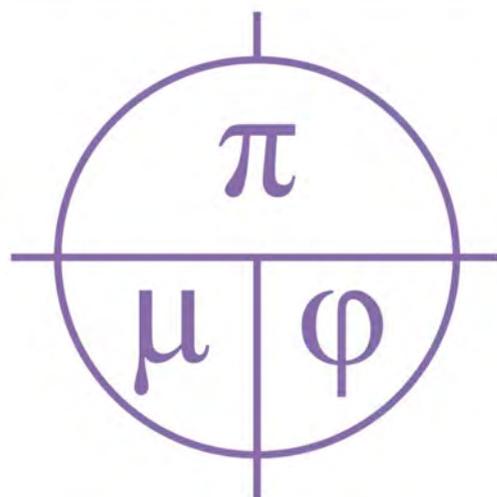


ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА & ФИЗИКА

APPLIED MATHEMATICS & PHYSICS





Прикладная математика & Физика

2021. Том 53, № 1

Основан в 1995 г. Журнал включен в Перечень ВАК рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней кандидата и доктора наук (01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ, 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление, 01.04.07 – физика конденсированного состояния). Ранее журнал издавался под названием «Научные ведомости Белгородского государственного университета. Математика. Физика».

УЧРЕДИТЕЛЬ:

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Белгородский государственный национальный исследовательский университет».

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:

Главный редактор: В. Б. Васильев, доктор физико-математических наук, НИУ «БелГУ»;

Заместители главного редактора: С. М. Ситник, доктор физико-математических наук, НИУ «БелГУ», Математика; А. В. Носков, доктор физико-математических наук, НИУ «БелГУ», Физика. Математическое моделирование;

Ответственный секретарь: О. В. Чернова, кандидат физико-математических наук, НИУ «БелГУ».

ЧЛЕНЫ РЕДАКЦИОННОЙ КОЛЛЕГИИ:

- | | |
|---|---|
| Ш. А. Алимов, д-р ф.-м. н., Ташкент, Узбекистан; | И. С. Ломов, д-р ф.-м. н., Москва, Россия; |
| Ю. А. Алхутов, д-р ф.-м. н., Владимир, Россия; | В. В. Меньших, д-р ф.-м. н., Воронеж, Россия; |
| А. Ашыралыев, д-р ф.-м. н., Алматы, Казахстан; | А. И. Назаров, д-р ф.-м. н., Санкт-Петербург, Россия; |
| С. В. Блажевич, д-р ф.-м. н., Белгород, Россия; | Е. Ю. Панов, д-р ф.-м. н., Великий Новгород, Россия; |
| А. Н. Беляков, д-р ф.-м. н., Белгород, Россия; | О. М. Пенкин, д-р ф.-м. н., Алматы, Казахстан; |
| А. Г. Брусенцев, д-р ф.-м. н., Белгород, Россия; | И. П. Половинкин, д-р ф.-м. н., Воронеж, Россия; |
| Ю. П. Вирченко, д-р ф.-м. н., Белгород, Россия; | Е. В. Радкевич, д-р ф.-м. н., Москва, Россия; |
| А. В. Глушак, д-р ф.-м. н., Белгород, Россия; | С. Е. Савотченко, д-р ф.-м. н., Белгород, Россия; |
| С. Б. Дабагов, д-р ф.-м. н., Москва, Россия; | А. П. Солдатов, д-р ф.-м. н., Москва, Россия; |
| Й. Диблик, д-р ф.-м. н., Брно, Чешская Республика; | В. Е. Федоров, д-р ф.-м. н., Челябинск, Россия; |
| Л. М. Кожевникова, д-р ф.-м. н., Стерлитамак, Россия; | А. А. Шибков, д-р ф.-м. н., Тамбов, Россия. |
| А. Н. Куликов, д-р ф.-м. н., Ярославль, Россия; | М. В. Шитикова, д-р ф.-м. н., Воронеж, Россия; |
| Д. М. Левин, д-р ф.-м. н., Тула, Россия; | Э. Л. Шишкина, д-р ф.-м. н., Воронеж, Россия. |

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор). Выходит 4 раза в год.

Выпускающий редактор: Л. П. Коханова
Статьи представлены в авторской редакции
Компьютерная верстка: О. В. Чернова
Оригинал-макет: В. Б. Васильев
E-mail: vasilyev_v@bsu.edu.ru

Гарнитура Times. Уч. изд. л. 6,8
Дата выхода 30.03.2021.
Оригинал-макет подготовлен отделом
объединенной редакции научных журналов НИУ «БелГУ»
308015, г. Белгород, ул. Победы, 85.

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

К. Б. Сабитов, О. В. Фадеева Колебания консольной балки	5
Э. Л. Шишкина Общая формула обращения весового сферического среднего	13
Б. Д. Кошанов, А. Д. Кунтуарова О фредгольмовой разрешимости обобщенной задачи Неймана	31

ФИЗИКА. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

А. Г. Брусенцев, С. И. Епифанов Оптимальный выбор источников светового поля	40
Т. Б. Никуличева, В. С. Захвалинский, О. Н. Иванов, Е. А. Пиллюк, М. Н. Япрынцев, В. Ю. Новиков, М. Ю. Саенко, А. В. Борисенко Квантовые поправки в пленках арсенида кадмия	46
А. А. Демидов, С. Б. Рыбалка Современные и перспективные полупроводниковые материалы для микроэлектроники следующего десятилетия (2020 – 2030 гг.)	53

РЕЦЕНЗИИ

С. М. Ситник, Э. Л. Шишкина Рецензия на монографию: V. V. Kravchenko Direct and Inverse Sturm-Liouville Problems. Springer, 2020, на английском языке (с кратким очерком развития теории обратных задач для уравнения Штурма–Лиувилля)	73
--	----



Applied Mathematics & Physics

2021. Volume 53, № 1

Founded in 1995. The journal is included into the List of Higher Attestation Commission of peer-reviewed scientific publications where the main scientific results of dissertations for obtaining scientific degrees of a candidate and doctor of science should be published (01.01.01 – material, complex and functional analysis, 01.01.02 – differential equations, dynamical systems and optimal control, 01.04.07 – condensed matter physics). Previously, the magazine was published under the title «Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics. Physics».

FOUNDER:

Federal state autonomous educational establishment of higher education
«Belgorod National Research University».

EDITORIAL BOARD:

Chief Editor: V. B. Vasilyev, Dr.Sc., Ph.D., Belgorod National Research University;
Deputy Editor-in-Chief: S. M. Sitnik, Dr.Sc., Ph.D., Belgorod National Research University, Mathematics;
A. V. Noskov, Dr.Sc., Ph.D., Belgorod National Research University, Physics. Mathematical modeling;
Executive Secretary: O. V. Chernova, PhD, Belgorod National Research University.

EDITORIAL BOARD MEMBERS:

Sh. A. Alimov, Dr.Sc., Ph.D., Tashkent, Uzbekistan;	I. S. Lomov, Dr.Sc., Ph.D., Moscow, Russia;
Yu. A. Alkhutov, Dr.Sc., Ph.D., Vladimir, Russia;	V. V. Menshih, Dr.Sc., Ph.D., Voronezh, Russia;
A. Ashyralyev, Dr.Sc., Ph.D., Almaty, Kazakhstan;	A. I. Nazarov, Dr.Sc., Ph.D., St. Petersburg, Russia;
S. V. Blazhevich, Dr.Sc., Ph.D., Belgorod, Russia;	E. Yu. Panov, Dr.Sc., Ph.D., Velikiy Novgorod, Russia;
A. N. Belyakov, Dr.Sc., Ph.D., Belgorod, Russia;	O. M. Penkin, Dr.Sc., Ph.D., Almaty, Kazakhstan;
A. G. Brusentsev, Dr.Sc., Ph.D., Belgorod, Russia;	I. P. Polovinkin, Dr.Sc., Ph.D., Voronezh, Russia;
Yu.P. Virchenko, Dr.Sc., Ph.D., Belgorod, Russia;	E. V. Radkevich, Dr.Sc., Ph.D., Moscow, Russia;
A. V. Glushak, Dr.Sc., Ph.D., Belgorod, Russia;	S. E. Savotchenko, Dr. Sc Ph.D., Belgorod, Russia;
S. B. Dabagov, Dr.Sc., Ph.D., Moscow, Russia;	A. P. Soldatov, Dr.Sc., Ph.D., Moscow, Russia;
J. Diblik, Dr.Sc., Ph.D., Brno, Czech Republic;	V. E. Fedorov, Dr.Sc., Ph.D., Chelyabinsk, Russia;
L. M. Kozhevnikova, Dr.Sc., Ph.D., Sterlitamak, Russia;	A. A. Shibkov, Dr.Sc., Ph.D., Tambov, Russia.
A. N. Kulikov, Dr.Sc., Ph.D., Yaroslavl, Russia;	M. V. Shitikova, Dr.Sc., Ph.D., Voronezh, Russia;
D. M. Levin, Dr.Sc., Ph.D., Tula, Russia;	E. L. Shishkina, Dr. Sc., Ph.D., Voronezh, Russia.

The journal has been registered at the Federal service for supervision of communications information technology and mass media (Roskomnadzor). Publication frequency: 4 /year.

Commissioning Editor L. P. Kokhanova
Articles are presented in the author's edition
Computer imposition O. V. Chernova
Dummy layout by V. B. Vasilyev
E-mail: vasilyev_v@bsu.edu.ru

Typeface Times. Publisher's signature 6,8
Date of publishing 30.03.2021.
The layout is presented by Department of the united
Editorial Board of Scientific Journals Belgorod
National Research University
Address: 85 Pobeda St., Belgorod, 308015, Russia

Mass media registration certificate
EL № FS 77-77959 dd 19.02.2020.

© Belgorod National Research University, 2021

CONTENTS

MATHEMATICS

<i>K. Sabitov, O. Fadeeva</i> The beam fluctuations, one end of which is free and the other clamped	5
<i>E. Shishkina</i> General formula of inversion of weighted spherical mean	13
<i>B. Koshanov, A. Kunturova</i> On the fredholm solvability of the generalized Neumann problem	31

PHYSICS. MATHEMATICAL MODELING

<i>A. Brusentsev, S. Epifanov</i> Optimal choice of light field sources	40
<i>T. Nikulicheva, V. Zakhvalinskii, O. Ivanov, E. Pilyuk, M. Yapryntsev, V. Novikov, M. Saenko, A. Borisenko</i> Quantum corrections in cadmium arsenide films	46
<i>A. Demidov, S. Rybalka</i> Modern and promising semiconductor materials for microelectronics of the next decade (2020-2030 years.)	53

REVIEWS

<i>S. Sitnik, E. Shishkina</i> Review of the monograph: V. V. Kravchenko Direct and Inverse Sturm – Liouville Problems. Springer, 2020, in English language. (with a brief outline of the development of the theory of inverse problems for the Sturm – Liouville equation)	73
---	----

МАТЕМАТИКА

УДК 517.95+624.04
MSC 35G16.

DOI 10.52575/2687-0959-2021-53-1-5-12

КОЛЕБАНИЯ КОНСОЛЬНОЙ БАЛКИ

К. Б. Сабитов, О. В. Фадеева

(Статья представлена членом редакционной коллегии Ю. П. Вирченко)

Стерлитамакский филиал Института стратегических исследований Республики Башкортостан
Стерлитамак, 453103, Россия
Самарский государственный технический университет
Самара, 443100, Россия

E-mail: sabitov_fmf@mail.ru, faoks@yandex.ru

Аннотация. В данной работе изучена начально-граничная задача для уравнения колебаний балки, один конец которой свободен, а другой заделан, т. е. для консольной балки. Решение поставленной задачи проведено методами спектрального анализа. Для спектральной задачи найдены собственные значения как корни трансцендентного уравнения и построена соответствующая система собственных функций. Показано, что построенная система собственных функций является ортогональной и полной в пространстве L_2 . Единственность решения поставленной задачи доказана двумя способами. Первый способ основан на применении интеграла энергии, а второй – на полноте системы собственных функций. Решение данной начально-граничной задачи построено в виде суммы ряда по системе собственных функций соответствующей одномерной спектральной задачи. Найдены оценки коэффициентов этого ряда и системы собственных функций, на основании которых установлены достаточные условия на начальные функции, выполнение которых обеспечивает равномерную сходимость построенного ряда в классе регулярных решений уравнения колебаний балки. Опираясь на полученное решение данной задачи, установлена устойчивость ее решения в зависимости от начальных данных.

Ключевые слова: уравнение балки, единственность, ряд, существование, устойчивость.

Для цитирования: Сабитов К. Б., Фадеева О. В., 2021. Колебания балки консольной балки. Прикладная математика & Физика. 53(1): 5–12. DOI 10.52575/2687-0959-2021-53-1-5-12.

CONSOLE BEAM VIBRATIONS

K. Sabitov, O. Fadeeva

(Article submitted by a member of the editorial board Yu. P. Virchenko)

The state autonomous scientific institution «Institute of strategic research of the Republic of Bashkortostan»
Sterlitamak, 453103, Russian Federation
Samara State Technical University
Samara, 443100, Russian Federation

E-mail: sabitov_fmf@mail.ru, faoks@yandex.ru

Received January, 22, 2021

Abstract. In this paper, we study the initial boundary value problem for the vibration equation of a beam, one end of which is free and the other is closed, i.e. for the cantilever beam. The solution of the problem is carried out by methods of spectral analysis. For the spectral problem eigenvalues as roots of the transcendental equation are found and the corresponding system of eigenfunctions is composed. It is shown that the constructed system of eigenfunctions is orthogonal and complete in space L_2 . The uniqueness of the solution of the problem is proved in two ways. The first method is based on the application of the energy integral, and the second - on the completeness of the system of eigenfunctions. The solution of this initial boundary value problem is found as the sum of a series of eigenfunctions of the corresponding one-dimensional spectral problem. Estimates of the coefficients of this series and the system of eigenfunctions are found, on the basis of which sufficient conditions for the initial functions are established, the fulfillment of which provides uniform convergence of the constructed series in the class of regular solutions of the beam vibration equation. Based on the obtained solution of this problem, the stability of its solution depending on the initial data is established.

Key words: equation beams, uniqueness, series, existence, resistance.

For citation: Sabitov K., Fadeeva O. 2021. The beam fluctuations, one end of which is free and the other clamped. Applied Mathematics & Physics. 53(1): 5–12 (in Russian). DOI 10.52575/2687-0959-2021-53-1-5-12.

1. Введение. Множество задач о колебаниях балок, стержней и пластин играют важную роль в теории устойчивости и строительной механике. Описание таких колебательных процессов часто приводит к дифференциальным уравнениям более высокого порядка, чем уравнение колебания струны. Рассмотрим балку длины l , один конец которой наглухо заделан, а другой свободен. Под действием непрерывной внешней силы $G(x, t)$, рассчитанной на единицу длины, вынужденные изгибные поперечные колебания однородной балки, при отсутствии вращательного движения, описываются дифференциальным уравнением четвертого порядка [10, 4]

$$\rho S u_{tt} + E J u_{xxxx} = G(x, t),$$

где ρ – линейная плотность балки, S – площадь поперечного сечения, E – модуль упругости материала, J – момент инерции сечения относительно своей горизонтальной оси. Это уравнение перепишем в виде

$$u_{tt} + \alpha^2 u_{xxxx} = F(x, t), \quad (1)$$

где $\alpha^2 = EJ/\rho S$, $F(x, t) = G(x, t)/\rho S$.

К уравнению (1) приходят также при изучении задач расчета устойчивости вращающихся валов и вибрации кораблей [3].

В данной работе изучается следующая начально-граничная задача для уравнения (1) в области

$$D = \{(x, t) : 0 < x < l, 0 < t < T\},$$

где l и T – заданные положительные действительные числа.

НАЧАЛЬНО-ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА. Найти определенное в области D решение $u(x, t)$ уравнения (1), обладающее следующими свойствами:

$$u(x, y) \in C_{x,t}^{4,2}(D) \cap C_{x,t}^{2,1}(\bar{D}), \quad (2)$$

$$u(0, t) = u_x(0, t) = u_{xx}(l, t) = u_{xxx}(l, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), u_t(x, 0) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (4)$$

при этом функции $F(x, t)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ – заданные достаточно гладкие.

Отметим, что в книгах [10, 4, 3, 2, 1, 9] методом разделения переменных найдены собственные частоты и формы собственных колебаний для уравнения (1) с различными граничными условиями, но начально-граничные задачи не исследованы. В данной статье, следуя работам [6, 7, 8], решение поставленной начально-граничной задачи построено в явном виде как сумма ортогонального ряда по системе собственных функций соответствующей одномерной спектральной задачи, приведены доказательства теорем единственности, существования и устойчивости построенного решения.

2. Единственность решения начально-граничной задачи. Для доказательства единственности решения поставленной задачи воспользуемся следующим утверждением из работы [7].

Теорема 1. Если существует решение начально-граничной задачи (1) – (4), то для любого t , $0 \leq t \leq T$, справедлива оценка

$$\int_0^l (u_t^2 + \alpha^2 u_{xx}^2) dx \leq e^T \left[\int_0^l (\psi^2(x) + \alpha^2 (\varphi''(x))^2) dx + \iint_{\bar{D}} F^2(x, t) dx dt \right]. \quad (5)$$

Теорема 2. Если существует функция $u(x, t)$, удовлетворяющая уравнению (1) и условиям (2) – (4), то она единственна.

Доказательство. Предположим, что существуют две различные функции $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$, являющиеся решениями данной задачи. Тогда разность $u(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$ удовлетворяет однородному уравнению $u_{tt} + \alpha^2 u_{xxxx} = 0$ и нулевым начальным и граничным условиям. Для этой разности в силу оценки

$$(5) \text{ при любом } t \in [0, T] \text{ имеем } \int_0^l (u_t^2 + \alpha^2 u_{xx}^2) dx = 0. \text{ Это возможно только в случае, когда } u_t = u_{xx} = 0$$

в области D , т. е. $u(x, t) = c_1 x + c_2$, где c_1, c_2 – произвольные постоянные. Из выполнимости граничных условий (3) получаем $c_1 = c_2 = 0$, т. е. $u(x, t) = 0$ в \bar{D} , откуда и следует утверждение теоремы.

3. Существование решения начально-граничной задачи. Решение поставленной задачи проведем для случая $F(x, t) \equiv 0$. Разделяя в уравнении (1) переменные $u(x, t) = X(x)T(t)$, получаем следующую спектральную задачу относительно функции $X(x)$:

$$X^{IV} + \lambda X(x) = 0, \quad 0 < x < l, \quad (6)$$

$$X(0) = X'(0) = X''(l) = X'''(l) = 0. \tag{7}$$

Если $\lambda > 0$, то, полагая $\lambda = 4d^4, d > 0$, найдем общее решение уравнения (6):

$$X(x) = e^{dx}(a_1 \cos dx + a_2 \sin dx) + e^{-dx}(a_3 \cos dx + a_4 \sin dx),$$

где a_1, a_2, a_3, a_4 – произвольные постоянные.

Подчиняя функцию $X(x)$ и ее производные до третьего порядка граничным условиям (7), получим линейную систему относительно неизвестных постоянных $a_i, i = 1, 4$:

$$\begin{cases} a_1 + a_3 = 0, \\ a_1 + a_2 - a_3 + a_4 = 0, \\ a_1 e^{dl} \sin dl - a_2 e^{dl} \cos dl - a_3 e^{-dl} \sin dl + a_4 e^{-dl} \cos dl = 0, \\ (a_1 e^{dl} - a_4 e^{-dl})(\cos dl + \sin dl) - (a_2 e^{dl} + a_3 e^{-dl})(\cos dl - \sin dl) = 0, \end{cases}$$

определитель которой равен $\Delta = e^{2dl} + e^{-2dl} + 2(1 + \cos^2 dl)$.

Ясно, что данный определитель отличен от нуля, поэтому система имеет только тривиальное решение, а значит $X(x) \equiv 0$.

Если $\lambda = 0$, легко показать, что спектральная задача (6), (7) так же имеет только тривиальное решение $X(x) \equiv 0$.

Если $\lambda < 0$, то полагая $\lambda = -d^4, d > 0$, построим общее решение уравнения (6) в виде

$$X(x) = a_1 e^{dx} + a_2 e^{-dx} + a_3 \cos dx + a_4 \sin dx,$$

где a_1, a_2, a_3, a_4 – произвольные пока неизвестные постоянные.

Удовлетворяя функцию $X(x)$ граничным условиям (7), получим следующую систему относительно неизвестных постоянных:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 0, \\ a_1 - a_2 + a_4 = 0, \\ a_1 e^{dl} + a_2 e^{-dl} - a_3 \cos dl - a_4 \sin dl = 0, \\ (a_1 e^{dl} + a_2 e^{-dl}) + a_3 \sin dl - a_4 \cos dl = 0, \end{cases} \tag{8}$$

определитель которой равен $\Delta = -4(\operatorname{ch} dl \cdot \cos dl + 1)$.

Для того, чтобы система (8) имела ненулевые решения, потребуем, чтобы ее определитель был равен нулю:

$$\operatorname{ch} dl \cdot \cos dl = -1. \tag{9}$$

Уравнение (9) имеет счетное множество корней d_n [10], которые можно вычислить по формуле [5]

$$d_n = \frac{\pi}{l} \left(n - \frac{1}{2} + (-1)^n \Theta_n \right), \tag{10}$$

где $\Theta_n \in (0; 1/2), \Theta_n = O(1/n^2)$. Отсюда следует, что собственные значения спектральной задачи (6), (7) находятся по формуле $\lambda_n = -d_n^4$, где d_n – корень уравнения (9).

Находя общее решение системы (8) и учитывая условие (9) при $d = d_n$ получаем систему собственных функций

$$X_n = \frac{\operatorname{sh} d_n l + \sin d_n l}{\operatorname{ch} d_n l + \cos d_n l} (\operatorname{ch} d_n x - \cos d_n x) + \sin d_n x - \operatorname{sh} d_n x.$$

Отсюда, с учетом того, что

$$\operatorname{sh} d_n l = \sqrt{\operatorname{ch}^2 d_n l - 1} = |\operatorname{tg} d_n l| = -\frac{|\sin d_n l|}{\cos d_n l},$$

получаем две подсистемы

$$X_n(x) = \begin{cases} a_n \operatorname{ch} d_n(x - 0, 5l) + b_n \sin d_n(x - 0, 5l), & n = 2k - 1, \\ c_n \operatorname{sh} d_n(x - 0, 5l) + f_n \cos d_n(x - 0, 5l), & n = 2k, \end{cases} \tag{11}$$

где

$$a_n = \frac{1}{\operatorname{sh} 0, 5d_n l}, \quad b_n = \frac{1}{\cos 0, 5d_n l}, \quad c_n = -\frac{1}{\operatorname{ch} 0, 5d_n l}, \quad f_n = \frac{1}{\sin 0, 5d_n l}.$$

Таким образом, нами построена система собственных функций задачи (6), (7) по формуле (11). Как известно из [6], эта система ортогональна и полна в пространстве $L_2[0, l]$. Для удобства дальнейших

исследований нормируем систему функций (11). Для нахождения норм собственных функций вычислим интеграл

$$I_{nn} = \int_0^l X_n^2(x) dx.$$

Для нечетных номеров имеем

$$I_{nn} = \int_0^l (a_n \operatorname{ch} d_n(x-0, 5l) + b_n \sin d_n(x-0, 5l))^2 dx = (a_n^2 + b_n^2)0, 5l + \frac{a_n^2}{2d_n} \operatorname{sh} d_n l - \frac{b_n^2}{2d_n} \sin d_n l.$$

С учетом условия (9), получим

$$I_{nn} = \|X_n(x)\|^2 = \int_0^l X_n^2(x) dx = l \frac{\operatorname{ch} d_n l + 1}{\operatorname{ch} d_n l - 1} = l \operatorname{cth}^2 0, 5d_n l. \quad (12)$$

Аналогично для четных номеров получаем

$$I_{nn} = \|X_n(x)\|^2 = \int_0^l X_n^2(x) dx = l \frac{\operatorname{ch} d_n l - 1}{\operatorname{ch} d_n l + 1} = l \operatorname{th}^2 0, 5d_n l. \quad (13)$$

На основании равенств (12) и (13) нормируем систему функций (11):

$$Y_n(x) = \frac{X_n(x)}{\|X_n(x)\|}, \|X_n(x)\| = \begin{cases} \sqrt{l} \operatorname{cth} 0, 5d_n l, & n = 2k - 1, \\ \sqrt{l} \operatorname{th} 0, 5d_n l, & n = 2k. \end{cases} \quad (14)$$

Пусть $u(x, t)$ – решение задачи (1) – (4). Следуя [6, 7] введем в рассмотрение вспомогательные функции

$$u_n(t) = \int_0^l u(x, t) Y_n(x) dx. \quad (15)$$

Дважды дифференцируя равенство (15) и учитывая уравнение (1), получим

$$u_n''(t) = -\alpha^2 \int_0^l u_{xxxx}(x, t) Y_n(x) dx + F_n(t),$$

где $F_n(t) = \int_0^l F(x, t) Y_n(x) dx$.

Интегрируя здесь по частям четыре раза с учетом граничных условий (3) и (7), получим уравнение

$$u_n''(t) + \alpha^2 d_n^4 u_n(t) = F_n(t),$$

общее решение которого находим методом вариации произвольных постоянных:

$$u_n(t) = \alpha_n \cos \alpha d_n^2 t + \beta_n \sin \alpha d_n^2 t + \frac{1}{\alpha d_n^2} \int_0^l F_n(s) \sin[\alpha d_n^2 (t - s)] ds, \quad (16)$$

где α_n, β_n – произвольные постоянные.

Для нахождения постоянных α_n, β_n , подчинив функции (15) условиям (4), получим начальные условия:

$$u_n(0) = \int_0^l u(x, 0) Y_n(x) dx = \int_0^l \varphi(x) Y_n(x) dx = \varphi_n, \quad (17)$$

$$u_n'(0) = \int_0^l u_t(x, 0) Y_n(x) dx = \int_0^l \psi(x) Y_n(x) dx = \psi_n. \quad (18)$$

Удовлетворяя функции (16) полученным начальным условиям, находим $\alpha_n = \varphi_n, \beta_n = \frac{\psi_n}{\alpha d_n^2}$ и явный вид функций

$$u_n(t) = \varphi_n \cos \alpha d_n^2 t + \frac{\psi_n}{\alpha d_n^2} \sin \alpha d_n^2 t + \frac{1}{\alpha d_n^2} \int_0^l F_n(s) \sin[\alpha d_n^2(t-s)] ds. \quad (19)$$

Поскольку для функций (15) получен явный вид (19), на основании полноты системы $Y_n(x)$ в пространстве $L_2[0, l]$ можно доказать единственность решения задачи (1) – (4). Действительно, предположим, что существуют две различные функции $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$, являющиеся решениями данной задачи. Тогда их разность $u(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$ является решением однородной задачи (1) – (4), где $\varphi(x) = \psi(x) = 0$. Тогда из формул (17) – (19) следует, что $u_n(t) = 0$ при любом $t \in [0, T]$, что, с учетом (15), влечет выполнимость равенства

$$\int_0^l u(x, t) Y_n(x) dx = 0,$$

при любом $t \in [0, T]$ и для любого $n \in N$. Отсюда, в силу полноты системы функций $Y_n(x)$ в пространстве $L_2[0, l]$, следует, что $u(x, t) = 0$ почти всюду на $[0, l]$ при любом $t \in [0, T]$. Поскольку $u(x, t)$ в силу условия (2) непрерывна на \bar{D} , то $u(x, t) \equiv 0$ на \bar{D} .

Решение поставленной задачи (1) – (4) будем искать в виде суммы ряда

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) Y_n(x), \quad (20)$$

где $u_n(t)$ и $Y_n(x)$ определяются формулами (19) и (14).

Лемма 1. Для любых $t \in [0, T]$ и натуральных n справедливы оценки

$$|u_n(t)| \leq C_1 \left(|\varphi_n| + \frac{|\psi_n|}{n^2} + \frac{1}{n^2} \|F_n\| \right), \quad |u_n''(t)| \leq C_2 n^4 \left(|\varphi_n| + \frac{|\psi_n|}{n^2} + n^2 \|F_n\| \right),$$

где $\|F_n\| = \max |F_n(t)|$ для любых $t \in [0, T]$, а C_i – здесь и далее положительные постоянные.

Справедливость этих оценок следует непосредственно из формулы (19).

Лемма 2. Для любых $x \in [0, l]$ и больших $n \in N$ справедливы оценки

$$|Y_n^{(i)}(x)| \leq C_{i+3} n^i, \quad i = \overline{0, 4}. \quad (21)$$

Доказательство. Для случая $n = 2k - 1$ на основании формулы (11) имеем

$$\begin{aligned} X_n(x) &= a_n \operatorname{ch} d_n(x - 0, 5l) + b_n \sin d_n(x - 0, 5l) = \\ &= \frac{2 \operatorname{sh} 0, 5d_n l}{\operatorname{ch} d_n l - 1} \operatorname{ch} d_n(x - 0, 5l) + \frac{2 \operatorname{ch} d_n l \cos 0, 5d_n l}{\operatorname{ch} d_n l - 1} \sin d_n(x - 0, 5l). \end{aligned}$$

Из данного представления при всех $x \in [0, l]$ и $n \in N$ оценим X_n :

$$|X_n| \leq \frac{\operatorname{sh} d_n l}{\operatorname{ch} d_n l - 1} + \frac{2 \operatorname{ch} d_n l}{\operatorname{ch} d_n l - 1} \leq \frac{4}{(1 - e^{-d_n l})^2} = C_3.$$

Теперь из формулы (12) следует, что $\|X_n(x)\| \geq \sqrt{l}; \lim_{n \rightarrow \infty} \|X_n(x)\| = \sqrt{l}$. Отсюда вытекает, что существует номер n_1 , такой, что при всех $n > n_1$: $\sqrt{l} \leq \|X_n(x)\| \leq 2\sqrt{l}$. Тогда при больших n и любых $x \in [0, l]$

$$|Y_n(x)| \leq \frac{|X_n(x)|}{\|X_n(x)\|} < \frac{C_3}{\sqrt{l}}.$$

При $n = 2k$ на основании формулы (14) имеем

$$\begin{aligned} X_n(x) &= c_n \operatorname{sh} d_n(x - 0, 5l) + f_n \cos d_n(x - 0, 5l) = \\ &= \frac{\operatorname{sh} d_n(x - 0, 5l)}{\operatorname{ch} 0, 5d_n l} - \frac{2 \operatorname{ch} d_n l \sin 0, 5d_n l}{\operatorname{ch} d_n l + 1} \cos d_n(x - 0, 5l), \end{aligned}$$

откуда при всех $x \in [0, l]$ и $n \in N$ имеем

$$|X_n(x)| \leq \frac{\operatorname{sh} 0, 5d_n l}{\operatorname{ch} 0, 5d_n l} + \frac{2 \operatorname{ch} d_n l}{1 + \operatorname{ch} d_n l} \leq 3.$$

Из (13) имеем : $\|X_n(x)\| \leq \sqrt{l}$; $\lim_{n \rightarrow \infty} \|X_n(x)\| = \sqrt{l}$. Отсюда следует, что существует номер n_2 , такой, что при всех $n > n_2 : 0, 5\sqrt{l} \leq \|X_n(x)\| \leq \sqrt{l}$. Тогда при больших n и любых $x \in [0, l]$ справедлива оценка

$$|Y_n(x)| \leq \frac{|X_n(x)|}{\|X_n(x)\|} \leq \frac{6}{\sqrt{l}}.$$

Вычисляя производные функций $Y_n(x)$ до четвертого порядка включительно, с учетом асимптотической формулы для d_n (10) убеждаемся в справедливости оценок (21) для больших $n \in N$ и любых $x \in [0, l]$.

Далее дифференцируя почленно ряд (20) составим ряды из производных:

$$u_{tt}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n''(t) Y_n(x), \quad (22)$$

$$u_{xxxx}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) Y_n^{(4)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n^4 u_n(t) Y_n(x). \quad (23)$$

Полученные ряды (22) и (23), как и ряд (20), на основании лемм 1 и 2 при любых $(x, t) \in \bar{D}$ мажорируются рядом

$$C_8 \sum_{n=1}^{\infty} n^4 \left(|\varphi_n| + \frac{|\psi_n|}{n^2} + n^2 \|F_n\| \right).$$

Лемма 3. Если функции $\varphi(x), \psi(x)$ удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} \varphi(x) &\in C^6[0, l], \varphi(0) = \varphi'(0) = \varphi''(l) = \varphi'''(l) = \varphi^{IV}(0) = \varphi^V(0) = 0, \\ \psi(x) &\in C^4[0, l], \psi(0) = \psi'(0) = \psi''(l) = \psi'''(l) = 0, \\ F(x, t) &\in C(\bar{D}) \cap C_x^4(\bar{D}), F(0, t) = F_x(0, t) = F_{xx}(l, t) = F_{xxx}(l, t) = 0 \end{aligned}$$

при любых $0 \leq t \leq T$, то имеют место следующие представления:

$$\varphi_n = \frac{\varphi_n^{(6)}}{d_n^6}, \quad \psi_n = \frac{\psi_n^{(4)}}{d_n^4}, \quad F_n(t) = \frac{1}{d_n^4} F_n^{(4)}(t),$$

где

$$\varphi_n^{(6)} = \begin{cases} \frac{1}{\|X_n\|} \int_0^l \varphi_n^{(6)}(x) (a_n \operatorname{ch} d_n(x-0, 5l) + b_n \sin d_n(x-0, 5l)) dx, & n = 2k-1, \\ \frac{1}{\|X_n\|} \int_0^l \varphi_n^{(6)}(x) (c_n \operatorname{sh} d_n(x-0, 5l) - f_n \cos d_n(x-0, 5l)), & n = 2k, \end{cases}$$

$$\psi_n^{(4)} = \int_0^l \psi^{(4)}(x) Y_n(x) dx,$$

$$F_n^{(4)}(t) = \int_0^l F_x^{(4)}(x, t) Y_n(x) dx.$$

Доказательство. Заметим, что непосредственным дифференцированием можно убедиться в том, что

$$Y_n^{(4)}(x) = d_n^4 Y_n(x).$$

Тогда, на основании (17), имеем

$$\varphi_n = \int_0^l \varphi(x) Y_n(x) dx = \frac{1}{d_n^4} \int_0^l \varphi(x) Y_n^{(4)}(x) dx.$$

Интегрируя здесь по частям четыре раза и учитывая граничные условия (3), получаем

$$\varphi_n = \frac{1}{d_n^4} \int_0^l \varphi^{(4)}(x) Y_n(x) dx = \frac{1}{d_n^8} \int_0^l \varphi^{(4)}(x) Y_n^{(4)}(x) dx.$$

Интегрируя в последнем интеграле дважды по частям, приходим к справедливости первого представления леммы 3.

Аналогично, используя представления для ψ_n и $F_n(t)$, получим

$$\psi_n = \int_0^l \psi(x) Y_n(x) dx = \frac{1}{d_n^4} \int_0^l \psi(x) Y_n^{(4)}(x) dx = \frac{1}{d_n^4} \psi_n^{(4)},$$

$$F_n(t) = \int_0^l F(x, t) Y_n(x) dx = \frac{1}{d_n^4} \int_0^l F(x, t) Y_n^{(4)}(x) dx = \frac{1}{d_n^4} \int_0^l F_{xxxx}(x, t) Y_n(x) dx = \frac{1}{d_n^4} F_n^{(4)}(t).$$

На основании леммы 3 ряды (20), (22), (23) мажорируются сходящимся числовым рядом

$$C_9 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(|\varphi_n^{(6)}| + |\psi_n^{(4)}| + \|F_n^{(4)}\| \right).$$

т. е. они сходятся равномерно на \bar{D} . Следовательно, сумма ряда (20) удовлетворяет всем условиям задачи (1) – (4).

Таким образом, нами доказано следующее утверждение.

Теорема 3. Если функции $\varphi(x), \psi(x), F(x, t)$ удовлетворяют условиям леммы 3, то существует единственное решение задачи (1) – (4) и оно определяется суммой ряда (20).

4. Устойчивость решения начально-граничной задачи. В этом пункте установим зависимость решения задачи (1) – (4) от начальных функций.

Теорема 4. Для решения (20) начально-граничной задачи (1) – (4) при $F(x, t) \equiv 0$ справедливы оценки

$$\|u(x, t)\|_{L_2[0, l]} \leq C_{10} \left(\|\varphi(x)\|_{L_2[0, l]} + \|\psi(x)\|_{L_2[0, l]} \right),$$

$$\|u(x, t)\|_{C(\bar{D})} \leq C_{11} \left(\|\varphi^{(4)}(x)\|_{C[0, l]} + \|\psi(x)\|_{C[0, l]} \right).$$

Доказательство. Так как система функций $Y_n(x)$ ортонормирована, то из представления (20) в силу леммы 1, получим

$$\|u(x, t)\|_{L_2[0, l]}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} u_n^2(t) \leq 2C_1^2 \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi_n^2 + \psi_n^2) = C_{10} \left(\|\varphi(x)\|_{L_2[0, l]}^2 + \|\psi(x)\|_{L_2[0, l]}^2 \right).$$

Из полученного неравенства следует справедливость первой оценки.

Из (20) на основании лемм 1 и 2 при любом $(x, t) \in \bar{D}$ имеем

$$|u(x, t)| \leq C_{12} \sum_{n=1}^{\infty} \left(|\varphi_n| + \frac{|\psi_n|}{n^2} \right) \leq C_{13} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{|\varphi_n^{(4)}|}{n^4} + \frac{|\psi_n|}{n^2} \right) \leq C_{13} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(|\varphi_n^{(4)}| + |\psi_n| \right).$$

Отсюда, используя неравенство Коши-Буняковского, получим

$$|u(x, t)| \leq C_{13} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left[\left(\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n^{(4)}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\psi_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right] =$$

$$= C_{14} \left(\|\varphi^{(4)}(x)\|_{L_2[0, l]} + \|\psi(x)\|_{L_2[0, l]} \right).$$

Из полученной оценки непосредственно следует вторая оценка теоремы 4.

Список литературы

1. Бидерман В. Л. 1980. Теория механических колебаний. М., Высшая школа, 408.
2. Коллатц Л. 1968. Задачи на собственные значения с техническими приложениями. М., Наука, 503.
3. Крылов А. Н. 2012. Вибрация судов. М., Гостехиздат, 447.
4. Релей Л. 1955. Теория звука. Т. 1. М., Гостехиздат, 503.
5. Рудаков И. А. 2015. Периодические решения квазилинейного уравнения вынужденных колебаний балки с однородными граничными условиями. Изв. РАН. Сер. матем, 79(5): 215–238.
6. Сабитов К. Б. 2015. Колебания балки с заделанными концами. Вестник Сам. гос. тех. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 19(2): 311–324.

7. Сабитов К. Б. 2017. К теории начально-граничных задач для уравнения стержней и балок. Дифференц. уравнения, 53(1): 89–100.
8. Сабитов К. Б. 2017. Начальная задача для уравнения колебаний балок. Дифференц. уравнения, 53(5): 665–671.
9. Тимошенко С. П. 1967. Колебания в инженерном деле. М., Физматлит, 444.
10. Тихонов А. Н., Самарский А. А. 1972. Уравнения математической физики. М., Наука, 736.

References

1. Biderman V. L. 1980. Teoriya mekhanicheskikh kolebaniy [Theory of mechanical vibrations]. М., Vysshaya shkola, 408.
2. Kollatts L. 1968. Zadachi na sobstvennyye znacheniya s tekhnicheskimi prilozheniyami [Eigenvalue problems with technical applications]. М., Nauka, 503.
3. Krylov A. N. 2012. Vibratsiya sudov [Vibration of vessels]. М., Gostekhizdat, 447.
4. Reley L. 1955. Teoriya zvuka [Theory of sound]. Т.1. М., Gostekhizdat, 503.
5. Rudakov I. A. 2015. Periodicheskie resheniya kvazilinejnogo uravneniya vyzhdenykh kolebaniy balki s odnorodnymi granichnymi usloviyami [Periodic oscillations of the quasi-linear equation of forced beam vibrations with uniform boundary conditions]. Izv. RAN. Ser. matem, 79(5): 215–238.
6. Sabitov K. B. 2015. Kolebaniya balki s zadelannymi kontsami [Vibrations of beams with closed ends]. Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya: Fiziko-matematicheskie nauki, 19(2): 311–324.
7. Sabitov K. B. 2017. K teorii nachal'no-granichnykh zadach dlya uravneniya sterzhney i balok [On the theory of initial-boundary problems for the equation of rods and beams]. Differentsial'nye uravneniya, 53(1): 89–100.
8. Sabitov K. B. 2017. Nachal'naya zadacha dlya uravneniya kolebaniy balki [The Initial problem for the equation of vibrations of a beam]. Differentsial'nye uravneniya, 53(5): 665–671.
9. Timoshenko S. P. 1967. Kolebaniya v inzhenernom dele [Fluctuations in engineering]. М., Fizmatlit, 444.
10. Tikhonov A. N., Samarskiy A. A. 1966. Uravneniya matematicheskoy fiziki [Equations of mathematical physics]. М., Nauka, 724.

Получена 22.01.2021

Сабитов Камиль Басирович – доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник Стерлитамакского филиала Института стратегических исследований Республики Башкортостан; профессор кафедры высшей математики Самарского государственного технического университета

 <http://orcid.org/0000-0001-9516-2704>

ул. Одесская, 68, Стерлитамак, 453103, Россия

E-mail: sabitov_fmfm@mail.ru

Фадеева Оксана Владиславовна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики Самарского государственного технического университета

 <http://orcid.org/0000-0003-1704-9524>

ул. Молодогвардейская, 244, Самара, 443100, Россия

E-mail: faoks@yandex.ru

ОБЩАЯ ФОРМУЛА ОБРАЩЕНИЯ ВЕСОВОГО СФЕРИЧЕСКОГО СРЕДНЕГО

Э. Л. Шишкина

Воронежский Государственный Университет,
Воронеж, 394018, Россия

E-mail: ilina_dico@mail.ru

Аннотация. В статье представлены формулы обращения весового сферического среднего. Мы рассматриваем обобщение классического сферического среднего на случай, когда вместо обычного сдвига действует обобщенный сдвиг, порожденный оператором Бесселя. Обратный оператор к рассматриваемому обобщенному сферическому среднему построен при помощи смешанного гиперболического –потенциала Рисса. Кроме того, в статье приводится общая формула обращения классического сферического среднего вне зависимости от четности или нечетности размерности пространства, полученная применением гиперболического потенциала Рисса. Также приводятся различные частные случаи и примеры.

Ключевые слова: сферическое среднее, гиперболический потенциал Рисса, обобщенный сдвиг, весовое сферическое среднее, смешанный гиперболический B -потенциал Рисса.

Для цитирования: Шишкина Э. Л. 2021. Общая формула обращения весового сферического среднего. Прикладная математика & Физика. 53(1): 13–30. DOI 10.52575/2687-0959-2021-53-1-13-30.

GENERAL FORMULA OF INVERSION OF WEIGHTED SPHERICAL MEAN

E. Shishkina

Voronezh State University,
Voronezh, 394018, Russia

E-mail: ilina_dico@mail.ru

Received February, 04, 2021

Abstract. The article presents formulas for inversion of the weighted spherical mean. We consider a generalization of the classical spherical mean to the case when the generalized translation generated by the Bessel operator acts instead of the usual shift. The inverse operator to the considered generalized spherical mean is constructed using the mixed hyperbolic Riesz B -potential. In addition, the article provides a general inversion formula for the classical spherical mean, regardless of the evenness or oddness of the dimension of the space, obtained by using the Riesz hyperbolic potential. Various special cases and examples are also given.

Key words: spherical mean, hyperbolic Riesz potential, generalized translation, weighted spherical mean, mixed hyperbolic Riesz B -potential.

For citation: Shishkina E. 2021. General formula of inversion of weighted spherical mean. Applied Mathematics & Physics. 53(1): 13–30 (in Russian). DOI 10.52575/2687-0959-2021-53-1-13-30.

1. Введение. Интерес к восстановлению функции с помощью ее интеграла по сфере, стимулируемый целым рядом новых задач и методов восстановления изображения, чрезвычайно вырос за последние шесть десятилетий. Восстановление функции по известному подмножеству ее сферических средних – есть широко распространенная задача как в чистой, так и в прикладной математике. Связь этой задачи с получением фотоакустического изображения заключается в следующем. Пусть скорость распространения звука в среде будет постоянной величиной. Тогда давление в определенный момент времени выражается через среднее сферическое давление и его производную по времени в некоторый предыдущий момент времени [21]. Следовательно, этот метод визуализации требует обращения сферических средних.

Задача восстановления функции f с носителем в шаре $B \in \mathbb{R}^n$, если сферические средние f известны по всем геодезическим сферам с центром на границе ∂B , была решена без использования гиперболических потенциалов [16, 17, 21, 26, 27, 29, 30, 31]. Примечательно, что формулы восстановления в [16, 17, 21, 26, 27, 29, 30, 31] различны для четной и нечетной размерностей евклидова пространства n . В статье [18] получены формулы обращения сферического среднего для любой четности n и любого пространства постоянной кривизны без применения гиперболических потенциалов Рисса.

Сферическое среднее M_t , $t > 0$, действующее на интегрируемую по сфере в пространстве \mathbb{R}^n радиуса t с центром в точке $x \in \mathbb{R}^n$ функцию $f(x)$, сплетает оператор Лапласа и одномерный оператор Бесселя с индексом $(n - 1)$:

$$(M_t(\Delta)_x f)(x) = \left(\frac{d^2}{dt^2} + \frac{n-1}{t} \frac{d}{dt} \right) (M_t f)(x), \quad (\Delta)_x = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}. \quad (1)$$

В формуле (1) на функцию f налагается дополнительное условие: она должна быть дважды непрерывно дифференцируемой.

Большой интерес у различных исследователей вызывает обобщение сферического среднего M_t . В статье [36] рассматривалось сферическое среднее в пространстве с отрицательной кривизной, в [22] и [20] изучалось обобщение сферического среднего, порожденное оператором преобразования Дункла. В этой статье мы рассматриваем весовое сферическое среднее (см. (33)), которое является оператором преобразования, сплетающим многомерный оператор

$$(\Delta_\gamma)_x = \sum_{i=1}^n (B_{\gamma_i})_{x_i}, \quad (B_{\gamma_i})_{x_i} = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{\gamma_i}{x_i} \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \gamma_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (2)$$

и одномерный оператор Бесселя с индексом $n + |\gamma| - 1$ вида

$$(B_{n+|\gamma|-1})_t = \frac{d^2}{dt^2} + \frac{n+|\gamma|-1}{t} \frac{d}{dt}, \quad t > 0, \quad |\gamma| = \gamma_1 + \dots + \gamma_n. \quad (3)$$

Такое сферическое среднее тесно связано с B -ультрагиперболическим уравнением вида (см. [9, 10, 33])

$$\sum_{j=1}^n (B_{\gamma_j})_{x_j} u = \sum_{j=1}^n (B_{\gamma_j})_{y_j} u, \quad u = u(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n). \quad (4)$$

Задача восстановления функции по ее сферическому среднему или обобщенному сферическому среднему является обратной задачей. Отметим здесь, что обратными задачами, в том числе и с оператором Бесселя, занимается В. В. Кравченко (см. [24, 54, 23, 70]).

Статья содержит формулы обращения для классического сферического среднего M_t (см. (1)) и весового сферического среднего M_t^γ (см. (33)), основанные на свойствах гиперболического потенциала Рисса (см. (11)) и смешанного гиперболического B -потенциала Рисса (см. (15)), а также, как частный случай, формулу обращения обобщенного сдвига (см. (44)).

2. Основные определения. В этом разделе мы приведем основные обозначения, термины и результаты, которые будут использоваться в статье.

Пусть \mathbb{R}^{n+1} – $n + 1$ -мерное евклидово пространство,

$$\mathbb{R}_+^{n+1} = \{(t, x) = (t, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}, \quad x_1 > 0, \dots, x_n > 0\},$$

$\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ – мультииндекс, состоящий из фиксированных действительных чисел $\gamma_i \geq 0$, $i = 1, \dots, n$, и $|\gamma| = \gamma_1 + \dots + \gamma_n$. Пусть Ω – конечное или бесконечное открытое множество в \mathbb{R}^{n+1} , симметрично относительно каждой гиперплоскости $x_i = 0$, $i = 1, \dots, n$, $\Omega_+ = \Omega \cap \mathbb{R}_+^{n+1}$ и $\bar{\Omega}_+ = \Omega \cap \bar{\mathbb{R}}_+^{n+1}$, где

$$\bar{\mathbb{R}}_+^{n+1} = \{(t, x) = (t, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}, \quad x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0\}.$$

Мы будем иметь дело с классом $C^m(\Omega_+)$, состоящим из m раз дифференцируемых на Ω_+ функций. Обозначим через $C^m(\bar{\Omega}_+)$ подмножество функций из $C^m(\Omega_+)$ таких, что все существующие производные этих функций по x_i для любого $i = 1, \dots, n$ непрерывны до $x_i = 0$, а все существующие производные по t непрерывны для $t \in \mathbb{R}$.

Класс $C_{ev}^m(\bar{\Omega}_+)$ состоит из всех функций из $C^m(\bar{\Omega}_+)$, таких что $\left. \frac{\partial^{2k+1} f}{\partial x_i^{2k+1}} \right|_{x=0} = 0$ для всех неотрицательных целых чисел $k \leq \frac{m-1}{2}$ и для $i = 1, \dots, n$ (см. [2] и [5], стр. 21). В дальнейшем мы будем обозначать $C_{ev}^m(\bar{\mathbb{R}}_+^{n+1})$ через C_{ev}^m .

Положим

$$C_{ev}^\infty(\bar{\Omega}_+) = \bigcap C_{ev}^m(\bar{\Omega}_+),$$

с пересечением, взятым по всем конечным m . Пусть $C_{ev}^\infty(\bar{\mathbb{R}}_+^{n+1}) = C_{ev}^\infty$. Пусть $\mathring{C}_{ev}^\infty(\bar{\Omega}_+)$ пространство функций $f \in C_{ev}^\infty(\bar{\Omega}_+)$ с компактным носителем. Мы будем использовать обозначения $\mathring{C}_{ev}^\infty(\bar{\Omega}_+) = \mathcal{D}_+(\bar{\Omega}_+)$.

Пусть $\mathcal{L}_p^Y(\Omega_+)$, $1 \leq p < \infty$ – пространство всех измеримых в Ω_+ функций таких, что

$$\int_{\Omega_+} |f(t, x)|^p x^Y dt dx < \infty,$$

здесь и далее

$$x^Y = \prod_{i=1}^n x_i^{Y_i}.$$

Для вещественного $p \geq 1$ определим $\mathcal{L}_p^Y(\Omega_+)$ – норму функции f формулой

$$\|f\|_{\mathcal{L}_p^Y(\Omega_+)} = \left(\int_{\Omega_+} |f(t, x)|^p x^Y dt dx \right)^{1/p}.$$

Пусть $\mathcal{L}_p^Y = \mathcal{L}_p^Y(\mathbb{R}_{n+1}^+)$.

Мы будем использовать обобщенную свертку, определяемую формулой

$$(f * g)_Y(x, t) = \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} f(\tau, y) ({}^Y T_x^Y g)(t - \tau, x) y^Y d\tau dy, \tag{5}$$

где ${}^Y T_x^Y$ – многомерный обобщенный сдвиг

$$({}^Y T_x^Y f)(t, x) = ({}^{Y_1} T_{x_1}^{Y_1} \dots {}^{Y_n} T_{x_n}^{Y_n} f)(t, x). \tag{6}$$

Каждый из одномерных обобщенных сдвигов ${}^{Y_i} T_{x_i}^{Y_i}$ определяется для $i=1, \dots, n$ следующей формулой (см. [8], стр. 122, формула (5.19))

$$({}^{Y_i} T_{x_i}^{Y_i} f)(t, x) = \frac{\Gamma\left(\frac{Y_i+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{Y_i}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^\pi \sin^{Y_i-1} \varphi_i \times \\ \times f(t, x_1, \dots, x_{i-1}, \sqrt{x_i^2 + y_i^2 - 2x_i y_i \cos \varphi_i}, x_{i+1}, \dots, x_n) d\varphi_i,$$

$Y_i > 0$, $i = 1, \dots, n$ и при $Y_i = 0$ обобщенный сдвиг ${}^{Y_i} T_{x_i}^{Y_i}$ имеет вид (см. [35])

$${}^0 T_{x_i}^{Y_i} = \frac{f(x+y) + f(x-y)}{2}.$$

Мы будем использовать подпространство быстро убывающих функций:

$$S_{ev}(\mathbb{R}_+^{n+1}) = S_{ev} = \left\{ f \in C_{ev}^\infty : \sup_{(t,x) \in \mathbb{R}_+^{n+1}} |t^{\alpha_0} x^\alpha D^\beta f(t, x)| < \infty \right\},$$

где $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\beta = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n)$, $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n$ – произвольные целые неотрицательные числа, $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$, $D^\beta = D_t^{\beta_0} D_{x_1}^{\beta_1} \dots D_{x_n}^{\beta_n}$, $D_t = \frac{\partial}{\partial t}$, $D_{x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}$, $j = 1, \dots, n$.

Нормированная функция Бесселя j_ν , имеет вид (см. [5], стр. 10, [8])

$$j_\nu(x) = \frac{2^\nu \Gamma(\nu+1)}{x^\nu} J_\nu(x), \quad \nu \geq -\frac{1}{2}, \tag{7}$$

где J_ν – функция Бесселя первого рода. Для этой функции справедливо соотношение $j_\nu(0) = 1$.

Многомерное преобразование Фурье – Бесселя функции $f \in \mathcal{L}_1^Y(\mathbb{R}_+^{n+1})$ определяется формулой

$$\mathcal{F}_Y[f](\tau, \xi) = \widehat{f}(\tau, \xi) = \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} f(t, x) e^{-it\tau} j_Y(x; \xi) x^Y dt dx,$$

где

$$j_Y(x; \xi) = \prod_{i=1}^n j_{\frac{Y_i-1}{2}}(x_i \xi_i), \quad Y_1 \geq 0, \dots, Y_n \geq 0. \tag{8}$$

Пусть $\nu > 0$. Одномерный оператор Пуассона определяется для интегрируемой функции g равенством

$$\mathcal{P}_r^\nu g(r) = \frac{2C(\nu)}{r^{\nu-1}} \int_0^r (r^2 - t^2)^{\frac{\nu}{2}-1} g(t) dt, \quad C(\nu) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}, \tag{9}$$

или

$$\mathcal{P}_r^\nu g(r) = 2C(\nu) \int_0^1 (1-t^2)^{\frac{\nu}{2}-1} g(rt) dt. \quad (10)$$

Константа $C(\nu)$ выбрана так, чтобы $\mathcal{P}_x^\nu[1] = 1$. При $\nu = 0$ одномерный оператор Пуассона вместо оператора Пуассона будет использоваться тождественный оператор: $\mathcal{P}_x^0 = I$ (см. [35]).

3. Гиперболический потенциал Рисса и смешанный гиперболический B -потенциал Рисса. Приведенная в этом разделе информация будет использована в 4-м разделе, где представлены основные результаты.

Пусть $n \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{R}$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$. Гиперболический потенциал Рисса вида

$$(I_\square^\alpha f)(t, x) = \frac{1}{H_n(\alpha)} \int_{\tau^2 \geq |y|^2, \tau \geq 0} (\tau^2 - |y|^2)^{\frac{\alpha-n-1}{2}} f(t-\tau, x-y) d\tau dy, \quad (11)$$

где $n-1 < \alpha < n+1$,

$$H_n(\alpha) = 2^{\alpha-1} \pi^{\frac{n-1}{2}} \Gamma\left(\frac{\alpha-n+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

изучался в [11, 12].

Интеграл (11) сходится абсолютно при $n-1 < \alpha$ для интегрируемых по части конуса $t^2 \geq |y|^2$, $t \geq 0$, $y \in \mathbb{R}$, $0 < \tau$ функций $f(\tau, y)$ (см. [11, 12]). Для $0 \leq \alpha \leq n-1$ гиперболический потенциал Рисса определим формулой

$$(I_\square^\alpha f)(t, x) = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} \right)^w (I_\square^{\alpha+2w} f)(t, x),$$

где $w = \left[\frac{n-\alpha+1}{2} \right]$.

Потенциал $I_\square^{2\alpha}$ реализует отрицательные степени волнового оператора $\square_{t,x} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} \right)^\alpha = I_\square^{2\alpha}.$$

В частности, для подходящей функции $f(t, x)$ справедливо равенство при $\alpha = 2m$, $m \in \mathbb{N}$ (см.)

$$\square_{t,x}^m (I_\square^{2m} f)(t, x) = f(t, x). \quad (12)$$

В случае, когда $f(t, x) = h(t)F(x)$, получим

$$\begin{aligned} (I_\square^\alpha f)(t, x) &= \frac{1}{H_n(\alpha)} \int_0^\infty h(t-\tau) d\tau \int_{\tau^2 \geq |y|^2} (\tau^2 - |y|^2)^{\frac{\alpha-n-1}{2}} F(x-y) dy = \{y = \tau\xi\} = \\ &= \frac{1}{H_n(\alpha)} \int_0^\infty \tau^{\alpha-1} h(t-\tau) d\tau \int_{|\xi|^2 \leq 1} (1 - |\xi|^2)^{\frac{\alpha-n-1}{2}} F(x-\tau\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (13)$$

Справедлива теорема 3.1 об ограниченности I_\square^α из L_p в L_r (см. [12], теорема 2.1) и теорема 3.2 об обратном к I_\square^α операторе (см. [12], теорема 2.4).

Теорема 3.1. Пусть $n-1 < \alpha < n+1$, $1 < p < \frac{n+1}{\alpha}$, $r = \frac{(n+1)p}{n+1-\alpha p}$. Тогда справедлива оценка

$$\|I_\square^\alpha f\|_r \leq c_{n,p} \|f\|_p, \quad f \in S.$$

Константа $c_{n,p}$ не зависит от f . Здесь S – пространство Шварца.

Теорема 3.2. Пусть $n-1 < \alpha < n+1$, $1 < p < \frac{n}{\alpha}$ с дополнительным ограничением $p < \frac{2n(n+1)}{n+1+2\alpha n}$ при $n-1 < \alpha < n$ и четном n . Тогда

$$((I_\square^\alpha)^{-1} I_\square^\alpha f)(t, x) = f(t, x), \quad f \in L_p, \quad (14)$$

где

$$(I_\square^\alpha)^{-1} f(t, x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^{n+1}} g_{\alpha,\varepsilon}(\tau, y) f(t-\tau, x-y) d\tau dy,$$

$$g_{\alpha,\varepsilon}(t, x) = \frac{1}{(2\pi)^{n+1}} \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \frac{1}{q} |\tau^2 - |y|^2|^{\frac{\alpha}{2}} e^{-\varepsilon(|\tau|+|y|)-it\tau-i\langle x,y \rangle} d\tau dy,$$

$$q = \begin{cases} e^{\frac{\alpha\pi i}{2} \operatorname{sgn} \tau} & \text{при } \tau^2 > |y|^2; \\ 1 & \text{при } \tau^2 \leq |y|^2. \end{cases}$$

Известно [12], что функция $g_{\alpha,\varepsilon}(t, x)$ представима в виде

$$g_{\alpha,\varepsilon}(t, x) = \frac{\Gamma(n+1+\alpha)}{2^n \pi^{\frac{n}{2}+1} \Gamma(\frac{n}{2})} \int_0^\infty \rho^{n-1} |1 - \rho^2|^{\frac{\alpha}{2}} \times$$

$$\times \left[\frac{e^{-\frac{\alpha\pi i}{2} \theta(1-\rho)}}{(\varepsilon + \varepsilon\rho + it)^{n+1+\alpha}} {}_2F_1\left(\frac{n+1+\alpha}{2}, \frac{n+2+\alpha}{2}; \frac{n}{2}; -\frac{\rho^2|x|^2}{(\varepsilon + \varepsilon\rho + it)^2}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{e^{\frac{\alpha\pi i}{2} \theta(1-\rho)}}{(\varepsilon + \varepsilon\rho - it)^{n+1+\alpha}} {}_2F_1\left(\frac{n+1+\alpha}{2}, \frac{n+2+\alpha}{2}; \frac{n}{2}; -\frac{\rho^2|x|^2}{(\varepsilon + \varepsilon\rho - it)^2}\right) \right] d\rho,$$

где $\theta(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0; \\ 0 & x < 0 \end{cases}$ – функция Хевисайда.

Функция $g_{\alpha,\varepsilon}(t, x)$ принадлежит пространству L_r , $1 < r < \infty$, с дополнительным ограничением $\frac{2n}{2n-1} < r$ при $n-1 < \alpha < n$ и нечетном n .

Рассмотрим теперь смешанный гиперболический B -потенциал Рисса.

$$(I_{\square,\gamma}^\alpha f)(t, x) = \frac{1}{N(\alpha, \gamma, n)} \int_{\tau^2 \geq |y|^2, \tau \geq 0, y \in \mathbb{R}^n} (\tau^2 - |y|^2)^{\frac{\alpha-n-|\gamma|-1}{2}} ({}^y T_x^\gamma) f(t - \tau, x) y^\gamma d\tau dy, \tag{15}$$

где $n + |\gamma| - 1 < \alpha < n + |\gamma| + 1$,

$$N(\alpha, \gamma, n) = \frac{2^{\alpha-n-1}}{\sqrt{\pi}} \prod_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_i + 1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\alpha - n - |\gamma| + 1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right). \tag{16}$$

Такой потенциал изучался в [32, 34, 35].

Интеграл (15) сходится абсолютно при $n+|\gamma|-1 < \alpha$ для интегрируемых по части конуса $t^2 \geq |y|^2$, $t \geq 0$, $y \in \mathbb{R}^n$, $0 < \tau$ с весом y^γ функций $f(\tau, y)$.

Для $0 \leq \alpha \leq n + |\gamma| - 1$ имеем

$$(I_{\square,\gamma}^\alpha f)(t, x) = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \sum_{i=1}^n (B_{\gamma_i})_{x_i} \right)^w (I_{\square,\gamma}^{\alpha+2w} f)(t, x),$$

где $w = \left\lceil \frac{n+|\gamma|-\alpha+1}{2} \right\rceil$.

Потенциал $I_{\square,\gamma}^{2\alpha}$ реализует отрицательные степени сингулярного волнового оператора $\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \sum_{i=1}^n (B_{\gamma_i})_{x_i}$:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \sum_{i=1}^n (B_{\gamma_i})_{x_i} \right)^\alpha = I_{\square,\gamma}^{2\alpha}.$$

В частности, для подходящей функции $f(t, x)$ справедливо равенство при $\alpha = 2m < n + 1$, $m \in \mathbb{N}$ (см. [34, 35])

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \sum_{i=1}^n (B_{\gamma_i})_{x_i} \right)^m (I_{\square,\gamma}^{2m} f)(t, x) = f(t, x). \tag{17}$$

Справедлива теорема 3.3 об ограниченности $I_{\square,\gamma}^\alpha$ из L_p в L_r (см. [32], теорема 1) и теорема 3.4 об обратном к $I_{\square,\gamma}^\alpha$ операторе (см. [32], теорема 7).

Теорема 3.3. Пусть $n + |\gamma| - 1 < \alpha < n + |\gamma| + 1$, $1 \leq p < \frac{n+|\gamma|+1}{\alpha}$. Для выполнения оценки

$$\|I_{\square,\gamma}^\alpha f\|_{q,\gamma} \leq M_{n,\gamma,p} \|f\|_{p,\gamma}, \quad f \in S_{ev} \tag{18}$$

необходимо и достаточно, чтобы $q = \frac{(n+|\gamma|+1)p}{n+|\gamma|+1-\alpha p}$. Константа $M_{n,\gamma,p}$ не зависит от f .

Замечание 1. В силу (18) существует единственное продолжение $I_{\square, \gamma}^\alpha$ на все \mathcal{L}_p^γ , $1 < p < \frac{n+|\gamma|+1}{\alpha}$ с сохранением ограниченности при $n + |\gamma| - 1 < \alpha < n + |\gamma|$. Отсюда следует, что это продолжение вводится интегралом (15) в случае, когда он сходится абсолютно.

Теорема 3.4. Пусть $n + |\gamma| - 1 < \alpha < n + 1 + |\gamma|$, $1 < p < \frac{n+1+|\gamma|}{\alpha}$ с дополнительным ограничением

$$p < \frac{2(n+1+|\gamma|)(n+|\gamma|)}{n+1+|\gamma|+2\alpha(n+|\gamma|)}$$

при $n + |\gamma| - 1 < \alpha < n + |\gamma|$ и при $n + 1 + |\gamma|$ – нечетное число. Тогда

$$((I_{\square, \gamma}^\alpha)^{-1} I_{\square, \gamma}^\alpha f)(t, x) = f(t, x), \quad f(t, x) \in L_p^\gamma,$$

где

$$\begin{aligned} (I_{\square, \gamma}^\alpha)^{-1} f &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (I_{\square, \gamma}^\alpha)_\varepsilon^{-1} f, \\ (I_{\square, \gamma}^\alpha)_\varepsilon^{-1} f &= \left(\mathcal{F}_\gamma^{-1} (q |\tau^2 - |\xi|^2|^{\frac{\alpha}{2}} e^{-\varepsilon|\tau| - \varepsilon|\xi|}) * f \right)_\gamma, \\ g_{\alpha, \gamma, \varepsilon}(t, x) &= \mathcal{F}_\gamma^{-1} (q^{-1} |\tau^2 - |\xi|^2|^{\frac{\alpha}{2}} e^{-\varepsilon|\tau| - \varepsilon|\xi|})(t, x), \\ q &= \begin{cases} 1, & |\xi|^2 \geq \tau^2; \\ e^{-\frac{\alpha \pi}{2} i}, & |\xi|^2 < \tau^2, \tau \geq 0; \\ e^{\frac{\alpha \pi}{2} i}, & |\xi|^2 < \tau^2, \tau < 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (19)$$

В случае, когда $f(t, x) = h(t)F(x)$, получим

$$\begin{aligned} (I_{\square, \gamma}^\alpha hF)(t, x) &= \\ &= \frac{1}{N(\alpha, \gamma, n)} \int_0^\infty h(t - \tau) d\tau \int_{\tau \geq |y|, y \in \mathbb{R}_+^n} (\tau^2 - |y|^2)^{\frac{\alpha - n - |\gamma| - 1}{2}} ({}^\gamma \mathbf{T}_x^\gamma) F(x) y^\gamma dy. \end{aligned} \quad (20)$$

4. Сферическое среднее. Классическое сферическое среднее имеет вид (см. [3], стр. 72, формула 4.1)

$$(M_t f)(x) = \frac{1}{|S_n(1)|} \int_{S_n(1)} f(x + \beta t) dS, \quad x = (x_1, \dots, x_n), \quad |S_n(1)| = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}, \quad (21)$$

где $n \geq 2$. При $n \geq 3$ здесь $S_n(1)$ – единичная сфера с центром в начале координат, β – координата сферы $S_n(1)$. При $n = 2$ здесь $S_2(1)$ – единичная окружность с центром в начале координат, β – координата окружности $S_2(1)$. При $n = 1$ положим

$$(M_t f)(x) = \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2}. \quad (22)$$

По определению функция M_t является четной функцией t .

Пусть $t \geq 0$, $\Delta_x = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$. Известно [3], что сферическое среднее (21) является единственным решением задачи Коши

$$\begin{aligned} \Delta_x u(t, x) &= (B_{n-1})_t u(t, x), \\ u(0, x) &= f(x), \quad u_t(0, x) = 0. \end{aligned}$$

В силу четности по t функции M_t запишем (21) в виде

$$u(t, x) = (M_t f)(x) = \frac{1}{|S_n(1)|} \int_{S_n(1)} f(x - \beta t) dS. \quad (23)$$

Замечание 2. Заметим, что (см. [24], стр. 124, Теорема 4.1) дважды непрерывно дифференцируемое при $t > 0$ решение $u = u(t, x)$ уравнения

$$\Delta_x u(t, x) = (B_k)_t u(t, x), \quad x = (x_1, \dots, x_n), \quad t > 0,$$

связано с дважды непрерывно дифференцируемым решением уравнения

$$\Delta_x w(t, x) = w_{tt}(t, x), \quad x = (x_1, \dots, x_n), \quad t \in \mathbb{R},$$

формулой

$$u(t, x) = \mathcal{P}_t^k w(t, x),$$

где \mathcal{P}_t^k оператор Пуассона (9), действующий по переменной t . Тогда сферическое среднее связано с решением задачи Коши для волнового уравнения с условиями $w(0, x) = f(x)$, $w_t(0, x) = 0$ равенством

$$(M_t f)(x) = \mathcal{P}_t^k w(t, x), \tag{24}$$

Пример 1. Пусть $f(x) = e^{i\langle a, x \rangle}$, $a = (a_1, \dots, a_n)$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, $\langle a, x \rangle = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$. Для его сферического среднего имеем

$$M_t e^{i\langle a, x \rangle} = \frac{e^{i\langle a, x \rangle}}{|S_n(1)|} \int_{S_n(1)} e^{it\langle a, \beta \rangle} dS.$$

Используя формулу для интеграла, взятого по единичной сфере, от функции типа плоской волны (см. формулу 1.2 из [3]) вида

$$\int_{S_n(1)} g(\langle x, y \rangle) dS = |S_{n-1}(1)| \int_{-1}^1 (1-p^2)^{\frac{n-3}{2}} g(|y|p) dp,$$

получим

$$M_t e^{i\langle a, x \rangle} = \frac{|S_{n-1}(1)|}{|S_n(1)|} e^{i\langle a, x \rangle} \int_{-1}^1 (1-p^2)^{\frac{n-3}{2}} e^{it|a|p} dp.$$

Применяя формулу 2.3.5.3 из [13] вида

$$\int_{-a}^a (a^2 - x^2)^{\beta-1} e^{i\lambda x} dx = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(\beta) (2a)^{\beta-\frac{1}{2}}}{\lambda^{\beta-\frac{1}{2}}} J_{\beta-\frac{1}{2}}(a\lambda), \quad \text{Re } \beta > 0,$$

будем иметь

$$\begin{aligned} M_t e^{i\langle a, x \rangle} &= \frac{|S_{n-1}(1)|}{|S_n(1)|} e^{i\langle a, x \rangle} \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{n-1}{2}) 2^{\frac{n}{2}-1}}{(|a|t)^{\frac{n}{2}-1}} J_{\frac{n}{2}-1}(|a|t) = \\ &= \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{n-1}{2})} \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{n-1}{2}) 2^{\frac{n}{2}-1}}{(|a|t)^{\frac{n}{2}-1}} J_{\frac{n}{2}-1}(|a|t) e^{i\langle a, x \rangle} = \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \left(\frac{2}{|a|t}\right)^{\frac{n}{2}-1} J_{\frac{n}{2}-1}(|a|t) e^{i\langle a, x \rangle}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$M_t e^{i\langle a, x \rangle} = \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \left(\frac{2}{|a|t}\right)^{\frac{n}{2}-1} J_{\frac{n}{2}-1}(|a|t) e^{i\langle a, x \rangle}. \tag{25}$$

5. Обращение сферического среднего. В этом пункте восстановим функцию f , по ее сферическому среднему $M_\rho f$.

Единственным решением задачи Коши

$$\Delta_x u(t, x) = B_k u(t, x), \quad n-1 < k \in \mathbb{R},$$

$$u(0, x) = f(x), \quad u_t(0, x) = 0.$$

будет

$$u(t, x) = \frac{|S_{k-n+1}(1)|}{|S_{k+1}(1)|} \int_{|\xi|^2 \leq 1} (1-|\xi|^2)^{\frac{k-n-1}{2}} f(x-\xi t) d\xi, \quad |S_n(1)| = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}, \quad \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n). \tag{26}$$

Функция $u(t, x)$ – четная по t . Преобразуем интеграл в выражении (26), используя сферическое среднее (21) и оператор Пуассона (10):

$$\begin{aligned} &\int_{|\xi|^2 \leq 1} (1-|\xi|^2)^{\frac{k-n-1}{2}} f(x-\xi t) d\xi = \{\xi = r\sigma\} = \\ &= \int_0^1 (1-r^2)^{\frac{k-n-1}{2}} r^{n-1} dr \int_{S_n(1)} f(x-rt\sigma) dS = |S_n(1)| \int_0^1 (1-r^2)^{\frac{k-n-1}{2}} r^{n-1} (M_{rt} f)(x) dr = \end{aligned}$$

$$= \frac{|S_n(1)|t^{1-n}}{2C(k-n+1)} \mathcal{P}_t^{k-n+1} [t^{n-1}(M_t f)(x)].$$

Получим

$$\int_{|\xi|^2 \leq 1} (1 - |\xi|^2)^{\frac{k-n-1}{2}} f(x - \xi t) d\xi = \frac{|S_n(1)|t^{1-n}}{2C(k-n+1)} \mathcal{P}_t^{k-n+1} [t^{n-1}(M_t f)(x)].$$

В полученном равенстве заменим t на τ , домножим обе части на $\frac{1}{H_n(k)} \tau^{k-1} e^{t-\tau}$ и проинтегрируем от 0 до ∞ по τ , тогда с учетом (13), получим

$$\begin{aligned} I_{\square}^k e^t f(x) &= \frac{1}{H_n(k)} \int_0^{\infty} e^{t-\tau} \tau^{k-1} d\tau \int_{|\xi|^2 \leq 1} (1 - |\xi|^2)^{\frac{k-n-1}{2}} f(x - \tau \xi) d\xi = \\ &= \frac{|S_n(1)|e^t}{2H_n(k)C(k-n+1)} \int_0^{\infty} e^{-\tau} \tau^{k-n} \mathcal{P}_{\tau}^{k-n+1} [\tau^{n-1}(M_{\tau} f)(x)] d\tau. \end{aligned}$$

Применяя формулу (14), найдем общую формулу восстановления функции по ее сферическому среднему:

$$f(x) = e^{-t} A(n, k) (I_{\square}^k)^{-1} e^t \int_0^{\infty} e^{-\tau} \tau^{k-n} \mathcal{P}_{\tau}^{k-n+1} [\tau^{n-1}(M_{\tau} f)(x)] d\tau, \quad (27)$$

где $k \in (n-1, n+1)$, $k \in \mathbb{R}$,

$$A(n, k) = \frac{\pi 2^{1-k}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \Gamma\left(\frac{k-n}{2} + 1\right)}.$$

Формула (27) содержит вещественный параметр k , который выбирается произвольно из интервала $(n-1, n+1)$.

Выбрав в (27) число $k = 2m > n-1$, $m \in \mathbb{N}$, применяя формулу (12), получим более простую формулу для обращения сферического среднего вида:

$$f(x) = e^{-t} A(n, 2m) \square_{t,x}^m e^t \int_0^{\infty} e^{-\tau} \tau^{2m-n} \mathcal{P}_{\tau}^{2m-n+1} [\tau^{n-1}(M_{\tau} f)(x)] d\tau, \quad m \in \mathbb{N}, \quad 2m > n-1 \quad (28)$$

или, поскольку

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta_x\right)^m e^t F(x) = e^t (I - \Delta_x)^m F(x), \quad \Delta_x = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_k^2},$$

где I – тождественный оператор, то

$$f(x) = A(n, 2m) (I - \Delta)^m \int_0^{\infty} e^{-\tau} \tau^{2m-n} \mathcal{P}_{\tau}^{2m-n+1} [\tau^{n-1}(M_{\tau} f)(x)] d\tau, \quad m \in \mathbb{N}, \quad 2m > n-1. \quad (29)$$

Замечание 3. Наиболее простая формула (29) получается при четной размерности пространства $n = 2m$, $m \in \mathbb{N}$. В этом случае выбираем $k = n = 2m$, $m \in \mathbb{N}$, получим

$$f(x) = A(2m, 2m) (I - \Delta_x)^m \int_0^{\infty} e^{-\tau} \mathcal{P}_{\tau}^1 [\tau^{2m-1}(M_{\tau} f)(x)] d\tau, \quad (30)$$

где

$$A(2m, 2m) = \frac{\pi 2^{1-2m}}{\Gamma^2(m)}.$$

В случае, когда размерность пространства нечетная, $n = 2m-1$, $m \in \mathbb{N}$ в (27) в качестве k также можно выбрать $k = 2m$, $m \in \mathbb{N}$. Тогда формула (29) приобретает вид

$$f(x) = A(2m-1, 2m) (I - \Delta)^m \int_0^{\infty} e^{-\tau} \tau \mathcal{P}_{\tau}^2 [\tau^{2m-2}(M_{\tau} f)(x)] d\tau, \quad m \in \mathbb{N}, \quad 2m > n-1, \quad (31)$$

где

$$A(2m-1, 2m) = \frac{1}{\Gamma(2m-1)}.$$

Замечание 4. Отметим, что поскольку сферическое среднее связано с решением волнового уравнения формулой (24), то наличие разных формул (30) и (31) восстановления функции по ее сферическому среднему для четной и нечетной размерности пространства отвечает такому хорошо известному свойству фундаментального решения $\Phi(t, x)$ задачи Коши

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta_x\right)\Phi(t, x) = 0,$$

$$\Phi(0, x) = 0, \quad \Phi_t(0, x) = \delta(x),$$

как принцип Гюйгенса. А именно, (см. [1]), возмущение $\Phi(t, x)$ от точечного, мгновенно действующего источника в пространстве нечетной размерности к моменту времени $t > 0$ будет сосредоточено на сфере радиуса t с центром в точке $x = 0$, то есть такое возмущение распространяется в виде сферической волны $|x| = t$, причем после прохождения этой волны через любую точку пространства в ней опять наступает покой. При четной размерности пространства носителем фундаментального решения $\Phi(t, x)$ является вся внутренность светового конуса, так что соответствующее волновое возмущение при $t > 0$ будет сосредоточено внутри замкнутого шара радиуса t с центром $x = 0$.

Пример 2. Рассмотрим случай $n = 1$:

$$(M_t f)(x) = \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2}.$$

Пусть $k = 2$, тогда $m = 1$ и

$$\mathcal{P}_\tau^2[(M_\tau f)(x)] = \frac{2C(2)}{\tau} \int_0^\tau (M_r f)(x) dr = \frac{1}{2\tau} \int_0^\tau (f(x+r) + f(x-r)) dr,$$

$$C(2) = \frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{2}.$$

По формуле (28) получим

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{-t} A(1, 2) \square_{t,x} e^t \int_0^\infty e^{-\tau} \tau \mathcal{P}_\tau^2[(M_\tau f)(x)] d\tau = \\ &= \frac{e^{-t}}{2} \square_{t,x} e^t \int_0^\infty e^{-\tau} d\tau \int_0^\tau (f(x+r) + f(x-r)) dr = \\ &= \frac{e^{-t}}{2} \square_{t,x} e^t \int_0^\infty (f(x+r) + f(x-r)) dr \int_r^\infty e^{-\tau} d\tau = \frac{e^{-t}}{2} \square_{t,x} e^t \int_0^\infty e^{-r} (f(x+r) + f(x-r)) dr = \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_0^\infty e^{-r} (f(x+r) + f(x-r)) dr - \frac{d^2}{dx^2} \int_0^\infty e^{-r} (f(x+r) + f(x-r)) dr \right). \end{aligned}$$

Окончательно будем иметь

$$f(x) = \left(\int_0^\infty e^{-r} (M_r f)(x) dr - \frac{d^2}{dx^2} \int_0^\infty e^{-r} (M_r f)(x) dr \right).$$

Например, если $f(x) = x^2$, то

$$M_t x^2 = \frac{(x+t)^2 + (x-t)^2}{2} = x^2 + t^2.$$

Тогда

$$\int_0^\infty e^{-r} (M_r f)(x) dr = \int_0^\infty e^{-r} (x^2 + r^2) dr = x^2 \int_0^\infty e^{-r} dr + \int_0^\infty e^{-r} r^2 dr = x^2 + 2$$

и

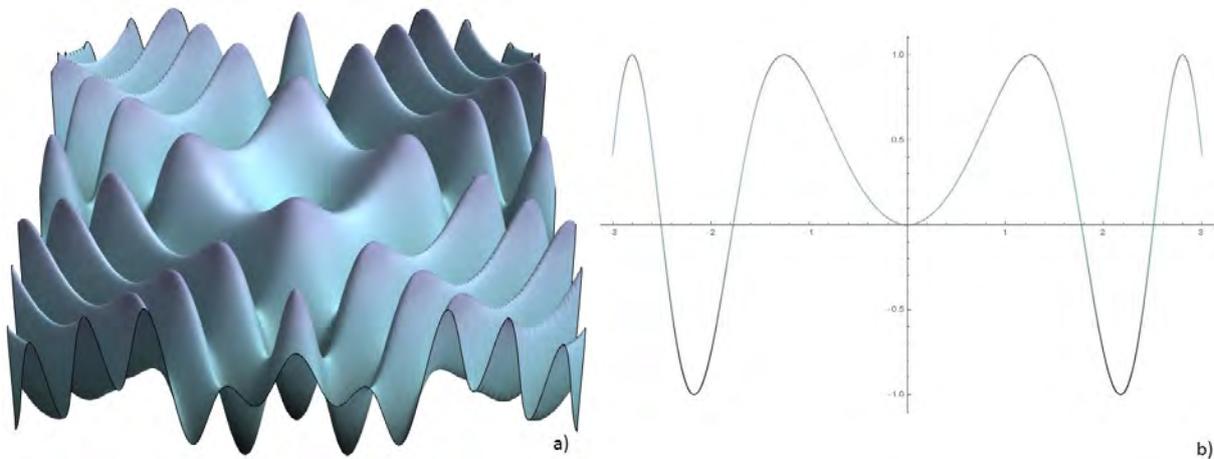
$$\left(\int_0^{\infty} e^{-r} (M_r f)(x) dr - \frac{d^2}{dx^2} \int_0^{\infty} e^{-r} (M_r f)(x) dr \right) = x^2 + 2 - \frac{d^2}{dx^2} (x^2 + 2) = x^2.$$

Рассмотрим случай

$$M_t \sin(x^2) = \frac{\sin(x+t)^2 + \sin(x-t)^2}{2},$$

(см. Рис. 1, а)). Тогда имеем равенство

$$\frac{1}{2} \left(\int_0^{\infty} e^{-r} (\sin(x+r)^2 + \sin(x-r)^2) dr - \frac{d^2}{dx^2} \int_0^{\infty} e^{-r} (\sin(x+r)^2 + \sin(x-r)^2) dr \right) = \sin x^2.$$

Таким образом, $f(x) = \sin x^2$ (см. Рис. 1, б)).Рис. 1. а) Сферическое среднее $M_t \sin(x^2) = \frac{\sin(x+t)^2 + \sin(x-t)^2}{2}$. б) Функция $f(x) = \sin x^2$ Fig. 1. а) Spherical mean $M_t \sin(x^2) = \frac{\sin(x+t)^2 + \sin(x-t)^2}{2}$. б) Function $f(x) = \sin x^2$ **Пример 3.** Рассмотрим сферическое среднее вида

$$M_t f(x) = \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \left(\frac{2}{|a|t}\right)^{\frac{n}{2}-1} J_{\frac{n}{2}-1}(|a|t) e^{i\langle a, x \rangle}.$$

Получим $f(x)$ по формуле (30). Сначала найдем $\mathcal{P}_\tau^{2m-n+1}[\tau^{n-1}(M_\tau f)(x)]$. Используя формулу 2.12.4.6 из [14]

$$\int_0^a (a^2 - x^2)^{\beta-1} x^{\nu+1} J_\nu(cx) dx = \frac{2^{\beta-1} a^{\beta+\nu}}{c^\beta} \Gamma(\beta) J_{\beta+\nu}(ac), \quad (32)$$

$$a > 0, \quad \operatorname{Re} \beta > 0, \quad \operatorname{Re} \nu > -1,$$

получим

$$\begin{aligned} & \mathcal{P}_\tau^{2m-n+1}[\tau^{n-1}(M_\tau f)(x)] = \\ & = 2C(2m-n+1) \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \left(\frac{2}{|a|}\right)^{\frac{n}{2}-1} \tau^{\frac{n}{2}} e^{i\langle a, x \rangle} \int_0^1 (1-t^2)^{\frac{2m-n+1}{2}-1} t^{\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}-1}(|a|\tau t) dt = \\ & = 2C(2m-n+1) \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \left(\frac{2}{|a|}\right)^{\frac{n}{2}-1} \tau^{\frac{n}{2}} \frac{2^{\frac{2m-n-1}{2}}}{(|a|\tau)^{\frac{2m-n+1}{2}}} \Gamma\left(\frac{2m-n+1}{2}\right) J_{m-\frac{1}{2}}(|a|\tau) e^{i\langle a, x \rangle} = \\ & = 2C(2m-n+1) \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \left(\frac{2}{|a|}\right)^{\frac{n}{2}-1} \tau^{\frac{n}{2}} \frac{2^{\frac{2m-n-1}{2}}}{(|a|\tau)^{\frac{2m-n+1}{2}}} \Gamma\left(\frac{2m-n+1}{2}\right) J_{m-\frac{1}{2}}(|a|\tau) e^{i\langle a, x \rangle} = \\ & = \frac{2^{m-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \Gamma\left(\frac{2m-n}{2} + 1\right)}{\sqrt{\pi} |a|^{m-\frac{1}{2}}} \tau^{n-m-\frac{1}{2}} J_{m-\frac{1}{2}}(|a|\tau) e^{i\langle a, x \rangle}. \end{aligned}$$

Теперь, применяя формулу 2.12.8.4 из [14] вида

$$\int_0^\infty x^\nu e^{-px} J_\nu(cx) dx = \frac{(2c)^\nu}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right) (p^2 + c^2)^{-\nu-\frac{1}{2}}, \quad \text{Re } \nu > -1/2,$$

будем иметь

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-\tau} \tau^{2m-n} \mathcal{P}_\tau^{2m-n+1} [\tau^{n-1} (M_\tau f)(x)] d\tau &= \frac{2^{m-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \Gamma\left(\frac{2m-n}{2} + 1\right)}{\sqrt{\pi} |a|^{m-\frac{1}{2}}} e^{i\langle a, x \rangle} \int_0^\infty e^{-\tau} \tau^{m-\frac{1}{2}} J_{m-\frac{1}{2}}(|a|\tau) d\tau = \\ &= \frac{2^{m-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \Gamma\left(\frac{2m-n}{2} + 1\right)}{\sqrt{\pi} |a|^{m-\frac{1}{2}}} e^{i\langle a, x \rangle} \frac{(2|a|)^{m-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(m) (1 + |a|^2)^{-m} = \\ &= \frac{2^{2m-1} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \Gamma\left(\frac{2m-n}{2} + 1\right) \Gamma(m)}{\pi (1 + |a|^2)^m} e^{i\langle a, x \rangle}. \end{aligned}$$

Поскольку

$$\square_{t,x}^m e^t e^{i\langle a, x \rangle} = (1 + |a|^2)^m e^t e^{i\langle a, x \rangle},$$

то по формуле (30) получим $f(x) = e^{i\langle a, x \rangle}$, что согласуется с примером 1. Для случая $n = 1, a = i$ построены соответствующие графики см. Рис 2.

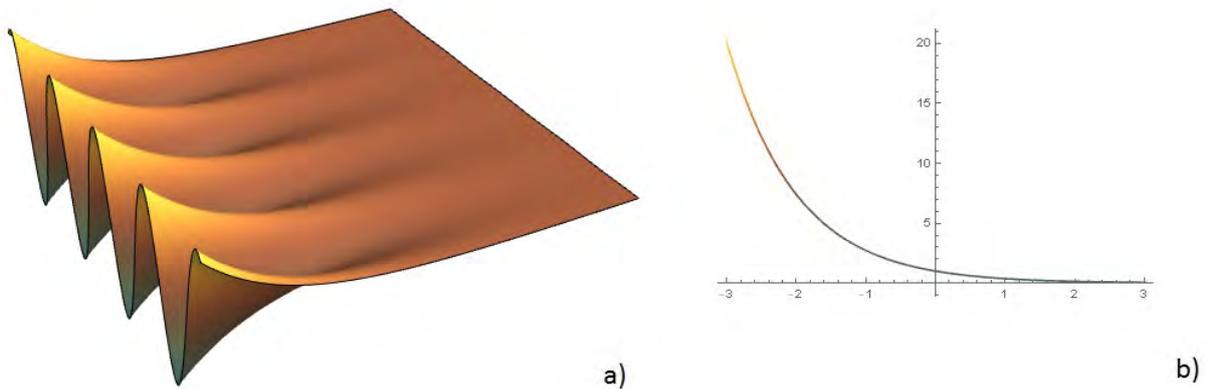


Рис. 2. а) Сферическое среднее $M_t e^{-x} = \sqrt{\frac{\pi t}{2}} J_{-\frac{1}{2}}(t) e^{-x} = \cos t e^{-x}$. б) Функция $f(x) = e^{-x}$
 Fig. 2.a) Spherical mean $M_t e^{-x} = \sqrt{\frac{\pi t}{2}} J_{-\frac{1}{2}}(t) e^{-x} = \cos t e^{-x}$. б) Function $f(x) = e^{-x}$

6. Весовое сферическое среднее. Определим весовое сферическое среднее. При построении весового сферического среднего вместо обычного сдвига используется многомерный обобщенный сдвиг (6).

Весовое сферическое среднее (см. [9, 10, 33, 35]) функции $f(x), x \in \overline{\mathbb{R}}_+^n$ при $n \geq 2$ задается формулой

$$(M_t^\gamma f)(x) = (M_t^\gamma)_x [f(x)] = \frac{1}{|S_1^+(n)|_\gamma} \int_{S_1^+(n)} \nu T_x^{t\theta} f(x) \theta^\gamma dS, \quad (33)$$

где $\theta^\gamma = \prod_{i=1}^n \theta_i^{\gamma_i}, S_1^+(n) = \{\theta: |\theta|=1, \theta \in \mathbb{R}_+^n\}$ – часть сферы в \mathbb{R}_+^n , а $|S_1^+(n)|_\gamma$ определяется формулой

$$|S_1^+(n)|_\gamma = \int_{S_1^+(n)} x^\gamma dS = \frac{\prod_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{2^{n-1} \Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)}. \quad (34)$$

При $n = 1$ положим $M_t^\gamma [f(x)] = \nu T_x^t f(x)$.

Пусть $j_\gamma(x, \xi)$ определена формулой (8), j_ν определена формулой (7), $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$. Справедливо равенство (см. [35], стр. 162, формула 3.190)

$$M_r^\gamma [j_\gamma(x, \xi)] = j_\gamma(x, \xi) j_{\frac{n+|\gamma|}{2}-1}(r|\xi|). \quad (35)$$

7. Обращение весового сферического среднего. В этом разделе мы рассмотрим восстановление функции f по ее весовому сферическому среднему $M_\rho^Y f$.

Пусть $f = f(x) \in C_{ev}^2(\mathbb{R}_+^n)$. Весовое сферическое среднее $M_t^Y f$ – это оператор, сплетающий $(\Delta_Y)_x$ и $(B_{n+|\gamma|-1})_t$ (см. [35], стр. 159, Теорема 36):

$$(B_{n+|\gamma|-1})_t(M_t^Y f)(x) = (M_t^Y(\Delta_Y)_x f)(x). \quad (36)$$

Рассмотрим интегральный оператор

$$(\mathcal{M}_t^{Y,k} f)(x) = \frac{1}{|S_1^+(n)|_\gamma} \int_{\mathbb{R}_+^n} ({}^Y T_x^y f(x))(t^2 - |y|^2)_+^{\frac{k-n-|\gamma|-1}{2}} y^\gamma dy. \quad (37)$$

Оператор $t^{1-k} \mathcal{M}_t^{Y,k}$ сплетает $(\Delta_Y)_x$ и $(B_k)_t$ при $k > n + |\gamma| - 1$:

$$(B_k)_t(t^{1-k} \mathcal{M}_t^{Y,k} f)(x) = (t^{1-k} \mathcal{M}_t^{Y,k}(\Delta_Y)_x f)(x). \quad (38)$$

Перейдем к сферическим координатам в (37) при $k > n + |\gamma| - 1$, тогда, используя (9) запишем

$$\begin{aligned} (\mathcal{M}_t^{Y,k} f)(x) &= \\ &= \frac{1}{|S_1^+(n)|_\gamma} \int_{\{|y|<t\}^+} ({}^Y T_x^y f(x))(t^2 - |y|^2)^{\frac{k-n-|\gamma|-1}{2}} y^\gamma dy = \{y = \rho\theta\} = \\ &= \frac{1}{|S_1^+(n)|_\gamma} \int_0^t (t^2 - \rho^2)^{\frac{k-n-|\gamma|-1}{2}} \rho^{n+|\gamma|-1} d\rho \int_{S_1^+(n)} ({}^Y T_x^{\rho\theta} f(x)) \theta^\gamma dS = \\ &= \int_0^t (t^2 - \rho^2)^{\frac{k-n-|\gamma|-1}{2}} \rho^{n+|\gamma|-1} (M_\rho^Y f)(x) d\rho = \\ &= \frac{t^{k-n-|\gamma|}}{2C(k-n-|\gamma|+1)} \mathcal{P}_t^{k-n-|\gamma|+1} \left(t^{n+|\gamma|-1} (M_t^Y f)(x) \right). \end{aligned}$$

Теперь найдем обратный оператор для $\mathcal{M}_t^{Y,k}$. Умножим (37) на $h(t-\tau)$ и проинтегрируем по τ от 0 до ∞ . Функция $h(t)$ следует выбирать так, чтобы функция $h(t-\tau)(\mathcal{M}_\tau^{Y,k} f)(x)$ была бы интегрируема по τ от 0 до ∞ .

Получим

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty h(t-\tau)(\mathcal{M}_\tau^{Y,k} f)(x) d\tau = \\ &= \frac{1}{|S_1^+(n)|_\gamma} \int_0^\infty h(t-\tau) d\tau \int_{\{|y|<\tau\}^+} (\tau^2 - |y|^2)^{\frac{k-n-|\gamma|-1}{2}} ({}^Y T_x^y f)(x) y^\gamma dy. \end{aligned}$$

Принимая во внимание (20), будем иметь

$$\frac{|S_1^+(n)|_\gamma}{N(k, \gamma, n)} \int_0^\infty h(t-\tau)(\mathcal{M}_\tau^{Y,k} f)(x) d\tau = (I_{s,y}^k h f)(t, x),$$

где $N(k, \gamma, n)$ определено через (16) и $I_{\square,y}^k$ – смешанный гиперболический –потенциал Рисса (15) порядка k , действующий на функцию $h(t)f(x)$. Следовательно, используя теорему 14, получим

$$h(t)f(x) = \frac{|S_1^+(n)|_\gamma}{N(k, \gamma, n)} \left((I_{\square,y}^k)^{-1} \int_0^\infty h(\phi-\tau)(\mathcal{M}_\tau^{Y,k} f)(y) d\tau \right) (t, x), \quad (39)$$

где $n + |\gamma| - 1 < k < n + 1 + |\gamma|$ и оператор $(I_{\square,y}^k)^{-1}$ определен формулой (19). В формуле (39) мы имеем произвольный параметр $k \in (n + |\gamma| - 1, n + 1 + |\gamma|)$ и произвольную ненулевую функцию h (такую, что функция $h(t-\tau)(\mathcal{M}_\tau^{Y,k} f)(x)$ является интегрируемой по τ от 0 до ∞), зависящую от одной переменной.

Для нахождения функции по ее весовому сферическому среднему формула (39) может быть упрощена. Мы можем взять $k = 2m > n + |\gamma| - 1$, $m \in \mathbb{N}$. В этом случае

$$(I_{s,\gamma}^{2m})^{-1} = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta_\gamma \right)^m$$

и

$$h(t)f(x) = \frac{|S_1^+(n)|_\gamma}{N(2m, \gamma, n)} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta_\gamma \right)^m \int_0^\infty h(t - \tau) (\mathcal{M}_\tau^{\gamma, 2m} f)(x) d\tau. \tag{40}$$

Итак, мы получаем основное утверждение.

Теорема 7.1. Пусть $f = f(x) \in C^2(\mathbb{R}_+^n)$, такая что $\frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_{x_i=0} = 0$, $i = 1, \dots, n$, $k = 2m > n + |\gamma| - 1$, $m \in \mathbb{N}$ и

$$(\mathcal{M}_t^{\gamma, k} f)(x) = \frac{t^{k-n-|\gamma|}}{2C(k-n-|\gamma|+1)} \mathcal{P}_t^{k-n-|\gamma|+1} \left(t^{n+|\gamma|-1} (M_t^\gamma f)(x) \right),$$

где $M_\rho^\gamma f$ – весовое сферическое среднее (33) функции f , \mathcal{P}_t^ν – одномерный оператор Пуассона (9), $C(\nu)$ – константа, определенная формулой (9). Тогда функция f может быть восстановлена с помощью его весового сферического среднего по формуле

$$f(x) = \frac{|S_1^+(n)|_\gamma}{h(t)N(2m, \gamma, n)} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta_\gamma \right)^m \int_0^\infty h(t - \tau) (\mathcal{M}_\tau^{\gamma, 2m} f)(x) d\tau, \tag{41}$$

где $h(t)$ произвольная такая, что функция $h(t - \tau) (\mathcal{M}_\tau^{\gamma, k} f)(x)$ интегрируема по τ от 0 до ∞ , $|S_1^+(n)|_\gamma$ определяется формулой (34), $N(2m, \gamma, n)$ определяется формулой (16).

Замечание 5. Если в условиях Теоремы 7.1 есть возможность выбрать $h(t) = e^t$, то функция f может быть восстановлена с помощью его весового сферического среднего по формуле

$$f(x) = \frac{|S_1^+(n)|_\gamma}{N(2m, \gamma, n)} (I - \Delta_\gamma)^m \int_0^\infty e^{-\tau} (\mathcal{M}_\tau^{\gamma, 2m} f)(x) d\tau, \tag{42}$$

где $2m > n + |\gamma| - 1$, $m \in \mathbb{N}$, I – тождественный оператор.

Пример 4. Пусть $h(t) = e^t$, $(M_\rho^\gamma f)(x) = \mathbf{j}_\gamma(x, \xi) j_{\frac{n+|\gamma|}{2}-1}(\rho|\xi|)$, $2m > n + |\gamma| - 1$, где $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ – некоторый вектор. Тогда

$$\begin{aligned} (\mathcal{M}_\tau^{\gamma, 2m} f)(x) &= \int_0^\tau (\tau^2 - \rho^2)^{\frac{2m-n-|\gamma|-1}{2}} \rho^{n+|\gamma|-1} (M_\rho^\gamma f)(x) d\rho = \\ &= \mathbf{j}_\gamma(x, \xi) \int_0^\tau (\tau^2 - \rho^2)^{\frac{2m-n-|\gamma|-1}{2}} \rho^{n+|\gamma|-1} j_{\frac{n+|\gamma|}{2}-1}(\rho|\xi|) d\rho = \\ &= 2^{\frac{n+|\gamma|}{2}-1} \Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right) |\xi|^{1-\frac{n+|\gamma|}{2}} \mathbf{j}_\gamma(x, \xi) \times \\ &\quad \times \int_0^\tau (\tau^2 - \rho^2)^{\frac{2m-n-|\gamma|-1}{2}} \rho^{\frac{n+|\gamma|}{2}} J_{\frac{n+|\gamma|}{2}-1}(\rho|\xi|) d\rho. \end{aligned}$$

Используя формулу 2.12.4.6 из [14], получим

$$\begin{aligned} (\mathcal{M}_\tau^{\gamma, 2m} f)(x) &= \\ &= 2^{\frac{n+|\gamma|}{2}-1} \Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right) |\xi|^{1-\frac{n+|\gamma|}{2}} \mathbf{j}_\gamma(x, \xi) \frac{2^{\frac{2m-n-|\gamma|-1}{2}} \tau^{m-\frac{1}{2}}}{|\xi|^{\frac{2m-n-|\gamma|+1}{2}}} \times \\ &\quad \times \Gamma\left(\frac{2m-n-|\gamma|+1}{2}\right) J_{m-\frac{1}{2}}(|\xi|\tau) = \\ &= \frac{2^{m-\frac{3}{2}} \tau^{m-\frac{1}{2}}}{|\xi|^{m-\frac{1}{2}}} \Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right) \Gamma\left(\frac{2m-n-|\gamma|+1}{2}\right) \mathbf{j}_\gamma(x, \xi) J_{m-\frac{1}{2}}(|\xi|\tau). \end{aligned}$$

Принимая во внимание, что $h(t) = e^t$, будем иметь

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} h(t-\tau) (\mathcal{M}_{\tau}^{\gamma, 2m} f)(x) d\tau = \\ & = e^t \frac{2^{m-\frac{3}{2}}}{|\xi|^{m-\frac{1}{2}}} \Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right) \Gamma\left(\frac{2m-n-|\gamma|+1}{2}\right) \times \\ & \quad \times j_{\gamma}(x, \xi) \int_0^{\infty} e^{-\tau} \tau^{m-\frac{1}{2}} J_{m-\frac{1}{2}}(|\xi|\tau) d\tau \\ & = e^t \frac{2^{m-\frac{3}{2}}}{|\xi|^{m-\frac{1}{2}}} \Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right) \Gamma\left(\frac{2m-n-|\gamma|+1}{2}\right) \times \\ & \quad \times j_{\gamma}(x, \xi) \frac{2^{m-\frac{1}{2}} |\xi|^{m-\frac{1}{2}} (|\xi|^2+1)^{-m} \Gamma(m)}{\sqrt{\pi}} = \\ & = \frac{\Gamma(m) \Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right) \Gamma\left(\frac{2m-n-|\gamma|+1}{2}\right)}{2^{2-2m} \sqrt{\pi} (1+|\xi|^2)^m} e^t j_{\gamma}(x, \xi). \end{aligned}$$

Вычислим константу

$$\begin{aligned} & \frac{|S_1^+(n)|_{\gamma}}{N(2m, \gamma, n)} = \\ & = \frac{\prod_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{2^{n-1} \Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right) 2^{2m-n-1} \prod_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{2m-n-|\gamma|+1}{2}\right) \Gamma(m)} \sqrt{\pi} = \\ & = \frac{2^{2-2m} \sqrt{\pi}}{\Gamma(m) \Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right) \Gamma\left(\frac{2m-n-|\gamma|+1}{2}\right)}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} & \frac{|S_1^+(n)|_{\gamma}}{N(2m, \gamma, n)} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta_{\gamma}\right)^m \int_0^{\infty} h(t-\tau) (\mathcal{M}_{\tau}^{\gamma, 2m} f)(x) d\tau = \\ & = \frac{1}{(1+|\xi|^2)^m} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta_{\gamma}\right)^m e^t j_{\gamma}(x, \xi) = e^t j_{\gamma}(x, \xi), \end{aligned} \quad (43)$$

что по формуле (41) дает $f(x) = j_{\gamma}(x, \xi)$. В формуле (43) мы использовали тот факт, что $\Delta_{\gamma} j_{\gamma}(x; \xi) = -|\xi|^2 j_{\gamma}(x; \xi)$ [9, 33].

Этот результат подтверждается формулой (35). Примеры графиков при $n = 1$ и $\xi = 1$ приведены на Рис. 3 и 4.

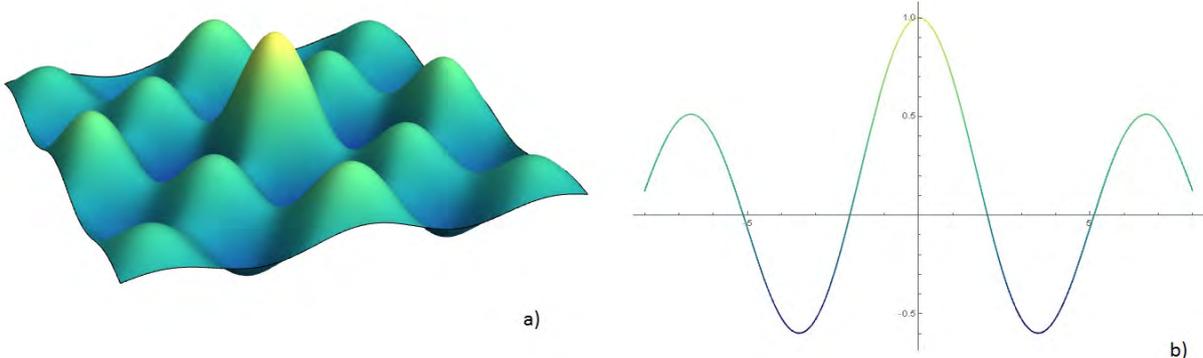


Рис. 3. а) Сферическое среднее $(M_{\rho}^{\gamma})_x j_{\gamma}(x, \xi) = j_{\frac{\gamma-1}{2}}(x) j_{\frac{\gamma-1}{2}}(\rho)$ при $\gamma = \frac{1}{2}$. б) Функция $f(x) = j_{\gamma}(x, \xi)$ при $\gamma = \frac{1}{2}$
 Fig. 3. a) Spherical mean $(M_{\rho}^{\gamma})_x j_{\gamma}(x, \xi) = j_{\frac{\gamma-1}{2}}(x) j_{\frac{\gamma-1}{2}}(\rho)$ for $\gamma = \frac{1}{2}$. b) Function $f(x) = j_{\gamma}(x, \xi)$ for $\gamma = \frac{1}{2}$

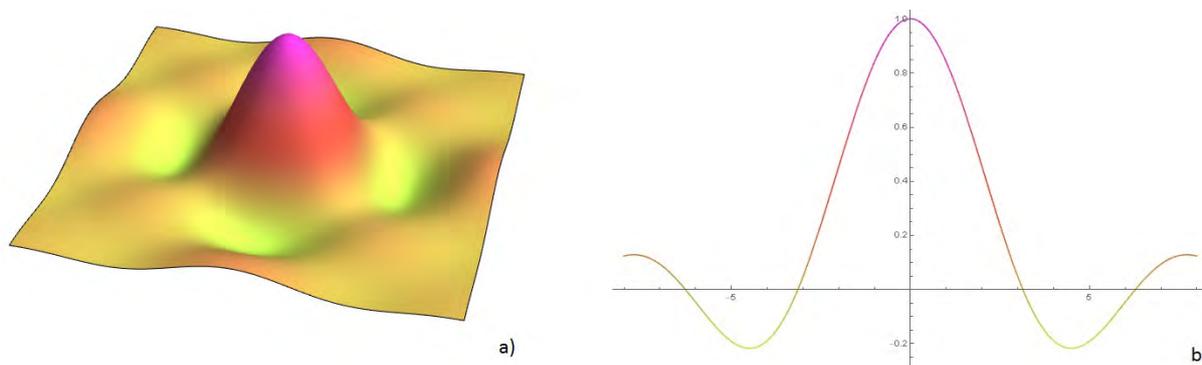


Рис. 4. а) Сферическое среднее $(M_\rho^\gamma)_x j_\gamma(x, \xi) = j_{\frac{\gamma-1}{2}}(x) j_{\frac{\gamma-1}{2}}(\rho)$ при $\gamma = \frac{1}{2}$. б) Функция $f(x) = j_\gamma(x, \xi)$ при $\gamma = 2$
 Fig. 4. а) Spherical mean $(M_\rho^\gamma)_x j_\gamma(x, \xi) = j_{\frac{\gamma-1}{2}}(x) j_{\frac{\gamma-1}{2}}(\rho)$ for $\gamma = \frac{1}{2}$. б) Function $f(x) = j_\gamma(x, \xi)$ for $\gamma = 2$

В заключении приведем формулу обращения обобщенного сдвига, которая получается при $n = 1$. Пусть $2m > \gamma > 0$, $m \in \mathbb{N}$, I – тождественный оператор, тогда для функции f , удовлетворяющей условиям теоремы 7 при возможном выборе $h(t) = e^t$, получим

$$f(x) = \frac{|S_1^+(1)|_\gamma}{2C(2m - \gamma)N(2m, \gamma, 1)} (I - B_\gamma)^m \int_0^\infty e^{-\tau} \tau^{2m-1-\gamma} \mathcal{P}_\tau^{2m-\gamma} (\tau^\gamma \cdot {}^\gamma T_x^\tau f(x)) d\tau. \quad (44)$$

Пусть $0 < \gamma < 2$, тогда в (44) можно взять $k = 2$, $m = 1$. Получим

$$f(x) = \frac{|S_1^+(1)|_\gamma}{2C(2 - \gamma)N(2, \gamma, 1)} (I - B_\gamma) \int_0^\infty e^{-\tau} \tau^{1-\gamma} \mathcal{P}_\tau^{2-\gamma} (\tau^\gamma \cdot {}^\gamma T_x^\tau f(x)) d\tau.$$

Следует отметить, что в рассмотренных задачах основную роль играли специальные операторы преобразования и связанные с ними сплетающие соотношения. Это ещё раз подтверждает фундаментальную роль теории операторов преобразования в задачах для различных классов дифференциальных уравнений, см. [4, 24, 35].

Список литературы

1. Берест Ю. Ю., Веселов А. П. 1994. Принцип Гюйгенса и интегрируемость. Успехи математических наук, 49(6(300)): 7–78.
2. Житомирский Я. И. 1955. Задача Коши для систем линейных уравнений в частных производных с дифференциальными операторами типа Бесселя. Матем. сб., 36(78)(2): 299–310.
3. Йон Ф. 1958. Плоские волны и сферические средние в применении к дифференциальным уравнениям с частными производными. М., Изд.-во иностр. лит., 158.
4. Катрахов В. В., Ситник С. М. 2018. Метод операторов преобразования и краевые задачи для сингулярных эллиптических уравнений. Современная математика. Фундаментальные направления, 64(2): 211–426.
5. Киприянов И. А. 1997. Сингулярные эллиптические краевые задачи. М., Наука. Физматлит, 204.
6. Киприянов И. А. 2000. Преобразование Фурье – Бесселя и дробные степени дифференциальных операторов. ДАН, 373(1): 17–20.
7. Киприянов И. А. 1998. Весовые потенциалы Рисса. Сингулярные задачи. ДАН, 363(6): 738–740.
8. Левитан Б. М. 1951. Разложения по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье. М., УМН. 6:2(42): 102–143.
9. Ляхов Л. Н., Половинкин И. П., Шишкина Э. Л. 2014. Об одной задаче И.А. Киприянова для сингулярного ультрагиперболического уравнения. Дифференц. уравнения, 50(4): 516–528.
10. Ляхов Л. Н., Половинкин И. П., Шишкина Э. Л. 2014. Формулы решения задачи Коши для сингулярного волнового уравнения с оператором Бесселя по времени. Доклады Академии наук, 459(5): 533–538.

11. Ногин В. А., Сухинин Е. В. 1993. Обращение и описание гиперболических потенциалов с L_p -плотностями. Докл. РАН 329(5): 550–552.
12. Ногин В. А., Сухинин Е. В. 1992. Обращение и описание гиперболических потенциалов с L_p -плотностями. Депонирована в ВИНТИ. Москва. 1992. № 2512-92: 234–249.
13. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И., 2003. Интегралы и ряды, Том 1. Элементарные функции. Физматлит, 632.
14. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И., 2003. Интегралы и ряды, Том 2. Специальные функции. Физматлит, 664.
15. Ситник С. М., Шишкина Э. Л. 2019. Метод операторов преобразования для дифференциальных уравнений с операторами Бесселя. Физматлит, Москва, 224.
16. Agranovsky M., Finch D., Kuchment P. 2009. Range conditions for a spherical mean transform. *Inverse Probl. Imaging*, 3(3): 373–382.
17. Agranovsky M., Kuchment P., Kunyansky L. 2009 On reconstruction formulas and algorithms for the thermoacoustic tomography. In *Photoacoustic imaging and spectroscopy*, ed. by L. Wang, CRC Press, 89–102.
18. Antipov Yu. A., Estrada R., Rubin B. 2012. Method of analytic continuation for the inverse spherical mean transform in constant curvature spaces. *Journal D'analyse Mathématique*, 118: 623–656.
19. Delgado B. B., Khmelnytskaya K. V., Kravchenko V. V. 2019. The transmutation operator method for efficient solution of the inverse Sturm – Liouville problem on a half-line. *Mathematical Methods in the Applied Sciences. Mathematical Methods in the Applied Sciences*. 42(18): 7359–7366.
20. Elouadhi S., Daher R. 2019. Generalization of Titchmarsh's Theorem for the Dunkl Transform in the Space $L^p(\mathbb{R}^d, \omega_l(x)dx)$. *International Journal of Mathematical Modelling & Computations*, 6(4): 261–267.
21. Finch D., Patch S., Rakesh K. 2004. Determining a function from its mean values over a family of spheres. *SIAM J. Math. Anal.*, 35(5): 1213–1240.
22. Hama M. E., Daher R. 2014. Estimate of K-functionals and modulus of smoothness constructed by generalized spherical mean operator. *Pro Indian Acad. Sci. Math. Sci.*, 124(2): 235–242.
23. Karapetyants A. N., Khmelnytskaya K. V., Kravchenko V. V. 2019. A practical method for solving the inverse quantum scattering problem on a half line. *Journal of Physics: Conference Series*. 1540(1): 012007 1–8.
24. Kravchenko V. V. 2019. On a method for solving the inverse scattering problem on the line. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. 42(4): 1321–1327.
25. Kravchenko V. V. 2019. On a method for solving the inverse Sturm – Liouville problem. *Journal of Inverse and Ill-posed Problems*. 27: 401–407.
26. Kuchment P. 2014. *The Radon Transform and Medical Imaging*. Society for Industrial and Applied Mathematics Philadelphia, PA, USA, 260.
27. Kunyansky L. 2007. Explicit inversion formulae for the spherical mean Radon transform. *Inverse Problems*, 23: 373–383.
28. Li Z., Song F. 2009. Inversion Formulas for the Spherical Radon-Dunkl Transform. *SIGMA*, 5(25): 1–15.
29. Rubin B. 1996. *Fractional Integrals and Potentials*. Addison-Wesley, Essex, 424.
30. Rubin B. 2015. *Introduction to Radon Transforms: With Elements of Fractional Calculus and Harmonic Analysis*. Cambridge University Press, UK, 596.
31. Rubin B. 2008. Inversion formulae for the spherical mean in odd dimensions and the Euler–Poisson–Darboux equation. *Inverse Problems*, 24(2): 1–10.
32. Shishkina E. L. 2017. Inversion of the mixed Riesz hyperbolic B-potentials. *International Journal of Applied Mathematics*. 30(6): 487–500.
33. Shishkina E. L., Sitnik S. M. 2017. General form of the Euler–Poisson–Darboux equation and application of the transmutation method. *Electron. J. Differential Equations*. 177: 1–20.

34. Shishkina E. L. 2019. General Euler–Poisson–Darboux equation and hyperbolic B-potentials. *Partial differential equations, CMFD, PFUR*, M. 65(2): 157–338.
35. Shishkina E. L., Sitnik S. M. 2020. *Transmutations, singular and fractional differential equations with applications to mathematical physics*. Elsevier, Amsterdam, 564.
36. Weinstein A. 1962. Spherical means in spaces of constant curvature. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, 4(60): 87–91.

References

1. Berest Yu. Yu., Veselov A. P. 1994. Huygens' principle and integrability", *Russian Math. Surveys*, 49(6): 5–77.
2. Zhitomirskii Ya. I. 1955. Cauchy's problem for systems of linear partial differential equations with differential operators of Bessel type. *Mat. Sb. (N.S.)*, 36(78)(2): 299–310.
3. John F. 1981. *Plane Waves and Spherical Means Applied to Partial Differential Equations*. Springer-Verlag New York, 172.
4. Katrakhov V. V., Sitnik S. M. 2018. The transmutation method and boundary-value problems for singular elliptic equations, *Singular differential equations, CMFD*, Moscow, Peoples' Friendship University of Russia, 64(2): 211–426.
5. Kipriyanov I. A. 1997. *Singular Elliptic Boundary Value Problems*. M.: Nauka-Fizmtlit, 1997.
6. Kipriyanov I. A. 2000. Fourier–Bessel transform and fractional powers of differential operators. *DAN*, 373 (1): 17–20.
7. Kipriyanov I. A. 1998. Weight Riesz Potentials. Singular problems. *DAN*, 363 (6): 738–740.
8. Levitan B. M. 1951. Expansion in Fourier series and integrals with Bessel functions. *Uspekhi Mat. Nauk*, 6:2(42): 102–143.
9. Lyakhov L. N., Polovinkin I. P., Shishkina E. L. 2014. On a Kipriyanov problem for a singular ultrahyperbolic equation. *Differ. Equ.*, 50(4): 513–525.
10. Lyakhov L. N., Polovinkin I. P., Shishkina E. L. 2014. Formulas for the solution of the Cauchy problem for a singular wave equation with Bessel time operator. *Doklady Mathematics of the Russian Academy of Sciences*, 90(3): 737–742.
11. Nogin V. A., Sukhinin E. V. 1993. Inversion and characterization of hyperbolic potentials in L_p -spaces. *Dokl. Acad. Nauk*, 329(5): 550–552.
12. Nogin V. A., Sukhinin E. V. 1992. Inversion and characterization of hyperbolic potentials in L_p -spaces. Deponierted in VINITI, 2512:92: 1–50.
13. Prudnikov A. P., Brychkov Yu. A., Marichev O. I. 1992. *Integrals and series. 1, Elementary Functions*. Gordon & Breach Sci. Publ., New York, 632.
14. Prudnikov A. P., Brychkov Yu. A., Marichev O. I. 1990. *Integrals and Series, Vol. 2, Special Functions*. Gordon & Breach Sci. Publ., New York, 664.
15. Sitnik S. M., Shishkina E. L., 2019. Transmutation operators method for differential equations with Bessel operator. *Moscow. Fizmathlit*, 224.
16. Agranovsky M., Finch D., Kuchment P. 2009. Range conditions for a spherical mean transform. *Inverse Probl. Imaging*, 3(3): 373–382.
17. Agranovsky M., Kuchment P., Kunyansky L. 2009 On reconstruction formulas and algorithms for the thermoacoustic tomography. In *Photoacoustic imaging and spectroscopy*, ed. by L. Wang, CRC Press, 89–102.
18. Antipov Yu. A., Estrada R., Rubin B. 2012. Method of analytic continuation for the inverse spherical mean transform in constant curvature spaces. *Journal D'analyse Mathématique*, 118: 623–656.
19. Delgado B. B., Khmelnytskaya K. V., Kravchenko V. V. 2019. The transmutation operator method for efficient solution of the inverse Sturm – Liouville problem on a half-line. *Mathematical Methods in the Applied Sciences. Mathematical Methods in the Applied Sciences*. 42(18): 7359–7366.

20. Elouadih S., Daher R. 2019. Generalization of Titchmarsh's Theorem for the Dunkl Transform in the Space $L^p(\mathbb{R}^d, \omega_l(x)dx)$. International Journal of Mathematical Modelling & Computations, 6(4): 261–267.
21. Finch D., Patch S., Rakesh K. 2004. Determining a function from its mean values over a family of spheres. SIAM J. Math. Anal., 35(5): 1213–1240.
22. Hamma M. E., Daher R. 2014. Estimate of K-functionals and modulus of smoothness constructed by generalized spherical mean operator. Pro Indian Acad. Sci. Math. Sci., 124(2): 235–242.
23. Karapetyants A. N., Khmelnytskaya K. V., Kravchenko V. V. 2019. A practical method for solving the inverse quantum scattering problem on a half line. Journal of Physics: Conference Series. 1540(1): 012007 1–8.
24. Kravchenko V. V. 2019. On a method for solving the inverse scattering problem on the line. Mathematical Methods in the Applied Sciences. 42(4): 1321–1327.
25. Kravchenko V. V. 2019. On a method for solving the inverse Sturm – Liouville problem. Journal of Inverse and Ill-posed Problems. 27: 401–407.
26. Kuchment P. 2014. The Radon Transform and Medical Imaging. Society for Industrial and Applied Mathematics Philadelphia, PA, USA, 260.
27. Kunyansky L. 2007. Explicit inversion formulae for the spherical mean Radon transform. Inverse Problems, 23: 373–383.
28. Li Z., Song F. 2009. Inversion Formulas for the Spherical Radon-Dunkl Transform. SIGMA, 5(25): 1–15.
29. Rubin B. 1996. Fractional Integrals and Potentials. Addison-Wesley, Essex, 424.
30. Rubin B. 2015. Introduction to Radon Transforms: With Elements of Fractional Calculus and Harmonic Analysis. Cambridge University Press, UK, 596.
31. Rubin B. 2008. Inversion formulae for the spherical mean in odd dimensions and the Euler–Poisson–Darboux equation. Inverse Problems, 24(2): 1–10.
32. Shishkina E. L. 2017. Inversion of the mixed Riesz hyperbolic B–potentials. International Journal of Applied Mathematics. 30(6): 487–500.
33. Shishkina E. L., Sitnik S. M. 2017. General form of the Euler–Poisson–Darboux equation and application of the transmutation method. Electron. J. Differential Equations. 177: 1–20.
34. Shishkina E. L. 2019. General Euler–Poisson–Darboux equation and hyperbolic B–potentials. Partial differential equations, CMFD, PFUR, M. 65(2): 157–338.
35. Shishkina E. L., Sitnik S. M. 2020. Transmutations, singular and fractional differential equations with applications to mathematical physics. Elsevier, Amsterdam, 564.
36. Weinstein A. 1962. Spherical means in spaces of constant curvature. Annali di Matematica Pura ed Applicata, 4(60): 87–91.

Получена 04.02.2021

Шишкина Элина Леонидовна – доктор физико-математических наук, доцент, профессор Воронежского Государственного Университета

 <http://orcid.org/0000-0003-4083-1207>

Университетская пл., д. 1, Воронеж, 394018, Россия

E-mail: ilina_dico@mail.ru

О ФРЕДГОЛЬМОВОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ОБОБЩЕННОЙ ЗАДАЧИ НЕЙМАНА

Б. Д. Кошанов, А. Д. Кунтуарова

(Статья представлена членом редакционной коллегии А. П. Солдатовым)

Казахский национальный педагогический университет имени Абая,
Алматы, 050010, Казахстан
Институт математики и математического моделирования,
Алматы, 050010, Казахстан

E-mail: koshanov@list.ru, araika.14.89@mail.ru

Аннотация. Для эллиптического уравнения $2l$ -го порядка с постоянными вещественными коэффициентами рассмотрена краевая задача с нормальными производными $(k_j - 1)$ -го порядка, $j = 1, \dots, l$, где $1 \leq k_1 < \dots < k_l \leq 2l$. При $k_j = j$ она переходит в задачу Дирихле, а при $k_j = j + 1$ – задачу Неймана. В данной статье получены условие фредгольмовой разрешимости этой задачи в пространстве $C^{2l, \mu}(\bar{D})$ и доказана эквивалентность условию Шапиро – Лопатинского с условием фредгольмовости обобщенной задачи Неймана.

Ключевые слова: эллиптические уравнения высокого порядка, обобщенная задача Неймана, фредгольмова разрешимость задачи, нормальные производные на границе.

Благодарности: Работа выполнена при поддержке гранта AP 09559378 Министерства образования и науки Республики Казахстан.

Для цитирования: Кошанов Б. Д., Кунтуарова А. Д. 2021. О фредгольмовой разрешимости обобщенной задачи Неймана. Прикладная математика & Физика. 53(1): 31–39. DOI 10.52575/2687-0959-2021-53-1-31-39.

ON THE FREDHOLM SOLVABILITY OF THE GENERALIZED NEUMANN PROBLEM

B. Koshanov, A. Kuntuarova

(Article submitted by a member of the editorial board A. P. Soldatov)

Abay Kazakh national pedagogical university,
Almaty, 050010, Kazakhstan
Institute of Mathematics and Mathematical modeling,
Almaty, 050010, Kazakhstan

E-mail: koshanov@list.ru, araika.14.89@mail.ru

Received February, 27, 2020

Abstract. For the elliptic equation of $2l$ -th order with of constant real coefficients we consider boundary value problem of the normal derivatives $(k_j - 1)$ order, $j = 1, \dots, l$, where $1 \leq k_1 < \dots < k_l \leq 2l$. When $k_j = j$ it moves into the Dirichlet problem, and when $k_j = j + 1$ it moves into the Neumann problem. In this paper, we obtain a condition for the Fredholm solvability of this problem in the space $C^{2l, \mu}(\bar{D})$ and prove the equivalence of the Shapiro – Lopatinskii condition with the Fredholm condition for the generalized Neumann problem.

Key words: higher order elliptic equations, generalized Neumann problem, Fredholm solvability of the problem, normal derivatives on the boundary

Acknowledgements: The work is supported by the Grant AP 09559378 Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan.

For citation: Koshanov B. D., Kuntuarova A. D. 2021. On the Fredholm solvability of the generalized Neumann problem. Applied Mathematics & Physics. 53(1): 31–39 (in Russian). DOI 10.52575/2687-0959-2021-53-1-31-39.

1. Введение. Методы комплексного анализа составляют классическое направление в исследовании эллиптических уравнений и уравнений смешанного типа на плоскости и в настоящее время получены фундаментальные результаты. В начале 60-х годов прошлого столетия для эллиптических уравнений и систем был развит новый теоретико-функциональный подход, основанный на использовании функций, аналитических по Дуглису [14, 19]. В работах [19, 12] выяснилось, что в теории эллиптических уравнений и систем важную роль играют функции, аналитические по Дуглису. Эти функции являются решениями эллиптической системы первого порядка, обобщающей классическую систему Коши-Римана. В работах [16, 13] этот подход уже был успешно применен к задачам плоской теории упругости

(включая общий анизотропный случай). Однако для областей с кусочно-гладкой границей и уравнений с непрерывными коэффициентами и, особенно, для задач с нелокальными краевыми условиями этот подход требует своего дальнейшего развития. Несомненный интерес представляет также описание условия фредгольмовости и вычисление формулы индекса для так называемой обобщенной задачи Неймана для эллиптических уравнений высокого порядка [6, 7]. В этой задаче на границе области задается некоторый набор нормальных производных различного порядка, число которых равно половине порядка эллиптического уравнения. В 1988 году [3] предложил краевую задачу для полигармонического уравнения, которая заключается в задании последовательных нормальных производных решения на границе области, начиная с некоторого номера k . При $k = 0$ она соответствует классической задаче Дирихле, а при $k = 1$ – задаче Неймана. В общем случае при $k \geq 2$ ее естественно назвать обобщенной задачей Неймана. Представляет интерес случай, когда порядки этих производных задаются произвольно по возрастанию.

2. Постановка задачи и основные результаты. Пусть D – ограниченная односвязная область с гладкой границей Γ . В этой области для общего эллиптического уравнения $2l$ -го порядка

$$\sum_{r=0}^{2l} a_r \frac{\partial^{2l} u}{\partial x^{2l-r} \partial y^r} + \sum_{0 \leq r \leq k \leq 2l-1} a_{rk}(x) \frac{\partial^k u}{\partial x^{k-r} \partial y^r} = F \quad (1)$$

рассматривается краевая задача

$$\frac{\partial^{k_j-1} u}{\partial n^{k_j-1}} \Big|_{\Gamma} = f_j, \quad j = 1, \dots, l, \quad (2)$$

где $a_r \in \mathbb{R}$, $a_{kr} \in C^\mu(\bar{D})$, $0 < \mu < 1$, $n = n_1 + in_2$ – единичная внешняя нормаль к границе Γ , и натуральные $k_j : 1 \leq k_1 < \dots < k_l \leq 2l$.

Для полигармонического уравнения последняя задача была изучена [3]. Другой вариант задачи Неймана, основанный на вариационном принципе, был ранее предложен [5]. При $a_{kr} = 0$, $F = 0$ задача (1),(2) была исследована в работе [4]. При $a_{kr} \neq 0$, $F \neq 0$ задача (1),(2) подробно исследовалась в работе [6] в пространстве $C_a^{2l-1, \mu}(\bar{D})$ и в [7] в пространстве $C^{2l, \mu}(\bar{D})$, где, в частности, были найдены необходимые и достаточные условия их фредгольмовости. В работе [17] задача (1),(2) была исследована в многосвязной области. При решении таких задач в основном используются теория сингулярных интегральных уравнений на гладких, кусочно-гладких контурах [1, 4]. Работа [8] посвящена исследованию разрешимости краевых задач для неоднородного полигармонического уравнения в многомерном шаре.

Нахождение необходимой и достаточной условия фредгольмовости задачи (1), (2) может быть описано следующим образом. Пусть v_k , $1 \leq k \leq m$, – все различные корни характеристического уравнения $a_0 + a_1 z + \dots + a_{2l} z^{2l} = 0$ в верхней полуплоскости и l_k – кратность k -го корня, так что $l_1 + \dots + l_m = l$.

Введем дробно линейные по z функции

$$\omega(e, z) = \frac{-e_2 + e_1 z}{e_1 + e_2 z}, \quad 1 \leq j \leq l, \quad (3)$$

где зависимость от единичного касательного вектора $e = e_1 + ie_2$ к контуру Γ указана явно. Для определенности вектор e ориентируем положительно по отношению к области D , т. е. D лежит слева от этого вектора. В частности,

$$n_1 = e_2, \quad n_2 = -e_1. \quad (4)$$

Исходя из l -вектор-функции $g(\zeta) = (g_1(\zeta), \dots, g_l(\zeta))$, аналитической в окрестности точек ζ_1, \dots, ζ_m , введем блочную $l \times l$ - матрицу

$$W_g(\zeta_1, \dots, \zeta_m) = (W_g(\zeta_1), \dots, W_g(\zeta_m)), \quad (5)$$

где матрица $W_g(\zeta_k) \in \mathbb{C}^{l \times l_k}$ составлена из векторов-столбцов

$$g(\zeta_k), g'(\zeta_k), \dots, \frac{1}{(l_k - 1)!} g^{(l_k-1)}(\zeta_k).$$

В качестве g ниже используется вектор

$$g_j(\zeta) = \zeta^{k_j-1}, \quad 1 \leq j \leq l. \quad (6)$$

В этих обозначениях [6] задача (1), (2) фредгольмова тогда и только тогда, когда

$$\det W_g[\omega(e, v_1), \dots, \omega(e, v_m)] \neq 0, \quad e \in \mathbb{T}, \quad (7)$$

где \mathbb{T} – означает единичную окружность. Это условие зависит только от набора k_1, k_2, \dots, k_l . Следовательно, при фиксированных k_j и при выполнении условия (7) задача (1), (2) фредгольмова в любой области.

С точки зрения общей эллиптической теории [11] задача (1),(2) Фредгольмова в пространстве $C^{2l,\mu}(\bar{D})$ тогда и только тогда, когда ее краевые условия удовлетворяют так называемому условию дополнителности (или условию Шапиро – Лопатинского) [9]. В этом случае говорят также [18], что краевые условия (2) накрывают дифференциальный оператор

$$L = \sum_{r=0}^{2l} a_r \frac{\partial^{2l}}{\partial x^{2l-r} \partial y^r},$$

отвечающий главной части (1). Указанное условие состоит в следующем: исходя из фиксированной точки $t \in \Gamma$, дифференцирования по x и y в выражениях операторов L и B_j заменим на, соответственно, $e_1(t) + zn_1(t)$ и $e_2(t) + zn_2(t)$. В результате получим многочлены

$$L(n, z) = \sum_{r=0}^{2l} a_r (e_1 + zn_1)^{2l-r} (e_2 + zn_2)^r$$

и

$$B_j(z) = [n_1(e_1 + zn_1) + n_2(e_2 + zn_2)]^{k_j-1} = z^{k_j-1}, \quad 1 \leq j \leq l.$$

С учетом (4) в обозначениях (3) многочлен $L(n, z)$ можем записать в виде

$$L(n, z) = (e_1 + zn_1)^{2l} \sum_{r=0}^{2l} a_r [-\omega(z)]^r,$$

так что $L(n, \zeta) = 0$ равносильно

$$-\omega(\zeta) = v, \tag{8}$$

где v – произвольный корень характеристического уравнения. При этом их соответствующие кратности совпадают. Очевидно, преобразование (3) переводит верхнюю полуплоскость на себя, так что аналогичным свойством обладает и преобразование $\zeta \rightarrow -\omega(\zeta)$. В частности, многочлен l -степени

$$L^+(z) = (z - \zeta_1)^{l_1} \dots (z - \zeta_m)^{l_m}, \quad -\omega(\zeta_j) = \bar{v}_j, \tag{9}$$

образован корнями уравнения $L(n, \zeta) = 0$, лежащими в верхней полуплоскости.

В принятых обозначениях условие дополнителности заключается в линейной независимости многочленов $B_j(z)$, $1 \leq j \leq l$, по модулю многочлена $L^+(z)$. Таким образом, это условие должно быть эквивалентно условию (6), полученному другим способом. Этот факт легко установить непосредственно.

Теорема 1. Условие (7) выполнено тогда и только тогда, когда многочлены $B_j(z) = z^{k_j-1}$, $1 \leq j \leq l$, линейно независимы по модулю многочлена $L^+(z)$.

Доказательство. Предположим, что эти многочлены линейно зависимы по модулю $L^+(z)$, т. е. найдется их нетривиальная линейная комбинация $B = \alpha_1 B_1 + \dots + \alpha_l B_l$, кратная L^+ . В обозначениях (6) многочлен $B_j = g_j$, так что этот факт можем записать в виде

$$B(z) = \sum_{j=1}^l \alpha_j z^{k_j-1} = Q(z) L^+(z),$$

с некоторым многочленом Q . В соответствии с (9) это соотношение означает, что многочлен B в точках ζ_k имеет нуль порядка l_k или, что равносильно,

$$\sum_{j=1}^l \alpha_j g_j^{(s)}(\zeta_k) = 0, \quad 0 \leq s \leq l_k - 1, \quad 1 \leq k \leq m. \tag{10}$$

Эти равенства представляют собой однородную систему l уравнений относительно $\alpha_1, \dots, \alpha_l$. Из определения (5) видно, что матрица этой системы совпадает с матрицей, транспонированной к $W_g(\zeta_1, \dots, \zeta_m)$. Поэтому ненулевое решение системы (10) возможно тогда и только тогда, когда

$$\det W_g(\zeta_1, \dots, \zeta_m) = 0. \tag{11}$$

Согласно определению (3) равенство (8) равносильно $\bar{\zeta}_j = \omega(v_j)$, поэтому равенство (11) можем выразить в форме обращения в нуль определителя в левой части (7). Итак, нарушение условия дополнителности равносильно нарушению условия (7), что завершает доказательство теоремы.

Заметим, что условие (7) не изменится, если от вектора g перейти к вектору q , определяемому соотношением $g(\zeta) = \zeta^{k_1-1}q(\zeta)$, или, в явном виде,

$$q(\zeta) = (1, \zeta^{s_1}, \dots, \zeta^{s_{l-1}}), \quad s_j = k_{j+1} - k_1. \quad (12)$$

В самом деле, как отмечено в [6, 10], определитель матриц W_g и W_q отличаются друг от друга ненулевым множителем.

Условию (7) можно придать другой вид, более удобный для использования. С этой целью рассмотрим определитель матрицы $W_q(\zeta_1, \dots, \zeta_m)$. Он представляет собой многочлен переменных ζ_j , который в терминах мультииндексов $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ и β можно записать в форме

$$\det W_q(\zeta_1, \dots, \zeta_m) = \sum_{\alpha \leq \beta} c_\alpha \zeta^\alpha, \quad (13)$$

где запись $\alpha \leq \beta$ означает неравенство $\alpha_j \leq \beta_j$ для всех j и использовано обычное обозначение $\zeta^\alpha = \zeta_1^{\alpha_1} \dots \zeta_m^{\alpha_m}$. Введем еще дробно линейные функции

$$\gamma_k(z) = \frac{v_k - z}{1 + v_k z}, \quad 1 \leq k \leq m. \quad (14)$$

Теорема 2. *Задача (1), (2) фредгольмова тогда и только тогда, когда рациональная функция*

$$R(z) = \sum_{\alpha \leq \beta} c_\alpha [\gamma_1(z)]^{\alpha_1} \dots [\gamma_m(z)]^{\alpha_m} \quad (15)$$

не имеет вещественных корней на расширенной действительной прямой $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Доказательство. Из сравнения операций (3) и (14) следует, что

$$\det W_g[\omega(e, v_1), \dots, \omega(e, v_m)] = R(e_2/e_1). \quad (16)$$

Функция $\omega(e, v)$ в (3) четна по переменной $e \in \mathbb{T}$ и потому величина

$$\arg \det W_g[\omega(e, v_1), \dots, \omega(e, v_m)] \Big|_{\mathbb{T}} = 2 \arg \det W_q[\omega(e, v_1), \dots, \omega(e, v_m)] \Big|_{\mathbb{T}^+},$$

где \mathbb{T}^+ есть полуокружность в правой полуплоскости. Отображение $e = e_1 + ie_2 \rightarrow t = e_2/e_1$ осуществляет гомеоморфизм этой полуокружности на расширенную вещественную прямую $\bar{\mathbb{R}}$, причем обход ее от точки $e = -i$ к $e = i$ соответствует движению на прямой в положительном направлении. Поэтому в соответствии с (16) условие (7) равносильно тому, что функция R не имеет вещественных корней на расширенной действительной прямой. Теорема доказана.

Рассмотрим подробнее функцию $\gamma(\zeta)$, определяемую (14) с $v = v_k$. Данное преобразование $\gamma_k(z)$ меняет местами точки $\pm i$ и инволютивно:

$$\gamma(\pm i) = \mp i, \quad \gamma[\gamma(\zeta)] \equiv \zeta. \quad (17)$$

Кроме того, при $v_k = i$ имеет место тождество $\gamma_k(\zeta) \equiv i$.

Лемма 1. *При $v \neq i$. Преобразование $\zeta \rightarrow \gamma(\zeta)$ переводит нижнюю полуплоскость на круг*

$$B = \{z : |z|^2 + 1 - 2\rho \operatorname{Im} z < 0\}, \quad \rho = \frac{|v|^2 + 1}{2\operatorname{Im} v}. \quad (18)$$

Этот круг имеет центром точку $i\rho$ радиус $r = \sqrt{\rho^2 - 1}$, целиком лежит в верхней полуплоскости, содержит точку $z = i$ и инвариантен относительно инволюции $z \mapsto z' = -1/z$.

Кроме того, точки v и $v' = -1/v$ лежат на его граничной окружности $L = \partial B$.

Доказательство. В силу (14) имеем

$$\operatorname{Im}[\gamma(\zeta)] = \frac{(1 + |\zeta|^2)\operatorname{Im} v - (1 + |v|^2)\operatorname{Im} \zeta}{|1 + v\zeta|^2}.$$

Отсюда образом нижней полуплоскости является круг B , который целиком лежит в верхней полуплоскости и содержит точку $z = i$. В силу принципа симметрии точки $\pm i$ симметричны как относительно прямой \mathbb{R} , так и окружности $L = \partial B$. В частности, центр этой окружности должен лежать на мнимой оси. Обозначая центр и радиус этой окружности, соответственно, $i\rho$ и r , приходим к соотношению $|i - i\rho||i + i\rho| = r^2$, откуда $r^2 = \rho^2 - 1$. Уравнение $|z - i\rho|^2 = r^2$ окружности L можем записать в виде $|z|^2 + 1 - 2\rho \operatorname{Im} z = 0$, что доказывает описание (18) круга B .

Очевидно, что точки $\gamma(0) = v$ и $\gamma(\infty) = -1/v$ лежат на L . В частности, подставляя в это уравнение $z = v$,

приходим к выражению для ρ в (18). То, что окружность L инвариантна относительно преобразования $z \mapsto z' = -1/z$, вытекает непосредственно из ее уравнения. Лемма доказана.

Лемма 1 используется для случая $m = 2$ двух точек v_1, v_2 , которые в соответствии с теоремой 2 [6] без ограничения общности можно считать различными. Пусть их нумерация такова, что $v_1 \neq i$. Тогда в силу (17) преобразование γ_1 переводит круг B на нижнюю полуплоскость, и можно ввести функцию

$$S(z) = R[\gamma_1(z)] = (\det W_g)[z, \delta(z)], \quad \delta(z) = \gamma_2[\gamma_1(z)], \quad (19)$$

аналитическую в круге B . В явном виде имеет место

$$\delta(z) = \frac{1 + \tau z}{\tau - z}, \quad \tau = \frac{1 + v_1 v_2}{v_2 - v_1} \in B. \quad (20)$$

То, что точка τ не принадлежит замкнутому кругу \bar{B} , является следствием леммы 1. В самом деле, $\tau = -1/[\gamma_1(v_2)]$, и по лемме 1 точка $z = \gamma_1(v_2)$ лежит вне \bar{B} , так что это верно и для $\tau = z' = 1/z$.

По отношению к функции S теорема 2 принимает следующую форму.

Теорема 3. Пусть $m = 2$ с $v_2 \neq v_1 \neq i$ и приняты обозначения леммы 1. Тогда фредгольмовость задачи (1), (2) равносильна тому, что функция $S(z)$ не имеет нулей на окружности $L = \partial B$.

Заметим, что, как и R , функция S обращается в нуль в точках $\pm i$. Эта функция особенно упрощается, если $1 + v_1 v_2 = 0$, тогда преобразование δ в (20) представляет собой инволюцию $z \mapsto z' = -1/z$. В этом случае теорема 2 переходит в теорему 3 из работы [6].

3. Применение результатов к общему уравнению четвертого и шестого порядков. Применение теоремы 3 на примере для уравнения (1) четвертого порядка. Поскольку на фредгольмовости задачи младшие члены не оказывают влияния, можно ограничиться главной частью уравнения с $v_2 \neq v_1 \neq i$. Это уравнение может быть записано в виде

$$L_1 L_2 u = 0 \quad (21)$$

с операторами второго порядка

$$L_k = \frac{\partial^2}{\partial y^2} - 2(\operatorname{Re} v_k) \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} + |v_k|^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad k = 1, 2.$$

По отношению к разности $s = k_2 - k_1$, которая в рассматриваемом случае принимает три значения $s = 1, 2, 3$, задача (2) запишется в форме

$$\left. \frac{\partial^i u}{\partial n^i} \right|_{\Gamma} = f_1, \quad \left. \frac{\partial^{i+s} u}{\partial n^{i+s}} \right|_{\Gamma} = f_2, \quad 0 \leq i \leq 3 - s. \quad (22_s)$$

Согласно (5), (13) в рассматриваемом случае матрица W_q принимает вид

$$W_q(z_1, z_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ z_1^s & z_2^s \end{pmatrix}, \quad \det W_q(z_1, z_2) = z_2^s - z_1^s,$$

так что $S(z) = [\delta(z)]^s - z^s$. В явном виде

$$S(z) = \frac{(1 + z^2)P_s(z)}{(\tau - z)^s},$$

где $P_1(z) = 1$, $P_2(z) = -z^2 + 2\tau z + 1$ и

$$P_3(z) = [qz^2 + (1 - q)\tau z + 1][q^2 z^2 + (1 - q^2)\tau z + 1], \quad q = e^{2\pi i/3}. \quad (23)$$

Заметим, что многочлен P_2 отличен от нуля в \bar{B} . В самом деле, пусть $z^2 - 2\tau z - 1 = 0$ для некоторого $z \in \bar{B}$. Так что точка $z' = -1/z$ также принадлежит \bar{B} , то и точка $\tau = (z + z')/2 \in \bar{B}$, что противоречит (20).

Поскольку в рассматриваемом случае $\sum_{i>j} l_i l_j = 3$, то на основании теоремы 2 [6] отсюда получаем следующее заключение.

Заключение 1. При $s \leq 2$ задача (21), (22_s) фредгольмова и её индекс равен нулю, а при $s = 3$ она фредгольмова тогда и только тогда, когда нули многочлена P_3 не лежат на граничной окружности L круга B , определяемого леммой 1 по $v = v_1$.

Как показывает следующая лемма, при подходящем выборе v_1 и v_2 всегда можно добиться того, чтобы один из нулей многочлена P_3 лежал на окружности L .

Лемма 2. Пусть точка $v = v_1$ лежит в верхней полуплоскости и в обозначениях леммы 1

$$\tau = -i\rho - \sqrt{(\rho^2 - 1)/3}. \quad (24)$$

Тогда точка

$$v_2 = \frac{1 + \tau v_1}{\tau - v_1}$$

также лежит в верхней полуплоскости и для этих точек фредгольмовость задачи (21), (22_s) нарушена.

Доказательство. Убедимся прежде всего в том, что точка v_2 лежит в верхней полуплоскости. В самом деле, из определения v_2 видно, что $\tau = -1/\gamma_1(v_2)$. Поэтому, если $\text{Im}v_2 \leq 0$, то в силу леммы 1 точка τ должна принадлежать \bar{B} , что невозможно.

Пусть it_1 и it_2 , $t_2 > t_1$, – это точки пересечения окружности L с мнимой осью. Тогда, согласно (18) справедливы равенства $t_k^2 + 1 - 2\rho t_k = 0$, $k = 1, 2$, и, справедливо,

$$t_1 + t_2 = 2\rho, \quad t_1 t_2 = 1, \quad t_2 - t_1 = 2\sqrt{\rho^2 - 1}. \quad (25)$$

Утверждается, что точка $z = it_2$ является корнем первого сомножителя в (23) и, следовательно, задача (21), (22_s) не является фредгольмовой.

В самом деле, поскольку $1/z = -it_1$, уравнение $e^{2\pi i/3} z^2 - \tau(1 - e^{2\pi i/3})z + 1 = 0$ можем переписать в форме

$$e^{\pi i/3} it_2 - e^{-\pi i/3} it_1 = -i\tau\sqrt{3},$$

что с учетом соотношений (25) равносильно равенству (24).

Для эллиптических уравнений порядков выше четвертого описать явно корни соответствующих многочленов уже затруднительно. Рассмотрим, например, уравнение шестого порядка, т. е. $l = 3$. В соответствии с теоремой 2 достаточно ограничиться рассмотрением двух случаев: (i) все корни попарно различны, т. е. $l_1 = l_2 = l_3 = 1$ и (ii) один из этих корней кратен, например, $l_1 = 1$, $l_2 = 2$. Соответственно этим случаям аналогично (21) имеем уравнения

$$L_1 L_2 L_3 u = f, \quad (26i)$$

$$L_1 L_2^2 u = f, \quad (26ii)$$

соответствующими операторами второго порядка. По отношению к положительным разностям $r = k_2 - k_1$ и $s = k_3 - k_2$, для которых $r + s \leq 5$, задача (2) запишется в форме

$$\left. \frac{\partial^i u}{\partial n^i} \right|_{\Gamma} = f_1, \quad \left. \frac{\partial^{i+s} u}{\partial n^{i+s}} \right|_{\Gamma} = f_2, \quad \left. \frac{\partial^{i+s+1} u}{\partial n^{i+s+1}} \right|_{\Gamma} = f_3, \quad 0 \leq i \leq 5 - r - s. \quad (27_{r,s})$$

В соответствии с этим, вектор (12) следует взять в виде $q = (1, z^r, z^{r+s})$, так что для матрицы W_q в определении (5), имеем выражения

$$(i) W_q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_1^r & z_2^r & z_3^r \\ z_1^{r+s} & z_2^{r+s} & z_3^{r+s} \end{pmatrix}, \quad (ii) W_q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ z_1^r & z_2^r & r z_2^{r-1} \\ z_1^{r+s} & z_2^{r+s} & (r+s) z_2^{r+s-1} \end{pmatrix}.$$

В случае (i) определитель матрицы $W_q(z_1, z_2, z_3)$ можем представить в форме

$$-\det W_q = (z_1^r - z_2^r) z_3^{r+s} + (z_1^r - z_3^r) z_2^{r+s} + (z_3^r - z_2^r) z_1^{r+s}.$$

Поэтому для функции (15) имеем равенство

$$-R(z) = \frac{(1+z^2)P(z)}{[(1+v_1z)(1+v_2z)(1+v_3z)]^{r+s}},$$

с некоторым многочленом $P(z)$. Здесь учтено, что при $m \geq 3$ функция $R(z)$ обращается в нуль в точках $z = \pm i$.

4. Заключение. Поскольку $\sum_{i>j} l_i l_j = 3$, то на основании теоремы 3 отсюда получаем следующее заключение.

Заключение 2. Фредгольмовость задачи (26i), (27) равносильно отсутствию вещественных нулей многочлена $P(\zeta)$ на окружности L .

Многочлен P при $r = 1$ согласно

$$\gamma_i(\zeta) - \gamma_j(\zeta) = \frac{(v_i - v_j)(1 + \zeta^2)}{(1 + v_i \zeta)(1 + v_j \zeta)}$$

имеет вид

$$P(z) = \sum_{i=1}^l (v_i - v_j) [(1 + v_i z)(1 + v_j z)]^s (v_k - z)^{s+1},$$

где штрих у знака суммы означает, что суммирование ведется по циклическим тройкам

$$(i, j, k) = (1, 2, 3); (2, 3, 1); (3, 1, 2).$$

Если дополнительно и $s = 1$, то, как показывает прямая проверка, $P(z) = c(1 + z^2)^2$ с множителем

$$c = \sum' (v_i - v_j)v_k^2 = (v_1 - v_2)v_3^2 + (v_2 - v_3)v_1^2 + (v_3 - v_1)v_2^2.$$

В этом случае индекс задачи равен нулю, что согласуется с теоремой 2.

Обратимся к случаю (ii), где можно считать $v_2 \neq v_1 \neq i$. В этом случае

$$\det W_q = z_2^{r-1} [sz_2^s(z_2^r - z_1^r) - rz_1^r(z_2^s - z_1^s)] = z_1^{r+s-1} z_2^{r-1} (z_2 - z_1) \chi(z_2/z_1),$$

где $(q-1)\chi_{r,s}(q) = sq^s(q^r - 1) - r(q^s - 1)$ с многочленом

$$\chi_{r,s}(q) = \sum_{j=0}^{r+s-1} \alpha_j q^j, \quad \alpha_j = \begin{cases} -r, & 0 \leq j \leq s-1, \\ s, & s \leq j \leq r+s-1, \end{cases}$$

степени $r + s - 1 \leq 4$. В явной форме

$$\begin{aligned} \chi_{1,2}(q) &= -1 + 2q + 2q^2, & \chi_{2,1}(q) &= -2 - 2q + q^2, \\ \chi_{1,3}(q) &= -1 + 3q + 3q^2 + 3q^3, & \chi_{3,1}(q) &= -3 - 3q - 3q^2 + q^3, \\ \chi_{2,3}(q) &= -2 - 2q + 3q^2 + 3q^3 + 3q^4, & \chi_{3,2}(q) &= -3 - 3q - 3q^2 + 2q^3 + 2q^4, \\ \chi_{2,2}(q) &= -2 - 2q + 2q^2 + 2q^3 = 2(q+1)^2(q+1). \end{aligned}$$

Как и в случае $l = 2$, отсюда приходим к следующему выражению для функции $S(z)$ теоремы 3:

$$S(z) = z^{r+s} (1 + z^2) \frac{(1 + az)^{r-1}}{(a - z)^r} P_{r,s}(z), \quad P_{r,s}(z) = [q_j z^2 + (1 - q_j)az + 1],$$

где q_j – корни многочлена $\chi_{r,s}(q)$, взятые с учетом кратности.

Поскольку $\sum_{i>j} l_i l_j = 2$, то на основании теоремы 3 отсюда получаем следующее заключение.

Заключение 3. Фредгольмовость задачи (26ii), (27) равносильно отсутствию нулей многочлена $P_{r,s}$ на окружности L .

Окончательный ответ удастся дать только в случае $r = s = 2$. Для него

$$P_{2,2}(z) = (z^2 - 2\tau z - 1)^2 (z^2 + 1),$$

и, как показано в случае $l = 2$ уравнения четвертого порядка, первый множитель здесь не имеет нулей в замкнутом круге \bar{B} . Поэтому задача (26ii), (27_{2,2}) фредгольмова и ее индекс равен нулю.

Благодарность. Авторы выражают благодарность за постановку задачи и внимание к работе доктору физико-математических наук, профессору Солдатову Александру Павловичу.

Список литературы

1. Абаполова Е. А., Солдатов А. П. 2010. К теории сингулярных интегральных уравнений на гладком контуре. Научные ведомости БелГУ. Серия: Математика. Физика, 18(5): 6–20.
2. Агмон С., Дуглис А., Ниренберг Л. 1962. Оценки вблизи границы решений эллиптических уравнений в частных производных при общих граничных условиях. М.: Наука, 206.
3. Бицадзе А. В. 1988. О некоторых свойствах полигармонических функций. Дифференциальные уравнения, 24(5): 825–831.
4. Ващенко О. В., Солдатов А. П. 2006. Интегральное представление решений обобщенной системы Бельтрами. Научные ведомости БелГУ. Серия: Информатика. Прикладная математика, 21(6): 3–6.
5. Дезин А. А. 1954. Вторая краевая задача для полигармонического уравнения в пространстве. Доклады АН СССР, 96(5): 901–903.
6. Кошанов Б. Д., Солдатов А. П. 2016. Краевая задача с нормальными производными для эллиптического уравнения высшего порядка на плоскости. Дифференциальные уравнения, 52(12): 1594–1609. Doi: 10.1134/S0012266116120077.

7. Кошанов Б. Д., Солдатов А. П. 2018. О разрешимости краевых задач для эллиптического уравнения высокого порядка на плоскости. Вестник Карагандинского университета. Серия: Математика, 91(3): 24–31. Doi: 10.31489/2018M3/24-30.
8. Кошанов Б. Д. 2013. Условия разрешимости краевых задач для неоднородного полигармонического уравнения в шаре. Научные ведомости БелГУ. Серия: Математика. Физика, 11(154): 44–54.
9. Лопатинский Я. Б. 1953. Об одном способе приведения граничных задач для системы дифференциальных уравнений эллиптического типа к регулярным интегральным уравнениям. Украинский математический журнал, 5(2): 123–151.
10. Малахова Н. А., Солдатов А. П. 2008. Об одной краевой задаче для эллиптического уравнения высокого порядка. Дифференциальные уравнения, 44(8): 1111–1118. Doi: 10.1134/S0012266108080089.
11. Назаров С. А., Пламеневский Б. А. 1991. Эллиптические задачи в областях с кусочно гладкой границей. М.: Наука, 336.
12. Солдатов А. П. 1989. Эллиптические системы высокого порядка. Дифференциальные уравнения, 25(1): 136–144.
13. Солдатов А. П. 2017. Об одной краевой задаче для эллиптического уравнения на плоскости в многосвязной области. Владикавказский математический журнал. 19(3): 51–58.
14. Douglis A. A. 1960. On uniqueness in Cauchy problems for elliptic systems of equations. Communications on Pure and Applied Mathematics, 13(4): 593–607.
15. Gilbert R. P. 1969. Function theoretic methods in partial differential equations. New York.: Academic Press, 311.
16. Soldatov A. P. 2014. Generalized potentials of double layer in plane theory of elasticity. Eurasian mathematical journal, 5(4): 78–125.
17. Soldatov A. P. 2018. On the Theory of Anisotropic Flat Elasticity. Journal of Mathematical Sciences, 235(4): 484–535. Doi: 10.1007/s10958-018-4083-7.
18. Schechter M. 1950. General boundary value problems for elliptic partial differential equations. Communications on Pure and Applied Mathematics, 12: 467–480.
19. Yeh R. Z. 1990. Hyperholomorphic functions and higher order partial differentials equations in the plane. Pacific Journal of Mathematics, 142(2): 379–399.

References

1. Abapolova Ye. A., Soldatov A. P. 2010. К теории сингулярных интегральных уравнений на гладком контуре [On the theory of singular integral equations on a smooth contour]. Nauchnyye vedomosti BelGU. Seriya: Matematika. Fizika, 18(5): 6-20 (in Russian).
2. Agmon S., Douglis A., Nirenberg L. 1962. Estimates near the boundary of solutions of elliptic partial differential equations under general boundary conditions. М.: Nauka, 206 (in Russian).
3. Bitsadze A. V. 1988. On some properties of polyharmonic functions. Differential equations, 24(5): 825-831.
4. Vashchenko O. V., Soldatov A. P. 2006. Integral'noye predstavleniye resheniy obobshchennoy sistemy Bel'trami [Integral representation of solutions of the generalized Beltrami system]. Nauchnyye vedomosti BelGU. Seriya: Informatika. Prikladnaya matematika, 21(6): 3-6 (in Russian).
5. Dezin A. A. 1954. Vtoraya krayevaya zadacha dlya poligarmonicheskogo uravneniya v prostranstve [The second boundary value problem for a polyharmonic equation in space]. Doklady AN SSSR, 96(5): 901-903 (in Russian).
6. Koshanov B. D., Soldatov A. P. 2016. Boundary value problem with normal derivatives for a higher order elliptic equation on the plane. Differential Equations, 52(12): 1594-1609. Doi: 10.1134/S0012266116120077.
7. Koshanov B. D., Soldatov A. P. 2018. On the Solvability of the Boundary Value Problems for the Elliptic Equation of High Order on a Plane. Bulletin of the Karaganda University. Mathematics series, 91(3): 24-31. Doi: 10.31489/2018M3/24-30.

8. Koshanov B. D. 2013. Usloviya razreshimosti krayevykh zadach dlya neodnorodnogo poligarmonicheskogo uravneniya v share [Conditions for the solvability of boundary value problems for an inhomogeneous polyharmonic equation in a ball]. Nauchnyye vedomosti BelGU. Seriya: Matematika. Fizika, 11(154): 44-54 (in Russian).
9. Lopatinskiy Ya. B. 1953. Ob odnom sposobe privedeniya ganichnykh zadach dlya sistemy differentsial'nykh uravneniy ellipticheskogo tipa k regulyarnym integral'nym uravneniyam [On one way of reducing ganic problems for a system of differential equations of elliptic type to regular integral equations]. Ukrainskii matematicheskii zhurnal. 5(2): 123-151 (in Russian).
10. Malakhova N. A., Soldatov A. P. 2008. On a boundary value problem for a higher-order elliptic equation. Differential Equations, 44(8): 1111-1118. Doi: 10.1134/S0012266108080089.
11. Nazarov S. A., Plamenevskiy B. A. 1991. Ellipticheskiye zadachi v oblastiakh s kusochno gladkoy granitsey [Elliptic problems in domains with piecewise smooth boundaries]. M.: Nauka, 336 (in Russian).
12. Soldatov A.P. 1989. High order elliptical systems. Differential equations, 25(1): 136-144.
13. Soldatov A. P. 2018. On the Theory of Anisotropic Flat Elasticity. Journal of Mathematical Sciences, 235(4): 484-535. Doi: 10.1007/s10958-018-4083-7.
14. Douglis A. A. 1960. On uniqueness in Cauchy problems for elliptic systems of equations. Communications on Pure and Applied Mathematics, 13(4): 593-607.
15. Gilbert R. P. 1969. Function theoretic methods in partial differential equations. New York.: Academic Press, 311.
16. Soldatov A. P. 2014. Generalized potentials of double layer in plane theory of elasticity. Eurasian mathematical journal, 5(4):78-125.
17. Soldatov A. P. 2017. Ob odnoy krayevoy zadache dlya ellipticheskogo uravneniya na ploskosti v mnogosvyaznoy oblasti [A boundary value problem for an elliptic equation on a plane in a multiply connected domain]. Vladikavkazskiy matematicheskii zhurnal. 19(3): 51-58 (in Russian).
18. Schechter M. 1950. General boundary value problems for elliptic partial differential equations. Communications on Pure and Applied Mathematics, 12: 467-480.
19. Yeh R. Z. 1990. Hyperholomorphic functions and higher order partial differentials equations in the plane. Pacific Journal of Mathematics, 142(2): 379-399.

Получена 27.02.2021

Кошанов Бакытбек Данебекович – доктор физико-математических наук, профессор Казахского национального педагогического университета имени Абая, ГНС Института математики и математического моделирования

 <http://orcid.org/0000-0002-0784-5183>

пр. Достык, 13, Алматы, 050010, Казахстан
ул. Пушкина, 125, Алматы, 050010, Казахстан
E-mail: koshanov@list.ru

Кунтуарова Арай Довлетбаевна – преподаватель Казахского национального педагогического университета имени Абая

 <http://orcid.org/0000-0002-8077-1109>

пр. Достык, 13, Алматы, 050010, Казахстан
E-mail: araika.14.89@mail.ru

ФИЗИКА. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 519.85
MSC 49K27.

DOI 10.52575/2687-0959-2021-53-1-40-45

ОПТИМАЛЬНЫЙ ВЫБОР ИСТОЧНИКОВ СВЕТОВОГО ПОЛЯ

А. Г. Брусенцев, С. И. Епифанов

(Статья представлена членом редакционной коллегии И. П. Половинкиным)

Белгородский государственный технологический университет им. В. Г. Шухова,
Белгород, 308012, Россия

E-mail: brusentsev@mail.ru

E-mail: epif-sergey@yandex.ru

Аннотация. Ставится и решается задача оптимального выбора источников света на светящейся поверхности по критерию минимальности энергетических затрат. Разрабатывается метод решения задачи, основанный на сведении ее к задаче линейного программирования. Описана программная система, реализующая решение задачи, и приведены результаты численных экспериментов.

Ключевые слова: Математическая модель светового поля; оптимальное распределение источников света; задача линейного программирования; двойственный симплекс метод.

Для цитирования: Брусенцев А. Г., Епифанов С. И. 2020. Оптимальный выбор источников светового поля. Прикладная математика & Физика. 53(1): 40–45. DOI 10.52575/2687-0959-2021-53-1-40-45.

OPTIMAL CHOICE OF LIGHT FIELD SOURCES

A. Brusentsev, S. Epifanov

(Article submitted by a member of the editorial board I. P. Polovinkin)

Belgorod State Technological University named after V. G. Shukhov,
Belgorod, 308012, Russia

E-mail: brusentsev@mail.ru

E-mail: epif-sergey@yandex.ru

Received December, 27, 2020

Abstract. The problem of optimal choice of light source on luminous surface is posed and solved according to the criterion of minimum energy consumption. A method for solving the problem is being developed, based on reducing it to a linear programming problem. A software system for solving problem is described, and the results of numerical experiments are presented.

Key words: Mathematical model of the light field; optimal distribution of light sources; linear programming problem; dual simplex method.

For citation: Brusentsev A. G., Epifanov S. I. 2020. Optimal choice of light field sources. Applied Mathematics & Physics. 53(1): 40–45 (in Russian). DOI 10.52575/2687-0959-2021-53-1-40-45.

1. Введение. В повседневной жизни людей большое значение имеют физические поля. Они создаются искусственно, и должны обладать рядом эксплуатационных свойств, которые достигаются особым распределением их источников. При этом возникает задача выбора такой системы источников, которая обеспечивала бы заданные свойства поля при минимальных затратах энергии, или каких-нибудь других ресурсов. Подобные задачи называют задачами оптимального распределения источников физических полей, и их решение существенно зависит от природы рассматриваемого поля. Наибольшее практическое значение имеют тепловое и световое поля. Оптимальный выбор источников тепла рассматривался в ряде работ [1, 3, 6, 4], а аналогичные задачи для полей естественной освещенности – в [2, 5].

В настоящей работе мы, опираясь на модель светового поля светящейся поверхности, ставим и решаем задачу оптимального выбора источников света по критерию минимума энергетических затрат.

2. Постановка задачи и описание алгоритма ее решения. Под световым полем мы подразумеваем поле плотности светового потока, то есть вектор-функцию $\vec{\epsilon}(N)$ точки N пространства такую, что для

каждой элементарной площадке площадью dS с центром в точке N световой поток в направлении единичного вектора нормали $\vec{v}(N)$ к площадке равен:

$$(\vec{\varepsilon}(N) \cdot \vec{v}(N))_+ dS. \tag{1}$$

Если скалярное произведение отрицательно, то этот световой поток считается равным нулю.

При математическом моделировании светового поля стремятся получить выражение для вектор-функции $\vec{\varepsilon}(N)$ в зависимости от расположения источников света. Мы рассмотрим такую модель для случая, когда поле порождается испускающей поверхностью σ , светящейся с яркостью, задаваемой функцией $\gamma(M)$ ($M \in \sigma$). При этом $\gamma(M)dS_M$ есть энергия, испускаемая элементарной площадкой площадью dS_M поверхности σ в единицу времени в направлении единичного вектора нормали $\vec{n}(M)$ к поверхности σ в точке M .

Обозначим через φ_M угол между векторами $\vec{n}(M)$ и \overrightarrow{MN} . Тогда получим следующее выражение для $\vec{\varepsilon}(N)$ в виде поверхностного интеграла по испускающей поверхности σ (ср. с [5]):

$$\vec{\varepsilon}(N) = \iint_{\sigma} \gamma(M) \frac{(\cos\varphi_M)_+}{|\overrightarrow{MN}|^3} \cdot \overrightarrow{MN} dS_M. \tag{2}$$

Обозначим воспринимающую поверхность внутри помещения через σ_1 . В дальнейшем она называется также рабочей поверхностью. В каждой ее точке N определен единичный вектор нормали $\vec{v}(N)$, направленный в сторону неосвещаемой стороны поверхности σ_1 . Общая постановка задачи состоит в нахождении функции $\gamma(M)$, минимизирующей общую мощность источников:

$$J\{\gamma\} = \iint_{\sigma} \gamma(M) \cdot dS_M \rightarrow \min, \tag{3}$$

при условиях:

$$\begin{aligned} (\vec{\varepsilon}(N) \cdot \vec{v}(N))_+ &\geq \beta(N), N \in \sigma_1 \\ \gamma(M) &\geq 0; M \in \sigma, \end{aligned} \tag{4}$$

где $\beta(N)$ – некоторая нормативная функция освещенности рабочей поверхности. Таким образом, задача сводится к получению освещенности рабочей поверхности не меньшей нормативной при наименьших энергетических затратах.

В такой постановке задача имеет бесконечное число степеней свободы и должна быть подвергнута дискретизации. Но сначала преобразуем условие (4), используя модель (2). Обозначим через ψ_N угол между векторами \overrightarrow{MN} и $\vec{v}(N)$. Тогда условие (4) запишется в виде:

$$\iint_{\sigma} \gamma(M) \frac{(\cos\varphi_M)_+ (\cos\psi_N)_+}{|\overrightarrow{MN}|^2} dS_M \geq \beta(N), N \in \sigma_1. \tag{4a}$$

Приближенную дискретизацию задачи (3), (4) произведем следующим образом. Разобьем поверхность σ на m равных частей площади ΔS . Будем задавать поверхность σ центрами элементарных площадок M_1, M_2, \dots, M_m и векторами нормали в них: $\vec{n}(M_1), \vec{n}(M_2), \dots, \vec{n}(M_m)$. Точно так же зададим поверхность σ_1 , то есть разобьем ее на площадки той же площади ΔS с центрами N_1, N_2, \dots, N_n и нормальными $\vec{v}(N_1), \vec{v}(N_2), \dots, \vec{v}(N_n)$. Точки задаются своими координатами $M_j(x_j^{(1)}, y_j^{(1)}, z_j^{(1)}); N_i(x_i^{(2)}, y_i^{(2)}, z_i^{(2)})$, где $j=1, 2, \dots, m; i=1, 2, \dots, n$. Далее функции $\gamma(M)$ и $\beta(N)$ заменяются последовательностями $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m$ и $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$, где $\gamma_j = \gamma(M_j), \beta_i = \beta(N_i)$. Введем переменные $\mu_j = \gamma_j \cdot \Delta S$, где $j = 1, 2, \dots, m$. Заменяя в задаче (3), (4) условие (4) на (4a), и интегралы интегральными суммами, легко видеть, что наша задача превратится в задачу линейного программирования:

$$J\{\vec{\mu}\} = \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_m \rightarrow \min, \tag{5}$$

$$\sum_{j=1}^m a_{ij} \mu_j \geq \beta_i, i = 1, 2, \dots, n, \tag{6}$$

где

$$a_{ij} = \frac{(\cos(\overrightarrow{M_j N_i} \wedge \vec{n}(M_j)))_+ \cdot (\cos(\overrightarrow{M_j N_i} \wedge \vec{v}(N_i)))_+}{|\overrightarrow{M_j N_i}|^2}. \tag{7}$$

Симплекс методом удобнее решать двойственную задачу, по отношению к задаче (5) – (7):

$$z(\vec{\delta}) = \sum_{i=1}^n \beta_i \delta_i \rightarrow \max, \quad (8)$$

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} \delta_i, j = 1, 2, \dots, m; \quad (9)$$

$$\delta_i \geq 0, i = \overline{1, n}.$$

Согласно двойственному симплекс методу, ответ исходной задачи прочитывается в последней строке последней симплекс таблицы задачи (8), (9) с использованием соответствия переменных. Таким образом, решение поставленной задачи не представляет особых трудностей. Центральной частью является формирование по массивам точек и нормальных векторов, то есть по четырем трехмерным массивам, матрицы (a_{ij}) .

В нашем случае поверхность σ является частью потолка и, возможно, стен помещения. Рабочая поверхность может быть произвольной, но в случае, когда σ уже выбрана, для некоторых рабочих поверхностей задача может не иметь решения, поскольку какую-то часть σ_1 , возможно, нельзя осветить в достаточной степени. В этом случае задача (8), (9) по первой теореме двойственности не будет иметь решения по причине неограниченности целевой функции на области допустимых значений, и машина должна это показать.

3. Описание программной системы, реализующей оптимальный выбор источников и результаты численных экспериментов. На основании описанной модели была создана программная система для нахождения оптимального распределения источников света на поверхности σ при заданных рабочей поверхности σ_1 и нормативной освещенности $\beta(N)$ на ней. Блок-схема программной системы представлена на рисунке 1.



Рис. 1. Блок-схема основного алгоритма

Fig. 1. Main algorithm flowchart

Рассмотрим подробнее каждый этап алгоритма, начиная с блоков, предполагающих взаимодействие с пользователем, а именно блоки ввода и вывода. Значения нормативной освещенности и желаемой точности считываются из отдельного текстового файла. Для задания геометрических поверхностей предлагается построить 3d-модель помещения в формате obj, выделив на ней необходимые полигоны с помощью материалов, которые будут представлены в формате mtl. Достаточно дать материалам правильные имена, чтобы программная система могла их распознать. Выходные данные тоже будут представлены в формате obj с сопутствующим файлом mtl. Эти форматы являются одними из самых популярных и поддерживаются большинством редакторов.

Вторым этапом является построение системы ограничений. Обозначим его функцией discrete, ведь по сути этот этап соответствует этапу дискретизации в описанной математической модели. Блок-схема функции discrete изображена на рисунке 2.

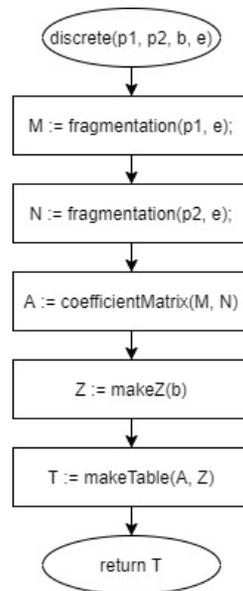


Рис. 2. Функция discrete
Fig. 2. Function discrete

Сначала, обе поверхности разбиваются на элементарные площадки. Размер площадки зависит от параметра точности, введенного пользователем. Разбиение производится функцией `fragmentation`, которая принимает на вход поверхность в виде массива полигонов и длину стороны одной площадки. Функция возвращает массив элементарных площадок. Реализована она достаточно просто – вокруг каждого полигона строится сетка с заданным шагом, если центр ячейки сетки находится внутри исходного полигона, такую ячейку включаем в результирующий массив. Далее по полученным массивам строится матрица коэффициентов системы ограничений. Расчет отдельного коэффициента ведется согласно формуле (7). Однако, здесь мы можем построить систему ограничений сразу для двойственной задачи. Матрицу коэффициентов можно транспонировать и уравнивать неравенства «на ходу», в столбец свободных членов вносить единицы, а в целевую функцию значения β_i . После таких преобразований, сформировать первую симплекс таблицу не составляет труда. Она и станет возвращаемым значением из функции `discrete`.

Теперь, можно переходить к этапу решения задачи оптимизации. Обозначим его функцией `solve`. Блок-схема изображена на рисунке 3. Применив симплекс метод к полученной на предыдущем шаге таблице, вычисляем последнюю симплекс таблицу. В строке целевой функции прочитывается решение двойственной задачи.

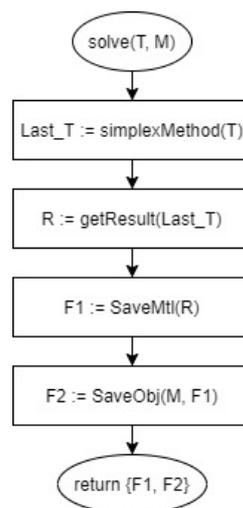


Рис. 3. Функция solve
Fig. 3. Function solve

Исходным (искомым) переменным соответствуют переменные, добавленные в двойственную задачу для уравнивания неравенств. Таким образом, значения в столбцах, соответствующих добавленным переменным, и являются ответом на исходную задачу. Сохраним эти значения в массиве R . Осталось лишь

привести ответ к виду, удобному для графического представления. Как и говорилось, будет сформирован файл obj и соответствующий ему файл mtl. В файле obj будет сохранена освещающая поверхность, где каждая элементарная площадка станет отдельным полигоном. Сохранять рабочую поверхность нет необходимости, ее можно получить из файла исходных данных. В файле mtl будут сохранены материалы для каждого полигона результирующей модели. Чтобы показать разницу в яркости источников света используем желтый цвет разной интенсивности. Пользуясь тем, что цвета записываются в формате rgb со значениями параметров от 0 до 1, где желтому цвету соответствует комбинация (1, 1, 0), цвет i -го полигона определим комбинацией $(a_i, a_i, 0)$, где $a_i = R_i/\max(R)$. Так самая яркая площадка будет обозначена желтым цветом, а самая тусклая, не светящаяся совсем, черным. Результатом работы функции solve станут два файла с расширениями obj и mtl.

Программная система была реализована с помощью языка C++, что позволило получить высокую производительность, сократив как время работы программы, так и количество используемой оперативной памяти устройства. Возможность программной системы работать с форматом obj позволяет использовать практически любой современный 3d редактор для формирования входных данных и просмотра результатов работы программы. В данном случае использовался Blender.

Результаты работы программы изображены на рисунках 4, 5.

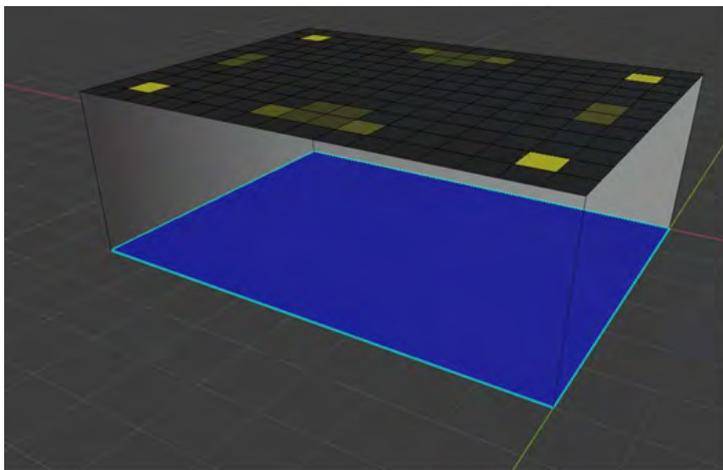


Рис. 4. Результаты работы (рабочая поверхность – пол)

Fig. 4. Results of work (working surface is floor)

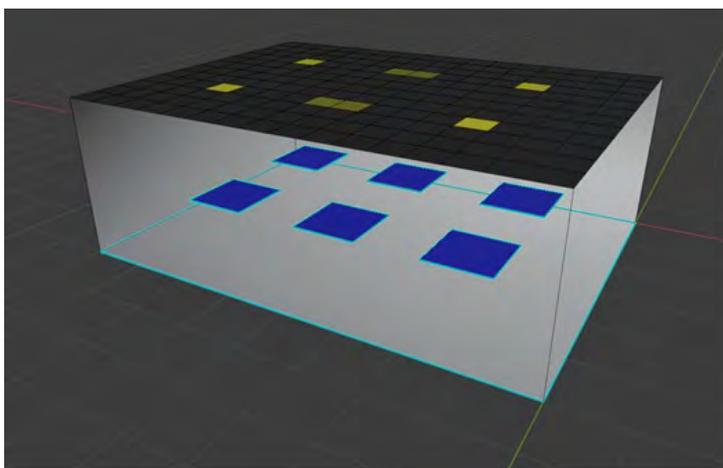


Рис. 5. Результаты работы (рабочая поверхность – столы)

Fig. 5. Results of work (working surface is tables)

Рабочая поверхность обозначена синим цветом. Для примеров выбраны два различных случая. В первом случае (рисунок 4) предлагается осветить все помещение, т. е. в качестве рабочей поверхности выбран пол помещения. Во втором случае (рисунок 5) рабочая поверхность находится на некоторой высоте относительно пола помещения и представляет собой отдельные участки – это пример, в котором рабочей поверхностью является поверхность, например, столов.

4. Заключение. Отметим, что построенная выше модель не учитывает вклад в световое поле отражения от стен помещения и других предметов. Мы считаем этот вклад незначительным. Однако в ряде

случаев это может быть не так. Авторы надеются рассмотреть вопрос об учете отражения в будущих публикациях.

Список литературы

1. Брусенцев А. Г., Брусенцева В. С. 2010. Задача об оптимальном выборе источников тепла. Сборник трудов XXIII международной конференции «Математические методы в технике и технологиях» Саратов, 2: 43–46.
2. Брусенцев А. Г., Гордица Д. Д. 1982. Расчет оптимальной формы, площади и места расположения зенитных светопроемов одноэтажных производственных зданий. Сб. «Физико-математические методы в исследовании свойств строительных материалов и в их производстве». Сб. трудов МИСИ – БТИСМ, 184–189.
3. Брусенцев А. Г., Осипов О. В. 2012. Приближенное решение задачи об оптимальном выборе источников тепла. Научные ведомости Белгородского государственного университета, 5(26): 60–69.
4. Брусенцев А. Г., Осипов О. В. 2019. Оптимальное расположение источников тепла внутри областей сложной геометрической формы. Математическое моделирование, 31(4): 3–16.
5. Брусенцев А. Г., Чернышева К. Ю. 2017. Оптимизация естественной освещенности помещений произвольной формы. Вестник БГТУ им. В.Г. Шухова, 1: 181–184.
6. Brusentsev A. G., Osipov O. V. 2019. Optimal Location of Heat Sources Inside Areas with Complex Geometric Shapes. Mathematical Models and Computer Simulations, 11(6): 905–913. ISSN 2070-0482.

References

1. Brusentsev A. G., Brusentseva V. S. 2010. Zadacha ob optimal'nom vybore istochnikov tepla [The problem of the optimal choice of heat sources]. Sbornik trudov XXIII mezhdunarodnoy konferentsii «Matematicheskie metody v tekhnike i tekhnologiyakh» Saratov, 2: 43–46.
2. Brusentsev A. G., Gorditsa D. D. 1982. Raschet optimal'noy formy, ploshchadi i mesta raspolozheniya zenitnykh svetoproemov odnoetazhnykh proizvodstvennykh zdaniy [Calculation of the optimal shape, area and location of zenith light openings in one-story industrial buildings]. Sb. «Fiziko-matematicheskie metody v issledovanii svoystv stroitel'nykh materialov i v ikh proizvodstve». Sb. trudov MISI – BTISM, 184–189.
3. Brusentsev A. G., Osipov O. V. 2012. Priblizhennoe reshenie zadachi ob optimal'nom vybore istochnikov tepla [An approximate solution to the problem of the optimal choice of heat sources]. Nauchnye vedomosti Belgorodskogo gosudarstvennogo universiteta, 5(26): 60–69.
4. Brusentsev A. G., Osipov O. V. 2019. Optimal'noe raspolozhenie istochnikov tepla vnutri oblastey slozhnoy geometricheskoy formy [Optimal location of heat sources inside areas with complex geometric shapes]. Matematicheskoe modelirovanie, 31(4): 3–16.
5. Brusentsev A. G., Chernysheva K. Yu. 2017. Optimizatsiya estestvennoy osveshchennosti pomeshcheniy proizvol'noy formy [Optimization of natural illumination in rooms of any shape]. Vestnik BGTU im. V.G. Shukhova, 1: 181–184.
6. Brusentsev A. G., Osipov O. V. 2019. Optimal Location of Heat Sources Inside Areas with Complex Geometric Shapes. Mathematical Models and Computer Simulations, 11(6): 905–913. ISSN 2070-0482.

Получена 27.12.2020

Брусенцев Александр Григорьевич – доктор физико-математических наук, доцент, профессор Белгородского государственного технологического университета им. В. Г. Шухова

 <http://orcid.org/0000-0002-2287-4353>

ул. Костюкова, 46, Белгород, 308012, Россия

E-mail: brusentsev@mail.ru

Епифанов Сергей Игоревич – студент Белгородского государственного технологического университета им. В. Г. Шухова

 <http://orcid.org/0000-0003-2854-175X>

ул. Костюкова, 46, Белгород, 308012, Россия

E-mail: epif-sergey@yandex.ru

КВАНТОВЫЕ ПОПРАВКИ В ПЛЕНКАХ АРСЕНИДА КАДМИЯ

Т. Б. Никуличева, В. С. Захвалинский, О. Н. Иванов, Е. А. Пилюк, М. Н. Япрынцеv,
В. Ю. Новиков, М. Ю. Саенко, А. В. Борисенко

(Статья представлена членом редакционной коллегии С. В. Блажевичем)

Белгородский государственный национальный исследовательский университет,
г. Белгород, 308015, Россия

E-mail: nikulicheva@bsu.edu.ru

Аннотация. В данной работе мы представляем результаты исследования магнетотранспорта и квантовых поправок в пленке Cd_3As_2 толщиной 50 нм, напыленной на подложку из титаната стронция. Анализ результатов магнетопроводимости выявил наличие слабой антилокализации, возникающей из-за поверхностных состояний. Слабая антилокализация чувствительна только к перпендикулярной составляющей магнитного поля и хорошо описывается моделью Хиками, Ларкина и Нагаока. Расчетное значение длины фазовой когерентности $L\phi$ изменяется в зависимости от температуры T , демонстрируя наличие 2D-состояний поверхности. При температурах $T \geq 100$ К наблюдается переход от полуметалла Вейля к полуметаллу Дирака.

Ключевые слова: арсенид кадмия, тонкие пленки, квантовые поправки, антилокализация, магнетопроводимость.

Благодарности: Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 19-79-00152).

Для цитирования: Никуличева Т. Б., Захвалинский В. С., Иванов О. Н., Пилюк Е. А., Япрынцеv М. Н., Новиков В. Ю., Саенко М. Ю., Борисенко А. В. 2021. Квантовые поправки в пленках арсенида кадмия. Прикладная математика & Физика. 53(1): 46–52. DOI 10.52575/2687-0959-2021-53-1-46-52.

QUANTUM CORRECTIONS IN CADMIUM ARSENIDE FILMS

T. Nikulicheva, V. Zakhvalinskii, O. Ivanov, E. Pilyuk, M. Yapryntsev,
V. Novikov, M. Saenko, A. Borisenko

(Article submitted by a member of the editorial board S. V. Blazhevich)

Belgorod National Research University,
Belgorod, 308015, Russia

E-mail: nikulicheva@bsu.edu.ru

Received March, 01, 2020

Abstract. In this paper, we present the results of a study of magnetotransport and quantum corrections in a 50 nm thick Cd_3As_2 film deposited on a strontium titanate substrate. An analysis of the results of the magnetic conductivity revealed the presence of a weak antilocalization arising from surface states. Weak antilocalization is sensitive only to the perpendicular component of the magnetic field and is well described by the model of Hikami, Larkin, and Nagaoka. The calculated value of the phase coherence length $L\phi$ varies with temperature T , demonstrating the presence of 2D states of the surface. At temperatures $T \geq 100$ K, a transition is observed from the Weyl semimetal to the Dirac semimetal.

Key words: cadmium arsenide, thin films, quantum corrections, antilocalization, magnetic conductivity.

Acknowledgements: The study is supported by a grant from the Russian Science Foundation (project No. 19-79-00152).

For citation: Nikulicheva T. B., Zakhvalinskii V. S., Ivanov O. N., Pilyuk E. A., Yapryntsev M. N., Novikov V. Yu., Saenko M. Yu., Borisenko A. V. 2021. Quantum corrections in cadmium arsenide films. Applied Mathematics & Physics. 53(1): 46–52 (in Russian). DOI 10.52575/2687-0959-2021-53-1-46-52.

1. Введение. В последнее время все больше внимания уделяется исследованию материалов на основе трехмерных топологических изоляторов, полуметаллов Вейля и тесно связанным с ними полуметаллам Дирака [5, 16, 18, 19]. Трехмерные топологические полуметаллы Дирака – это не только объемный аналог графена, они также демонстрируют нетривиальную топологию в своей электронной структуре, которая имеет сходство с топологическими изоляторами. Полуметаллы Вейля имеют четное число изолированных точек в объемной зоне Бриллюэна (узлы Вейля), в которых соприкасаются валентная зона и зона проводимости, образуя в ее окрестности состояния с линейной дисперсией и фиксированной взаимной ориентацией направлений импульса и спина (спиновая хиральность), кривизну Берри объемного спектра и уникальные поверхностные состояния. Восстановив инверсию, можно настроить

такую систему на фазу полуметалла Дирака, что приведет к двукратному хиральному вырождению электронных состояний (около узлов Дирака) [18, 2].

Квантовая интерференция является одним из экзотических эффектов, возникающих при наблюдении магнитных осцилляций в полуметаллах [16, 20], и возникает из-за интерференции электронных волновых пакетов, движущихся в магнитном поле в одном направлении вдоль незамкнутых орбит импульсного пространства, связанных магнетопробойными переходами. Квантовая интерференция выражается в появлении в спектре осцилляций Шубникова-де Гааза частот, для которых отсутствуют разрешенные орбиты, в спектре осцилляций де Гааза-ван Альфена такие частоты отсутствуют. В 3D образцах сечения поверхности Ферми, для которых выполняются все условия наблюдения квантовой интерференции, встречаются крайне редко [14, 23]. Однако, в низкоразмерных структурах исследования электрического переноса обнаруживают при низкой температуре несколько явлений, таких как квантовая интерференция, включая слабую локализацию (*англ.* weak localization, WL) или слабую антилокализацию (*англ.* weak antilocalization, WAL), и универсальные флуктуации проводимости [3, 24, 12]. Явление WAL всегда наблюдается в материалах Дирака, таких как топологические изоляторы и графен [12, 17, 6]. Эффект WAL также наблюдался в 3D полуметалле Дирака Cd_3As_2 [10, 11], 3D полуметалле Вейля TaAs [8] и $\text{Bi}_{0.97}\text{Sb}_{0.03}$ [9]. Основная цель этой статьи - представить и обсудить результаты наличия слабой антилокализации, возникающей из-за поверхностных состояний при анализе магнетосопротивления тонкой пленки Cd_3As_2 .

2. Материалы и методика эксперимента. Тонкие пленки Cd_3As_2 были получены с использованием высокочастотного магнетронного распыления на вакуумном универсальном poste ВН-2000. В качестве подложки был использован SrTiO_3 <001> толщиной 0.5 мм, который предварительно был очищен сначала ультразвуком, затем с помощью ионного травления в Ar. Температура в процессе напыления оставалась равной 20°C . Мощность, подаваемая на магнетрон, составляла 10 Вт. Мишени, используемые для распыления, были изготовлены из предварительно синтезированных методом Бриджмена монокристаллов небольших размеров (менее 3 мм) Cd_3As_2 . Контроль качества материала мишени и тонких пленок Cd_3As_2 проводился с помощью рентгеновских методов на дифрактометре Rigaku SmartLab и рамановской спектроскопии на LabRam HR Evolution. Полученные нами кристаллы Cd_3As_2 имели тетрагональную решетку с пространственной группой I_{41cd} , $a = 12.6345 \text{ \AA}$, $c = 25.4304 \text{ \AA}$ (рисунок 1), что соответствует α фазе Cd_3As_2 . Пленки Cd_3As_2 характеризовались размытой дифракционной картиной, типичной для аморфных материалов, с широкими максимумами типа «гало».

По результатам спектроскопии комбинационного рассеяния (рисунок 2) можно видеть характерные для пленок и наноструктур Cd_3As_2 [15, 4] пики при 193 и 246 см^{-1} (симметрия $B_{1g} + B_{2g}$), а также пик при 303 см^{-1} (A_{1g}), наличие которого может быть объяснено в рамках трехзонной модели [21]. В отличие от рамановского спектра, полученного для кристаллической мишени Cd_3As_2 , пики в спектрах для пленок имеют большую ширину, что также свидетельствует о меньшей степени кристалличности. Толщина пленок Cd_3As_2 определялась на сколе при помощи сканирующего электронного микроскопа (СЭМ) Nova NanoSem 450 и составляла около 50 нм (рисунок 3). По результатам энергодисперсионной рентгеновской спектроскопии состав всех полученных пленок Cd_3As_2 был стехиометрическим и однородным по поверхности, соотношение $\text{Cd}/\text{As} = 1.5$.

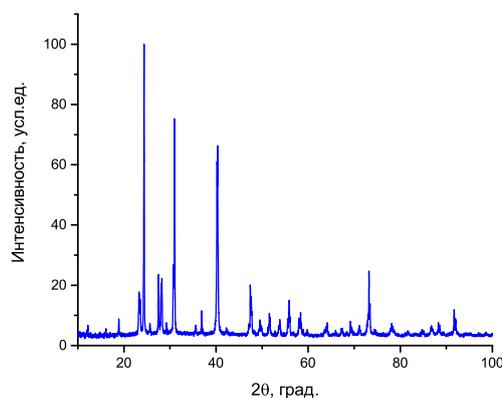


Рис. 1. Дифрактограмма кристаллов Cd_3As_2
Fig. 1. Diffraction pattern of Cd_3As_2 crystals

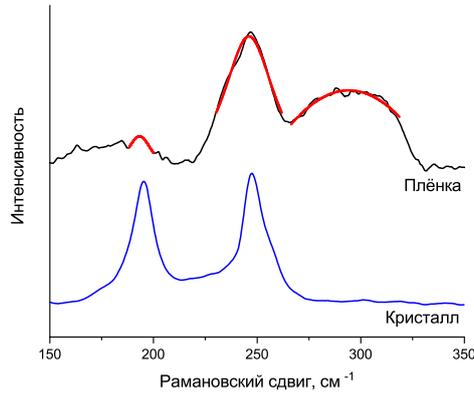


Рис. 2. Рамановский спектр пленки Cd_3As_2 и материала мишени
Fig. 2. Raman spectrum of Cd_3As_2 film and target material

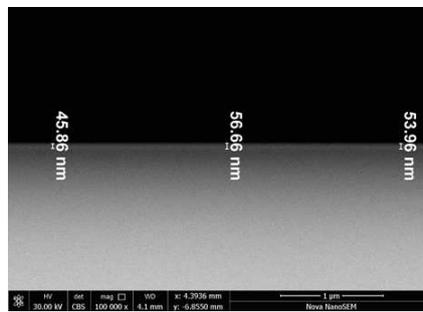


Рис. 3. Поперечное СЭМ-изображение пленки Cd_3As_2 на подложке SrTiO_3
Fig. 3. Cross-sectional SEM image of Cd_3As_2 film on a SrTiO_3 substrate

Измерения электрофизических свойств пленок Cd_3As_2 проводили по стандартной шеститочечной схеме на установке Mini Cryogen Free Systems в диапазоне температур 3–300 К и полях до 5 Тл. Контактные площадки получали магнетронным напылением индия. Крепление медных проводов осуществлялось механически с помощью индия.

3. Результаты и обсуждение. Пленка может рассматриваться как 2D-система, если ее толщина l меньше, чем длина свободного пробега электрона $l_e = \frac{\hbar\sqrt{2\pi n_e\mu}}{e}$, где \hbar – постоянная Планка, n_e – холловская концентрация носителей заряда, μ – подвижность носителей. Для наблюдения эффектов квантовой интерференции соответствующей шкалой длины является длина фазовой когерентности L_ϕ . Условие $L_\phi \approx l$, которое наблюдается в пленке Cd_3As_2 в диапазоне температур от 3 К до 80 К (на основе анализа, приведенного ниже и на рисунке 4), может указывать на WL, электрон-электронное взаимодействие и на поведение, характерное для полуметалла Вейля [13]. С увеличением температуры, в диапазоне от 100 К до 180 К, $L_\phi < l$, т.е. Cd_3As_2 начинает вести себя как дираковский полуметалл.

В 2D системах с приложенным перпендикулярным магнитным полем B_\perp Хиками, Ларкин и Нагаока впервые описали наличие спин-орбитальной связи для зависящей от температуры поправки WAL к проводимости [7]. Формула поправки может быть записана как:

$$\Delta\sigma_\perp(B) \approx \alpha \frac{-e^2}{2\pi^2\hbar} \left[\Psi(0.5 + B_\phi/B) - \ln(B_\phi/B) \right] + cB^2, \quad (1)$$

где $\Delta\sigma_\perp(B) = \sigma(B) - \sigma(0)$ – магнетопроводимость, $\sigma = \frac{L}{W \cdot R_{xx}(B)}$ – электропроводность, L и W – длина и ширина образца, соответственно, $R_{xx}(B)$ – сопротивление в магнитном поле $B \perp E$, $\Psi(x)$ – дигамма функция, $B_\phi = \frac{\hbar}{4eL_\phi^2}$ – характеристическое поле, L_ϕ – длина фазовой когерентности. Теоретическое значение параметра α должно составлять -0.5 и -1 для WAL и WL, соответственно.

На рисунке 4 показана магнетопроводимость пленки Cd_3As_2 при различных температурах.

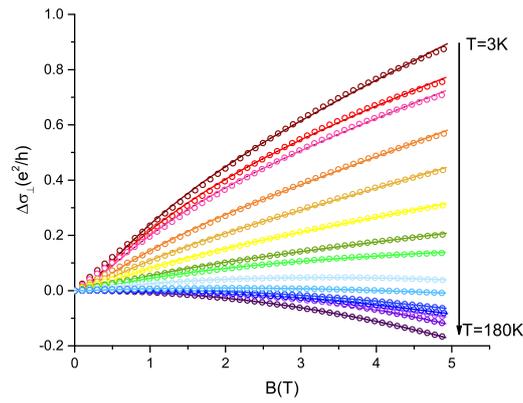


Рис. 4. Магнитопроводимость образца Cd_3As_2 (кружки) в зависимости от магнитного поля в $B \perp E$ при температуре от 3 до 180 К и теоретические данные (сплошные кривые), рассчитанные из (1)
 Fig. 4. The magnetoconductivity of sample Cd_3As_2 (hole circle) vs magnetic field in $B \perp E$ at temperature from 3 K to 180 K along with fitting (solid curves) to the Equation 1

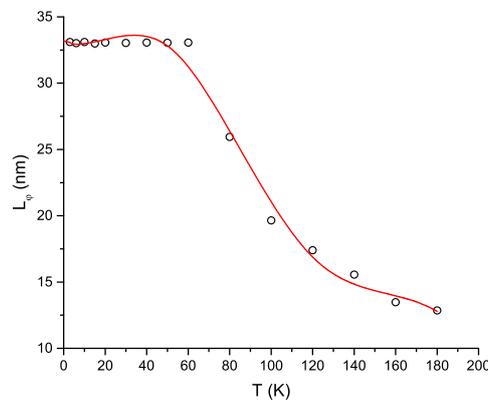


Рис. 5. Зависимость длины фазовой когерентности (кружки) от температуры
 Fig. 5. The dephasing length (hole circle) vs temperature

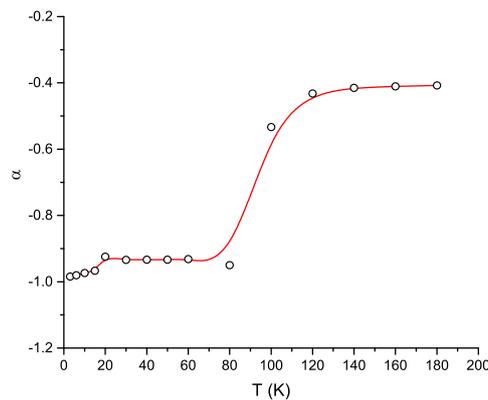


Рис. 6. Зависимость параметра α (кружки) от температуры
 Fig. 6. The parameter α (hole circle) vs temperature

На рисунке 5 показана температурная зависимость длины фазовой когерентности L_ϕ . В диапазоне температур от 3 К до 80 К длина фазовой когерентности оставалась практически неизменной и составляла $L_\phi \approx 35$ нм. Полученные результаты позволяют предположить, что в диапазоне температур от 3 К до 80 К должен быть WL, а в диапазоне от 100 К до 180 К – WAL, соответственно. Параметр α отражает количество независимых каналов проводимости в пленке. Однако, для безмассовых дираковских фермионов в

трехмерных топологических изоляторах WAL ($\alpha = -0.5$) всегда существует для каждого значения спин-орбитального рассеяния [1]. На рисунке 6 показана температурная зависимость параметра α . В работе [22] отмечается, что в пленках Cd_3As_2 могут сосуществовать друг с другом несколько независимых каналов проводимости с разной силой спин-орбитального рассеяния, что приводит к $\alpha < -0.5$.

4. Заключение. Мы исследовали магнетопроводимость тонких пленок Cd_3As_2 . Обнаружено, что в тонких пленках механизмы спин-орбитального рассеяния играют важную роль в определении того, испытывает ли система слабую локализацию (WL) или слабую антилокализацию (WAL), что сильно влияет на зависимость квантовых поправок (длина фазовой когерентности L_ϕ , параметр α) от температуры, которые рассчитываются в рамках модели Хиками, Ларкина и Нагаока. Обнаружено, что в диапазоне температур до 80 К наблюдается эффект слабой локализации, а в диапазоне от 100 К до 180 К – слабой антилокализации.

Список литературы

1. Adroguer P., Liu W. E., Culcer D., Hankiewicz E. M. 2015. Conductivity corrections for topological insulators with spin-orbit impurities: Hikami-Larkin-Nagaoka formula revisited. *Phys. Rev. B*, 92: 241402.
2. Armitage N.P., Mele E.J., Vishwanath A. 2018. Weyl and Dirac semimetals in three-dimensional solids. *Rev. Mod. Phys.*, 90: 015001.
3. Beenakker C. W. J. van Houten H. 1988. Boundary scattering and weak localization of electrons in a magnetic field. *Phys. Rev. B*, 38: 3232.
4. Cheng P., Zhang C., et al. 2016. Thickness-dependent quantum. Thickness-dependent quantum oscillations in Cd_3As_2 thin films. *New J. Phys.*, 18: 083003.
5. Hasan M. Z., Kane C. L. 2010. Colloquium: Topological insulators. *Rev. Mod. Phys.*, 82(4) : 3045–3067.
6. He H.-T. et al. 2011. Impurity Effect on Weak Antilocalization in the Topological Insulator Bi_2Te_3 . *Phys. Rev. Letts.*, 106: 166805.
7. Hikami S., Larkin A. I., Nagaoka Y. 1980. Spin-Orbit Interaction and Magnetoresistance in the Two Dimensional Random System. *Prog. Theor. Phys.*, 63: 707.
8. Huang X. et al. 2015. Observation of the Chiral-Anomaly-Induced Negative Magnetoresistance in 3D Weyl Semimetal TaAs. *Phys. Rev. X*, 5: 031023.
9. Kim H.-J. et al. 2013. Dirac versus Weyl Fermions in Topological Insulators: Adler-Bell-Jackiw Anomaly in Transport Phenomena. *Phys. Rev. Letts.*, 111: 246603.
10. Li H. et al. 2016. Negative Magnetoresistance in Dirac Semimetal Cd_3As_2 . *Nat. Commun.*, 7: 10301.
11. Liu Y. et al. 2015. Gate-tunable quantum oscillations in ambipolar Cd_3As_2 thin films. *NPG Asia Mater.*, 7: e221.
12. Lu H.-Z., Shen S.-Q. 2011. Weak localization of bulk channels in topological insulator thin films. *Phys. Rev. B*, 84: 125138.
13. Lu H.-Z., Shen S.-Q. 2014. Finite-Temperature Conductivity and Magnetoconductivity of Topological Insulators. *Phys. Rev. Letts.*, 112: 146601.
14. Potter A. C., Kimchi I., Vishwanath A. 2014. Quantum oscillations from surface Fermi arcs in Weyl and Dirac semimetals. *Nat. Commun.*, 5: 5161.
15. Suslov A. V., Davydov A. B., et al. 2019. Observation of subkelvin superconductivity in Cd_3As_2 thin films. *Phys. Rev. B*, 99: 094512.
16. Qi X.-L., Zhang S.-C. 2011. Topological insulators and superconductors. *Rev. Mod. Phys.*, 83(4) : 1057–1110.
17. Wang H. et al. 2014. Crossover between weak antilocalization and weak localization of bulk states in ultrathin Bi_2Se_3 films. *Sci. Rep.*, 4: 5817.
18. Wang S. et al. 2017. Quantum transport in Dirac and Weyl semimetals: a review. *Advances in Physics: X*, 2(3): 518--544.
19. Wang Z. et al. 2012. Dirac semimetal and topological phase transitions in A_3Bi ($\text{A} = \text{Na}, \text{K}, \text{Rb}$). *Physical Review B*, 85(19).

20. Wang Z. et al. 2013. Three-dimensional Dirac semimetal and quantum transport in Cd_3As_2 . *Phys. Rev. B*, 88: 125427.
21. Weszka J., Renucci M., Zwick A. 1986. Some aspects of raman scattering in Cd_3As_2 single crystals. *physica status solidi (b)*, 133.(1): 57–64.
22. Zhao B., et al. 2016. Weak antilocalization in Cd_3As_2 thin films. *Scientific Reports*, 6: 1.
23. Zhao Y. et al. 2015. Anisotropic Fermi Surface and Quantum Limit Transport in High Mobility Three-Dimensional Dirac Semimetal Cd_3As_2 . *Phys. Rev. X*, 5: 031037.
24. Zyuzin A. A., Hook M. D., Burkov A. A. 2011. Parallel magnetic field driven quantum phase transition in a thin topological insulator film. *Phys. Rev. B*, 83: 245428.

References

1. Adroguer P., Liu W. E., Culcer D., Hankiewicz E. M. 2015. Conductivity corrections for topological insulators with spin-orbit impurities: Hikami-Larkin-Nagaoka formula revisited. *Phys. Rev. B*, 92 : 241402.
2. Armitage N. P., Mele E. J., Vishwanath A. 2018. Weyl and Dirac semimetals in three-dimensional solids. *Rev. Mod. Phys.*, 90: 015001.
3. Beenakker C. W. J. van Houten H. 1988. Boundary scattering and weak localization of electrons in a magnetic field. *Phys. Rev. B*, 38: 3232.
4. Cheng P., Zhang C., et al. 2016. Thickness-dependent quantum. Thickness-dependent quantum oscillations in Cd_3As_2 thin films. *New J. Phys.*, 18: 083003.
5. Hasan M. Z., Kane C. L. 2010. Colloquium: Topological insulators. *Rev. Mod. Phys.*, 82(4) : 3045–3067.
6. He H.-T. et al. 2011. Impurity Effect on Weak Antilocalization in the Topological Insulator Bi_2Te_3 . *Phys. Rev. Letts.*, 106: 166805.
7. Hikami S., Larkin A. I., Nagaoka Y. 1980. Spin-Orbit Interaction and Magnetoresistance in the Two Dimensional Random System. *Prog. Theor. Phys.*, 63: 707.
8. Huang X. et al. 2015. Observation of the Chiral-Anomaly-Induced Negative Magnetoresistance in 3D Weyl Semimetal TaAs. *Phys. Rev. X*, 5: 031023 .
9. Kim H.-J. et al. 2013. Dirac versus Weyl Fermions in Topological Insulators: Adler-Bell-Jackiw Anomaly in Transport Phenomena. *Phys. Rev. Letts.*, 111: 246603.
10. Li H. et al. 2016. Negative Magnetoresistance in Dirac Semimetal Cd_3As_2 . *Nat. Commun.*, 7 : 10301.
11. Liu Y. et al. 2015. Gate-tunable quantum oscillations in ambipolar Cd_3As_2 thin films. *NPG Asia Mater.*, 7: e221.
12. Lu H.-Z., Shen S.-Q. 2011. Weak localization of bulk channels in topological insulator thin films. *Phys. Rev. B*, 84: 125138.
13. Lu H.-Z., Shen S.-Q. 2014. Finite-Temperature Conductivity and Magnetoconductivity of Topological Insulators. *Phys. Rev. Letts.*, 112: 146601.
14. Potter A. C., Kimchi I., Vishwanat, A. 2014. Quantum oscillations from surface Fermi arcs in Weyl and Dirac semimetals. *Nat. Commun.*, 5: 5161.
15. Suslov A. V., Davydov A. B., et al. 2019. Observation of subkelvin superconductivity in Cd_3As_2 thin films. *Phys. Rev. B*, 99: 094512.
16. Qi X.-L., Zhang S.-C. 2011. Topological insulators and superconductors. *Rev. Mod. Phys.*, 83(4): 1057–1110.
17. Wang H. et al. 2014. Crossover between weak antilocalization and weak localization of bulk states in ultrathin Bi_2Se_3 films. *Sci. Rep.*, 4: 5817.
18. Wang S. et al. 2017. Quantum transport in Dirac and Weyl semimetals: a review. *Advances in Physics: X*, 2(3): 518–544.
19. Wang Z. et al. 2012. Dirac semimetal and topological phase transitions in A_3Bi ($\text{A} = \text{Na}, \text{K}, \text{Rb}$). *Physical Review B*, 85(19).

20. Wang Z. et al. 2013. Three-dimensional Dirac semimetal and quantum transport in Cd_3As_2 . Phys. Rev. B, 88: 125427.
21. Weszka J., Renucci M., Zwick A. 1986. Some aspects of raman scattering in Cd_3As_2 single crystals. physica status solidi (b), 133.(1): 57–64.
22. Zhao B., et al. 2016. Weak antilocalization in Cd_3As_2 thin films. Scientific Reports, 6: 1.
23. Zhao Y. et al. 2015. Anisotropic Fermi Surface and Quantum Limit Transport in High Mobility Three-Dimensional Dirac Semimetal Cd_3As_2 . Phys. Rev. X, 5: 031037.
24. Zyuzin A. A., Hook M. D., Burkov A. A. 2011. Parallel magnetic field driven quantum phase transition in a thin topological insulator film. Phys. Rev. B, 83: 245428.

Получена 01.03.2021

Никulichева Татьяна Борисовна – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры прикладной математики и компьютерного моделирования института инженерных и цифровых технологий Белгородского государственного национального исследовательского университета

 <http://orcid.org/0000-0001-6661-3959>

ул. Победы, 85, г. Белгород, 308015, Россия

E-mail: nikulicheva@bsu.edu.ru

Захвалинский Василий Сергеевич – доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры теоретической и экспериментальной физики института инженерных и цифровых технологий Белгородского государственного национального исследовательского университета

 <http://orcid.org/0000-0001-7055-8243>

ул. Победы, 85, г. Белгород, 308015, Россия

E-mail: zakhvalinskii@bsu.edu.ru

Иванов Олег Николаевич – доктор физико-математических наук, профессор кафедры материаловедения и нанотехнологий института инженерных и цифровых технологий Белгородского государственного национального исследовательского университета

ул. Победы, 85, г. Белгород, 308015, Россия

E-mail: ivanov.oleg@bsu.edu.ru

Пилюк Евгений Александрович – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры теоретической и экспериментальной физики института инженерных и цифровых технологий Белгородского государственного национального исследовательского университета

 <http://orcid.org/0000-0003-4979-5724>

ул. Победы, 85, г. Белгород, 308015, Россия

E-mail: pilyuk@bsu.edu.ru

Япрынцева Максим Николаевич – кандидат физико-математических наук, научный сотрудник Центра коллективного пользования «Технологии и Материалы НИУ «БелГУ»

ул. Победы, 85, г. Белгород, 308015, Россия

E-mail: yaprintsev@bsu.edu.ru

Новиков Всеслав Юрьевич – кандидат технических наук, инженер Центра коллективного пользования «Технологии и Материалы НИУ «БелГУ»

ул. Победы, 85, г. Белгород, 308015, Россия

E-mail: novikov_v@bsu.edu.ru

Саенко Михаил Юрьевич – аспирант первого года обучения кафедры материаловедения и нанотехнологий института инженерных и цифровых технологий Белгородского государственного национального исследовательского университета

ул. Победы, 85, г. Белгород, 308015, Россия

E-mail: saenkomik@gmail.com

Борисенко Александр Васильевич – аспирант первого года обучения кафедры теоретической и экспериментальной физики института инженерных и цифровых технологий Белгородского государственного национального исследовательского университета

ул. Победы, 85, г. Белгород, 308015, Россия

E-mail: 1491654@bsu.edu.ru

СОВРЕМЕННЫЕ И ПЕРСПЕКТИВНЫЕ ПОЛУПРОВОДНИКОВЫЕ МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ МИКРОЭЛЕКТРОНИКИ СЛЕДУЮЩЕГО ДЕСЯТИЛЕТИЯ (2020-2030 ГГ.)

А. А. Демидов, С. Б. Рыбалка

(Статья представлена членом редакционной коллегии А. В. Носковым)

Брянский государственный технический университет,
г. Брянск, 241035, Россия

E-mail: demandr@yandex.ru

Аннотация. В обзоре рассмотрены современные и перспективные полупроводниковые материалы (кремний (Si), карбид кремния (SiC), нитрид галлия (GaN), алмаз, оксид галлия (Ga₂O₃), нитрид алюминия (AlN), нитрид бора (BN)) с точки зрения их использования при импортозамещении существующих и создании новых изделий микроэлектроники. Дана оценка перспективности использования наиболее актуальных полупроводниковых материалов в ближайшее десятилетие.

Ключевые слова: кремний (Si), карбид кремния (SiC), нитрид галлия (GaN), алмаз, оксид галлия (Ga₂O₃), нитрид алюминия (AlN), нитрид бора (BN), силовая микроэлектроника.

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках комплексного проекта по созданию высокотехнологичного производства «Создание высокотехнологичного производства кремниевых и карбидокремниевых изделий микроэлектронной техники в малогабаритных металлополимерных корпусных исполнениях типа SOT, SO и QFN» (соглашение от 29 ноября 2019 г. № 075-11-2019-035) в организации головного исполнителя НИОКТР ФГБОУ ВО «Брянский государственный технический университет».

Для цитирования: Демидов А. А., Рыбалка С. Б. 2021. Современные и перспективные полупроводниковые материалы для микроэлектроники следующего десятилетия (2020-2030 гг.). Прикладная математика & Физика. 53(1): 53–72. DOI 10.52575/2687-0959-2021-53-1-53-72.

MODERN AND PROMISING SEMICONDUCTOR MATERIALS FOR MICROELECTRONICS OF THE NEXT DECADE (2020-2030)

A. A. Demidov, S. B. Rybalka

(Article submitted by a member of the editorial board A. V. Noskov)

Bryansk State Technical University,
Bryansk, 241035, Russia

E-mail: demandr@yandex.ru

Received March, 03, 2021

Abstract. In the review have been considered modern and promising semiconductor materials (silicon (Si), silicon carbide (SiC), gallium nitride (GaN), diamond, gallium oxide (Ga₂O₃), aluminum nitride (AlN), boron nitride (BN)) from the view point of their use in import substitution of existing and also creation of new microelectronic products. The prospects of using the most topical semiconductor materials in the next decade are also being assessed.

Key words: silicon (Si), silicon carbide (SiC), gallium nitride (GaN), diamond, gallium oxide (Ga₂O₃), aluminum nitride (AlN), boron nitride (BN), power electronics.

Acknowledgements: This work was carried out with financial support of the Russian Ministry of Science and High Education within the framework of complex project by creation of highly technological industry «Creation of highly technological industry of silicon and silicon carbide microelectronic technics products in small-sized metal-polymeric packages of the SOT, SO and QFN types» (agreement of 29 November No. 075-11-2019-035) at the organization of the leading performer of RDDTE (Research and Development Design and Technological Engineering) the Bryansk State Technical University

For citation: Demidov A. A., Rybalka S. B. 2021. Modern and promising semiconductor materials for microelectronics of the next decade (2020-2030). Applied Mathematics & Physics. 53(1): 53–72 (in Russian). DOI 10.52575/2687-0959-2021-53-1-53-72.

1. Введение. Одна из стремительно развивающихся и наукоемких областей электроники – это силовая электроника. В настоящее время около 40% всей мировой энергии потребляется в виде электрической энергии, и силовая электроника играет ключевую роль в ее цикле производства-хранения-распределения [34, 23, 25, 3, 30]. Область применения изделий силовой электроники весьма широка:

установки индуктивного нагрева, частотные преобразователи, преобразователи электроэнергии с мягкой коммутацией, бесконтактные коммутаторы устройств импульсного электропитания, автомобильная электроника, железнодорожные модули питания, РЛС и др. При этом требования потребителей к конечным изделиям непрерывно растут. Они должны работать все быстрее и в более жестких условиях, а их размеры и цены должны снижаться.

Силовая электроника, основанная на кремниевых приборах, постепенно перестает удовлетворять нарастающим требованиям к функциональным возможностям, массе, объёму, ресурсу работы и надежности преобразовательных устройств [15, 1, 12, 41, 45]. Развитие электроники в целом и силовой микроэлектроники в частности сопровождается внедрением новых технологий и полупроводниковых материалов, способных повысить эффективность и надежность работы преобразовательных устройств. Стоит отметить, что кремний (Si) и арсенид галлия (GaAs) все еще остаются доминирующим полупроводниковыми материалами в силовой электронике, хотя и обладают важными ограничениями в отношении возможности блокировки напряжения, рабочей температуры, частоты переключения и др. [34, 23, 25]. Дальнейшее развитие микроэлектроники требует перехода от кремния в пользу широкозонных полупроводников, которые превосходят кремний по целому ряду электрофизических свойств и представляют собой наиболее подходящий класс базовых полупроводниковых материалов для экстремальной силовой электроники [34, 23, 25, 3, 12, 41, 45]. В частности, большая, чем у Si и GaAs, ширина запрещенной зоны дает широкозонным материалам следующие преимущества [25, 12, 41, 45]:

- большая рабочая температура;
- возможность создания на основе этих материалов устройств с видимым диапазоном, светоизлучающих устройств;
- высокие критические поля пробоя;
- высокая радиационная стойкость.

Таблица 1. Физические и электрические свойства [25, 12, 28] широко используемых (Si, GaAs) и перспективных полупроводниковых материалов (широкозонных SiC, GaN, Ga₂O₃ и экстремально широкозонных алмаза и AlN). *a* – подвижность вдоль *a*-оси. *c* – подвижность вдоль *c*-оси. *Оценочное значение. **2DEG – двумерный электронный газ.

Table 1. Physical and electrical properties [25, 12, 28] of widely used (Si, GaAs) and promising semiconductor materials (wide-gap SiC, GaN, Ga₂O₃ and extremely wide-gap diamond and AlN). *a* – mobility along the *a*-axis. *c* – mobility along the *c*-axis. *Estimated value. ** 2DEG - two-dimensional electron gas.

Материал	Ширина запрещенной зоны E_g (эВ)	Концентрация собственных носителей заряда n_i (см ⁻³)	Диэлектрическая постоянная ϵ_r	Подвижность электронов μ_n (см ² /(В·с))	Критическая напряженность поля пробоя E_c (МВ/см)	Насыщенная скорость дрейфа электронов v_{sat} (10 ⁷ см/с)	Теплопроводность λ (Вт/см К)	Температура Дебая T_D (К) [12]
Массово используемые материалы								
Si	1.12	1.5×10^{10}	11.8	1350	0.25	1.0	1.5	650
GaAs	1.42	1.8×10^6	13.1	8500	0.4	1.2	0.55	350
Массово внедряемые новые широкозонные материалы								
4H-SiC	3.26	8.2×10^{-9}	10	720 ^a 650 ^c	2.0*	2.0	4.5	1200
2H-GaN	3.39	1.9×10^{-10}	9.9	1000 ^a 2000 ^{**}	3.3*	2.5	2.5 4.1*	600
Перспективные экстремально широкозонные материалы								
Ga ₂ O ₃	4.5-4.9	2.6×10^{-19} -1.2×10^{-22}	10	300	8	1.0	0.13- 0.21	240
Алмаз	5.45	1.6×10^{-27}	5.5	2800	10	2.7	22	1850
2H-AlN	6.2	$\sim 10^{-34}$	8.5	300	12*	1.7	2.85	1150

На текущий момент наиболее исследуемыми представителями широкозонных полупроводников являются карбид кремния (SiC), нитрид галлия (GaN) и алмаз. В настоящем обзоре рассмотрены наиболее перспективные, по мнению авторов, широкозонные полупроводники, использование которых позволит создавать изделия электронной и микроэлектронной техники с параметрами, значительно превышающими существующие кремниевые аналоги.

2. Физические и электрические свойства современных и перспективных полупроводниковых материалов. Основные физические и электрические свойства широко используемых (Si, GaAs) и

наиболее перспективных широкозонных полупроводниковых материалов (SiC, GaN, Ga₂O₃, алмаза и AlN) приведены в таблице 1 [25, 12, 28].

Из таблицы 1 видно, что критическая напряженность поля пробоя (E_c) имеет тенденцию к увеличению с возрастанием ширины запрещенной зоны (E_g). Для начинающих массовое внедрение новых широкозонных полупроводниковых материалов SiC и GaN поле пробоя примерно на порядок выше, чем у доминирующего на рынке кремния. Кроме того, теплопроводность SiC и GaN в 3 и 1.5 раза лучше, чем у Si, что делает их крайне привлекательными для силовых коммутационных аппаратов [25].

Значение температуры Дебая T_D можно рассматривать как характеристику верхнего температурного предела для работы устройств на основе данного материала. Следует отметить, что T_D у GaN ниже, чем у SiC. Существует также целый класс широкополосных материалов (II-VI), для которых T_D даже ниже, чем у GaN. Это обстоятельство объясняет тот факт, что до сих пор не удавалось изготовить высокоомощных высокотемпературных устройств на основе соединений II-VI, несмотря на их более широкую энергетическую щель [12].

На рис. 1 приведены частотно-мощностные диапазоны применения электроники на базе различных полупроводниковых материалов.

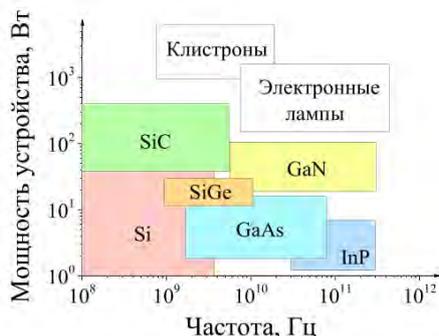


Рис. 1. Частотно-мощностные диапазоны применения электроники на базе различных полупроводниковых материалов [13]

Fig. 1. Frequency-power ranges of the use of electronics based on various semiconductor materials [13]

3. Массово внедряемые новые широкозонные материалы. На текущий момент внимание мировых производителей силовых полупроводниковых приборов в первую очередь сосредоточено на двух новых материалах с широкой запрещенной зоной – карбиде кремния (SiC) и нитриде галлия (GaN). На приведенном ниже рисунке 2 показаны сравнительные характеристики основных электрофизических свойств Si, 4H-SiC и GaN с указанием областей применения, для которых актуальными являются разные характеристики [60, 52]. Совершенствование и разработка методов сублимационного роста кристаллов позволила разработать методику выращивания объемных монокристаллов для новых широкозонных материалов SiC и GaN, чтобы заместить доминирующий кремний в области экстремальной силовой электроники [25, 30, 54, 49, 24, 67, 29].

В настоящий момент на базе SiC и GaN разработаны практически все типы изделий, что и на классическом Si (см. таблицу 2), однако в основном из-за существенно более высокой себестоимости конечных изделий их массовое внедрение затягивается.

По оценкам IHS Technology рынок SiC/GaN силовых полупроводниковых устройств [6], рост которого стимулируется увеличением их применения в источниках питания, фотовольтических преобразователях и промышленных электроприводах, за десятилетие (с 2012 по 2022 год) увеличится в 18 раз – со 143 млн. до 2,8 млрд. долл. (см. рис. 3).

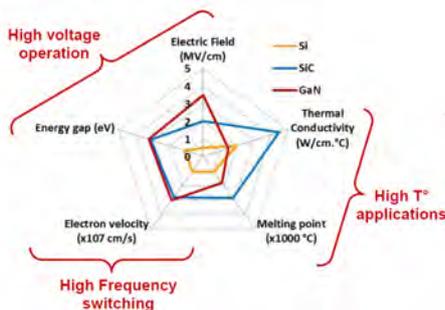


Рис. 2. Сравнение основных электрофизических свойств Si, 4H-SiC и GaN [60, 52]

Fig. 2. Comparison of the basic electrical properties of Si, 4H-SiC and GaN [60, 52]

Таблица 2. Основные материалы применяемые в изделиях микроэлектроники [2, 23, 24, 45]
 Table 2. Basic materials used in microelectronic products [2, 23, 24, 45]

Типы изделий		GaAs	Si	SiC	GaN
СВЧ	Транзисторы	+, до 70 ГГц	+, до 6 ГГц	+, до 8 ГГц	+, до 110 ГГц
	Диоды	+	+	+	+
	ИС	+	+	-	+
Силовая электроника	Транзисторы	-	+	+	+
	Диоды	-	+	+	+
	Модули	-	+	+	+
	Драйверы	-	+	+	+
СБИС		-	+	-	+
Светодиоды		-	-	-	+
МЭМС		-	+	-	+
Солнечные элементы		+	+	-	-
Радиационно-стойкие ИЭТ		+	+	+	+

3.1. Карбид кремния (SiC). По мнению ряда авторов [25, 12, 45] в целом, SiC – более перспективный материал для создания мощных приборов по сравнению с GaN и другими нитридами (III - N). Сравнение основных электрофизических параметров политипов карбида кремния 3C-SiC, 6H-SiC, 4H-SiC и полупроводникового материала GaN приведено ниже, в таблице 3. Принципиально недостижимое (из-за большой вероятности излучательной рекомбинации) большое время жизни носителей заряда в GaN ограничивает применение последнего для создания биполярных приборов. В униполярных приборах низкая теплопроводность и меньшая температура Дебая снижают максимальную рассеиваемую мощность. По остальным электрофизическим параметрам (скорость насыщения носителей, поле пробоя, подвижность) объемный GaN также не имеет существенных преимуществ над карбидом кремния [12] (см. таблицу 3). Тем не менее, возможно, что GaN-диоды Шоттки ввиду их значительно более низкой себестоимости будут конкурентоспособными с SiC-диодами Шоттки при напряжениях до 1000 В [12, 53, 57].

SiC широко используется в оптоэлектронике в качестве подложек для светодиодов с излучением в видимом диапазоне света, а также для изготовления мощных силовых диодов и транзисторов, способных работать в сложных условиях – при повышенных температурах, воздействии проникающей радиации, электрических и магнитных полей. В последнее время серьезное внимание уделяется перспективам применения SiC для создания квантовых усилителей (мазеров).



Рис. 3. Динамика развития рынка силовых SiC-и GaN-компонентов [6]
 Fig. 3. Development dynamics of the market for power SiC and GaN components [6]

Большой интерес представляют также источники одиночных фотонов на вакансиях кремния в SiC, функционирующие при комнатной температуре в инфракрасном (ИК) диапазоне, что важно с точки зрения применения в медицине [12].

Диоды Шоттки (ДШ) на основе 4H-SiC уже постепенно вытесняют высоковольтные быстровосстанавливающиеся диоды (БВД) на основе кремния. Главный недостаток кремниевых БВД состоит в том, что они работают с инжекцией неосновных носителей, а накопление неосновных носителей в приборе ограничивает его быстродействие при переключении. В существующих кремниевых ДШ, хотя они и

работают без инжекции и быстро переключаются, обратное напряжение, которое они способны блокировать, не превышает 200 В. В 4H-SiC поле лавинного пробоя на порядок больше, чем в кремнии. Это позволяет достичь большого обратного напряжения при относительно высоком уровне легирования блокирующей базы, а высокий уровень легирования в свою очередь обеспечивает относительно небольшое сопротивление в прямом направлении [12].

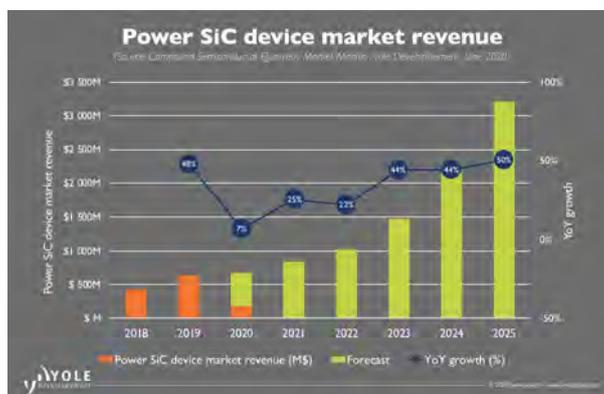


Рис. 4. Оценка компанией Yole Development долгосрочной эволюция рынка силовой электроники на основе SiC [65]
Fig. 4. Evaluation by Yole Development of the long-term evolution of the SiC-based power electronics market [65]

В ближайшие годы следует ожидать расширение области применения приборов на основе материалов с большой шириной запрещенной зоны, в первую очередь на основе 4H-SiC [25, 12, 45]. Высоковольтные 4H-SiC-диоды и 4H-SiC-транзисторы ключевого типа перспективны для создания малогабаритных силовых преобразователей широкой номенклатуры, работающих с высокой плотностью мощности благодаря высокой частоте преобразований, высокой допустимой рабочей температуре и упрощенной системе охлаждения. Высоковольтные импульсные 4H-SiC-диоды должны быть востребованы в новых системах связи и передачи информации (импульсное сверхширокополосное радио), в сверхширокополосных радиолокаторах, в системах импульсной энергетики [12].

Ключом к более широкому применению SiC является поиск экономически более эффективных технологий производства монокристаллических структур, которые позволят выпускать пластины с размерами, оптимальными для серийного производства.

В соответствии с прогнозом компания Yole Development к 2025 году [65] объем продаж рынка силовой электроники на основе SiC достигнет 2.5 млрд. дол., при этом начиная с 2021 г. темпы роста продаж начнут значительно расти, составив 50% к 2025 г. (см. рис. 4).

3.2. Нитрид галлия (GaN). Основные области применения прямозонного полупроводника GaN – оптоэлектроника [19], высокочастотная, сверхвысокочастотная (см. рис. 1) и силовая электроника до 1000 В [40, 9]. Главное преимущество GaN перед другими перспективными для изготовления мощных приборов широкозонными материалами (SiC и алмаз) – высокие характеристики GaN-приборов при относительно низких затратах на их изготовление. Карбид кремния и алмаз – дорогостоящие материалы и объем их поставок ограничен. Кроме того, пока подложек больших размеров на основе этих материалов нет. В то же время благодаря совершенствованию процессов эпитаксиального роста GaN на кремниевых подложках (стоимость которых примерно на два порядка меньше стоимости подложек карбида кремния) возможно изготовление высококачественных GaN-транзисторов на пластинах большого диаметра. Однако отсутствие собственной подложки большого диаметра, а также низкая теплопроводность (см. рис. 2 и табл. 1) существенно сужают области его применения. Формирование эпитаксиального слоя (эпслоя) GaN на инородной подложке (например, Si или 4H-SiC [39]) приводит к более низкому качеству этого слоя и накладывает ограничения на температурные режимы работы такой структуры. Это вызвано различием постоянных решетки и коэффициентов теплового расширения материала подложки и GaN. Кроме того, применение такой гетерогенной структуры ограничивается приборами с горизонтальным дизайном.

Необходимо отметить, что силовые приборы на Si, GaAs, SiC создаются либо на монокристаллах, либо на базовых гомоэпитаксиальных слоях, т. е. в качестве подложек используется «родной» кристалл. Выращивание эпитаксиальных GaN-структур на монокристаллических подложках SiC и Si осложняется кристаллографическими несоответствиями на границе раздела двух полупроводников, что приводит к механическим напряжениям и высокой дефектности структур. Поэтому качественные коммерческие монокристаллические GaN-подложки появились лишь недавно [25, 45, 20].

Одно из самых перспективных свойств GaN [5] с точки зрения создания приборов для силовой электроники – возможность формирования AlGaN/GaN гетероструктурных полевых транзисторов с малым сопротивлением в открытом состоянии (R_{dson}) (рис. 5). Благодаря высоким значениям подвижности

и концентрации носителей заряда двухмерного электронного газа (2DEG), формируемого у границы раздела гетероструктуры, ток насыщения такой структуры велик, а благодаря большой ширине запрещенной зоны материала велика и выходная мощность устройств на основе AlGaIn/GaN-приборов.

Таблица 3. Сравнение электрофизических параметров политипов карбида кремния (3C-SiC, 6H-SiC, 4H-SiC) и полупроводникового материала GaN [23, 25, 45]. (*a* – при уровне легирования $N_d = 1 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-3}$; *b* – возгонка).

Table 3. Comparison of electrophysical parameters of silicon carbide polytypes (3C-SiC, 6H-SiC, 4H-SiC) and semiconductor material GaN [23, 25, 45]. (*a* – at a doping level $N_d = 1 \cdot 10^{16} \text{ sm}^{-3}$; *b* – sublimation).

Параметр	Обозн.	Ед. изм.	GaN	3C-SiC	6H-SiC	4H-SiC
Отн. диэлектрическая проницаемость	ε_r	–	9,9	9,72*	9,66*	10 [25] 9,7*
Ширина запрещенной зоны	E_g	эВ	3,39	2,36	3,03*	3,26
Напряжённость поля лавинного пробоя	$E_{crit.}$	МВ/см	3,3	1,5	2,5 ^a	2,7 ^a
Подвижность электронов	μ_n	см ² /(В·с)	1000	800*	с: 60* ⊥ с: 400*	с: 900* ⊥ с: 800*
Подвижность дырок	μ_p	см ² /(В·с)	30	480	90	115
Насыщенная скорость дрейфа электронов	v_c	10 ⁷ см/с	2,5	2,5*	2,0*	2,0*
Теплопроводность	λ	Вт/(см·К)	2,5	4,5	4,5	4,5
Температура Дебая	Θ_D	К	600	1200	1200	1200 [8] 1300**
Температура плавления	T_m	°С	2500	2500 ^b	2500 ^b	2500 ^b
Параметр решетки	a_0	Å	3,19	4,36	3,08	3,08
Кoeffициент теплового расширения	α_a	10 ⁻⁶ К ⁻¹	5,6	3,8	4,3	4,5

*G. L. Harris, Properties of SiC. EMIS Datareviews Series, no. 13, INSPEC, IEE, UK, 1995.
G. Pensl, H. Morkoc, B. Monemar, and E. Janzen, "Silicon Carbide, III-Nitrides, and Related Materials," Materials Science Forum, vol. 264-268, pp. 3-89, 1998.
S. M. Sze, Semiconductor Devices: Physics and Technology. John Wiley & Sons, Inc., 2nd ed., 2002.
**Goldberg Yu., Levinshstein M.E., Rumyantsev S.L. in Properties of Advanced Semiconductor Materials GaN, AlN, SiC, BN, SiC, SiGe. Eds. Levinshstein M.E., Rumyantsev S.L., Shur M.S., John Wiley & Sons, Inc., New York, 2001, 93-148.

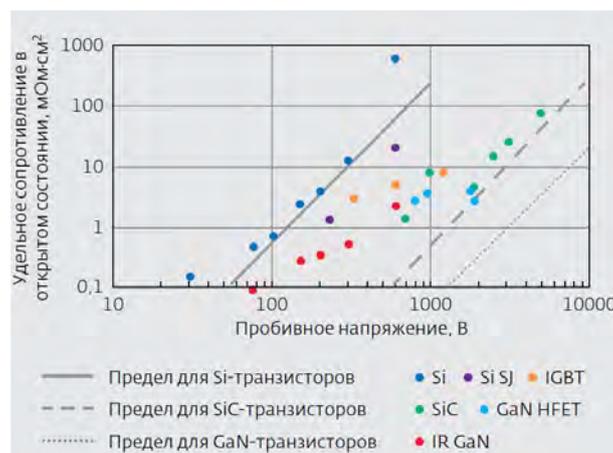


Рис. 5. Сравнение сопротивления R_{dson} GaN-гетероструктурных полевых транзисторов на кремниевых подложках компании IR и мощных Si-и SiC-транзисторов [5]

Fig. 5. Comparison of the resistance of R_{dson} GaN-heterostructure field-effect transistors on silicon substrates by IR company and high-power Si and SiC transistors [5]

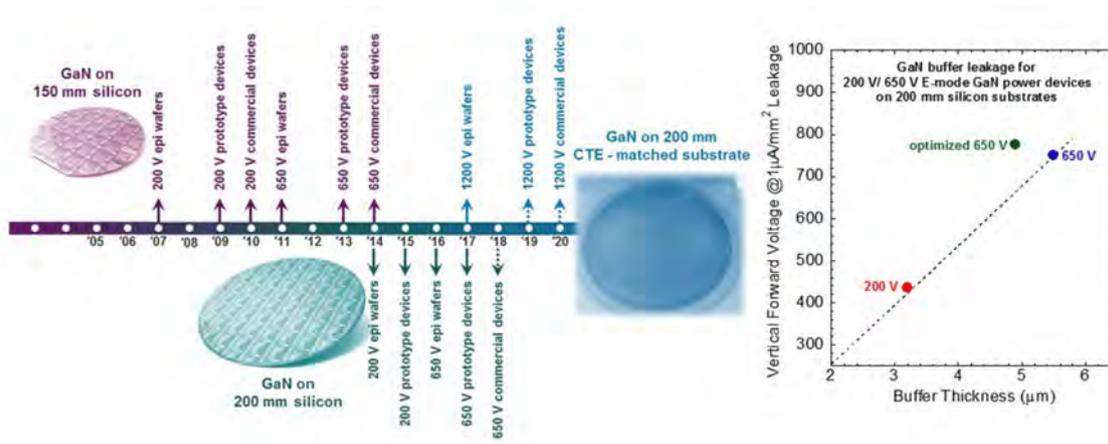


Рис. 6. Временная шкала для эпи-пластин GaN на Si 200 В, 650 В и 1200 В, прототипов и коммерческих устройств повышения мощности (слева). Вертикальное напряжение пробоя буфера (при утечке 1 мкА/мм²) при 25°С эпи-пластин GaN на Si (фирма IMEC) 200 В (красный) и 650 В (синий и зеленый) после полной обработки на 200-миллиметровой пластине КМОП (справа) [20]

Fig. 6. Timeline for 200V, 650V and 1200V Si GaN epilayer wafers, prototypes and commercial power boost devices (left). Vertical breakdown voltage of the buffer (with a leakage of 1 μA/mm²) at 25°C of GaN on Si epi wafers (IMEC) 200 V (red) and 650 V (blue and green) after full processing on a 200 mm CMOS wafer (right) [20]

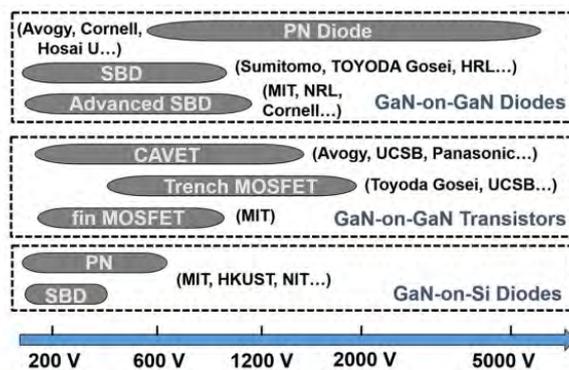


Рис. 7. Обзор основных типов устройств и классов напряжения для вертикальных силовых устройств на основе GaN, опубликованных в последние годы [20]

Fig. 7. Review of the main types of devices and voltage classes for vertical power devices based on GaN, published in recent years [20]

Необходимо отметить, что на основе гетероперехода GaN/AlGaIn созданы высокочастотные транзисторы с высокой подвижностью электронов (HEMT – High Electron Mobility Transistor), в которых используются свойства двумерного электронного газа [53, 57]. Параметры данных транзисторов превосходят параметры полевых транзисторов на основе объемного SiC.

Первые коммерческие устройства на основе GaN на напряжение 200 В, изготовленные на подложках из кремния 150 мм, были выпущены в 2010 году, а первые коммерческие устройства на 650 В последовали в 2014 году (рис. 6). После разработки технологии на пластинах размером 100 мм [20], а затем и 150 мм с использованием металлизации без Au, в 2014 году фирмой IMEC была освоена технология 200 мм подложек GaN на Si [20]. Сегодня основное внимание уделяется разработке технологий для более высокого уровня интеграции и для 1200 В с использованием 200 мм CTE (Coefficient of Thermal Expansion). При этом токи утечки на 200 мм пластин GaN позволяют выполнить оптимизацию для устройств с рабочим лимитом напряжений до 650 В (рис. 6 правая часть).

В настоящее время для силовых устройств на основе GaN рассматриваются как боковые, так и вертикальные конструкции. Вертикальные силовые устройства на основе GaN в последнее время привлекли к себе большое внимание благодаря способности достигать высокого напряжения пробоя и уровней тока без увеличения размера кристалла, превосходной надежности, достигаемой за счет перемещения пикового электрического поля от поверхности в объемные устройства, и более легкий контроль температуры, чем боковые устройства [25, 20]. С 2010 года область вертикальных силовых устройств на основе GaN выросла в геометрической прогрессии, и были продемонстрированы многочисленные вертикальные GaN диоды и транзисторы (рис. 7).

За последнее десятилетие рынок GaN был в основном ориентирован на высокопроизводительные приложения, предлагающие высокочастотное переключение, низкое сопротивление во включенном состоянии и меньший форм-фактор на системном уровне. Однако, уже в 2019 г. ситуация с GaN меняется и он входит в массовые потребительские приложения, например, китайский производитель Oppo объявил о внедрении технологии GaN HEMT в быстрых зарядных устройствах 65 Вт для своей новой флагманской модели Reno Ace, т. е. устройства питания на основе GaN вышли на массовый рынок смартфонов, что приведет к значительному росту продаж систем питания на основе GaN [69].

Помимо объемного потребительского рынка, GaN привлекает также большое внимание различных OEM-производителей и поставщиков Tier1, например Valeo и Continental в автомобильной промышленности. Действительно, GaN очень интересен для появления 48 В преобразователей DC/DC тока в гибридных электромобилях и бортовых зарядных устройствах в электромобилях. Мировой объем продаж силовых устройств на основе GaN в 2018 г. по оценкам компании Yole Development [69] составил примерно 9 млн. долларов (рис. 8). Компания Yole Development прогнозирует, что к 2024 году [69] объем продаж рынка силовой электроники на основе GaN превысит 350 миллионов долларов, при этом среднегодовой темп роста составит 85% (рис. 8).

С учетом того, что основным фактором повышения эффективности силовой электроники является наличие недорогих, эффективных и надежных устройств переключения мощности, стоит полагать, что устройства на основе GaN - прекрасные кандидаты для силовой электроники следующего поколения.

По мнению ряда авторов широкозонным полупроводником, претендующим на роль базового материала экстремальной силовой электроники, является именно нитрид галлия политипа 2H, который благодаря его фотонному и высокочастотному применению имеет уже материальную и технологическую инфраструктуру, которая может быть использована для внедрения экономически эффективных силовых коммутационных устройств в энергоэффективных системах [25, 28, 54, 49, 24, 67, 29].

В работах [25, 2, 5] подчеркивают, что феноменальные результаты, достигнутые в изделиях силовой электроники по применению технологии GaN-Si в преобразователях, источниках питания, проводных и беспроводных зарядных устройствах, делают нитрид галлия на кремнии наиболее перспективным материалом полупроводниковой микроэлектроники на ближайшие годы.

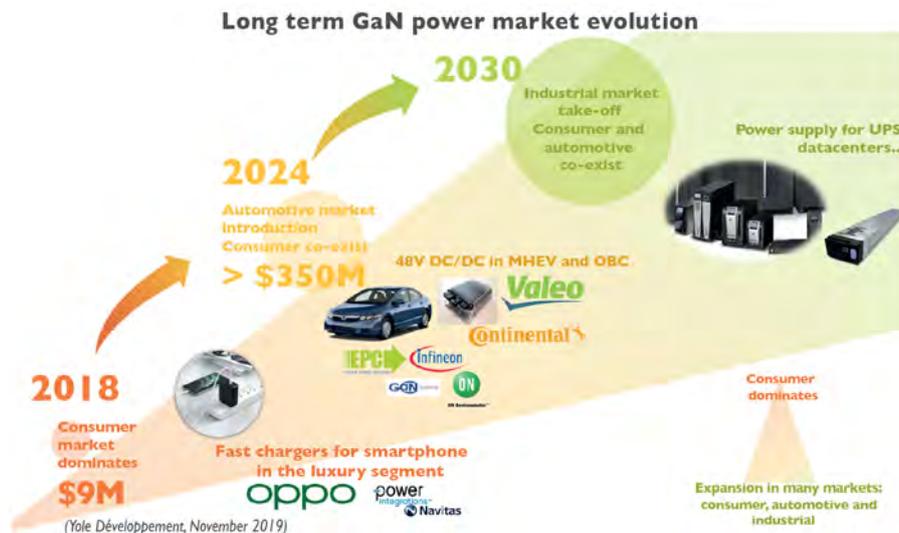


Рис. 8. Оценка компанией Yole Development долгосрочной эволюция рынка силовой электроники на основе GaN [69]

Fig. 8. Evaluation by Yole Development of the long-term evolution of the GaN-based power electronics market [69]

4. Перспективные экстремально широкозонные материалы.

4.1. Оксид галлия (Ga_2O_3). Оксид галлия (Ga_2O_3) до последнего времени не привлекал внимания исследователей в качестве перспективного материала для создания полупроводниковых приборов. По ширине запрещенной зоны (4.8 эВ) и величине пробивного электрического поля (8 МВ/см) стабильный политип β - Ga_2O_3 значительно превосходит не только кремний, но и массово внедряемые широкозонные SiC и GaN. Обоснованно можно ожидать, что Ga_2O_3 может быть весьма эффективным материалом для производства миниатюрных и эффективных силовых транзисторов. Экстремально большая ширина запрещенной зоны делает Ga_2O_3 и приборы на его основе более устойчивыми к воздействию ионизирующих излучений, что открывает перспективы для применения в сфере электроники для ядерной промышленности и космической электроники. При этом оксид галлия – великолепный материал для создания подложек при производстве полупроводниковых чипов. В отличие от GaN и SiC, кристаллы

β -Ga₂O₃ могут быть выращены из расплава, что снижает себестоимость производства подложек и приборов. В настоящее время работ, посвященных выращиванию β -Ga₂O₃, опубликовано еще не много, однако их число неуклонно растет [10, 66, 14].

До недавнего времени монокристаллы оксида галлия умели получать только в трех странах – Японии, США и Германии. Однако недавно ученые НИТУ «МИСиС», ФТИ им. А. Ф. Иоффе и компании «Совершенные кристаллы» продемонстрировали возможность изготовления нового полупроводникового материала Ga₂O₃ и эффективного управления его свойствами с помощью дешёвой и экономичной технологии его выращивания [58].

По-видимому в ближайшие 5-10 лет оксид галлия не сможет заменить SiC или GaN в качестве базового полупроводникового материала, который придет на смену кремнию, но Ga₂O₃ может быть крайне полезным при разработке изделий электронной и микроэлектронной техники нового поколения, для которых принципиально важна экстремально широкая запрещенная зона.

4.2. Алмаз. Вне конкуренции как по параметрам, так и по максимальным рабочим температурам находится алмаз [48, 18, 36]. Алмаз как экстремально широкозонный полупроводниковый материал давно привлекает внимание исследователей [4] благодаря своим выдающимся электрофизическим характеристикам, например, ширина его запрещенной зоны – 5.45 эВ, а подвижность электронов достигает 2800 см²/(В·с) (см. табл. 1). Как показывают расчеты, на основе алмазов можно создавать МДП-структуры с удельной плотностью мощности до 27 Вт/мм, плотностью носителей заряда в тонком слое до 10¹³ см⁻², напряжением пробоя порядка 10 МВ/см и рабочими частотами 100 ГГц [48, 18, 36]. Не менее важное свойство алмазов – их высокая теплопроводность, около 22 Вт/К см, что более чем в 30 раз выше, чем у GaAs (см. таблицу 1).

Приборы на основе алмаза имеют большие перспективы применения для СВЧ-электроники, мощной и радиационно-стойкой электроники [48, 18, 36, 4]. Поэтому первые попытки применения алмазов в СВЧ-приборах были направлены на создание теплопроводящих подложек, как правило, методом химического осаждения тонких пленок из газовой фазы (CVD-алмазы) [48, 18, 36]. Стоит отметить, что это направление активно развивается сегодня, в том числе в России [48, 18, 36].

С формированием активных приборных структур на основе алмазов трудностей гораздо больше. Пока не удаётся получить монокристаллические слои алмаза с помощью гетероэпитаксии, а собственные подложки имеют небольшую площадь и являются довольно дорогостоящими. Кроме того, для алмаза существуют определённые сложности с получением *p-n*-структур [12, 18, 36].

Основные сложности препятствующие созданию линейки силовых полупроводниковых приборов на основе алмаза следующие:

- отсутствие мелких донорных примесей, что затрудняет изготовления некоторых классов полупроводниковых приборов (биполярных транзисторов, диодов с *p-n*-переходами);
- наличие всего одной примеси *p*-типа, но с достаточно глубоким акцепторным уровнем в запрещенной зоне (уровень бора 0.37 эВ, энергия этого уровня начинает понижаться только при достаточно высокой концентрации бора $\sim 10^{20}$ см⁻³, но при этом почти на порядок уменьшается подвижность дырок);
- непрямая запрещенная зона, что препятствует созданию УФ диодов и лазеров;
- предельно высокая твердость алмаза, что затрудняет обработку алмазов традиционными для полупроводникового производства методами;
- невозможность получения пластин с размерами, принятыми для полупроводникового производства;
- высокая химическая устойчивость, являющаяся достоинством алмаза, вместе с тем являющаяся и недостатком, так как ограничивает число веществ, способных обрабатывать поверхность алмаза методами химического травления.

Тем не менее, к настоящему моменту имеются отдельные вполне успешные попытки изготовления ряда функционирующих устройств на алмазе, например, планарного МДП-транзистора с использованием CaF₂ в качестве затворного диэлектрика и также MESFET с самосовмещенным Т-образным затвором [21], алмазного *p-i-n*-диода допированного бором с блокирующим напряжением ~ 1 кВ (см. рис. 9) [31], алмазного MOSFET-транзистора [50] и др. [48, 18, 36].

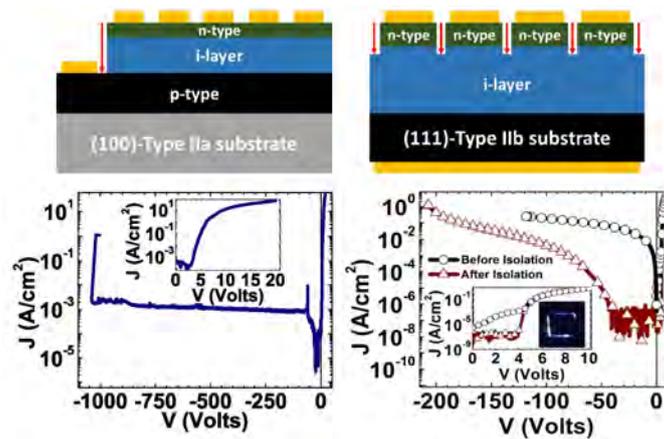


Рис. 9. Структура и вольт-амперные характеристики $p-i-n$ -диодов алмаза, выращенных на различных ориентациях подложки (100) и (111) [31]

Fig. 9. Structure and current-voltage characteristics of diamond $p-i-n$ -diodes grown on different substrate orientations (100) and (111) [31]

4.3. Нитрид алюминия (AlN). Среди материалов, активно используемых для создания диэлектрических покрытий, оптически прозрачных в широком диапазоне длин волн, исследователи и технологи в последнее время обращают свое внимание на нитрид алюминия (AlN) [27, 44, 26, 37]. Для этого есть целый ряд причин. AlN – это широкозонный полупроводник ($E_g \approx 6$ эВ), обладающий высокой теплопроводностью и в то же время малым коэффициентом теплового расширения, высокой термической и химической стабильностью, отличными пьезоэлектрическими характеристиками и высокой скоростью распространения акустических волн. Более того, прекрасная совместимость с другими соединениями III-V, выбираемыми в качестве подложки, позволяет нитриду алюминия быть наиболее перспективным материалом в производстве оптических, оптоэлектронных, высокочастотных электроакустических устройств и датчиков, в солнечной энергетике, а также сенсорике [43, 22, 70, 47]. Кроме того, в последние годы появляется большое количество работ, в которых оксидированный нитрид алюминия (AlNO) активно применяется в медицине [33].

Отметим, что уже экспериментально отработаны технологические режимы получения гетерогенных структур на основе композиции SiC-AlN с заданными свойствами. Данная структура может использоваться в чувствительных элементах датчиков, работающих в жестких условиях эксплуатации.

4.4. Нитрид бора (BN). Современные высокопроизводительные логические устройства и устройства памяти, используемые в многофункциональной электронике, построены с использованием материалов и конструкций, которые позволили значительно уменьшить размер транзистора и разместить больше схем в меньших областях [25, 45]. Однако уменьшение размеров металлических межсоединений и увеличенная плотность упаковки привели к увеличению задержки сопротивления (R) и емкости (C), которая становится сопоставимой со скоростью работы устройств. В идеале, R и C должны быть уменьшены одновременно для достижения непрерывного масштабирования устройств. Минимизация размеров межсоединений (металлических проводов, соединяющих различные электронные компоненты на микросхеме) имеет решающее значение для миниатюризации устройств. Межсоединения изолированы друг от друга непроводящими (диэлектрическими) слоями. До сих пор исследования в основном были сосредоточены на уменьшении сопротивления масштабированных межсоединений, поскольку интеграция диэлектриков с использованием процессов низкотемпературного осаждения, совместимых с дополнительными металлооксидными полупроводниками, является технически сложной задачей. Изоляционные материалы для межсоединений должны иметь низкие относительные диэлектрические проницаемости, служить диффузионными барьерами против миграции металла в полупроводники и быть термически, химически и механически стабильными [35].

В рамках решения вышеописанной задачи, в июне 2020 г. команда исследователей объявила об открытии нового материала, получившего название аморфный нитрид бор (a-BN). По мнению ученых, благодаря уникальным свойствам, a-BN может стать основой для создания полупроводников нового поколения [64]. Аморфный нитрид бора (a-BN) представляет собой тонкую (атомных размеров) структуру, содержащую атомы бора и азота. Главным достоинством a-BN стала его сверхнизкая (близкая к воздуху) диэлектрическая проницаемость, равная 1.78 и 1.16 при рабочих частотах 100 кГц и 1 МГц соответственно. Это – лучший показатель в своем классе. Полученные пленки аморфного нитрида бора толщиной три нанометра обладают механической и электрической прочностью, а их прочность на пробой составляет 7.3 мегавольт на сантиметр. Аморфный нитрид бора (a-BN) может быть выращен до масштаба стандартных вафельных пластин при сравнительно низкой температуре, не превышающих всего 400 °С.

Благодаря своим электрическим и механическим свойствам а-BN может использоваться в качестве межсоединительного изоляционного материала, сводя к минимуму появление электрических помех между слоями. Можно ожидать, что если созданная технология будет доведена до возможности ее применения в массовом масштабе, то на базе а-BN можно будет выпускать различные элементы памяти (DRAM, NAND, серверная память и др.) следующего поколения.

5. Основные преимущества, недостатки и оценка перспективности использования в ближайшее десятилетие современных и перспективных полупроводниковых материалов. Существует много различных типов полупроводниковых материалов, которые могут быть использованы в электронных устройствах. Каждый из них имеет свои преимущества, недостатки и области, где он может быть использован для обеспечения оптимальной производительности. Основные преимущества и недостатки рассмотренных полупроводниковых материалов систематизированы и кратко представлены в таблице 4. В последнем столбце таблицы 4 приведен оценочный вывод авторов обзора о перспективности использования рассмотренных полупроводниковых материалов в ближайшее десятилетие.

6. Современное состояние отечественного рынка микроэлектроники и его импортозависимость. Исключительно важное значение имеет применение современной силовой электроники, главным образом на основе новых широкозонных полупроводниковых материалов, практически во всех важнейших сферах экономики Российской Федерации: электроэнергетика, станции перекачки нефти, газовые компрессоры, ж/д транспорт, трамвайно-троллейбусный парк, ЖКХ, ТЭЦ, кондиционирование, индукционный нагрев, бытовая техника, сварка, телекоммуникации, связь, цифровая техника, электромобилестроение, LED, солнечная энергетика и т. д. Создание отечественной базы электронных компонентов на основе новых широкозонных полупроводниковых материалов, соответствующих современным достижениям мировой электроники, является важнейшей задачей при построении цифровой экономики.

Обратим внимание только на один сегмент отечественного рынка микроэлектроники – производство современных изделий электронной техники в малогабаритных корпусах. Ситуация в данном секторе одна из самых критичных на рынке микроэлектроники в России. Учитывая тенденции мирового рынка на миниатюризацию изделий электронной техники и повсеместный переход на автоматизированную набивку печатных плат, наиболее востребованными активными электронными компонентами являются изделия в малогабаритных корпусах для поверхностного монтажа [42, 51]. Анализ зарубежного рынка продаж изделий микроэлектронной техники в малогабаритных корпусах показывает их устойчивый и стабильный рост, расширение номенклатуры и улучшение электрических и эксплуатационных характеристик. Тревожным является тот факт, что в российских микро- и радиоэлектронных изделиях используется 80% зарубежных микросхем и полупроводниковых приборов в малогабаритных корпусах типа SOT (SOT-23, SOT-223, SOT-323) и др. [38]. Однако, в России предприятия, производящие корпусирование, проектировались еще в советское время и строились с расчетом на выпуск больших серий корпусов (относительно несложных, с малым количеством выводов), а отдельные типы современных малогабаритных корпусов типа SOT (Small Outline Transistor), QFN (Quad Flat No Leads package) SO (Small Outline) и др. вообще не предполагалось производить. Таким образом, из-за отсутствия серийных сборочных производств изделий в такие малогабаритные корпуса, в реализуемой в настоящее время программе импортозамещения практически полностью отсутствует этот сегмент изделий электронной техники. Это приводит к тому, что разработчики и производители радиоэлектронных блоков, аппаратуры и устройств вынуждены использовать зарубежную комплектацию.

К настоящему моменту производство устройств силовой электроники в малогабаритных металлополимерных корпусах (в основном на основе Si и GaAs и частично на основе SiC) освоено несколькими зарубежными компаниями: Texas Instruments, ST Microelectronics, Microsemi, Infineon Technologies, Linear Technology, Maxim Integrated, NXP Semiconductors, Northrop Grumman Space Technology, Avago Technologies [45, 51, 46, 71, 59, 55, 32]. Данный подход ведущих мировых производителей силовой электроники позволил им значительно повысить степени интеграции и многофункциональности выпускаемых устройств и обеспечить возможность миниатюризации аппаратуры собранной на их базе. При этом сведения об особенностях применяемых зарубежными компаниями технологий изготовления изделий в малогабаритных корпусах в открытой печати отсутствуют, так как практически все технологии содержат секреты производства («ноу-хау»).

Отметим, что в России в 90-х годах из-за существенного сокращения финансирования фундаментальных исследований и отсутствия внутреннего платежеспособного рынка высоких технологий произошло существенное отставание исследований и разработок в области силовой электроники от мирового уровня, несмотря на то, что до того времени Россия занимала лидирующие позиции в мире [3, 15, 12]. Тем не менее, за последнее десятилетие в России удалось частично восстановить потенциал и научные центры по исследованию полупроводниковых материалов силовой электроники (ФТИ им. Иоффе, СПбГЭТУ «ЛЭТИ» (Электротехнический Университет), АОЗТ «Светлана» (г. Санкт-Петербург), ОАО «Научно-исследовательский институт электронной техники» (ОАО «НИИЭТ», г. Воронеж), Институт

прикладной физики ИПФ РАН (г. Нижний Новгород), БГТУ (г. Брянск) и др.), а также производственные площадки по изготовлению устройств силовой электроники (ЗАО Научно-производственный комплекс «Электровыпрямитель» (г. Саранск), АО «ГРУППА КРЕМНИЙ ЭЛ» (г. Брянск) и др.). Например, за последние полтора-два десятилетия в лаборатории мощных полупроводниковых приборов ФТИ им. А.Ф. Иоффе разработаны высоковольтные (свыше 1 кВ) диоды на основе нового широкозонного материала 4H-SiC, реализующие потенциальные достоинства карбида кремния для силовой и импульсной электроники [8]. Разработанные в ФТИ им. А. Ф. Иоффе силовые 4H-SiC JBS-диоды (Junction Barrier Shottky) по параметрам не уступают зарубежным аналогам и внедрены в производство.

Необходимо отметить, что впервые в России предприятием АО «ГРУППА КРЕМНИЙ ЭЛ» (г. Брянск) налажен серийный выпуск 4H-SiC JBS-диодов с блокирующим напряжением до 1200 В [8]. При этом новые 4H-SiC диоды, произведенные АО «ГРУППА КРЕМНИЙ ЭЛ» [56, 62, 7, 63, 16, 11, 61], конкурентоспособны с диодами от ведущих мировых производителей, таких как CREE, Infineon и др.

Резюмируя краткий анализ только одного из секторов отечественного рынка микроэлектроники отметим, что промедление в создании серийного производства отечественных малогабаритных приборов на основе новых широкозонных полупроводников (SiC, GaN) может привести к необратимому отставанию нашей страны, повторению технологического провала 90-х годов, а в случае возможного ужесточения санкционной политики и к полной утрате ряда импортозависимых направлений и перспективы занятия заметного места на мировом рынке.

Таблица 4. Основные преимущества, недостатки и оценка перспективности использования в ближайшее десятилетие современных и перспективных полупроводниковых материалов.

Table 4. Main advantages, disadvantages and assessment of the prospects of using modern and promising semiconductor materials in the next decade.

Материал	Основные преимущества	Основные недостатки	Оценка перспективности использования в ближайшее десятилетие
Массово используемые материалы			
Si	- Низкая себестоимость. - Доступность. - Отработаны необходимые технологии.	По многим параметрам уступает новым широкозонным материалам	Постепенное вытеснение новыми широкозонными материалами
GaAs	- Низкая себестоимость. - Отработаны необходимые технологии.	По многим параметрам уступает новым широкозонным материалам	Постепенное вытеснение новыми широкозонными материалами
Массово внедряемые новые широкозонные материалы			
2H-GaN	- Относительно низкая себестоимость. - Возможность формирования гетероструктурных полевых транзисторов. - Темпы освоения новых технологии в разы превышают темпы, которыми развивались технологии создания приборов на основе Si и GaAs.	- Отсутствуют собственные подложки. - Эффект саморазогрева. - Решены не все производственные и технологические проблемы.	Станет как и SiC основным полупроводниковым материалом для создания силовых приборов к концу 2030 г.
4H-SiC	<i>По сравнению с Si:</i> - Напряжения пробоя в 10 раз больше. - В 3 раза выше ширина запрещенной зоны. - Теплопроводность в 3 раза выше. - Устойчивость к воздействию радиации; - Стабильность электрических характеристик под воздействием температуры и времени. - Высокая рабочая температура кристалла (более 600°C) позволяет создавать приборы для жестких условий эксплуатации и специальных применений. - Темпы освоения новых технологии в разы превышают темпы, которыми развивались технологии создания приборов на основе Si и GaAs.	- Дорогостоящий материал. - Преимущества по сравнению с кремнием незначительны при 600 В или ниже.	Станет как и GaN основным полупроводниковым материалом для создания силовых приборов к концу 2030 г.
Перспективные экстремально широкозонные материалы			

Ga_2O_3	<ul style="list-style-type: none"> - Экстремально большая ширина запрещенной зоны. - Ожидается, что себестоимость конечных изделий будет ниже, чем у SiC- и GaN- изделий. 	<ul style="list-style-type: none"> - Низкая теплопроводность - Трудности создания объемного кристаллического материала. 	Оксид галлия не сможет заменить SiC или GaN в качестве базового материала следующего десятилетия, но может быть использован при разработке изделий, для которых принципиально важна экстремально широкая запрещенная зона.
Алмаз	<ul style="list-style-type: none"> - Лидер по основным электрофизическим параметрам. - Экстремально большая ширина запрещенной зоны. 	<ul style="list-style-type: none"> - Дорогостоящий материал. - Отсутствие мелких донорных примесей, что затрудняет изготовления некоторых классов полупроводниковых приборов. - Непрямая запрещенная зона, что препятствует созданию УФ диодов и лазеров. - Трудности получения монокристаллических слоев. - Сложности с получением <i>p-n</i>-структур. 	Перспектива появления доступных потребителю силовых приборов на алмазе – не ранее, чем через 10-15 лет.
2H-AlN	<ul style="list-style-type: none"> - Экстремально большая ширина запрещенной зоны. - Успешно используется в AlN/GaN-гетероструктурах. 	<ul style="list-style-type: none"> - Собственные подложки очень малы по размерам и крайне дороги. - Не решены основные производственные и технологические проблемы. 	Будет активно применяться в качестве “вспомогательного” материала, например, для создания диэлектрических покрытий.

7. Заключение. В настоящем обзоре проведен анализ работ, посвященных исследованию современных и перспективных полупроводниковых материалов, с целью их возможного использования при импортозамещении существующих и создании новых изделий микроэлектроники. Основные преимущества и недостатки рассмотренных полупроводниковых материалов систематизированы и кратко представлены в таблице 4.

Проведенная в таблице 4 оценка перспективности использования рассмотренных материалов при производстве конечных изделий в ближайшее десятилетие позволяет спрогнозировать основное направление развития рынка микроэлектроники. В ближайшие годы следует ожидать расширения применения и производства приборов на основе широкозонных полупроводниковых материалов нового поколения: карбид кремния (SiC), нитрид галлия (GaN), алмаз и др.

Следует отметить, что на горизонте прогнозирования пять – десять лет нельзя полностью исключать появление новых более перспективных широкозонных полупроводниковых материалов, однако создание конечных изделий и их массовое внедрение за такой достаточно короткий срок представляется маловероятным.

Список литературы

1. Белоус А. И., Ефименко С. А., Турцевич А. С. 2013. Полупроводниковая силовая электроника. М., Техносфера. 216.
2. Бондарь Д. 2019. Полупроводниковая микроэлектроника – 2018 г. Электронные компоненты. 1: 12-17.
3. Вавилов В. С. 1994. Особенности физики широкозонных полупроводников и их практических применений. УФН. 164(3): 287-296.
4. Вавилов В. С, Конорова Е. А. 1976. Полупроводниковые алмазы. УФН. 118: 611-639.

5. Гольцова М. 2012. Мощные GaN-транзисторы. Истинно революционная технология. Электроника НТБ. 4: 86-100.
6. Гольцова М. 2014. Силовая полупроводниковая электроника Многообещающие технологии становятся реальностью. Электроника НТБ. 4:54-100.
7. Громов В., Брюхно Н., Демидов А., Дракин А, Зотин В., Кульченков Е., Рыбалка С. 2018. Исследование стойкости SiC-диодов Шоттки ЗАО «ГРУППА КРЕМНИЙ ЭЛ» к скорости нарастания обратного напряжения. Силовая электроника. 71(2): 10-12.
8. Гудилин Д. 2014. «Группа Кремний Эл»: новая отечественная элементная база для силовой электроники. Электроника НТБ. 8: 92-96.
9. Желаннов А. В., Удальцов В. Е., Федоров Д. Г. 2012. Исследование силовых диодов Шоттки на основе нитрида галлия. Вестник Новгородского государственного университета им. Ярослава Мудрого. 68: 92-94.
10. Кукушкин С. А. , Николаев В. И., Осипов А. В., Осипова Е. В., Печников А. И., Феоктистов Н. А. 2016. Эпитаксиальный оксид галлия на подложках SiC/Si. ФТТ. 58(9): 1812-1817.
11. Кульченков Е. А., Рыбалка С. Б., Демидов А. А., Дракин А. Ю. 2020. Расчет характеристик карбидокремниевых диодов Шоттки для малогабаритных металлополимерных корпусов. Прикладная математика & Физика. 52(1): 33-40.
12. Лебедев А. А, Иванов П. А, Левинштейн М. Е, Мохов Е. Н, Нагалюк С. С, Анисимов А. Н, Баранов П. Г. 2019. Электроника на основе SiC (к 100-летию Физико-технического института им. А.Ф. Иоффе РАН. УФН. 189: 803-848.
13. Михайлов А. И. Физико-технологические основы формирования канала силового МДП-транзистора на карбиде кремния: дис. ... канд. техн. наук: 05.27.01/ Михайлов Алексей Игоревич. - СПб., 2018. 182 с.
14. Рожков М. А., Колодезный Е. С., Смирнов А. М., Бугров В. Е., Романов А. Е. 2015. Сравнение характеристик диодов Шоттки на основе Ga₂O₃ и других широкозонных полупроводниковых материалов. Физика и механика материалов. 24(2): 194-200.
15. Розанов Ю. К. 2018. Силовая электроника. Эволюция и применение. М.: Знак. 140.
16. Рыбалка С.Б., Демидов А. А., Кульченков Е. А., Дракин А. Ю. 2018. Исследование dv/dt характеристик карбидокремниевых диодов Шоттки. Научные ведомости БелГУ. Серия: Математика. Физика. 50(4): 460-468.
17. Середин П. В., Голощапов Д. А., Леньшин С. и др. 2016. Особенности роста и структурно-спектроскопические исследования нанопрофилированных пленок AlN, выращенных на разориентированных подложках GaAs. Физика и техника полупроводников. 50(9): 1283-1294.
18. Хмельницкий Р. А., Талипов Н. Х., Чучева Г. В. 2017. Синтетический алмаз для электроники и оптики. М.: Изд-во ИКАР, 228.
19. Alivov Ya. I. et al. 2003. Fabrication and characterization of n-ZnO/p-AlGaIn heterojunction light-emitting diodes on 6H-SiC substrates. Appl. Phys. Lett. 83(23): 4719-4721.
20. Amano H., Baines Y., Beam E., Borga M., Bouchet T., Chalker P. et al. 2018. The 2018 GaN power electronics roadmap. Journal of Physics D: Applied Physics. 51(16): 163001.
21. Arbet-Engels V., Chang W., Yablonovich E. et al. 1995. Flexible, thin-film, GaAs hetero-junction bipolar transistors mounted on natural diamond substrates. Solid State Electronics. 38(11): 1972-1974.
22. Balasubramanian C., Bellucci S., Cinque G., Marcelli A., Guidi M. C., Piccinini M., Popov A., Soldatov A., Onorato P. 2006. Characterization of aluminium nitride nanostructures by XANES and FTIR spectroscopies with synchrotron radiation. J. Phys. Condens. Matter. 18(33): S2095.
23. Baliga B. J. 2008. Fundamentals of Power Semiconductor Devices, Berlin-Springer-Verlag, 1085.
24. Baliga B. J. 2013. Gallium nitride devices for power electronic applications. Semicond. Sci. Technol. 28(7): 074011.

25. Baliga B. J. 2019. Wide Bandgap Semiconductor Power Devices: Materials, Physics, Design, and Applications, Woodhead Publishing-Elsevier Science, 600.
26. Bathe R., Vispute R. D., Habersat D., Sharma R. P., Venkatesan T., Scozzie C. J., Ervin M., Geil B. R., Lelis A. J., Dikshit S. J., Bhattacharya R. 2001. AlN thin films deposited by pulsed laser ablation, sputtering and filtered arc techniques. *Thin Sol. Films*, 398-399: 575.
27. Bert N. A., Bondarev A. D., Zolotarev V. V., Kirilenko D. A., Lubyanskiy Y. V., Lyutetskiy A. V., Slipchenko S. O., Petrunov A. N., Pikhin N. A., Ayusheva K. R., Arsenyev I. N., Tarasov I. S. 2015. Properties of AlN films deposited by reactive ion-plasma sputtering. *Semiconductors*, 49: 1383.
28. Chow T. P., Li Z. 2012. Recent advances in high-voltage GaN MOS-gated transistors for power electronics applications. Chap. 8 in: S. Pearton (Ed.), *GaN and ZnO-based Materials and Devices*. Springer, 239-250.
29. Chow T. P., Omura I., Higashiwaki M., Kawarada H., Pala V. 2017. Smart power devices and ICs using GaAs, wide and extreme bandgap semiconductors. *IEEE Trans. Electron Devices*. 64(3): 856-873.
30. Chow T. P., Tyagi R. 1994. Wide bandgap compound semiconductors for superior high-voltage unipolar power devices. *IEEE Trans. Electron Devices*. 41(8): 1481-1483.
31. Dutta M., Koeck F. A. M., Li W., Nemanich R. J. and Chowdhury S. 2017. High Voltage Diodes in Diamond Using (100)- and (111)- Substrates. *IEEE Electron Devices Lett.* 38(5): 600-603.
32. Felice V., Antoine P., Claudio T. 2019. Quad Flat No-lead package. Patent US, US2019131197 (A1).
33. Garcia-Mendez M., Morales-Rodriguez S., Galvan D. H., Machorro R. 2009. Characterization of AlN thin films fabricated by reactive DC sputtering: experimental measurements and Huckel calculations. *Int. J. Mod. Phys. B*. 23(9): 2233-2251.
34. Ghandhi S. K. 1977. *Semiconductor Power Devices*. Wiley, New York. 329.
35. Hashimoto A., Koiwa I. Low- κ Materials and Development Trends. 2009. In: Shacham-Diamand Y., Osaka T., Datta M., Ohba T. (eds) *Advanced Nanoscale ULSI Interconnects: Fundamentals and Applications*. Springer, New York, NY, 145-151.
36. Hitoshi Umezawa. 2018. Recent advances in diamond power semiconductor devices. *Materials Science in Semiconductor Processing*. 78: 147-156.
37. Ho C. J., Shing T. K., Li P. C. 2004. Preferred orientation control and characterization of AlN thin films using reactive sputtering. *Tamkang Journal of Science and Engineering*. 7(1): 174.
38. <https://www.interfax.ru/business/450586>; <http://atomicexpert.com/page785032.html>.
39. Kalinina E. V. et al. 1996. Schottky barriers on n-GaN grown on SiC. *J. Electron. Mater.* 25(5): 831-834.
40. Kaminski N., Hilt O. 2014. SiC and GaN devices - wide bandgap is not all the same. *IET Circuits, Devices Syst.* 8(3): 227-236.
41. Kang Y. H. *Semiconductor Technologies in the Era of Electronics*. Dordrecht: Springer, 2014 - 149 p.
42. Kang Y. H., Hu H. Y., Han B. G., Su H. 2019. A reconfigurable solid-state plasma dipole antenna based on SPiN diodes. *Microelectronic Engineering*. 214: 55-59.
43. Khan S., Shahid M., Mahmood A., Shah A., Ahmed I., Mehmood M., Aziz U., Raza Q., Alam M. 2015. Texture of the nano-crystalline AlN thin films and the growth conditions in DC magnetron sputtering. *Nat. Sci. Mater. Int.*, 25(4): 282-290.
44. Kim Jae-Keun, Jeong Sang-hun. 2001. Effects of deposition parameters on AlN film growth using reactive DC magnetron sputtering. *J. Korean Phys. Soc.* 38(1): 19-24.
45. Kimoto T., Cooper J. A. 2014. *Fundamentals of Silicon Carbide Technology. Growth, Characterization, Devices, and Applications*. New York: Wiley-IEEE Press, 555.
46. Kimoto T., Yonezawa Y. 2018. Current status and perspectives of ultrahigh-voltage SiC power devices. *Materials Science in Semiconductor Processing*. 78: 43-56.
47. Kumari N., Singh A. K., Barhai P. K. 2014. Study of Properties of AlN Thin Films Deposited by Reactive Magnetron Sputtering. *Int. J. Thin Films Sci. Technol.* 3(2): 43-49.

48. Lawrence S. Pan, Don R. Kania. 1995. Diamond: Electronic Properties and Applications. Boston-Kluwer Academic Publishers, Springer. 472.
49. Li Z., Waldron J., Dayal R., Parsa L., Hella M. and Chow T. P. 2012. High voltage normally-off GaN MOSC-HEMTs on silicon substrates for power switching applications. Proc. 24th International Symposium on Power Semiconductor Devices and ICs 2012. 45-48. Bruges.
50. Liu J. W., Oosato H., Liao M. Y. and Koide Y. 2017. Enhancement-mode hydrogenated diamond metal-oxide-semiconductor field-effect transistors with Y_2O_3 oxide insulator grown by electron beam evaporator. Appl. Phys. Lett. 110(20): 203502-1-203502-5.
51. Lu D., Wong C.P. 2017. Materials for Advanced Packaging. Springer International Publishing Switzerland. 969.
52. Millan J., Godignon P., Perpina X., Perez-Tomas A., Rebollo J. 2014. A Survey of Wide Bandgap Power Semiconductor Devices. IEEE Transactions on Power Electronics, 29(5), 2155-2163.
53. Mishra U. K., Parikh P., Wu Y. F. 2002. AlGaIn/GaN HEMTs - An overview of device operation and applications. Proc. IEEE. 90(6):1022-1031.
54. Mishra U. K., Shen L., Kazior T. E. and Wu Y. 2008. GaN-Based RF Power Devices and Amplifiers. Proc. IEEE. 96(2): 287-305.
55. Oh Seunghoon. QFN manufacturing method of QFN semiconductor package. Patent KR, No. KR20190094983 (A), 2019.
56. Panchenko P. V., Rybalka S. B., Malakhanov A. A., Demidov A. A. et al. 2017. Silicon carbide of Ni/6H-SiC and Ti/4H-SiC type Schottky diode current-voltage characteristics modelling. J. Phys.: Conf. Ser. 917: 082010.
57. Pengelly R. S. et al. 2012. A review of GaN on SiC high electron-mobility power transistors and MMICs. IEEE Trans. Microw. Theory Tech. 60(6): 1764-1783.
58. Polyakov A. Y., Smirnov N. B., Shchemerov I. V., Yakimov E. B., Nikolaev V. I., Stepanov S. I. et al. 2019. Deep trap spectra of Sn-doped α -Ga₂O₃ grown by halide vapor phase epitaxy on sapphire. APL Materials. 7(5): 051103-1-051103-1.
59. Recommendations for Board Assembly of Infineon Discrete Quad-Flat No-Lead Packages, Infineon Technologies AG, edition 2018-09-19, Munich, Germany https://www.infineon.com/dgdl/Infineon-Board_Assembly_of_Disc-crete_Quad_Flat_No_Lead_Packages-AN-v01_00-EN.pdf?fileId=5546d462677d0f46016783ff4d1f7edf.
60. Roussel P. 2011. SiC Market and Industry Update, Int. SiC Power Electronics Applications Workshop 2011, ISiCPEAW, Kista, Sweden.
61. Rybalka S. B., Kulchenkov E. A., Demidov A. A., Zhemoedov N. A., Drakin A. Yu. 2020. Determination of dV/dt and dI/dt characteristics for high voltage 4H-SiC Schottky diodes with different types of metal-polymeric packages. J. Phys.: Conf. Ser. 1679: 022045.
62. Sedykh S. V., Rybalka S. B., Drakin A. Yu., Demidov A. A. et al. 2018. Ti/4H-SiC Schottky diode breakdown voltage with different thickness of 4H-SiC epitaxial layer. J. Phys.: Conf. Ser., 1124: 071012.
63. Sedykh S. V., Rybalka S. B., Drakin A. Yu., Demidov A. A., Kulchenkov E. A. 2019. Determination of dV/dt values for domestic SiC Schottky diodes. J. Phys.: Conf. Ser., 1410: 012195.
64. Seokmo Hong, Chang-Seok Lee, Min-Hyun Lee et al. 2020. Ultralow-dielectric-constant amorphous boron nitride. Nature, 582: 511-514.
65. SiC and GaN, two key segments for the power semiconductor industry, June 23, 2020, Yole, i-Micronews. <https://www.i-micronews.com/sic-and-gan-two-key-segments-for-the-power-semiconductor-industry/>
66. Stepanov S. I., Nikolaev V. I., Bougrov V. E., Romanov A. E. 2016. Gallium oxide: properties and applications - a review. Reviews on Advanced Materials Science, 44(1): 63-86.
67. Ueda D. 2015. Renovation of power devices by GaN-based materials. Proc. 2015 IEEE International Electron Devices Meeting (IEDM), 16.4.1-16.4.4, Washington-DC, USA.

68. Wang Guoqing, Huang Zhengxin. SOT-23 (Small Outline Transistor-23) surface mount device packaging structure. Patent CN, No. CN106711133 (A), 2017.
69. Yole Development. Power GaN 2019: Epitaxy, Devices, Applications and Technology Trends Market and Technology Report 2019 (https://s3.i-micronews.com/uploads/2019/11/YD19056_Power_GaN_2019_Epitaxy_Devices_Applications_Technology_Trends_Yole_Nov2019_Sample.pdf)
70. Zhang J. X., Cheng H., Chen Y. Z., Uddin A., Yuan S., Geng S. J., Zhang S. 2005. Growth of AlN Films on Si(100) and Si(111) Substrates by Reactive Magnetron Sputtering. Surf. Coat. Technol. 198(1-3): 68-73.
71. Zhang Ziyue; Huang Zhengxin, Liu Jiabin. SOT-23 packaging structure. Patent CN, CN203644753 (U), 2014.

References

1. Belous A. I., Efimenko S. A., Turcevich A. S. 2013. Poluprovodnikovaya silovaya elektronika [Semiconductor power electronics]. Moscow, Tekhnosfera. 216.
2. Bondar' D. 2019. Poluprovodnikovaya mikroelektronika – 2018 g. [Semiconductor microelectronics - 2018] Elektronnye komponenty. 1: 12-17.
3. Vavilov V. S. 1994. Osobennosti fiziki shirokazonnyh poluprovodnikov i ih prakticheskikh primenenij [The peculiarities of the physics of wide-gap semiconductors and their applications]. UFN. 164(3): 287-296.
4. Vavilov V. S., Konorova E. A. 1976. Poluprovodnikovye almazy [Semiconductor Diamonds]. UFN. 118: 611-639.
5. Gol'cova M. 2012. Moshchnye GaN-tranzistory. Istinnno revolyucionnaya tekhnologiya [Powerful GaN transistors. Truly revolutionary technology]. Elektronika NTB. 4: 86-100.
6. Gol'cova M. 2014. Silovaya poluprovodnikovaya elektronika Mnogoobeshchayushchie tekhnologii stanovyatsya real'nost'yu [Power semiconductor electronics Promising technologies become reality]. Elektronika NTB. 4: 54-100.
7. Gromov V., Bryuhno N., Demidov A., Drakin A., Zotin V., Kul'chenkov E., Rybalka S. 2018. Issledovanie stojkosti SiC-diodov SHottki ZAO «GRUPPA KREMNIJ EL» k skorosti narastaniya obratnogo napryazheniya [Investigation of the resistance of SiC Schottky diodes of CJSC «GROUP KREMNIY EL» to the rate of rise of the reverse voltage]. Silovaya elektronika. 71(2): 10-12.
8. Gudilin D. 2014. «Gruppa Kremnij EL»: novaya otechestvennaya elementnaya baza dlya silovoj elektroniki [«GROUP KREMNIY EL»: a new domestic element base for power electronics]. Elektronika NTB. 8: 92-96.
9. Zhelannov A. V., Udal'cov V. E., Fedorov D. G. 2012. Issledovanie silovykh diodov SHottki na osnove nitrida galliya [Investigation of gallium nitride power Schottky diodes]. Vestnik Novgorodskogo gosudarstvennogo universiteta im. YAroslava Mudrogo. 68: 92-94.
10. Kukushkin S. A., Nikolaev V. I., Osipov A. V., Osipova E. V., Pechnikov A. I., Feoktistov N. A.. 2016. Epitaksial'nyj oksid galliya na podlozhkah SiC/Si [Epitaxial gallium oxide on SiC / Si substrates]. FTT, 58(9): 1812-1817.
11. Kul'chenkov E. A., Rybalka S. B., Demidov A. A., Drakin A. Yu. 2020. Raschet karakteristik karbido-kremniykh diodov SHottki dlya malogabaritnykh metallopolimernykh korpusov [Calculation of characteristics of the silicon carbide Schottky diodes for small metalpolymeric package]. Prikladnaya matematika & Fizika. 52(1): 33-40.
12. Lebedev A. A., Ivanov P. A., Levinshtejn M. E., Mohov E. N., Nagalyuk S. S., Anisimov A. N., Baranov P. G. 2019. Elektronika na osnove SiC (k 100-letiyu Fiziko-tekhnicheskogo instituta im. A.F. Ioffe RAN [SiC-based electronics (dedicated to the 100th anniversary of the A.F. Ioffe Physico-Technical Institute of the Russian Academy of Sciences)]. UFN. 189: 803-848.
13. Mihajlov A. I. Fiziko-tekhnologicheskie osnovy formirovaniya kanala silovogo MDP-tranzistora na karbide kremniya [Physico-technological foundations of the formation of a channel of a power MIS transistor based on silicon carbide]: dis. ... kand. tekhn. nauk: 05.27.01/ Mihajlov Aleksej Igorevich. - SPb., 2018. 182.
14. Rozhkov M. A., Kolodeznyj E. S., Smirnov A. M., Bugrov V. E., Romanov A. E. 2015. Sravnenie karakteristik diodov Shottki na osnove Ga₂O₃ i drugih shirokazonnyh poluprovodnikovykh materialov [Comparison of characteristics of Schottky diodes based on Ga₂O₃ and other wide-gap semiconductor materials]. Fizika i mekhanika materialov. 24(2): 194-200.

15. Rozanov Yu. K. 2018. Silovaya elektronika. Evolyuciya i primeneniye [Power electronics. Evolution and application]. Moscow: Znack, 140.
16. Rybalka S. B., Demidov A. A., Kul'chenkov E. A., Drakin A. Yu. 2018. Issledovanie dv/dt harakteristik karbidokremnievykh diodov Shottki [Study of the dV/dt characteristics of the silicon carbide Schottky diodes]. Nauchnye vedomosti BelGU. Seriya: Matematika. Fizika. 50(4): 460-468.
17. Seredin P. V., Goloshchapov D. A., Len'shin S. i dr. 2016. Osobennosti rosta i strukturno-spektrskopicheskie issledovaniya nanoprofilirovannykh plenok AlN, vyrashchennykh na razorientirovannykh podlozhkah GaAs [Growth Features and Structural Spectroscopic Studies of Nanoprofiled AlN Films Grown on Misoriented GaAs Substrates]. Fizika i tekhnika poluprovodnikov. 50(9): 1283-1294.
18. Hmel'nickij R. A., Talipov N. H., Chucheva G. V. 2017. Sinteticheskijalmaz dlya elektroniki i optiki [Synthetic diamond for electronics and optics] Moscow, IKAR, 228.
19. Alivov Ya. I. et al. 2003. Fabrication and characterization of n-ZnO/p-AlGaIn heterojunction light-emitting diodes on 6H-SiC substrates. Appl. Phys. Lett. 83(23): 4719-4721.
20. Amano H., Baines Y., Beam E., Borga M., Bouchet T., Chalker P. et al. 2018. The 2018 GaN power electronics roadmap. Journal of Physics D: Applied Physics. 51(16): 163001.
21. Arbet-Engels V., Chang W., Yablonovich E. et al. 1995. Flexible, thin-film, GaAs hetero-junction bipolar transistors mounted on natural diamond substrates. Solid State Electronics. 38(11): 1972-1974.
22. Balasubramanian C., Bellucci S., Cinque G., Marcelli A., Guidi M. C., Piccinini M., Popov A., Soldatov A., Onorato P. 2006. Characterization of aluminium nitride nanostructures by XANES and FTIR spectroscopies with synchrotron radiation. J. Phys. Condens. Matter. 18(33): S2095.
23. Baliga B. J. 2008. Fundamentals of Power Semiconductor Devices, Berlin-Springer-Verlag, 1085.
24. Baliga B. J. 2013. Gallium nitride devices for power electronic applications. Semicond. Sci. Technol. 28(7): 074011.
25. Baliga B. J. 2019. Wide Bandgap Semiconductor Power Devices: Materials, Physics, Design, and Applications, Woodhead Publishing-Elsevier Science, 600.
26. Bathe R., Vispute R. D., Habersat D., Sharma R. P., Venkatesan T., Scozzie C. J., Ervin M., Geil B. R., Lelis A. J., Dikshit S. J., Bhattacharya R. 2001. AlN thin films deposited by pulsed laser ablation, sputtering and filtered arc techniques. Thin Sol. Films, 398-399: 575.
27. Bert N. A., Bondarev A. D., Zolotarev V. V., Kirilenko D. A., Lubyanskiy Y. V., Lyutetskiy A. V., Slipchenko S. O., Petrunov A. N., Pikhin N. A., Ayusheva K. R., Arsentyev I. N., Tarasov I. S. 2015. Properties of AlN films deposited by reactive ion-plasma sputtering. Semiconductors, 49: 1383.
28. Chow T. P., Li Z. 2012. Recent advances in high-voltage GaN MOS-gated transistors for power electronics applications. Chap. 8 in: S. Pearton (Ed.), GaN and ZnO-based Materials and Devices. Springer, 239-250.
29. Chow T. P., Omura I., Higashiwaki M., Kawarada H., Pala V. 2017. Smart power devices and ICs using GaAs, wide and extreme bandgap semiconductors. IEEE Trans. Electron Devices. 64(3): 856-873.
30. Chow T. P., Tyagi R. 1994. Wide bandgap compound semiconductors for superior high-voltage unipolar power devices. IEEE Trans. Electron Devices. 41(8): 1481-1483.
31. Dutta M., Koeck F. A. M., Li W., Nemanich R. J. and Chowdhury S. 2017. High Voltage Diodes in Diamond Using (100)- and (111)- Substrates. IEEE Electron Devices Lett. 38(5): 600-603.
32. Felice V., Antoine P., Claudio T. 2019. Quad Flat No-lead pacage. Patent US, US2019131197 (A1).
33. Garcia-Mendez M., Morales-Rodriguez S., Galvan D. H., Machorro R. 2009. Characterization of AlN thin films fabricated by reactive DC sputtering: experimental measurements and Huckel calculations. Int. J. Mod. Phys. B. 23(9): 2233-2251.
34. Ghandhi S. K. 1977. Semiconductor Power Devices. Wiley, New York. 329.
35. Hashimoto A., Koiwa I. Low- κ Materials and Development Trends. 2009. In: Shacham-Diamand Y., Osaka T., Datta M., Ohba T. (eds) Advanced Nanoscale ULSI Interconnects: Fundamentals and Applications. Springer, New York, NY, 145-151.

36. Hitoshi Umezawa. 2018. Recent advances in diamond power semiconductor devices. *Materials Science in Semiconductor Processing*. 78: 147-156.
37. Ho C. J., Shing T. K., Li P. C. 2004. Preferred orientation control and characterization of AlN thin films using reactive sputtering. *Tamkang Journal of Science and Engineering*. 7(1): 1?4.
38. <https://www.interfax.ru/business/450586>; <http://atomicexpert.com/page785032.html>.
39. Kalinina E. V. et al. 1996. Schottky barriers on n-GaN grown on SiC. *J. Electron. Mater.* 25(5): 831-834.
40. Kaminski N., Hilt O. 2014. SiC and GaN devices - wide bandgap is not all the same. *IET Circuits, Devices Syst.* 8(3): 227-236.
41. Kang Y. H. *Semiconductor Technologies in the Era of Electronics*. Dordrecht: Springer, 2014 - 149 p.
42. Kang Y. H., Hu H. Y., Han B. G., Su H. 2019. A reconfigurable solid-state plasma dipole antenna based on SPiN diodes. *Microelectronic Engineering*. 214: 55-59.
43. Khan S., Shahid M., Mahmood A., Shah A., Ahmed I., Mehmood M., Aziz U., Raza Q., Alam M. 2015. Texture of the nano-crystalline AlN thin films and the growth conditions in DC magnetron sputtering. *Nat. Sci. Mater. Int.*, 25(4): 282-290.
44. Kim Jae-Keun, Jeong Sang-hun. 2001. Effects of deposition parameters on AlN film growth using reactive DC magnetron sputtering. *J. Korean Phys. Soc.* 38(1): 19-24.
45. Kimoto T., Cooper J. A. 2014. *Fundamentals of Silicon Carbide Technology. Growth, Characterization, Devices, and Applications*. New York: Wiley-IEEE Press, 555.
46. Kimoto T., Yonezawa Y. 2018. Current status and perspectives of ultrahigh-voltage SiC power devices. *Materials Science in Semiconductor Processing*. 78: 43-56.
47. Kumari N., Singh A. K., Barhai P. K. 2014. Study of Properties of AlN Thin Films Deposited by Reactive Magnetron Sputtering. *Int. J. Thin Films Sci. Technol.* 3(2): 43-49.
48. Lawrence S. Pan, Don R. Kania. 1995. *Diamond: Electronic Properties and Applications*. Boston-Kluwer Academic Publishers, Springer. 472.
49. Li Z., Waldron J., Dayal R., Parsa L., Hella M. and Chow T. P. 2012. High voltage normally-off GaN MOSC-HEMTs on silicon substrates for power switching applications. *Proc. 24th International Symposium on Power Semiconductor Devices and ICs 2012*. 45-48. Bruges.
50. Liu J. W., Oosato H., Liao M. Y. and Koide Y. 2017. Enhancement-mode hydrogenated diamond metal-oxide-semiconductor field-effect transistors with Y₂O₃ oxide insulator grown by electron beam evaporator. *Appl. Phys. Lett.* 110(20): 203502-1-203502-5.
51. Lu D., Wong C.P. 2017. *Materials for Advanced Packaging*. Springer International Publishing Switzerland. 969.
52. Millan J., Godignon P., Perpina X., Perez-Tomas A., Rebollo J. 2014. A Survey of Wide Bandgap Power Semiconductor Devices. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 29(5), 2155-2163.
53. Mishra U. K., Parikh P., Wu Y. F. 2002. AlGaN/GaN HEMTs - An overview of device operation and applications. *Proc. IEEE*. 90(6): 1022-1031.
54. Mishra U. K., Shen L., Kazior T. E. and Wu Y. 2008. GaN-Based RF Power Devices and Amplifiers. *Proc. IEEE*. 96(2): 287-305.
55. Oh Seunghoon. QFN manufacturing method of QFN semiconductor package. Patent KR, No. KR20190094983 (A), 2019.
56. Panchenko P. V., Rybalka S. B., Malakhanov A. A., Demidov A. A. et al. 2017. Silicon carbide of Ni/6H-SiC and Ti/4H-SiC type Schottky diode current-voltage characteristics modelling. *J. Phys.: Conf. Ser.* 917: 082010.
57. Pengelly R. S. et al. 2012. A review of GaN on SiC high electron-mobility power transistors and MMICs. *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.* 60(6): 1764-1783.

58. Polyakov A. Y., Smirnov N. B., Shchemerov I. V., Yakimov E. B., Nikolaev V. I., Stepanov S. I. et al. 2019. Deep trap spectra of Sn-doped α -Ga₂O₃ grown by halide vapor phase epitaxy on sapphire. *APL Materials*. 7(5): 051103-1–051103-1.
59. Recommendations for Board Assembly of Infineon Discrete Quad-Flat No-Lead Packages, Infineon Technologies AG, edition 2018-09-19, Munich, Germany https://www.infineon.com/dgdl/Infineon-Board_Assembly_of_Discrete_Quad_Flat_No_Lead_Packages-AN-v01_00-EN.pdf?fileId=5546d462677d0f46016783ff4d1f7edf.
60. Roussel P. 2011. SiC Market and Industry Update, Int. SiC Power Electronics Applications Workshop 2011, ISiCPEAW, Kista, Sweden.
61. Rybalka S. B., Kulchenkov E. A., Demidov A. A., Zhemoedov N. A., Drakin A. Yu. 2020. Determination of dV/dt and dI/dt characteristics for high voltage 4H-SiC Schottky diodes with different types of metal-polymeric packages. *J. Phys.: Conf. Ser.* 1679: 022045.
62. Sedykh S. V., Rybalka S. B., Drakin A. Yu., Demidov A. A. et al. 2018. Ti/4H-SiC Schottky diode breakdown voltage with different thickness of 4H-SiC epitaxial layer. *J. Phys.: Conf. Ser.*, 1124: 071012.
63. Sedykh S. V., Rybalka S. B., Drakin A. Yu., Demidov A. A., Kulchenkov E. A. 2019. Determination of dV/dt values for domestic SiC Schottky diodes. *J. Phys.: Conf. Ser.*, 1410: 012195.
64. Seokmo Hong, Chang-Seok Lee, Min-Hyun Lee et al. 2020. Ultralow-dielectric-constant amorphous boron nitride. *Nature*, 582: 511-514.
65. SiC and GaN, two key segments for the power semiconductor industry, June 23, 2020, Yole, i-Micronews. <https://www.i-micronews.com/sic-and-gan-two-key-segments-for-the-power-semiconductor-industry/>
66. Stepanov S. I., Nikolaev V. I., Bougrov V. E., Romanov A. E. 2016. Gallium oxide: properties and applications - a review. *Reviews on Advanced Materials Science*, 44(1): 63-86.
67. Ueda D. 2015. Renovation of power devices by GaN-based materials. Proc. 2015 IEEE International Electron Devices Meeting (IEDM), 16.4.1–16.4.4, Washington-DC, USA.
68. Wang Guoqing, Huang Zhengxin. SOT-23 (Small Outline Transistor-23) surface mount device packaging structure. Patent CN, No. CN106711133 (A), 2017.
69. Yole Development. Power GaN 2019: Epitaxy, Devices, Applications and Technology Trends Market and Technology Report 2019 (https://s3.i-micronews.com/uploads/2019/11/YD19056_Power_GaN_2019_Epitaxy_Devices_Applications_Technology_Trends_Yole_Nov2019_Sample.pdf)
70. Zhang J. X., Cheng H., Chen Y. Z., Uddin A., Yuan S., Geng S. J., Zhang S. 2005. Growth of AlN Films on Si(100) and Si(111) Substrates by Reactive Magnetron Sputtering. *Surf. Coat. Technol.* 198(1-3): 68-73.
71. Zhang Ziyue; Huang Zhengxin, Liu Jiabin. SOT-23 packaging structure. Patent CN, CN203644753 (U), 2014.

Получена 03.03.2021

Демидов Андрей Александрович – доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой общей физики Брянского государственного технического университета.

 <http://orcid.org/0000-0002-8639-3575>

бул. 50 лет Октября, 7, г. Брянск, 241035, Россия

E-mail: demandr@yandex.ru

Рыбалка Сергей Борисович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры общей физики Брянского государственного технического университета.

 <http://orcid.org/0000-0002-7746-3009>

бул. 50 лет Октября, 7, г. Брянск, 241035, Россия

E-mail: sbrybalka@yandex.ru

РЕЦЕНЗИИ

УДК 517.983.54, 517.984.54
MSC 34L16, 34B24, 65L09

DOI 10.52575/2687-0959-2021-53-1-73-84

**РЕЦЕНЗИЯ НА МОНОГРАФИЮ: V. V. KRAVCHENKO, DIRECT AND INVERSE STURM – LIOUVILLE PROBLEMS. SPRINGER, 2020, НА АНГЛ. ЯЗЫКЕ.
(С КРАТКИМ ОЧЕРКОМ РАЗВИТИЯ ТЕОРИИ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ШТУРМА – ЛИУВИЛЛЯ)**

С. М. Ситник, Э. Л. Шишкина

Белгородский государственный национальный исследовательский университет (НИУ «БелГУ»); Воронежский Государственный Университет,
Белгород, 308015, Россия; Воронеж, 394018, Россия

E-mail: mathsms@yandex.ru, ilina_dico@mail.ru

Аннотация. Предлагаемая рецензия написана на книгу V. V. Kravchenko «Direct and Inverse Sturm – Liouville Problems», в которой представлен авторский подход к эффективному решению прямых и обратных задач Штурма – Лиувилля на конечных и бесконечных интервалах. Метод, предложенный в рецензируемой монографии, основан на глубоких математических результатах и, особенно, на понятии операторов преобразования. Кроме того, рецензия содержит краткий очерк развития теории обратных задач для уравнения Штурма – Лиувилля и подробную библиографию по теме.

Ключевые слова: прямая задача Штурма – Лиувилля, обратная задача Штурма – Лиувилля, оператор преобразования, уравнения Марченко – Гельфанда – Левитана.

Для цитирования: Ситник С. М., Шишкина Э. Л. 2021. Рецензия на монографию: V. V. Kravchenko Direct and Inverse Sturm – Liouville Problems. Springer, 2020, на англ. языке. (С кратким очерком развития теории обратных задач для уравнения Штурма – Лиувилля). Прикладная математика & Физика. 53(1): 73–84.
DOI 10.52575/2687-0959-2021-53-1-73-84.

**REVIEW OF THE MONOGRAPH: V. V. KRAVCHENKO DIRECT AND INVERSE STURM – LIOUVILLE PROBLEMS. SPRINGER, 2020, IN ENGLISH LANGUAGE.
(WITH A BRIEF OUTLINE OF THE DEVELOPMENT OF THE THEORY OF INVERSE PROBLEMS FOR THE STURM – LIOUVILLE EQUATION)**

S. Sitnik, E. Shishkina

Belgorod State National Research University («BelGU»); Voronezh State University,
Belgorod, 308015, Russia; Voronezh, 394018, Russia
E-mail: mathsms@yandex.ru, ilina_dico@mail.ru

Received March, 01, 2021

Abstract. The proposed review is written on the book by V. V. Kravchenko «Direct and Inverse Sturm – Liouville Problems», in which the author’s approach to the effective solution of direct and inverse Sturm – Liouville problems on finite and infinite intervals is presented. The method proposed in the monograph under review is based on deep mathematical results and especially on the concept of transmutation operators. More, the review contains a short survey of results in inverse problems for Sturm – Liouville equation and extensive reference list.

Key words: direct Sturm – Liouville problem, inverse Sturm – Liouville problem, transmutations, Gelfand – Levitan – Marchenko equation.

For citation: Sergei S. M., Shishkina E. L. 2021. Review of the monograph: V. V. Kravchenko Direct and Inverse Sturm – Liouville Problems. Springer, 2020, in English language.
(With a brief outline of the development of the theory of inverse problems for the Sturm – Liouville equation). Applied Mathematics & Physics. 53(1): 73–84 (in Russian). DOI 10.52575/2687-0959-2021-53-1-73-84.

Рецензируемая монография издана на английском языке под названием «Direct and Inverse Sturm-Liouville Problems», точные библиографические данные издания см. в [67]. Её автором является В. В. Кравченко (Центр исследований и послевузовского обучения Национального политехнического института (Cinvestav), Керетаро, Мексика), известный специалист в таких областях математики, как дифференциальные уравнения, обратные задачи, операторы преобразования, гиперкомплексный анализ, обобщённые аналитические функции, аналитические и численные методы математической физики.

В рецензии мы постарались отразить не только содержание монографии, но также кратко указать на основные этапы развития теории обратных задач для уравнения Штурма – Лиувилля. Так как монография основана на многочисленных работах В. В. Кравченко, его учеников и соавторов, то также даётся по необходимости краткий обзор этих работ с указанием ссылок на них.

Начиная с пионерских работ Д. Бернулли, Ж. Д’Аламбера, Л. Эйлера, Ж. Фурье и затем С. Пуассона, Ж. Штурма и Ж. Лиувилля, теория уравнения Штурма – Лиувилля и различных задач для него стала неотъемлемой частью как подготовки и обучения профессиональных математиков, так и важной активно развивающейся областью теоретических исследований. Теории Штурма – Лиувилля посвящены многие известные монографии и обзорные статьи, в которых рассматриваются как общие вопросы, см., например, [15, 16, 17, 18, 19, 29, 36, 38, 61, 80, 81, 89], так и более специальные задачи, см., например, [20, 27, 39, 66].

После работ В. А. Амбарцумяна [37] и Г. Борга [42] начала быстро развиваться теория обратных задач для уравнения Штурма – Лиувилля. Она заняла важное место в общей спектральной теории и получила многочисленные численные приложения в математике, механике, физике, инженерных и других прикладных задачах. Тематике обратных задач для операторов Штурма – Лиувилля посвящены монографии [2, 5, 6, 11, 15, 16, 17, 18, 22, 23, 33, 34, 41, 49, 57, 82, 83, 87] и целый ряд других. Теория обратных задач для уравнения Штурма – Лиувилля стала изящной частью современного здания математики, важной для не только теоретических, но и практических приложений.

Новый всплеск в развитии теории обратных задач для уравнения Штурма – Лиувилля в середине прошлого века был связан с их неожиданными применениями в теории нелинейных дифференциальных уравнений. Эта процедура вошла составной частью в метод обратной задачи для решения основных нелинейных уравнений, первоначально разработанный К. С. Гарднером, Дж. М. Грином, М. Д. Крускалом и Р. М. Миурой. Техника этого метода основана на использовании двух основных идей, а именно, представления Лакса и затем решения обратной задачи для уравнения Штурма – Лиувилля. В том числе с использованием указанного метода были найдены солитоны, то есть решения в виде уединённых волн, для основных классов нелинейных уравнений: Кортевега–Де Фриза, нелинейного уравнения Шрёдингера, уравнения синус–Гордона и других, см. [1, 10].

Теория прямых и обратных задач для уравнения Штурма – Лиувилля в настоящий момент достаточно хорошо развита, тем не менее ощущается недостаток практических методов для решения конкретных задач, что очевидно из содержания стандартных книг по дифференциальным уравнениям и математической физике. Например, хотя основные свойства собственных значений и собственных функций для общего уравнения Штурма – Лиувилля с переменным коэффициентом давно сформулированы и доказаны, практическое численное решение демонстрируется как правило только для постоянных или экспоненциальных коэффициентов. И пока не предложен общепринятый эффективный метод решения подобных задач для общих переменных коэффициентов, кроме чисто вычислительного способа с применением конечных разностей. Отметим, что некоторые специальные аспекты численного решения задач для уравнения Штурма – Лиувилля рассмотрены в [3, 60, 84].

Целью рецензируемой книги как раз и является представить практический метод для решения прямых и обратных задач Штурма – Лиувилля. Как читатель сможет увидеть из книги, центральным понятием, на использовании которого базируется изложение и вводятся новые конструкции, является понятие оператора преобразования. Для линейных дифференциальных уравнений операторы преобразования впервые появились в работах Ж. Дельсарта [52, 53], а затем их теория была развита в значительном числе работ, из которых упомянем [15, 16, 17, 18, 19, 32, 40, 44, 45, 46, 47, 73, 88], в том числе обзор [85] и монографии [12, 24, 86], содержащие подробные библиографические ссылки.

Грубо говоря, операторы преобразования, рассматриваемые в рецензируемой книге, позволяют связывать относительно явными формулами решения уравнений Штурма – Лиувилля с переменными коэффициентами с решениями элементарного уравнения

$$y'' + \lambda y = 0$$

с постоянной величиной λ . Существование соответствующих операторов преобразования ведёт к полному решению уравнения Штурма – Лиувилля. Из работы А. Я. Повзнера [21] известно, что на полуоси нужные операторы преобразования реализуются в виде интегральных операторов Вольтерра второго рода, причём их ядра не зависят от спектрального параметра уравнения Штурма – Лиувилля. Простой факт существования оператора преобразования такого удобного вида уже позволяет математикам разрабатывать методы решения прямых и обратных задач для уравнения Штурма – Лиувилля. По-видимому, В.А. Марченко первым систематически применял методы теории операторов преобразования как универсальный важнейший инструмент в теории прямых и обратных спектральных задач, см. [17, 18, 19].

Далее, в фундаментальной работе [7] И. М. Гельфанда и Б. М. Левитана было открыто ключевое уравнение для решения обратных задач Штурма – Лиувилля, получившее название «уравнение Гельфанда – Левитана», при этом важнейшую роль играет ядро соответствующего оператора преобразования.

Было показано, что это ядро удовлетворяет интегральному уравнению Вольтерра второго рода (это и есть уравнение Гельфанда – Левитана), которое может быть построено по спектральным данным обратной задачи. После того, как ядро оператора преобразования находится из уравнения Гельфанда – Левитана, его производная на диагонали восстанавливает потенциал исходного уравнения Штурма – Лиувилля. Этот факт ещё раз подчёркивает фундаментальную роль операторов преобразования для всего рассматриваемого класса задач. Аналогичное решение получила и обратная задача квантовой теории рассеяния, для основных интегральных уравнений всего этого класса задач сейчас часто используется общее название – уравнения Гельфанда – Левитана – Марченко. Для несколько более общего дифференциального уравнения с оператором Бесселя обратная задача была решена в работе В. В. Сташевской [28], при этом были установлены глубокие связи операторов преобразования с теоремами Пэли-Винера, этот круг идей разрабатывался далее для ещё более общих дифференциальных операторов, см., например, [25, 26, 88]. Отметим, что класс обратных задач, связанных с операторами Бесселя, в данной монографии не рассматривается.

Но на этом история решения обратных задач для уравнения Штурма – Лиувилля не закончилась. Одной из причин явились многочисленные трудности при численном решении уравнения Гельфанда – Левитана, часть из них описана в [79]. При этом уже достаточно давно делались попытки найти такие методы решения обратных задач для уравнения Штурма – Лиувилля, которые обходят необходимость использования уравнений Гельфанда – Левитана из-за численной неэффективности их решения. В этом направлении отметим работы А. Н. Тихонова в приложении к прикладным задачам электроразведки [30, 31], а также подробное изложение этих работ, их мотивации и приложений в [4].

Так как волшебные возможности операторов преобразования используются в многочисленных задачах, предлагались различные методы для аппроксимации их интегральных ядер. Естественный подход с использованием метода последовательных приближений разрабатывался, например, в [40, 51]. В работе [43] изучалось разложение ядра в ряд Фурье, при этом была получена система уравнений для коэффициентов. Полезные разложения ядер операторов преобразования в различные ряды получены также в работах [50, 56]. В [74, 75] ядра интегральных операторов преобразования аппроксимировались так называемыми преобразованными волновыми полиномами (*transmuted wave polynomials*), см. также [63, 64]. Более полный и удовлетворительный результат был получен в работе [72], в которой построено явное разложение ядра интегрального оператора преобразования в ряды Фурье – Лежандра вместе с простой рекуррентной процедурой для нахождения коэффициентов этих рядов. Подстановка указанных рядов в уравнение Штурма – Лиувилля приводит к новым представлениям решений в виде рядов Неймана по функциям Бесселя. Более того, так как последние представления получены с использованием операторов преобразования, они подчиняются специальным равномерным оценкам. А именно, остатки указанных рядов допускают оценки, не зависящие от действительной части квадратного корня из спектрального параметра. Точнее, если $\rho := \sqrt{\lambda}$ и λ есть спектральный параметр в уравнении Штурма – Лиувилля, оценка остатка рядов Неймана для решений не зависит от $\text{Re } \rho$. Например, предположим, что решается регулярная прямая задача для уравнения Штурма – Лиувилля

$$-y'' + q(x)y = \lambda y. \quad (1)$$

Тогда может существовать как конечное число отрицательных собственных значений, так и бесконечная последовательность положительных собственных значений, стремящаяся к бесконечности. Как показано в монографии В. В. Кравченко на примерах, оценки, упомянутые выше, позволяют вычислить большие массивы спектральных данных (собственных значений и собственных функций) с равномерной точностью и за очень малое время.

Это направление по получению явных разложений в форме функциональных рядов для ядер интегральных операторов преобразования было продолжено в работах автора рецензируемой монографии В. В. Кравченко с его учениками и соавторами. Так, в [76] подобные результаты были получены для общего уравнения Штурма – Лиувилля, в [72] для уравнения (1), а в [13, 77] для возмущённого уравнения с оператором Бесселя. В [48, 65, 68] результаты из [72] были применены для решения некоторых интересных задач, при этом было использовано наблюдение, что указанные выше представления в форме рядов Неймана позволяют вычислять образы функций $e^{\pm i n \rho x}$, $n = 0, 1, \dots$ при действии на них операторов преобразования. Возможность получать представления в виде других функциональных рядов для ядер интегральных операторов преобразования ведёт к дальнейшим результатам также для решений уравнения (1), см. [78, 69].

В то время как прямые задачи Штурма – Лиувилля могут быть эффективно решены с помощью введённых в монографии разложений типа Неймана, остаётся вопрос, как применять представления решений рядами Фурье – Лежандра для обратных задач. Метод с использованием уравнения Гельфанда – Левитана был предложен в [70]. Подстановка рядов Фурье – Лежандра для ядер операторов преобразования в уравнение Гельфанда – Левитана приводит к бесконечной линейной системе алгебраических уравнений для коэффициентов ряда, и решающее наблюдение заключается в том, что для

полного решения обратной задачи оказывается достаточным вычислить лишь первый коэффициент этого ряда! Этого достаточно для восстановления потенциала $q(x)$ в уравнении (1), а также постоянных в граничных условиях задачи Штурма – Лиувилля. В отличие от существующих численных методов для решения обратной задачи Штурма – Лиувилля на конечном интервале метод, предложенный в [70], не является итерационным. Он сводит задачу напрямую к решению линейной системы алгебраических уравнений, из которой на самом деле необходимо найти только первую компоненту вектора решений. Это означает, что решение урезанной системы с небольшим конечным числом уравнений ведёт к удовлетворительному решению обратной задачи.

Тот же подход, развитый в рецензируемой монографии, успешно работает в применении к обратным задачам Штурма – Лиувилля на полуоси [54] и к обратным задачам рассеяния на полуоси [62]. Эти две задачи могут быть сведены к соответствующим уравнениям Гельфанда – Левитана для ядер интегральных операторов преобразования с граничными условиями в начале координат, но с различными входными данными, содержащими спектральные данные или данные рассеяния. При этом обратная задача рассеяния на всей прямой требует дополнительных идей, потому что для её решения требуется интегральное ядро $A(x, t)$ оператора преобразования с условиями на бесконечности. Подобный подход был разработан в [71], где основная идея также связана с использованием того свойства, что для восстановления потенциала достаточно только первого коэффициента соответствующих функциональных рядов. В этом случае показано, что ядро $A(x, t)$ допускает разложение в некоторые ряды Фурье – Лагерра, и найдена прямолинейная процедура для восстановления потенциала по первому коэффициенту ряда. Таким образом, и в случае обратной задачи рассеяния на всей оси в монографии В. В. Кравченко разработан прямой и простой метод её решения. Добавим, что интересный подход к решению обратных задач для уравнения Штурма – Лиувилля на всей оси разработали А. П. Солдатов и Н. А. Жура в [8, 9, 90]. Результаты В. А. Амбарцумяна по обратной задаче для одномерного уравнения Штурма – Лиувилля были переосмыслены на двумерный и трёхмерный случаи в работе Н. В. Кузнецова [14].

В последующей публикации [55] была найдена процедура последовательного интегрирования для вычисления коэффициентов рядов Фурье – Лагерра для ядра оператора преобразования. Это приводит к новым представлениям в виде рядов для так называемых решений Йоста. Эти представления позволяют, например, свести прямую задачу Штурма – Лиувилля на полуоси к вычислению достаточно простых выражений по существу в форме степенных рядов, определённых на единичной окружности и одном из диаметров соответствующего единичного круга. Известно, что задачи Штурма – Лиувилля на полуоси с короткодействующими потенциалами являются сложными для численного решения. Возникающие сложности описаны, например, в последней главе книги [84] и в статьях [58, 59]. Упомянем работу [35] в которой предложен метод для вычисления функций Йоста. Представление Йоста было получено в [55], оно представлено в главе 10 рецензируемой монографии. Решение этой задачи изложенными методами упрощено до такой степени, что позволяет за секунду вывести график производной спектральной функции с высокой точностью и на произвольно большом интервале по λ . Более того, написание соответствующей компьютерной программы самостоятельно не сложнее домашнего задания для обычного студента-бакалавра.

Итак, в рецензируемой монографии используется основной подход, связанный с применением различных классов операторов преобразования. Это позволяет получать аналитические представления для решений уравнений Штурма – Лиувилля и эффективно решать прямые и обратные задачи для этого уравнения на конечных или бесконечных интервалах.

Кратко опишем структуру книги. В ней четыре части. В первой части даются необходимые определения и приводятся стандартные результаты для различных типов прямых и обратных задач для уравнения Штурма – Лиувилля. Во второй части выводятся представления в виде функциональных рядов для ядер интегральных операторов преобразования и на их основе находятся решения уравнений Штурма – Лиувилля. Здесь же собраны необходимые факты об операторах преобразования. Рассматриваются представления ядер через ряды Фурье–Лежандра и Фурье – Лагерра, в том числе для решений Йоста. Третья часть посвящена решению прямых задач для уравнений Штурма – Лиувилля, сначала на конечном, а затем на бесконечных интервалах. В заключительной четвёртой части представлен единый подход к решению обратных задач для уравнения Штурма – Лиувилля: обратная задача на конечном интервале, обратная задача на полуоси, обратная задача квантовой теории рассеяния на полуоси и обратная задача квантовой теории рассеяния на оси. Изложение всего материала сопровождается численными примерами и иллюстрациями.

Считаем, что монография V. V. Kravchenko «Direct and Inverse Sturm-Liouville Problems» является ценным и своевременным дополнением к существующей литературе по обратным задачам. Монография написана профессионально, изложение простое и понятное, с указанием необходимых сведений для понимания материала читателями. Книга будет полезной как для профессиональных математиков и физиков, работающих по тематике дифференциальных уравнений, математической физики, квантовой теории, наноструктур и нанотехнологий, так и для изучающих эти разделы студентов и аспирантов.

Список литературы

1. Абловиц М., Сигур Х. 1987. Солитоны и метод обратной задачи. М., Мир, 479.
2. Агранович З. С., Марченко В. А. 1960. Обратная задача теории рассеяния. Харьков, изд. ХГУ, 268.
3. Алгазин С. Д. 2007. Численные алгоритмы классической матфизики. XVIII. Вычисление далёких собственных значений в задаче Штурма – Лиувилля. Препринт. Институт проблем механики РАН, 839, 15.
4. Алимов Ш. А. 1976. О работах А. Н. Тихонова по обратным задачам Штурма–Лиувилля. УМН. 31(6(192)): 84–88.
5. Ватульян А. О. 2007. Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела. М., Физматлит, 223.
6. Ватульян А. О. 2019. Коэффициентные обратные задачи механики. М., Физматлит, 271.
7. Гельфанд И. М., Левитан Б. М. 1951. Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции. Изв. АН СССР. Сер. матем., 15(4): 309–360.
8. Жура Н. А., Солдатов А. П. 2015. О представлении решения обратной задачи Штурма–Лиувилля на всей оси. Дифференциальные уравнения. 51(8): 1027–1037.
9. Жура Н. А., Солдатов А. П. 2013. К решению обратной задачи Штурма–Лиувилля на всей оси. ДАН России. 453(4): 368–372.
10. Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П. 1980. Теория солитонов: метод обратной задачи. М., Наука, 320.
11. Кабанихин С. И. 2009. Обратные и некорректные задачи, Сибирское научное издательство, Новосибирск, 512.
12. Катрахов В. В., Ситник С. М. 2018. Метод операторов преобразования и краевые задачи для сингулярных эллиптических уравнений. Современная математика. Фундаментальные направления, 64(2): 211–426.
13. Кравченко В. В., Шишкина Э. Л., Торба С. М. 2018. О представлении в виде ряда интегральных ядер операторов преобразования для возмущенных уравнений Бесселя. Матем. заметки, 104(4): 552–570.
14. Кузнецов Н. В. 1962. Обобщение одной теоремы В. А. Амбарцумяна. Докл. АН СССР, 146(6): 1259–1262.
15. Левитан Б. М. 1984. Обратные задачи Штурма – Лиувилля. М. Наука, 240.
16. Левитан Б. М., Саргсян И. С. 1988. Операторы Штурма – Лиувилля и Дирака. М. Наука, 432.
17. Марченко В. А. 1972. Спектральная теория операторов Штурма – Лиувилля. Киев, Наукова Думка, 220.
18. Марченко В. А. 1977. Операторы Штурма – Лиувилля и их приложения. Киев, Наукова Думка, 331.
19. Марченко В. А. 1950. Некоторые вопросы теории дифференциального оператора второго порядка. М., Докл. АН СССР. 72(3): 457–460.
20. Отелбаев М. О. 1990. Оценки спектра оператора Штурма – Лиувилля. Алма-Ата: Гылым, 191.
21. Повзнер А. Я. 1948. О дифференциальных уравнениях типа Штурма – Лиувилля на полуоси. Матем. сборник. 23(65(1)): 3–52.
22. Рамм А. Г. 1994. Многомерные обратные задачи рассеяния. Пер. с англ. М. В. Зеленцовой; Под ред. В. Г. Романова. М., Мир, 495.
23. Садовничий В. А., Султанаев Я. Т., Ахтямов А. М. 2009. Обратные задачи Штурма–Лиувилля с нераспадающимися краевыми условиями. М., Изд-во Моск. ун-та, 184.
24. Ситник С. М., Шишкина Э. Л. 2019. Метод операторов преобразования для дифференциальных уравнений с операторами Бесселя. Физматлит, Москва, 224.

25. Сохин А. С. 1971. Обратные задачи рассеяния для уравнений с особенностью. Тр. физ.-тех. ин-та низких температур АН УССР. 2: 182–233.
26. Сохин А. С. 1973. Обратные задачи рассеяния для уравнений с особенностями специального вида. Харьков, Теория функций, функциональный анализ и их приложения. 17: 36–64.
27. Старинец В. В. 2010. Сингулярные операторы Штурма – Лиувилля в пространствах с индефинитной метрикой, части 1-2. М., МГУП, 2010, 504.
28. Сташевская В. В. 1957. Об обратной задаче спектрального анализа для дифференциального оператора с особенностью в нуле. Харьков, Уч. зап. Харьковского матем. об-ва. 5: 49–86.
29. Титчмарш Э. Ч. 1960, 1961. Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка. Т. 1. М., ИЛ, 278. Т.2. М., ИЛ, 555.
30. Тихонов А. Н. 1949. О единственности решения задачи электроразведки. ДАН, 69(6): 797–800.
31. Тихонов А. Н. 1965. К математическому обоснованию теории электромагнитных зондирований. ЖВМ и МФ, 5(3): 545–547.
32. Фаге Д. К., Нагнибида Н. И. 1977. Проблема эквивалентности обыкновенных дифференциальных операторов. Новосибирск, Наука, 280.
33. Шадан К., Сабатье П. 1980. Обратные задачи в квантовой теории рассеяния. М., Мир, 408.
34. Юрко В. А. 2007. Введение в теорию обратных спектральных задач. М., Наука, 384.
35. Aliev A. R., Gasymova S. G., Gasymova D. G., Ahmadzadeh N. D. 2013. Approximate construction of the Jost function by the collocation method for Sturm – Liouville boundary value problem. Azerbaijan Journal of Mathematics, 3(2): 45–61.
36. Al-Gwaiz M. A. 2008. Sturm – Liouville Theory and its Applications. Springer, 264.
37. Ambartsumyan V. A. 1929. Über eine frage der eigenwerttheorie. Z. Phys., 53: 690–695.
38. Amrein W. O. et al (Editors), 2005. Sturm – Liouville Theory, Past and Present. Birkhäuser Verlag, 336.
39. Atkinson F. V., Mingarelli A. B. 2011. Multiparameter Eigenvalue Problems. Sturm – Liouville Theory. CRC, 301.
40. Begehr H., Gilbert R. 1992. Transformations, transmutations and kernel functions. vol. 1–2. Longman Scientific & Technical, Harlow, 416.
41. Behrndt J., de Snoo H., Hassi S. 2020. Boundary value problems, Weyl functions, and differential operators. Birkhäuser, Basel, 772.
42. Borg G. 1946. Eine Umkehrung der Sturm – Liouville Eigenwertaufgabe. *Acta Math.*, 76: 1–96.
43. Boumenir A. 2006. The approximation of the transmutation kernel. J. Math. Phys., 013505.
44. Carroll R. W., Showalter R. E. 1976. Singular and Degenerate Cauchy problems. N.Y., Academic Press, 333.
45. Carroll R. W. 1979. Transmutation and operator differential equations. Mathematics Studies, v. 37, North Holland, Amsterdam–New York–Oxford, 1–245.
46. Carroll R. W. 1982. Transmutation, scattering theory and special functions. Mathematics Studies, v. 69, North Holland, Amsterdam - New York - Oxford, 456.
47. Carroll R. W. 1985. Transmutation theory and applications. Mathematics Studies, v. 117, North-Holland, Amsterdam - New York - Oxford, 101.
48. Castillo-Pérez R., Kravchenko V. V., Torba S. M. 2019. A method for computation of scattering amplitudes and Green functions of whole axis problems. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 42(15): 5106–5117.
49. Chadan K., Cotton D., Paivarinta L., Rundell W. 1997. An Introduction to Inverse Scattering and Inverse Spectral Problems. SIAM, 198.
50. Chebli H., Fitouhi A., Hamza M. M., 1994. Expansion in series of Bessel functions and transmutations for perturbed Bessel operators. J. Math. Anal. Appl., 181(3), 789–802.

51. Colton D. L. 1976. Solution of boundary value problems by the method of integral operators. Pitman Publ., London, 148.
52. Delsarte J. 1938. Sur une extension de la formule de Taylor. *J Math. Pures et Appl.*, 17: 213–230.
53. Delsarte J. 1938. Sur certaines transformations fonctionnelles relatives aux équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre. *C. R. Acad. Sc.*, 206: 178–182.
54. Delgado B. B., Khmelnytskaya K. V., Kravchenko V. V. 2019. The transmutation operator method for efficient solution of the inverse Sturm – Liouville problem on a half-line. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. 42(18): 7359–7366.
55. Delgado B. B., Khmelnytskaya K. V., Kravchenko V. V. 2019. A representation for Jost solutions and an efficient method for solving the spectral problem on the half line. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, Published Online <https://doi.org/10.1002/mma.5881>.
56. Fitouhi A., Hamza M. M. 1990. A uniform expansion for the eigenfunction of a singular second-order differential operator. *SIAM J. Math. Anal.*, 21(6): 1619–1632.
57. Freiling G., Yurko V. 2001. Inverse Sturm – Liouville problems and their applications. Nova Science Publishers, Inc., Huntington, NY, 305.
58. Fulton C., Pearson D., Pruess S. 2005. Computing the spectral function for singular Sturm – Liouville problem. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 176: 131–162.
59. Fulton C., Pearson D., Pruess S. 2008. Efficient calculation of spectral density functions for specific classes of singular Sturm – Liouville problems. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 212: 150–178.
60. Guenther R. B., Lee J. W. 2019. Sturm – Liouville Problems. Theory and Numerical Implementation. CRC Press, 420.
61. Johnson R. S. 2012. Second-order ordinary differential equations, Special functions, Sturm – Liouville theory and transforms. Ventus Publishing, 181.
62. Karapetyants A. N., Khmelnytskaya K. V., Kravchenko V. V. 2019. A practical method for solving the inverse quantum scattering problem on a half line. *Journal of Physics: Conference Series*. 1540(1): 012007 1–8.
63. Khmelnytskaya K. V., Kravchenko V. V., Torba S. M. 2016. Modulated electromagnetic fields in inhomogeneous media, hyperbolic pseudoanalytic functions and transmutations. *Journal of Mathematical Physics*, 57: 051503.
64. Khmelnytskaya K. V., Kravchenko V. V., Torba S. M., Tremblay S. 2013. Wave polynomials, transmutations and Cauchy’s problem for the Klein-Gordon equation. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 399: 191–212.
65. Khmelnytskaya K. V., Kravchenko V. V., Torba S. M. 2020. Time-dependent one-dimensional electromagnetic wave propagation in inhomogeneous media: exact solution in terms of transmutations and Neumann series of Bessel functions. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 41(5): 785–796.
66. Kozlov V., Mažya V. 1997. Theory of a higher order Sturm – Liouville equation. Springer, (Lecture notes in mathematics; 1659), 140.
67. Kravchenko V. V. 2020. Direct and Inverse Sturm – Liouville Problems. A Method of Solution. In series: *Frontiers in Mathematics*. Springer Nature Switzerland AG, Birkhäuser, Cham., 154.
68. Kravchenko I. V., Kravchenko V. V., Torba S. M., Dias J. C. 2018. Generalized exponential basis for efficient solving of homogeneous diffusion free boundary problems: Russian option pricing. arXiv:1808.08290.
69. Kravchenko V. V. 2018. Construction of a transmutation for the one-dimensional Schrödinger operator and a representation for solutions. *Applied Mathematics and Computation*, 328: 75–81.
70. Kravchenko V. V. 2019. On a method for solving the inverse Sturm – Liouville problem. *Journal of Inverse and Ill-posed Problems*. 27: 401–407.
71. Kravchenko V. V. 2019. On a method for solving the inverse scattering problem on the line. *Math Meth Appl Sci.*, 42: 1321–1327.

72. Kravchenko V. V., Navarro L. J., Torba S. M. 2017. Representation of solutions to the one-dimensional Schrödinger equation in terms of Neumann series of Bessel functions. *Applied Mathematics and Computation*, 314(1): 173–192.
73. Kravchenko V. V., Sitnik S. M. (eds.) 2020. *Transmutation operators and applications*. Trends in Mathematics, Birkhäuser, Basel, 686
74. Kravchenko V. V., Torba S. M. 2015. Construction of transmutation operators and hyperbolic pseudoanalytic functions. *Complex Anal. Oper. Theory*, 9: 389–429.
75. Kravchenko V. V., Torba S. M. 2015. Analytic approximation of transmutation operators and applications to highly accurate solution of spectral problems. *J. Comput. Appl. Math.* 275: 1–26.
76. Kravchenko V. V., Torba S. M. 2018. A Neumann series of Bessel functions representation for solutions of Sturm – Liouville equations. *Calcolo*, 55: 11.
77. Kravchenko V. V., Torba S. M., Castillo-Pérez R. 2018. A Neumann series of Bessel functions representation for solutions of perturbed Bessel equations. *Applicable Analysis*, 97(5): 677–704.
78. Kravchenko V. V., Torba S. M., Khmelnytskaya K. V. 2017. Transmutation operators: construction and applications. *Proceedings of the 17th International Conference on Computational and Mathematical Methods in Science and Engineering CMMSE-2017*, Cadiz, Andalucia, España, Julio 4-8 1198–1206.
79. Lowe B. D., Pilant M., Rundell W. 1992. The recovery of potentials from finite spectral data. *SIAM J. Math. Anal.*, 23(2): 482–504.
80. Lützen J. 1984. Sturm and Liouville’s work on ordinary linear differential equations. The emergence of Sturm – Liouville theory. *Archive for History of Exact Sciences*, 29(4): 309–376.
81. Masjed-Jamei M. 2020. *Special Functions and Generalized Sturm – Liouville Problems*. In series: *Frontiers in Mathematics*. Springer Nature Switzerland AG, Birkhäuser, Cham, 313.
82. Pike S., Sabatier P. 2002. *Scattering. Scattering and inverse scattering in pure and applied science*. Vol. 1-2. Academic Press, San Diego, 1831.
83. Poschel J., Trubowitz E. 1987. *Inverse spectral theory*. Academic Press, London, 192.
84. Pryce J. D. 1993. *Numerical solution of Sturm – Liouville problems*, Clarendon Press, Oxford, 322.
85. Sitnik S. M. 2010. Transmutations and applications: a survey, <http://arxiv.org/abs/1012.3741>, 141.
86. Shishkina E. L., Sitnik S. M. 2020 *Transmutations, singular and fractional differential equations with applications to mathematical physics*. Elsevier, Amsterdam, 564.
87. Teschl G. 2009. *Mathematical methods in quantum mechanics with applications to Schrödinger operators*. American Mathematical Society, Graduate Studies in Mathematics, Providence, 99, 356.
88. Trimeche K. 1988. *Transmutation operators and mean-periodic functions associated with differential operators*. Harwood Academic Publishers, London, 282.
89. Zettl A. 2005. *Sturm – Liouville theory*. American Mathematical Society, Providence, 328.
90. Zhura N. A., Soldatov A. P. 2013. To inverse scattering problem of Gelfand, Levitan, Marchenko. *AIP Conf. Proc.* 1570, 298.

References

1. Ablowitz M., Sigur X. 1984. *Solitons: Inverse Problem Method*. New York, Plenum, 479.
2. Agranovich Z. S., Marchenko V. A. 1960. *Inverse problem of scattering theory*. Kharkov, ed. KSU, 268.
3. Algazin S. D. 2007. Numerical algorithms of classical matphysics. XVIII. Calculation of distant eigenvalues in the Sturm – Liouville problem. Preprint. Institute for Problems in Mechanics RAS, 839, 15.
4. Alimov Sh. A. 1976. On the works of A.N. Tikhonov on inverse Sturm – Liouville problems. *UMN*. 31(6(192)): 84–88.
5. Vatulyan A. O. 2007. *Inverse problems in the mechanics of a deformable solid*. M., Fizmatlit, 223.

6. Vatulyan A. O. 2019. Coefficient inverse problems of mechanics. M., Fizmatlit, 271.
7. Gel'fand I. M., Levitan B. M. 1951. On the determination of a differential equation by its spectral function. *Izv. Academy of Sciences of the USSR. Ser. mat.*, 15(4): 309–360.
8. Zhura N. A., Soldatov A. P. 2015. On the representation of the solution of the inverse Sturm – Liouville problem on the entire axis. *Differential Equations*. 51(8): 1027–1037.
9. Zhura N. A., Soldatov A. P. 2013. On the solution of the inverse Sturm – Liouville problem on the entire axis. *DAN of Russia*. 453(4): 368–372.
10. Zakharov V. E., Manakov S. V., Novikov S. P., Pitaevsky L. P. 1980. *Theory of solitons: method of the inverse problem*. M., Science, 320.
11. Kabanikhin S. I. 2009. *Inverse and Ill-Posed Problems*, Siberian Scientific Publishing House, Novosibirsk, 512.
12. Katrakhov V. V., Sitnik S. M. 2018. Method of transformation operators and boundary value problems for singular elliptic equations. *Contemporary mathematics. Fundamental directions*, 64(2): 211–426.
13. Kravchenko V. V., Shishkina E. L., Torba S. M. 2018. On a Series Representation for Integral Kernels of Transmutation Operators for Perturbed Bessel Equations. *Math. Notes*, 104(4): 530–544.
14. Kuznetsov N. V. 1962. A generalization of a theorem stated by V. A. Ambartsumyan. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*. 146(6): 1259–1262.
15. Levitan B. M. 1984. *Inverse Sturm – Liouville problems*. M. Science, 240.
16. Levitan B. M., Sargsyan I. S. 1988. *Sturm operators – Liouville and Dirac*. M. Science, 432.
17. Marchenko V. A. 1972. *Spectral theory of Sturm – Liouville operators*. Kiev, Naukova Dumka, 220.
18. Marchenko V. A. 1977. *Sturm – Liouville operators and their applications*. Kiev, Naukova Dumka, 331.
19. Marchenko V. A. 1950. Some questions of the theory of the second order differential operator. M., *Dokl. Academy of Sciences of the USSR*. 72(3): 457–460.
20. Otelbaev M. O. 1990. *Estimates of the spectrum of the Sturm – Liouville operator*. Alma-Ata: Gylym, 191.
21. Povzner A. Ya. 1948. Differential equations of Sturm – Liouville type on the semiaxis. *Mat. collection*. 23(65(1)): 3–52.
22. Ramm A. G. 1992 *Multidimensional inverse scattering problems*. Longman, New York, 495.
23. Sadovnichy V. A., Sultanaev Ya. T., Akhtyamov A. M. 2009. *Inverse Sturm – Liouville problems with non-decaying boundary conditions*. M., Publishing house of Moscow. un-ta, 184.
24. Sitnik, S. M., Shishkina, E. L., 2019. Transmutation operators method for differential equations with Bessel operator. *Moscow. Fizmathlit*, 224.
25. Sokhin A. S. 1971. Inverse scattering problems for equations with a singularity. *Tr. physical inst. of low temperature of the Academy of Sciences of the Ukrainian SSR*. 2: 182–233.
26. Sokhin A. S. 1973. Inverse scattering problems for equations with singularities of a special form. *Kharkov, Theory of functions, functional analysis and their applications*. 17: 36–64.
27. Starinets V. V. 2010. *Singular Sturm – Liouville operators in spaces with indefinite metric, parts 1-2*. M., MGUP, 2010, 504.
28. Stashevskaya V. V. 1957. On the inverse problem of spectral analysis for a differential operator with a singularity at zero. *Kharkov, Uch. app. Kharkiv Mat. soc*. 5: 49–86.
29. Titchmarsh E. Ch. 1960, 1961. *Expansions in eigenfunctions associated with second-order differential equations*. V. 1. M., IL, 278. V.2. M., IL, 555.
30. Tikhonov A. N, 1949. On the uniqueness of the solution to the electrical prospecting problem. *DAN*, 69(6): 797–800.
31. Tikhonov A. N. 1965. *On the Mathematical Substantiation of the Theory of Electromagnetic Soundings*. *ZhVM and MF*, 5(3): 545–547.

32. Fage D. K., Nagnibida N. I. 1977. The problem of equivalence of ordinary differential operators. Novosibirsk, Science, 280.
33. Shadan K., Sabatier P. 1980. Inverse problems in quantum scattering theory. M., Mir, 408.
34. Yurko V. A. 2007. Introduction to the theory of inverse spectral problems. M., Science, 384.
35. Aliev A. R., Gasymova S. G., Gasymova D. G., Ahmadzadeh N. D. 2013. Approximate construction of the Jost function by the collocation method for Sturm – Liouville boundary value problem. *Azerbaijan Journal of Mathematics*, 3(2): 45–61.
36. Al-Gwaiz M.A. 2008. Sturm – Liouville Theory and its Applications. Springer, 264.
37. Ambartsumyan V. A. 1929. Über eine frage der eigenwerttheorie. *Z. Phys.*, 53: 690–695.
38. Amrein W. O. et al (Editors), 2005. Sturm – Liouville Theory, Past and Present. Birkhäuser Verlag, 336.
39. Atkinson F. V., Mingarelli A. B. 2011. Multiparameter Eigenvalue Problems. Sturm – Liouville Theory. CRC, 301.
40. Begehr H., Gilbert R. 1992. Transformations, transmutations and kernel functions. vol. 1–2. Longman Scientific & Technical, Harlow, 416.
41. Behrndt J., de Snoo H., Hassi S. 2020. Boundary value problems, Weyl functions, and differential operators. Birkhäuser, Basel, 772.
42. Borg G. 1946. Eine Umkehrung der Sturm – Liouville Eigenwertaufgabe. *Acta Math.*, 76: 1–96.
43. Boumenir A. 2006. The approximation of the transmutation kernel. *J. Math. Phys.*, 013505.
44. Carroll R. W., Showalter R. E. 1976. Singular and Degenerate Cauchy problems. N.Y., Academic Press, 333.
45. Carroll R. W. 1979. Transmutation and operator differential equations. *Mathematics Studies*, v. 37, North Holland, Amsterdam–New York–Oxford, 1–245.
46. Carroll R. W. 1982. Transmutation, scattering theory and special functions. *Mathematics Studies*, v. 69, North Holland, Amsterdam - New York - Oxford, 456.
47. Carroll R. W. 1985. Transmutation theory and applications. *Mathematics Studies*, v. 117, North-Holland, Amsterdam - New York - Oxford, 101.
48. Castillo-Pérez R., Kravchenko V. V., Torba S. M. 2019. A method for computation of scattering amplitudes and Green functions of whole axis problems. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 42(15): 5106–5117.
49. Chadan K., Cotton D., Paivarinta L., Rundell W. 1997. An Introduction to Inverse Scattering and Inverse Spectral Problems. SIAM, 198.
50. Chebli H., Fitouhi A., Hamza M. M., 1994. Expansion in series of Bessel functions and transmutations for perturbed Bessel operators. *J. Math. Anal. Appl.*, 181(3), 789–802.
51. Colton D. L. 1976. Solution of boundary value problems by the method of integral operators. Pitman Publ., London, 148.
52. Delsarte J. 1938. Sur une extension de la formule de Taylor. *J Math. Pures et Appl.*, 17: 213–230.
53. Delsarte J. 1938. Sur certaines transformations fonctionnelles relatives aux équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre. *C. R. Acad. Sc.*, 206: 178–182.
54. Delgado B. B., Khmelnytskaya K. V., Kravchenko V. V. 2019. The transmutation operator method for efficient solution of the inverse Sturm – Liouville problem on a half-line. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. 42(18): 7359–7366.
55. Delgado B. B., Khmelnytskaya K. V., Kravchenko V. V. 2019. A representation for Jost solutions and an efficient method for solving the spectral problem on the half line. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, Published Online <https://doi.org/10.1002/mma.5881>.
56. Fitouhi A., Hamza M. M. 1990. A uniform expansion for the eigenfunction of a singular second-order differential operator. *SIAM J. Math. Anal.*, 21(6): 1619–1632.

57. Freiling G., Yurko V. 2001. Inverse Sturm – Liouville problems and their applications. Nova Science Publishers, Inc., Huntington, NY, 305.
58. Fulton C., Pearson D., Pruess S. 2005. Computing the spectral function for singular Sturm – Liouville problem. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 176: 131–162.
59. Fulton C., Pearson D., Pruess S. 2008. Efficient calculation of spectral density functions for specific classes of singular Sturm – Liouville problems. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 212: 150–178.
60. Guenther R. B., Lee J. W. 2019. Sturm – Liouville Problems. Theory and Numerical Implementation. CRC Press, 420.
61. Johnson R. S. 2012. Second-order ordinary differential equations, Special functions, Sturm – Liouville theory and transforms. Ventus Publishing, 181.
62. Karapetyants A.N., Khmelnytskaya K.V., Kravchenko V. V. 2019. A practical method for solving the inverse quantum scattering problem on a half line. *Journal of Physics: Conference Series*. 1540(1): 012007 1–8.
63. Khmelnytskaya K. V., Kravchenko V. V., Torba S. M. 2016. Modulated electromagnetic fields in inhomogeneous media, hyperbolic pseudoanalytic functions and transmutations. *Journal of Mathematical Physics*, 57: 051503.
64. Khmelnytskaya K. V., Kravchenko V. V., Torba S. M., Tremblay S. 2013. Wave polynomials, transmutations and Cauchy’s problem for the Klein-Gordon equation. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 399: 191–212.
65. Khmelnytskaya K. V., Kravchenko V. V., Torba S. M. 2020. Time-dependent one-dimensional electromagnetic wave propagation in inhomogeneous media: exact solution in terms of transmutations and Neumann series of Bessel functions. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 41(5): 785–796.
66. Kozlov V., Mažya V. 1997. Theory of a higher order Sturm – Liouville equation. Springer, (Lecture notes in mathematics; 1659), 140.
67. Kravchenko V. V. 2020. Direct and Inverse Sturm – Liouville Problems. A Method of Solution. In series: *Frontiers in Mathematics*. Springer Nature Switzerland AG, Birkhäuser, Cham., 154.
68. Kravchenko I. V., Kravchenko V. V., Torba S. M., Dias J. C. 2018. Generalized exponential basis for efficient solving of homogeneous diffusion free boundary problems: Russian option pricing. arXiv:1808.08290.
69. Kravchenko V. V. 2018. Construction of a transmutation for the one-dimensional Schrödinger operator and a representation for solutions. *Applied Mathematics and Computation*, 328: 75–81.
70. Kravchenko V. V. 2019. On a method for solving the inverse Sturm – Liouville problem. *Journal of Inverse and Ill-posed Problems*. 27: 401–407.
71. Kravchenko V. V. 2019. On a method for solving the inverse scattering problem on the line. *Math Meth Appl Sci.*, 42: 1321–1327.
72. Kravchenko V. V., Navarro L. J., Torba S. M. 2017. Representation of solutions to the one-dimensional Schrödinger equation in terms of Neumann series of Bessel functions. *Applied Mathematics and Computation*, 314(1): 173–192.
73. Kravchenko V. V., Sitnik S. M. (eds.) 2020. Transmutation operators and applications. *Trends in Mathematics*, Birkhäuser, Basel, 686
74. Kravchenko V. V., Torba S. M. 2015. Construction of transmutation operators and hyperbolic pseudoanalytic functions. *Complex Anal. Oper. Theory*, 9: 389–429.
75. Kravchenko V. V., Torba S. M. 2015. Analytic approximation of transmutation operators and applications to highly accurate solution of spectral problems. *J. Comput. Appl. Math.* 275: 1–26.
76. Kravchenko V. V., Torba S. M. 2018. A Neumann series of Bessel functions representation for solutions of Sturm – Liouville equations. *Calcolo*, 55: 11.
77. Kravchenko V. V., Torba S. M., Castillo-Pérez R. 2018. A Neumann series of Bessel functions representation for solutions of perturbed Bessel equations. *Applicable Analysis*, 97(5): 677–704.

78. Kravchenko V. V., Torba S. M., Khmelnytskaya K. V. 2017. Transmutation operators: construction and applications. *Proceedings of the 17th International Conference on Computational and Mathematical Methods in Science and Engineering CMMSE-2017*, Cadiz, Andalusia, España, Julio 4-8 1198–1206.
79. Lowe B. D., Pilant M., Rundell W. 1992. The recovery of potentials from finite spectral data. *SIAM J. Math. Anal.*, 23(2): 482–504.
80. Lützen J. 1984. Sturm and Liouville’s work on ordinary linear differential equations. The emergence of Sturm – Liouville theory. *Archive for History of Exact Sciences*, 29(4): 309–376.
81. Masjed-Jamei M. 2020. Special Functions and Generalized Sturm – Liouville Problems. In series: *Frontiers in Mathematics*. Springer Nature Switzerland AG, Birkhäuser, Cham, 313.
82. Pike S., Sabatier P. 2002. *Scattering. Scattering and inverse scattering in pure and applied science*. Vol. 1-2. Academic Press, San Diego, 1831.
83. Poschel J., Trubowitz E. 1987. *Inverse spectral theory*. Academic Press, London, 192.
84. Pryce J. D. 1993. *Numerical solution of Sturm – Liouville problems*, Clarendon Press, Oxford, 322.
85. Sitnik S. M. 2010. Transmutations and applications: a survey, <http://arxiv.org/abs/1012.3741>, 141.
86. Shishkina E. L., Sitnik S. M. 2020 *Transmutations, singular and fractional differential equations with applications to mathematical physics*. Elsevier, Amsterdam, 564.
87. Teschl G. 2009. *Mathematical methods in quantum mechanics with applications to Schrödinger operators*. American Mathematical Society, Graduate Studies in Mathematics, Providence, 99, 356 .
88. Trimeche K. 1988. *Transmutation operators and mean-periodic functions associated with differential operators*. Harwood Academic Publishers, London, 282.
89. Zettl A. 2005. *Sturm – Liouville theory*. American Mathematical Society, Providence, 328.
90. Zhura N. A., Soldatov A. P. 2013. To inverse scattering problem of Gelfand, Levitan, Marchenko. *AIP Conf. Proc.* 1570, 298.

Получена 01.03.2021

Ситник Сергей Михайлович – доктор физико-математических наук, доцент, профессор Белгородского государственного национального исследовательского университета (НИУ «БелГУ»)

 <http://orcid.org/0000-0001-9661-4338>

ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия

E-mail: mathsms@yandex.ru

Шишкина Элина Леонидовна – доктор физико-математических наук, доцент, профессор Воронежского Государственного Университета

 <http://orcid.org/0000-0003-4083-1207>

Университетская пл., д.1, Воронеж, 394018, Россия

E-mail: ilina_dico@mail.ru