys. Rev. B* 92. 081306(R).
2. Hasan, M. Z. & Kane, C. L. 2010. Colloquium: topological insulators. *Rev. Mod. Phys.* 82. 3045–3067.
3. He, L. P. et al. 2014. Quantum transport evidence for the three-dimensional Dirac semimetal phase in Cd_3As_2 . *Phys. Rev. Lett.* 113. 246402.
4. Jeon, S. et al. 2014. Landau quantization and quasiparticle interference in the three-dimensional Dirac semimetal Cd_3As_2 . *Nat. Mater.* 13. 851–856.
5. Laiho R., Lashkul A.V., Lisunov K.G., Lähderanta E., Shakhov M.A., Zakhvalinskii V.S. 2008. Hopping conductivity of Ni-doped p-CdSb. *J. Phys.: Condens. Matter.* V. 20. P. 295204.
6. Liang, T. et al. 2015. Ultrahigh mobility and giant magnetoresistance in the Dirac semimetal Cd_3As_2 . *Nat. Mater.* 14. 280–284.
7. Liu, Z. K. et al. 2014. A stable three-dimensional topological Dirac semimetal Cd_3As_2 . *Nat. Mater.* 13. 677–681.
8. Liu, Y. et al. 2015. Gate-tunable quantum oscillations in ambipolar Cd_3As_2 thin films. *NPG Asia Mater.* 7. e221.
9. Moll, P. J. W. et al. 2016. Transport evidence for Fermi-arc-mediated chirality transfer in the Dirac semimetal Cd_3As_2 . *Nature* 535. 266–270.
10. Mott N.F. and Davis E.A. 1979. *Electron Processes in Non-Crystalline Materials*. Oxford University Press. New York.
11. Murakami, S. 2007. Phase transition between the quantum spin Hall and insulator phases in 3D: emergence of a topological gapless phase. *New J. Phys.* 9. 356.
12. Narayanan, A. et al. 2015. Linear magnetoresistance caused by mobility fluctuations in n-doped Cd_3As_2 . *Phys. Rev. Lett.* 114. 117201.
13. Neupane, M. et al. 2014. Observation of a three-dimensional topological Dirac semimetal phase in high-mobility Cd_3As_2 . *Nat. Commun.* 5. 3786.
14. Schumann, T., Goyal, M., Kim, H. & Stemmer, S. 2016. Molecular beam epitaxy of Cd_3As_2 on a III–V substrate. *APL Mater.* 4. 126110.
15. Shklovskii B.I., Efros A.L. 1984. *Electronic Properties of Doped Semiconductors*. Berlin: Springer.
16. Suslov, A.V. 2019. Observation of subkelvin superconductivity in Cd_3As_2 thin films / A.V. Suslov, A.B. Davydov, L.N. Oveshnikov, L.A. Morgun, K.I. Kugel, V.S. Zakhvalinskii, E.A. Pilyuk, A.V. Kochura, A.P. Kuzmenko, V.M. Pudalov, and B.A. Aronzon. *Physical Review B*. 2019. V. 99. P. 094512
17. Wang, Z., Weng, H., Wu, Q., Dai, X. & Fang, Z. 2013. Three-dimensional Dirac semimetal and quantum transport in Cd_3As_2 . *Phys. Rev. B* 88. 125427.

18. Wang, C. M., Sun, H.-P., Lu, H.-Z. & Xie, X. C. 2017. 3D Quantum Hall effect of Fermi arcs in topological semimetals. *Phys. Rev. Lett.* 119. 136806.
19. Xu, S.-Y. et al. 2015. Observation of Fermi arc surface states in a topological metal. *Science* 347. 294–298.
20. Xu, S.-Y., Belopolski, I. et al. 2015. Discovery of a Weyl fermion semimetal and topological Fermi arcs. *Science* 349. 613–617.
21. Yang, B.-J. & Nagaosa, N. 2014. Classification of stable three-dimensional Dirac semimetals with nontrivial topology. *Nat. Commun.* 5. 4898.
22. Young, S. M. et al. 2012. Dirac semimetal in three dimensions. *Phys. Rev. Lett.* 108. 140405.
23. Zhang, E. et al. 2015. Magnetotransport properties of Cd_3As_2 nanostructures. *ACS Nano* 9. 8843–8850.
24. Zhao, B. et al. 2016. Weak antilocalization in Cd_3As_2 thin films. *Sci. Rep.* 6. 22377.

References

1. Feng, J. et al. 2015. Large linear magnetoresistance in Dirac semimetal Cd_3As_2 with Fermi surfaces close to the Dirac points. *Phys. Rev. B* 92. 081306(R).
2. Hasan, M. Z. & Kane, C. L. 2010. Colloquium: topological insulators. *Rev. Mod. Phys.* 82. 3045–3067.
3. He, L. P. et al. 2014. Quantum transport evidence for the three-dimensional Dirac semimetal phase in Cd_3As_2 . *Phys. Rev. Lett.* 113. 246402.
4. Jeon, S. et al. 2014. Landau quantization and quasiparticle interference in the three-dimensional Dirac semimetal Cd_3As_2 . *Nat. Mater.* 13. 851–856.
5. Laiho R., Lashkul A.V., Lisunov K.G., Lähderanta E., Shakhov M.A., Zakhvalinskii V.S. 2008. Hopping conductivity of Ni-doped p-CdSb. *J. Phys.: Condens. Matter.* V. 20. P. 295204.
6. Liang, T. et al. 2015. Ultrahigh mobility and giant magnetoresistance in the Dirac semimetal Cd_3As_2 . *Nat. Mater.* 14. 280–284.
7. Liu, Z. K. et al. 2014. A stable three-dimensional topological Dirac semimetal Cd_3As_2 . *Nat. Mater.* 13. 677–681.
8. Liu, Y. et al. 2015. Gate-tunable quantum oscillations in ambipolar Cd_3As_2 thin films. *NPG Asia Mater.* 7. e221.
9. Moll, P. J. W. et al. 2016. Transport evidence for Fermi-arc-mediated chirality transfer in the Dirac semimetal Cd_3As_2 . *Nature* 535. 266–270.
10. Mott N.F. and Davis E.A. 1979. *Electron Processes in Non-Crystalline Materials*. Oxford University Press. New York.
11. Murakami, S. 2007. Phase transition between the quantum spin Hall and insulator phases in 3D: emergence of a topological gapless phase. *New J. Phys.* 9. 356.
12. Narayanan, A. et al. 2015. Linear magnetoresistance caused by mobility fluctuations in n-doped Cd_3As_2 . *Phys. Rev. Lett.* 114. 117201.



13. Neupane, M. et al. 2014. Observation of a three-dimensional topological Dirac semimetal phase in high-mobility Cd_3As_2 . *Nat. Commun.* 5. 3786.
14. Schumann, T., Goyal, M., Kim, H. & Stemmer, S. 2016. Molecular beam epitaxy of Cd_3As_2 on a III–V substrate. *APL Mater.* 4. 126110.
15. Shklovskii B.I., Efros A.L. 1984. *Electronic Properties of Doped Semiconductors*. Berlin: Springer.
16. Suslov, A.V. 2019. Observation of subkelvin superconductivity in Cd_3As_2 thin films / A.V. Suslov, A.B. Davydov, L.N. Oveshnikov, L.A. Morgun, K.I. Kugel, V.S. Zakhvalinskii, E.A. Pilyuk, A.V. Kochura, A.P. Kuzmenko, V.M. Pudalov, and B.A. Aronzon. *Physical Review B*. 2019. V. 99. P. 094512
17. Wang, Z., Weng, H., Wu, Q., Dai, X. & Fang, Z. 2013. Three-dimensional Dirac semimetal and quantum transport in Cd_3As_2 . *Phys. Rev. B* 88. 125427.
18. Wang, C. M., Sun, H.-P., Lu, H.-Z. & Xie, X. C. 2017. 3D Quantum Hall effect of Fermi arcs in topological semimetals. *Phys. Rev. Lett.* 119. 136806.
19. Xu, S.-Y. et al. 2015. Observation of Fermi arc surface states in a topological metal. *Science* 347. 294–298.
20. Xu, S.-Y., Belopolski, I. et al. 2015. Discovery of a Weyl fermion semimetal and topological Fermi arcs. *Science* 349. 613–617.
21. Yang, B.-J. & Nagaosa, N. 2014. Classification of stable three-dimensional Dirac semimetals with nontrivial topology. *Nat. Commun.* 5. 4898.
22. Young, S. M. et al. 2012. Dirac semimetal in three dimensions. *Phys. Rev. Lett.* 108. 140405.
23. Zhang, E. et al. 2015. Magnetotransport properties of Cd_3As_2 nanostructures. *ACS Nano* 9. 8843–8850.
24. Zhao, B. et al. 2016. Weak antilocalization in Cd_3As_2 thin films. *Sci. Rep.* 6. 22377.

Ссылка для цитирования статьи
For citation

Захвалинский В.С., Пилук Е.А., Никуличева Т.Б., Иванчихин С.В., Япрынцеv М.Н., Ерина Т.А. 2019. Получение и механизмы электропроводности тонких плёнок дираковского полуметалла Cd_3As_2 . *Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика.* 51 (4): 533–540. DOI 10.18413/2075-4639-2019-51-4-533-540.

Zakhvalinskii V.S., Pilyuk E.A., Nikulicheva T.B., Ivanchikhin S.V., Yaprincev M.N., Erina T.A. 2019. Preparation and conduction mechanisms of thin films of dirac semimetal Cd_3As_2 . *Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics. Physics.* 51 (4): 533–540 (in Russian). DOI 10.18413/2075-4639-2019-51-4-533-540.

УДК 534.11

DOI 10.18413/2075-4639-2019-51-4-541-554

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЙ РАСЩЕПЛЕННОГО ПРОВОДА. ЧАСТЬ I: ДВИЖЕНИЕ «В ЦЕЛОМ»**MATHEMATICAL MODELING OF SPLIT WIRE MOTIONS.
Part I: MOTION "IN THE WHOLE"****В.И. Ванько****V.I. Vanko**

Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана,
ул. 2-я Бауманская, 5, Москва, 105005, Россия

Bauman Moscow State Technical University,
5 2d Baumanskaya St, Moscow, 105005, Russia

E-mail: vvanko@mail.ru

Аннотация

Развивается интегральный подход к исследованию колебаний расщепленного провода (расщепленной фазы) линии электропередачи (р/п или р/ф ЛЭП): вся расщепленная фаза в силу кинематических предположений рассматривается как некоторая гипотетическая тяжелая нить, свойства которой определяются характеристиками проводов и распорок, образующих фазу. Представлены уравнения движения фазы «в целом»; вводится понятие о конфигурации р/ф и делаются выводы о движениях фазы в зависимости от ее конфигурации; решается задача о расстановке распорок в пролете расщепленного провода, максимизирующей декремент колебаний механической системы «провода – распорки». Все теоретические построения опираются на известные в мировой литературе экспериментальные данные.

Abstract

In the article the integral approach develops near research of the electricity overhead line split wire vibrations: by virtue of kinematics suppositions all split phase (the system "wires – spacers") is examined as some hypothetical heavy filament, properties of that are determined by mechanical characteristics of wires and spacers, formative the split phase. The phase motion equations are presented "on the whole" in dependence of the phase configuration; certain conclusions are done about spacers arrangement in split wire span, maximizing the vibrations decrement of mechanical system "wires – spacers". All the theoretical conclusions lean against known in world literature experimental results.

Ключевые слова: воздушная линия электропередачи, расщепленная фаза (провод), система «провода – распорки», уравнения движения, оптимальная расстановка распорок.

Keywords: electrical overhead line, split phase (wire), system "wires – spacers", vibration equations, spacers' optimal arrangement.

1. Введение

В 1910 году профессор В.Ф. Миткевич (с 1929 г. действительный член АН СССР) писал: «Таким образом, приходится констатировать непрерывный рост рабочего напряжения на линиях электрической передачи энергии. Несомненно, что применение повышенного рабочего напряжения налагает известные условия при выборе диаметра проводов, заставляет увеличивать этот диаметр. Здесь мы, конечно, не можем идти сколь угодно далеко, если только будем придерживаться обычных типов проводов, которые при относительно малом сечении были бы эквивалентны проводам с очень большим сечением. Одно из многих решений этой задачи состоит в следующем. Провод составляется из ряда отдельных жил, отстоящих одна от другой и расположенных по некоторой цилиндрической поверхности в качестве образующих этой поверхности. . .

Конечно, для того, чтобы практически осуществить подобного рода проводник, необходимо выработать его конструкцию, т. е. необходимо разработать и проверить на опыте способ сборки такого проводника, способ его подвески и т. д. Все это, однако, не представляет, на мой взгляд, «непреодолимых трудностей» [Миткевич, 1910].

Так возникла идея «расщеплять» каждую токопроводящую фазу. На рис. 1 показаны воздушные линии (ВЛ) переменного тока с расщепленными фазами и типичный 4-проводный расщепленный провод: во избежание схлестывания проводов фазы положения отдельных проводов в пространстве фиксируются установкой в пролете (расстояние между несущими опорами равно L) стержневых конструкций – распорок. Для подавления колебаний участков проводов между распорками (в подпролетах) в конструкцию распорок включаются шарниры с вязкоупругими свойствами.

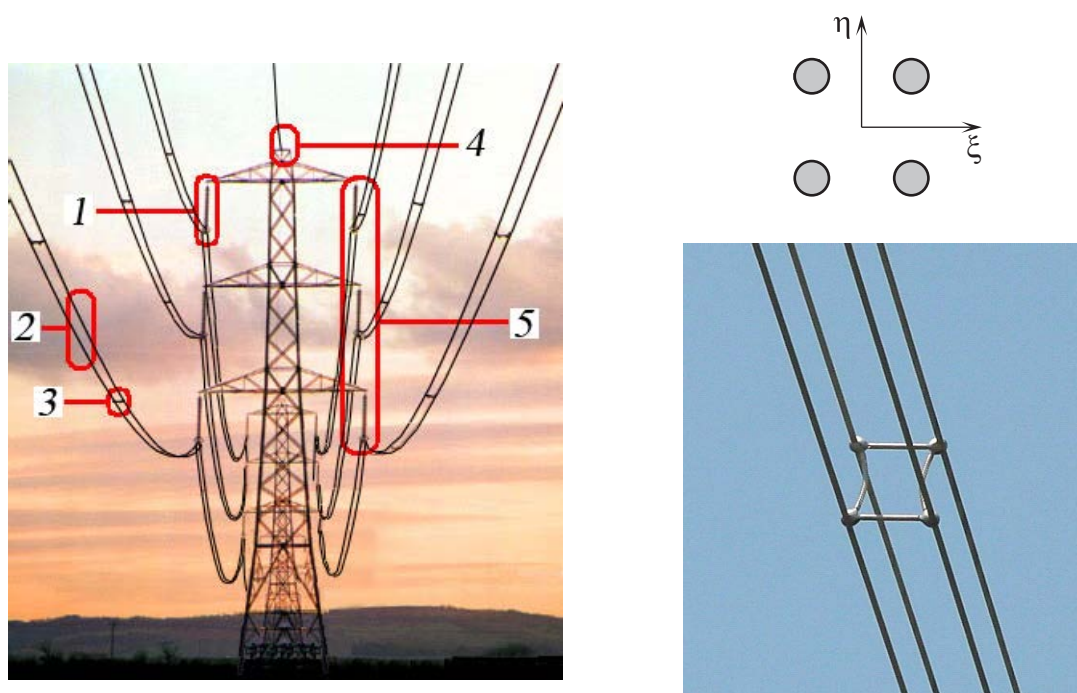


Рис 1. Цифрами на рисунке обозначены: 1 – изолятор; 2 – расщепленная фаза из двух проводов; 3 – распорка между проводами одной расщепленной фазы; 4 – провод заземления, закрепленный на верхушке опоры ЛЭП; 5 – три расщепленных фазы, расположенных на одной стороне по отношению к опоре ЛЭП и образующих одну электрическую цепь

В предлагаемой работе изучаются колебания расщепленной фазы как некоторого механически эквивалентного расщепленной фазе провода; предлагается способ расстановки распорок в пролете, позволяющий максимизировать сопротивление колебаниям системы «провода–распорки» за счет использования демпфирующих свойств распорок.

2. Движения расщепленной фазы

Под «конфигурацией фазы» понимается совокупность геометрических и механических свойств расщепленного провода: особенности расположения проводов фазы в пространстве, геометрические и механические характеристики проводов и распорок, а также способ расстановки распорок по длине пролета.

Целью настоящего исследования является ответ на вопрос о выборе определенной конфигурации р/ф, которая наилучшим образом отвечала бы требованиям к ее движениям с учетом особенностей конструкции данной ВЛ. Например, если проектируется воздушная линия с горизонтальным расположением трех фаз (т. е. все три фазы подвешиваются на одной высоте), то возникает необходимость в ограничении боковых перемещений линии центров масс (ЛЦМ) поперечных сечений каждой фазы; при расположении фаз в вертикальной плоскости, рис. 1, нужно стремиться к ограничению вертикальных перемещений ЛЦМ.

Актуальность упомянутых требований возрастает при сооружении ВЛ со сближенными фазами (т. н. «компактные линии»), что обеспечивает, наряду с улучшением электродинамических качеств линии, сужение полосы отчуждения в окрестности ВЛ [Александров, 1989].

Будем предполагать, что в каждом поперечном сечении р/ф взаимные перемещения проводов в подпролетах малы по сравнению с соответствующими перемещениями ЛЦМ фазы; р/ф «в целом» рассматривается как наделенная определенными свойствами тяжелая нить – механически эквивалентный фазе провод. Механические свойства эквивалентного провода определяются свойствами каждого из проводов фазы (площади сечения, натяжения, механические постоянные материала проводов) и конструкцией р/ф (расположение проводов в поперечных сечениях фазы, расстановка и механические характеристики распорок).

Поведение эквивалентного провода определяется следующими механическими гипотезами: провод сопротивляется только растяжению и кручению; каждое поперечное сечение фазы движется поступательно со своим центром масс (ЦМ) и поворачивается вокруг ЦМ на угол $\phi(x, t)$, который характеризует кручение фазы (x – координата данного поперечного сечения, измеряемая вдоль провода, $0 \leq x \leq L$; t – время); с учетом фиксирующего эффекта распорок принимается известная в теории стержней гипотеза плоских сечений, т. е. поперечное сечение $x = x_0$ каждого из проводов фазы имеет 4 степени свободы: движения центра масс сечения вдоль осей Ox , Oy , Oz и поворот поперечного сечения вокруг центра масс сечения фазы (с сохранением прежней геометрии поперечного сечения).

Расщепленный провод состоит из произвольного числа n проводов, а пролет – из m подпролетов; расставленные в пролете распорки могут быть различны по своей конструкции и механическим характеристикам. При помощи δ -функции Дирака в рассмотрение включаются массы и моменты инерции распорок, а также учитываются координаты расстановки распорок в пролете фазы. Каждый провод фазы – тяжелая вязкоупругая нить, работающая как модель Фойхта [Работнов, 2014], силу натяжения (натяжение) которой вычисляем в виде:

$$T_k(x, t) = T_{0k} + \sigma_k F = T_{0k} + (E\varepsilon_k + \mu\dot{\varepsilon}_k)F.$$

Здесь $T_k(x, t)$ (Н) – натяжение провода с номером k ($1 \leq k \leq n$) в данный момент времени; $T_{0k}(x)$ (Н) – начальное (монтажное) натяжение k -го провода; $\sigma_k(x, t)$ (Н/м²) – механическое напряжение в проводе, возникающее вследствие его колебаний; $\varepsilon_k(x, t)$ и $\dot{\varepsilon}_k(x, t)$ (с⁻¹) – деформация и скорость деформации в сечении x ; F (м²) – площадь поперечного сечения провода,



которую в данной работе будем считать постоянной для всех проводов фазы; E , (Н/м^2) и μ , ($\text{Н}\cdot\text{с/м}^2$) – осредненные по сечению провода модуль Юнга и коэффициент вязкости материала провода в продольном направлении.

Перемещение точки x ЛЦМ фазы в процессе колебаний описывается вектором

$$\vec{\vartheta}(x, t) = u(x, t)\vec{i} + v(x, t)\vec{j} + w(x, t)\vec{k},$$

где u , w – компоненты перемещения в плоскости начального провисания вдоль осей Ox и Oz соответственно, v – компонента перемещения из плоскости Oxz – боковое перемещение.

В работе [Ванько, 1991] разработана методика вычисления кинематических соотношений в рамках оговоренных выше предположений и, на основании принципа Даламбера-Лагранжа, выведены уравнения движения ЛЦМ фазы по каждой из степеней свободы:

$$T_0^* u'' + nEF(u' + w_0' w')' + ES_\xi(w_0' \phi')' + n\mu F(\dot{u}' + w_0' \dot{w}')' + \mu S_\xi(w_0' \dot{\phi}')' - n\tilde{\rho} F \ddot{u} + Q_u = 0, \quad (1)$$

$$T_0^* v'' - T_\eta \phi'' - n\tilde{\rho} F \ddot{v} + Q_v = 0, \quad (2)$$

$$T_0^* w'' - T_\xi \phi'' + nEF(u' w_0' + w_0'^2 w')' + ES_\xi(w_0'^2 \phi')' + n\mu F(\dot{u}' w_0' + w_0'^2 \dot{w}')' + \mu S_\xi(w_0'^2 \dot{\phi}')' - n\tilde{\rho} F \ddot{w} + Q_w = 0, \quad (3)$$

$$T_I \phi'' + T_{II} \phi' + EI_\xi(w_0' \phi')' + \mu I_\xi(w_0' \dot{\phi}')' + ES_\xi(w_0' u' + w_0'^2 w')' + \mu S_\xi(w_0' \dot{u}' + w_0'^2 \dot{w}')' - T_\xi w'' - T_\eta v'' + \tilde{\rho} S_\xi \ddot{w} + \tilde{\rho} S_\eta \ddot{v} - \tilde{J} \ddot{\phi} + Q_\phi = 0. \quad (4)$$

Здесь введены структурные параметры, характеризующие конфигурацию р/ф:

$$\xi^* = \sum_{k=1}^n \xi_k; \quad \eta^* = \sum_{k=1}^n \eta_k;$$

ξ_k , η_k – координаты центра масс поперечного сечения k -го провода в местной системе координат, начало которой в ЦМ данного поперечного сечения фазы. Поперечное сечение фазы рассматривается как система материальных точек, массы которых сосредоточены в центрах кругов, коими являются сечения проводов фазы.

$$S_\xi = F\xi^*; \quad S_\eta = F\eta^*; \quad T_0^* = \sum_{k=1}^n T_{0k}; \quad I_\xi = F \sum_{k=1}^n \xi_k^2; \quad T_\xi = \sum_{k=1}^n T_{0k} \xi_k; \quad T_\eta = \sum_{k=1}^n T_{0k} \eta_k$$

$$T_I = \sum_{k=1}^n T_{0k} (\xi_k^2 + \eta_k^2); \quad T_{II} = \sum_{k=1}^n T_{0k} \sqrt{\xi_k^2 + \eta_k^2};$$

$z = w_0(x)$ – кривая начального провисания ЛЦМ;

$\tilde{\rho} = \tilde{\rho}(x) = \rho + \frac{1}{nF} \sum_{i=1}^m m_i \delta(x - x_i)$ – обобщенная плотность материала эквивалентного провода; ρ (кг/м^3) – плотность материала провода; m_i – масса i -ой распорки ($i = 1, \dots, m$); размерность δ -функции Дирака – $1/\text{м}$;

$\tilde{J} = \tilde{J}(x) = \rho F \sum_{k=1}^n (\xi_k^2 + \eta_k^2) + \sum_{i=1}^m J_i \delta(x - x_i)$ ($\text{кг}\cdot\text{м}$) – обобщенный «момент инерции» поперечного сечения фазы, J_i ($\text{кг}\cdot\text{м}^2$) – момент инерции i -ой распорки относительно центра масс сечения.

Точкой над буквенными символами в системе уравнений движения обозначены производные по времени, штрихами сверху справа – производные по координате x .



Интенсивности распределенных аэродинамических воздействий на провода фазы по соответствующим степеням свободы обозначены через Q_u, Q_v, Q_w (Н/м); интенсивность распределенного по длине пролета момента аэродинамических (а/д) сил, действующих на расщепленную фазу, обозначена через Q_ϕ (Н).

Ограничимся анализом свободных колебаний и рассмотрим фазы различных конфигураций.

1) Поперечные сечения фазы обладают симметрией относительно соответствующих осей $O_1\xi$ и $O_1\eta$. Например, по пролету 4-х проводной фазы расставлены прямоугольные либо квадратные одинаковые распорки (вообще говоря, сечения с центральной симметрией). Пусть начальные натяжения проводов T_{0k} равны между собой. Тогда значения структурных параметров:

$$\xi^* = \eta^* = S_\xi = S_\eta = T_\xi = T_\eta = 0.$$

Связанными, т. е. образующими систему, оказываются уравнения колебаний в плоскости Oxz начального провисания ЛЦМ:

$$\begin{aligned} T_0^* u'' + nEF(u' + w_0' w')' + n\mu F(\dot{u}' + w_0' \dot{w}') - n\tilde{\rho} F \ddot{u} &= 0, \\ T_0^* w'' + nEF(u' w_0' + w_0'^2 w')' + n\mu F(\dot{u}' w_0' + w_0'^2 \dot{w}') - n\tilde{\rho} F \ddot{w} &= 0. \end{aligned} \quad (*)$$

Уравнения боковых (2) и крутильных (4) колебаний ни между собой, ни с системой (*) не связаны; причем на боковые колебания никак не влияют вязкие свойства материала проводов.

Отмеченные особенности поведения р/ф рассматриваемых конфигураций наблюдались в натуральных экспериментах: искусственно возбужденные колебания в вертикальной плоскости не вызывали ни боковых, ни крутильных колебаний; в свою очередь, начальные боковые колебания не вызывали движений по другим степеням свободы. Замеренный декремент боковых колебаний оказался на 1,5 порядка ниже декремента колебаний в вертикальной плоскости [Астахов и др., 1989].

Наиболее технологичным способом монтажа расщепленного провода является расстановка по пролету одинаковых распорок, которые обладают центральной симметрией. При расположении трех фаз на одной высоте (горизонтально) необходимо ограничить колебания из плоскости начального провисания Oxz . Чтобы избежать самой неприятной по отношению к боковым колебаниям ситуации, описанной в п.1), нужно таким образом задать начальные натяжения проводов фазы, чтобы «силовые» структурные параметры T_ξ и T_η оказались неравными нулю. Этого можно добиться, задавая неравные начальные натяжения проводов фазы.

Тогда $\xi^* = \eta^* = S_\xi = S_\eta = 0, T_\xi \neq 0, T_\eta \neq 0$. В результате получим систему уравнений, связанных по всем степеням свободы.

Начальные боковые колебания, вызванные порывом ветра, инициируют крутильные колебания и колебания в плоскости Oxz , что обеспечит диссипацию энергии системы по всем (четырем) степеням свободы.

2) В работе [Ванько, Платонова, 1998] система уравнений (1)–(4) обобщена на случай, когда конфигурация фазы изменяется по длине пролета: могут быть расставлены распорки с неодинаковыми механическими и геометрическими свойствами; провода фазы не являются образующими цилиндрической поверхности; провода имеют различные начальные натяжения.

В вычислительном эксперименте, описанном в цитируемой работе, изучались колебания фазы под действием порыва бокового ветра со скоростным напором, равным 310 Па (скорость ветра ~ 22 м/с); фаза состояла из четырех проводов АС-150/34, соединенных жесткими квадратными распорками через 50 м; длина пролета 300 м. Рассматривались случаи, когда натяжения T_H в проводах нижней пары составляют 100, 95, 85 и 80 процентов от натяжения T_B в проводах верхней пары.

В данном случае отличен от нуля «силовой» структурный параметр T_η , и система уравнений движения распадается на две системы – колебания в вертикальной плоскости и крутильно-боковые колебания. Установлено, что характер крутильно-боковых колебаний существенно зависит от упомянутого выше соотношения натяжений в проводах нижней и верхней пар, рис. 2 (рис 2.а соответствует случаю $T_H/T_B = 0,8$; рис. 2.б – случаю $T_H/T_B = 0,9$).

В качестве критерия зависимости между крутильными и боковыми колебаниями выбиралось отношение максимального угла поворота за время τ (период колебаний огибающих к кривым $\phi = \phi(t)$ и $v = v(t)$) к величине начального угла поворота фазы (ее монтажного положения) $\phi_0 = \pi/4$:

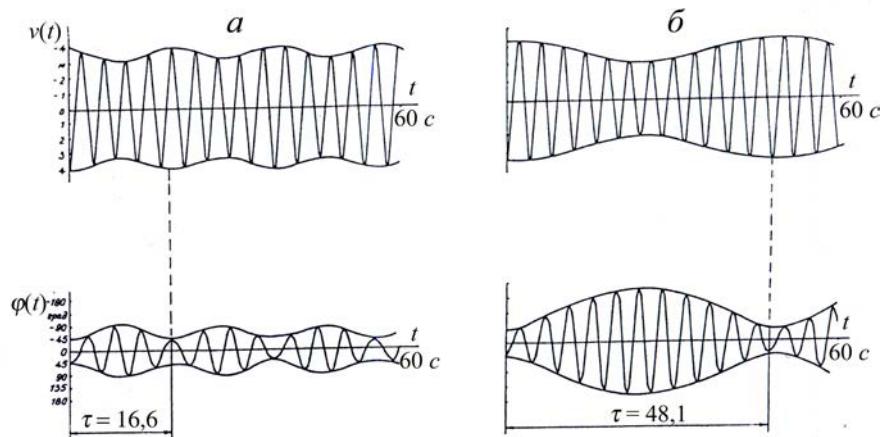


Рис. 2. Крутильно-боковые колебания фазы при неравных натяжениях проводов

$$\lambda = \frac{\phi_{\max}}{\phi_0},$$

так как чем больше величина λ , тем выше амплитуда колебаний огибающей графика боковых перемещений $v = v(t)$.

На рис. 3 приведена построенная по отдельным точкам зависимость λ от величины T_H/T_B в точке $x = L/2$ (середина пролета). Максимальное значение λ достигается при $T_H/T_B = 0,9$.

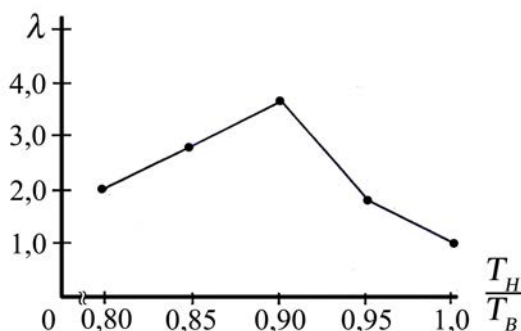


Рис. 3. Зависимость параметра λ от угла поворота сечения; $\lambda = 1$ соответствует чисто боковому перемещению, так как силовой параметр $T_\eta = 0$

Таким образом, изменяя натяжения в проводах фазы в достаточно небольших пределах, можно ограничить перемещения, опасные для данной конструкции ВЛ, в данном случае – боковые перемещения.

Приведенные выше зависимости между конфигурацией фазы и характером ее движений в целом (движения линий центров масс поперечных сечений) необходимо учитывать при проектировании компактных ЛЭП.

2. Оптимизация расстановки распорок

С тех пор, как в практике энергетического строительства стали использовать распорки-гасители колебаний в подпролетах, актуален вопрос: каким образом следует располагать распорки по пролету фазы, чтобы наилучшим образом использовать их диссипирующую способность.

Обсуждению названных и смежных вопросов посвящены работы [Rowbottom, Richards, 1973; Hearnshow, 1974, 1975]. Экспериментально изучались фазы с различными расстановками распорок. При каждом способе расстановки внимание концентрировалось на тех формах колебаний, при которых распорки работают в наиболее неблагоприятных режимах, например, когда провода в подпролетах совершают противофазные движения по отношению к корпусу распорки, рис. 4.

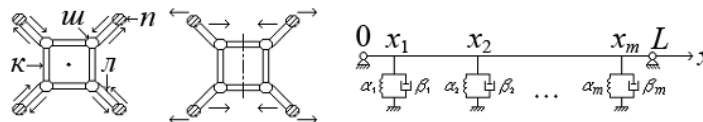


Рис. 4. Буквами обозначены: κ – корпус распорки; $л$ – луч распорки; $ш$ – вязкоупругий шарнир; n – провод фазы

В работе [Hearnshow, 1975] отмечен важный экспериментальный факт: на равных по длине подпролетах трех- и четырехпроводных РФ максимальные значения декремента колебаний системы достигались при одинаковых расстановках распорок в обеих исследуемых фазах.

В работе [Ванько, Яковенко, Виноградов, 1989] обосновывается правомерность использования линейных вязкоупругих моделей при исследовании колебаний в подпролетах р/ф.

На основании вышеизложенного предлагается следующий подход к проблеме максимизации декремента колебаний расщепленной фазы как системы «провода–распорки».

Пусть в пролете поставлено m распорок с известными механическими свойствами (модули упругости и коэффициенты вязкости); заданы координаты точек постановки распорок, рис. 4: $0 < x_1 < x_2 < \dots < x_m < L$ (L – длина пролета).

Распорка наиболее полно играет роль гасителя колебаний, если ЛЦМ поперечных сечений фазы остается неподвижной, а провода в подпролетах движутся осесимметрично относительно ЛЦМ, либо так, что имеется плоскость симметрии. В обоих случаях имеют место противофазные движения проводов. Тогда задача об изучении взаимодействия распорок с проводом существенно упрощается, так как можно рассматривать только один провод, на который в точках x_1, x_2, \dots, x_m действуют сосредоточенные силы, вычисляемые в зависимости от принятой механической схемы работы демпфирующих узлов (шарниров) распорок.

Будем считать, что узлы распорок являются линейными вязкоупругими элементами Фойхта, рис. 4 [Работнов, 2014]. Действие узлов распорок на провод моделируется распределенной по длине провода поперечной нагрузкой интенсивности

$$Q(w, \dot{w}) = \sum_{k=1}^m (\alpha_k w(x, t) + \beta_k \dot{w}(x, t)) \delta(x - x_k). \tag{5}$$

Здесь размерности входящих в (5) величин таковы: $[Q] = \text{Н/м}$, $[\alpha] = \text{Н/м}$, $[\beta] = \text{Н}\cdot\text{с/м}$, $[\delta(x - x_k)] = 1/\text{м}$; $w(x, t)$ и $\dot{w}(x, t)$ – перемещение и скорость перемещения точки провода в



вертикальной плоскости, α_k и β_k – величины упругой и вязкой жесткостей демпфирующего узла распорки с номером k .

Предположим, что из решения задачи о свободных колебаниях системы «провод–распорки» получена функциональная зависимость демпфирующей способности системы от координат x_1, x_2, \dots, x_m и параметров α_k, β_k :

$$\gamma = f(x_1, \dots, x_m; \alpha_1, \dots, \alpha_m; \beta_1, \dots, \beta_m). \quad (6)$$

Известно, что при монтаже расщепленной фазы должны соблюдаться определенные требования к выбору длин подпролетов: длины последних назначаются так, чтобы избежать соударения проводов фазы либо их слипания при коротком замыкании. При соблюдении этих требований длины подпролетов определяются механическими свойствами распорок [Проектирование ЛЭП сверхвысокого напряжения, 1983]. Назначаются предварительные длины подпролетов (их можно взять, например, равными), т. е. задаются начальные координаты точек постановки распорок

$$x_1 = x_{10}, \quad \dots, \quad x_m = x_{m0},$$

которые в процессе решения задачи будут варьироваться в известных допустимых пределах: $x_{i0} - \varepsilon_i \leq x_i \leq x_{i0} + \varepsilon_i$ ($i = 1, \dots, m$).

Таким образом, задача об оптимизации демпфирующей способности системы «провод–распорки» может быть поставлена как задача о поиске максимального значения функции m переменных (при фиксированных значениях параметров α и β) при ограничениях на варьируемые переменные в виде неравенств [Ванько, Зайцев, Галкин, 1996; Дейкина, 2003]:

$$\begin{cases} f(x_1, \dots, x_m; \alpha, \beta) \rightarrow \max, \\ x_{k0} - \varepsilon_k \leq x_k \leq x_{k0} + \varepsilon_k. \end{cases} \quad (7)$$

Экспериментально установлено, что провод в пролете совершает, в основном, колебания вдоль оси Oz (поперечные колебания) [Ванько и др., 1987]. Поэтому уравнение (3) запишем в виде:

$$A[w] = T_0 w'' + EF(w_0'^2 w')' + \mu F(w_0'^2 \dot{w}')' - Q(w, \dot{w}) - \rho F \ddot{w} = 0. \quad (8)$$

Решение уравнения (8) представим выражением

$$w(x, t) = \sum_{r=1}^l w_r(t) \sin \frac{r\pi x}{L}, \quad (9)$$

при этом координатные функции удовлетворяют краевым условиям $w(0, t) = w(L, t) = 0$.

В представлении (9) нечетным номерам r соответствуют симметричные относительно середины пролета $x = L/2$ формы колебаний, четным номерам – антисимметричные формы.

Согласно методике Галеркина-Канторовича [Канторович, Крылов, 1952; Михлин, 1957] подставим (9) в уравнение (8), умножим последовательно результат подстановки на каждую координатную функцию (l раз), проинтегрируем по координате x и каждый интеграл приравняем к нулю:

$$\int_0^L A \left[\sum_{r=1}^l w_r(t) \sin \frac{r\pi x}{L} \right] \sin \frac{j\pi x}{L} dx = 0, \quad j = 1, \dots, l. \quad (10)$$

При вычислении интегралов используется основное свойство δ -функции Дирака:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) \delta(x - x_k) dx = \psi(x_k).$$



В результате получаем систему, состоящую из l обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно амплитудных функций $w_1(t), \dots, w_l(t)$.

Примем форму начального провисания провода в виде параболы

$$w_0(x) = 4w_0^* \frac{x^2 - xL}{L^2}$$

$(w_0(L/2) = w_0^*)$. (10),, : $w_2(t), w_4(t), \dots$. Это обстоятельство существенно упрощает дальнейшие выкладки.

Пусть форма колебаний провода аппроксимируется двумя слагаемыми ($l = 2$):

$$w(x, t) = w_1(t) \sin \frac{\pi x}{L} + w_2(t) \sin \frac{2\pi x}{L}.$$

Тогда из (10) получим два несвязанных уравнения:

$$\begin{aligned} & \frac{\rho FL}{2} \ddot{w}_p + \left(32\kappa_p \mu F \frac{(w_0^*)^2}{L^4} + \sum_{k=1}^m \beta_k \sin^2 \frac{p\pi x_k}{L} \right) \dot{w}_p + \\ & + \left(\frac{(p\pi)^2}{2L} T_0 + 32EF\kappa_p \frac{(w_0^*)^2}{L^4} + \sum_{k=1}^m \alpha_k \sin^2 \frac{p\pi x_k}{L} \right) w_p = 0, \quad p = 1, 2. \end{aligned} \tag{11}$$

Здесь $\kappa_p = ((p\pi)^2 + 12) / 12, p = 1, 2$.

Отсюда находим значения коэффициентов затухания и собственные частоты колебаний для 1-ой и 2-ой форм колебаний:

$$\delta_p = \frac{1}{\rho FL} \left(32\kappa_p \mu F \frac{(w_0^*)^2}{L^4} + \sum_{k=1}^m \beta_k \sin^2 \frac{p\pi x_k}{L} \right), \tag{12}$$

$$\begin{aligned} \omega_p = \frac{1}{\rho FL} \left(2\rho FL \left[\frac{(p\pi)^2}{2L} T_0 + 32EF\kappa_p \frac{(w_0^*)^2}{L^4} + \sum_{k=1}^m \alpha_k \sin^2 \frac{p\pi x_k}{L} \right] - \right. \\ \left. - \left[32\kappa_p \mu F \frac{(w_0^*)^2}{L^4} + \sum_{k=1}^m \beta_k \sin^2 \frac{p\pi x_k}{L} \right]^2 \right)^{1/2}. \end{aligned} \tag{13}$$

Здесь $p = 1, 2; [\mu] = \text{Н} \cdot \text{см}^2; [\beta_k] = \text{Н} \cdot \text{с} / \text{м}; [\alpha_k] = \text{Н} / \text{м}$.

При учете более, чем четырех форм колебаний, получить явные формулы для коэффициентов затухания δ_p и собственных частот ω_p , к сожалению, не удастся.

При $l = 4$ задачу вычисления значений $\delta_1, \dots, \delta_4$ и $\omega_1, \dots, \omega_4$ удастся довести до числа при помощи обозримого алгоритма. Полученные при этом значения δ и ω для конкретных механических параметров E, μ, α, β отличаются от получаемых с использованием формул (12), (13) при значениях $p = 3, 4$ не более, чем на 5 %.

Поэтому будем считать, что формулы (12), (13) имеют силу при любых $p > 2$.

Рассмотрим пример точного решения задачи (7) о нахождении максимума демпфирующей способности системы «провод–распорки».

Пусть в пролете РФ поставлены две распорки ($m = 2$) симметрично относительно середины пролета и при этом требования на максимальную длину подпролета не нарушаются, поэтому решается задача на безусловный экстремум

$$\gamma(x_1, x_2) \rightarrow \max \quad (0 < x_1 < x_2 < L).$$

В эксперименте было выяснено, что основной демпфирующий эффект в системе «провод–распорки» создают потери энергии в узлах распорки [Ванько и др., 1987].



В качестве функции $\gamma(x_1, x_2)$ в силу формулы (12) при $p = 1, 2$, положив $\mu = 0$, выберем выражение

$$\gamma(x_1, x_2) = \sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2} \rightarrow \max,$$

где

$$\delta_p = \frac{1}{\rho FL} \sum_{k=1}^2 \beta_k \sin^2 \frac{p \pi x_k}{L}, \quad p = 1, 2.$$

Тогда получим систему уравнений

$$\delta_1 \frac{\partial \delta_1}{\partial x_i} + \delta_2 \frac{\partial \delta_2}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2. \quad (14)$$

Введем безразмерную координату $\xi = \pi x/L$, $0 \leq \xi \leq \pi$, и заметим, что искомые координаты ξ_1, ξ_2 связаны зависимостью $\xi_2 = \pi - \xi_1$ (распорки расположены симметрично относительно середины пролета $\xi = \pi/2$), поэтому система (14) сводится к одному уравнению относительно ξ_1 ($0 < \xi_1 < \pi/2$):

$$\frac{\partial}{\partial \xi_1} (\sin^4 \xi_1 + \sin^4 2\xi_1) = 0 \Rightarrow \sin^3 \xi_1 \cos \xi_1 + 2 \sin^3 2\xi_1 \cos 2\xi_1 = 0.$$

Отсюда: $32 \cos^4 \xi_1 - 16 \cos^2 \xi_1 + 1 = 0$.

Решая это уравнение, получим: $(\cos^2 \xi_1)_{1,2} = \frac{1}{4} \pm \frac{\sqrt{2}}{8}$, значит:

$$\xi_{1,1} \approx 0,8588, \quad \xi_{1,2} \approx 1,2968. \quad (15)$$

Отметим, что значения $0, \pi/2$ и π , являющиеся корнями уравнений $\sin 2\xi_1 = 0$ и $\sin \xi_1 = 0$, условиям исходной задачи не удовлетворяют.

Из значений (15) первое, $\xi_{1,1}$, дает глобальный максимум функции $\gamma(\xi_1)$ на отрезке $[0; \pi/2]$ и является решением поставленной задачи.

Итак, имеем

$$\xi^* \approx 0,8588, \quad x_1 = L\xi^*/\pi, \quad x_2 = L - x_1. \quad (16)$$

При решении задачи о расстановке распорок при условии, что форма колебаний задается в виде $w(x, t) = \sum_{k=1}^n w_k(t) \sin \frac{k\pi x}{L}$ ($n > 2$), где, в качестве γ , выбрана функция ($\mu = 0$):

$$\gamma = |\delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_n|.$$

Такой выбор обосновывается в работе [Ванько и др., 1996] большей простотой при построении вычислительного алгоритма, чем при выборе функции $\gamma(x_1, \dots, x_m)$ в виде, аналогичном (2.10), что было сделано в работе [Дейкина, 2003].

Приведем сравнение наших результатов с рекомендациями иностранных фирм, полученными в результате обработки экспериментального материала [KUNHWA, 1993; DUNLOP, 1969].

В таблице 1 приведены данные по схемам расстановки двух распорок в пролетах длиной 100–170 м: результаты вычислений по формуле (16) и данные из отчета [KUNHWA].



Таблица 1: Расстановка двух распорок в пролете

Длина пролета, L , м	Источник	Длины подпролетов, м		
100	формула (16) отчет [KUNHWA]	27,34 32,70	45,32 34,60	27,34 32,70
120	формула (16) отчет [KUNHWA]	32,80 37,50	54,40 45,00	32,80 37,50
140	формула (16) отчет [KUNHWA]	38,27 40,63	63,46 58,74	38,27 40,63
160	формула (16) отчет [KUNHWA]	43,74 43,47	72,52 73,06	43,74 43,47
170	формула (16) отчет [KUNHWA]	46,47 44,93	77,06 80,14	46,47 44,93

В таблице 2 представлены результаты вычислений по нашей программе [Ванько и др., 1996] и, для сравнения, данные по расстановке распорок, заимствованные из материалов упомянутых выше инофирм. Длины пролетов L изменялись в диапазоне 210...530 м; наши данные отмечены в таблице 2 символом *. Прочерк в строке для $L = 390$ м есть следствие того, что в таблицах фирмы DUNLOP рекомендуется ставить 6 распорок.

Таблица 2: Расстановка распорок в длинных пролетах

Длина пролета, L , м	Число распорок	Источник	Длины подпролетов, м								
			KUNHWA		DUNLOP		*		*		
210	3	KUNHWA	42,21		63,19		62,39		42,21		
		DUNLOP	46,94		54,86		61,57		46,94		
		*	48,61		61,51		51,54		48,61		
250	3	KUNHWA	45,46		83,33		75,75		45,46		
		DUNLOP	46,94		75,29		80,77		46,94		
		*	57,87		73,23		61,03		57,87		
300	4	KUNHWA	45,45		66,97		75,16		66,97	45,45	
		DUNLOP	46,94		63,40		77,72		63,40	46,94	
		*	54,79		58,60		73,22		58,60	54,79	
350	5	KUNHWA	45,45	57,99	83,62	61,61	55,88	45,45			
		DUNLOP	46,94	53,34	61,57	88,39	53,34	46,94			
		*	46,80	68,40	51,26	67,84	68,90	46,80			
390	5	KUNHWA	45,45	74,12	83,62	74,12	67,15	45,45			
		DUNLOP	-	-	-	-	-	-			
		*	52,15	76,22	57,11	75,65	76,72	52,15			
440	6	KUNHWA	45,45	62,30	71,69	81,12	71,69	62,30	45,45		
		DUNLOP	46,94	50,60	79,25	85,34	79,25	50,60	46,94		
		*	58,84	65,01	63,94	64,42	63,94	65,01	58,84		
490	7	KUNHWA	45,45	58,34	65,00	83,33	75,75	61,47	55,31	45,45	
		DUNLOP	46,94	50,60	65,84	78,94	85,04	65,85	50,60	46,94	
		*	47,91	65,52	71,78	47,83	71,25	72,28	65,52	47,91	
530	8	KUNHWA	45,45	51,16	55,76	68,78	80,85	75,75	55,70	51,16	45,45
		DUNLOP	46,94	51,21	59,74	65,84	82,91	65,8	59,74	51,21	46,94
		*	44,88	77,81	52,26	51,24	77,61	51,25	52,26	77,81	44,88

Отметим, что рекомендации фирмы KUNHWA выработаны на основе исследований [Hearnshaw, 1974, 1975], причем таблицы фирмы KUNHWA несколько скорректированы экспериментальными данными. Характерная особенность рекомендаций вышеупомянутых инофирм состоит в том, что длины первого и последнего подпролетов равны 45,45 м либо 46,94 м независимо от длины всего пролета. Объяснить этот факт с точки зрения механики колебаний невозможно.

3. Заключение

В литературе, посвященной изучению движений расщепленной фазы и проектированию воздушных линий электропередачи, отмечается дороговизна проведения натуральных испытаний, на основании которых можно делать заключения и давать рекомендации строителям. Особенно строгие требования предъявляются к компоновке ВЛ со сближенными фазами (т. н. компактные линии) [Проектирование ЛЭП, 1983; Александров, 1989]. Поэтому предварительные

расчеты на основе математических моделей, качественно и адекватно описывающих движения такой сложной механической системы, как расщепленная фаза, имеют большое значение и оправдывают усилия их разработчиков.

В этой связи необходимо сослаться на цикл работ, проведенных в Белорусском политехническом институте [Стрелюк, Сергей, 80–90-тые годы], в МГТУ им. Н.Э. Баумана [Дейкина, 2003; Иванова, 2013].

В данной работе представлены математические модели, построенные на основе «линейного» подходе к проблеме колебаний воздушных проводов: считаем, что сравнительно с длинами пролетов ВЛ (более 100 м), колебания провода (амплитуды $\sim 1\text{--}5$ м) можно считать «малыми». Такой подход, во многом, позволяет выявить качественную картину движений и свойств расщепленной фазы, а отдельные детали можно прояснить, используя упомянутые выше программные комплексы.

Список литературы

1. Александров Г.Н. 1989. Установки сверхвысокого напряжения и охрана окружающей среды. Л.: Энергоатомиздат, 360.
2. Астахов Ю.Н., Постолатий В.М., Чеботарь Ф.И., Яковлев Л.В. 1989. Оценка потерь энергии колебаний в расщепленной фазе при изменении шага расщепления ВЛ 500 кВ. Управляемые электропередачи. Вып.1, Кишинев: Штиинца: 114–124.
3. Ванько В.И., Бекметьев Р.М., Виноградов А.А., Ширинских Н.В. 1987. Экспериментальное исследование колебаний проводов расщепленной фазы ЛЭП. Изв. вузов. Энергетика, N2: 44–47.
4. Ванько В.И., Яковенко М.Г., Виноградов А.А., 1989. Линейная вязкоупругая модель колебаний провода в подпролете расщепленной фазы. Изв. вузов. Энергетика, N10: 16–21.
5. Ванько В.И. 1991. Колебания расщепленной фазы проводов ЛЭП. Изв. вузов. Энергетика, N2: 11–16.
6. Ванько В.И., Зайцев А.А., Галкин С.В. 1996. Об оптимальной расстановке распорок-гасителей в пролете расщепленной фазы ЛЭП. Изв. РАН. Энергетика, N5: 89–97.
7. Ванько В.И., Платонова И.А. 1998. Сравнительный анализ свободных колебаний расщепленных фаз применительно к компактным ЛЭП. Изв. вузов и энергетических объединений СНГ. Энергетика, № 5: 27–33.
8. Дейкина Е.С. 2003. Оптимальное проектирование расщепленной фазы проводов ЛЭП. Материалы VI межд. конф. по математическому моделированию. СПб: МАН ВШ: 67–70.
9. Иванова О.А. 2013. Математическое моделирование аэроупругих колебаний провода линии электропередачи: Дис. канд. физ.-мат. наук. М., 2013: 142 с.
10. Канторович Л.В., Крылов В.И. 1952. Приближенные методы высшего анализа. М.: ГИТТЛ, 695.
11. Миткевич В.Ф. 1910. Явление тихого разряда в высоковольтных воздушных линиях. Электричество, N7: 185–200.
12. Михлин С.Г. 1957. Вариационные методы в математической физике. М.: ГИТТЛ, 476.

13. Проектирование ЛЭП сверхвысокого напряжения, 1983. Под ред. Г.Н. Александра и Л.Л. Петерсона. Л.: Энергоатомиздат, 386.
14. Работнов Ю.Н. 2014. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 752.
15. Сергей И.И., Виноградов А.А. 1998. Численное моделирование эксплуатационных статических и динамических режимов проводов и кабелей. Электрические станции, N1: 41–49.
16. Стрелюк М.И., Сергей И.И., Вотяков А.Г. 1991. Численный метод расчета пляски проводов воздушных линий сверхвысокого напряжения. Изв. вузов и энергетических объединений СНГ, N6: 8–12.
17. Calculation of span lengths for 345 kV lines 4-bundle spacer-dampers. Technical specifications, 1993, March. Korea, Seoul: KUNHWA Company, 41 p.
18. Hearnshaw D. 1974. Spacer-dampers performance – a function of in-space positioning . IEEE Trans. Power Apparatus and Systems, vol. PAS 93, N5: 1289–1309.
19. Hearnshaw D. 1975. Optimization of system performance for spacer-dampers. IEEE Power Eng. Soc. Conf. papers. Summer Meeting. San-Francisco, vol. A75, N490-0: 9 p.
20. Recommended in-span positions for metallic spacer–dampers (Tables of positions of DUNLOP spacer-dampers for various span lengths), 1969. England: The DUNLOP Company Ltd., Polymer Engineering Division: 16 p.
21. Rowbottom M.D., Richards D.I. 1973. Mechanical and aerodynamical problems associated with future overhead lines. Phil. Trans. Soc. London, vol. A275: 181–188.

References

1. Alexandrov G.N. 1989. Ultra-high voltage installations and environmental protection. L.: Energoatomizdat, 360.
2. Astakhov Yu.N., Postolatii V.M., Chebotar' F.I., Yakovlev L.V. 1989. Estimation of energy losses of oscillations in the split phase when the splitting step changes VL 500 kV. Power transmission control. 1, Kishinev: Shtiintsa: 114–124.
3. Van'ko V.I., Bekmet'yev R.M., Vinogradov A.A., Shirinskikh N.V., 1987. Experimental study of vibrations of wires of the split phase LEP. Izv. VUZov. Energetika, N2: 44–47.
4. Van'ko V.I., Yakovenko M.G., Vinogradov A.A. 1989. Linear viscoelastic model of wire oscillations in split-phase sub-span. Izv VUZov. Energetika, N10: 16–21.
5. Van'ko V.I. 1991. Oscillations of split-phase of the LEP wire. Izv VUZov. Energetika, N2: 11–16.
6. Van'ko V.I., Zaitsev A.A., Galkin S.V. 1996. On the optimal arrangement of damper struts in the split phase span LEP. Izv. RAN. Energetika, N5: 89–97.
7. Van'ko V.I., Platonova I.A. 1998. Comparative analysis of free oscillations of split phases in relation to compact LEP. Izv. VUZov i energeticheskikh ob'yedinenii SNG. Energetika, № 5: 27–33.
8. Deikina E.S. 2003. Optimal projection of LEP wire split phase. Matherials of VI Int. Conf. on mathematical modelling. SPb: MAN VSh: 67–70.



9. Ivanova O.A. 2013. Mathematical modelling of air elastic vibrations of power line wire: Thesis. M., 142 s.
10. Kantorovich L.V., Krylov V.I. 1952. Approximate methods of higher analysis. M.: GITTL, 695.
11. Mitkevich V.F. 1910. The phenomenon of quiet discharge of high voltage overhead lines. Electricity, N7: 185–200.
12. Mikhlin S.G. 1957. Variational methods in Mathematical physics. M.: GITTL, 476.
13. Progection of super high voltage LEP. 1983. Eds. G.N. Alexandrova and L.L.Petersona. L.: Energoatomizdat, 386.
14. Rabotnov Yu.N. 2014. Creep of structural elements. M.: Nauka, 752.
15. Sergei I.I., Vinogradov A.A. 1998. Numeral modelling operational static and dynamic regimes of wires and cables'. Electrical stations, N1: 41–49.
16. Strelyuk M.I., Sergei I.I., Votyakov A.G. 1991. Numerical method of calculation of dancing of wires of air lines super high voltage. Izv. VUZov i energeticheskikh ob'yedinenii SNG, N6: 8–12.
17. Calculation of span lengths for 345 kV lines 4-bundle spacer-dampers. Technical specifications, 1993, March. Korea, Seoul: KUNHWA Company, 41 p.
18. Hearnshaw D. 1974. Spacer-dampers performance - a function of in-space positioning . IEEE Trans. Power Apparatus and Systems, vol. PAS 93, N5: 1289 – 1309.
19. Hearnshaw D. 1975. Optimization of system performance for spacer-dampers. IEEE Power Eng. Soc. Conf. papers. Summer Meeting. San-Francisco, vol. A75, N490-0: 9 p.
20. Recommended in-span positions for metallic spacer–dampers (Tables of positions of DUNLOP spacer-dampers for various span lengths), 1969. England: The DUNLOP Company Ltd., Polymer Engineering Division: 16 p.
21. Rowbottom M.D., Richards D.I. 1973. Mechanical and aerodynamical problems associated with future overhead lines. Phil. Trans. Soc. London, vol. A275: 181–188.

Ссылка для цитирования статьи
For citation

Ванько В.И. 2019. Математическое моделирование движений расщепленного провода. Часть I: Движение «в целом». Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика. 51 (4): 541–554. DOI 10.18413/2075-4639-2019-51-4-541-554.

Vanko V.I. 2019. Mathematical modeling of split wire motions. Part I: Motion «in the whole». Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics. Physics. 51 (4): 541–554 (in Russian). DOI 10.18413/2075-4639-2019-51-4-541-554.

УДК 531.2

DOI 10.18413/2075-4639-2019-51-4-555-564

**ОПТИМИЗАЦИОННАЯ МЕТОДИКА ДЛЯ РАСЧЕТА РАВНОВЕСНОЙ
ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ФОРМЫ ЭРИТРОЦИТА****OPTIMIZATION METHOD FOR THE CALCULATION OF THE EQUILIBRIUM
AXISYMMETRIC SHAPE OF ERYTHROCYTE****А.В. Голочалова, Э.Б. Кулумбаев****A.V. Golochalova, E.B. Kulumbaev**

Белгородский государственный национальный исследовательский университет,

ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия

Belgorod National Research University,

85 Pobeda St, Belgorod, 308015, Russia

E-mail: kulumbaev@bsu.edu.ru

Аннотация

Разработана оптимизационная методика для расчета равновесной осесимметричной формы нормального эритроцита. Процедура расчета основана на представлении мембраны замкнутой математической осесимметричной поверхностью и аппроксимации ее образующей ломаной. Координаты вершин ломаной составляют вектор-аргумент упругой энергии мембраны. Численная минимизация этой энергии с учетом геометрических ограничений на площадь мембраны и объем эритроцита (условная нелинейная оптимизация) осуществляется в Matlab. Форма эритроцита рассчитывается для поверхностной плотности энергии в рамках теории Канхема – Хельфриха. Результаты расчетов согласовываются с экспериментальными данными и с расчетами других авторов.

Abstract

An optimization method for calculating the equilibrium axisymmetric form of a normal erythrocyte is proposed. The calculation procedure is based on the representation of the membrane by a closed mathematical axisymmetric surface and its approximation by a forming polyline. The coordinates of the polyline vertices make up the vector argument of the elastic energy of the membrane. Numerical minimization of this energy, taking into account the geometric constraints on the membrane area and the volume of the erythrocyte (nonlinearly constrained optimization) is carried out with Matlab. The erythrocyte form for the surface energy density in the framework of the Kanhem – Helfrich theory is calculated. The calculation results are consistent with the experimental data and with the calculations of other authors.

Ключевые слова: эритроцит, осесимметричная форма, упругая энергия, условная нелинейная оптимизация.

Keywords: erythrocyte, axisymmetric shape, elastic energy, nonlinearly constrained optimization.

1. Введение

Известно, что во взвешенном состоянии зрелый нормальный эритроцит человека имеет дисковидную двояковогнутую форму [Caro et al., 1978; Herman, 2007]. Форма эритроцита обусловлена мембраной, которая ограничивает бесструктурное клеточное содержимое (почти насыщенный раствор гемоглобина), имеет сложную структуру и включает в себя, в частности, липидный бислой и подстилающую его спектриновую сеть [Herman, 2007]. Мембрана эритроцитов обеспечивает гомеостаз и функциональное состояние эритроцита. Размеры «усредненного» эритроцита по данным работы [Evans, Fung, 1972]: радиус эритроцита ~ 4 мкм, объем ~ 95 мкм³, площадь поверхности ~ 135 мкм². Аргументы в пользу создания природой эритроцита такой структуры, формы и размеров для системы транспорта газов в организме приводятся в работе [Атауллаханов и др., 2018].

Считается, что дисковидная двояковогнутая равновесная форма эритроцита обусловлена механическими свойствами его мембраны. При теоретическом описании формы эритроцита мембрана обычно рассматривается как замкнутая математическая поверхность, которой приписываются некоторые физические свойства [Guckenberger, Gekle, 2017]. Применимость этого представления обосновывается малостью отношения толщины мембраны (порядка ~ 10 нм) к характерному размеру эритроцита (порядка ~ 10 мкм) [Caro et al., 1978]. В данной работе используется именно такое приближение для мембраны эритроцита, причем этой математической поверхности приписывается только свойство жесткости при изгибе, как в часто используемой модели эритроцитарной мембраны Канхема – Хельфриха [Canham, 1970; Helfrich, 1973], сформулированной в виде принципа минимума энергии мембраны. Следует отметить, что в дальнейшем теория Канхема – Хельфриха усложнялась, например, учетом энергии, связанной с разностью площадей липидных слоев [Miao et al., 1994] или энергии сдвига мембранного скелета внутри эритроцита в [Mukhopadhyay et al., 2002]. Однако все эти модификации модели Канхема – Хельфриха увеличивают число материальных параметров, необходимых для описания формы эритроцита. В виду невозможности прямого экспериментального измерения эти параметры выступают в моделях как свободные и являются по сути подгоночными. Поэтому в данной работе используется модель Канхема – Хельфриха, которая содержит только один такой параметр – спонтанную кривизну [Helfrich, 1973].

Численная реализация такого рода моделей обычно проводится на основе вариационного подхода, а соответствующая принципу минимума энергии система уравнений Лагранжа – Эйлера для выбранной параметризации формы эритроцита, дополненной граничными условиями, решается численно, например, как в работе [Seifert et al., 1991].

В данной работе для расчета равновесной осесимметричной формы нормального эритроцита предлагается оптимизационная методика численной реализации модели Канхема – Хельфриха, рассматриваемой как проблема нелинейной оптимизации с ограничениями. Предлагаемый способ решения является развитием предложенного ранее в работе [Голочалова, Кулумбаев, 2019] для расчета стационарных форм «плоского» эритроцита в двумерном приближении.

2. Оптимизационная методика расчета

В модели Канхема-Хельфриха поверхностная плотность ε_B упругой энергии изгиба липидного бислоя представляется в виде [Canham, 1970; Helfrich, 1973]:

$$\varepsilon_B = \frac{1}{2}k_B(k_1 + k_2 - k_0)^2 + k_G k_1 k_2, \quad (1)$$

где k_1, k_2 – локальные главные кривизны; $k_1 + k_2$ – средняя кривизна; k_0 – спонтанная кривизна; k_B – постоянный модуль изгиба; k_G – модуль, ассоциированный с гауссовой кривизной $k_1 k_2$.

Поскольку интеграл по замкнутой поверхности от второго слагаемого в (1) не зависит от формы поверхности, то равновесная форма эритроцита минимизирует только часть E_B энергии изгиба:

$$E_B = \frac{1}{2}k_B \int_S (k_1 + k_2 - k_0)^2 ds \tag{2}$$

при заданных значениях площади S поверхности мембраны, составленных из элементов ds , и объема V , ограниченного мембраной.

Следует отметить, что исключительно геометрический характер этих ограничений обуславливают независимость формы от модуля k_B изгиба, значением которого определяется только абсолютная величина E_B упругой энергии ее минимизирующей формы.

Для осесимметричной замкнутой поверхности в цилиндрической системе координат (r, z) энергия (2) и ограничения на S и V записываются в виде:

$$E_B = \pi k_B \int_L (k_1 + k_2 - k_0)^2 r dl, \quad k_1 + k_2 = r^{-1}[rf'(1 + f'^2)^{-1/2}]', \tag{3}$$

$$S = 2\pi \int_L r dl, \quad V = 2\pi \int_L zr \vec{dl} \cdot \vec{e}_r. \tag{4}$$

Здесь \vec{dl} – векторный элемент длины образующей L с началом в точке с координатами r и z ; dl – модуль вектора \vec{dl} ; $z = f(r)$ – образующая равновесной формы эритроцита; \vec{e}_r – орт радиальной оси; штрих обозначает производную по радиальной координате r .

При рассмотрении задачи (3, 4) как условной нелинейной оптимизации далее необходимо выбрать способ задания образующей, которым конкретизируются вектор-аргумент целевой функции (3) и ограничений (4) на него.

В данной работе искомая образующая считается упругой кривой с началом и концом на оси z (радиальные координаты и начала и конца кривой фиксированы и равны нулю, а аксиальные – подлежат определению). В полуплоскости (r, z) кривая $f(r)$ аппроксимируется дискретным набором из N равноудаленных точек, координаты которых составляют вектор-аргумент целевой функции (3). Геометрически такая кусочно-линейная аппроксимация соответствует замене образующей на ломаную, составленную из звеньев одинаковой, но априори неопределенной длины (рис. 1).

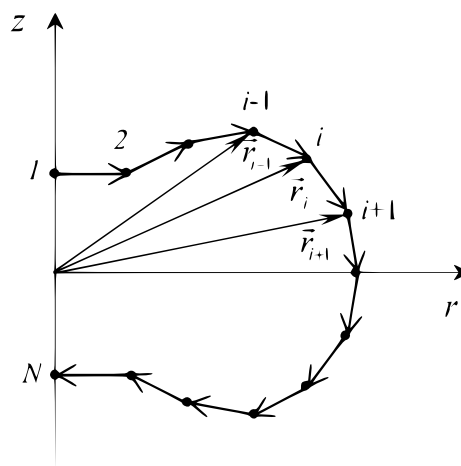


Рис. 1. Аппроксимация образующей формы эритроцита
 Fig. 1. Approximation of the generative form of the red blood cell



В терминах принятой аппроксимации образующей $f(r)$ кривизна k_1 вычисляется во внутренних вершинах ломаной исходя из «скоростного» смысла кривизны меридиана по формуле:

$$k_{1,i} = \text{sign}(\vec{e}_{i-1} \times \vec{e}_i) \frac{\arccos(\vec{e}_{i-1} \cdot \vec{e}_i)}{|\vec{r}_{i+1} - \vec{r}_i|},$$

где \vec{r}_i – радиус-вектор i -ой вершины; $\vec{e}_i = (\vec{r}_{i+1} - \vec{r}_i)/|\vec{r}_{i+1} - \vec{r}_i|$ – орт последующей вершины относительно предыдущей; i – индекс внутренней вершины.

Кривизна k_2 также вычисляется во внутренних вершинах ломаной через кривизну параллели, радиус r_i кривизны которой является проекцией главного радиуса кривизны $1/k_{2,i}$ параллели:

$$k_{2,i} = \frac{0.5(\vec{e}_i + \vec{e}_{i-1}) \cdot \vec{e}_z}{\vec{r}_i \cdot \vec{e}_r},$$

где \vec{e}_z – орт аксиальной оси.

Минимизация целевой функции (3) осуществляется с ограничениями равноудаленности вершин:

$$|\vec{r}_{i+1} - \vec{r}_i| - |\vec{r}_i - \vec{r}_{i-1}| = 0;$$

фиксированной площади поверхности, образованной вращением образующей вокруг аксиальной оси:

$$\sum_{i=1}^{N-1} 2\pi(\vec{r}_{i+1/2} \cdot \vec{e}_r) |\vec{r}_{i+1} - \vec{r}_i| - S = 0$$

и фиксированного объема, ограниченного этой поверхностью:

$$\sum_{i=1}^{N-1} (\vec{r}_{i+1/2} \cdot \vec{e}_z) 2\pi(\vec{r}_{i+1/2} \cdot \vec{e}_r) (\vec{r}_{i+1} - \vec{r}_i) \cdot \vec{e}_r - V = 0,$$

где $\vec{r}_{i+1/2}$ – радиус-вектор середины i -го звена ломаной.

Численное решение оптимизационной задачи осуществляется в Matlab с помощью функции `fmincon` (с выбором решающего алгоритма `interior point`) из Optimization Toolbox [MathWorks Inc.].

3. Результаты и обсуждение

Результаты расчетов сопоставляются с наблюдаемой равновесной формой эритроцита – результатами усреднения наблюдаемых геометрических форм нормальных эритроцитов, представленных в работе [Evans, Fung, 1972] для осесимметричного приближения формы в виде аппроксимации ее симметричной относительной радиальной оси образующей формулой:

$$f_e(r) = 0.5R_0[1 - (r/R)^2]^{1/2}[c_0 + c_1(r/R)^2 + c_2(r/R)^4]. \quad (5)$$

Здесь $c_0=0.21$; $c_1=2.00$; $c_2=-1.12$ – эмпирические константы усреднения измерений экспериментальных параметров пятидесяти нормальных эритроцитов с 20%-ным разбросом; $R_0 = 3.91$ мкм – радиус эритроцита с объемом $V = 94$ мкм³ и площадью поверхности $S = 134$ мкм².

В модели Канхема [Canham, 1970] в энергии (2) изгиба мембраны спонтанная кривизна отсутствует: $k_0 = 0$. Поэтому число N вершин ломаной является единственным параметром, значение которого априори не задано. Здесь и везде далее (во всех расчетах), принимается, что $N = 41$, так как в результате апостериорной оценки влияния путем уменьшения или увеличения этого числа вершин в два раза соответствующие изменения расчетной формы получаются малыми.

Рассчитанная равновесная форма эритроцита изображена на рис. 2 сплошной линией при $z > 0$. Видно, что имеет место только качественное соответствие теоретической формы экспериментальной – точечная линия на рис. 2. Наибольшее отклонение наблюдается в центре вогнутости, где толщины отличаются почти на 50%, что более чем вдвое превышает разброс экспериментальных параметров эритроцитов в группе усреднения в работе [Evans, Fung, 1972]. Аналогичный результат получается и при вариационной реализации модели Канхема (см., например, работу [Deuling, Helfrich, 1976]).

Оптимизационный подход позволяет осуществить и другой способ проверки соответствия принципа Канхема наблюдаемой форме эритроцита. Для этого образующая (5), в которой параметры c_0, c_1, c_2, R_0 считаются неизвестными, подставляется в формулы задачи (3, 4). Далее минимизируется целевая функция (3), вектор-аргумент которой составляют параметры c_0, c_1, c_2, R_0 с наложенными на них ограничениями (4), содержащими тот же набор неизвестных. В результате получаются параметры $c_0=0.28; c_1=1.45; c_2=-0.69; R_0=4.00$ мкм, которые заметно отличаются от набора эмпирических значений в формуле (5). Отметим, что соответствующая вычисленному набору значений параметров c_0, c_1, c_2, R_0 кривая (5) близка к ранее рассчитанной сплошной линии при $z > 0$ на рис. 2.

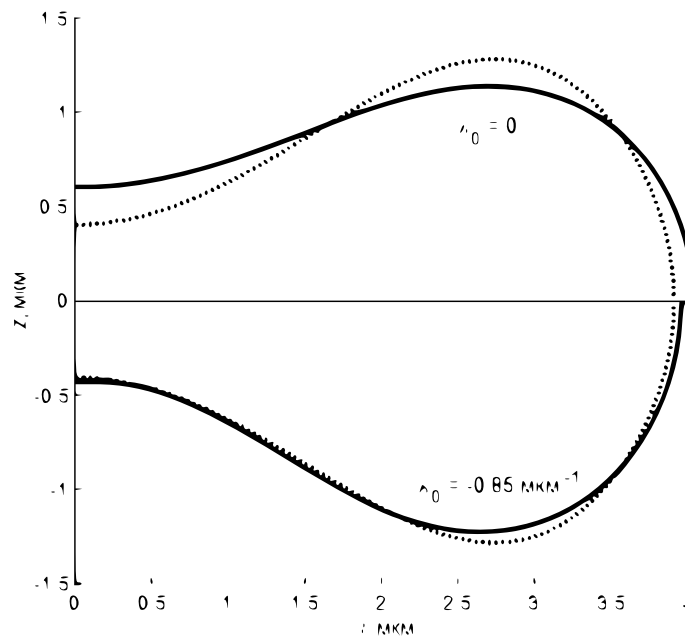


Рис. 2. Равновесная форма эритроцита: экспериментальная (точечная линия) по данным [Evans, Fung, 1972] и расчетные (сплошные линии) без учета (при $z > 0$) и с учетом (при $z < 0$) спонтанной кривизны

Fig. 2. The equilibrium form of the red blood cell: experimental (dotted line) according to [Evans, Fung, 1972] and calculated (solid lines) without (if $z > 0$) and with (if $z < 0$) spontaneous curvature

Таким образом, в исходной формулировке принцип Канхема в состоянии обеспечить только качественное описание наблюдаемой формы эритроцита, а для количественного – его следует изменить или модифицировать, например, как в работе [Helfrich, 1973; Deuling, Helfrich, 1976], введением спонтанной кривизны. Отметим, что вывод работы [Marchenko, Podolyak, 2015] о количественном описании теорией Канхема наблюдаемой двояковогнутой формы эритроцитов крови человека основан на сопоставлении с ограниченным набором экспериментальных данных только для четырех эритроцитов из работы [Ponder, 1930]. В модели липидного бислоя [Helfrich, 1973] в плотность энергии изгиба мембраны вводится так называемая спонтанная кривизна, которая, по сути, является концепцией свойства не подверженного внешнему воздействию искривленного бислоя находиться в состоянии механического равновесия. Считается, что равновесное искривление каждого монослоя обусловлено различием площадей поперечных сечений полярной и гидрофобной частей липидных молекул, составляющих монослой [Kooijman et al., 2005; Fuller et al., 2003]. Поэтому спонтанная кривизна монослоя определяется, в конечном счете, его липидным составом. В модели Хельфриха спонтанная кривизна принимается однородной по поверхности мембраны эритроцита. Однако априорное задание ее значения невозможно из-за отсутствия измерений спонтанной кривизны мембраны эритроцитов. Поэтому спонтанная кривизна фактически становится подгоночным параметром модели. Отметим также, что в работах [Svetina et al., 1985; Svetina, Žekš, 1989] показана идентичность влияния на форму эритроцита учета энергии, связанная с разностью площадей липидных слоев, и спонтанной кривизны Хельфриха. Результат решения оптимизационной задачи (3, 4) при $k = -0.85 \text{ мкм}^{-1}$ приведен на рис. 2 сплошной линией при $z < 0$. Видно, что учет спонтанной кривизны позволяет достичь на основе принципа минимума (2) энергии изгиба эритроцита количественного описания его экспериментально наблюдаемой формы. Отметим, что в работе [Deuling, Helfrich, 1976] за соответствующее значение спонтанной кривизны принимается близкое значение -0.74 мкм^{-1} . Однако, как отмечается в обзоре [Guckenberger, Gekle, 2017], до сих пор не достигнут консенсус относительно необходимости введения спонтанной кривизны для эритроцитов. Тем не менее модель Канхема – Хельфриха широко применяется и фактически стала базовой в соответствующих теоретических исследованиях по биофизике. «Работоспособность» предлагаемой оптимизационной методики проверяется расчетом различных стационарных осесимметричных форм эритроцитов. Вслед за работой [Deuling, Helfrich, 1976] для нахождения всех возможных форм эритроцитов энергия поверхности минимизируется при фиксированной площади S мембраны. Тогда соответствующие ей значения объема определяются формулой $V = v \frac{4}{3} \pi R_0^3$, где v – приведенный объем ($0 \leq v \leq 1$) – доля максимально возможного объема, ограниченного сферой с радиусом $R_0 = (\frac{S}{4\pi})^{1/2}$. Без учета спонтанной кривизны приведенный объем является единственным определяющим форму эритроцита параметром. На рис. 3 представлены рассчитанные формы эритроцитов при $v = 0.8; 0.6; 0.4$, которые согласовываются с расчетами других авторов в работах [Seifert et al., 1991; Lim et al., 2002].

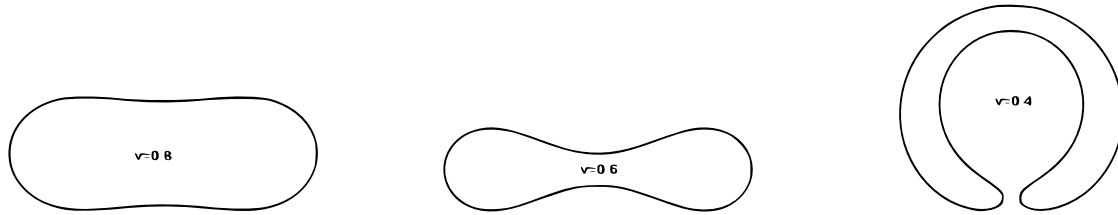


Рис. 3. Равновесные формы эритроцита в зависимости от величины приведенного объема v .
 Fig. 3. Equilibrium erythrocyte forms depending on the magnitude of the reduced volume v .

4. Заключение

В данной работе минимизация упругой энергии изгиба мембраны, рассматриваемой в приближении замкнутой геометрической поверхности, сводится к задаче условной нелинейной оптимизации для расчета равновесной осесимметричной формы эритроцита. Эта задача решается двумя способами. Первый использует аппроксимацию профиля нормального эритроцита аналитической функцией (5), параметры которой являются неизвестными и образуют вектор-аргумент упругой энергии изгиба мембраны. Второй основан на кусочно-линейном приближении образующей формы – ломаной с одинаковыми, но априори неопределенными звеньями. Аксиальные и радиальные координаты вершин ломаной составляют вектор-аргумент упругой энергии изгиба мембраны. В обоих случаях численная минимизация энергии изгиба проводится с учетом геометрических ограничений на площадь мембраны и объем эритроцита (условная нелинейная оптимизация) и осуществляется в Matlab.

Форма эритроцита рассчитывается для поверхностной плотности энергии в рамках теории Канхема – Хельфриха. Результаты расчетов показывают, что принцип Канхема дает только качественное описание наблюдаемой формы эритроцита. Количественное описание достигается в теории Хельфриха введением в плотность энергии спонтанной кривизны. Однако из-за отсутствия экспериментальных измерений спонтанная кривизна в модели Хельфриха является подгоночным параметром.

Список литературы

1. Атауллаханов Ф.И., Борсакова Д.В., Протасов Е.С. и др. 2018. Эритроцит: мешок с гемоглобином или живая, активная клетка? Вопросы гематологии/онкологии и иммунопатологии в педиатрии. 17(1): 108–116.
2. Голочалова А.В., Кулумбаев Э.Б. 2019. Оптимизационная модель стационарной формы эритроцита в двумерном приближении. Научные ведомости БелГУ. Серия Математика. Физика. 51(1): 135–144.
3. Canham P.B. 1970. The minimum energy of bending as a possible explanation of the biconcave shape of the human red blood cell. J. Theor. Biol. 26(1): 61–81.
4. Caro C.G., Pedley T.J., Schroter R.C., Seed W.A. 1978. The mechanics of the circulation. Oxford: Oxford University Press, 527.
5. Deuling H. J., Helfrich W. 1976. Red blood cell shapes as explained on the basis of curvature elasticity. Biophys. J. 16(8): 861–868.



6. Evans E., Fung Y.-C. 1972. Improved measurements of the erythrocyte geometry. *Microvascular Research*. 4(4): 335–347.
7. Fuller N., Benatti C.R., Rand R.P. 2003. Curvature and bending constants for phosphatidylserine-containing membranes. *Biophys. J.* 85(3): 1667–1674.
8. Guckenberger A., Gekle S. 2017. Theory and algorithms to compute Helfrich bending forces: A review. *Journal of Physics: Condensed Matter*. 29 (20), 203001.
9. Helfrich W. 1973. Elastic Properties of Lipid Bilayers: Theory and Possible Experiments. *Z. Naturforsch.* 28, 693–703.
10. Herman I.P. 2007. *Physics of the Human Body*. Springer – Verlag Berlin Heidelberg, 992.
11. Kooijman E.E., Chupin V., Fuller N.L., Kozlov M.M., de Kruijff B., Burger K.N., Rand P.R. 2005. Spontaneous curvature of phosphatidic acid and lysophosphatidic acid. *Biochemistry*. 44(6): 2097–2102.
12. Lim G.H.W., Wortis W., Mukhopadhyay R. 2002. Stomatocyte-Discocyte-Echinocyte Sequence of the Human Red Blood Cell: Evidence for the Bilayer-Couple Hypothesis from Membrane Mechanics. *PNAS*. 99(26): 16766–16769.
13. Marchenko V.I., Podolyak E.R. 2015. On the equilibrium shape of erythrocytes. *JETP*. 120(4): 751–752.
14. MathWorks Inc, \Matlab and optimization toolbox release 2017b." <https://www.mathworks.com/>, 2017.
15. Miao L., Seifert U., Wortis M., Dobreiner H.-G. 1994. Budding transitions of fluid-bilayer vesicles: the effect of area-difference elasticity. *Phys. Rev. E*. 49(6): 5389–5407.
16. Mukhopadhyay R., Lim G. H. W, Wortis M. 2002. Echinocyte Shapes: Bending, Stretching, and Shear Determine Spicule Shape and Spacing. *Biophys. J.* 82(4): 1756–1772.
17. Ponder E. 1930. The measurement of the diameter of erythrocytes. V. The Relation of the Diameter to the Thickness. *J. Exp. Physiol.* 20(1): 29–39.
18. Seifert U., Berndl K., Lipowsky R. 1991. Shape transformations of vesicles: Phase diagram for spontaneous-curvature and bilayer-coupling models. *Phys. Rev. A*. 44(4): 1182–1202.
19. Svetina S., Brumen M., Žekš B. 1985. Lipid bilayer elasticity and the bilayer couple interpretation of red cell shape transformations and lysis. *Stud. Biophys.* 110: 177–184.
20. Svetina S., Žekš B. 1989. Membrane bending energy and shape determination of phospholipid vesicles and red blood cells. *Eur. Biophys.J.* 17(2): 101–111.

References

1. Ataulakhanov F.I., Borsakova D.V., Protasov E.S. idr. 2018. Eritrotsit: meshok s gemoglobinomilizhivaya, aktivnayakletka? *Voprosygematologii/onkologiiimmunopatologii v pediatrii*. 17(1): 108–116.
2. Golochalova A.V., Kulumbaev E.B. 2019. Optimization model of the erythrocyte stationary shape in two-dimensional approximation. *Belgorod State University Scientific Bulletin Mathematics. Physics*. 51(1): 135–144.(in Russian)

3. Canham P.B. 1970. The minimum energy of bending as a possible explanation of the biconcave shape of the human red blood cell. *J. Theor. Biol.* 26(1): 61–81.
4. Caro C.G., Pedley T.J., Schroter R.C., Seed W.A. 1978. *The mechanics of the circulation.* Oxford: Oxford University Press, 527.
5. Deuling H. J., Helfrich W. 1976. Red blood cell shapes as explained on the basis of curvature elasticity. *Biophys. J.* 16(8): 861–868.
6. Evans E., Fung Y.-C. 1972. Improved measurements of the erythrocyte geometry. *Microvascular Research.* 4(4): 335–347.
7. Fuller N., Benatti C.R., Rand R.P. 2003. Curvature and bending constants for phosphatidylserine-containing membranes. *Biophys. J.* 85(3): 1667–1674.
8. Guckenberger A., Gekle S. 2017. Theory and algorithms to compute Helfrich bending forces: A review. *Journal of Physics: Condensed Matter.* 29 (20), 203001.
9. Helfrich W. 1973. Elastic Properties of Lipid Bilayers: Theory and Possible Experiments. *Z. Naturforsch.* 28, 693–703.
10. Herman I.P. 2007. *Physics of the Human Body.* Springer – Verlag Berlin Heidelberg, 992.
11. Kooijman E.E., Chupin V., Fuller N.L., Kozlov M.M., de Kruijff B., Burger K.N., Rand P.R. 2005. Spontaneous curvature of phosphatidic acid and lysophosphatidic acid. *Biochemistry.* 44(6): 2097–2102.
12. Lim G.H.W., Wortis W., Mukhopadhyay R. 2002. Stomatocyte-Discocyte-Echinocyte Sequence of the Human Red Blood Cell: Evidence for the Bilayer-Couple Hypothesis from Membrane Mechanics. *PNAS.* 99(26): 16766–16769.
13. Marchenko V.I., Podolyak E.R. 2015. On the equilibrium shape of erythrocytes. *JETP.* 120(4): 751–752.
14. MathWorks Inc, \Matlab and optimization toolbox release 2017b." <https://www.mathworks.com/>, 2017.
15. Miao L., Seifert U., Wortis M., Dobereiner H.-G. 1994. Budding transitions of fluid-bilayer vesicles: the effect of area-difference elasticity. *Phys. Rev. E.* 49(6): 5389–5407.
16. Mukhopadhyay R., Lim G. H. W, Wortis M. 2002. Echinocyte Shapes: Bending, Stretching, and Shear Determine Spicule Shape and Spacing. *Biophys. J.* 82(4): 1756–1772.
17. Ponder E. 1930. The measurement of the diameter of erythrocytes. V. The Relation of the Diameter to the Thickness. *J. Exp. Physiol.* 20(1): 29–39.
18. Seifert U., Berndl K., Lipowsky R. 1991. Shape transformations of vesicles: Phase diagram for spontaneous-curvature and bilayer-coupling models. *Phys. Rev. A.* 44(4): 1182–1202.
19. Svetina S., Brumen M., Žekš B. 1985. Lipid bilayer elasticity and the bilayer couple interpretation of red cell shape transformations and lysis. *Stud. Biophys.* 110: 177–184.
20. Svetina S., Žekš B. 1989. Membrane bending energy and shape determination of phospholipid vesicles and red blood cells. *Eur. Biophys. J.* 17(2): 101–111.



Ссылка для цитирования статьи
For citation

Голочалова А.В., Кулумбаев Э.Б. 2019. Оптимизационная методика для расчета равновесной осесимметричной формы эритроцита. Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика. 51 (4): 555–564. DOI 10.18413/2075-4639-2019-51-4-555-564.

Golochalova A.V., Kulumbaev E.B. 2019. Optimization method for the calculation of the equilibrium axisymmetric shape of erythrocyte Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics. Physics. 51 (4): 555–564 (in Russian). DOI 10.18413/2075-4639-2019-51-4-555-564.

УДК 533.2, 51-72

DOI 10.18413/2075-4639-2019-51-4-565-576

**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОТРАЖЕНИЯ УДАРНОЙ ВОЛНЫ
В ГАЗОВОЙ ВЗВЕСИ ДЛЯ РАЗЛИЧНЫХ ПАРАМЕТРОВ ДИСПЕРСНОЙ
КОМПОНЕНТЫ ЗАПЫЛЕННОЙ СРЕДЫ**

**NUMERICAL MODELING OF REFLECTION OF A SHOCK WAVE
IN A GAS SUSPENSION FOR VARIOUS PARAMETERS OF A DISPERSED
COMPONENT OF A DUSTED MEDIUM**

Д.А. Тукмаков

D.A. Tukmakov

ИММ – обособленное структурное подразделение ФИЦ КазНЦ РАН,
ул. Лобачевского, д. 2/31, Казань, 420111, Россия

IME – Department of FIC KazanSC of RAS,
2/31 Lobachevsky St, Kazan, 420111, Russia

E-mail: tukmakovDA@imm.knc.ru

Аннотация

В данной работе численно моделируется процесс отражения прямого скачка уплотнения от твердой поверхности. Математическая модель учитывала вязкость, сжимаемость и теплопроводность несущей среды, межкомпонентное силовое взаимодействие, включавшее в себя силу Стокса, динамическую силу Архимеда, силу присоединенных масс; также математическая модель учитывала межкомпонентный теплообмен. Численное решение осуществлялось при помощи явного конечно-разностного метода с последующим применением схемы нелинейной коррекции численного решения. Результаты расчетов параметров отраженной ударной волны в запыленной среде сопоставляются с численным решением для однородного вязкого газа и аналитическим решением, известным из литературы. В работе выявлены закономерности влияния параметров дисперсной фазы на интенсивность отраженной ударной волны.

Abstract

In this paper, the process of reflection of a direct shock wave from a solid surface numerically modeled. The system of equations of dynamics of both the carrier medium and the dispersed component included the continuity equation, the momentum conservation equation, and the energy conservation equation. The mathematical model took into account the viscosity, compressibility and thermal conductivity of the carrier medium, the interaction force between component, which includes the Stokes force, the dynamic force of Archimedes, the strength of the attached masses; also the mathematical model took into account inter-component heat transfer. The numerical solution carried out using an explicit finite-difference method, followed by the application of a nonlinear correction scheme for the numerical solution. In the problem under study, a shock wave propagates from a pure gas and moves through a dusty medium with subsequent reflection from a solid surface. The calculation results of the parameters of the reflected shock wave in a dusty medium compared with a numerical solution for a homogeneous viscous gas and an analytical solution known from the literature. The regularities of the effect of the parameters of the dispersed phase on the intensity of a courageous shock wave revealed.

Ключевые слова: математическое моделирование физических процессов, многофазные среды, уравнение Навье-Стокса, ударные волны.

Keywords: mathematical modeling of physical processes, multi-phase media, Navier-Stokes equation, shock waves.

1. Введение

Многие процессы, протекающие в естественной природе и технике, связаны с течениями неоднородных сред [Нигматулин 1988, Кутушев 2003, Федоров и др. 2003]. Экспериментальное исследование течений неоднородных сред во многих случаях затруднено, поэтому важной задачей является создание математических моделей динамики таких сред [Губайдуллин, Тукмаков 2014; Садин 2016; Федоров и др. 2016; Арсланова и др. 2016; Нигматулин и др. 2016; Тукмаков, Тукмаков 2018; Кашапов и др. 2018; Kashapov et al. 2018, Пахомов, Терехов 2018; Azapov, Osiptsov 2017; Вараксин 2014]. Неоднородные среды могут быть как гомогенными смесями, компоненты которых имеют одинаковое агрегатное состояние, так и гетерогенными смесями, в которых присутствуют компоненты с различными агрегатными состояниями [Teklaya and all 2015; Saikat, Meheboob 2017; Zhuoqing, Jesse 2019; Imran and all 2018; Mehrabadi and all 2015; Zhengbiao and all 2017; Garcia-Trinanes and all 2018; Lopez and all 2016]. Моделирование течений неоднородных сред может быть осуществлено с помощью «равновесного» подхода – описание течения неоднородной среды как однородной жидкости или газа с введением коэффициентов учитывающих физическую неоднородность среды [Нигматулин 1987]. Или же с помощью «континуального» подхода, в котором для каждой из компонент смеси решается полная система уравнений динамики сплошной среды [Нигматулин 1987; Кутушев 2003; Федоров и др. 2015]. Также при исследовании динамики неоднородных сред основной задачей является наиболее полное описание взаимодействия компонент смеси, которое может включать в себя как обмен импульсом между компонентами смеси, так и межкомпонентное тепловое взаимодействие [Нигматулин 1987; Кутушев 2003]. В данной работе динамика газовой взвеси твердых частиц запыленной среды описывается на основе двухскоростной, двухтемпературной модели, учитывающей межкомпонентный теплообмен, а также межкомпонентное силовое взаимодействие, включающее в себя силу Стокса, динамическую силу Архимеда и силу присоединенных масс [Нигматулин 1987; Кутушев 2003].

2. Методы исследования

Движение несущей среды описывается одномерной системой уравнений Навье-Стокса для сжимаемого теплопроводного газа с учетом межфазного силового взаимодействия и теплообмена [Кутушев 2003, Нигматулин и др. 2016]:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_1 u_1)}{\partial x} = 0, \quad (6)$$

$$\frac{\partial(\rho_1 u_1)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_1 u_1^2 + p - \tau) = F + \alpha \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial e_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}([e_1 + p - \tau]u_1 - \lambda \frac{\partial T_1}{\partial x}) = -Q - |F|(u_1 - u_2) + \alpha \left(\frac{\partial(pu_1)}{\partial x} \right), \quad (8)$$

$$p = (\gamma - 1)(e_1 - \rho(u_1^2)/2),$$

$$e_1 = \rho_1(I + (u_1^2)/2), \quad \tau = \frac{4}{3}\mu \frac{\partial u_1}{\partial x}.$$

Динамика дисперсной фазы описывается уравнением сохранения «средней плотности» – произведения физической плотности материала частиц и объемного содержания дисперсной



фазы, изменяющегося на различных участках физической области вместе с движением твердых частиц; уравнениями сохранения импульса и уравнением сохранения энергии, записанными с учетом теплообмена, обмена импульсом с несущей фазой:

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \frac{\partial \rho_2 u_2}{\partial x} = 0, \tag{9}$$

$$\frac{\partial(\rho_2 u_2)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_2 u_2^2) = -F - \alpha \frac{\partial p}{\partial x}, \tag{10}$$

$$\frac{\partial e_2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(e_2 u_2) = Nu_{12} \frac{6\alpha}{(2r)^2} \lambda(T - T_2), \tag{11}$$

$$\rho_2 = \alpha \rho_{20}, e_1 = \rho_2 C_{p2} T_2.$$

Здесь p, ρ_1, u_1 – давление, плотность, скорость несущей среды; T_1, e_1 – температура и полная энергия газа; ρ_2, T_2, e_2, u_2 – средняя плотность, температура, внутренняя энергия, скорость дисперсной фазы. Температура несущей среды находится из уравнения $(\gamma - 1)(e/\rho - 0.5u^2)/R$, где R – газовая постоянная несущей фазы. Силовое взаимодействие несущей и дисперсной фазы учитывает силу Стокса, динамическую силу Архимеда и силу присоединенных масс. Математическая модель предполагает монодисперсный состав твердой фазы газозвеси – все частицы имеют одинаковый размер и одинаковые физические свойства – плотность и теплоемкость материала. Внутренняя энергия взвешенной в газе дисперсной фазы определяется как $e_1 = \rho_1 C_p T_2$, где C_p – удельная теплоемкость единицы массы вещества из которого состоят частицы. В уравнение энергии для несущей фазы входит коэффициент теплопроводности газа, коэффициент теплообмена α на поверхности частица- несущая среда и тепловой поток за счет теплообмена между газом и частицей $Q = \alpha^T 4\pi r^2 (T_1 - T_2) n = 6\alpha Nu_{12} \lambda (T_1 - T_2) / (2r)^2$. В данной работе при описании межфазного силового взаимодействия $-F$, учитывалась сила аэродинамического сопротивления, динамическая сила Архимеда, а также сила присоединенных масс [Нигматулин 1987; Кутушев 2003]:

$$F = \frac{3\alpha}{8r} C_{d2} \rho_1 |u_1 - u_2| (u_1 - u_2) + \alpha \rho_1 \left(\frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) + 0.5\alpha \rho_1 \left(\frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{\partial u_2}{\partial t} - u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} \right).$$

Параметры межфазного взаимодействия описаны в работе [Кутушев 2003]:

$$C_{d2} = C_{d2}^0 \phi(M_{12}) \varphi(\alpha), \quad C_{d2}^0 = \frac{24}{Re_{12}} + \frac{4}{Re_{12}^{0.5}} + 0.4,$$

$$\phi(M_{12}) = 1 + \exp\left(-\frac{0.427}{M_{12}^{0.63}}\right), \quad \varphi(\alpha) = (1 - \alpha)^{-2.5},$$

$$Re = \rho_1 u_1 D (\mu)^{-1}, \quad Re_{12} = r \rho_1 |u_1 - u_2| (\mu)^{-1}, \quad M_{12} = |u_1 - u_2| (c)^{-1}, \quad Pr_1 = c_{p1} \mu (\lambda)^{-1},$$

$$Nu_{12} = 2 \exp\left(-M_{12}\right) + 0,459 Re_{12}^{0.55} Pr_1^{0.33}, \quad 0 < M_{12} < 2, \quad 0 < Re < 2 * 10^5.$$

Здесь D – характерный размер системы.

Система уравнений математической модели решалась явным методом Мак-Кормака второго порядка [Fletcher 1988] с последующим применением схемы нелинейной коррекции решения [Музафаров, Утюжников 1993].

Система уравнений (1)–(6) может быть записана в матричном виде:



$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} = H; \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_1 u_1 \\ \rho_2 u_2 \\ e_1 \\ e_2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \rho_1 u_1 \\ \rho_2 u_2 \\ \rho_1 u_1^2 + p - \tau \\ \rho_2 u_2^2 \\ (e_1 + p - \tau)u_1 - \lambda \frac{\partial T_1}{\partial x} \\ e_2 u_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -F + \alpha \frac{\partial p}{\partial x} \\ F - \alpha \frac{\partial p}{\partial x} \\ -Q - |F|(u_1 - u_2) + \alpha \frac{\partial p u_1}{\partial x} \\ Q \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Алгоритм явного конечно-разностного метода Мак-Кормака для нелинейной системы (7) может быть записан в виде:

$$q_j^* = q_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (E_{j+1}^n - E_j^n) + \Delta t H_j^n,$$

$$q_j^{n+1} = 0.5(q_j^* + q_j^n) - 0.5 \frac{\Delta t}{\Delta x} (E_j^* - E_{j-1}^*) + 0.5 \Delta t H_j^*.$$

Монотонность решения достигалась с помощью применения схемы нелинейной коррекции вдоль пространственных направлений x и y по индексам j, k соответственно к компонентам вектора независимых переменных \mathbf{q} , $\mathbf{q} = (\rho_1, \rho_2, \rho_1 u_1, \rho_2 u_2, e_1, e_2)$. Пусть $Z_{j,k}^n$ – произвольная независимая функция на n -ом временном слое в узле j, k . Тогда алгоритм коррекции имел бы следующий вид:

$$(13) \quad Z_{j,k}^{n*} = Z_{j,k}^n + \kappa (\delta Z_{j+1/2,k}^n - \delta Z_{j-1/2,k}^n),$$

где $Z_{j,k}^{n*}$ – скорректированная функция. Данный алгоритм выполняется в случае когда $(\delta Z_{j-1/2,k}^n \delta Z_{j+1/2,k}^n) < 0$ или $(\delta Z_{j+1/2,k}^n \delta Z_{j+3/2,k}^n) < 0$. Здесь используются обозначения

$$\delta Z_{j-1/2,k}^n = Z_j^n - Z_{j-1,k}^n, \delta Z_{j+1/2,k}^n = Z_{j+1,k}^n - Z_{j,k}^n, \delta Z_{j+3/2,k}^n = Z_{j+2,k}^n - Z_{j+1,k}^n,$$

где κ – коэффициент коррекции.

На границах расчетной области задавались однородные граничные условия первого рода для скорости и однородные граничные условия второго рода для остальных динамических функций [Кутушев 2003]:

$$\begin{aligned} u_1(t, N) = 0, \quad u_2(t, N) = 0, \\ \rho_1(t, N) = \rho_1(t, N - 1), \quad \rho_2(t, N) = \rho_2(t, N - 1), \\ e_1(t, N) = e_1(t, N - 1), \quad e_2(t, N) = e_2(t, N - 1), \\ u_1(t, 1) = 0, \quad u_2(t, 1) = 0, \\ \rho_1(t, 1) = \rho_1(t, 2), \quad \rho_2(t, 1) = \rho_2(t, 2), \\ e_1(t, 1) = e_1(t, 2), \quad e_2(t, 1) = e_2(t, 2). \end{aligned}$$

Использованная в работе математическая модель тестировалась сопоставлением результатов моделирования с результатами известных из литературы численных расчетов [Губайдуллин, Тукмаков 2014], экспериментальными результатами [Нигматуллин и др. 2016] и аналитическими решениями [Губайдуллин, Тукмаков 2014].

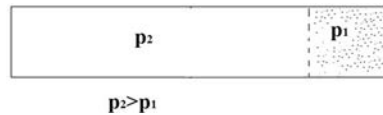


Рис. 1: Схематичное изображение ударной трубы с запыленной камерой низкого давления. Fig. 1 Schematic illustration of a shock tube with a dusty low-pressure chamber.

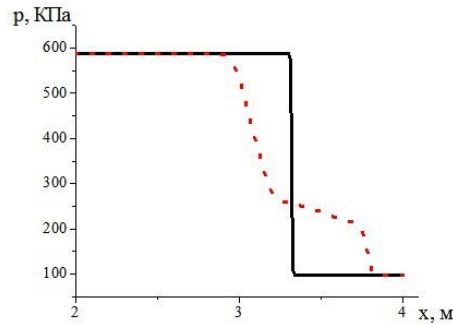


Рис. 2: Пространственное распределение давления в ударной трубе для различных моментов времени. Fig. 2 The spatial distribution of pressure in the shock tube for various points in time.

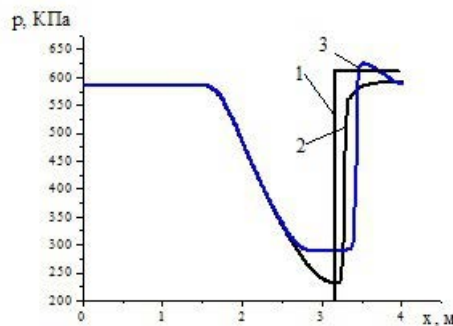


Рис. 3: Пространственное распределение давления в отраженной ударной волне кривая 1-аналитическое решение, кривая 2 - численное решение для вязкого однородного газа, кривая 3-численное решение для газозвеси с размером частиц $d = 2 \text{ мкм}$. Fig. 3 The spatial distribution of pressure in the reflected shock wave curve 1 is an analytical solution, curve 2 is a numerical solution for a viscous homogeneous gas, curve 3 is a numerical solution for a gas suspension with a particle size of $d=2 \text{ мкм}$.

3. Результаты расчетов

В статье моделировалось распространение прямого скачка уплотнения из чистого газа в газозвесь, в ударной трубе. Рисунок 1 – схематичное изображение ударной трубы, камера высокого давления, которая заполнена чистым газом, а камера низкого давления содержит запыленную среду. Давление в левой и правой частях ударной трубы составляло соответственно $p_2=588 \text{ КПа}$ и $p_1 =98 \text{ КПа}$. После прохождения запыленной среды ударная волна взаимодействовала с жесткой поверхностью стенки и отражалась. На рис. 2 представлено распределение давления в начальный момент времени и в момент времени $t= 0.9 \text{ мс}$, можно наблюдать, как

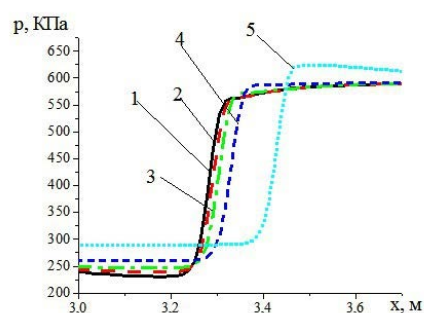


Рис. 4: Пространственное распределение давления- в момент времени $t=2.2$ мс при отражении ударной волны для различных объемных содержаний дисперсной фазы. Fig. 4 Spatial distribution of pressure - at time $t = 2.2$ ms with reflection of the shock wave for various volume contents of the dispersed phase

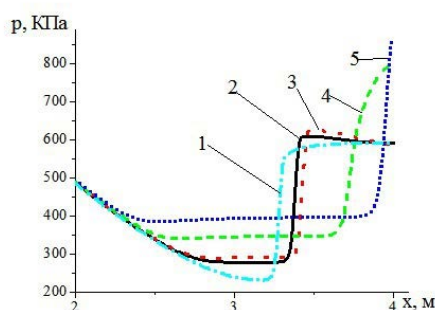


Рис. 5: Пространственное распределение давления- в отраженной ударной волне в момент времени $t=2$ мс для различных плотностей вещества дисперсной фазы. Fig. 5 The spatial distribution of pressure is in the reflected shock wave at time $t = 2$ ms for various densities of the dispersed phase material.

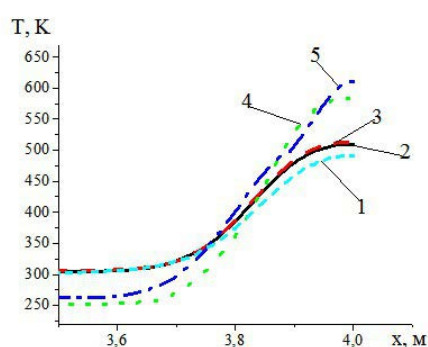


Рис. 6: Пространственное распределение температуры в отраженной ударной волне в момент времени $t=2$ мс для различных плотностей вещества дисперсной фазы. Fig. 6 The spatial temperature distribution in the reflected shock wave at time $t = 2$ ms for various densities of the dispersed phase substance.

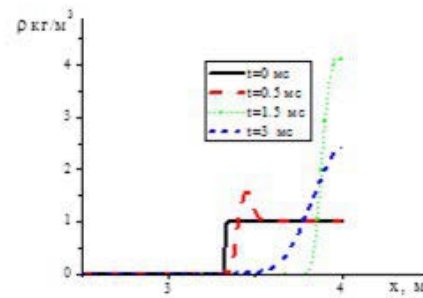


Рис. 7: Пространственное распределение «средней плотности» дисперсной фазы состоящей из кварца в различные моменты времени. Fig. 7 Spatial distribution of the "average density" of the dispersed phase consisting of quartz at various points in time.

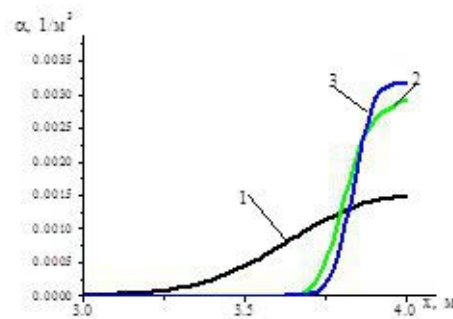


Рис. 8: Пространственное распределение объемного содержания дисперсной фазы монодисперсной газозвеси состоящей из различных веществ: кривая 1 -резина, кривая 2- кварц, кривая 3- железо. Fig. 8 Spatial distribution of the volume content of the dispersed phase of a mono-disperse gas suspension consisting of various substances: curve 1 is rubber, curve 2 is quartz, curve 3 is iron. .

в процессе продвижения ударной волны формируется волна сжатия, движущаяся в камеру низкого давления, и волна разряжения, распространяющаяся в камеру высокого давления. Из рисунка 3 следует, что в запыленной среде, давление в отраженной волне имеет большее значение, чем в численном решении для вязкого газа и в аналитическом решении для невязкого газа [Овсянников 2003]. Данная закономерность связана с тем, что в процессе движения ударной волны по запыленной среде за счет взаимодействия газа и дисперсной компоненты происходит замедление движения газа и переход кинетической энергии несущей среды в потенциальную, что приводит к росту давления газа [Кутушев 2003]. На рис.4 отображены результаты расчетов давления в отраженной ударной волне в вязком газе и в газозвезях с различными объемными содержаниями дисперсной фазы: 1 – численное решение для однородного газа, 2 – численное решение для газозвеси с объемным содержанием дисперсной фазы $\alpha = 0.0001$, 3 – численное решение для газозвеси с объемным содержанием дисперсной фазы $\alpha = 0.0002$, 4 – численное решение для газозвеси с объемным содержанием дисперсной фазы $\alpha = 0.0004$, 5 – численное решение для газозвеси с объемным содержанием дисперсной фазы $\alpha = 0.001$. По мере уменьшения начального объемного содержания твердой компоненты, отличия в давлении и скорости распространения между отраженными ударными волнами в чистом газе и запыленной среде,

уменьшаются. Рассмотрим влияние плотности материала частиц на давление (см. рис. 5) и температуру газа (рис. 6) в отраженной ударной волне.

На рис. 5 и рис. 6 отображены результаты численных расчетов: кривая 1 – численное решение для однородного газа, кривая 2 – численное решение для газозвеси с дисперсной фазой состоящей из бериллия ($\rho = 1850 \text{ кг/м}^3$), кривая 3 – численное решение для газозвеси с дисперсной фазой состоящей из кварца ($\rho = 2500 \text{ кг/м}^3$), кривая 4 – численное решение для газозвеси с дисперсной фазой состоящей из железа ($\rho = 7850 \text{ кг/м}^3$), кривая 5 – численное решение для газозвеси с дисперсной фазой состоящей из вольфрама ($\rho = 19250 \text{ кг/м}^3$). В газозвесах, чья дисперсная фаза состоит из более плотных веществ, давление и температура газа в отраженной ударной волне выше, скорость движения отраженной ударной волны меньше. В процессе движения ударной волны из чистого газа в газозвесь происходит формирование области, повышенной концентрации частиц дисперсной фазы [Кутушев 2003; Федоров и др. 2015], при движении ударной волны к правой стенке канала, концентрация частиц достигает своего наибольшего значения непосредственно вблизи поверхности, от которой происходит отражение волны. После отражения ударной волны от поверхности, дисперсная фаза движется сонаправлено потоку газа – от стенки в направлении камеры низкого давления, вследствие чего по мере движения отраженной волны происходит уменьшение концентрации частиц вблизи поверхности, от которой происходит отражение ударной волны (рис. 7). Численные расчеты для одинакового объемного содержания дисперсной фазы, одинакового размера дисперсных частиц и различных физических плотностей материала показывают, что на момент формирования отраженной ударной волны, процесс массопереноса частиц дисперсной фазы в обратном направлении в меньшей степени влияет на область повышенной концентрации частиц для газозвесей с более плотными материалами дисперсной фазы -рис.8. Таким образом, в газозвесах с более плотным материалом дисперсных включений, наблюдается большее объемное содержание твердой фазы вблизи поверхности, от которой отражается ударная волна. Наличие большей концентрации частиц твердой фазы, приводит к большей интенсивности межфазного взаимодействия, замедлению движения несущей среды и переходу кинетической энергии газа в потенциальную энергию, то есть росту давления и температуры в отраженной ударной волне.

4. Заключение

Анализ результатов численных расчетов показал, что в запыленной среде отраженная от твердой поверхности ударная волна имеет большую интенсивность давления и меньшую скорость распространения, одновременно с этим было выявлено, что увеличение плотности материала дисперсных включений приводит к увеличению давления и температуры в отраженной ударной волне. Использование математической модели гетерогенной смеси позволило определить, что закономерности, выявленные в динамике газозвеси, зависят от концентрации дисперсной фазы и связаны с межкомпонентным взаимодействием.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ Грант N 19-01-00442.

Список литературы

1. Арсланова С.Н., Тукмаков А.Л., Тонконог В.Г., 2016. Волновая коагуляция полидисперсной газозвеси в технологии газификации и криостатирования сжиженного природного газа. Акустический журнал. 62 (1): 125–131.
2. Вараксин А.Ю. 2014. Кластеризация частиц в турбулентных и вихревых двухфазных потоках. Теплофизика высоких температур. 52(5): 777–796.

3. Губайдуллин Д.А., Тукмаков Д.А. 2014. Исследование динамики двухкомпонентного газа с пространственно разделенными в начальный момент компонентами. Известия вузов. Проблемы энергетики, (3-4) : 38–43.
4. Губайдуллин Д.А., Тукмаков Д.А. 2014. Численное исследование эволюции ударной волны в газозвеси с учетом неравномерного распределения частиц. Математическое моделирование, 26(10): 109–119.
5. Кутушев А.Г. 2003. Математическое моделирование волновых процессов в аэродисперсных и порошкообразных средах. СПб.: Недра, 284.
6. Музафаров И.Ф., Утюжников С.В. 1993. Применение компактных разностных схем к исследованию нестационарных течений сжимаемого газа. Математическое моделирование, 5(3):74–83.
7. Нигматулин Р.И. 1987. Динамика многофазных сред. Ч.1 М.:Наука, 464.
8. Нигматулин Р.И., Губайдуллин Д.А., Тукмаков Д.А. 2016. Ударно-волновой разлет газозвесей. Доклады академии наук, 466(4): 418–421.
9. Овсянников Л. В. 2003. Лекции по основам газовой динамики. Москва: Издательство Института компьютерных исследований, 336.
10. Пахомов М.А., Терехов В.И. 2018. Влияние испарения капель на структуру течения и теплообмен в ограниченном закрученном газокапельном потоке за его внезапным расширением. Теплофизика и аэромеханика, 6:865–875.
11. Садин Д.В. 2016. TVD-схема для жестких задач волновой динамики гетерогенных сред негиперболического неконсервативного типа. Журнал вычислительной математики и математической физики, 56(12): 2098–2109.
12. Тукмаков А.Л., Тукмаков Д.А. 2018. Генерация акустического возмущения движущейся заряженной газозвесью. Инженерно-физический журнал, 91 (5):1207–1203.
13. Тукмаков А.Л., Кашапов Н.Ф., Тукмаков Д.А., Фазлыяхматов М.Г. 2018. Процесс осаждения заряженной полидисперсной газозвеси на поверхность пластины в электрическом поле. Теплофизика высоких температур, 56(4):498–502.
14. Федоров А.В., Фомин В.М., Хмель Т.А. 2015. Волновые процессы в газозвесах частиц металлов. Новосибирск, 301.
15. Федоров А.В., Михайлов А.Л., Финюшин С.А., Калашников Д.А., Чудаков Е.А., Бутусов Е.И., Гнутов И.С. 2016. Регистрация параметров множественного откола и внутренней структуры облака частиц при ударноволновом нагружении металлов. Журнал экспериментальной и теоретической физики, 149(4): 792–795.
16. Azanov G.M., Osiptsov A.N. 2017. The efficiency of one method of machineless gasdynamic temperature stratification in a gas flow. International Journal of Heat and Mass Transfer, 106:1125–1133.
17. Imran M., Khan H., Joardder M. , Kumar C., Karim M. 2018. Multiphase porous media modelling: A novel approach to predicting food processing performance. Critical Reviews in Food Science and Nutrition 58(4):528–546.

18. Fletcher C. 1988. *Computation Techniques for Fluid Dynamics*, Berlin: Springer-Verlang, 502.
19. Garc?a-Tri?anes P., Seville J., Ansart R., Benoit H., Leadbeater T., Parker D. 2018. Particle motion and heat transfer in an upward-flowing dense particle suspension: Application in solar receivers *Chemical Engineering Science*, 177:313–322.
20. Lopez I., Benoit H., Gauthier D., Sans J., Guillot E., Mazza G., Flamanta G. 2016. On-sun operation of a 150 kWth pilot solar receiver using dense particle suspension as heat transfer fluid *Solar Energy*, 137:463–476.
21. Lopez I., Benoit H., Gauthier D., Sans J., Guillot E., Mazza G., Flamanta G. 2016. On-sun operation of a 150 kWth pilot solar receiver using dense particle suspension as heat transfer fluid *Solar Energy*, 137:463–476.
22. Mehrabadi M., Tenneti S., Garg R., Subramaniam S. 2015. Pseudo-turbulent gas-phase velocity fluctuations in homogeneous gas–solid flow: fixed particle assemblies and freely evolving suspensions. *Journal of Fluid Mechanics*, 770:210–246.
23. Teklaya A., Chungen Y., Lasse R., Kohler L. 2015. Experimental and modeling study of flash calcination of kaolinite rich clay particles in a gas suspension calciner. *Applied Clay Science*, 103: 10–1.
24. Tukmakov A.L., Kashapov N.F., Tukmakov D.A., Fazlyyakhmatov M.G. 2018. Numerical modeling of the powder materials spraying. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1757-899X/412/1/012076>.
Tukmakov A.L., Kashapov N.F., Tukmakov D.A., Fazlyyakhmatov M.G. 2018. Numerical modeling of the powder materials spraying. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1757-899X/412/1/012076>.
25. Saikat S., Meheboob A. 2017. Revisiting ignited–quenched transition and the non-Newtonian rheology of a sheared dilute gas–solid suspension. *Journal of Fluid Mechanics*, 833:206–246.
26. Zhengbiao P., Behdad M., Elham D. 2017. Suspension stability of slurry Taylor flow: A theoretical analysis. *Chemical Engineering Science*, 174: 459–471.
27. Zhuoqing A. Jesse Z. 2019. Correlating the apparent viscosity with gas-solid suspension flow in straight pipelines. *Powder Technology*, 345: 346–351.

References

1. Arslanova S.N., Tonkonog V.G., Tukmakov A.L. 2016. Wave coagulation of a polydisperse gas suspension in the technology of gasification and Cryostatting of liquefied natural gas. *Acoustical Physics*. 62(1): 125–131.
2. Varaksin A.Y. 2014 Clusterization of particles in turbulent and vortex two-phase flows. *High Temperature*, 52(5):752–769.
3. Gubaidullin D.A., Tukmakov D.A. 2014. A study of the dynamics of a two-component gas with components spatially separated at the initial moment. *News of higher educational institutions. energy issues*, (3-4): 38–43. (in Russian)
4. Gubajdulli D.A., Tukmakov D.A. 2015. Numerical investigation of the evolution of a shock wave in a gas suspension with consideration for the nonuniform distribution of the particles. *Mathematical Models and Computer Simulations*, 7(3): 246–253.

5. Kutushev A.G. 2003. Matematicheskoe modelirovanie volnovykh processov v aerodispersnyh i poroshkoobraznyh sredah.SPb.: Nedra, 284.
6. Muzafarov I.F., Utyuzhnikov S.V. 1993. Application of compact difference schemes to the study of unsteady flows of a compressible gas. *Mathematical Modeling*, 5 (3): 74-83. (in Russian)
7. Nigmatulin R.I. 1987. *Dinamika mnogofaznyh sred Ch.1* M.:Nauka, 464.
8. Nigmatulin R.I., Gubaidullin D.A., Tukmakov D.A. 2016. Shock Wave Dispersion of Gas-Particle Mixtures. *Doklady Physics*, 61(2): 70–73.
9. Ovsyannikov L. V. 2003. *Lekcii po osnovam gazovoj dinamiki* Moskva: Izdatel'stvo Instituta komp'yuternykh issledovaniy, 336.
10. Pakhomov M.A., Terekhov V.I. 2018. Effect of droplet evaporation on the flow structure and heat and mass transfer in a confined swirling gas-droplet flow downstream of a tube sudden expansion. *Thermophysics and Aeromechanics*:25(6): 833–843.
11. Sadin D.V. 2016. TVD scheme for stiff problems of wave dynamics of heterogeneous media of nonhyperbolic nonconservative type. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 56(12):2068–2078.
12. Tukmakov A.L., Tukmakov D.A. 2018. Generation of Acoustic Disturbances by a Moving Charged Gas Suspension. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 91(5):1141–1147
13. Tukmakov A.L., Kashapov N.F., Tukmakov D.A., Fazlyyyakhmatov M.G. 2018. Process of the Deposition of Charged Polydisperse Gas Suspension on the Plate Surface in an Electrical Field. *High Temperature*, 56 (4):481–485.
14. Fedorov A.V., Fomin V.M., Hmel T.A. 2015. *Volnovye processy v gazovzvesyah chastic metallov*. Novosibirsk, 301.
15. Fedorov A.V., Mikhailov A.L., Finyushin S.A., Kalashnikov D.A., Chudakov E.A., Butusov E.I., Gnutov I.S. 2016. Detection of the multiple spallation parameters and the internal structure of a particle cloud during shock-wave loading of a metal. *Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 122(4):685–688.
16. Azanov G.M., Osipov A.N. 2017. The efficiency of one method of machineless gasdynamic temperature stratification in a gas flow. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 106:1125–1133.
17. Imran M., Khan H., Joardder M. , Kumar C., Karim M. 2018. Multiphase porous media modelling: A novel approach to predicting food processing performance. *Critical Reviews in Food Science and Nutrition* 58(4):528–546.
18. Fletcher C. 1988. *Computation Techniques for Fluid Dynamics*, Berlin: Springer-Verlang, 502.
19. Garc?a-Tri?anes P., Seville J., Ansart R., Benoit H., Leadbeater T., Parker D. 2018. Particle motion and heat transfer in an upward-flowing dense particle suspension: Application in solar receivers *Chemical Engineering Science*, 177:313–322.



20. Lopez I., Benoit H., Gauthier D., Sans J., Guillot E., Mazza G., Flamanta G. 2016. On-sun operation of a 150 kWth pilot solar receiver using dense particle suspension as heat transfer fluid *Solar Energy*, 137:463–476.
21. Lopez I., Benoit H., Gauthier D., Sans J., Guillot E., Mazza G., Flamanta G. 2016. On-sun operation of a 150 kWth pilot solar receiver using dense particle suspension as heat transfer fluid *Solar Energy*, 137:463–476.
22. Mehrabadi M., Tenneti S., Garg R., Subramaniam S. 2015. Pseudo-turbulent gas-phase velocity fluctuations in homogeneous gas–solid flow: fixed particle assemblies and freely evolving suspensions. *Journal of Fluid Mechanics*, 770:210–246.
23. Teklaya A., Chungun Y., Lasse R., Kohler L. 2015. Experimental and modeling study of flash calcination of kaolinite rich clay particles in a gas suspension calciner. *Applied Clay Science*, 103: 10–1.
24. Tukmakov A.L., Kashapov N.F., Tukmakov D.A., Fazlyyakhmatov M.G. 2018. Numerical modeling of the powder materials spraying. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1757-899X/412/1/012076>.
Tukmakov A.L., Kashapov N.F., Tukmakov D.A., Fazlyyakhmatov M.G. 2018. Numerical modeling of the powder materials spraying. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1757-899X/412/1/012076>.
25. Saikat S., Meheboob A. 2017. Revisiting ignited–quenched transition and the non-Newtonian rheology of a sheared dilute gas–solid suspension. *Journal of Fluid Mechanics*, 833:206–246.
26. Zhengbiao P., Behdad M., Elham D. 2017. Suspension stability of slurry Taylor flow: A theoretical analysis. *Chemical Engineering Science*, 174: 459–471.
27. Zhuoqing A., Jesse Z. 2019. Correlating the apparent viscosity with gas-solid suspension flow in straight pipelines. *Powder Technology*, 345: 346–351.

Ссылка для цитирования статьи
For citation

Тукмаков Д.А. 2019. Численное моделирование отражения ударной волны в газовой взвеси для различных параметров дисперсной компоненты запыленной среды. *Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика*. 51 (4): 565–576. DOI 10.18413/2075-4639-2019-51-4-565-576.

Tukmakov D.A. 2019. Numerical modeling of reflection of a shock wave in a gas suspension for various parameters of a dispersed component of a dusted medium. *Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics. Physics*. 51 (4): 565–576 (in Russian). DOI 10.18413/2075-4639-2019-51-4-565-576.

**СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ
INFORMATION ABOUT AUTHORS**

- Аверин Г.В.** – док. тех. аук, профессор Донецкого национального технического университета, Донецкая Народная республика
- Ванько В.И.** – док. физ.-мат. наук, профессор Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана
- Галаев С.В.** – канд. физ.-мат. наук, доцент Саратовского национального исследовательского государственного университета
- Голочалова А.В.** – аспирант Белгородского национального исследовательского университета
- Ерина Т.А.** – канд. пед. наук, доцент Белгородского национального исследовательского университета
- Захвалинский В.С.** – док. физ.-мат. наук, профессор Белгородского национального исследовательского университета
- Зульфугарова Р.Т.** – канд. физ.-мат. наук, доцент Бакинского государственного университета, Азербайджан
- Иванчихин С.В.** – асп. Белгородского национального исследовательского университета
- Кулумбаев Э.Б.** – док. физ.-мат. наук, профессор Белгородского национального исследовательского университета
- Куртова Л.Н.** – канд. физ.-мат. наук, доцент Белгородского государственного национального исследовательского университета
- Махина Н.М.** – канд. физ.-мат. наук, доцент Брянского государственного университета
- Никуличева Т.Б.** – канд. физ.-мат. наук, доцент Белгородского национального исследовательского университета
- Оруджев Э.Г.** – док. физ.-мат. наук, профессор Бакинского государственного университета, Азербайджан
- Пиллюк Е.А.** – канд. физ.-мат. наук, доцент Белгородского национального исследовательского университета
- Тимашев А.С.** – асп. Белгородского государственного национального исследовательского университета
- Тукмаков Д.А.** – док. физ.-мат. наук, профессор ИММ – структурное подразделение ФИЦ Казанского НЦ РАН ул. Лобачевского
- Шевцова М.В.** – канд. физ.-мат. наук, Белгородского государственного технологического университета
- Шишкина Э.Л.** – док. физ.-мат. наук, профессор Высшей школы информатики и управления Жешув, Польша
- Япрынцев М.Н.** – асп. Белгородского национального исследовательского университета

Подписной купон

Прошу оформить подписку на журнал «Научные ведомости Белгородского государственного университета» Серия _____ на следующие номера за 201_ год

1 квартал	2 квартал	3 квартал	4 квартал

(Отметьте, пожалуйста, требуемые номера в таблице)

комплект(ов)

Стоимость редакционной подписки в 2017 г.

(включает стоимость почтовой доставки заказной бандеролью по России):
на 1 месяц (1 номер) – 1100 руб.; на 12 месяцев (4 номера) – 3800 руб.;

ФИО _____
 Индекс _____
 Республика/Край/Область _____
 Город/Село _____
 Улица _____ дом _____ кв. _____
 Телефон _____ E-mail _____
 Дата _____

Квитанция

ИЗВЕЩЕНИЕ	Форма № ПД-4						
	НИУ «БелГУ»						
	Наименование получателя платежа ИНН 3123035312; КПП 312301001; ОКАТО 14401365000; Р/с 40503810207004000002 в Белгородском отделении № 8592 ПАО Сбербанк БИК 041403633 К/счет 30101810100000000633 Вид платежа КОД 07430201010010000130 за что Подписку на журнал «Научные ведомости БелГУ. Серия « _____ » (наименование банка, другие банковские реквизиты)						
	(Фамилия, И., О., адрес плательщика)						
	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <th style="width: 60%;">Вид платежа</th> <th style="width: 20%;">Дата</th> <th style="width: 20%;">Сумма</th> </tr> <tr> <td>Подписка на журнал «Научные ведомости БелГУ» Серия _____ на _____ 20__ года</td> <td> </td> <td> </td> </tr> </table>	Вид платежа	Дата	Сумма	Подписка на журнал «Научные ведомости БелГУ» Серия _____ на _____ 20__ года		
Вид платежа	Дата	Сумма					
Подписка на журнал «Научные ведомости БелГУ» Серия _____ на _____ 20__ года							
Кассир	Плательщик _____						
	Форма № ПД-4						
	НИУ «БелГУ»						
	Наименование получателя платежа ИНН 3123035312; КПП 312301001; ОКАТО 14401365000; Р/с 40503810207004000002 в Белгородском отделении № 8592 ПАО Сбербанк БИК 041403633 К/счет 30101810100000000633 Вид платежа КОД 07430201010010000130 за что Подписку на журнал «Научные ведомости БелГУ. Серия « _____ » (наименование банка, другие банковские реквизиты)						
	(Фамилия, И., О., адрес плательщика)						
	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <th style="width: 60%;">Вид платежа</th> <th style="width: 20%;">Дата</th> <th style="width: 20%;">Сумма</th> </tr> <tr> <td>Подписка на журнал «Научные ведомости БелГУ» Серия _____ на _____ 20__ года</td> <td> </td> <td> </td> </tr> </table>	Вид платежа	Дата	Сумма	Подписка на журнал «Научные ведомости БелГУ» Серия _____ на _____ 20__ года		
Вид платежа	Дата	Сумма					
Подписка на журнал «Научные ведомости БелГУ» Серия _____ на _____ 20__ года							
КВИТАНЦИЯ Кассир	Плательщик _____						