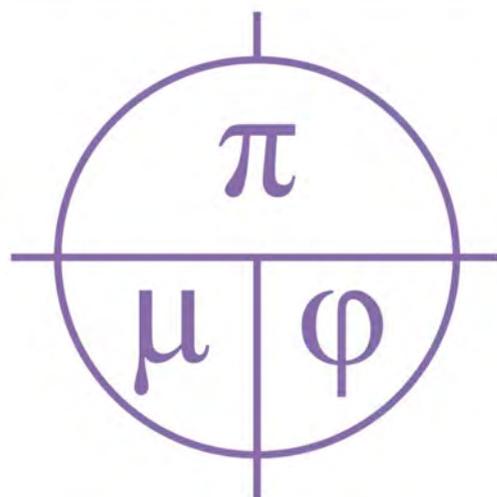


# ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА & ФИЗИКА

# APPLIED MATHEMATICS & PHYSICS





## Прикладная математика & Физика

2020. Том 52, № 4

Основан в 1995 г. Журнал включен в Перечень ВАК рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней кандидата и доктора наук (01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ, 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление, 01.04.07 – физика конденсированного состояния). Ранее журнал издавался под названием «Научные ведомости Белгородского государственного университета. Математика. Физика».

### УЧРЕДИТЕЛЬ:

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Белгородский государственный национальный исследовательский университет».

### РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:

**Главный редактор:** В. Б. Васильев, доктор физико-математических наук, НИУ «БелГУ»;

**Заместители главного редактора:** С. М. Ситник, доктор физико-математических наук, НИУ «БелГУ», Математика; А. В. Носков, доктор физико-математических наук, НИУ «БелГУ», Физика. Математическое моделирование;

**Ответственный секретарь:** О. В. Чернова, кандидат физико-математических наук, НИУ «БелГУ».

### ЧЛЕНЫ РЕДАКЦИОННОЙ КОЛЛЕГИИ:

Ю. А. Алхутов, д-р физ.-мат. наук, Владимир, Россия;  
А. Ашыралыев, д-р физ.-мат. наук, Алматы, Казахстан;  
С. В. Блажевич, д-р физ.-мат. наук, Белгород, Россия;  
А. Н. Беляков, д-р физ.-мат. наук, Белгород, Россия;  
А. Г. Брусенцев, д-р физ.-мат. наук, Белгород, Россия;  
Ю. П. Вирченко, д-р физ.-мат. наук, Белгород, Россия;  
А. В. Глушак, д-р физ.-мат. наук, Белгород, Россия;  
С. Б. Дабагов, д-р физ.-мат. наук, Москва, Россия;  
А. Н. Куликов, д-р физ.-мат. наук, Ярославль, Россия;  
Д. М. Левин, д-р физ.-мат. наук, Тула, Россия;  
И. С. Ломов, д-р физ.-мат. наук, Москва, Россия;  
В. В. Меньших, д-р физ.-мат. наук, Воронеж, Россия;  
А. И. Назаров, д-р физ.-мат. наук, Санкт-Петербург, Россия;  
Е. Ю. Панов, д-р физ.-мат. наук, Великий Новгород, Россия;  
О. М. Пенкин, д-р физ.-мат. наук, Алматы, Казахстан;  
И. П. Половинкин, д-р физ.-мат. наук, Воронеж, Россия;  
Е. В. Радкевич, д-р физ.-мат. наук, Москва, Россия;  
А. П. Солдатов, д-р физ.-мат. наук, Москва, Россия;  
В. Е. Федоров, д-р физ.-мат. наук, Челябинск, Россия;  
М. В. Шитикова, д-р физ.-мат. наук, Воронеж, Россия;  
А. А. Шибков, д-р физ.-мат. наук, Тамбов, Россия.

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор). Выходит 4 раза в год.

Выпускающий редактор: Л. П. Коханова	Гарнитура Times. Уч. изд. л. 5,0
Корректурa: Ю. В. Ивахненко	Дата выхода 30.12.2020.
Компьютерная верстка: О. В. Чернова	Оригинал-макет подготовлен отделом
Оригинал-макет: В. Б. Васильев	объединенной редакции научных журналов НИУ «БелГУ»
E-mail: vasilyev_v@bsu.edu.ru	308015, г. Белгород, ул. Победы, 85.

## СОДЕРЖАНИЕ

### МАТЕМАТИКА

**О. Э. Яремко, Н. Н. Яремко**

Обобщённое двойное преобразование Лапласа и его применения для решения уравнений в частных производных 239

**О. Х. Масаева**

Задача Дирихле для обобщенного уравнения Лаврентьева – Бицадзе с дробной производной Герасимова – Капуто 246

**М. В. Половинкина, И. П. Половинкин**

Об изменении характера устойчивости тривиального решения при переходе от модели с сосредоточенными параметрами к модели с распределёнными параметрами 255

### ФИЗИКА. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

**Б. З. Федоренко, А. С. Горлов, В. И. Петрашев**

Оптимизация теплообмена в цепных завесах цементных печей: теплообмен при испарении влаги из шлама с падающей скоростью 262

**И. М. Усатый, В. С. Захвалинский, О. Н. Иванов, Т. А. Ерина**

Магнитные свойства, механизмы электропроводности и магнитосопротивления в  $\text{La}_{0.5}\text{Sr}_{0.5}\text{Mn}_{1-y}\text{Fe}_y\text{O}_3$  при  $0 \leq y \leq 0.1$  271

**А. А. Морочо, Е. А. Пилюк, А. В. Неженцев, П. Г. Шаповалов, М. Н. Япрынцев, В. Ю. Новиков**

Проводимость на переменном токе аморфной пленки  $\text{Cd}_3\text{As}_2$  286



# Applied Mathematics & Physics

2020. Volume 52, № 4

*Founded in 1995. The journal is included into the List of Higher Attestation Commission of peer-reviewed scientific publications where the main scientific results of dissertations for obtaining scientific degrees of a candidate and doctor of science should be published (01.01.01 – material, complex and functional analysis, 01.01.02 – differential equations, dynamical systems and optimal control, 01.04.07 – condensed matter physics). Previously, the magazine was published under the title «Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics. Physics».*

## FOUNDER:

Federal state autonomous educational establishment of higher education  
«Belgorod National Research University».

## EDITORIAL BOARD:

**Chief Editor:** V. B. Vasilyev, Dr.Sc., Ph.D., Belgorod National Research University;  
**Deputy Editor-in-Chief:** S. M. Sitnik, Dr.Sc., Ph.D., Belgorod National Research University, Mathematics;  
A. V. Noskov, Dr.Sc., Ph.D., Belgorod National Research University, Physics. Mathematical modeling;  
**Executive Secretary:** O. V. Chernova, PhD, Belgorod National Research University.

## EDITORIAL BOARD MEMBERS:

Yu. A. Alkhutov, Dr.Sc., Ph.D., Vladimir, Russia;  
A. Ashyralyev, Dr.Sc., Ph.D., Almaty, Kazakhstan;  
S. V. Blazhevich, Dr.Sc., Ph.D., Belgorod, Russia;  
A. N. Belyakov, Dr.Sc., Ph.D., Belgorod, Russia;  
A. G. Brusentsev, Dr.Sc., Ph.D., Belgorod, Russia;  
Yu.P. Virchenko, Dr.Sc., Ph.D., Belgorod, Russia;  
A. V. Glushak, Dr.Sc., Ph.D., Belgorod, Russia;  
S. B. Dabagov, Dr.Sc., Ph.D., Moscow, Russia;  
A. N. Kulikov, Dr.Sc., Ph.D., Yaroslavl, Russia;  
D. M. Levin, Dr.Sc., Ph.D., Tula, Russia;  
I. S. Lomov, Dr.Sc., Ph.D., Moscow, Russia;  
V. V. Menshih, Dr.Sc., Ph.D., Voronezh, Russia;  
A. I. Nazarov, Dr.Sc., Ph.D., St. Petersburg, Russia;  
E. Yu. Panov, Dr.Sc., Ph.D., Velikiy Novgorod, Russia;  
O. M. Penkin, Dr.Sc., Ph.D., Almaty, Kazakhstan;  
I. P. Polovinkin, Dr.Sc., Ph.D., Voronezh, Russia;  
E. V. Radkevich, Dr.Sc., Ph.D., Moscow, Russia;  
A. P. Soldatov, Dr.Sc., Ph.D., Moscow, Russia;  
V. E. Fedorov, Dr.Sc., Ph.D., Chelyabinsk, Russia;  
M. V. Shitikova, Dr.Sc., Ph.D., Voronezh, Russia;  
A. A. Shibkov, Dr.Sc., Ph.D., Tambov, Russia.

The journal has been registered at the Federal service for supervision of communications information technology and mass media (Roskomnadzor). Publication frequency: 4 /year.

Commissioning Editor L. P. Kokhanova  
Proofreading Yu. V. Ivakhnenko  
Computer imposition O. V. Chernova  
Dummy layout by V. B. Vasilyev  
E-mail: vasilyev\_v@bsu.edu.ru

Typeface Times. Publisher's signature 5,0  
Date of publishing 30.12.2020.  
The layout is presented by Department of the united  
Editorial Board of Scientific Journals Belgorod  
National Research University  
Address: 85 Pobeda St., Belgorod, 308015, Russia

## CONTENTS

### MATHEMATICS

***O. E. Yaremko, N. N. Yaremko***

Generalized double Laplace transform and its application for partial differential equations solving 239

***O. Kh. Masaeva***

Dirichlet problem for the generalized Lavrent'ev – Bitsadze equation with the Gerasimov – Caputo derivative 246

***M. V. Polovinkina, I. P. Polovinkin***

On the change in the nature of stability of a trivial solution in the transition from a model with lumped parameters to a model with distributed parameters 255

### PHYSICS. MATHEMATICAL MODELING

***B. Z. Fedorenko, A. S. Gorlov, V. I. Petrashev***

Optimization of the heat exchange in the chain veils of the cement kilns: the heat exchange in the evaporation of moisture from the sludge with the decreasing velocity 262

***I. M. Usatyy, V. S. Zakhvalinskii, O. N. Ivanov, T. A. Erina***

Magnetic properties, mechanisms of electrical conductivity and magnetoresistance in  $\text{La}_{0.5}\text{Sr}_{0.5}\text{Mn}_{1-y}\text{Fe}_y\text{O}_3$  at  $0 \leq y \leq 0.1$  271

***A. A. Morocho, E. A. Pilyuk, A. V. Nezhentsev, P. G. Shapovalov, M. N. Yapryntsev, V. Yu. Novikov***

AC conductivity of an amorphous film  $\text{Cd}_3\text{As}_2$  286

## МАТЕМАТИКА

УДК 517.44  
MSC 44A10.

DOI 10.18413/2687-0959-2020-52-4-239-245

### ОБОБЩЁННОЕ ДВОЙНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА И ЕГО ПРИМЕНЕНИЯ ДЛЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

О. Э. Яремко, Н. Н. Яремко

(Статья представлена членом редакционной коллегии С. М. Ситником)

Московский государственный технологический университет (Станкин),  
Москва, 127055, Россия

Пензенский государственный университет,  
Пенза, 449926, Россия

E-mail: [yaremki8@gmail.com](mailto:yaremki8@gmail.com)

**Аннотация.** Метод операторов преобразования применяется для построения обобщённого двойного преобразования. Создан аппарат обобщённого двойного преобразования Лапласа, в котором рассматривается операция дифференцирования с кусочно-постоянными коэффициентами. При этом вычислению обобщённого двойного преобразования Лапласа методом операторов преобразования сводится к вычислению классического преобразования Лапласа. Доказано несколько теорем об общих свойствах двойного преобразования Лапласа: о дифференцировании оригинала, о сдвиге изображения. Определяется свертка двух оригиналов  $f$  и  $g$ , изучаются ее свойства, доказывается теорема о свертке. Рассматриваются приложения обобщённого двойного преобразования Лапласа в теории кусочно-линейных систем. Решена задача Коши для волнового уравнения с кусочно-постоянными коэффициентами.

**Ключевые слова:** двойное преобразование Лапласа, свертка оригиналов, волновое уравнение, задача Коши.

**Для цитирования:** Яремко О. Э., Яремко Н. Н., 2020. Обобщённое двойное преобразование Лапласа и его применения для решения уравнений в частных производных. Прикладная математика & Физика. 52(4): 239–245.

DOI 10.18413/2687-0959-2020-52-4-239-245.

---

---

### GENERALIZED DOUBLE LAPLACE TRANSFORM AND ITS APPLICATION FOR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS SOLVING

O. E. Yaremko, N. N. Yaremko

(Article submitted by a member of the editorial board S. M. Sitnik)

Moscow State Technological University (Stankin),  
Moscow, 127055, Russia,

Penza State University,  
Penza, 449926, Russia

E-mail: [yaremki8@gmail.com](mailto:yaremki8@gmail.com)

Received November 11, 2020

**Abstract.** The transmutation operator method is used to construct the generalized double Laplace transform. In the article, the apparatus of the generalized double Laplace transform is created, the differentiation with a piecewise constant factor is considered. By using the transmutation operator method, the calculation of the generalized double Laplace transform is reduced to the calculation of the classical Laplace transform. Theorems on the general properties of the double Laplace transform are proved: on the differentiation of the function; about shifts; a convolution of two functions is defined, its properties are studied, and a convolution theorem is proved. In the article the applications of the generalized double Laplace transform for solving partial differential equations with piecewise constant coefficients it is discussed. The Cauchy problem for the wave equation with piecewise constant coefficients is solved.

**Key words:** double Laplace transform, convolution of functions, wave equation, Cauchy problem.

**For citation:** Yaremko O. E., Yaremko N. N. 2020. Generalized double laplace transform and its application for partial differential equations solving. Applied Mathematics & Physics. 52(4): 239–245 (in Russian).

DOI 10.18413/2687-0959-2020-52-4-239-245.

---

**1. Введение.** Преобразование Лапласа получило широкое распространение в научных и инженерных расчётах. Как известно, преобразование Лапласа соотношениям и операциям над оригиналами

сопоставляет более простые соотношения над их изображениями. Так операции дифференцирования оригинала соответствует операция умножения изображения. Усилия многих исследователей направлены на замену операции дифференцирования на более сложную операцию [1, 2, 4-17]. В статье предложено использовать метод операторов преобразования [18, 19]. В итоге создан аппарат обобщённого двойного преобразования Лапласа, в котором рассматривается операция дифференцирования с кусочно-постоянными коэффициентами. При этом вычисление обобщённого двойного преобразования Лапласа методом операторов преобразования сводится к вычислению классического преобразования Лапласа. Доказано несколько теорем об общих свойствах двойного преобразования Лапласа. Определяется свертка двух оригиналов  $f(x, y)$  и  $g(x, y)$ , изучаются ее свойства, доказывается теорема о свертке. Рассматриваются приложения обобщённого двойного преобразования Лапласа в теории кусочно-линейных систем. В частности, получено аналитическое описание температурного поля с переменным режимом для полубесконечного тела [20]. Целью данной работы является изучение обобщённого двойного преобразования Лапласа и его приложений к дифференциальным уравнениям в частных производных.

**2. Методы.** Метод операторов преобразования успешно проявил себя при решении уравнений математической физики в кусочно-однородных средах [18, 19]. Этот метод представляет полноценную замену метода интегральных преобразований Фурье. Его преимущество заключается в том, что нет необходимости переходить в пространство изображений. Решение получается в естественном классе функций. Исследования по применению метода операторов преобразования для задач с переменными по временной переменной коэффициентами ранее не проводились. Пусть  $\tilde{f}(t_1, t_2)$  – заданная в первом квадранте функция-оригинал и пусть  $F(p_1, p_2)$  – ее изображение, т. е.

$$F(p_1, p_2) = \int_0^\infty e^{-p_1 t_1} \int_0^\infty e^{-p_2 t_2} \tilde{f}(t_1, t_2) dt_1 dt_2.$$

Разобьем первый квадрант на четыре части прямыми  $t_1 = t_1^0, t_2 = t_2^0$ . Примем обозначения

$$D_{00} = \{(t_1, t_2) : 0 \leq t_1 \leq t_1^0, 0 \leq t_2 \leq t_2^0\}, D_{10} = \{(t_1, t_2) : t_1^0 \leq t_1, 0 \leq t_2 \leq t_2^0\}$$

$$D_{01} = \{(t_1, t_2) : 0 \leq t_1 \leq t_1^0, t_2^0 \leq t_2\}, D_{11} = \{(t_1, t_2) : t_1^0 \leq t_1, t_2^0 \leq t_2\}.$$

Оператор преобразования определим формулой  $J : \tilde{f} \rightarrow f$

$$\begin{cases} f(t_1, t_2) = \tilde{f}(a_1 t_1, b_1 t_2), t \in D_{00}, \\ f(t_1, t_2) = \tilde{f}(a_2(t_1 - t_1^0) + a_1 t_1^0, b_1 t_2), t \in D_{10}, \\ f(t_1, t_2) = \tilde{f}(a_1 t_1, b_2(t_2 - t_2^0) + b_1 t_2^0), t \in D_{01}, \\ f(t_1, t_2) = \tilde{f}(a_2(t_1 - t_1^0) + a_1 t_1^0, b_2(t_2 - t_2^0) + b_1 t_2^0), t \in D_{11}. \end{cases} \quad (1)$$

**Теорема 1.** Оператор преобразования  $J$  допускает факторизацию  $J = J_1 J_2$ , в которой первый оператор  $J_1$  действует по переменной  $t_1$  и имеет вид

$$\begin{cases} f(t_1) = \tilde{f}(a_1 t_1), 0 \leq t_1 \leq t_1^0, \\ f(t_1) = \tilde{f}(a_2(t_1 - t_1^0) + a_1 t_1^0), t_1^0 \leq t_1, \end{cases} \quad (2)$$

а второй оператор  $J_2$  действует по переменной  $t_2$  и имеет вид

$$\begin{cases} g(t_2) = \tilde{g}(b_1 t_2), 0 \leq t_2 \leq t_2^0, \\ g(t_2) = \tilde{g}(b_2(t_2 - t_2^0) + b_1 t_2^0), t_2^0 \leq t_2. \end{cases} \quad (3)$$

Доказательство теоремы следует из определения оператора преобразования.

Будем обозначать  $\tilde{D}_{ij} = \tilde{f}(D_{ij})$ . Из определения следует, что для обратного оператора преобразования  $J^{-1} : f \rightarrow \tilde{f}$  справедлива формула

$$\begin{cases} \tilde{f}(t_1, t_2) = f\left(\frac{t_1}{a_1}, \frac{t_2}{b_1}\right), (t_1, t_2) \in \tilde{D}_{00}, \\ \tilde{f}(t_1, t_2) = f_2\left(\frac{t_1 - a_1 t_1^0}{a_2} + t_1^0, \frac{t_2}{b_1}\right), (t_1, t_2) \in \tilde{D}_{10}, \\ \tilde{f}(t_1, t_2) = f\left(\frac{t_1}{a_1}, \frac{t_2 - b_1 t_2^0}{b_2} + t_2^0\right), (t_1, t_2) \in \tilde{D}_{01}, \\ \tilde{f}(t_1, t_2) = f\left(\frac{t_1 - a_1 t_1^0}{a_2} + t_1^0, \frac{t_2 - b_1 t_2^0}{b_2} + t_2^0\right), (t_1, t_2) \in \tilde{D}_{11}. \end{cases} \quad (4)$$

**Теорема 2.** Оператор обратный к оператору преобразования  $J$  допускает факторизацию  $J^{-1} = J_1^{-1} J_2^{-1}$ , в которой первый множитель  $J_1^{-1}$  действует по переменной  $t_1$  и имеет вид

$$\begin{cases} \tilde{f}(t_1) = f\left(\frac{t_1}{a_1}\right), 0 \leq t_1 \leq t_1^0, \\ \tilde{f}(t_1) = f\left(\frac{t_1 - a_1 t_1^0}{a_2} + t_1^0\right), t_1^0 \leq t_1, \end{cases} \quad (5)$$

второй множитель  $J_2^{-1}$  действует по переменной  $t_2$  и имеет вид

$$\begin{cases} \tilde{g}(t_2) = g\left(\frac{t_2}{b_1}\right), 0 \leq t_2 \leq t_2^0, \\ \tilde{g}(t_2) = g\left(\frac{t_2 - b_1 t_2^0}{b_2} + t_2^0\right), t_2^0 \leq t_2. \end{cases} \quad (6)$$

Доказательство следует из формул (4) для обратного оператора преобразования.

**3. Двойное интегральное преобразование Лапласа.** Двойные преобразования Лапласа исследованы в монографии [3]. Двойным преобразованием Лапласа для функции оригинала  $y = \tilde{f}(t_1, t_2)$  называется функция изображение  $F(p_1, p_2)$ , определяемая по правилу

$$F(p_1, p_2) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-p_1 t_1} e^{-p_2 t_2} \tilde{f}(t_1, t_2) dt_1 dt_2.$$

Здесь представляется развитие теории двойных интегральных преобразований на случай дифференциальных операторов с кусочно постоянными коэффициентами. Пусть  $\tilde{f}(t_1, t_2)$ , заданная в первом квадранте функция-оригинал. Пусть также  $J$  оператор преобразования, действующий по формуле (1).

**Определение 1.** Пусть функция  $y = f(t_1, t_2)$  определена в первом квадранте по формуле (1). Обобщённым двойным преобразованием Лапласа  $L$  функции  $y = f(t_1, t_2)$  назовем двойное преобразование Лапласа  $\tilde{L}$  функции  $y = \tilde{f}(t_1, t_2)$ ,

$$F(p_1, p_2) \equiv L[f(t_1, t_2)] = \tilde{L}[\tilde{f}(t_1, t_2)].$$

Иначе говоря, обобщённое двойное преобразование Лапласа и классическое двойное преобразование Лапласа связаны формулами

$$L = \tilde{L}J^{-1}, LJ = \tilde{L}.$$

**Теорема 3.** Обобщённое двойное преобразование Лапласа  $L$  функции  $y = f(t_1, t_2)$  вычисляется по формуле

$$\begin{aligned} F(p_1, p_2) &= a_1 b_1 \int_0^{t_1^0} e^{-a_1 p_1 t_1} \int_0^{t_2^0} e^{-b_1 p_2 t_2} f(t_1, t_2) dt_1 dt_2 + \\ &+ a_2 b_1 \int_{t_1^0}^\infty e^{-p_1(a_2(t_1 - t_1^0) + a_1 t_1^0)} \int_0^{t_2^0} e^{-b_1 p_2 t_2} f(t_1, t_2) dt_1 dt_2 + \\ &+ a_1 b_2 \int_0^{t_1^0} e^{-a_1 p_1 t_1} \int_{t_2^0}^\infty e^{-p_2(b_2(t_2 - t_2^0) + b_1 t_2^0)} f(t_1, t_2) dt_1 dt_2 + \\ &+ a_2 b_2 \int_{t_1^0}^\infty e^{-p_1(a_2(t_1 - t_1^0) + a_1 t_1^0)} \int_{t_2^0}^\infty e^{-p_2(b_2(t_2 - t_2^0) + b_1 t_2^0)} f(t_1, t_2) dt_1 dt_2. \end{aligned} \quad (7)$$

Доказательство. Разобьем интеграл в определении 1 на четыре слагаемых

$$\begin{aligned} F(p_1, p_2) &= \int_{D_{00}} e^{-p_1 t_1} e^{-p_2 t_2} \tilde{f}(t_1, t_2) dt_1 dt_2 + \int_{D_{10}} e^{-p_1 t_1} e^{-p_2 t_2} \tilde{f}(t_1, t_2) dt_1 dt_2 + \\ &+ \int_{D_{01}} e^{-p_1 t_1} e^{-p_2 t_2} \tilde{f}(t_1, t_2) dt_1 dt_2 + \int_{D_{11}} e^{-p_1 t_1} e^{-p_2 t_2} \tilde{f}(t_1, t_2) dt_1 dt_2. \end{aligned}$$

В каждом из четырех интегралов выполним замену переменных. В первом,

$$t_1 = a_1 u_1, t_2 = b_1 u_2,$$

во-втором,

$$t_1 = a_1 t_1^0 + a_2(u_1 - t_1^0), t_2 = b_1 u_2,$$

в в третьем

$$t_1 = a_1 u_1, t_2 = b_1 t_2^0 + b_2(u_2 - t_2^0),$$

четвертом

$$t_1 = a_1 t_1^0 + a_1(u_1 - t_1^0), t_2 = b_1 t_2^0 + b_2(u_2 - t_2^0).$$

В итоге формула (3) установлена.

**Теорема 4. Формула обращения Римана – Меллина.** Пусть  $F(p_1, p_2)$  изображение Лапласа, тогда оригинал  $f(t_1, t_2) \equiv L^{-1}[F(p_1, p_2)]$  находится по формулам

$$\begin{aligned}
f(t_1, t_2) &= -\frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\sigma_1-i\infty}^{\sigma_1+i\infty} e^{p_1 t_1 a_1} \int_{\sigma_2-i\infty}^{\sigma_2+i\infty} e^{p_2 t_2 a_2} F(p_1, p_2) dp_1 dp_2, (t_1, t_2) \in D_{00}, \\
f(t_1, t_2) &= -\frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\sigma_1-i\infty}^{\sigma_1+i\infty} e^{p_1(a_2(t_1-t_1^0)+a_1 t_1^0)} \int_{\sigma_2-i\infty}^{\sigma_2+i\infty} e^{p_2 t_2 b_1} F(p_1, p_2) dp_1 dp_2, (t_1, t_2) \in D_{10}, \\
f(t_1, t_2) &= -\frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\sigma_1-i\infty}^{\sigma_1+i\infty} e^{p_1 t_1 a_1} \int_{\sigma_2-i\infty}^{\sigma_2+i\infty} e^{p_2(b_2(t_2-t_2^0)+b_1 t_2^0)} F(p_1, p_2) dp_1 dp_2, (t_1, t_2) \in D_{01}, \\
f(t_1, t_2) &= -\frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\sigma_1-i\infty}^{\sigma_1+i\infty} e^{p_1(a_2(t_1-t_1^0)+a_1 t_1^0)} \int_{\sigma_2-i\infty}^{\sigma_2+i\infty} e^{p_2(b_2(t_2-t_2^0)+b_1 t_2^0)} F(p_1, p_2) dp_1 dp_2, (t_1, t_2) \in D_{11}.
\end{aligned} \tag{8}$$

Доказательство. Запишем формулу обращения Римана – Меллина [3]

$$\tilde{f}(t_1, t_2) = -\frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\sigma_1-i\infty}^{\sigma_1+i\infty} e^{p_1 t_1 a_1} \int_{\sigma_2-i\infty}^{\sigma_2+i\infty} e^{p_2 t_2 a_2} F(p_1, p_2) dp_1 dp_2.$$

Применим первую из формул (1), в итоге получим формулу обращения в области  $D_{00}$ .

**Пример 1.** Если  $f(t_1, t_2) = 1, t_1 > 0, t_2 > 0$ , то

$$F(p_1, p_2) = \frac{1}{p_1 p_2}.$$

В самом деле, из определения оператора преобразования следует, что  $\tilde{f}(t_1, t_2) = 1, t_1 > 0, t_2 > 0$ . В работе [3] найдено изображение единичной функции  $F(p_1, p_2) = \frac{1}{p_1 p_2}$ .

**Пример 2.** Если

$$\begin{cases} f(t_1, t_2) = \exp(-(a_1 t_1 + b_1 t_2)), t \in D_{00}, \\ f(t_1, t_2) = \exp(-(a_2(t_1 - t_1^0) + a_1 t_1^0 + b_1 t_2)), t \in D_{10}, \\ f(t_1, t_2) = \exp(-(a_1 t_1 + b_2(t_2 - t_2^0) + b_1 t_2^0)), t \in D_{01}, \\ f(t_1, t_2) = \exp(-(a_2(t_1 - t_1^0) + a_1 t_1^0, b_1 t_2 + b_2(t_2 - t_2^0) + b_1 t_2^0)), t \in D_{11}, \end{cases} \tag{9}$$

то двойное обобщённое преобразование Лапласа функции (10) имеет вид

$$F(p_1, p_2) = \frac{1}{(p_1 - 1)(p_2 + 1)}.$$

Свойства обобщённого двойного преобразования Лапласа:

(1)  $L = L_1 L_2$ , где  $L_1$  и  $L_2$  – однократное преобразование Лапласа, действующие по переменной  $t_1$  и  $t_2$  соответственно. Операторы  $L_1$  и  $L_2$  имеют вид

$$\begin{aligned}
G(p_1) &\equiv L_1[g(t_1)] = a_1 \int_0^{t_1^0} e^{-a_1 p_1 t_1} g(t_1) dt_1 + a_2 \int_{t_1^0}^{\infty} e^{-p_1(a_2(t_1-t_1^0)+a_1 t_1^0)} g(t_1) dt_1 \\
G(p_2) &\equiv L_2[g(t_2)] = b_1 \int_0^{t_2^0} e^{-b_1 p_2 t_2} g(t_2) dt_2 + b_2 \int_{t_2^0}^{\infty} e^{-p_2(b_2(t_2-t_2^0)+b_1 t_2^0)} g(t_2) dt_2
\end{aligned}$$

соответственно.

(2)  $L^{-1} = L_1^{-1} L_2^{-1}$  где  $L_1^{-1}$  и  $L_2^{-1}$  – однократные обратные преобразования Лапласа, действующие по переменной  $p_1$  и  $p_2$  соответственно. Операторы  $L_1^{-1}$  и  $L_2^{-1}$  определяются по правилам

$$\begin{aligned}
g(t_1) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_1-i\infty}^{\sigma_1+i\infty} e^{p_1 t_1 a_1} G(p_1) dp_1, 0 < t_1 < t_1^0, \\
g(t_1) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_1-i\infty}^{\sigma_1+i\infty} e^{p_1(a_2(t_1-t_1^0)+a_1 t_1^0)} G(p_1) dp_1, t_1^0 < t_1, \\
g(t_2) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_2-i\infty}^{\sigma_2+i\infty} e^{p_2 t_2 b_1} G(p_2) dp_2, 0 < t_2 < t_2^0, \\
g(t_2) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_2-i\infty}^{\sigma_2+i\infty} e^{p_2(b_2(t_2-t_2^0)+b_1 t_2^0)} G(p_2) dp_2, t_2^0 < t_2
\end{aligned} \tag{10}$$

соответственно.

$$(3) L[f(t_1)] = L_1[f(t_1)]/p_2, L[f(t_2)] = L_2[f(t_2)]/p_1$$

Следующие свойства обобщённого двойного преобразования применяются при решении дифференциальных уравнений в частных производных.

**Теорема 5. Дифференцирование оригинала.** Пусть

$$D_1 = \frac{1}{a_1} \theta(t_1^0 - t_1) \frac{\partial}{\partial t_1} + \frac{1}{a_2} \theta(t_1 - t_1^0) \frac{\partial}{\partial t_1},$$

$$D_2 = \frac{1}{b_1} \theta(t_2^0 - t_2) \frac{\partial}{\partial t_2} + \frac{1}{b_2} \theta(t_2 - t_2^0) \frac{\partial}{\partial t_2} -$$

операторы дифференцирования, а функции  $u, D_1 u, D_2 u$  – изображения Лапласа, то

$$L[D_1 u] = p_1 L[u] - L_2[u(0, t_2)],$$

$$L[D_2 u] = p_2 L[u] - L_1[u(t_1, 0)].$$

Как и для преобразования Лапласа, при доказательстве используется метод интегрирования по частям. Определим операторы дифференцирования второго порядка по правилам

$$D_{1,1}^2 = D_1 \cdot D_1, D_{2,2}^2 = D_2 \cdot D_2, D_{1,2}^2 = D_1 \cdot D_2.$$

**Следствие.** Если функции  $u, D_{1,1}^2 u, D_{2,2}^2 u, D_{1,2}^2 u$  – изображения Лапласа, то

$$L[D_{1,1}^2 u] = p_1^2 L[u] - p_1 L_2[u(0, t_2)] - L_2[D_1 u(0, t_2)],$$

$$L[D_{2,2}^2 u] = p_2^2 L[u] - p_2 L_1[u(t_1, 0)] - L_1[D_2 u(t_1, 0)],$$

$$L[D_{1,2}^2 u] = p_1 p_2 L[u] - p_1 L_1[u(t_1, 0)] - L_2[u(0, t_2)] + u(0, 0).$$

**Теорема о сдвиге.** Пусть  $G(p_1, p_2)$  изображение Лапласа функции  $g(t_1, t_2)$ , а функция  $f(t_1, t_2)$  определяется формулой (9), то выполнено равенство

$$L[f(\alpha t_1, \beta t_2, \alpha t_1^0, \beta t_2^0)g(t_1, t_2)] = G(p_1 + \alpha, p_2 + \beta).$$

**Свертка. Теорема о свертке.** Сверткой двух оригиналов  $f, g$  назовем функцию  $f * g$ , определяемую равенством

$$f * g = J[J^{-1}[f] * J^{-1}[g]].$$

**Теорема.** Если  $f, g$  – оригиналы, то их свертка  $f * g$  также оригинал, причем

$$L[f * g] = L[f]L[g].$$

Доказательство. Воспользуемся определением обобщённого двойного преобразования Лапласа

$$L = \tilde{L}J^{-1}.$$

Тогда получим

$$L[f * g] = \tilde{L}J^{-1}[J[J^{-1}[f] * J^{-1}[g]]] = \tilde{L}[J^{-1}[f] * J^{-1}[g]] = \tilde{L}[f * g] = \tilde{L}[f]L[g] = L[f]L[g].$$

#### 4. Применения обобщённого двойного преобразования Лапласа к решению дифференциальных уравнений в частных производных.

(а) решить задачу Коши для уравнения

$$D_1 u - D_2 u = 0, t_1 > 0, t_2 > 0$$

по начальным условиям

$$u(t_1, 0) = f(t_1), u(0, t_2) = f(t_2).$$

Применим обобщённое двойное преобразование Лапласа. В изображениях получим

$$(p_1 - p_2)L[u] = L_1[f] - L_2[f],$$

Тогда

$$L[u] = \frac{L_1[f] - L_2[f]}{p_1 - p_2},$$

Из определения 1 следует, что

$$L[\tilde{u}] = \frac{L_1[\tilde{f}] - L_2[\tilde{f}]}{p_1 - p_2},$$

В работе [3] найдено решение модельной задачи Коши для уравнения

$$\tilde{u}_{t_1} - \tilde{u}_{t_2} = 0, t_1 > 0, t_2 > 0$$

по начальным условиям

$$\tilde{u}(t_1, 0) = \tilde{f}(t_1), \tilde{u}(0, t_2) = \tilde{f}(t_2).$$

Решение имеет вид

$$\tilde{u}(t_1, t_2) = \tilde{f}(t_1 + t_2).$$

Следовательно,  $u(t_1, t_2) = J[\tilde{u}(t_1, t_2)]$ . В итоге получим решение рассматриваемой задачи

$$\begin{cases} u(t_1, t_2) = \tilde{f}(a_1 t_1 + b_1 t_2), t \in D_{00}, \\ u(t_1, t_2) = \tilde{f}(a_2(t_1 - t_1^0) + a_1 t_1^0 + b_1 t_2), t \in D_{10}, \\ u(t_1, t_2) = \tilde{f}(a_1 t_1 + b_2(t_2 - t_2^0) + b_1 t_2^0), t \in D_{10}, \\ u(t_1, t_2) = \tilde{f}(a_2(t_1 - t_1^0) + a_1 t_1^0, b_1 t_2 + b_2(t_2 - t_2^0) + b_1 t_2^0), t \in D_{11}. \end{cases} \quad (11)$$

В формулах (11) функция  $\tilde{f}(t_1)$  определена по формуле (5).

(b) Решить задачу Коши для уравнения

$$D_{1,2}^2 u = 0, t_1 > 0, t_2 > 0$$

по начальным условиям

$$u(t_1, 0) = f(t_1), u(0, t_2) = g(t_2)$$

и условиям согласования  $f(0) = g(0) = 0$ . Применим обобщённое двойное преобразование Лапласа. Применяя следствие из теоремы 5, в изображениях получим задачу

$$p_1 p_2 L[u] = p_1 L_1[f] + p_2 L_2[g].$$

Тогда

$$L[u] = \frac{1}{p_2} L_1[f] + \frac{1}{p_1} L_2[g].$$

Возвращаясь к оригиналам, с учетом свойства (3) получим решение задачи Коши

$$u(t_1, t_2) = f(t_1) + g(t_2).$$

**5. Заключение.** Представлено обобщённое двойное интегральное преобразование Лапласа на основе оператора дифференцирования с кусочно-постоянным множителем. Доказаны основные свойства: теорема о сдвиге, теоремы о дифференцировании оригинала и свертки. Установлен аналог формулы обращения Меллина – Лапласа. Метод операторов преобразования позволил связать обобщённое и классическое преобразования Лапласа, а также разработать эффективный алгоритм вычисления обобщённого преобразования Лапласа. Рассматриваются приложения обобщённого преобразования Лапласа для решения задач математической физики. Решена задача Коши для уравнения колебаний струны с кусочно-постоянными коэффициентами.

## References

1. Aghili A. 2017. New trends in Laplace type integral transforms with applications. *Boletim da Sociedade Paranaense de Matematica*. 35(1): 173–193.
2. Baeumer B. 2003. On the Inversion of the Convolution and Laplace Transform. *Transactions of the American Mathematical Society*. 1201–1212.
3. Brychkov Yu. A., Prudnikov A. P., Shishov V. S. 1979. Operational calculus. *Itogi Nauki i Tekhn. Ser. Mat. Anal.*, 16, VINITI, Moscow, 99–148; *J. Soviet Math.*, 15(6) (1981):733–765.
4. Ermolova N. Y., Tirkkonen O. 2014. Laplace Transform of Product of Generalized Marcum Q, Bessel I, and Power Functions With Applications. *IEEE Transactions on Signal Processing* IEEE Trans. Signal Process. Signal Processing, IEEE Transactions on. pp. 2938–2944 Jun.

5. Ganzha E. I. 2012. On Laplace and Dini transformations for multidimensional equations with a decomposable principal symbol. *Programming and Computer Software*. 38: 150–155.
6. Gonzalez-Acuna, Rafael G., Gutierrez-Vega, Julio C. 2019. Transition integral transform obtained from generalization of the Fourier transform. *Ain Shams Engineering Journal*. 10(4): 841–845.
7. Jarad F., Abdeljawad Th. 2018. A modified Laplace transform for certain generalized fractional operators. *Results in Nonlinear Analysis*. 1(2): 88–98.
8. Koepf W., Kim I., Rathie A. K. 2019. On a New Class of Laplace-Type Integrals Involving Generalized Hypergeometric Functions. *Axioms*. 8(3): 87.
9. Li S., Shemyakova E., Voronov Th. 2017. Darboux transformations for differential operators on the superline. *Russian Mathematical Surveys*. 70(6): 1173–1175.
10. Matveev V. B., Salle M. A. 1991. *Darboux transformations and solitons*. Springer Series in Nonlinear Dynamics. Springer-Verlag, Berlin.
11. Milovanovic G. V., Parmar R. K., Rathie A. K. 2018. A study of generalized summation theorems for the series with an applications to Laplace transforms of convolution type integrals involving Kummer's functions. *Applicable analysis and discrete mathematics*. 257–272.
12. Napalkov V. V., Mullabaeva A. U. 2015. On one class of differential operators and their application. *Proc. Steklov Inst. Math*. 288(1): 142–155.
13. Pinelas S., Xavier G. B. A., Kumar S. U. Vasantha, Meganathan M. 2017. Laplace – Fibonacci transform by the solution of second order generalized difference equation. *Non autonomous Dynamical Systems*. 4(1): 22–30.
14. Sharma V. D., Thakare M. M. 2016. Introduction of generalized Laplace-fractional Mellin transform. *International journal of engineering sciences & research technology* 5. 667–670.
15. Sharma V. D., Thakare M. M. 2013. Generalized Laplace-Fractional Mellin Transform and Operators. *International Journal of Pure & Applied Sciences & Technology*. 16(1): 20–25.
16. Tsarev S. P. 2005. Generalized Laplace Transformations and Integration of Hyperbolic Systems of Linear Partial Differential Equations. In: Labahn, G. (ed.) *Proc. ISSAC 2005*. 325–331. ACM Press.
17. Zaikina S. M. 2014. Obobshchyonnoe integralnoe preobrazovanie Laplasy i ego primeneniye k resheniyu nekotorykh integralnykh uravneniy [Generalized Integral Laplace Transform and Its Application to Solving Some Integral Equations]. *Vestnik Samarskogo Gosudarstvennogo Tehniveskogo Universiteta. Seriya: Fiziko-Matematicheskie Nauki*. 1(34): 19–24.
18. Jeffreys H. and Jeffreys B. 1956. *Methods of Mathematical Physics*, 3rd ed., Cambridge Univ. Press.
19. Sitnik S. M., Yaremko O., Yaremko N. 2020. *Transmutation Operators and Applications. Transmutation Operators Boundary Value Problems*, Springer Nature Switzerland. 447–466.
20. Yaremko O. E. 2004. Transformation operator and boundary value problems, *Differential Equation*. 40(8): 1149–1160.

Получена 11.11.2020

---

**Яремко Олег Эмануилович** – доктор физико-математических наук, доцент, профессор Московского государственного технологического университета (Станкин)

 <http://orcid.org/0000-0003-4619-0527>

Вадковский пер., 1, г. Москва, 127055, Россия

E-mail: [yareмки8@gmail.com](mailto:yareмки8@gmail.com)

**Яремко Наталия Николаевна** – доктор педагогических наук, доцент, профессор Пензенского государственного университета

 <http://orcid.org/0000-0003-1491-624X>

ул. Красная, 40, г. Пенза, 440026, Россия

E-mail: [yareмки@mail.ru](mailto:yareмки@mail.ru)

**ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ ЛАВРЕНТЬЕВА – БИЦАДЗЕ  
С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ГЕРАСИМОВА – КАПУТО**

**О. Х. Масаева**

(Статья представлена членом редакционной коллегии А. В. Глушаком)

Институт прикладной математики и автоматизации Кабардино-Балкарского научного центра РАН,  
г. Нальчик, 360000, Россия

E-mail: [olesya.masaeva@yandex.ru](mailto:olesya.masaeva@yandex.ru)

**Аннотация.** Исследована задача Дирихле для дифференциального уравнения в частных производных второго порядка с дробной производной по временной переменной в прямоугольной области. В случае если порядок дробного дифференцирования равен двум, рассматриваемое уравнение обращается в уравнение Лаврентьева – Бицадзе. Рассмотрены вопросы доказательства существования и единственности регулярного решения.

**Ключевые слова:** функция типа Миттаг – Леффлера, дробная производная Герасимова – Капуто, уравнение Лаврентьева – Бицадзе, критерий единственности решения.

**Для цитирования:** Масаева О. Х., 2020. Задача Дирихле для обобщенного уравнения Лаврентьева – Бицадзе с дробной производной Герасимова – Капуто. Прикладная математика & Физика. 52(4): 246–254.

DOI 10.18413/2687-0959-2020-52-4-246-254.

---

**DIRICHLET PROBLEM FOR THE GENERALIZED LAVRENT'EV-BITSADZE EQUATION  
WITH THE GERASIMOV-CAPUTO DERIVATIVE**

**O. Kh. Masaeva**

(Article submitted by a member of the editorial board A. V. Glushak)

Institute for Applied Mathematics and Automation of Kabardino-Balkar Scientific Center of RAS,  
Nalchik, 360000, Russia

E-mail: [olesya.masaeva@yandex.ru](mailto:olesya.masaeva@yandex.ru),

Received November 23, 2020

**Abstract.** Dirichlet problem for a second-order linear differential equation with a fractional derivative in a rectangular domain is investigated. If the order of fractional differentiation is equal to two, the considered equation turns into the Lavrent'ev-Bitsadze equation. The questions of a proof of an existence and uniqueness of a regular solution are considered.

**Key words:** Mittag-Leffler type function, Gerasimov-Caputo fractional derivative, Lavrent'ev-Bitsadze equation, solution uniqueness criterion

**For citation:** O. Kh. Masaeva. 2020. Dirichlet Problem for the Generalized Lavrent'ev-Bitsadze Equation with the Gerasimov-Caputo Derivative. Applied Mathematics & Physics. 52(4): 246–254 (in Russian).

DOI 10.18413/2687-0959-2020-52-4-246-254.

---

**1. Введение.** Рассмотрим в области  $D = \{(x, y) : 0 < x < r, a < y < b\}, a < 0, b > 0$ , уравнение

$$Lu(x, y) \equiv \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \text{sign } y \frac{\partial^\alpha}{\partial y^\alpha} \right) u(x, y) = 0, \quad (1)$$

где  $1 < \alpha < 2$ ,  $\frac{\partial^\alpha}{\partial y^\alpha}$  =  $\partial_{0y}^\alpha$  означает операцию дифференцирования (в смысле Герасимова – Капуто) порядка  $\alpha$  по переменной  $y$ ;  $\partial_{0s}^\alpha g(s) = D_{0s}^{\alpha-2} \frac{d^2}{ds^2} g(s)$ ,  $D_{0s}^\delta$  – оператор дробного интегро-дифференцирования Римана-Лиувилля порядка  $\delta$  с началом в точке 0 [5, с. 9].

Как вытекает из определения операторов дробного дифференцирования в случае если  $\alpha = 2$ , уравнение (1) совпадает с уравнением Лаврентьева – Бицадзе

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \text{sign } y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Дифференциальные уравнения в частных производных дробного порядка лежат в основе математического моделирования различных физических процессов и явлений окружающей среды, имеющих фрактальную природу [5], [1].

Уравнения в частных производных дробного порядка, не превосходящего двух, исследовались в работах [15], [9], [14], [12] и др. В указанных работах в основном изучались диффузионно-волновые уравнения. Более подробную библиографию можно найти в работах [9] и [14].

В работах [16] и [17] исследовалось уравнение

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} u - \frac{\partial^\gamma}{\partial y^\gamma} u_y = 0, \quad 0 < \gamma < 1,$$

соответствующее в случае, когда  $\gamma = 1$  уравнению смешанного типа в рассматриваемой области.

Задача Дирихле для модельного уравнения смешанного типа и более общего уравнения в ограниченных прямоугольных областях была исследована в работах [13] и [10].

Данная работа посвящена исследованию вопросов доказательств существования и единственности решения задачи Дирихле для уравнения (1) в области  $D$ .

**2. Постановка задачи.** Регулярным решением уравнения (1) в области  $D$  назовем функцию  $u = u(x, y)$  такую, что  $u \in C(\bar{D}) \cap C^1(D)$ ,  $u_{xx}, \partial_{0y}^\alpha u \in C(D^- \cup D^+)$  и удовлетворяющую уравнению (1) во всех точках  $(x, y) \in D^- \cup D^+$ ;

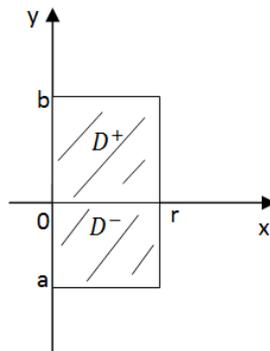


Рис. 1.  $D^- = D \cap \{y < 0\}$ ,  $D^+ = D \cap \{y > 0\}$

Fig. 1.  $D^- = D \cap \{y < 0\}$ ,  $D^+ = D \cap \{y > 0\}$

**Задача.** Найти в области  $D$  регулярное решение уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям

$$u(0, y) = 0, \quad u(r, y) = 0, \quad a < y < b, \tag{2}$$

$$u(x, a) = \varphi(x), \quad u(x, b) = \psi(x), \quad 0 < x < r, \tag{3}$$

где  $\varphi(x)$ ,  $\psi(x)$  – заданные непрерывные функции на отрезке  $[0, r]$ ,  $\varphi(0) = \varphi(r) = 0$ ,  $\psi(0) = \psi(r) = 0$ .

**3. Функция типа Миттаг – Леффлера.** Рассмотрим функцию типа Миттаг – Леффлера [2, с. 117]:

$$E_{\beta, \mu}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\beta k + \mu)}, \quad \beta > 0, \mu \in \mathbb{C}. \tag{4}$$

Напомним [2, с. 142], что функция (4) на вещественной оси, если

$$0 < \beta < 2,$$

может иметь только конечное число нулей;

В частности, если

$$1 < \beta < 2, \quad \mu \geq \frac{3}{2}\beta,$$

функция (4) не имеет вещественных нулей [9]. В случае, когда

$$\frac{5}{3} \leq \beta < 2, \quad \mu = 2,$$

она имеет не менее двух нулей [7].

**4. Функция  $N_{\xi, \eta}(\lambda)$ .** Обозначим через

$$N_{\xi, \eta}(\lambda) = \xi E_{\alpha, 2}(-\lambda \xi^\alpha) E_{\alpha, 1}(\lambda \eta^\alpha) - \eta E_{\alpha, 2}(\lambda \eta^\alpha) E_{\alpha, 1}(-\lambda \xi^\alpha),$$

где  $\xi, \eta, \lambda > 0$ .

**Лемма.** Пусть

$$h = \max\{t : E_{\alpha,2}(-t)E_{\alpha,1}(-t) = 0, t > 0\}. \quad (5)$$

Если

$$\xi^\alpha \geq \frac{h}{\lambda}, \quad (6)$$

то

$$N_{\xi,\eta}(\lambda) > 0.$$

**Доказательство.** Поскольку

$$E_{\alpha,1}(\lambda\eta^\alpha) > 0, \quad \eta E_{\alpha,2}(\lambda\eta^\alpha) > 0, \quad (7)$$

для всех  $\lambda, \xi, \eta > 0$ , то рассмотрим поведение функций  $E_{\alpha,1}(-\lambda\xi^\alpha)$  и  $\xi E_{\alpha,2}(-\lambda\xi^\alpha)$  для  $\lambda$  и  $\xi$ , удовлетворяющих условию (6). Воспользуемся асимптотическим разложением функции (4) для больших значений  $|z|$ : при  $|\arg z| \leq \rho\pi$

$$E_{\beta,\mu}(z) = 1/\beta z^{(1-\mu)/\beta} e^{z^{1/\beta}} - \sum_{k=1}^n \frac{z^{-k}}{\Gamma(\mu - \beta k)} + O\left(\frac{1}{|z|^{n+1}}\right), \quad (8)$$

и при  $\pi \geq |\arg z| \geq \rho\pi$

$$E_{\beta,\mu}(z) = -\sum_{k=1}^n \frac{z^{-k}}{\Gamma(\mu - \beta k)} + O\left(\frac{1}{|z|^{n+1}}\right), \quad (9)$$

где  $\beta \in (0, 2)$ ,  $\rho \in (\beta/2, \min\{1, \beta\})$  [2, с. 134]. По формуле (9) при больших значениях  $\lambda\xi^\alpha$ :

$$\xi E_{\alpha,2}(-\lambda\xi^\alpha) = \frac{\lambda^{-1}\xi^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} + O(\lambda^{-2}).$$

Отсюда имеем  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \xi E_{\alpha,2}(-\lambda\xi^\alpha) = 0+$ . Значит, для всех  $\lambda\xi^\alpha > \max\{t : E_{\alpha,2}(-t) = 0\}$ , имеем  $\xi E_{\alpha,2}(-\lambda\xi^\alpha) > 0$ . Аналогично, из (9) заключаем

$$E_{\alpha,1}(-\lambda\xi^\alpha) = \frac{\lambda^{-1}\xi^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} + O(\lambda^{-2}),$$

и  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} E_{\alpha,1}(-\lambda\xi^\alpha) = 0-$ . Тогда  $E_{\alpha,1}(-\lambda\xi^\alpha) < 0$  для всех  $\lambda\xi^\alpha > \max\{t : E_{\alpha,1}(-t) = 0\}$ . Таким образом, имеем

$$\xi E_{\alpha,2}(-\lambda\xi^\alpha) \geq 0, \quad E_{\alpha,1}(-\lambda\xi^\alpha) \leq 0, \quad (10)$$

для  $\lambda$  и  $\xi$ , удовлетворяющих условию (6). Причем функции (10) одновременно в ноль не обращаются. Следовательно, из формул (7) и (10) имеем,  $N_{\xi,\eta}(\lambda) > 0$ , что и требовалось доказать.

**5. Существование решения.** Для сформулирования теоремы существования поставленной выше задачи, нам понадобится класс функций  $f(x)$ , удовлетворяющих условиям Дирихле в промежутке  $(c, d)$ , т. е. функций, которые имеют конечное число разрывов первого рода в этом промежутке; и для которых, кроме того, промежутки  $(c, d)$  можно разбить на конечное число таких промежутков, в каждом из которых  $f(x)$  изменяется монотонно [11, с. 440].

**Теорема 1.** Если функции  $\varphi(x) \in C^2[0, r]$ ,  $\psi(x) \in C[0, r]$  имеют производные  $\varphi'''(x)$  и  $\psi'(x)$  соответственно, удовлетворяющие условиям Дирихле в промежутке  $(0, r)$ , выполняются условия согласования  $\varphi''(0) = \varphi''(r) = 0$ , и

$$N_{|a|,b}(\lambda_n) \neq 0, \quad \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{r}\right)^2, \quad (11)$$

то существует регулярное решение задачи (1)–(3).

**Доказательство.** Предположим, что мы знаем след решения  $u(x, y)$  на линии  $y = 0$  и

$$u(x, 0) = \tau(x), \quad 0 < x < r. \quad (12)$$

$\tau(x)$  – некоторая непрерывная на отрезке  $[0, r]$  функция. Тогда в области  $D^+$  искомая функция удовлетворяет уравнению

$$u_{xx}(x, y) + \partial_{0y}^\alpha u(x, y) = 0, \quad (13)$$

и краевым условиям

$$u(0, y) = 0, \quad u(r, y) = 0, \quad 0 < y < b, \quad (14)$$

$$u(x, 0) = \tau(x), \quad u(x, b) = \psi(x), \quad 0 < x < r. \quad (15)$$

Напомним [3], что решение этой задачи имеет вид:

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \psi_n \frac{y E_{\alpha,2}(\lambda_n y^\alpha)}{b E_{\alpha,2}(\lambda_n b^\alpha)} + \tau_n \frac{b E_{\alpha,2}(\lambda_n b^\alpha) E_{\alpha,1}(\lambda_n y^\alpha) - y E_{\alpha,2}(\lambda_n y^\alpha) E_{\alpha,1}(\lambda_n b^\alpha)}{b E_{\alpha,2}(\lambda_n b^\alpha)} \right] \sin \sqrt{\lambda_n} x \quad (16)$$

где  $\tau_n = \frac{2}{r} \int_0^r \tau(x) \sin \sqrt{\lambda_n} x \, dx$ ,  $\psi_n = \frac{2}{r} \int_0^r \psi(x) \sin \sqrt{\lambda_n} x \, dx$ .

В области  $D^-$  функция  $u(x, y)$  будет удовлетворять уравнению

$$u_{xx}(x, y) - \partial_{0y}^\alpha u(x, y) = 0, \quad (17)$$

и условиям

$$u(0, y) = 0, \quad u(r, y) = 0, \quad a < y < 0, \quad (18)$$

$$u(x, a) = \varphi(x), \quad u(x, 0) = \tau(x), \quad 0 < x < r. \quad (19)$$

Функция

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \varphi_n \frac{\sin_\alpha(\lambda_n^{1/\alpha} |y|)}{\sin_\alpha(\lambda_n^{1/\alpha} |a|)} + \tau_n \left( \cos_\alpha(\lambda_n^{1/\alpha} |y|) - \frac{\sin_\alpha(\lambda_n^{1/\alpha} |y|)}{\sin_\alpha(\lambda_n^{1/\alpha} |a|)} \cos_\alpha(\lambda_n^{1/\alpha} |a|) \right) \right] \sin \sqrt{\lambda_n} x, \quad (20)$$

есть искомое решение задачи (17)–(19) [4],  $\varphi_n$  – коэффициенты Фурье функции  $\varphi(x)$  на отрезке  $[0, r]$ :

$$\sin_\gamma(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{\gamma k + 1}}{\Gamma(\gamma k + 2)}, \quad \cos_\gamma(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{\gamma k}}{\Gamma(\gamma k + 1)}$$

это обобщенные тригонометрические функции по терминологии Нахушева А. М. [5, с. 238].

Примем во внимание, что по условию исследуемой задачи у нас должно быть

$$u_y(x, 0+) = u_y(x, 0-). \quad (21)$$

Из формулы (16), дифференцируя почленно по  $y$ , найдем

$$u_y(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \psi_n \frac{E_{\alpha,1}(\lambda_n y^\alpha)}{b E_{\alpha,2}(\lambda_n b^\alpha)} + \tau_n \frac{b E_{\alpha,2}(\lambda_n b^\alpha) \lambda_n y^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda_n y^\alpha) - E_{\alpha,1}(\lambda_n y^\alpha) E_{\alpha,1}(\lambda_n b^\alpha)}{b E_{\alpha,2}(\lambda_n b^\alpha)} \right] \sin \sqrt{\lambda_n} x. \quad (22)$$

Отсюда при  $y = 0$  имеем

$$u_y(x, 0+) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{\psi_n}{b E_{\alpha,2}(\lambda_n b^\alpha)} - \tau_n \frac{E_{\alpha,1}(\lambda_n b^\alpha)}{b E_{\alpha,2}(\lambda_n b^\alpha)} \right] \sin \sqrt{\lambda_n} x. \quad (23)$$

Аналогично дифференцированием по  $y$  из (20) получим

$$u_y(x, 0-) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{\varphi_n}{|a| E_{\alpha,2}(-\lambda_n |a|^\alpha)} - \tau_n \frac{E_{\alpha,1}(-\lambda_n |a|^\alpha)}{|a| E_{\alpha,2}(-\lambda_n |a|^\alpha)} \right] \sin \sqrt{\lambda_n} x. \quad (24)$$

Из равенств (23) и (24) с учетом соотношения (21) и условия (11) получим

$$\tau_n = \psi_n \frac{|a| E_{\alpha,2}(-\lambda_n |a|^\alpha)}{N_{|a|,b}(\lambda_n)} - \varphi_n \frac{b E_{\alpha,2}(\lambda_n b^\alpha)}{N_{|a|,b}(\lambda_n)}. \quad (25)$$

Подставляя (25) в (16) и (20), получим искомое решение соответственно в области  $D^+$  и  $D^-$

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n^\pm(x, y), \quad (26)$$

$$u_n^\pm(x, y) = \psi_n \left( S_n(y) + \frac{|a| E_{\alpha,2}(-\lambda_n |a|^\alpha)}{N_{|a|,b}(\lambda_n)} C_n(y) \right) +$$

$$+ \varphi_n \frac{bE_{\alpha,2}(\lambda_n b^\alpha)}{N_{|a|,b}(\lambda_n)} C_n(y) \Big] \sin \sqrt{\lambda_n} x, \quad (27)$$

$$S_n(y) = \frac{yE_{\alpha,2}(\lambda_n y^\alpha)}{bE_{\alpha,2}(\lambda_n b^\alpha)}, \quad C_n(y) = E_{\alpha,1}(\lambda_n y^\alpha) - \frac{yE_{\alpha,2}(\lambda_n y^\alpha)}{bE_{\alpha,2}(\lambda_n b^\alpha)} E_{\alpha,1}(\lambda_n b^\alpha),$$

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n^-(x, y), \quad (28)$$

$$u_n^-(x, y) = \left[ \varphi_n \left( \frac{\sin_\alpha(\lambda_n^{1/\alpha} |y|)}{\sin_\alpha(\lambda_n^{1/\alpha} |a|)} - \frac{bE_{\alpha,2}(\lambda_n b^\alpha)}{N_{|a|,b}(\lambda_n)} \left( \cos_\alpha(\lambda_n^{1/\alpha} |y|) - \frac{\sin_\alpha(\lambda_n^{1/\alpha} |y|)}{\sin_\alpha(\lambda_n^{1/\alpha} |a|)} \cos_\alpha(\lambda_n^{1/\alpha} |a|) \right) \right) \right] + \\ + \psi_n \frac{|a|E_{\alpha,2}(-\lambda_n |a|^\alpha)}{N_{|a|,b}(\lambda_n)} \left( \cos_\alpha(\lambda_n^{1/\alpha} |y|) - \frac{\sin_\alpha(\lambda_n^{1/\alpha} |y|)}{\sin_\alpha(\lambda_n^{1/\alpha} |a|)} \cos_\alpha(\lambda_n^{1/\alpha} |a|) \right) \Big] \sin \sqrt{\lambda_n} x. \quad (29)$$

Далее покажем сходимость рядов (54) и (28). Напомним, что справедливы оценки

$$0 \leq S_n(y) \leq 1, \quad 0 \leq C_n(y) \leq 1. \quad (30)$$

Доказательство можно найти в работе [3]. Из асимптотических представлений (8), (9) функции типа Миттаг – Леффлера имеем

$$N_{|a|,b}(\lambda_n) = O(\lambda_n^{-1} e^{\lambda_n^{\frac{1}{\alpha}} b}), \quad n \rightarrow \infty, \quad (31)$$

$$\frac{|a|E_{\alpha,2}(-\lambda_n |a|^\alpha)}{N_{|a|,b}(\lambda_n)} = O(e^{-\lambda_n^{\frac{1}{\alpha}} b}), \quad \frac{bE_{\alpha,2}(\lambda_n b^\alpha)}{N_{|a|,b}(\lambda_n)} = O(\lambda_n^{1-\frac{1}{\alpha}}), \quad n \rightarrow \infty, \quad (32)$$

$$\lambda_n^{1-1/\alpha} \sin_\alpha(\lambda_n^{1/\alpha} |y|) = \lambda_n |y| E_{\alpha,2}(-\lambda_n |y|^\alpha) = |y|^{1-\alpha} / \Gamma(2-\alpha) + O(\lambda_n^{-1} |y|^{1-2\alpha}), \quad \lambda_n |y|^\alpha \rightarrow \infty, \quad (33)$$

$$|\cos_\alpha(\lambda_n^{1/\alpha} |y|)| \leq M_1 / (1 + \lambda_n |y|^\alpha), \quad |\lambda_n^{-1/\alpha} \sin_\alpha(\lambda_n^{1/\alpha} |y|)| \leq |y| M_2 / (1 + \lambda_n |y|^\alpha). \quad (34)$$

Из соотношения (33) при  $y = a$  получаем, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n^{1-1/\alpha} \sin_\alpha(\lambda_n^{1/\alpha} |a|) = |a|^{1-\alpha} / \Gamma(2-\alpha) > 0$ . Следовательно, в силу условия (11) выполняется неравенство

$$|a|^{-1} \lambda_n^{1-1/\alpha} \sin_\alpha(\lambda_n^{1/\alpha} |a|) > C,$$

в котором  $C$  – положительная постоянная. Таким образом, с учетом (34) имеем

$$\left| \frac{\sin_\alpha(\lambda_n^{1/\alpha} |y|)}{\sin_\alpha(\lambda_n^{1/\alpha} |a|)} \right| \leq \frac{|y| M \lambda_n}{1 + \lambda_n |y|^\alpha}, \quad \left| \cos_\alpha(\lambda_n^{1/\alpha} |y|) - \frac{\sin_\alpha(\lambda_n^{1/\alpha} |y|)}{\sin_\alpha(\lambda_n^{1/\alpha} |a|)} \cos_\alpha(\lambda_n^{1/\alpha} |a|) \right| \leq C, \quad \lambda_n |y|^\alpha \geq 0. \quad (35)$$

Для коэффициентов Фурье  $\varphi_n, \psi_n$  имеем оценки [11, с. 460]

$$\varphi_n = O(n^{-4}), \quad \psi_n = O(n^{-3}), \quad n \rightarrow \infty. \quad (36)$$

С помощью формул (30)–(32), (35), (36) заключаем, что ряды (27), (28) сходятся абсолютно и равномерно в области  $\bar{D}$ , а также, что ряды  $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n u_n^+(x, y)$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n u_n^-(x, y)$ , полученные из них дифференцированием по  $x$  и  $y$  порядков 2 и  $\alpha$  соответственно, – в областях  $D^+$  и  $D^-$ .

## 6. Критерий единственности решения. Имеет место

**Теорема 2.** *Задача Дирихле (1)–(3) может иметь не более одного регулярного решения в классе функций  $C^1(\bar{D})$  тогда и только тогда, когда*

$$N_{|a|,b}(\lambda_n) \neq 0, \quad (37)$$

$n = 1, 2, \dots$  **Доказательство.** Покажем, что исследуемая задача при однородных краевых условиях и выполнении условия (37) имеет только тривиальное решение. Пусть  $v(x, y) = \varphi_n(x) \omega_n(y)$ , где

$$\varphi_n(x) = \sin \sqrt{\lambda_n} x,$$

$$\omega_n(y) = \begin{cases} (b-y)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha} [\lambda(b-y)^\alpha], & 0 < y \leq b, \\ (y-a)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha} [-\lambda(y-a)^\alpha], & a \leq y < 0. \end{cases}$$

Заметим, что функция  $v(x, y)$  для любого  $n \in \mathbb{N}$  представляет собой решение уравнения

$$\mathbf{L}^* v \equiv \begin{cases} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + D_{by}^\alpha v(x, y) = 0, & (x, y) \in D^+, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - D_{ay}^\alpha v(x, y) = 0, & (x, y) \in D^-, \end{cases}$$

удовлетворяющее условиям

$$v(0, y) = v(r, y) = 0. \tag{38}$$

В области  $D^+$  у нас есть

$$\begin{aligned} & \int_{D^+} (vLu - uL^*v) dx dy = \\ & = \int_0^b \left( v \frac{\partial u}{\partial x} - u \frac{\partial v}{\partial x} \right) \Big|_{x=0}^{x=r} dy + \int_0^r \left( \frac{\partial u}{\partial y} D_{by}^{\alpha-2} v - u \frac{\partial}{\partial y} D_{by}^{\alpha-2} v \right) \Big|_{y=0}^{y=b} dx. \end{aligned} \tag{39}$$

Для области  $D^-$  аналогичная формула будет иметь вид

$$\begin{aligned} & \int_{D^-} (vLu - uL^*v) dx dy = \\ & = \int_a^0 \left( v \frac{\partial u}{\partial x} - u \frac{\partial v}{\partial x} \right) \Big|_{x=0}^{x=r} dy + \int_0^r \left( \frac{\partial u}{\partial y} D_{ay}^{\alpha-2} v - u \frac{\partial}{\partial y} D_{ay}^{\alpha-2} v \right) \Big|_{y=a}^{y=0} dx. \end{aligned} \tag{40}$$

Поскольку  $u(0, x) = u(r, y) = 0, v(0, y) = v(r, y) = 0$ , из соотношений (39), (40) имеем

$$\int_0^r \left( \frac{\partial u}{\partial y} D_{by}^{\alpha-2} v - u \frac{\partial}{\partial y} D_{by}^{\alpha-2} v \right) \Big|_{y=0}^{y=b} dx = 0, \tag{41}$$

$$\int_0^r \left( \frac{\partial u}{\partial y} D_{ay}^{\alpha-2} v - u \frac{\partial}{\partial y} D_{ay}^{\alpha-2} v \right) \Big|_{y=a}^{y=0} dx = 0. \tag{42}$$

Далее упростим подынтегральные выражения с помощью формулы дифференцирования

$$\begin{aligned} & D_{at}^\gamma |t - a|^{\mu-1} E_{1/\rho}(\lambda|t - a|^\rho; \mu) = \\ & = |t - a|^{\mu-\gamma-1} E_{1/\rho}(\lambda|t - a|^\rho; \mu - \gamma), \quad \gamma \in \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{43}$$

$\mu > 0$ , если  $\gamma \notin \mathbb{N} \cup \{0\}$ , и  $\mu \in \mathbb{R}$ , если  $\gamma \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  [9]. Получим

$$D_{by}^{\alpha-2} v = \varphi_n(x) D_{by}^{\alpha-2} \omega_n(y) = \varphi_n(x) (b - y) E_{\alpha,2}[\lambda(b - y)^\alpha].$$

Отсюда следует

$$\lim_{y \rightarrow b} D_{by}^{\alpha-2} v = 0, \quad y > 0, \tag{44}$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} D_{by}^{\alpha-2} v = \varphi_n(x) b E_{\alpha,2}(\lambda b^\alpha), \quad y > 0. \tag{45}$$

По определению

$$-\frac{\partial}{\partial y} D_{by}^{\alpha-2} v = D_{by}^{\alpha-1} v.$$

Поэтому вместо  $-\frac{\partial}{\partial y} D_{by}^{\alpha-2} v$  вычислим

$$D_{by}^{\alpha-1} v = \varphi_n(x) D_{by}^{\alpha-1} \omega_n(y) = \varphi_n(x) E_{\alpha,1}[\lambda(b - y)^\alpha].$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} D_{by}^{\alpha-1} v = \varphi_n(x) E_{\alpha,1}[\lambda b^\alpha], \quad y > 0. \tag{46}$$

Аналогично, с помощью формулы (43) вычислим

$$\begin{aligned} D_{ay}^{\alpha-2} v &= \varphi_n(x) D_{ay}^{\alpha-2} (y - a)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda(y - a)^\alpha) = \\ &= \varphi_n(x) (y - a) E_{\alpha,2}[-\lambda(y - a)^\alpha]. \end{aligned}$$

$$\lim_{y \rightarrow a} D_{ay}^{\alpha-2} v = 0, \quad y < 0. \quad (47)$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} D_{ay}^{\alpha-2} v = \varphi_n(x) (-a) E_{\alpha,2} (-\lambda(-a)^\alpha), \quad y < 0. \quad (48)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} D_{ay}^{\alpha-2} v &= D_{ay}^{\alpha-1} v = \varphi_n(x) D_{ay}^{\alpha-1} (y-a)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha} (-\lambda(y-a)^\alpha) = \\ &= \varphi_n(x) E_{\alpha,1} [-\lambda(y-a)^\alpha]. \\ \lim_{y \rightarrow 0} D_{ay}^{\alpha-1} v &= \varphi_n(x) E_{\alpha,1} [-\lambda(-a)^\alpha], \quad y < 0. \end{aligned} \quad (49)$$

С учетом (44)–(49) система (41), (42) примет вид

$$\begin{aligned} b E_{\alpha,2} (\lambda b^\alpha) \int_0^r u_y(x, 0) \varphi_n(x) dx + E_{\alpha,1} (\lambda b^\alpha) \int_0^r u(x, 0) \varphi_n(x) dx &= 0, \\ a E_{\alpha,2} (-\lambda |a|^\alpha) \int_0^r u_y(x, 0) \varphi_n(x) x dx + E_{\alpha,1} (-\lambda |a|^\alpha) \int_0^r u(x, 0) \varphi_n(x) dx &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда в силу (37) следует, что

$$\int_0^r u_y(x, 0) \sin \sqrt{\lambda_n} x dx = 0, \quad \int_0^r u(x, 0) \sin \sqrt{\lambda_n} x dx = 0. \quad (50)$$

Отметим, что всякую функцию  $\varphi(x) \in C_0^\infty(0, r)$  можно разложить в равномерном и абсолютно сходящийся ряд Фурье  $\sum_{n=0}^\infty \varphi_n \sin \sqrt{\lambda_n} x$ . Тогда из равенств (50) мы имеем

$$\int_0^r u_y(x, 0) \sum_{n=0}^\infty \varphi_n \sin \sqrt{\lambda_n} x dx = 0, \quad \int_0^r u(x, 0) \sum_{n=0}^\infty \varphi_n \sin \sqrt{\lambda_n} x dx = 0.$$

Тогда на основании леммы Лагранжа [6, с. 24] заключаем, что

$$u_y(x, 0) = 0, \quad u(x, 0) = 0 \quad \forall x \in (0, r). \quad (51)$$

С учетом формул (51) и обобщенной формулы Ньютона – Лейбница [5, с. 80] можно записать

$$\partial_{0y}^\alpha u = D_{0y}^{\alpha-2} u_{yy} = D_{0y}^\alpha u - \frac{|y|^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} u_y(x, 0) - \frac{|y|^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} u(x, 0) = D_{0y}^\alpha u.$$

Тогда уравнение (1) при  $y < 0$  перепишем в виде

$$Lu \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - D_{0y}^\alpha u = 0, \quad a < y < 0. \quad (52)$$

Так как  $u(x, 0) = 0$ ,

$$\lim_{y \rightarrow 0} D_{0y}^{\alpha-1} u = \lim_{y \rightarrow 0} D_{0y}^{\alpha-2} u_y.$$

Далее заметим

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow 0} D_{0y}^{\alpha-1} u &= \Gamma(1-\alpha) \lim_{y \rightarrow 0} y^{2-\alpha} u_y(x, y) = 0, \\ \lim_{y \rightarrow 0} D_{0y}^{\alpha-2} u &= \Gamma(1-\alpha) \lim_{y \rightarrow 0} y^{2-\alpha} u(x, y) = 0. \end{aligned} \quad (53)$$

Таким образом,  $u$  является решением уравнения (52), удовлетворяющим краевым условиям (53). Задача (2), (53) для уравнения (52) имеет только нулевое решение в области  $D^-$  [9, с. 123].

В силу (51) в области  $D^+$  функция  $u(x, y)$  является решением однородной задачи Дирихле  $u|_{\partial D^+} = 0$  для уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \partial_{0y}^\alpha u = 0.$$

Как показано в работе [3], эта задача имеет только решение  $u(x, y) = 0 \quad \forall (x, y) \in D^+$ . Таким образом,  $u(x, y) = 0$  во всей области  $D$ .

Пусть нарушено условие (37), тогда функция  $u(x, y) = u_D$ , где

$$u_D = (|a|E_{\alpha,2}(-\lambda|a|^\alpha)E_{\alpha,1}(\lambda y^\alpha) - yE_{\alpha,2}(\lambda y^\alpha)E_{\alpha,1}(-\lambda|a|^\alpha)) \sin \sqrt{\lambda_n}x, \quad (x, y) \in D^+,$$

$$u_D = (|y|E_{\alpha,2}(-\lambda|y|^\alpha)E_{\alpha,1}(\lambda b^\alpha) - bE_{\alpha,2}(\lambda b^\alpha)E_{\alpha,1}(-\lambda|y|^\alpha)) \sin \sqrt{\lambda_n}x, \quad (x, y) \in D^-,$$

является нетривиальным решением уравнения (1), удовлетворяющим условиям (2), (3) с  $\varphi(x) = 0$  и  $\psi(x) = 0$ . Теорема 2 доказана.

Из теорем 1 и 2 и приведенной выше леммы имеем

**Замечание.** Пусть функции  $\varphi(x) \in C^2[0, r]$ ,  $\psi(x) \in C[0, r]$  имеют производные  $\varphi'''(x)$  и  $\psi'(x)$  соответственно, удовлетворяющие условиям Дирихле в промежутке  $(0, r)$ , выполняются условия согласования  $\varphi''(0) = \varphi''(r) = 0$ , и  $\frac{|a|^\alpha}{r^2} \geq \frac{h}{\pi^2}$ , где  $h$  определяется соотношением (5), тогда существует единственное регулярное решение задачи (1)-(3) и имеет вид

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, y), \quad (54)$$

где функции  $u_n(x, y) = u_n^+(x, y)$ ,  $(x, y) \in D^+$ ,  $u_n(x, y) = u_n^-(x, y)$ ,  $(x, y) \in D^-$ , определяются с помощью формул (27), (29).

### Список литературы

1. Боголюбов А. Н., Кобликов А. А., Смирнова Д. Д., Шапкина Н. Е. 2013. Математическое моделирование сред с временной дисперсией при помощи дробного дифференцирования. Матем. моделирование, 25: 12, 50–64.
2. Джрбашян М. М. 1966. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М.: Наука. 672.
3. Масаева О. Х. 2012. Задача Дирихле для обобщенного уравнения Лапласа с производной Капуто. Дифференц. уравнения. 48 (3): 442–446.
4. Масаева О. Х. 2013. Задача Дирихле для нелокального волнового уравнения. Дифференц. уравнения. 49 (12): 1554–1559.
5. Нахушев А. М. 2003. Дробное исчисление и его применение. М., Физматлит, 272.
6. Нахушев А. М. 1995. Уравнения математической биологии. М.: Высшая школа, 301.
7. Попов А. Ю. 2006. О количестве вещественных собственных значений одной краевой задачи для уравнения второго порядка с дробной производной. Фундамент. и прикл. мат.-ка. 12 (6): 137–155.
8. Псху А. В. 2005. О вещественных нулях функции типа Миттаг – Леффлера. Матем. заметки, 77 (4): 592–599.
9. Псху А. В. 2005. Уравнения в частных производных дробного порядка. М., Наука. 199.
10. Сабитов К. Б. 2007. Задача Дирихле для уравнений смешанного типа в прямоугольной области. Док. акад. наук. 413 (1): 23–26.
11. Смирнов В. И. 1961. Курс высшей математики. Т. 2. М.: Физматлит. 630.
12. Agrawal O. P. 2002. Solution for a fractional diffusion-wave equation defined in a bounded domain. Nonlinear Dynam, 29-1(4): 145–155.
13. Cannon J. R. 1963. A Dirichlet problem for an equation of mixed type with a discontinuous coefficient. Ann. de Math. pura ed Appl. 61: 371–377.
14. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. 2006. Theory and applications of Fractional Differential Equations. – Amsterdam: Elsevier, 523.
15. Mainardi F. 1996. The fundamental solutions for the fractional diffusion-wave equation. Appl. Math. Lett. 9 (6), 23–28.
16. Maseeva O. Kh. 2017. Uniqueness of solutions to Dirichlet problems for generalized Lavrent'ev-Bitsadze equations with a fractional derivative, Electron. J. Differential Eq., 2017 (74): 1–8.

17. Masaeva O. Kh. 2020. Existence of solution to Dirichlet problem for generalized Lavrent'ev-Bitsadze equation with a fractional derivative, Progress in Fractional Differentiation and Applications. 6 (3): 239–244.

### References

1. Bogolyubov A. N., Koblikov A. A., Smirnova D. D., Shapkina N. E. 2013. A mathematical model of media with time dispersion using fractional differentiation. Mat. Model. 25 (12): 50–64 (in Russian).
2. Dzhrbashyan M. M. 1966. Integral'nye preobrazovaniya i predstavleniya funktsii v kompleksnoi oblasti [Integral Transforms and Representations of Functions in the Complex Domain]. Moscow. 672.
3. Masaeva O. Kh. 2012. Dirichlet Problem for the Generalized Laplace Equation with the Caputo Derivative. Differential Equations, 48 (3): 449–454 (in Russian).
4. Masaeva O. Kh. 2013. Dirichlet problem for a nonlocal wave equation. Differential Equations, 49 (12): 1518–1523 (in Russian).
5. Nakhushhev A. M. 2003. Drobnoe ischislenie i ego primeneniye [Fractional Calculus and Its Applications], Moscow. 272.
6. Nakhushhev A. M. 1995. Uravneniya matematicheskoi biologii [Equations of Mathematical Biology], Moscow. 301.
7. Popov A. Yu. 2008. On the number of real eigenvalues of a certain boundary-value problem for a second-order equation with fractional derivative. J. Math. Sci. 151 (1): 2726–2740 (in Russian).
8. Pskhu A. V. 2005. On the real zeros of a function of Mittag-Leffler type, Math. Notes, 77 (4): 546–552.
9. Pskhu A. V. 2005. Uravneniya v chastnykh proizvodnykh drobnogo poryadka [Partial Differential Equations of Fractional Order] Moscow, Nauka, 199.
10. Sabitov K. B. 2007. Dirichlet problem for mixed-type equations in a rectangular domain. Doklady Mathematics Pleiades Publishing, Ltd. 75 (2): 193–196.
11. Smirnov V. I. 1961. Kurs vysshei matematiki [Course of Higher Mathematics], Moscow: Gosudarstv. Izdat. Fiz.-Mat. Lit., 630.
12. Agrawal O. P. 2002. Solution for a fractional diffusion-wave equation defined in a bounded domain. Nonlinear Dynam, 29-1 (4): 145–155.
13. Cannon J. R. 1963. A Dirichlet problem for an equation of mixed type with a discontinuous coefficient. Ann. de Math. pura ed Appl. 61: 371–377.
14. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. 2006. Theory and applications of Fractional Differential Equations.– Amsterdam: Elsevier, 523.
15. Mainardi F. 1996. The fundamental solutions for the fractional diffusion-wave equation. Appl. Math. Lett. 9 (6), 23–28.
16. Masaeva O. Kh. 2017. Uniqueness of solutions to Dirichlet problems for generalized Lavrent'ev-Bitsadze equations with a fractional derivative, Electron. J. Differential Eq., 2017 (74): 1–8.
17. Masaeva O. Kh. 2020. Existence of solution to Dirichlet problem for generalized Lavrent'ev-Bitsadze equation with a fractional derivative, Progress in Fractional Differentiation and Applications. 6 (3): 239–244.

Получена 23.11.2020

---

Масаева Олеся Хажисмеловна – научный сотрудник отдела Дробного исчисления

 <http://orcid.org/0000-0002-0200-3702>

ул. Шортанова, 89А, Нальчик, 360000, Россия

E-mail: [olesya.masaeva@yandex.ru](mailto:olesya.masaeva@yandex.ru)

ОБ ИЗМЕНЕНИИ ХАРАКТЕРА УСТОЙЧИВОСТИ ТРИВИАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ  
ПРИ ПЕРЕХОДЕ ОТ МОДЕЛИ С СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ К МОДЕЛИ  
С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

М. В. Половинкина<sup>1</sup>, И. П. Половинкин<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Воронежский государственный университет инженерных технологий,  
Воронеж, 394036, Россия

E-mail: [polovinkina-marina@yandex.ru](mailto:polovinkina-marina@yandex.ru)

<sup>2</sup> Воронежский государственный университет,  
Воронеж, 394018, Россия

E-mail: [polovinkin@yandex.ru](mailto:polovinkin@yandex.ru)

**Аннотация.** Рассматривается вопрос об уточнении условий устойчивости тривиального стационарного решения при замене модели с сосредоточенными параметрами моделью с распределенными параметрами путем добавления слагаемых, моделирующих диффузионные процессы. В некоторых случаях тривиальное решение, неустойчивое в моделях без диффузионных членов, оказывается устойчивым в моделях с диффузионными членами.

**Ключевые слова:** модель с сосредоточенными параметрами, модель с распределенными параметрами, диффузионные модели, стационарное решение, устойчивость.

**Для цитирования:** Половинкина М. В., Половинкин И. П. 2020. Об изменении характера устойчивости тривиального решения при переходе от модели с сосредоточенными параметрами к модели с распределенными параметрами. Прикладная математика & Физика. 52(4): 255–261. DOI 10.18413/2687-0959-2020-52-4-255-261.

ABOUT CHANGE IN THE STABILITY CHARACTER OF THE TRIVIAL SOLUTION AT THE  
TRANSITION FROM A MODEL WITH CONCENTRATED PARAMETERS TO A MODEL WITH  
DISTRIBUTED PARAMETERS

M. V. Polovinkina<sup>1</sup>, I. P. Polovinkin<sup>2</sup>

Voronezh State University of Engineering Technologies,  
Voronezh, 394036, Russia

E-mail: [polovinkina-marina@yandex.ru](mailto:polovinkina-marina@yandex.ru)

Voronezh State University,  
Voronezh, 394018, Russia

E-mail: [polovinkin@yandex.ru](mailto:polovinkin@yandex.ru)

Received November 30, 2020

**Abstract.** We consider the question of refining the stability conditions for the trivial stationary solution for replacing the lumped model with a distributed model by adding terms, simulating diffusion processes. In some cases, a trivial solution that is unstable in models without diffusion terms turns out to be stable in models with diffusion terms.

**Key words:** model with lumped parameters, model with distributed parameters, diffusion models, stationary solution, stability.

**For citation:** Polovinkina M. V., Polovinkin I. P. 2020. On the change in the nature of stability of a trivial solution in the transition from a model with lumped parameters to a model with distributed parameters. Applied Mathematics & Physics. 52(4): 255–261 (in Russian). DOI 10.18413/2687-0959-2020-52-4-255-261.

Рассмотрим начально-краевую задачу для системы уравнений в частных производных:

$$\frac{\partial u_s}{\partial t} = \vartheta_s \Delta u_s + F_s(u), \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, \quad t > 0, \quad (1)$$

$$\left( \mu_s u_s + \eta_s \frac{\partial u_s}{\partial \nu} \right) \Big|_{x \in \partial \Omega} = 0, \quad \mu_s^2 + \eta_s^2 > 0, \quad \mu_s \geq 0, \quad \eta_s \geq 0, \quad \mu_s = \text{const}, \quad \eta_s = \text{const}, \quad (2)$$

$$u_s(x, 0) = 0, \quad s = 1, \dots, m, \quad (3)$$

где  $\Omega$  – ограниченная область с кусочно-гладкой границей  $\partial\Omega$ ,  $\nu$  – единичный вектор нормали к границе  $\partial\Omega$  области  $\Omega$ ,  $u = (u_1(x, t), \dots, u_m(x, t))$ ,  $\vartheta_s \geq 0$ ,  $s = 1, \dots, m$ ,  $\Delta$  – оператор Лапласа, определенный формулой

$$\Delta v = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 v}{\partial x_j^2}.$$

При отсутствии диффузионных членов, то есть при

$$\vartheta_s = 0, \quad s = 1, \dots, m, \quad (4)$$

переменные  $x_1, \dots, x_n$  входят в уравнения (1) как параметры, производные по которым не содержатся в этих уравнениях. Это случай модели с сосредоточенными параметрами. Если же

$$\sum_{s=1}^m \vartheta_s^2 > 0, \quad (5)$$

то мы имеем дело с системой с распределенными параметрами.

Предположим, что функции  $F_s(u) = F_s(u_1, \dots, u_m)$ , определенные в некоторой окрестности точки  $u = 0 \in \mathbb{R}^m$ , дифференцируемы в точке  $u = 0$  и удовлетворяют условиям  $F_s(0) = 0$ ,  $s = 1, \dots, m$ . Тогда в некоторой окрестности  $G$  точки  $u = 0 \in \mathbb{R}^m$  имеют место представления

$$F_s(u) = \sum_{k=1}^m b_{sk} u_k + \sum_{k=1}^m \epsilon_{sk}(u) u_k, \quad (6)$$

где

$$b_{sk} = \frac{\partial F_s(0)}{\partial u_k}, \quad \lim_{u \rightarrow 0} \epsilon_{sk}(u) = 0, \quad s, k = 1, \dots, m.$$

При сделанных предположениях тривиальное решение  $u = 0$  задачи (1)–(3) будет и ее стационарным решением. Мы зададимся вопросом об устойчивости тривиального решения задачи (1)–(3). При такой постановке проблемы нетривиальное решение  $u(x, t)$  мы считаем отклонением от тривиального решения, причем достаточно малым отклонением.

Умножим каждое  $s$ -е уравнение в системе (1) на  $u_s$ , а затем полученное равенство проинтегрируем по области  $\Omega$ . Получим с учетом (6):

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} u_s^2 dx = \vartheta_s \int_{\Omega} u_s \Delta u_s dx + \int_{\Omega} \sum_{k=1}^m b_{sk} u_s u_k dx + \int_{\Omega} \sum_{k=1}^m \epsilon_{sk}(u) u_s u_k dx, \quad s = 1, \dots, m. \quad (7)$$

Последнее слагаемое в правой части равенства (7) при малых отклонениях  $u$  не влияет на знак всей суммы и может быть отброшено. К первому слагаемому в правой части применим формулу Грина (см. [5]). В результате получим:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} u_s^2 dx = -\vartheta_s \int_{\Omega} |\nabla u_s|^2 dx + \vartheta_s \int_{\partial\Omega} u_s \frac{\partial u_s}{\partial \nu} d\Gamma + \int_{\Omega} \sum_{k=1}^m b_{sk} u_s u_k dx, \quad s = 1, \dots, m, \quad (8)$$

где  $d\Gamma$  является элементом границы  $d\Omega$ , так что второе слагаемое в правой части равенства (8) представляет собой поверхностный (при  $n \geq 3$ ) или криволинейный (при  $n = 2$ ) интеграл первого рода по границе области  $\Omega$ , а в случае  $n = 1$  этот интеграл следует поменять на сумму значений на концах интервала  $\Omega$ . В интеграле по границе при  $\mu_s = 0$  или при  $\eta_s = 0$  подынтегральная функция равна нулю в силу краевого условия (2). Из этого же краевого условия при  $\mu_s \eta_s > 0$  получим:

$$\frac{\partial u_s}{\partial \nu} \Big|_{\partial\Omega} = -\frac{\mu_s}{\eta_s} u_s \Big|_{\partial\Omega}.$$

Поэтому равенство (8) может быть переписано в виде

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} u_s^2 dx = -\vartheta_s \int_{\Omega} |\nabla u_s|^2 dx - \sigma \vartheta_s \int_{\partial\Omega} \frac{\mu_s}{\eta_s} u_s^2 d\Gamma + \int_{\Omega} \sum_{k=1}^m b_{sk} u_s u_k dx, \quad s = 1, \dots, m, \quad (9)$$

где  $\sigma = 1$  в случае  $\mu_s \eta_s > 0$  или  $\sigma = 0$  в случае  $\mu_s \eta_s = 0$ . Сложим  $m$  равенств (9), после чего получим

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} |u|^2 dx = \sum_{s=1}^m \left( -\vartheta_s \int_{\Omega} |\nabla u_s|^2 dx - \sigma \vartheta_s \int_{\partial\Omega} \frac{\mu_s}{\eta_s} u_s^2 d\Gamma \right) + \int_{\Omega} \sum_{s=1}^m \sum_{k=1}^m \Theta_{sk} u_s u_k dx, \quad (10)$$

где

$$\Theta_{sk} = (b_{sk} + b_{ks})/2. \tag{11}$$

Знак левой части равенства (10) рассматривается как индикатор устойчивости тривиального решения. Поэтому важно найти соотношение слагаемых в правой части, приводящее к тому, чтобы это выражение было отрицательным. В скобках в правой части как первое слагаемое, так и второе слагаемое не больше нуля. Далее нужно учесть знак последнего слагаемого в правой части. Очевидно, что отрицательная определенность квадратичной формы

$$\sum_{s=1}^m \sum_{k=1}^m \Theta_{sk} u_k u_s dx \tag{12}$$

обеспечит отрицательность левой части равенства (10), а значит, устойчивость стационарного решения.

Отметим, что в случае модели с сосредоточенными параметрами (система обыкновенных дифференциальных уравнений), который определяется условием (4), отрицательная определенность квадратичной формы (12) является и необходимым условием устойчивости тривиального решения.

Представим теперь, что мы переходим к рассмотрению диффузионной модели с распределенными параметрами. В этом случае можно ослабить достаточное условие устойчивости стационарного решения. Для этого воспользуемся неравенством Стеклова– Пуанкаре – Фридрихса (см. [4], [8] [3] с. 150, [1] с. 62)

$$\int_{\Omega} |\nabla u_s|^2 dx \geq \frac{1}{d^2} \int_{\Omega} u_s^2 dx,$$

где  $d = \text{diam } \Omega$  – диаметр области  $\Omega$ . Отсюда

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} |u|^2 dx \leq - \sum_{s=1}^m \frac{\vartheta_s}{d^2} \int_{\Omega} u_s^2 dx - \sum_{s=1}^m \vartheta_s \int_{\partial\Omega} \frac{\mu_s}{\eta_s} u_s^2 d\Gamma + \int_{\Omega} \sum_{s=1}^m \sum_{k=1}^m \Theta_{sk} u_k u_s dx. \tag{13}$$

Теперь можно утверждать, что достаточным условием устойчивости стационарного решения является отрицательная определенность квадратичной формы

$$\sum_{s=1}^m \sum_{k=1}^m A_{sk} u_k u_s, \tag{14}$$

где

$$A_{sk} = \Theta_{sk} - \delta_{ks} \vartheta_s / d^2.$$

Чтобы наглядно продемонстрировать, как меняются свойства модели при введении распределенных параметров посредством добавления диффузионных членов, рассмотрим случай

$$b_{sk} = 0, \quad s, k = 1, \dots, m.$$

В бездиффузионном случае нулевой вектор не является устойчивым решением. Если же все уравнения системы содержат диффузионные члены, то есть при

$$\prod_{s=1}^m \vartheta_s > 0,$$

квадратичная форма (14) примет вид

$$-\frac{1}{d^2} \sum_{s=1}^m \vartheta_s z_s^2 \tag{15}$$

и, очевидно, будет отрицательно определенной, что означает устойчивость нулевого решения. Другой интересный пример дает уравнение Хотеллинга

$$\frac{\partial p}{\partial t} = A(\xi - p)p + B\Delta p,$$

где  $p$  – искомая функция,  $p = p(x, y, t) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$  при каждом  $t > 0$ ,

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

есть оператор Лапласа,  $A, B, \xi$  суть заданные положительные постоянные. Это уравнение описывает рост и распространение популяции. При этом входящие в уравнение величины имеют следующий

смысл:  $A$  – темп роста популяции,  $B$  – темп распространения,  $\xi$  – коэффициент насыщенной плотности,  $p$  – плотность популяции,  $t$  – время.

Пусть  $w(x, y)$  – стационарное решение уравнения Хотеллинга, то есть решение уравнения

$$A(\xi - w)w + B\Delta w = 0.$$

Изложенный выше метод приводит к заключению о том, что условие

$$w > \frac{\xi}{2} - \frac{B}{2Ad^2}$$

является достаточным для устойчивости стационарного решения  $w(x, y)$  (см. [2], [6]). На сей раз интересно отметить, что в диффузионном случае (при  $B \neq 0$ ) нулевое стационарное решение может оказаться как устойчивым, так и неустойчивым, что определяется размером области  $\Omega$ .

Предложенный нами выше метод ослабления достаточных условий устойчивости стационарных решений в диффузионных моделях можно применять и к исследованию устойчивости нетривиальных стационарных решений. Рассмотрим в качестве примера классическую модель У. Кермака и А. Мак-Кендрика распространения инфекции

$$\frac{dS}{dt} = -\beta SI, \quad (16)$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I, \quad (17)$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I, \quad (18)$$

где  $\beta$  и  $\gamma$  – положительные постоянные.

Эта модель, предложенная в 1927 г. [7], по-видимому, является исторически первой из компартментальных моделей, суть которых состоит в том, чтобы разделить популяцию на несколько групп (англ. compartments), доли которых в рассматриваемом случае обозначаются следующим образом:  $S$  (англ. susceptible) – восприимчивые,  $I$  (англ. infectious) – больные,  $R$  (англ. recovered) – выздоровевшие. Впоследствии на основе модели (16)–(18) было создано внушительное количество моделей, уточняющих ее и приспособленных к различным ситуациям. Мы изменим модель (16)–(18) путем добавления в правой части каждого уравнения диффузионного члена, после чего получим систему уравнений в частных производных

$$\frac{dS}{dt} = -\beta SI + \vartheta_1 \Delta S, \quad (19)$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I + \vartheta_2 \Delta I, \quad (20)$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I + \vartheta_3 \Delta R. \quad (21)$$

Будем рассматривать систему (19)–(21) в области  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  границей, представляющей собой простую кусочно гладкую кривую  $\Gamma = \partial\Omega$  и введя согласованные с исходной моделью единообразные обозначения  $u_1 = u_1(x, t) = S$ ,  $u_2 = u_2(x, t) = I$ ,  $u_3 = u_3(x, t) = R$ , наложим на решение  $(u_1, u_2, u_3)$  дополнительные условия

– краевые:

$$\left( \mu_j u_j + \eta_j \frac{\partial u_j}{\partial \nu} \right) \Big|_{x \in \partial\Omega} = B_j(x), \quad \mu_j^2 + \eta_j^2 > 0, \quad \mu_j \geq 0, \quad \eta_j \geq 0, \quad (22)$$

– начальные:

$$u_j(x, 0) = w_j(x), \quad j = 1, 2, 3. \quad (23)$$

Здесь  $B_j(x) \in C(\partial\Omega)$ ,  $w_j(x) \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ ,  $j = 1, 2, 3$ ,  $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ . Пусть вектор  $w = (w_1(x), w_2(x), w_3(x))$  – стационарное решение системы (19)–(21), то есть решение системы

$$-\beta w_1 w_2 + \vartheta_1 \Delta w_1 = 0, \quad (24)$$

$$\beta w_1 w_2 - \gamma w_2 + \vartheta_2 \Delta w_2 = 0, \quad (25)$$

$$\gamma w_2 + \vartheta_3 \Delta w_3 = 0, \quad (26)$$

удовлетворяющее краевым условиям

$$\left( \mu_j w_j + \eta_j \frac{\partial w_j}{\partial \nu} \right) \Big|_{x \in \partial\Omega} = B_j(x), \quad \mu_j^2 + \eta_j^2 > 0, \quad \mu_j \geq 0, \quad \eta_j \geq 0. \quad (27)$$

Пусть  $z = z(x, t) = u(x, t) - w(x) = (z_1, z_2, z_3)$  – вектор отклонений от стационарного решения. Подставим в систему (19)–(21) представление  $u = w + z$ . Тогда уравнение (19) переписывается в виде

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\partial z_1}{\partial t} = -\beta(w_1 + z_1)(w_2 + z_2) + \vartheta_1 \Delta(w_1 + z_1).$$

После очевидных тождественных преобразований получим:

$$\frac{\partial z_1}{\partial t} = -\beta w_1 w_2 - \beta z_1 w_2 - \beta w_1 z_2 - \beta z_1 z_2 + \vartheta_1 \Delta w_1 + \vartheta_1 \Delta z_1.$$

Учитывая, что функция  $w_1$  удовлетворяет уравнению (24), мы получим:

$$\frac{\partial z_1}{\partial t} = -\beta z_1 w_2 - \beta w_1 z_2 - \beta z_1 z_2 + \vartheta_1 \Delta z_1. \tag{28}$$

Умножим равенство (28) на  $z_1$ , а полученное после этого равенство проинтегрируем по области  $\Omega$ . Получим:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} z_1^2 dx = \int_{\Omega} (-\beta z_1^2 w_2 - \beta w_1 z_1 z_2 - \beta z_1^2 z_2) dx + \vartheta_1 \int_{\Omega} z_1 \Delta z_1 dx. \tag{29}$$

Применяя ко второму интегралу в правой части равенства (29) первую формулу Грина, получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} z_1^2 dx &= \int_{\Omega} (-\beta z_1^2 w_2 - \beta w_1 z_1 z_2 - \beta z_1^2 z_2) dx - \\ &- \vartheta_1 \int_{\Omega} |\nabla z_1|^2 dx - \vartheta_1 \int_{\partial\Omega} g_1 d\Gamma. \end{aligned} \tag{30}$$

В равенстве (30) функция  $g_1(x)$  тождественно равна нулю на  $\Gamma$ , если  $\mu_1 \eta_1 = 0$  или  $g_1 = \mu_1 z_1^2 / \eta_1$ , если  $\mu_1 \eta_1 > 0$ . Ко второму интегралу в равенстве (30) применим неравенство Стеклова – Пуанкаре – Фридрихса, после чего получим:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} z_1^2 dx &\leq \int_{\Omega} (-\beta z_1^2 w_2 - \beta w_1 z_1 z_2 - \beta z_1^2 z_2) dx - \\ &- \frac{\vartheta_1}{d^2} \int_{\Omega} z_1^2 dx - \vartheta_1 \int_{\partial\Omega} g_1 d\Gamma. \end{aligned} \tag{31}$$

Поступим аналогичным образом с двумя оставшимися уравнениями системы (19)–(21). Из (20) получим неравенство

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} z_2^2 dx &\leq \int_{\Omega} (\beta w_2 z_1 z_2 + \beta w_1 z_2^2 + \beta z_1 z_2^2) dx - \\ &- \frac{\vartheta_2}{d^2} \int_{\Omega} z_2^2 dx - \vartheta_2 \int_{\partial\Omega} g_2 d\Gamma, \end{aligned} \tag{32}$$

а из (21) – неравенство

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} z_3^2 dx \leq \gamma \int_{\Omega} z_2 z_3 dx - \frac{\vartheta_3}{d^2} \int_{\Omega} z_3^2 dx - \vartheta_3 \int_{\partial\Omega} g_3 d\Gamma, \tag{33}$$

где, как и ранее, функция  $g_j(x)$  тождественно равна нулю на  $\Gamma$ , если  $\mu_j \eta_j = 0$  или  $g_j = \mu_j z_j^2 / \eta_j$ , если  $\mu_j \eta_j > 0$ ,  $j = 1, 2, 3$ .

Складывая неравенства (31)–(33), получим неравенство

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} z^2 dx \leq \int_{\Omega} \sum_{k,j=1}^3 A_{kj} z_k z_j dx - \int_{\partial\Omega} \sum_{j=1}^3 \vartheta_j g_j d\Gamma + \int_{\Omega} (\beta z_1 z_2^2 - \beta z_1^2 z_2) dx, \tag{34}$$

где

$$A_{11} = -\beta w_2 - \frac{\vartheta_1}{d^2}, \quad A_{22} = \beta w_1 - \gamma - \frac{\vartheta_2}{d^2}, \quad A_{33} = -\frac{\vartheta_3}{d^2}, \tag{35}$$

$$A_{12} = \beta w_2 - \beta w_1, \quad A_{23} = \gamma \quad A_{13} = 0. \tag{36}$$

Пользуясь критерием Сильвестра, получаем следующие достаточные условия отрицательной определенности квадратичной формы.

$$A_{11} = -\beta w_2 - \frac{\vartheta_1}{d^2} < 0, \quad (37)$$

$$A_{11}A_{22} - A_{12}^2 = \left(-\beta w_2 - \frac{\vartheta_1}{d^2}\right) \left(-\beta w_1 - \gamma - \frac{\vartheta_2}{d^2}\right) - \frac{1}{4}\beta(w_2 - w_1) > 0, \quad (38)$$

$$\begin{aligned} & (A_{11}A_{22} - A_{12}^2) A_{33} - A_{11}A_{23}^2 = \\ & = \left(\left(-\beta w_2 - \frac{\vartheta_1}{d^2}\right) \left(-\beta w_1 - \gamma - \frac{\vartheta_2}{d^2}\right) - \frac{1}{4}\beta(w_2 - w_1)\right) \left(-\frac{\vartheta_3}{d^2}\right) - \left(-\beta w_2 - \frac{\vartheta_1}{d^2}\right) \frac{\gamma^2}{4} < 0. \end{aligned} \quad (39)$$

Эти условия на практике, при компьютерных симуляциях, проверяемы. Отметим, что если в рамках этой модели рассматривать тривиальное стационарное решение  $w_1 = w_2 = w_3 = 0$ , условия (37–39) будут выглядеть следующим образом:

$$A_{11} = \frac{\vartheta_1}{d^2} > 0, \quad (40)$$

$$A_{11}A_{22} - A_{12}^2 = \frac{\vartheta_1}{d^2} \left(\gamma + \frac{\vartheta_2}{d^2}\right) > 0, \quad (41)$$

$$\begin{aligned} & (A_{11}A_{22} - A_{12}^2) A_{33} - A_{11}A_{23}^2 = \\ & = \frac{\vartheta_1}{d^2} \left(\frac{\gamma^2}{4} - \left(\gamma + \frac{\vartheta_2}{d^2}\right) \frac{\vartheta_3}{d^2}\right) < 0. \end{aligned} \quad (42)$$

В модели с сосредоточенными параметрами, то есть при  $\vartheta_1 = \vartheta_2 = \vartheta_3 = 0$ , условия (40)–(42) не выполнены, тривиальное решение неустойчиво. В модели с распределенными параметрами при  $\vartheta_1 \vartheta_2 \vartheta_3 > 0$  условия (40), (41) выполняются в любом случае, так что содержательным достаточным условием устойчивости тривиального решения становится условие (42), которое, очевидно, можно переписать в виде

$$\frac{\gamma^2}{4} - \left(\gamma + \frac{\vartheta_2}{d^2}\right) \frac{\vartheta_3}{d^2} < 0. \quad (43)$$

Выполнение этого условия возможно для областей с небольшим диаметром. Для областей с большим диаметром это условие не выполняется. Мы не берем на себя смелость выносить окончательный вердикт этому явлению на языке предметной области. Осмелимся лишь предположить, что для больших областей диффузия (распространение инфекции за счет миграции) оказывает небольшое влияние на устойчивость нулевого уровня зараженности, решающее же влияние оказывают параметры роста. Правда, возможно, эти параметры зависят в том числе и от условий диффузии. В любом случае приходится признать, что модели процесса роста и распространения заболеваний пока далеки от законченных очертаний.

### Список литературы

1. Ладыженская О. А. 1973. Краевые задачи математической физики. Москва, Наука, 408.
2. Мешков В. З., Половинкин И. П., Семенов М. Е. 2002. Об устойчивости стационарного решения уравнения Хотеллинга. Обзорение прикладной и промышленной математики, 9(1): 226–227.
3. Михайлов В. П. 1976. Дифференциальные уравнения в частных производных. Москва, Наука, 392.
4. Friedrichs K. O. 1973. Spectral Theory of Operators in Hilbert Space. New York. Heidelberg, Berlin, Springer-Verlag, 244.
5. Gilbarg D. and Trudinger N. S. 2001. Elliptic Partial Differential Equations of Second Order. New York. Heidelberg, Berlin, Springer-Verlag, 531.
6. Gogoleva T. N., Shchepina I. N., Polovinkina M. V. and Rabeeakh S. A. 2019. On stability of a stationary solution to the Hotelling migration equation. IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series 1203 (2019) 012041 doi:10.1088/1742-6596/1203/1/012041
7. Kermack W. O., McKendrick A. G. 1927. A contribution to the mathematical theory of epidemics. Proc. R. Soc. London, A 1927, 115: 700–721.
8. Rektorys K. 2012. Variational Methods in Mathematics, Science and Engineering. Springer Science & Business Media, 571.

### References

1. Ladyzhenskaya O. A. 1973. Kraevye zadachi matematicheskoy fiziki [Boundary Value Problems of Mathematical Physics]. Moscow, Nauka, 408.
2. Meshkov V. Z., Polovinkin I. P., Semenov M. E. 2002. Ob ustojchivosti stacionarnogo resheniya uravneniya Hotellinga [On stability stationary solution of the Hotelling equation]. Review of Applied and Industrial Mathematics, 9 (1): 226–227.
3. Mikhailov VP 1976. Differencial'nye uravneniya v chastnyh proizvodnyh [Partial Differential Equations]. Moscow, Nauka, 392.
4. Friedrichs K. O. 1973. Spectral Theory of Operators in Hilbert Space. New York. Heidelberg, Berlin, Springer-Verlag, 244.
5. Gilbarg D. and Trudinger N. S. 2001. Elliptic Partial Differential Equations of Second Order. New York. Heidelberg, Berlin, Springer-Verlag, 531.
6. Gogoleva T. N., Shchepina I. N., Polovinkina M. V. and Rabeeakh S. A. 2019. On stability of a stationary solution to the Hotelling migration equation. IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series 1203 012041 doi:10.1088/1742-6596/1203/1/012041
7. Kermack W. O., McKendrick A. G. 1927. A contribution to the mathematical theory of epidemics. Proc. R. Soc. London, A 1927, 115: 700–721.
8. Rektorys K. 2012. Variational Methods in Mathematics, Science and Engineering. Springer Science & Business Media, 571.

Получена 30.11.2020

---

**Половинкина Марина Васильевна** – кандидат физико-математических наук, доцент Воронежского государственного университета инженерных технологий

 <http://orcid.org/0000-0002-7722-6927>

пр. Революции, 19, г. Воронеж, 394036, Россия

E-mail: [polovinkina-marina@yandex.ru](mailto:polovinkina-marina@yandex.ru)

**Половинкин Игорь Петрович** – доктор физико-математических наук, доцент, профессор Воронежского государственного университета

 <http://orcid.org/0000-0002-4308-8909>

Университетская площадь, 1, Воронеж, 394018, Россия

E-mail: [polovinkin@yandex.ru](mailto:polovinkin@yandex.ru)

## ФИЗИКА. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 519.63; 536.248.2; 666.9  
MSC 39A14.

DOI 10.18413/2687-0959-2020-52-4-262-270

### ОПТИМИЗАЦИЯ ТЕПЛООБМЕНА В ЦЕПНЫХ ЗАВЕСАХ ЦЕМЕНТНЫХ ПЕЧЕЙ: ТЕПЛООБМЕН ПРИ ИСПАРЕНИИ ВЛАГИ ИЗ ШЛАМА С ПАДАЮЩЕЙ СКОРОСТЬЮ

**Б. З. Федоренко, А. С. Горлов, В. И. Петрашев**

*(Статья представлена членом редакционной коллегии А. В. Носковым)*

Белгородский государственный технологический университет им. В. Г. Шухова  
г. Белгород, 308012, Россия

E-mail: [bz9393@mail.ru](mailto:bz9393@mail.ru)

**Аннотация.** В данной статье рассматриваются вопросы, связанные с оптимизацией теплообмена в цепных завесах цементных печей мокрого способа производства. Оптимизация этих процессов связана, в том числе, с разработкой математических моделей процессов, позволяющих адекватно представлять тепломассообменные процессы в цепных завесах. Только в этом случае возможно осуществить проектирование оптимальных процессов и оптимальных режимов работы цепных завес цементных печей. В статье рассмотрены модели испарения влаги с падающей скоростью при прямом тепловлагообмене с испарением влаги из пленки шлама на цепях в потоке газа и при регенеративном тепловлагообмене с испарением влаги из шлама, соприкасающегося с цепями на поду печи. Получены оценки испарения влаги с падающей скоростью в прямом режиме тепловлагообмена. Приведена модель испарения влаги с падающей скоростью в регенеративном режиме тепловлагообмена. Приведены результаты расчетов тепломассообменных процессов в цепной завесе цементной печи с использованием комплекса программ, в котором использованы и рассмотрены в работе модели испарения влаги. Рассмотренные в статье вопросы по испарению влаги с падающей скоростью дают возможность разработки уточненного комплекса программ расчета тепломассообменных процессов в цепных завесах цементных печей с тепловлагообменом при различных режимах прямого и регенеративного тепловлагообмена с падающей скоростью испарения влаги.

**Ключевые слова:** Цепная завеса цементной печи, прямой тепловлагообмен с падающей скоростью испарения влаги, регенеративный тепловлагообмен с падающей скоростью испарения влаги, математическая модель тепловлагообмена, оценки тепловлагообмена.

**Для цитирования:** Федоренко Б. З., Горлов А. С., Петрашев В. И., 2020. Оптимизация теплообмена в цепных завесах цементных печей: теплообмен при испарении влаги из шлама с падающей скоростью. Прикладная математика & Физика. 52(4): 262–270. DOI 10.18413/2687-0959-2020-52-4-262-270.

---

---

### OPTIMIZATION OF THE HEAT EXCHANGE IN THE CHAIN VEILS OF THE CEMENT KILNS: THE HEAT EXCHANGE IN THE EVAPORATION OF MOISTURE FROM THE SLUDGE WITH THE DECREASING VELOCITY

**B. Z. Fedorenko, A. S. Gorlov, V. I. Petrashev**

*(Article submitted by a member of the editorial board A. V. Noskov)*

Belgorod State Technological University named after V. G. Shukhov,  
Belgorod, 308012, Russia  
E-mail: [bz9393@mail.ru](mailto:bz9393@mail.ru)

Received October 10, 2020

**Abstract.** This article deals with questions related to optimization of the heat exchange in the cement kilns chain veils of the wet production method. Optimization of these processes is connected, among other things, with the development of mathematical models that allow to adequately represent heat and mass transfer processes in chain veils. Only in this case it is possible to implement the design of optimal processes and optimal working regime of the cement kilns chain veils. In this article the models of the moisture evaporation with the decreasing velocity in the regime of the direct heat and moisture exchange with the moisture evaporation from sludge film on the chains in the gas flow and in the regenerative heat and moisture exchange with the moisture evaporation from sludge touching the chains on the hearth of oven, are considered. The estimations of the moisture evaporation with the decreasing velocity in the regime of the direct heat and moisture exchange are obtained. A model of moisture evaporation with the decreasing velocity in the regenerative regime of the heat and moisture exchange is shown. The results of the calculation of the heat and mass exchanging processes in the chain veils of the cement kiln with the application of a program complex, based on a simplified model of moisture evaporation with the decreasing velocity in the regenerative regime of the heat and moisture exchange, are presented. The questions of moisture evaporation with the decreasing velocity, considered in this article give the possibility of the creation of the refined program

complex of calculation of the heat and mass exchanging processes in the chain veils of the cement kilns with the heat and moisture exchange by the different regimes of the direct and regenerative the heat and moisture exchange with the decreasing velocity of the moisture evaporation.

**Key words:** the chain veil of a cement kiln, the direct heat and moisture exchange with the decreasing velocity of moisture evaporation, the regenerative heat and moisture exchange with the decreasing velocity of moisture evaporation, mathematical model of the heat and moisture exchange, the estimations of the heat and moisture exchange.

**For citation:** Fedorenko B. Z., Gorlov A. S., Petrashev V. I. 2020. Optimization of the heat exchange in the chain veils of the cement kilns: the heat exchange in the evaporation of moisture from the sludge with the decreasing velocity. Applied Mathematics & Physics. 52(4): 262–270 (in Russian). DOI 10.18413/2687-0959-2020-52-4-262-270.

**Введение.** Оптимизация и энергосбережение при производстве цемента мокрым способом опирается на оптимизацию тепломассообменных процессов в цепных завесах цементных печей. Оптимизация этих процессов связана, в том числе, и с разработкой математических моделей, позволяющих адекватно представлять тепломассообменные процессы в цепных завесах. Только в этом случае возможно осуществить проектирование оптимальных процессов и оптимальных режимов работы цепных завес цементных печей.

Одним из наиболее сложных для анализа процессов тепломассообмена в цепных завесах цементных печей является процесс испарения влаги из шлама с падающей скоростью. Этот процесс можно наглядно представить на характерном примере. Цепи цепных завес с пленкой шлама на них обдуваются потоком горячего газа. За счет конвективного теплообмена влага испаряется с поверхности шлама. При недостаточной диффузии влаги (за счет капиллярной подвижности) из глубинной области слоя шлама на обдуваемой газом поверхности образуется слой сухого шлама. Со временем толщина слоя сухого шлама увеличивается. Поток тепла к слою влажного шлама уменьшается, то есть имеет место испарение влаги с падающей скоростью испарения [3]-[5].

В настоящей работе рассматриваются следующие вопросы:

- приводится математическая формулировка различных типов задач испарения влаги с падающей скоростью, имеющих место в цепных завесах цементных печей мокрого способа производства;
- рассматриваются различные методы решения задач, связанных с математическими моделями процессов испарения влаги с падающей скоростью испарения;
- приводятся аналитические оценки процессов испарения влаги с падающей скоростью, необходимые для качественного анализа процессов и зависимости их от физических и конструктивных параметров;
- приводятся примеры численных оценок тепломассообменных процессов в цепных завесах цементных печей на основе разработанных моделей.

Приведенные результаты показывают:

- процессы испарения влаги с падающей скоростью в цепных завесах цементных печей могут быть проанализированы на основе принятых моделей процессов с использованием численных методов;
- необходима дальнейшая разработка методов анализа процессов испарения влаги с падающей скоростью испарения влаги, и разработка комплекса программ расчета по оптимизации тепломассообменных процессов в цепных завесах в целом.

**Модели процессов испарения влаги в цепных завесах с падающей скоростью испарения. Классическая задача о фазовом переходе – задача Стефана.** При изменении температуры тела может происходить изменение его физического состояния, то есть имеет место фазовый переход (например, твердое состояние-жидкость, жидкость-пар). На поверхности фазового перехода сохраняется постоянная температура. При фазовом переходе происходит выделение (или поглощение) скрытой теплоты фазового перехода. Задача о распределении температуры при наличии фазового перехода и о скорости движения границы раздела фаз – это классическая задача Стефана [7]. Математическая формулировка задачи Стефана следующая (рассматривается плоская задача):  
найти решение уравнений теплопроводности

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} &= a_1^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \xi, \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} &= a_2^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}, \quad \xi < x < \infty \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

при дополнительных условиях

$$\begin{aligned} u_1 &= c \text{ при } x = 0, \\ u_2 &= c \text{ при } t = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

и условиях на границе раздела фаз

$$u_1 = u_2 = u_0 \text{ при } x = \xi, \quad (3)$$

$$k_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} \Big|_{x=\xi} - k_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} \Big|_{x=\xi} = r \rho \frac{\partial \xi}{\partial t}, \quad (4)$$

где  $u_1(x, t)$ ,  $u_2(x, t)$  – температуры фаз вещества;  $k_1, k_2$  – коэффициенты теплопроводности первой и второй фазы;  $r$  – скрытая теплота фазового перехода;  $a_1^2, a_2^2$  – коэффициенты температуропроводности фаз;  $\rho$  – плотность фазы;  $x = \xi$  – граница раздела фаз;  $u_0$  – постоянная температура фазового перехода. Даже в простейших случаях аналитическое решение задачи Стефана достаточно сложное [7].

**Испарение влаги в цепной завесе с падающей скоростью при прямом тепловлагообмене.** Прямой тепловлагообмен в цепной завесе имеет место при непосредственном обдувании газом цепей с пленкой шлама на поверхности. Испарение влаги с поверхности пленки материала на цепи с падающей скоростью описывается следующей задачей Стефана (при малой толщине пленки шлама можно рассматривать плоскую задачу):

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a_{MC}^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < \xi, t > 0, \\ u = u_{MB}, & \xi < x < \infty, \\ \alpha (T_\Gamma - u|_{x=0}) = \lambda_{MC} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0}, \\ -\lambda_{MC} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=\xi} = r \cdot \chi \cdot \rho_{MC} \frac{\partial \xi}{\partial t}, \end{cases} \quad (5)$$

где  $u = u(x, t)$  – температура шлама;  $a_{MC}^2$  – коэффициент температуропроводности сухого шлама;  $x = \xi$  – фронт, разделяющий сухой и влажный шлам;  $u_{MB}$  – температура влажного шлама (принимается  $u_{MB} = 100^\circ\text{C}$ );  $\lambda_{MC}$  – коэффициент теплопроводности сухого шлама;  $\alpha$  – коэффициент теплообмена с газовым потоком;

$$\alpha = \text{Nu} \cdot \frac{\lambda_\Gamma}{D}, \quad (6)$$

$\text{Nu}$  – число Нуссельта;  $\lambda_\Gamma$  – коэффициент теплопроводности газа;  $D$  – гидравлический диаметр прутка цепи (с учетом пленки шлама на цепи);  $T_\Gamma$  – температура газа;  $r$  – удельная теплота парообразования воды;

$$\chi = \frac{w}{(100 - w)};$$

$w$  – относительная влажность шлама в %;  $\rho_{MC}$  – плотность сухого шлама; при поперечном обтекании газом цилиндра число Нуссельта определяется следующими соотношениями [2]:

$$\text{Nu} = \begin{cases} 0,52\text{Pr}^{0,37} \cdot \text{Re}^{0,5} & \text{при } 40 < \text{Re} < 1000, \\ 0,25\text{Pr}^{0,37} \cdot \text{Re}^{0,6} & \text{при } 1000 < \text{Re} < 2 \cdot 10^5, \end{cases} \quad (7)$$

где  $\text{Pr} = \nu/a^2$  – число Прандтля,  $\text{Re} = W_1 D/\nu$  – число Рейнольдса,  $\nu$  – кинематическая вязкость газа.

Первое уравнение системы (5) – уравнение теплопроводности в области сухого шлама; второе уравнение – граничное условие, показывающее, что за фронтом фазового перехода температура шлама равна  $100^\circ\text{C}$ ; третье уравнение – граничное условие, описывающее теплообмен на границе газовый поток-поверхность пленки шлама по закону Ньютона; последнее уравнение – условие Стефана, определяющее движение фронта фазового перехода. Задача Стефана может быть решена численно. На основании решения задачи Стефана проводится расчет массы испарившейся влаги и снижение температуры газового потока.

**Регенеративный тепловлагообмен в цепных завесах при испарении влаги с падающей скоростью.** В случае регенеративного тепловлагообмена в цепной завесе цепи нагреваются в газовом потоке, а затем, попадая в шлам, отдают тепло шламу и испаряют влагу. Испарение влаги с падающей скоростью испарения с поверхности контакта влажного шлама с нагретой цепью описывается

следующей задачей Стефана (приводится формулировка плоской задачи):

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a_{MC}^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < \xi, t > 0, \\ \frac{\partial u_1}{\partial t} = a_{Ц}^2 \cdot \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}, & -h < x < 0, t > 0, \\ u = u_{MB}, & \xi < x < h_{пл}, \\ \left. \frac{\partial u_1}{\partial x} \right|_{x=-h} = 0, \\ u_1|_{x=0-0} = u|_{x=0+0}, \\ \lambda_{Ц} \cdot \left. \frac{\partial u_1}{\partial x} \right|_{x=0-0} = \lambda_{MC} \cdot \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0+0}, \\ -\lambda_{MC} \cdot \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=\xi} = r \cdot \chi \cdot \rho_{MC} \frac{\partial \xi}{\partial t}, \end{cases} \quad (8)$$

где  $u(x, t)$ ,  $u_1(x, t)$  – температуры шлама и цепи соответственно;  $a_{Ц}^2$  – коэффициент температуропроводности материала цепей;  $\lambda_{Ц}$  – коэффициент теплопроводности материала цепей;  $h$  – толщина слоя металла;  $h_{пл}$  – эквивалентная толщина прилегающей к цепи пленки шлама.

Первое уравнение системы (8) – уравнение теплопроводности в области сухого шлама; второе уравнение – уравнение теплопроводности в слое металла; третье уравнение – граничное условие, показывающее, что за фронтом фазового перехода температура шлама равна  $100^\circ\text{C}$ ; четвертое уравнение – условие теплоизоляции; пятое и шестое уравнения – граничные условия, определяющие равенство температур и потоков тепла на поверхности контакта цепь – шлам; последнее уравнение – условие Стефана, определяющее движение фронта фазового перехода.

Тепловлагообмен в системе цепь – шлам в рассматриваемом случае описывается сопряженной задачей – совместной задачей теплопроводности в цепи и теплопроводности с испарением влаги в шламе. Решение сопряженных задач сложно, что приводит к поискам упрощения исходной задачи.

**Приближенные методы решения задачи Стефана. Оценка прямого тепловлагообмена в цепных завесах с падающей скоростью.** На основе математической модели [2] были получены формулы, позволяющие оценивать толщину  $\xi(t)$  высохшего слоя шлама, находящегося на цепях, обдуваемых нагретым газом с температурой  $T_\Gamma$ , за время  $t$ . В работе [6] эта задача сводится к решению задачи Коши:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = -\frac{\lambda_{MC}}{r\chi\rho_{MC}} \cdot \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=\xi}, \quad \xi(0) = 0. \quad (9)$$

Решение получено в виде степенного ряда, каждый член которого определяется с использованием всех уравнений системы (5):

$$\xi_1 = \gamma\delta\Delta u t - \left( \gamma^2\delta^3\Delta u^2 + \frac{1}{a^2}\gamma^3\delta^3\Delta u^3 \right) \frac{t^2}{2!} + \left( 3\gamma^3\delta^5\Delta u^3 + \frac{8}{a^2}\gamma^4\delta^5\Delta u^4 + \frac{5}{a^2}\gamma^5\delta^5\Delta u^5 \right) \frac{t^3}{3!} \dots, \quad (10)$$

где  $\gamma = \frac{\lambda_{MC}}{r\chi\rho_{MC}}$ ,  $\Delta u = T_\Gamma - 100$ ,  $\delta = \frac{\alpha}{\lambda_{MC}}$ ,  $a^2 = \frac{\lambda_{MC}}{C_{MC}\rho_{MC}}$ .

В расчетах формула (10) применялась с двумя первыми членами ряда. Так как время пребывания цепи в газе около 20 секунд и оно меньше, чем  $t = \frac{a^2}{a^2\gamma\delta^2\Delta u + \gamma^2\delta^2\Delta u^2}$  ( $t$  – точка экстремума функции (10) с двумя членами ряда), то формулу (10) можно применить для оценки нижней границы величины  $\xi(t)$ .

Другая формула, полученная в работе [6] для оценки толщины высохшего слоя шлама на цепи  $\xi(t)$

$$\xi_2 = \frac{2\gamma\delta\Delta u t}{\sqrt{1 + 2\gamma\delta^2\Delta u t + 1}}. \quad (11)$$

Эта формула получена на основании системы (5) в предположении очень малой удельной теплоемкости  $C_{MC}$  (тогда  $a^2 \rightarrow \infty$ ), вследствие чего все тепло расходуется на испарение. Поэтому формула (11) дает верхнюю границу величины  $\xi(t)$ . Отметим также, что формулу (11) можно применять в случае, если безразмерная величина  $\mu = \frac{\gamma\Delta u}{a^2} < 1$ . В противном случае,  $\mu > 1$ , более точную верхнюю границу величины  $\xi(t)$  дает формула

$$\xi_3 = \frac{2\gamma\delta\Delta u t}{\sqrt{1 + 2\gamma\delta^2\Delta u \mu t + 1}}, \quad (12)$$

Таблица 1. Оценка толщины высохшего слоя шлама  $\xi$  на цепи;  $\xi_1$  – оценка снизу,  $\xi_2$  – оценка сверху  
 Table 1. Estimation of the thickness of the dried sludge layer  $\xi$  on the chain;  $\xi_1$  – lower estimate,  $\xi_2$  – upper estimate

$x$	$T_{\Gamma}$	$W_1$	$w$	$h_{пл}$	$\lambda_{МС}$	$C_{МС}$	$\rho_{МС}$	$\nu$	$\lambda_{\Gamma}$	$\xi_1(20)$	$\xi_2(20)$
м	$^{\circ}C$	м/с	%	м	$\frac{Вт}{м \cdot град}$	$\frac{Дж}{кг \cdot град}$	кг/м <sup>3</sup>	м <sup>2</sup> /с	$\frac{Вт}{м \cdot град}$	мм	мм
27	368	8,2	34,8	0,0051	0,93	877	1650	$58,21 \cdot 10^{-6}$	0,0518	0,1365	0,1366
30	414	8,3	32,6	0,0076	0,93	894,5	1650	$64,82 \cdot 10^{-6}$	0,0528	0,1669	0,1671
36	600	4,6	22,1	0,020	0,93	936	1650	$96,89 \cdot 10^{-6}$	0,0622	0,2063	0,3894

полученная в работе [1] (так как  $\xi_1 < \xi_2$  при  $\mu > 1$ ). В работе [1] была также получена асимптотическая формула для величины  $\xi(t)$  при больших значениях времени сушки  $t$ :

$$\xi_4 = \sqrt{2a^2(1 - e^{-\mu})t}. \quad (13)$$

Она дает лучшую оценку, чем  $\xi_2$  и  $\xi_3$ , верхней границы толщины слоя высохшего материала с плоской поверхностью, но только при достаточно большом времени сушки. А именно, при  $\mu < 1$  находим корень  $t_1$  уравнения  $\xi_2 = \xi_4$ :

$$t_1 = \frac{2(1 - e^{-\mu})}{\delta^2 a^2 (\mu - 1 + e^{-\mu})^2}. \quad (14)$$

Тогда при времени сушки  $t > t_1$  формула (13) дает лучшую оценку верхней границы  $\xi(t)$ , чем формулы (11) или (12). При  $\mu > 1$  находим корень  $t_2$  уравнения  $\xi_3 = \xi_4$ :

$$t_2 = \frac{2(1 - e^{-\mu})}{\delta^2 a^2 (\mu^2 - 1 + e^{-\mu})^2}. \quad (15)$$

При  $t > t_2$  используется формула (13).

В таблице 1 приводятся оценки толщины высохшего слоя шлама  $\xi$  по данным о параметрах тепло-технологических процессов в цементной печи по таблице 3 на 27-м, 30-м и 33-м метрах. Расчет проведен с использованием формул (10) и (11). (Предполагается, что при данных влажностях шлама жидкость в шламе находится в заземленном состоянии и вода не диффундирует к поверхности испарения.) Из таблицы видно, что по мере движения шлама в цементной печи к горячему ее концу возрастает температура газа и убывает влажность шлама. Соответственно возрастает толщина высохшего за 20 секунд шлама (20 секунд – это среднее время пребывания цепи в потоке газа за один оборот цементной печи, равной 39,2 сек.). Однако на тридцать шестом метре происходят качественно новые изменения: толщина пленки  $h_{пл}$  на цепях возрастает настолько, что шлам полностью заполняет пространство между прутками звена цепи, соответственно резко увеличивается гидравлический диаметр обтекаемой газом цепи (на 36 метре он составляет около 0,1 м) и резко снижается скорость газа  $W_1$ . Поэтому, несмотря на резкое повышение температуры и сильное снижение влажности шлама, толщина высохшего слоя не выросла столь же значительно.

**Упрощение задачи о регенеративном теплообмене в цепных завесах при испарении влаги с падающей скоростью.** Упрощение задачи о регенеративном теплообмене при испарении влаги с падающей скоростью, описываемой системой (8), достигается заменой цепи с распределенными параметрами (и уравнения теплопроводности в цепи) на тело с сосредоточенными параметрами: с теплоемкостью цепи, средней температурой и условием теплопередачи от цепи к пленке шлама. Такое упрощение задачи возможно, потому что коэффициент теплопроводности материала цепи существенно больше коэффициента теплопроводности шлама. Температура в сечении цепи быстро выравнивается. Уравнение теплопроводности в цепи можно не решать, а рассматривать среднюю температуру цепи  $u_{\Gamma}$  из условия баланса. Задача Стефана в этом случае принимает вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a_{МС}^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < \xi, t > 0, \\ u = u_{MB}, & \xi < x < \infty, \\ u|_{x=0} = u_{\Gamma}, \\ -\lambda_{МС} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=\xi} = r \cdot \chi \cdot \rho_{МС} \frac{\partial \xi}{\partial t}. \end{cases} \quad (16)$$

Таблица 2. Параметры цементной печи и цепной завесы  
Table 2. Parameters of cement kiln and chain veil

<b>Общие данные по печи</b>						
Размеры печи – 5 × 185м.						
Период вращения – 39,2с.						
Производительность – 72 т.кл./ч.						
Расход тепла – 6300 кДж/кг.кл.						
Температура отходящих газов – 225°С.						
Навеска цепей по шестизаходному винту.						
<b>Параметры цепной завесы</b>						
Номер участка цепной завесы от загрузочного конца	1	2	3	4	5	6
Длина участка, м	8,2	16,6	8,5	12	4,8	8,2
Тип навески цепей: гирляндная (г) или свободно висящая (с)	г	г	г	г	г	г
Длина цепей, м	4,4	5,76	5,76	5,76	4,4	2,8
Коэффициент плотности навески цепей, м <sup>2</sup> /м <sup>2</sup>	3,3	4,4	5,8	8,7	5,5	4,4

Таблица 3. Результаты расчетов технологических процессов в цементной печи  
Table 3. The results of calculations of technological processes in a cement kiln

x	T <sub>Г</sub>	T <sub>М</sub>	T <sub>Ц1</sub>	T <sub>Ц2</sub>	W <sub>1</sub>	W <sub>2</sub>	w	P	W <sub>М</sub>	h <sub>пл</sub>	ξ	m <sub>Ж</sub>	ТЗ	УЧ
м	°С	°С	°С	°С	м/с	м/с	%	мм водн. ст.	мм/с	мм	мм	кг см	-	-
0	225	20	49	56	6,9	19,2	37,5	0	57	3,2	0	0	1	1
3	235	26	51	57	7,1	19,6	37,5	2,5	57	3,2	0	0	1	1
6	244	32	57	63	7,2	19,9	37,5	4,9	57	3,2	0	0	1	1
9	255	38	63	69	7,8	22,8	37,5	7,9	53	3,2	0	0	1	2
12	268	46	71	78	8,0	23,3	37,5	11,9	53	3,2	0	0	1	2
15	281	54	80	87	8,2	23,9	37,5	16,1	53	3,2	0	0	1	2
18	294	62	89	96	8,4	24,5	37,5	20,4	53	3,2	0	0	1	2
21	310	70	94	100	8,6	25,1	37,3	24,7	52	3,3	0	0,2	2	2
24	335	77	96	100	8,9	26,2	36,3	29,2	50	4,0	0	0,4	2	2
27	368	84	97	100	8,2	33,1	34,8	34,9	41	5,1	0	0,5	2	3
30	414	90	98	100	8,3	36,3	32,6	42,7	39	7,6	0	0,6	2	3
33	477	95	99	100	8,1	42,6	29,3	51,9	36	13,7	0	0,9	2	3
36	600	98	100	100	4,6	76,0	22,1	77,3	25	20,0	0	1,6	2	4
37	639	99	159	174	9,7	52,7	19,7	85,9	18	0	0,69	1,2	3	4
38	668	103	176	200	9,9	53,8	17,9	91,2	18	0	0,85	0,8	3	4
39	703	108	171	198	10,1	55,1	15,8	96,5	18	0	0,90	1,0	3	4
40	742	112	164	193	10,4	56,5	13,3	102	18	0	0,95	1,1	3	4
41	786	117	151	183	10,7	58,1	10,3	107	18	0	1,01	1,2	3	4
42	838	120	131	168	11,0	59,9	6,6	113	18	0	1,09	1,4	3	4
43	901	123	95	140	11,4	61,9	1,8	118	18	0	1,20	1,6	3	4
44	921	136	324	334	11,5	62,8	0	124	18	0	0	0,4	4	4
45	935	173	458	473	11,7	63,5	0	129	18	0	0	0	4	4
48	971	273	569	585	7,8	44,8	0	138	22	0	0	0	4	5
51	999	353	625	638	2,3	31,7	0	142	22	0	0	0	4	6
54	1016	403	618	629	2,3	32,1	0	144	22	0	0	0	4	6
57	1031	447	650	660	2,4	32,5	0	145	22	0	0	0	4	6
58	1036	462	661	671	2,4	32,6	0	145	22	0	0	0	4	6
59	1041	476	672	682	2,4	32,7	0	146	22	0	0	0	4	6

В такой постановке задача тепломассообмена в системе цепь-шлам решается следующим образом. Решается задача Стефана (16). Определяются затраты тепла на нагревание материала и испарение влаги. После этого на основании теплового баланса определяют уменьшение температуры цепи. Такая постановка задачи Стефана была использована при разработке комплекса программ для расчета теплотехнологических процессов в цепных завесах вращающихся цементных печей [8], [9].

В цепной завесе может иметь место следующая ситуация. При критической влажности шлама физическая вода теряет капиллярную подвижность и при этом шлам теряет пластичность. При выходе цепи из шлама на ней не образуется слой шлама. При критической и меньшей влажности режим испарения влаги с падающей скоростью реализуется в следующем варианте. Цепь без слоя материала погружается в шлам на подду печи. Около цепи образуется слой влажного шлама. За счет теплопроводности и испарения влаги в шламе начинает образовываться слой сухого шлама, то есть начинается испарение влаги с падающей скоростью. Этот процесс описывается упрощенной задачей Стефана (16). Именно эта ситуация и была принята во внимание при разработке комплекса программ [8]. Разработанный комплекс программ был опробован. Расчеты с его использованием давали результаты, близкие к реальным.

Приводятся результаты расчета теплотехнологических процессов в печи № 4 цемзавода ОАО «Осколцемент», при температуре отходящих газов 225°C. Параметры печи и цепной завесы приведены в таблице 2. Расчеты проводились для случая решения задачи Стефана (16) по уточненному по сравнению с [8] методу: теплообмен между цепью и слоем шлама на ней находится по методу итераций. Результаты расчетов приведены в таблице 3. Результаты расчетов (таблица 3) показывают, что уточнение модели задачи Стефана (16) дает лучшее совпадение с промышленным экспериментом, чем при расчетах по комплексу программ [9]. Детально представлены результаты расчетов в зоне регенеративного теплообмена при испарении влаги с падающей скоростью ( $x$  от 37 м до 43 м).

При расчетах в цепных завесах выделяются четыре характерные теплотехнологические зоны: 1) нагревание шлама и цепей с пленкой шлама на них до температуры кипения воды в пленке; 2) испарение влаги из пленки шлама на цепях с постоянной скоростью испарения; 3) испарение влаги из сыпучего влажного шлама с падающей скоростью в регенеративном режиме; 4) нагревание сухого шлама в регенеративном режиме.

Примечание: обозначения в таблицах:  $x$  – расстояние по цепной завесе от холодного конца, м;  $T_{\Gamma}$  – температура газа, °C;  $T_M$  – температура шлама, °C;  $T_{Ц_1}$ ,  $T_{Ц_2}$  – температура цепей при выходе из шлама и перед погружением в шлам соответственно, °C;  $W_1$  и  $W_2$  – скорость газа в части сечения печи, занятой цепями, и под цепями, м/с;  $w$  – влажность шлама, %;  $P$  – падение давления газа на участке цепной завесы от сечения  $x$  до холодного конца, мм вод. ст.;  $W_M$  – скорость движения материала вдоль печи, мм/с;  $h_{пл}$  – толщина пленки шлама на цепях, мм;  $\xi$  – толщина высохшей пленки шлама, прилегающей к цепи, мм;  $m_{ж}$  – масса испарившейся воды на погонном метре печи в сек., кг/с.м; ТЗ – номер теплотехнологической зоны; УЧ – номер участка цепной завесы. (В работе [8] допущена опечатка. Следует считать, что в таблице 1 приведены результаты расчетов процессов в печи № 4, а в таблице 2 – в печи № 2).

После создания комплекса программ расчета теплотехнологических процессов в цепных завесах цементных печей [8] работы по уточнению моделей процессов в цементных печах и разработке методов расчета процессов были продолжены [1], [6], [10]-[15]. В настоящее время существует возможность разработки модифицированного, уточненного комплекса программ расчета теплотехнологических процессов в цепных завесах цементных печей.

**Заключение.** Рассмотрены вопросы тепловлагообмена в цепных завесах цементных печей при испарении влаги с падающей скоростью.

1. Проведено исследование модели тепловлагообмена при непосредственном конвективном теплообмене между газом и пленкой шлама на цепях и испарении влаги с падающей скоростью. Получены оценки тепловлагообмена, толщины высохших слоев шлама на цепях. Эти оценки могут быть использованы для качественного анализа испарения влаги с падающей скоростью. Разработанная модель тепловлагообмена может быть использована при создании пакета программ расчета тепломассообмена в цепных завесах.

2. Представлена упрощенная модель регенеративного тепловлагообмена при расчете потока тепла от газа к цепям и от цепей к шламу, и испарения влаги с падающей скоростью. Аналитическое решение задачи регенеративного тепловлагообмена затруднительно. Задача решается численно. Приводится пример расчета тепловлагообмена в цепной завесе с использованием разработанного комплекса программ, в котором использована представленная уточненная модель регенеративного тепловлагообмена.

3. Рассмотренные модели испарения влаги с падающей скоростью целесообразно использовать при разработке уточненного комплекса программ расчета тепломассообменных процессов в цепных завесах цементных печей.

4. Выбор оптимального режима работы и оптимальных параметров цепной завесы упрощается с использованием комплекса программ расчета тепломассообмена в режиме прямого моделирования процессов (например, увеличения теплообмена в цепных завесах можно добиться при увеличении

скорости газа в цепной завесе, но увеличение скорости газа обеспечивается при уменьшении плотности навески цепей в цепной завесе, а это приводит к уменьшению теплообмена: нахождение оптимума в этом случае чрезвычайно сложно и возможно только с использованием прямого моделирования процесса теплообмена.

Аналогичная ситуация складывается при нахождении оптимума теплообмена на участке цепной завесы с регенеративным теплообменом с падающей скоростью испарения влаги, когда оптимум теплообмена связан с выбором скорости продвижения материала по цепной завесе и т. д.).

### Список литературы

1. Горлов А. С., Петрашев В. И. 2017. Асимптотическое решение однофазной задачи о высыхании материалов при больших значениях времени. Вестник БГТУ им. В. Г. Шухова. 7: 136–139.
2. Кутателадзе С. С. 1990. Теплопередача и гидравлическое сопротивление. М.: Энергоатомиздат, 367.
3. Классен В. К. 2012. Технология и оптимизация производства цемента. Белгород: Изд-во БГТУ им. В. Г. Шухова, 308.
4. Лыков А. В. Теория сушки. М.: Энергия, 480.
5. Муштаев В. И., Ульянов В. М. 1988. Сушка дисперсных материалов. М.: Химия, 352.
6. Петрашев В. И. 2000. Об оценке толщины высохшего слоя шлама в цементной печи. Известия ВУЗов. Строительство. 10: 17–18.
7. Тихонов А. Н., Самарский А. А. 2004. Уравнения математической физики. М.: Наука, 798.
8. Федоренко Б. З., Борзенков А. В., Петрашев В. И. 1993. Комплекс программ для расчета теплотехнологических процессов в цепных завесах вращающихся цементных печей. Цемент. 3: 17–18.
9. Федоренко Б. З. 1993. Математическая модель теплотехнологических процессов в цепных завесах вращающихся цементных печей. Цемент. 3: 18–22.
10. Федоренко Б. З., Горлов А. С. 1995. Математическое моделирование управления движением материала в зоне цепной завесы вращающейся цементной печи. Ресурс- и энергосберегающие технологии строительных материалов, изделий и конструкций: Междунар. конф., Белгород: Изд-во БелГТАСМ. 91–92.
11. Федоренко Б. З. 2000. Математическое моделирование теплообменных процессов в цепных завесах цементных печей. Известия ВУЗов. Строительство. 10: 129–135.
12. Федоренко Б. З. 2001. Моделирование, анализ и оптимизация теплотехнологических процессов в цепных завесах цементных печей. Современные проблемы строительного материаловедения: материалы Седьмых академ. чтений РААСН. Белгород: Изд-во БелГТАСМ. Ч. 2. 347–359.
13. Федоренко Б. З. 2003. Математическая модель аэродинамики вращающейся цементной печи. Вестник БГТУ им. В. Г. Шухова. 6: 401–421.
14. Федоренко Б. З. 2005. Турбулентное движение жидкости: уточнённая модель Прандтля. Вестник БГТУ им. В. Г. Шухова. 10: 302–306.
15. Федоренко Б. З., Горлов А. С., Петрашев В. И. 2018. Модели аэродинамических процессов в цепных завесах цементных печей. Вестник БГТУ им. В. Г. Шухова. 7: 103–115.

### References

1. Gorlov A. S., Petrashev V. I. 2017. Asimptoticheskoe reshenie odnofaznoi zadachi o visikhanii materialov pri bolshih znacheniyah vremeni [Asymptotic solution of a single-phase problem of the materials drying with the large values of time]. Bulletin of BSTU named after V.G. Shukhov. 7: 136–139.
2. Kutateladze S. S. 1990. Teploperedacha i gidravlichesкое soprotivlenie [Heat transfer and hydraulic resistance]. M.: Energoatomizdat, 367.
3. Klassen V. K. 2012. Tehnologiya i optimizatsia proizvodstv tsementa [Technology and optimization of cement production]. Belgorod: BGTU. 308.
4. Likov A. V. 1968. Teoria sushki [Theory of drying]. M.: Energy, 480.

5. Mushtaev V. I., Ul'janov V. M. 1988. Sushka dispersnih materialov [Drying of dispersed materials]. M.: Chemistry, 352.
6. Petrashev V. I. 2000. Ob otsenke tolschini visohshego sloya shlama v tsementnoi pechi [About the estimation of the thickness of a dried sludge's layer in the cement kiln]. News of higher educational institutions. Building. 10: 17–18.
7. Tikhonov A. N., Samarskii A. A. 2004. Uravnenia matematicheskoi fiziki [The equations of the mathematical physics]. M.: Science, 798.
8. Fedorenko B. Z., Borzenkov A. V., Petrashev V. I. 1993. Kompleks programm dlya raschyota teplotehnologicheskikh protsessov v tsepnih zavesah vraschayuschih tsementnih pechei [Complex of the programs for calculation of heat processes in the chain veils of rotary cement kilns]. Cement. 3: 17–18.
9. Fedorenko B. Z. 1993. Matematicheskaya model teplotehnologicheskikh protsessov v tsepnih zavesah vraschayuschih tsementnih pechei [Mathematical model of heat processes in the chain veils of rotary cement kilns]. Cement. 3: 18–22.
10. Fedorenko B. Z., Gorlov A. S. 1995. Matematicheskoe modelirivanie upravleniya dvizheniem materiala v zone tsepnih zaves vraschayuschih tsementnih pechei [Mathematical modeling of motion control of the material in the zone of the chain veil of a rotating cement kiln]. Resource and energy-saving technologies of building materials, products and structures: International conference. Belgorod. 91–92.
11. Fedorenko B. Z. 2000. Matematicheskoe modelirivanie teplomassoobmennih protsessov v tsepnih zavesah tsementnih pechei [Mathematical modeling of heat and mass transfer processes in the chain veils of cement kilns]. The news of higher educational institutions. Building. 10: 129–135.
12. Fedorenko B. Z. 2001. Modelirovanie, analiz i optimizatsiya teplotehnologicheskikh protsessov v tsepnih zavesah tsementnih pechei [Modeling, analysis and optimization of thermal processes in the chain veils of cement kilns]. Modern problems of building materials: materials of the Seventh academic readings RAABS. Belgorod. Part 2. 347–359.
13. Fedorenko B. Z. 2003. Matematicheskaya model aerodinamiki vraschayuscheisya tsementnoi pechi [Mathematical model of aerodynamics of a rotating cement kiln]. Bulletin BSTU named after V. G. Shukhov. 6: 401–421.
14. Fedorenko B. Z. 2005. Turbulentnoe dvizhenie zhidkosti: utochnyonnaya model Prandtlya [Turbulent fluid motion: a refined Prandtl model]. Bulletin BSTU named after V.G. Shukhov. 10: 302–306.
15. Fedorenko B. Z., Gorlov A. S., Petrashev V. I. 2018. Modeli aerodinamicheskikh protsessov v tsepnih zavesah tsementnih pechei [Models of aerodynamic processes in the chain veils of cement kilns]. Bulletin BSTU named after V.G. Shukhov. 7: 103–115.

Получена 10.10.2020

---

**Федоренко Борис Зиновьевич** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики Белгородского государственного технологического университета имени В. Г. Шухова.

 <http://orcid.org/0000-0001-8263-7141>

ул. Костюкова, д. 46, Белгород, 308012, Россия

E-mail: [bz9393@mail.ru](mailto:bz9393@mail.ru)

**Горлов Александр Семенович** – кандидат технических наук, доцент, заведующий кафедрой высшей математики Белгородского государственного технологического университета имени В. Г. Шухова.

 <http://orcid.org/0000-0002-6695-0442>

ул. Костюкова, д. 46, Белгород, 308012, Россия

E-mail: [belgoras@mail.ru](mailto:belgoras@mail.ru)

**Петрашев Владимир Иванович** – старший преподаватель кафедры высшей математики Белгородского государственного технологического университета имени В. Г. Шухова.

 <http://orcid.org/0000-0002-2157-3276>

ул. Костюкова, д. 46, Белгород, 308012, Россия

E-mail: [petrashev\\_v@mail.ru](mailto:petrashev_v@mail.ru)

**МАГНИТНЫЕ СВОЙСТВА, МЕХАНИЗМЫ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТИ  
И МАГНИТОСОПРОТИВЛЕНИЯ В  $\text{La}_{0.5}\text{Sr}_{0.5}\text{Mn}_{1-y}\text{Fe}_y\text{O}_3$  ПРИ  $0 \leq y \leq 0.1$**

**И. М. Усатый, В. С. Захвалинский, О. Н. Иванов, Т. А. Ерина**

*(Статья представлена членом редакционной коллегии Ю. П. Вирченко)*

Белгородский государственный национальный исследовательский университет,  
г. Белгород, 308015, Россия

E-mail: 718097@bsu.edu.ru

**Аннотация.** Мы исследовали влияние легирования Fe на магнитные свойства, механизмы электропроводности и магнитосопротивления поликристаллического  $\text{La}_{0.5}\text{Sr}_{0.5}\text{MnO}_3$ , находящегося в состоянии фазового разделения. Результаты показывают, что при концентрации Fe  $\leq 5\%$ , во всём исследуемом диапазоне температур, ослабляется дальний порядок зарядово-упорядоченного (CO) состояния. Это приводит к тому, что короткодействующие CO кластеры внедряются в ферромагнитную (FM) металлическую матрицу, при этом показатели электросопротивления уменьшаются до фазы однородного металла. Однако дальнейшее легирование Fe приводит к обратным тенденциям, что объясняется эффектом ослабления двойного обмена, который является доминирующим при концентрациях Fe  $> 5\%$ . Температурная зависимость удельного сопротивления в области CO-фазы подчиняется механизму прыжковой проводимости с переменной длиной прыжка типа Шкловского – Эфроса. Такое поведение определяется возникновением мягкой кулоновской щели  $\Delta \approx 0.32$  эВ в плотности локализованных состояний и жесткой щели  $\delta_v$ , которая была рассчитана и обсуждена. Анализ полевой зависимости удельного сопротивления при фиксированных температурах свидетельствовал о наличии эффекта колоссального магнитосопротивления (CMR) в образце с концентрацией Fe  $\approx 10\%$ , и было дано возможное объяснение.

**Ключевые слова:** прыжковая проводимость, эффект Яна – Теллера, керамика, магнитное поле, температурная зависимость.

**Для цитирования:** Усатый И. М., Захвалинский В. С., Иванов О. Н., Ерина Т. А. Магнитные свойства, механизмы электропроводности и магнитосопротивления в  $\text{La}_{0.5}\text{Sr}_{0.5}\text{Mn}_{1-y}\text{Fe}_y\text{O}_3$  при  $0 \leq y \leq 0.1$ . Прикладная математика & Физика. 52(4): 271–285. DOI 10.18413/2687-0959-2020-52-4-271-285.

---

**MAGNETIC PROPERTIES, MECHANISMS OF ELECTRICAL CONDUCTIVITY  
AND MAGNETORESISTANCE IN  $\text{La}_{0.5}\text{Sr}_{0.5}\text{Mn}_{1-y}\text{Fe}_y\text{O}_3$  AT  $0 \leq y \leq 0.1$**

**I. M. Usatyy, V. S. Zakhvalinskii, O. N. Ivanov, T. A. Erina**

*(Article submitted by a member of the editorial board Yu. P. Virchenko)*

Belgorod National Research University,

Belgorod, 308015, Russia

E-mail: 718097@bsu.edu.ru

Received November 11, 2020

**Abstract.** We investigated the influence of Fe doping on the magnetic properties, mechanisms of electrical conductivity and magnetoresistance of polycrystalline  $\text{La}_{0.5}\text{Sr}_{0.5}\text{Mn}_{1-y}\text{Fe}_y\text{O}_3$ , which is in a state of phase separation. The results show that at a Fe concentration  $\leq 5\%$ , in the entire temperature range under study, the long-range order of the charge-ordered (CO) state is weakened. This leads to the fact that short-range CO clusters are embedded in a ferromagnetic (FM) metal matrix, with the electrical resistance indices decreasing to the phase of a homogeneous metal. However, further doping with Fe leads to the opposite tendencies, which is explained by the effect of weakening the double exchange, which is dominant at Fe concentrations  $> 5\%$ . The temperature dependence of the resistivity in the region of the CO phase obeys the mechanism of hopping conductivity with a variable hopping length of the Shklovsky - Efros type. This behavior is determined by the appearance of a soft Coulomb gap  $\Delta \approx 0.32$  eV in the density of localized states and a hard gap  $\delta_v$ , which was calculated and discussed. An analysis of the field dependence of the resistivity at fixed temperatures indicated the presence of the colossal magnetoresistance (CMR) effect in the sample with a Fe concentration of  $\approx 10\%$ , and a possible explanation was given.

**Key words:** hopping conductivity, Jahn - Teller effect, ceramics, magnetic field, temperature dependence.

**For citation:** Usatyy I. M., Zakhvalinskii V. S., Erina T. A. Magnetic properties, mechanisms of electrical conductivity and magnetoresistance in  $\text{La}_{0.5}\text{Sr}_{0.5}\text{Mn}_{1-y}\text{Fe}_y\text{O}_3$  at  $0 \leq y \leq 0.1$ . Applied Mathematics & Physics. 52(4): 271–285 (in Russian). DOI 10.18413/2687-0959-2020-52-4-271-285.

---

**1. Введение.** Разнообразные свойства смешанно – валентных манганитов с общей химической формулой  $\text{R}_{1-x}\text{A}_x\text{MnO}_3$  (R = La, Pr, Nd и Sm – редкоземельный элемент, A = Sr и Ca – двухвалентный

щелочноземельный элемент), имеющих структуру перовскита, были предметом широких исследований в течении нескольких десятилетий. Возобновление интереса к манганитам перовскитам связано с обнаружением сильной зависимости электрического сопротивления материала от величины внешнего магнитного поля, то есть явления магнитно-управляемого перехода металл – диэлектрик, известного как колоссальное магнитосопротивление (CMR). В ряде работ и обзоров рассматривались варианты практического применения в технике энергонезависимой магнитной записи, создания топливных ячеек, а также при изготовлении сенсоров [10, 13, 33, 35]. Механизм CMR в манганитах является одним из центральных вопросов физики сильно коррелированных электронных систем. Хотя учёт конкуренции между ферромагнитным (FM) двойным обменным взаимодействием (DE) и антиферромагнитным (AFM) суперобменным взаимодействием, а также локальных Ян-Теллеровских (JT) искажений даёт разумное описание отрицательного магнитосопротивления, этого оказалось недостаточным, чтобы количественно объяснить такой огромный отклик [10, 33, 35]. Обширные экспериментальные и теоретические исследования выявили важную роль фазового расслоения, а также взаимодействия между упорядочениями спиновых, зарядовых и орбитальных степеней свободы определяющих результирующие магнитные и транспортные свойства манганитов [10, 35]. Поэтому требуется более глубокое понимание микроскопических свойств CMR материалов, следовательно, исследование электрофизических свойств полупроводников и полупроводниковых структур с учетом их реальной микроструктуры, является важной и актуальной задачей.

Составы, вблизи уровня легирования  $x \approx 1/2$ , которые проявляют зарядово-орбитальное упорядочение (CO-OO) находятся под пристальным вниманием, поскольку предполагается, что перколяционные пути сосуществующих металлических фаз ответственны за эффект CMR [36]. Было показано, что в этих системах существует тонкая конкуренция между фазами, обладающими одинаковыми энергетическими масштабами, что приводит к разделению фаз на области от нанометров до нескольких микрометров [8]. Например, соединение  $\text{La}_{0.5}\text{Sr}_{0.5}\text{MnO}_3$  (LSMO5) [31] демонстрирует парамагнитный ферромагнитный (PM – FM) переход при температуре Кюри ( $T_C$ ) и при понижении температуры, система переходит к состоянию CO при температуре  $T_{CO}$ . Далее при низких температурах наблюдается переход первого порядка к основной низкотемпературной AFM фазе, при температуре Неля ( $T_N$ ), сосуществующей с FM и CO фазами одновременно. Таким образом, эти соединения, как правило, представляют собой AFM – системы при низких температурах и слегка конкурируют с FM и CO фазами в непосредственной близости, что является ключом к разнообразным эффектам. Например, применение внешних воздействий, таких как магнитное поле, давление, температура, постепенно изменяет соотношение фаз, может привести к фазовому переходу из диэлектрического состояния CO к FM металлическому, которое вызывает большой интерес в контексте нетрадиционного управления фазой магнитного и электронного состояний в магнитных оксидах [13, 35].

Метод легирования заряжено-упорядоченных манганитов примесными элементами активно используется на протяжении нескольких лет при изучении электронного фазового расслоения [36]. Это в свою очередь приводит к плавлению CO состояния, подобно тому, как это происходит под действием приложенного магнитного поля, давления или других воздействий [10, 33, 35]. Все эти явления, по видимому, тесно взаимосвязаны, и изучение легирования примесными элементами, которые замещают места Mn, может играть ключевую роль в их понимании. Например, легирование такими немагнитными катионами как  $\text{Al}^{3+}$ ,  $\text{Ga}^{3+}$ ,  $\text{Sc}^{3+}$  и  $\text{In}^{3+}$  в зарядово-упорядоченном манганите  $\text{Pr}_{0.57}\text{Ca}_{0.43}\text{MnO}_3$  [41], приводит к уравниванию JT искажения, которое было создано ионами  $\text{Mn}^{3+}$ , что делает структуру локально более симметричной вокруг них. В результате, CO-OO не может быть задано, при этом индуцируется металлическая FM фракция, несмотря на отсутствие магнитных взаимодействий между этими катионами и марганцем. Подобное образование FM фракций, которое можно регулировать примесными элементами, в последнее время вызвало чрезвычайный интерес в научном обществе, так как появилась возможность не только уменьшать значение  $T_C$ , но и увеличивать её [20]. Дальнейшие исследования показали, что этот геометрический эффект, вызванный легированием, может иметь и встречное искажение, когда размер легирующего катиона отличен от иона Mn. Например, такие мелкие катионы, как  $\text{Al}^{3+}$  и  $\text{Ga}^{3+}$ , позволяют индуцировать более симметричную структуру, что приводит к наибольшим FM-фракциям. Напротив, более крупные катионы, такие как  $\text{Sc}^{3+}$  и  $\text{In}^{3+}$ , хотя и имеют тенденцию разрушать эффект JT, вносят другой тип искажения из-за их большего размера и, следовательно, не столь благоприятны для более симметричной FM структуры, приводя к образованию меньших FM фракций. Напротив, для магнитных катионов, таких как  $\text{Cr}^{3+}$ , у которых  $e_g$ -состояния участвуют в формировании полосы локализованных состояний,  $W$ , и делают ее более широкой [14, 26], переход изолятор – металл может быть легко достигнут. Например, легирование только несколькими процентами атомов Cr подавляет состояние CO в манганите перовските  $\text{Nd}_{0.5}\text{Ca}_{0.5}\text{Mn}_{1-y}\text{Cr}_y\text{O}_3$  и материал становится FM металлом [19]. Влияние легирования Fe на CO тоже представляет немалый интерес, поскольку ион  $\text{Fe}^{3+}$  имеет одинаковый с замещающим ионом  $\text{Mn}^{3+}$  радиус, является магнитным, но не JT катионом и в отличие от  $\text{Cr}^{3+}$  не участвует в двойном обмене [4, 29]. Различные исследования легирования Fe на свойства манганитов перовскитов показали, что низкое легирование благоприятствует FM-фазе, вызывая FM-

взаимодействия, в то время как при более высоком легировании FM-фаза сосуществует с состоянием типа спин-кластерного стекла. В последние годы влияние легирования железом на СО состояние изучалось главным образом в  $\text{Ln}_{0.5}\text{Ca}_{0.5}\text{Mn}_{1-y}\text{Fe}_y\text{O}_3$  где  $\text{Ln} = \text{La}, \text{Pr}$  и  $\text{Nd}$  [6, 11, 22, 24, 41]. Было показано, что в этих материалах легирование  $\text{Fe}^{3+}$  стимулирует особое поведение, близкое к поведению немагнитных катионов, индуцируя при этом появление FM фракции. Несмотря на магнитный характер ионов  $\text{Fe}^{3+}$ , различие влияния на свойства перовскита по сравнению с  $\text{Cr}^{3+}$  объясняется его конфигурацией с высоким спином  $t_{2g}^3 e_g^2$ , которая препятствует любой делокализации носителей, когда все состояния заняты [14, 23]. Это приводит к большому энергетическому зазору [26], который препятствует делокализации носителей, так что  $\text{Fe}^{3+}$  действует скорее как немагнитный катион, разрушая локально эффект JT, связанный с  $\text{Mn}^{3+}$  и, следовательно, индуцируя, аналогично, ферромагнетизм из-за сходного ионного радиуса  $\text{Fe}^{3+}$  с ионом  $\text{Mn}^{3+}$  [41]. Другой тип беспорядка в манганитах перовскита, который наблюдался при замещении марганца железом, это структурный микроскопический беспорядок, приводящий к смене типа волновой функции локализованных электронов с обычной водородоподобной функции на короткодействующую [21, 34, 1]. Из литературы известно, что в отличие от  $\text{La}_{0.7}\text{Ca}_{0.3}\text{MnO}_3$  [21], влияние легирования Fe на свойства  $\text{La}_{0.7}\text{Sr}_{0.3}\text{MnO}_3$  можно объяснить только затуханием взаимодействий DE в парах  $\text{Fe}^{3+} - \text{Mn}^{3+}$ , в то время как индизирование дополнительного микроскопического беспорядка, не наблюдалось [1]. Таким образом, матрица соединения LSMO5 меньше всего подвержена влиянию структурного беспорядка, возникающего при замещении  $\text{Fe}^{3+}$  на позициях в решётке ионов  $\text{Mn}^{3+}$ , что способствует выявлению подлинного механизма влияния легирования Fe на материал LSMO5.

Несмотря на многочисленные исследования, природа влияния кристаллической (спиновой, зарядовой и фазовой) структуры на магнитные и транспортные свойства, присущая манганитам, все еще является предметом обсуждения. Насколько нам известно, для соединений LSMO5 никаких систематических исследований влияния легирования Fe на СО до сих пор не проводилось. В предыдущих исследованиях мы показали [2, 37], что в керамике  $\text{La}_{0.5}\text{Sr}_{0.5}\text{Mn}_{1-y}\text{Fe}_y\text{O}_3$  (LSMFO5) с  $y = 0.0, 0.02$  и  $0.10$ , легирование Fe способно на порядки изменять показатели удельного сопротивления, которые при этом демонстрировали сложное поведение с ростом  $y$ ; сначала уменьшаясь ( $\text{Fe} < 2\%$ ), а затем возрастая ( $\text{Fe} \leq 2\%$ ). Также было показано [3], что состав LSMFO5, с ростом уровня легирования  $y$ , демонстрирует значительное снижение температуры фазового магнитного перехода  $T_C$ , что способствует исследованию прыжковой проводимости в этом материале. В настоящей работе, мы исследуем данные температурной зависимости удельного сопротивления, магнитной восприимчивости, а также магнитосопротивления керамики LSMFO5, в расширенном диапазоне концентраций  $y = 0.0 - 0.1$ , уделяя особое внимание электронному спектру и механизму проводимости. Ожидается, что такие исследования предоставят важную микроскопическую информацию о локализованных носителях заряда в этом соединении.

**2. Эксперимент.** Керамические образцы LSMFO5 следующих составов  $x = 0.5$  и  $y = 0, 0.02, 0.05, 0.08$  и  $0.10$ , были получены с применением стандартной твердофазной реакции. Для синтеза использовались исходные материалы  $\text{La}_2\text{O}_3$ ,  $\text{MnO}_2$ ,  $\text{Fe}_2\text{O}_3$  и  $\text{SrCO}_3$ . Смеси порошков исходных материалов отжигались на воздухе при температуре  $1360^\circ\text{C}$  в течение 40 часов с промежуточным измельчением. Полученный порошок прессовался в таблетки под давлением  $2000 \text{ кг/см}^2$ , затем таблетки отжигались на воздухе при температуре  $1360^\circ\text{C}$  в течение 22 часов. Фазовую чистоту и кристаллическую структуру полученных образцов исследовали методом порошковой дифракции рентгеновских лучей при помощи рентгеновского дифрактометра Rigaku SmartLab (излучение  $\text{CuK}\alpha$ ) при комнатной температуре. В соответствии с результатами рентгенофазового анализа (рисунок 1) было установлено, что все образцы были однофазные и соответствовали пространственной группе R-3c.

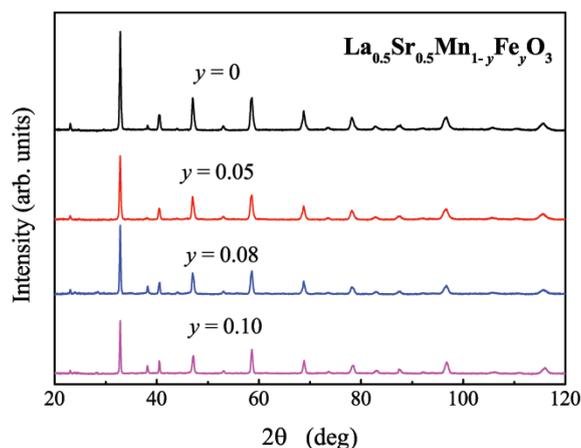


Рис. 1. Рентгеновские дифрактограммы, полученные для LSMFO5 с концентрацией Fe равной  $y = 0, 0.05, 0.08$  и  $0.1$   
 Fig. 1. X-ray diffraction patterns obtained for LSMFO5 with Fe concentration equal to  $y = 0, 0.05, 0.08$ , and  $0.1$

Таблица 1. Состав и параметры кристаллической решётки образцов LSMFO5 ( $y = 0.0, 0.05, 0.08, 0.1$ )  
 Table 1. Composition and crystal lattice parameters of LSMFO5 samples ( $y = 0.0, 0.05, 0.08, 0.1$ )

$y$	0	0.05	0.08	0.1
$a(\text{Å})$	5.459	5.429	5.442	5.453
$c(\text{Å})$	13.401	13.410	13.390	13.370

Рассчитанные значения параметров кристаллической решетки для легированных и нелегированных составов приведены в таблице ???. Из таблицы ??? видно, что легирование железом не приводит к какому-либо заметному систематическому изменению значений параметров кристаллической решетки. Это, по-видимому, связано с тем, что при образовании твёрдого раствора в манганитах происходит прямая замена иона  $\text{Mn}^{3+}$  на ион  $\text{Fe}^{3+}$ , который обладает равным ионным радиусом с ионом  $\text{Mn}$  [4].

Измерения электропроводности и магнетосопротивления были проведены с использованием стандартного четырёхзондового метода на автоматизированной установке замкнутого цикла (Mini Cryogen Free Measurements System (Cryogenic Ltd, UK)) в интервале температур 5–300 К и в поперечном магнитном поле  $B = 0\text{--}5$  Тл. Температурную зависимость магнитной восприимчивости по переменному току  $\chi(T)$  измеряли с помощью самодельной медной катушки, которая крепилась на охлаждающий держатель криостата замкнутого цикла Janis CCS – 350S, собирающего данные в интервале температур  $T = 40\text{--}360$  К. Магнитная восприимчивость получается путем измерения разности индуктивности катушки с образцом и без, при помощи измерителя RLC (AM-3026). Амплитуда и частота переменного поля составляла 1 Гс и 10 кГц соответственно.

**3. Результаты и обсуждение. 3.1. Температурные зависимости удельного сопротивления и магнитосопротивления.** На рисунке 2а показаны профили температурных зависимостей удельного сопротивления  $\rho(T)$  поликристаллических образцов LSMFO5 при  $y = 0, 0.02, 0.05, 0.08$  и  $0.1$ , в нулевом магнитном поле. Показатели удельного сопротивления  $\rho$ , нулевого поля, в зависимости от  $y$ , демонстрируют сложный характер, при этом изменяясь в широком диапазоне. В случае начального легирования ( $0 < y < 0.05$ ), показатели  $\rho$  постепенно снижаются, вплоть до  $\sim 10^{-4}$  Ом·см (для  $y = 0.05$ ), а затем увеличиваются ( $y > 0.05$ ) до  $\sim 10^8$  Ом·см (с  $y = 0.1$ ), при низких температурах. Для образца без Fe, на зависимости  $\rho(T)$ , наблюдается переход металл – изолятор (MIT), вблизи 260 К, диэлектрическая часть которого образуется смесью фаз, из которых доминирующей является непроводящая CO фаза. Металлическая же часть MIT сформирована антиферромагнитной (AFM) спиновой структурой A – типа, которая образует проводящее низкотемпературное основное состояние в LSMO5, что согласуется с литературой [5, 12, 15, 17, 26]. Для образца  $y = 0$  и  $y = 0.02$ , начиная от MIT, и до низких температур, наблюдался затяжной термический гистерезис. Существование термического гистерезиса связывается с одновременным присутствием FM металлических кластеров, находящихся в высокотемпературной CO фазе и распределением их по размерам [18], вдоль MIT, что вызывает необратимость при нагревании и охлаждении на зависимости  $\rho(T)$ . С дальнейшим легированием Fe температура MIT смещается к более низким значениям, что связано с частичным разрушением проводящей слоистой AFM структуры, примесью железа. Кривая  $\rho(T)$  для образца  $y = 0.02$ , демонстрировала почти ту же тенденцию, что и для  $y = 0$ , но значения были примерно равномерно снижены на один порядок. Данный факт связывается с разрушающим влиянием Fe на диэлектрическую CO фазу [30], которая сосуществует с другими фазами, такими как FM и AFM [31], во всем исследуемом диапазоне температур. Для образца  $y = 0.05$ , как показано на рисунке 2а, MIT, а также термический гистерезис исчезают, и происходит увеличение наклона кривой  $\rho(T)$ , при этом абсолютные значения  $\rho$  во всём исследуемом диапазоне температур достигли своего минимального значения, около  $\sim 10^{-4}$  Ом·см, что соответствует фазе однородного FM металла по критерию Иоффе – Регеля ( $\rho \leq 10^{-3}$  Ом·см) [16]. Дальнейшее увеличение уровня легирования Fe приводит только к росту показателей  $\rho$ . В образце  $y = 0.08$ , на поведении  $\rho(T)$  вновь наблюдаются признаки MIT, а абсолютные значения  $\rho$  становятся сравнимы с образцом без Fe. Эти результаты позволяют предположить, что индуцированный примесью, частично восстановленный MIT, объясняется перколяционным переходом [1]. В образце  $y = 0.1$ , показатели удельного сопротивления резко увеличиваются, а зависимость  $\rho(T)$  меняется, в конечном счете, на чисто активационное поведение, присутствующее в пределах всего исследуемого интервала температур.

Чтобы более детально проанализировать влияние магнитного поля на составы при различных концентрациях Fe, мы построили на рисунке 2b температурные зависимости абсолютного значения магнитосопротивления  $\Delta\rho/\rho_0(\%)$  (определяемого как  $100 \cdot [\rho(B) - \rho(0)]/\rho(0)$ , где  $B = 3$  Тл). Как показано на рисунке 2b, магнитосопротивление для образца без Fe монотонно увеличивается с уменьшением температуры и доходит до  $-30\%$  при температуре около 20 К. Однако в образце  $y = 0.05$  наблюдалось небольшое увеличение наклона на кривой  $\Delta\rho/\rho_0$  (относительно  $y = 0.02$ ), начиная с температуры 150

К и ниже. Более значительный рост магнитосопротивления и увеличение крутизны кривой  $\Delta\rho/\rho_0$  наблюдались в образцах  $y = 0.08$  и  $0.1$ . В образце с  $y = 0.1$  значение  $\Delta\rho/\rho_0$  достигли  $-70\%$  при температуре  $20$  К. Таким образом, можно выделить две группы образцов: первая – это образцы при концентрациях  $y \leq 0.5$ , где кривые магнитосопротивления слабо изменяются от  $y$ , и вторая группа образцов с  $y > 0.5$ , демонстрирующая сильную зависимость  $\Delta\rho/\rho_0$  от  $y$  при низких температурах ( $T < 200$  К).

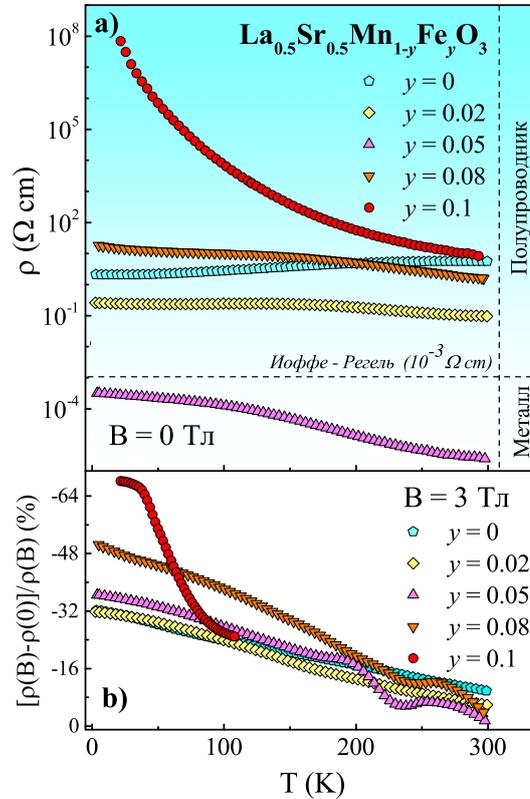


Рис. 2. а) Температурная зависимость удельного сопротивления для образцов LSMFO5 ( $0 \leq y \leq 0.10$ ) в нулевом магнитном поле. Показатели  $\rho$  для образца с  $y = 0.05$  были увеличены в 240 раз; б) температурная зависимость величины магнитосопротивления в магнитном поле  $B = 3$  Тл

Fig. 2. a) Temperature dependence of resistivity for LSMFO5 samples ( $0 \leq y \leq 0.10$ ) in zero magnetic field. The  $\rho$  indices for the sample with  $y = 0.05$  were increased 240 times; b) temperature dependence of the magnitude of the magnetoresistance in a magnetic field  $B = 3$  T

Влияние Fe на зависимость  $\rho(T)$  в соединении LSMFO5, качественно, можно проанализировать с двух разных точек зрения, а именно влияния на фазу CO и на связь DE. В настоящее время известно, что в нелегированном соединении проявляется фазовое разделение между FM и CO состоянием на микрообласти, ниже  $300$  К [31]. Это значит, что малая доля FM-фазы встроена в CO-изолирующую фазу, без металлической перколяции через образец, на что также указывает существование термического гистерезиса в образцах  $y = 0$  и  $y = 0.02$ . При низких ( $y < 0.5$ ) уровнях легирования Fe, CO фаза на больших расстояниях разрушается, и металлическая перколяция может индуцироваться через весь образец, образуя при этом однородное металлическое состояние, например, как в образце  $y = 0.05$ . Таким образом, предполагается, что легирование с низким содержанием Fe стабилизирует низкотемпературное металлическое FM состояние. С другой стороны, хорошо известно, что DE опосредует ферромагнетизм и металлическую проводимость [4, 29]. Поскольку легирование Fe приводит к прямой замене  $\text{Mn}^{3+}$  на  $\text{Fe}^{3+}$ , сайты, которые заняты  $\text{Fe}^{3+}$ , больше не могут эффективно участвовать в процессе DE и в свою очередь ослабляют FM фазу, что приводит к увеличению удельного сопротивления. Таким образом, при концентрации Fe  $\leq 5\%$ , дальний порядок CO ослабевает, тем самым увеличивая долю FM, а удельное сопротивление уменьшается. Однако при более высоких концентрациях железа ( $y > 0.5$ ) ослабление DE под влиянием легирования Fe является доминирующим, и сопротивление материала начнет расти.

Анализ магнитосопротивления от температуры показывает, что образцы в области концентраций  $y \leq 0.5$  проявляют незначительное изменение в поведении  $\Delta\rho/\rho_0$  от  $T$  при различных концентрациях Fe, что объясняется особенностями сосуществующих заряжено-упорядоченных (диэлектрических) и ферромагнитных (металлических) фаз. Такое поведение можно интерпретировать как следствие неоднородностей, возникающих из-за фазовой конкуренции [10, 35]. А именно, известно, что физические

свойства манганитов, несмотря на их высокую химическую однородность, могут иметь пространственно неоднородные структуры, то есть области с различным электронным порядком. Эти различия фактически означают пространственно-коррелированное расположение заряда, спина или орбиталей, которые мы можем назвать кластерами, известными в литературе как разделение фаз. Общепринято, что фазовое разделение, вероятно, является ключом к явлению CMR [35], когда существование предварительно сформированных FM-островков или кластеров и их легкое выравнивание с внешними магнитными полями вызывает большое магнитосопротивление. Другими словами, некоторые FM-кластеры сохраняются вместе с состоянием CO для  $y \leq 0.5$  (или FM-области на фоне CO/AF). Объемная доля этих FM-кластеров увеличивается с приложенным внешним магнитным полем, и для достаточно сильных магнитных полей FM-кластеры могут соединяться друг с другом, создавая FM-металлический режим в CO/AF-состоянии. Такое поведение было впервые обнаружено в полупролегируемых манганитах и названо «плавлением» CO в магнитном поле [32]. Однако, как упоминалось ранее, при исследовании поликристаллических образцов, имеющих состав вблизи  $x = 0.5$ , сопротивление показало металлоподобное поведение только при  $B > 12$  Тл [43], что свидетельствует о высокой стабильности CO в этом материале. С другой стороны, влияние легирования Fe оказывает разрушающий эффект на CO фазу, аналогично тому, как это происходит под действием внешнего магнитного поля. Таким образом, идентичность кривых магнитосопротивления от температуры в области  $y \leq 0.5$  указывает на присутствие стабильного CO состояния. Тем не менее образец  $y = 0.05$  демонстрирует некоторый рост  $\Delta\rho/\rho_0$  при низких температурах в магнитном поле  $B = 3$  Тл, что предполагает меньшую долю CO, следовательно, FM области могут объединяться, увеличивая тем самым эффект магнитосопротивления. Значительный рост магнитосопротивления наблюдался при  $y > 0.5$ . Этой части фазовой диаграммы отвечает смена конкурирующей фазы с CO на AFM, которая индуцируется Fe. Действительно, как было показано [4], частичная замена Mn на Fe способствует AFM изолирующему поведению. Такая AFM фаза не имеет зарядового порядка и может быть легко подавлена небольшим магнитным полем, что и приводит к большому магнетосопротивлению. Из этого можно заключить, что поведение магнитосопротивления в образце LSMFO5 объясняется последовательной сменой конкурирующей фазы, начиная от CO фазы, которая порождает FM/CO конкуренцию (для  $y \leq 0.5$ ), а затем AFM фазой (при  $y > 0.5$ ), приводящей к FM/AFM конкуренции. С одной стороны, происходит постепенное разрушение CO фазы, которое вызвано легированием Fe, как и одновременно нарастание AFM спинового упорядочения.

**3.2. Магнитные свойства.** На рис. 3 представлены экспериментальные данные температурной зависимости магнитной восприимчивости  $\chi(T)$ , измеренной на переменном токе частотой 10 кГц, для образцов LSMFO5 ( $y = 0.0, 0.05, 0.08$  и  $0.1$ ) в переменном магнитном поле 1 Гс. С понижением температуры, для всех образцов, наблюдались два магнитных перехода: сначала PM – FM, а затем FM – AFM, приводящие к резкому скачку, а затем падению  $\chi$ , соответственно. Температуры переходов PM – FM и FM – AFM обозначены здесь как  $T_C$  и  $T_N$  соответственно. Значения температур переходов магнитного упорядочения могут быть определены по точке перегиба и максимума на кривой  $\chi(T)$ . Для примера, на рисунке 3 (вставка) мы отметили магнитные переходы, в образце без Fe, на кривой  $d\chi/dT$ , где минимум и нулевое значение соответствуют  $T_C$  и  $T_N$ . Для других образцов кривая  $d\chi/dT$  демонстрирует аналогичную тенденцию (на рисунке не приведены), а найденные значения  $T_C$  и  $T_N$  представлены в таблице 2. Для образца без железа, температура  $T_C \approx 350$  К, что хорошо согласуется с известными литературными данными [17, 26]. Особенностью нелегированного образца является проявление слабого пика ниже  $T_C$  на кривой  $d\chi/dT$  (рис. 3, вставка) при температуре  $T_{CO} \sim 319$  К, который связывается с началом перехода к CO состоянию. Далее,  $T_N$ , в образце без железа, находится в хорошем соответствии с температурой MIT, при котором наблюдалась смена доминирующего режима от CO состояния к AFM структуре A-типа, на кривой  $\rho(T)$ , что подтверждает достоверность этих результатов. С увеличением легирования, температура  $T_C$  демонстрирует уменьшение от 350 К, для нелегированного состава, до 200 К при  $y = 0.1$ , а также уменьшение  $T_N$  от 260 К для  $y = 0$  до 145 К при  $y = 0.1$ . Также слабый пик, который наблюдался в нелегированном составе, при температуре  $T_{CO}$ , отсутствовал в других образцах. Постепенное смещение кривой  $\chi(T)$  в сторону низких температур, вместе с уменьшением  $T_C$  и  $T_N$  по мере роста  $y$ , свидетельствует о негативном влиянии Fe на FM и AFM упорядочение. Как известно [4], замена  $Mn^{3+}$  на  $Fe^{3+}$  подавляет ферромагнетизм, поскольку  $Fe^{3+}$  не поддерживает DE в парах  $Fe^{3+} - Mn^{4+}$ , это приводит к наблюдаемому уменьшению  $T_C$ . С другой стороны, ниже  $T_N$  наблюдается AFM-структура A-типа, которая состоит из FM слоёв, антиферромагнитно связанных между собой. Легирование Fe в позиции Mn ослабляет FM в плоскости и вызывает разрушение AFM связи между слоями, что приводит к снижению  $T_N$ . Следовательно, присутствие Fe препятствует установлению идеального AFM порядка между слоями и с увеличением уровня легирования ожидается поэтапное подавление AFM.

**3.3. Прыжковая проводимость.** На зависимости удельного сопротивления от температуры (рис. 2) в области CO-фазы, можно выделить обширную область, демонстрирующую прыжковый механизм проводимости с переменной длиной прыжка (ПППДП) [34]. В соответствии с универсальным выражением

Таблица 2. Значения относительных концентраций  $Fe_y$ , температур переходов PM – FM ( $T_C$ ) и FM – AFM ( $T_N$ ), температур начала ПППДП  $T_v$ , характеристических температур ПППДП  $T_0$ , коэффициентов  $A$ , ширины кулоновской щели  $\Delta$  и жесткой щели  $\delta_v$ , радиусов локализации  $a$   
 Table 2. Values of the relative concentrations of  $Fe_y$ , the transition temperatures PM – FM ( $T_C$ ) and FM – AFM ( $T_N$ ), the temperatures of the onset of the VRH  $T_v$ , the characteristic temperatures of the VRH  $T_0$ , the coefficients  $A$ , the width of the Coulomb gap  $\Delta$  and the rigid gap  $\delta_v$ , and the localization radii  $a$

$y$	$T_C$ (K)	$T_N$ (K)	$T_v$ (K)	$\theta$ (K)	$A$ ( $\Omega \cdot \text{cm}$ )	$\Delta$ (eV)	$\delta_v$ (eV)	$a$ $\text{\AA}$
0	350	260	-	-	-	-	-	-
0.02	340	250	265	4.1	$5.2 \cdot 10^{-18}$	0.28	0.07	2.0
0.05	309	231	221	7.5	$1.0 \cdot 10^{-24}$	0.35	0.04	1.1
0.08	252	191	-	-	-	-	-	-
0.10	200	145	198	8.0	$2.1 \cdot 10^{-18}$	0.36	-	1.0

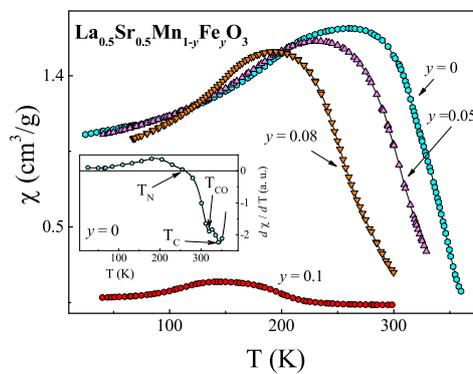


Рис. 3. Температурная зависимость магнитной восприимчивости для  $LSMFO5$  измеренная на частоте 10 кГц в магнитном поле 1 Гс. На вставке: температурная зависимость производной восприимчивости для образца без Fe.  
 Fig. 3. Temperature dependence of the magnetic susceptibility for  $LSMFO5$  measured at a frequency of 10 kHz in a magnetic field of 1 G. Inset: temperature dependence of the susceptibility derivative for a sample without Fe. Here  $T_C$ ,  $T_N$  and  $T_{CO}$  are temperatures for PM – FM, FM – AFM and CO transition, respectively

$$\rho(T) = \rho_0(T) \exp\left(\frac{T_0}{T}\right)^p, \tag{1}$$

где коэффициент  $\rho_0(T) = A \cdot T^m$ ,  $A$  – постоянная коэффициента и  $T_0$  – характеристическая температура [21, 34]. Значение показателя степени  $p$  и  $m$  в уравнении (1), связаны с механизмом прыжковой проводимости. Адиабатическому режиму прыжковой проводимости между ближайшими соседями (АППБС), соответствуют значения  $p = m = 1$ , не адиабатическому (ППБС)  $p = 1$  и  $m = 3/2$ . С понижением температуры становится важным микроскопическое разупорядочение и наблюдается переход к ПППДП типа Мотта при  $p = 1/4$ , а также Шкловского – Эфроса (SE) со значением  $p = 1/2$ . Механизм ПППДП типа Мотта имеет место, когда кулоновские взаимодействия между носителями можно пренебречь [16]. В противном случае такие корреляции приводят к появлению мягкой кулоновской щели,  $\Delta$ , и к ПППДП типа SE [34]. В манганитах перовскитах значение  $m = 8 - p(7 + q)$ , где  $q = 0$  для отсутствия и  $q = 4$  для наличия вклада флуктуирующего потенциала ближнего действия в микроскопическое расстройство, соответственно [21, 1]. В уравнении (1)  $T_0 = T_{0M}$  или  $T_{0SE}$  для  $p = 1/4$  или  $1/2$  соответственно [16, 34], где

$$T_{0M} = 21/(kg(\mu)a^3), T_{0SE} = 2.8e^2/(kka). \tag{2}$$

Здесь  $g(\mu)$  – плотность локализованных состояний (ПЛС) вблизи уровня Ферми  $\mu$ ,  $a$  – радиус локализации носителя заряда,  $k$  – диэлектрическая проницаемость. При наличии жесткой щели,  $\delta < \Delta$ , ПППДП удовлетворяет уравнению (1) с  $p = 1/2$ , где  $T_0$  [21] дается выражением

$$T_0 = \left( \frac{\delta_v}{2k\sqrt{T_v}} + \sqrt{\frac{\delta_v^2}{4k^2T_v} + T_{0SE}} \right)^2. \tag{3}$$

где  $\delta_v$  – ширина жесткой щели (существующей благодаря поляронным эффектам в манганитах [7]),  $T_0$  – температура начала ПППДП типа SE. Соответствие кривой  $\rho(T)$  механизму проводимости, с соответствующими значениями  $p$  и  $m$ , определяется анализом локальной энергии активации  $E_a(T) = d \ln \rho(T)/d(kT)^{-1}$  [34], которая может быть представлена в виде  $\ln(E_a/(kT) + m) = \ln p + p \ln T_0 + p \ln(1/T)$ . На рисунке 4 изображены экспериментальные зависимости  $\rho(T)$ , построенные как функции  $\ln[E_a/kT + m]$  от  $\ln(1/T)$  для образцов с  $y = 0.02$  (рис. 4а), 0.05 (рис. 4б) и 0.1 (рис. 4с) в магнитных полях  $0 \leq B \leq 5$  Тл. Разноцветными фигурками обозначены экспериментальные данные, а сплошными обозначены линии подгонки. Можно видеть, что система LSMFO5 демонстрирует участки как с ПППДП, так и с ППБС, на что указывает существование линейных участков, построенных в координатах  $\ln[E_a/kT + m]$  от  $\ln(1/T)$ . Как следует из рисунка 4, в нулевом магнитном поле механизм переноса для трех образцов можно отнести к ПППДП типа SE с параметрами подгонки  $p = 1/2$  и  $m = 9/2$ . По линейным участкам графиков на рисунке 4 найдены величины  $T_0$  и  $A$ , а также температура начала ПППДП типа SE,  $T_v$ , в нулевом магнитном поле и представлены в таблице 2. Используя эти температурные параметры, с помощью уравнения  $\Delta \approx k(T_0 T_v)^{1/2}$  [21] мы определили величины кулоновой щели, которые представлены в таблице 2. Для определения радиуса локализации носителей заряда было использовано выражение для ПЛС вне кулоновой щели:  $g_0 = N_0/(W - 2\Delta/3)$  [34], где  $N_0 = 1.43 \cdot 10^{22}$  см<sup>3</sup> концентрация атомов марганца в LSMO5 [1],  $W$  – ширина полосы локализованных состояний. Величины  $W$  были вычислены с использованием уравнения  $kT_C \approx 0.05Wc(1 - c)$  [38], где  $T_C$  – температура Кюри,  $c = (0.5 \sim y)$  концентрация дырок [16]. Взяв  $y = 0.02, 0.05$  и  $0.1$  мы получили  $W \approx 2.4$  eV, 2.2 eV и 1.4 eV, что близко к найденным значениям в манганитах [1]. С другой стороны  $g_0 = (3/\pi)(\kappa^3/e^6)(\Delta - \delta_v)$  [21] откуда была найдена  $\delta_v$ , а значение  $a$  определено из уравнения (3) и представлено в таблице 2. Величина  $\kappa \approx 6.1$  определена из соотношения  $\Delta \approx U$ , где  $U \approx e^2/\kappa R$  – средняя энергия кулоновского взаимодействия и  $R \approx 2[4\pi N_0(0.5 - y)/3]^{-1/3}$  – среднее расстояние между дырками, или узлами Mn<sup>4+</sup> [21].

Наличие жесткой щели  $\delta_v$  указывает на электрон-фононное взаимодействие, подтверждающее ведущую роль локальных JT искажений [25] в локализации носителей заряда и формировании малого поляронного состояния. Значения  $\delta_v = 0.07 - 0.04$ , найденные в этой работе, сравнимы с  $\delta_v \approx 0.07$  для La<sub>0.3</sub>Sr<sub>0.3</sub>Mn<sub>1-y</sub>Fe<sub>y</sub>O<sub>3</sub> [1]. Кроме того, значения  $a$  согласуются с образованием поляронов малого радиуса в перовскитах манганитах [21, 16, 1]. Можно заметить, что значение  $\delta_v$  уменьшается с увеличением уровня легирования  $y$ , что подразумевает ослабление электрон-фононной связи, приводящее к делокализации электрона. С другой стороны, уменьшение  $a$  с ростом  $y$  свидетельствует о возрастании степени локализации носителей. Это несоответствие можно объяснить, основываясь на предполагаемом происхождении жесткой щели, согласно выражению  $\delta_v = E_p/2 - E_d/2$  [16], где  $E_p$  – глубина поляронной потенциальной ямы, связанной с искажениями решётки,  $E_d$  – ширина распределения потенциальной энергии электрона, обусловленная беспорядком. Поскольку степень искажений решётки мала, из-за равных ионных радиусов Fe<sup>3+</sup> и Mn<sup>3+</sup> [4, 29], наблюдаемое уменьшение  $\delta_v$  должно быть связано в основном с увеличением беспорядка. С другой стороны, важно вспомнить значение  $q = 0$ , характерное для всех исследованных нами образцов, что подразумевает отсутствие флуктуирующего потенциала ближнего действия и согласуется с отсутствием влияния микроскопического беспорядка вызванного легированием Fe. Такое положение свидетельствует о возрастании роли магнитного (спинового) беспорядка индуцированного Fe так, как в манганитах перовскитах  $E_d = E_{dL} + E_{dS}$  [16, 34], где  $E_{dL}$  – вклад от микроскопического разупорядочения решётки,  $E_{dS}$  – вклад магнитного или спинового беспорядка. Следовательно, в отсутствии влияния микроскопического беспорядка, наблюдаемое уменьшение  $\delta_v$  с увеличением  $a$  свидетельствует о росте магнитного беспорядка, вызванного легированием Fe. Увеличение  $E_{dS}$  означает рост степени локализации, что приводит к уменьшению  $a$ , как показано в таблице 2. Подобный тип беспорядка в манганитах был предложен Viret и др. [39, 40] и связывается со случайными энергетическими барьерами, порожденными появлением локальной намагниченности, что приводит к неколлинеарности спиновой системы. Применение того же подхода подразумевает, что и в нашем случае индуцируются локальные FM-регионы на фоне СО состояния. Действительно, несмотря на то, что ион Fe<sup>3+</sup> не участвует в формировании полосы (в отличие от Cr<sup>3+</sup>, к примеру), было показано, что легирование Fe локально разрушает JT искажение Mn<sup>3+</sup>, разрушая при этом орбитальную структуру СО, индуцируя ферромагнетизм и металличность [22, 23]. Стоит отметить, что по сравнению с другими легирующими примесями, такими как Sc<sup>3+</sup> и In<sup>3+</sup>, которые аналогично разрушают эффект JT, Fe не вносит другой тип искажения из-за его сходного размера с ионом Mn<sup>3+</sup> и, следовательно, благоприятно сказывается на более симметричной FM структуре [41]. Таким образом, с ростом Fe, беспорядок создаётся локальным СО – FM переходом, где некоррелирующие между собой FM регионы случайно расположены в матрице СО, что порождает локальную намагниченность и спиновый беспорядок. В этой связи пониженные значения удельного сопротивления в образце с  $y = 0.05$  в нулевом магнитном поле могут означать увеличение концентрации свободных носителей, которые индуцируются растущими FM регионами, но при этом локализация, вызванная магнитным беспорядком, только увеличивается.

Магнитный беспорядок, возникающий вследствие относительной разориентации спинов ионов марганца, должен уменьшаться по мере их ориентации во внешнем магнитном поле. Подтверждение

ослабления спинового беспорядка магнитным полем доказываются результатами, представленными на рисунке 4, где наблюдается смена механизмов прыжковой проводимости от ПППДП к ППБС, что является общей тенденцией к уменьшению беспорядка и, следовательно, к делокализации электронных состояний [40, 1]. С другой стороны, образец  $y = 0.05$  (рис. 4b) переходит к ППБС уже в поле 1 Тл, чего не наблюдается в двух других образцах. Эта особенность указывает на относительно большую долю FM фазы (или меньшую долю СО фазы) в этом образце, чем в двух других, и подразумевает рост FM регионов в большом масштабе под действием магнитного поля, что приводит к перколяционным эффектам, что значительно уменьшает потенциал беспорядка. Дальнейшее легирование приводит к уменьшению доли FM-кластеров (или увеличению AFM фазы) и в образце  $y = 0.1$  (рис. 4c) наблюдается только смена ПППДП SE на Мотта при  $B = 2$  Тл. Уменьшение влияния FM фазы в этом образце и одновременно с этим рост магнитосопротивления (рис. 2b) способствует возможному объяснению того, что сосуществование FM и AFM фаз является источником явления CMR [9, 10, 33, 35].

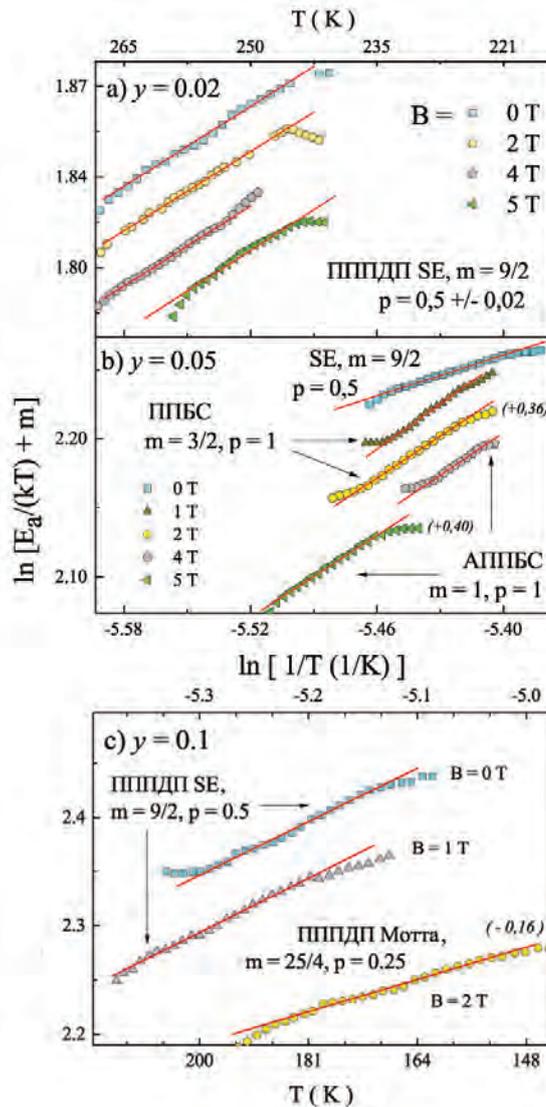


Рис. 4. Графики зависимости  $\ln[E_a/kT + m]$  от  $\ln(1/T)$  в магнитных полях различной величины для образцов LSMFO5. a)  $y = 0.02$ , b)  $y = 0.05$  и c)  $y = 0.1$ . Красные линии – линейные подгонки

Fig. 4. Plots of  $\ln[E_a/kT + m]$  versus  $\ln(1/T)$  in magnetic fields of various magnitudes for LSMFO5 samples. a)  $y = 0.02$ , b)  $y = 0.05$ , and c)  $y = 0.1$ . Red lines are linear fits

**3.4. Полевая зависимость магнитосопротивления при постоянной температуре.** Чтобы более подробно изучить влияние магнитного поля, мы измерили магнитосопротивление при  $0 \leq B \leq 5$  Тл для некоторых образцов при фиксированных температурах. На рисунке 5 показаны кривые  $\Delta\rho/\rho_0$  в зависимости от магнитного поля,  $B$ , при нескольких температурах (ниже 100 К) для  $y = 0, 0.02$  и  $0.1$ . Разница в поведении  $\Delta\rho/\rho_0$  в зависимости от поля для образцов  $y = 0$  (рис. 5a) и  $0.02$  (рис. 5b) невелика и по абсолютным значениям в среднем не превышает  $-40\%$  в поле 5 Тл. С другой стороны, для образца с  $y = 0.1$  (рис. 5c) различие поведения  $\Delta\rho/\rho_0$  в зависимости от  $B$  становится более очевидным. Большое

падение удельного сопротивления ( $\Delta\rho/\rho_0 \sim 100\%$ ) в приложенном магнитном поле, безусловно, является следствием индуцированных полем FM-кластеров, что указывает на наличие эффекта CMR. Другое явление, которое мы наблюдаем в образце с  $y = 0.1$ , выражено при 20 K (рис. 5d) и заключается в том, что индуцированная приложенным полем FM-фаза все еще сохраняется после выключения поля.

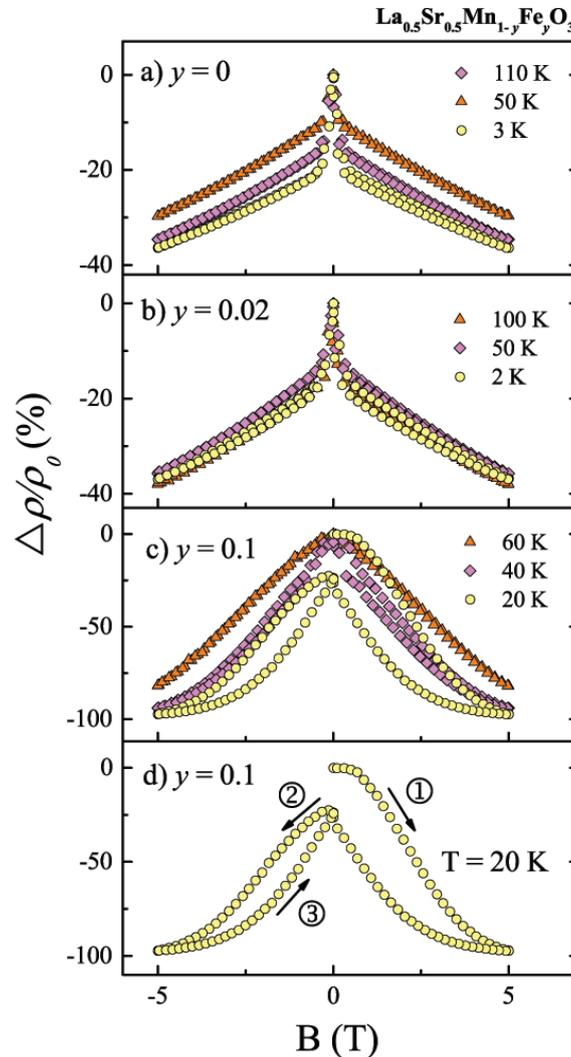


Рис. 5. Зависимость величины магнитосопротивления  $\Delta\rho/\rho_0$  от магнитного поля при различных температурах для образцов LSMFO5, а)  $y = 0$ , б)  $y = 0.02$  в)  $y = 0.1$  и д)  $y = 0.1$  при  $T = 20$  K

Fig. 5. Dependence of the magnitude of the magnetoresistance  $\Delta\rho/\rho_0$  on the magnetic field at different temperatures for LSMFO5 samples, а)  $y = 0$ , б)  $y = 0.02$  в)  $y = 0.1$  и д)  $y = 0.1$  at  $T = 20$  K

Как показано стрелками на рис. 5d, при увеличении магнитного поля от 0 до 5 Тл (обозначено как 1) магнитосопротивление не достигает того же значения, когда поле возвращается к  $B = 0$ . Эта точка обозначается как 2 (изменение от 5 Тл до  $-5$  Тл) и 3 (изменение от  $-5$  Тл до 5 Тл). Это может быть связано с наличием неравновесных магнитных полей (метамгнитных) кластеров [13, 33]. Этот факт свидетельствует о наличии фазового расслоения, означающего наличие FM и AFM кластеров в образце с  $y = 0.1$ . Более того, четко видимый гистерезис магнитосопротивления около  $B = 0$  свидетельствует о FM поведении. Этот момент качественно объясняется в рамках модели, учитывающей фазовое расслоение, включающей области с разной величиной и направлением намагниченности [28]. Тот факт, что индуцированная приложенным полем FM-фаза сохраняется после выключения поля в образце с  $y = 0.1$ , и присутствует, но в гораздо менее выраженной форме  $y = 0.02$ , а также отсутствие в  $y = 0$ , может быть отнесенным к более высокой доле FM-кластеров для  $y = 0.1$ , чем в  $y = 0.02$  и отсутствию  $y = 0$ . Этот вывод согласуется с нашими результатами, представленными выше.

**4. Заключение.** В данной работе исследовано влияние легирования железом на электропроводность и магнитные свойства образцов  $\text{La}_{0.5}\text{Sr}_{0.5}\text{Mn}_{1-y}\text{Fe}_y\text{O}_3$  при  $y = 0 - 0.1$ . Основное внимание уделялось поведению  $\rho(T)$  и механизмам прыжковой проводимости в различных температурных интервалах диапазона от 300 до 5 K в магнитных полях до 5 Тл. При концентрации Fe  $\leq 5\%$  во всём исследуемом

диапазоне температур ослабляется дальний порядок СО состояния, и короткодействующие СО кластеры внедрены в FM металлическую матрицу. При этом доля FM увеличивается, а удельное сопротивление уменьшается. Тем не менее дальнейшее легирование Fe приводит к обратным тенденциям, что объясняется эффектом ослабления двойного обмена, который является доминирующим при концентрациях Fe > 5%. Кроме того, были идентифицированы и проанализированы различные механизмы прыжковой проводимости, включая ПППДП Мотта и Шкловского – Эфроса, так же как и прыжковая проводимость малых поляронов между ближайшими соседями для образцов LSMFO5 с различными значениями  $u$  в различных магнитных полях. Были определены и проанализированы значения микроскопических параметров, таких как радиус локализации  $a$ , ширина мягкой кулоновской и жесткой щелей в нулевом магнитном поле. Анализ полевой зависимости удельного сопротивления при фиксированных температурах свидетельствовал о наличии эффекта CMR в образце с концентрацией Fe  $\approx$  10%, что обусловлено сильной конкуренцией существующих FM и AFM областей, и поддерживает подход, заключающийся в том, что сосуществование фаз лежит в основе явления CMR.

### Список литературы

1. Горьков Л. П. 1998. Решеточные и магнитные эффекты в легированных манганитах. Успехи физических наук, 168(6): 665–671.
2. Усатый И. М. и др. 2019. Исследование электропроводности манганита перовскита  $\text{La}_{0.5}\text{Sr}_{0.5}\text{MnO}_3$ . Известия Юго-Западного Государственного Университета. Серия: Техника И Технологии, 9(30):68–77.
3. Усатый И. М. и др. 2020. Магнитный фазовый переход в  $\text{La}_{1-x}\text{Sr}_x\text{Mn}_{1-y}\text{Fe}_y\text{O}_3$  ( $x = 0.5, y = 0 - 0.1$ ). Известия Юго-Западного Государственного Университета. Серия: Техника И Технологии, 10(1):57–70.
4. Ahn K. H. et al. 1996. Magnetic properties and colossal magnetoresistance of La(Ca)MnO<sub>3</sub> materials doped with Fe. Physical Review B, 54(21): 15299–15302.
5. Akimoto T. et al. 1998. Antiferromagnetic metallic state in doped manganites. Phys. Rev. B., 57(10): R5594–R5597.
6. Bhaskar A., Huang M.-S., Liu C.-J. 2017. Effects of Fe doping on the thermal hysteresis of the  $\text{La}_{0.5}\text{Ca}_{0.5}\text{MnO}_3$  system. RSC Adv., 7(19): 11543–11549.
7. Biswas A. et al. 1999. The Density of States of hole-doped Manganites: A Scanning Tunneling Microscopy/Spectroscopy study. Phys. Rev. B., 59(8): 5368–5376.
8. Chen X. et al. 2009. Nonmagnetic B-site impurity-induced ferromagnetic tendency in CE-type manganites. Phys. Rev. B., 79(2): 024410.
9. Culo M. et al. 2017. Magnetotransport properties of  $\text{La}_{1-x}\text{Ca}_x\text{MnO}_3$  ( $0.52 \leq x \leq 0.75$ ): Signature of phase coexistence. Thin Solid Films, 631: 205–212.
10. Dagotto E. 2005. Open questions in CMR manganites, relevance of clustered states and analogies with other compounds including the cuprates. New J. Phys., 7: 67–67.
11. Dhiman I. et al. 2011. Influence of B - site Disorder in  $\text{La}_{0.5}\text{Ca}_{0.5}\text{Mn}_{1-x}\text{B}_x\text{O}_3$  (B = Fe, Ru, Al and Ga). Manganites. J. Phys.: Condens. Matter., 23(24): 246006.
12. Fujishiro H., Fukase T., Ikebe M. 1998. Charge Ordering and Sound Velocity Anomaly in  $\text{La}_{1-x}\text{Sr}_x\text{MnO}_3$  ( $x \geq 0.5$ ). J. Phys. Soc. Jpn., 67(8): 2582–2585.
13. Haghiri-Gosnet A.-M., Renard J.-P. 2003. CMR manganites: physics, thin films and devices. Journal of Physics D: Applied Physics, 36(8): R127–R150.
14. Hébert S. et al. 2002. Important role of impurity eg levels on the ground state of Mn-site doped manganites. Solid State Communications, 121(5): 229–234.
15. Hemberger J. et al. 2002. Structural, magnetic and electrical properties of single crystalline  $\text{La}_{1-x}\text{Sr}_x\text{MnO}_3$  for  $0.4 < x < 0.85$ . Phys. Rev. B. Vol., 66(9): 094410.
16. Ioffe A.F., Regel A.R. 1960. Non-Crystalline, Amorphous, and Liquid Electronic Semiconductors, 291.
17. Izumi M. et al. 2000.  $\text{La}_{1-x}\text{Sr}_x\text{MnO}_3$  superlattices composed of ferromagnetic  $x = 0.4$  and antiferromagnetic  $x = 0.55$  layers. Phys. Rev. B., 61(18): 12187–12195.

18. Khomskii D., Khomskii L. 2003. Fine mist versus large droplets in phase separated manganites. *Phys. Rev. B.*, 67(5): 052406.
19. Kimura T. et al. 2000. Variation of charge-orbital correlation with Cr doping in manganites. *Phys. Rev. B.*, 62(22): 15021–15025.
20. Krichene A. et al. 2016. Correlation between electrical and magnetic properties of polycrystalline  $\text{La}_{0.5}\text{Ca}_{0.5}\text{Mn}_{0.98}\text{Bi}_{0.02}\text{O}_3$ . *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 408: 116–120.
21. Laiho R. et al. 2002. Variable-range hopping conductivity in  $\text{La}_{1-x}\text{Ca}_x\text{Mn}_{1-y}\text{Fe}_y\text{O}_3$ : evidence of a complex gap in density of states near the Fermi level. *J. Phys.: Condens. Matter.*, 14(34): 8043–8055.
22. Levy P. et al. 2001. Effects of Fe doping in  $\text{La}_{1/2}\text{Ca}_{1/2}\text{MnO}_3$ . *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 226(230): 794–796.
23. Li Y. et al. 2010. Effects of Fe doping on magnetic and transport properties in  $\text{Pr}_{0.75}\text{Na}_{0.25}\text{MnO}_3$ . *Phys. Status Solidi (a)*, 207(1): 194–198.
24. Mansouri M. et al. 2016. Effect of vanadium doping on structural, magnetic and magnetocaloric properties of  $\text{La}_{0.5}\text{Ca}_{0.5}\text{MnO}_3$ . *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 401: 593–599.
25. Millis A.J., Littlewood P.B., Shraiman B.I. 1995. Double Exchange Alone Does Not Explain the Resistivity of  $\text{La}_{1-x}\text{Sr}_x\text{MnO}_3$ . *Phys. Rev. Lett.*, 74(25): 5144–5147.
26. Moritomo Y. et al. 2004. Impurity-induced ferromagnetism and impurity states in  $\text{Nd}_{1/2}\text{Ca}_{1/2}(\text{Mn}_{0.95}\text{M}_{0.05})\text{O}_3$ . *Phys. Rev. B.*, 69(21): 212407.
27. Mott N.F., Davis E.A. 2012. *Electronic Processes in Non-Crystalline Materials*. OUP Oxford.
28. O'Donnell J. et al. 1997. Low-field magnetoresistance in tetragonal  $\text{La}_{1-x}\text{Ca}_x\text{MnO}_3$  films. *Phys. Rev. B.*, 55(9): 5873–5879.
29. Ogale S.B. et al. 1998. Transport properties, magnetic ordering, and hyperfine interactions in Fe-doped  $\text{La}_{0.75}\text{Ca}_{0.25}\text{MnO}_3$ : Localization-delocalization transition. *Phys. Rev. B.*, 57(13): 7841–7845.
30. Orlova T.S. et al. 2006. Effect of Fe doping on structure, charge ordering, magnetic and transport properties of  $\text{La}_{0.33}\text{Ca}_{0.67}\text{Mn}_{1-y}\text{Fe}_y\text{O}_3$  ( $0 \leq y \leq 0.06$ ). *J. Phys.: Condens. Matter.*, 18(29): 6729–6748.
31. Patil S.I. et al. 2000. Indications of phase separation in polycrystalline  $\text{La}_{1-x}\text{Sr}_x\text{MnO}_3$  for  $x \approx 0.5$ . *Phys. Rev. B.*, 62(14): 9548–9554.
32. Roy M. et al. 1998. Doping-induced transition from double exchange to charge order in  $\text{La}_{1-x}\text{Ca}_x\text{MnO}_3$  near  $x = 0.50$ . *Phys. Rev. B.*, 58(9): 5185–5188.
33. Shenoy V.B., Rao C.N.R. 2008. Electronic phase separation and other novel phenomena and properties exhibited by mixed-valent rare-earth manganites and related materials. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 366(1862): 63–82.
34. Shklovskii B.I., Efros A.L. 1984. *Electronic Properties of Doped Semiconductors*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg.
35. Tokura Y. 2006. Critical features of colossal magnetoresistive manganites. *Rep. Prog. Phys.*, 69(3): 797–851.
36. Uehara M. et al. 1999. Percolative phase separation underlies colossal magnetoresistance in mixed-valent manganites. *Nature*, 399(6736): 560–563.
37. Usaty I.M. et al. 2020. Variable-range hopping conductivity in  $\text{La}_{1-x}\text{Sr}_x\text{Mn}_{1-y}\text{Fe}_y\text{O}_3$  ( $x = 0.5; y = 0, 0.02, 0.1$ ). *Ferroelectrics*, 561(1): 12–22.
38. Varma C.M. 1996. Electronic and magnetic states in the giant magnetoresistive compounds. *Physical Review B.*, 54(10): 7328–7333.
39. Viret M., Ranno L., Coey J.M.D. 1997. Magnetic localization in mixed-valence manganites. *Physical Review B.*, 55(13): 8067–8070.
40. Wagner P. et al. 1998. Spin Dependent Hopping and Colossal Negative Magnetoresistance in Epitaxial  $\text{Nd}_{0.52}\text{Sr}_{0.48}\text{MnO}_3$  Films in Fields up to 50 T. *Phys. Rev. Lett.*, 81(18): 3980–3983.

41. Yaicle C. et al. 2004. Effect of trivalent cation substitution for manganese upon ferromagnetism in  $\text{Ln}_{0.57}\text{Ca}_{0.43}\text{MnO}_3$  (Ln=Pr, Nd). *Solid State Communications*, 132(7): 487–492.
42. Zakhvalinskii V.S. et al. 2011. Variable-range hopping conductivity of  $\text{La}_{1-x}\text{Sr}_x\text{Mn}_{1-y}\text{Fe}_y\text{O}_3$ . *Journal of Physics: Condensed Matter*, 23(1): 015802.
43. Zhou H.-D. et al. 2002. Transport properties of  $\text{La}_{1-x}\text{Ca}_x\text{MnO}_3$  ( $0.5 < x < 1$ ). *Eur. Phys. J. B.*, 26(4): 467–471.

### References

1. Gor'kov L. P. 1998. Reshetochnyye i magnitnyye efekty v legirovannykh manganitakh [Lattice and magnetic effects in doped manganites]. *Uspekhi fizicheskikh nauk*, 168(6): 665–671.
2. Usatyy I. M. et al. 2019. Issledovaniye elektroprovodnosti manganita perovskita  $\text{La}_{0.5}\text{Sr}_{0.5}\text{MnO}_3$  [Study of electrical conductivity of  $\text{La}_{0.5}\text{Sr}_{0.5}\text{MnO}_3$  perovskite manganite]. *Izvestiya Yugo-Zapadnogo Gosudarstvennogo Universiteta. Seriya: Tekhnika I Tekhnologii*, 9(30): 68–77.
3. Usatyy I. M. et al. 2020. Magnitnyy fazovyy perekhod v  $\text{La}_{1-x}\text{Sr}_x\text{Mn}_{1-y}\text{Fe}_y\text{O}_3$  ( $x = 0.5, y = 0 - 0.1$ ) [Magnetic phase transition in  $\text{La}_{1-x}\text{Sr}_x\text{Mn}_{1-y}\text{Fe}_y\text{O}_3$  ( $x = 0.5, y = 0 - 0.1$ )]. *Izvestiya Yugo-Zapadnogo Gosudarstvennogo Universiteta. Seriya: Tekhnika I Tekhnologii*, 10(1): 57–70.
4. Ahn K. H. et al. 1996. Magnetic properties and colossal magnetoresistance of  $\text{La}(\text{Ca})\text{MnO}_3$  materials doped with Fe. *Physical Review B*, 54(21): 15299–15302.
5. Akimoto T. et al. 1998. Antiferromagnetic metallic state in doped manganites. *Phys. Rev. B.*, 57(10) : R5594–R5597.
6. Bhaskar A., Huang M.-S., Liu C.-J. 2017. Effects of Fe doping on the thermal hysteresis of the  $\text{La}_{0.5}\text{Ca}_{0.5}\text{MnO}_3$  system. *RSC Adv.*, 7(19): 11543–11549.
7. Biswas A. et al. 1999. The Density of States of hole-doped Manganites: A Scanning Tunneling Microscopy/Spectroscopy study. *Phys. Rev. B.*, 59(8): 5368–5376.
8. Chen X. et al. 2009. Nonmagnetic B-site impurity-induced ferromagnetic tendency in CE-type manganites. *Phys. Rev. B.*, 79(2): 024410.
9. Culo M. et al. 2017. Magnetotransport properties of  $\text{La}_{1-x}\text{Ca}_x\text{MnO}_3$  ( $0.52 \leq x \leq 0.75$ ): Signature of phase coexistence. *Thin Solid Films*, 631: 205–212.
10. Dagotto E. 2005. Open questions in CMR manganites, relevance of clustered states and analogies with other compounds including the cuprates. *New J. Phys.*, 7: 67–67.
11. Dhiman I. et al. 2011. Influence of B - site Disorder in  $\text{La}_{0.5}\text{Ca}_{0.5}\text{Mn}_{1-x}\text{B}_x\text{O}_3$  (B = Fe, Ru, Al and Ga). *Manganites. J. Phys.: Condens. Matter.*, 23(24): 246006.
12. Fujishiro H., Fukase T., Ikebe M. 1998. Charge Ordering and Sound Velocity Anomaly in  $\text{La}_{1-x}\text{Sr}_x\text{MnO}_3$  ( $x \geq 0.5$ ). *J. Phys. Soc. Jpn.*, 67(8): 2582–2585.
13. Haghiri-Gosnet A.-M., Renard J.-P. 2003. CMR manganites: physics, thin films and devices. *Journal of Physics D: Applied Physics*, 36(8): R127–R150.
14. Hébert S. et al. 2002. Important role of impurity eg levels on the ground state of Mn-site doped manganites. *Solid State Communications*, 121(5): 229–234.
15. Hemberger J. et al. 2002. Structural, magnetic and electrical properties of single crystalline  $\text{La}_{1-x}\text{Sr}_x\text{MnO}_3$  for  $0.4 < x < 0.85$ . *Phys. Rev. B. Vol.*, 66(9): 094410.
16. Ioffe A.F., Regel A.R. 1960. *Non-Crystalline, Amorphous, and Liquid Electronic Semiconductors*, 291.
17. Izumi M. et al. 2000.  $\text{La}_{1-x}\text{Sr}_x\text{MnO}_3$  superlattices composed of ferromagnetic  $x = 0.4$  and antiferromagnetic  $x = 0.55$  layers. *Phys. Rev. B.*, 61(18): 12187–12195.
18. Khomskii D., Khomskii L. 2003. Fine mist versus large droplets in phase separated manganites. *Phys. Rev. B.*, 67(5): 052406.
19. Kimura T. et al. 2000. Variation of charge-orbital correlation with Cr doping in manganites. *Phys. Rev. B.*, 62(22): 15021–15025.

20. Krichene A. et al. 2016. Correlation between electrical and magnetic properties of polycrystalline  $\text{La}_{0.5}\text{Ca}_{0.5}\text{Mn}_{0.98}\text{Bi}_{0.02}\text{O}_3$ . *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 408: 116–120.
21. Laiho R. et al. 2002. Variable-range hopping conductivity in  $\text{La}_{1-x}\text{Ca}_x\text{Mn}_{1-y}\text{Fe}_y\text{O}_3$ : evidence of a complex gap in density of states near the Fermi level. *J. Phys.: Condens. Matter.*, 14(34): 8043–8055.
22. Levy P. et al. 2001. Effects of Fe doping in  $\text{La}_{1/2}\text{Ca}_{1/2}\text{MnO}_3$ . *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 226(230) : 794–796.
23. Li Y. et al. 2010. Effects of Fe doping on magnetic and transport properties in  $\text{Pr}_{0.75}\text{Na}_{0.25}\text{MnO}_3$ . *Phys. Status Solidi (a)*, 207(1) : 194–198.
24. Mansouri M. et al. 2016. Effect of vanadium doping on structural, magnetic and magnetocaloric properties of  $\text{La}_{0.5}\text{Ca}_{0.5}\text{MnO}_3$ . *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 401 : 593–599.
25. Millis A.J., Littlewood P.B., Shraiman B.I. 1995. Double Exchange Alone Does Not Explain the Resistivity of  $\text{La}_{1-x}\text{Sr}_x\text{MnO}_3$ . *Phys. Rev. Lett.*, 74(25) : 5144–5147.
26. Moritomo Y. et al. 2004. Impurity-induced ferromagnetism and impurity states in  $\text{Nd}_{1/2}\text{Ca}_{1/2}(\text{Mn}_{0.95}\text{M}_{0.05})\text{O}_3$ . *Phys. Rev. B.*, 69(21) : 212407.
27. Mott N.F., Davis E.A. 2012. *Electronic Processes in Non-Crystalline Materials*. OUP Oxford.
28. O'Donnell J. et al. 1997. Low-field magnetoresistance in tetragonal  $\text{La}_{1-x}\text{Ca}_x\text{MnO}_3$  films. *Phys. Rev. B.*, 55(9) : 5873–5879.
29. Ogale S.B. et al. 1998. Transport properties, magnetic ordering, and hyperfine interactions in Fe-doped  $\text{La}_{0.75}\text{Ca}_{0.25}\text{MnO}_3$ : Localization-delocalization transition. *Phys. Rev. B.*, 57(13) : 7841–7845.
30. Orlova T.S. et al. 2006. Effect of Fe doping on structure, charge ordering, magnetic and transport properties of  $\text{La}_{0.33}\text{Ca}_{0.67}\text{Mn}_{1-y}\text{Fe}_y\text{O}_3$  ( $0 \leq y \leq 0.06$ ). *J. Phys.: Condens. Matter.*, 18(29) : 6729–6748.
31. Patil S.I. et al. 2000. Indications of phase separation in polycrystalline  $\text{La}_{1-x}\text{Sr}_x\text{MnO}_3$  for  $x \approx 0.5$ . *Phys. Rev. B.*, 62(14) : 9548–9554.
32. Roy M. et al. 1998. Doping-induced transition from double exchange to charge order in  $\text{La}_{1-x}\text{Ca}_x\text{MnO}_3$  near  $x = 0.50$ . *Phys. Rev. B.*, 58(9) : 5185–5188.
33. Shenoy V.B., Rao C.N.R. 2008. Electronic phase separation and other novel phenomena and properties exhibited by mixed-valent rare-earth manganites and related materials. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 366(1862) : 63–82.
34. Shklovskii B.I., Efros A.L. 1984. *Electronic Properties of Doped Semiconductors*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg.
35. Tokura Y. 2006. Critical features of colossal magnetoresistive manganites. *Rep. Prog. Phys.*, 69(3) : 797–851.
36. Uehara M. et al. 1999. Percolative phase separation underlies colossal magnetoresistance in mixed-valent manganites. *Nature*, 399(6736): 560–563.
37. Usatyy I.M. et al. 2020. Variable-range hopping conductivity in  $\text{La}_{1-x}\text{Sr}_x\text{Mn}_{1-y}\text{Fe}_y\text{O}_3$  ( $x = 0.5; y = 0, 0.02, 0.1$ ). *Ferroelectrics*, 561(1): 12–22.
38. Varma C.M. 1996. Electronic and magnetic states in the giant magnetoresistive compounds. *Physical Review B.*, 54(10): 7328–7333.
39. Viret M., Ranno L., Coey J.M.D. 1997. Magnetic localization in mixed-valence manganites. *Physical Review B.*, 55(13): 8067–8070.
40. Wagner P. et al. 1998. Spin Dependent Hopping and Colossal Negative Magnetoresistance in Epitaxial  $\text{Nd}_{0.52}\text{Sr}_{0.48}\text{MnO}_3$  Films in Fields up to 50 T. *Phys. Rev. Lett.*, 81(18): 3980–3983.
41. Yaicle C. et al. 2004. Effect of trivalent cation substitution for manganese upon ferromagnetism in  $\text{Ln}_{0.57}\text{Ca}_{0.43}\text{MnO}_3$  (Ln=Pr, Nd). *Solid State Communications*, 132(7): 487–492.
42. Zakhvalinskii V.S. et al. 2011. Variable-range hopping conductivity of  $\text{La}_{1-x}\text{Sr}_x\text{Mn}_{1-y}\text{Fe}_y\text{O}_3$ . *Journal of Physics: Condensed Matter*, 23(1): 015802.

43. Zhou H.-D. et al. 2002. Transport properties of  $\text{La}_{1-x}\text{Ca}_x\text{MnO}_3$  ( $0.5 < x < 1$ ). Eur. Phys. J. B., 26(4) : 467–471.

Получена 11.11.2020

---

**Усатый Иван Михайлович** – аспирант четвертого года обучения кафедры теоретической и экспериментальной физики института инженерных и цифровых технологий Белгородского государственного национального исследовательского университета

ул. Победы, 85, г. Белгород, 308015, Россия

E-mail: [718097@bsu.edu.ru](mailto:718097@bsu.edu.ru)

**Захвалинский Василий Сергеевич** – доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры теоретической и экспериментальной физики института инженерных и цифровых технологий Белгородского государственного национального исследовательского университета

 <http://orcid.org/0000-0001-7055-8243>

ул. Победы, 85, г. Белгород, 308015, Россия

E-mail: [zakhvalinskii@bsu.edu.ru](mailto:zakhvalinskii@bsu.edu.ru)

**Иванов Олег Николаевич** – доктор физико-математических наук, профессор кафедры материаловедения и нанотехнологий института инженерных и цифровых технологий Белгородского государственного национального исследовательского университета

 <http://orcid.org/0000-0002-1803-5928>

ул. Победы, 85, г. Белгород, 308015, Россия

E-mail: [ivanov.oleg@bsu.edu.ru](mailto:ivanov.oleg@bsu.edu.ru)

**Ерина Татьяна Анатольевна** – кандидат педагогических наук, доцент кафедры прикладной математики и компьютерного моделирования института инженерных и цифровых технологий Белгородского государственного национального исследовательского университета

ул. Победы, 85, г. Белгород, 308015, Россия

E-mail: [erina@bsu.edu.ru](mailto:erina@bsu.edu.ru)

## ПРОВОДИМОСТЬ НА ПЕРЕМЕННОМ ТОКЕ АМОРФНОЙ ПЛЕНКИ $Cd_3As_2$

А. А. Морочо, Е. А. Пилюк, А. В. Неженцев, П. Г. Шаповалов, М. Н. Япрынтцев, В. Ю. Новиков

(Статья представлена членом редакционной коллегии С. В. Блажевичем)

Белгородский государственный национальный исследовательский университет,  
Белгород, 308015, Россия

E-mail: [pilyuk@bsu.edu.ru](mailto:pilyuk@bsu.edu.ru)

**Аннотация.** Изучена проводимость кристаллов тонких пленок  $Cd_3As_2$  на переменном токе в интервале частот 25 Гц – 1 МГц и температур 10-300 К. Проводимость по переменному току хорошо интерпретируется моделью коррелированных барьерных прыжков, что характерно для неупорядоченных твердых тел и нанокompозитов.

**Ключевые слова:** дираковский полуметалл, арсенид кадмия, тонкие пленки, коррелированные барьерные прыжки, проводимость по переменному току.

**Благодарности:** Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 19-79-00152).

**Для цитирования:** Морочо А. А., Пилюк Е. А., Неженцев А. В., Шаповалов П. Г., Япрынтцев М. Н., Новиков В. Ю. 2020. Проводимость на переменном токе аморфной пленки  $Cd_3As_2$ . Прикладная математика & Физика. 52(4): 286–294. DOI 10.18413/2687-0959-2020-52-4-286-294.

---

---

## AC CONDUCTIVITY OF AMORPHOUS FILM $Cd_3As_2$

A. A. Morocho, E. A. Pilyuk, A. V. Nezhentsev, P. G. Shapovalov, M. N. Yaprlyntsev, V. Yu. Novikov

(Article submitted by a member of the editorial board S. V. Blazhevich)

Belgorod National Research University,

Belgorod, 308015, Russia

E-mail: [pilyuk@bsu.edu.ru](mailto:pilyuk@bsu.edu.ru)

Received November 27, 2020

**Abstract.** The conductivity of crystals of  $Cd_3As_2$  thin films has been studied at an alternating current in the frequency range 25 Hz - 1 MHz and temperatures of 10-300 K. AC conductivity is well interpreted by the correlated barrier hopping model, which is typical of disordered solids and nanocomposites.

**Key words:** dirac semimetal, cadmium arsenide, thin films, correlated barrier hopping, ac conductivity.

**Acknowledgements:** The study is supported by a grant from the Russian Science Foundation (project No. 19-79-00152).

**For citation:** Morocho A. A., Pilyuk E. A., Nezhentsev A. V., Shapovalov P. G., Yaprlyntsev M. N., Novikov V. Yu. 2020. AC conductivity of an amorphous film  $Cd_3As_2$ . Applied Mathematics & Physics. 52(4): 286–294 (in Russian). DOI 10.18413/2687-0959-2020-52-4-286-294.

---

**1. Введение.** Полуметаллы Дирака (ДПМ), рассматриваемые как трехмерный аналог графена, в последнее время привлекают внимание как материалы с принципиально новыми электронными свойствами [22, 3]. Наличие таких свойств, как инвертированная электронная зонная структура, характеризующаяся зонами с защищенной симметрией в зоне Бриллюэна, пересекающейся на уровне Ферми или вблизи уровня Ферми, линейный закон дисперсии вблизи дираковских точек, киральность электронов, может привести к прорыву в создании следующего поколения электронных устройств [25]. Одним из наиболее перспективных материалов, имеющих полуметаллическую фазу Дирака, считается  $Cd_3As_2$ , в котором носителями заряда являются дираковские фермионы с самой высокой подвижностью носителей от  $9 \cdot 10^6$  до  $4,60 \cdot 10^7$   $cm^2V^{-1}s^{-1}$  [14, 26]. В недавнем исследовании [21] в поликристаллических пленках  $Cd_3As_2$ , полученных магнетронным напылением, была обнаружена сверхпроводимость, выявлен ряд особенностей, таких как наличие тетрагональной кристаллической фазы и осцилляции Шубникова – де Гааза, наблюдаемые в сильных магнитных полях, что также указывает на возможную топологическую природу  $Cd_3As_2$ .

Измерения проводимости по переменному току (АС) широко используются для понимания процесса проводимости материалов. Различные модели, квантово-механическая модель туннелирования (КМТ), модель туннелирования малых поляронов, модель туннелирования больших поляронов и модель коррелированных барьерных прыжков (КБП) были предложены для объяснения механизмов проводимости переменного тока для различных материалов [18, 19, 5, 4, 7, 8]. Задача состоит в том, чтобы добиться

точного определения электронных свойств и энергий возбуждения, чтобы обеспечить количественную основу для расчета электронных транспортных свойств этих материалов. Это позволит получить более четкое представление об измеряемых свойствах и даст представление о конструкции новых материалов. Основная цель этой статьи – представить и обсудить электрические свойства соединения тонких пленок  $Cd_3As_2$  в зависимости от частоты и температуры.

**2. Материалы и методика эксперимента.** В настоящей работе тонкие пленки  $Cd_3As_2$  были получены методом неактивного ВЧ магнетронного распыления в атмосфере аргона на ориентированных монокристаллических подложках (001)  $\alpha-Al_2O_3$ . Поскольку (0001)  $\alpha-Al_2O_3$  и (224)  $\alpha-Cd_3As_2$  имеют схожую структуру и их межатомные (межузельные) расстояния различаются всего на 6%, можно стимулировать ориентированный рост пленки. Пленки получали без нагрева подложки при комнатной температуре. Толщина пленок определялась временем напыления и составляла 50 нм.

Состав выращенных пленок был почти стехиометрическим, что было подтверждено энергодисперсионным рентгеновским анализом (Nova NanoSem 450, FEI Company), демонстрирующим, что фактический элементный состав близок к стехиометрическому  $Cd_3As_2$ , отношение  $Cd/As = 1.59$ .

Кристаллическая структура исследуемых пленок была исследована с использованием рентгеновского дифрактометра Rigaku SmartLab (излучение  $CuK\alpha$ ) при комнатной температуре. Полученные аморфные пленки характеризовались размытой дифракционной картиной типа гало.

Наличие фазы  $Cd_3As_2$  подтверждается результатами спектроскопии комбинационного рассеяния света, полученными с использованием рамановского спектрометра LabRam HR Evolution (HORIBA JOBIN YVON S.A.S., France) при комнатной температуре с использованием лазера с длиной волны 532 нм, мощностью 50 мВт, спектральное разрешение  $0.5\text{ см}^{-1}$ . Типичный рамановский спектр исследуемых пленок показан на рис. 1.

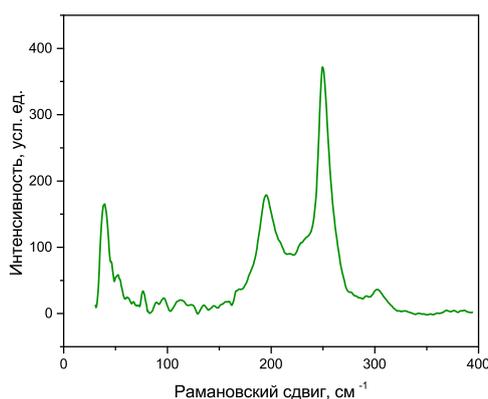


Рис. 1. Рамановский спектр исследуемых пленок  $Cd_3As_2$   
 Fig. 1. Raman spectrum of the  $Cd_3As_2$  films

Известно, что  $\alpha-Cd_3As_2$  имеет характерные пики при  $192$  и  $247\text{ см}^{-1}$  (симметрия  $B_{1g} + B_{2g}$ ) и при  $300\text{ см}^{-1}$  ( $A_{1g}$ ) в соответствии с правилами рамановского отбора [23]. Пик на  $38$  ( $39\text{ см}^{-1}$ ) симметрии  $B_{2g}$  и  $76\text{ см}^{-1} - E_g$ .

Пики при  $194$  и  $249\text{ см}^{-1}$  являются характерными для тонких пленок  $Cd_3As_2$  [21]. Пик при  $303\text{ см}^{-1}$  может быть описан трехзонной моделью [24], согласно которой падающее излучение возбуждает электрон из валентной зоны в более высокую зону проводимости, а затем электрон переходит в нижнюю зону проводимости. Частота, с которой наблюдается пик в спектре КРС, соответствует зазору между валентной зоной и нижней зоной проводимости. Первым из таких переходов является  $\Sigma_1 - \Sigma_4$ , который и объясняет увеличение интенсивности при  $300\text{ см}^{-1}$ , когда энергия падающего света становится равной  $2.8\text{ эВ}$ .

Частотные зависимости сопротивления образцов тонких пленок  $Cd_3As_2$  измерялись с помощью высокочастотного измерителя RLC АКТАКОМ АМ-3026 в диапазоне частот от  $25\text{ Гц}$  до  $1\text{ МГц}$  и температурах от  $10$  до  $300\text{ К}$  на установке на базе гелиевого криостата замкнутого цикла Janis CCS-350S и регулятора температуры модели Lakeshore 331. Данные регистрировались на ПК в изотермических условиях, температура стабилизировалась с точностью лучше  $0,005\text{ К}$ . Измерения проводились двухконтактным методом в планарной геометрии (рис. 2). Индиевые контакты были нанесены на поверхности образца методом магнетронного распыления на установке ВН-2000.

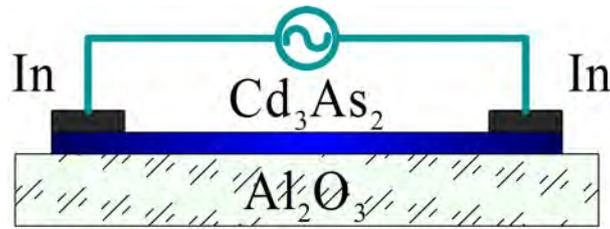


Рис. 2. Схема измерения частотных зависимостей сопротивления образцов тонких пленок  $Cd_3As_2$   
 Fig. 2. Scheme for measuring the frequency dependences of the resistance of samples of  $Cd_3As_2$  thin films

**3. Результаты и обсуждение.** Зависимости  $\ln \rho$  от  $\ln f$  при различных температурах показаны на рис. 3. На кривых сопротивления можно видеть две отдельные области: низкочастотная область и высокочастотная область. На низких частотах присутствует плато, которое характеризует проводимость по постоянному току (DC), а на высоких частотах сопротивление постепенно уменьшается с увеличением частоты, что характерно для неупорядоченных твердых тел, оксидов и наноккомпозитов [20].

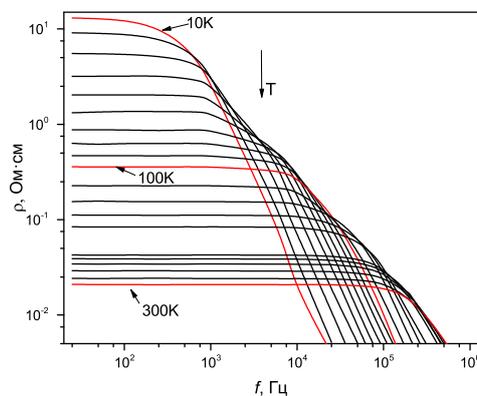


Рис. 3. Схема измерения частотных зависимостей сопротивления образцов тонких пленок  $Cd_3As_2$   
 Fig. 3. Frequency dependence of the ac resistance at different temperatures of the  $Cd_3As_2$  thin films

Частотную зависимость электропроводности ферритов можно описать теорией Купа [12]. Согласно теории Купа, проводимость демонстрирует дисперсию на более высоких частотах, что связано с существованием зерен с высокой проводимостью и их границ, демонстрирующих высокое сопротивление. В высокочастотной области увеличение проводимости можно объяснить явлением усиленных прыжков носителей заряда. Увеличение проводимости по переменному и постоянному току также может быть связано с увеличением вероятности туннелирования носителей заряда, что связано с тепловыми колебаниями узлов [10]. Область перехода от постоянного тока к переменному току смещается в сторону более высоких частот с повышением температуры. Сопротивление по переменному току образцов тонких пленок  $Cd_3As_2$  демонстрирует универсальное степенное поведение:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_{AC}(\omega)} + \frac{1}{\rho_{DC}}, \quad (1)$$

где  $\rho_{AC}$  и  $\rho_{DC}$  – проводимость переменного и постоянного тока, соответственно.

Частотная зависимость действительной части полной проводимости переменного тока,  $\rho_{AC}$ , может быть определена как:

$$\rho_{AC}(\omega) = A \cdot \omega^{-s}.$$

где  $s$  и  $A$  – характерные параметры. Показатель степени  $s$  используется для характеристики механизма электропроводности в различных материалах и свидетельствует о взаимодействии между всеми видами заряда, участвующими в процессе поляризации. Значение показателя частоты  $s$  определяется путем логарифмирования уравнения (1):

$$s = \frac{d \ln \rho_{AC}^{-1}}{d \ln f}.$$

Из зависимости  $s(T)$  можно определить механизм проводимости под действием приложенного переменного поля. Значение  $s$  зависит от температуры: видно, что абсолютное значение  $s$  уменьшается с увеличением температуры (рис. 4). Значение показателя  $s$  уменьшается, что характерно для явлений прыжковой проводимости [13].

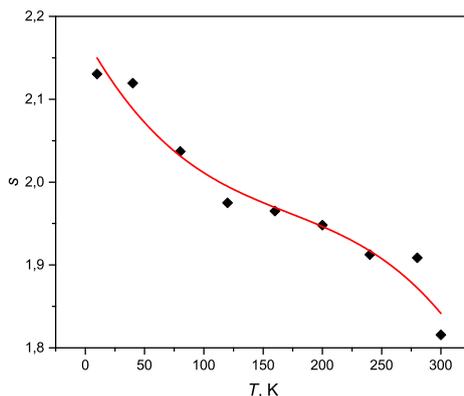


Рис. 4. Температурная зависимость показателя  $s$  для пленки  $Cd_3As_2$   
 Fig. 4. Temperature dependence of the exponent  $s$  for the  $Cd_3As_2$  films

Модель КМТ [6] неприменима к полученным результатам, т. к. по этой модели показатель  $s$  должен быть близок к 0.8 и незначительно увеличиваться с температурой или не зависеть от температуры. Согласно модели перекрывающегося большого поляронного туннелирования [15], показатель степени  $s$  зависит как от частоты, так и от температуры и уменьшается с увеличением температуры до минимального значения при определенной температуре, а затем увеличивается с увеличением температуры. Эта модель также неприменима к полученным результатам. Для всего температурного диапазона наблюдалось уменьшение значения  $s$ , что может быть связано с моделью КБП. В этой модели проводимость связана с процессом перескока носителей заряда через энергетический барьер, разделяющий два локализованных узла [11]. Сопротивление по переменному току для этой модели выражается следующим соотношением [9]:

$$\rho(\omega) = \frac{24}{\pi^3 N^2 \epsilon \epsilon_0 \omega R_\omega^6},$$

где  $\epsilon$  и  $\epsilon_0$  – диэлектрические проницаемости материала и свободного пространства соответственно,  $N$  – плотность локализованных состояний,  $R_\omega$  – расстояние прыжка,

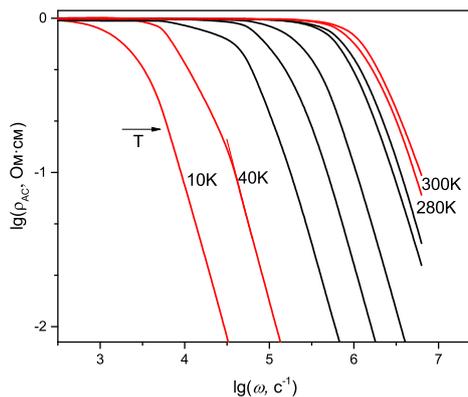
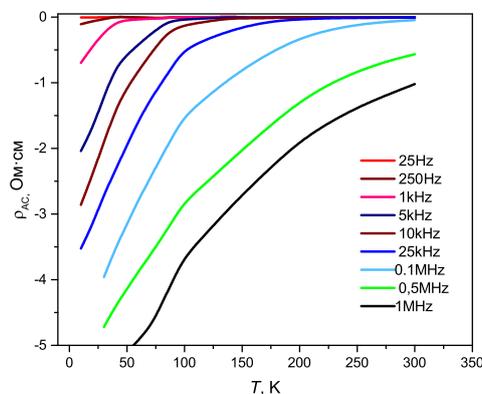
$$R_\omega = \frac{e^2}{\pi \epsilon \epsilon_0 [W_M - kT(1/\omega\tau_0)]},$$

где  $W_M$  – высота барьера,  $\tau_0$  – характерное время релаксации.

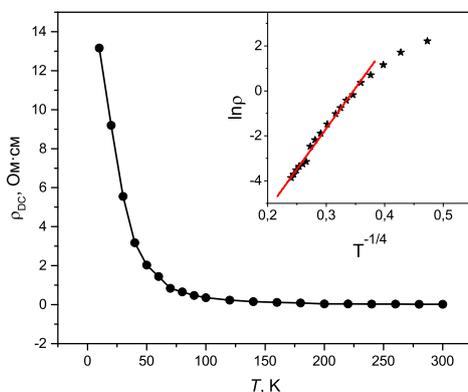
Зависимость  $s$  от температуры можно объяснить с помощью модели взаимодействия многих тел. При высоких температурах взаимодействие между соседними диполями незначительно, и должен преобладать постоянный ток. Показатель  $s$  меньше единицы из-за зарядов с примесью диполей, которые возникают из-за наличия дефектов в образце. Этот показатель уменьшается с температурой по мере уменьшения взаимодействия между диполями.

Проводимость на переменном токе можно объяснить с прыжками между локализованными состояниями на уровне Ферми [4].

На рис. 5 показана зависимость сопротивления переменного тока от обратной температуры на девяти фиксированных частотах для пленки  $Cd_3As_2$ . Как видно, сопротивление уменьшается с увеличением как частоты, так и температуры. Частотная зависимость  $\rho_{AC}$  при различных температурах показана на рис. 6. Из этих кривых видно, что сопротивление переменного тока имеет частотную зависимость, определяемую уравнениями (1)–(2).

Рис. 5. Зависимость  $\rho_{AC}$  от  $f$  образца пленки  $Cd_3As_2$ Fig. 5. Dependence of  $\rho_{AC}$  on  $f$  for the  $Cd_3As_2$  filmРис. 6. Температурная зависимость  $\rho_{AC}$  пленки  $Cd_3As_2$ Fig. 6. Temperature dependence of  $\rho_{AC}$  for the  $Cd_3As_2$  film

Сопротивление  $\rho_{DC}$  возникает, когда  $f \rightarrow 0$  (рис.7). Полученная температурная зависимость электропроводности  $\ln \rho(T^{-1/4})$  соответствует линейной зависимости, что указывает на перенос заряда за счет прыжков носителей заряда по локализованным состояниям, лежащим в узкой полосе энергий вблизи уровня Ферми [16].

Рис. 7. Температурная зависимость  $\rho_{DC}$  пленки  $Cd_3As_2$ Fig. 7. Temperature dependence of  $\rho_{DC}$  for the  $Cd_3As_2$  film

Из наклона прямой  $\ln \sigma(T^{1/4})$  можно определить значение параметра  $T_0$ , которое для рассматриваемого случая получилось равным 36 К. Плотность локализованных состояний вблизи уровня Ферми,

вычисленная по формуле [1]:

$$N = \frac{16}{T_0 k r^3},$$

равна величине  $N = 0.7 \cdot 10^{20} \text{ эВ}^{-1} \cdot \text{см}^{-3}$ . Радиус локализации носителей взят равным  $r = 41.8 \text{ нм}$ .

Средняя длина прыжка носителей заряда между двумя локализованными состояниями для определенных температуры и частоты измерения определяется выражением [16]:

$$R = \frac{1}{2} r \ln(v_{ph}/f),$$

где  $v_{ph}$  – фононная частота, равная  $10^{12} \text{ Гц}$  [2]. Для частоты  $f = 10^3 \text{ Гц}$  средняя длина прыжка для тонкой пленки  $\text{Cd}_3\text{As}_2$  составила  $433 \text{ нм}$ , что на порядок превышает радиус локализации носителя заряда. Из выражения [17]

$$W = \left[ \frac{3}{4\pi R^3 N(E_F)} \right],$$

можно определить среднюю энергию прыжка,  $W = 4.2 \cdot 10^{-8} \text{ эВ}$ . Энергия активации проводимости  $\Delta E$  рассчитывается на разных частотах по наклону линий с использованием известного уравнения:

$$\sigma = \sigma_0 \cdot \exp(\Delta E_\sigma/kT).$$

Энергия активации для исследованных пленок  $\text{Cd}_3\text{As}_2$  слабо зависит от частоты,  $\Delta E_{\text{max}} = 0.04 \text{ эВ}$ .

**4. Заключение.** Мы исследовали проводимость по переменному току тонких пленок  $\text{Cd}_3\text{As}_2$ . Температурная зависимость проводимости переменного тока и параметра  $s$  достаточно хорошо интерпретируется моделью коррелированных барьерных прыжков. Анализ данных показал, что максимальная высота барьера, определяемая положением центров, формируемых за счет наличия дефектов, составляет  $0.2 \text{ эВ}$ .

#### Список литературы

1. Захвалинский В.С. и др. 2019. Получение и механизмы электропроводности тонких плёнок дираковского полуметалла  $\text{Cd}_3\text{As}_2$ . Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика, 51(4) : 533–540.
2. Аванесян В. Т., Пайма К. И., Стожаров В. М. 2017. Особенности электропереноса в структуре фото-рефрактивного легированного кристалла  $\text{Bi}_{12}\text{TiO}_{20}$  : Ru. Физика твердого тела, 59(6) : 1056–1059.
3. Armitage N.P., Mele E.J., Vishwanath A. 2018. Weyl and Dirac semimetals in three-dimensional solids. Rev. Mod. Phys., 90 : 015001.
4. Austin I.G., Mott N.F. 1969. Polarons in crystalline and non-crystalline materials. Adv. Phys., 18 : 41.
5. Ghosh A. 1990. Transport properties of vanadium germanate glassy semiconductors. Phys. Rev. B, 42 : 5665.
6. Ghosh A. 1990. Frequency-dependent conductivity in bismuth-vanadate glassy semiconductors. Phys. Rev. B, 341 : 1479.
7. Elliott S.R. 1978. A theory of a.c. conduction in chalcogenide glasses. Philos. Mag. B, 36 : 1291.
8. Elliott S.R. 1988. Frequency-dependent conductivity in ionic glasses: A possible model. Solid State Ionics, 27 : 131.
9. Elliott S.R. 1987. A.c. conduction in amorphous chalcogenide and pnictide semiconductors, Advances in Physics, 36(2) : 135–217.
10. Jamil, A., Afsar, M. F., Sher, F., Rafiq, M. A. (2017). Temperature and composition dependent density of states extracted using overlapping large polaron tunnelling model in  $\text{Mn}_x\text{Co}_{1-x}\text{Fe}_2\text{O}_4$  ( $x = 0.25, 0.5, 0.75$ ) nanoparticles. Physica B: Condensed Matter, 509 : 76–83.
11. Kolte J., Salame P.H., Daryapurkar A.S., Gopalan P. 2015. Impedance and AC conductivity study of nano crystalline, fine grained multiferroic bismuth ferrite ( $\text{BiFeO}_3$ ), synthesized by microwave sintering. AIP Adv., 5 : 097164.
12. Koops C.G. 1951. On the dispersion of resistivity and dielectric constant of some semiconductors at audiofrequencies. Physical Review, 83(1) : 121.

13. Ladhar A., et al. 2015. AC and DC electrical conductivity in natural rubber/nanofibrillated cellulose nanocomposites. *J. Mol. Liq.*, 209 : 272–279.
14. Liang T., Gibson Q., Ali M.N., Liu M., Cava R.J., Ong N.P. 2015. Ultrahigh mobility and giant magnetoresistance in the Dirac semimetal  $Cd_3As_2$ . *Nature materials*, 14(3) : 280–284.
15. Long A.R. 1982. Frequency-dependent loss in amorphous semiconductors. *Adv. Phys.* 31 : 553.
16. Mott N.F., Davis E.A. 2012. *Electronic Processes in Non-Crystalline Materials*. OUP Oxford.
17. Okutan M., Bakan H. I., Korkmaz K., Yakuphanoglu F. 2005. Variable range hopping conduction and microstructure properties of semiconducting Co-doped  $TiO_2$ . *Physica B: Condensed Matter*, 355(1-4) : 176–181.
18. Pollak M. 1971. On the frequency dependence of conductivity in amorphous solids, *Philos. Mag.*, 1(23) : 519.
19. Pollak M., Pike G.E. 1972. AC Conductivity of Glasses. *Phys. Rev. Lett.*, 28 : 1449.
20. Radoń, A., Łukowiec, D., Kremzer, M., Mikula, J., Włodarczyk, P. 2018. Electrical conduction mechanism and dielectric properties of spherical shaped  $Fe_3O_4$  nanoparticles synthesized by co-precipitation method. *Materials*, 11(5) : 735.
21. Suslov A.V. et al. 2019. Observation of sub-kelvin superconductivity in  $Cd_3As_2$  thin films. *Phys. Rev. B*, 99 : 094512.
22. Wang S., Lin B.-C., Wang A.-Q., Yu D., Liao Z.-M. 2017. Quantum transport in Dirac and Weyl semimetals: A review. *Adv. Phys.* X, 2 : 518–544.
23. Weszka J. 1999. Model of lattice dynamics of  $Cd_3As_2$  single crystals. *physica status solidi (b)*, 211(2) : 605–619.
24. Weszka J., Renucci M., Zwick A. 1986. Some aspects of raman scattering in  $Cd_3As_2$  single crystals. *physica status solidi (b)*, 133(1) : 57–64.
25. Yang Y.-K., Xiu F.-X., Wang F.-Q., Wang J., Shi Y. 2019. Electrical transport and optical properties of  $Cd_3As_2$  thin films. *Chin. Phys. B Vol.*, 28(10) : 107502.
26. Zhao Y., et al. 2015. Anisotropic Fermi surface and quantum limit transport in high mobility three-dimensional Dirac semimetal  $Cd_3As_2$ . *Physical Review X*, 5(3) : 031037.

### References

1. Zakhvalinskii V.S. et al. 2019. Polucheniye i mekhanizmy elektroprovodnosti tonkikh plonok dirakovskogo polumetalla  $Cd_3As_2$  [Obtaining and mechanisms of electrical conductivity of thin films of Dirac semimetal  $Cd_3As_2$ ]. *Nauchnyye vedomosti Belgorodskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Matematika. Fizika*, 51(4) : 533–540.
2. Avanesyan V.T., Paima K.I., Stozharov V.M. 2017. Osobennosti elektroperenosa v strukture fotorefraktivnogo legirovannogo kristalla  $Bi_{12}TiO_{20} : Ru$  [Features of electrical transfer in the structure of photorefractive doped crystal  $Bi_{12}TiO_{20} : Ru$ ]. *Fizika tverdogo tela*, 59(6) : 1056–1059.
3. Armitage N.P., Mele E.J., Vishwanath A. 2018. Weyl and Dirac semimetals in three-dimensional solids. *Rev. Mod. Phys.*, 90 : 015001.
4. Austin I.G., Mott N.F. 1969. Polarons in crystalline and non-crystalline materials. *Adv. Phys.*, 18 : 41.
5. Ghosh A. 1990. Transport properties of vanadium germanate glassy semiconductors. *Phys. Rev. B*, 42 : 5665.
6. Ghosh A. 1990. Frequency-dependent conductivity in bismuth-vanadate glassy semiconductors. *Phys. Rev. B*, 341 : 1479.
7. Elliott S.R. 1978. A theory of a.c. conduction in chalcogenide glasses. *Philos. Mag. B*, 36 : 1291.
8. Elliott S.R. 1988. Frequency-dependent conductivity in ionic glasses: A possible model. *Solid State Ionics*, 27 : 131.

9. Elliott S.R. 1987. A.c. conduction in amorphous chalcogenide and pnictide semiconductors, *Advances in Physics*, 36(2) : 135–217.
10. Jamil, A., Afsar, M. F., Sher, F., Rafiq, M. A. (2017). Temperature and composition dependent density of states extracted using overlapping large polaron tunnelling model in  $Mn_xCo_{1-x}Fe_2O_4$  ( $x= 0.25, 0.5, 0.75$ ) nanoparticles. *Physica B: Condensed Matter*, 509 : 76–83.
11. Kolte J., Salame P.H., Daryapurkar A.S., Gopalan P. 2015. Impedance and AC conductivity study of nano crystalline, fine grained multiferroic bismuth ferrite ( $BiFeO_3$ ), synthesized by microwave sintering. *AIP Adv.*, 5 : 097164.
12. Koops C.G. 1951. On the dispersion of resistivity and dielectric constant of some semiconductors at audiofrequencies. *Physical Review*, 83(1) : 121.
13. Ladhari A., et al. 2015. AC and DC electrical conductivity in natural rubber/nanofibrillated cellulose nanocomposites. *J. Mol. Liq.*, 209 : 272–279.
14. Liang T., Gibson Q., Ali M.N., Liu M., Cava R.J., Ong N.P. 2015. Ultrahigh mobility and giant magnetoresistance in the Dirac semimetal  $Cd_3As_2$ . *Nature materials*, 14(3) : 280–284.
15. Long A.R. 1982. Frequency-dependent loss in amorphous semiconductors. *Adv. Phys.* 31 : 553.
16. Mott N.F., Davis E.A. 2012. *Electronic Processes in Non-Crystalline Materials*. OUP Oxford.
17. Okutan M., Bakan H. I., Korkmaz K., Yakuphanoglu F. 2005. Variable range hopping conduction and microstructure properties of semiconducting Co-doped  $TiO_2$ . *Physica B: Condensed Matter*, 355(1-4) : 176–181.
18. Pollak M. 1971. On the frequency dependence of conductivity in amorphous solids, *Philos. Mag.*, 1(23) : 519.
19. Pollak M., Pike G.E. 1972. AC Conductivity of Glasses. *Phys. Rev. Lett.*, 28 : 1449.
20. Radoń, A., Łukowicz, D., Kremzer, M., Mikula, J., Włodarczyk, P. 2018. Electrical conduction mechanism and dielectric properties of spherical shaped  $Fe_3O_4$  nanoparticles synthesized by co-precipitation method. *Materials*, 11(5) : 735.
21. Suslov A.V. et al. 2019. Observation of sub-kelvin superconductivity in  $Cd_3As_2$  thin films. *Phys. Rev. B*, 99 : 094512.
22. Wang S., Lin B.-C., Wang A.-Q., Yu D., Liao Z.-M. 2017. Quantum transport in Dirac and Weyl semimetals: A review. *Adv. Phys.* X, 2 : 518–544.
23. Weszka J. 1999. Model of lattice dynamics of  $Cd_3As_2$  single crystals. *physica status solidi (b)*, 211(2) : 605–619.
24. Weszka J., Renucci M., Zwick A. 1986. Some aspects of raman scattering in  $Cd_3As_2$  single crystals. *physica status solidi (b)*, 133(1) : 57–64.
25. Yang Y.-K., Xiu F.-X., Wang F.-Q., Wang J., Shi Y. 2019. Electrical transport and optical properties of  $Cd_3As_2$  thin films. *Chin. Phys. B Vol.*, 28(10) : 107502.
26. Zhao Y., et al. 2015. Anisotropic Fermi surface and quantum limit transport in high mobility three-dimensional Dirac semimetal  $Cd_3As_2$ . *Physical Review X*, 5(3) : 031037.

Получена 27.11.2020

---

**Морочо Александр Альфредо Амбойя** – магистрант второго года обучения кафедры теоретической и экспериментальной физики института инженерных и цифровых технологий Белгородского государственного национального исследовательского университета  
ул. Победы, 85, г. Белгород, 308015, Россия  
E-mail: [alxndral@outlook.com](mailto:alxndral@outlook.com)

**Пилюк Евгений Александрович** – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры теоретической и экспериментальной физики института инженерных и цифровых технологий Белгородского государственного национального исследовательского университета

 <http://orcid.org/0000-0003-4979-5724>

ул. Победы, 85, г. Белгород, 308015, Россия

E-mail: [pilyuk@bsu.edu.ru](mailto:pilyuk@bsu.edu.ru)

**Неженцев Антон Васильевич** – бакалавр третьего года обучения кафедры теоретической и экспериментальной физики института инженерных и цифровых технологий Белгородского государственного национального исследовательского университета

ул. Победы, 85, г. Белгород, 308015, Россия

E-mail: [1318586@bsu.edu.ru](mailto:1318586@bsu.edu.ru)

**Шапвалов Павел Георгиевич** – бакалавр третьего года обучения кафедры теоретической и экспериментальной физики института инженерных и цифровых технологий Белгородского государственного национального исследовательского университета

ул. Победы, 85, г. Белгород, 308015, Россия

E-mail: [1318678@bsu.edu.ru](mailto:1318678@bsu.edu.ru)

**Япрынцева Максим Николаевич** – кандидат физико-математических наук, научный сотрудник Центра коллективного пользования «Технологии и Материалы НИУ «БелГУ»

ул. Победы, 85, г. Белгород, 308015, Россия

E-mail: [yaprintsev@bsu.edu.ru](mailto:yaprintsev@bsu.edu.ru)

**Новиков Всеслав Юрьевич** – кандидат технических наук, инженер Центра коллективного пользования «Технологии и Материалы НИУ «БелГУ»

ул. Победы, 85, г. Белгород, 308015, Россия

E-mail: [novikov\\_v@bsu.edu.ru](mailto:novikov_v@bsu.edu.ru)