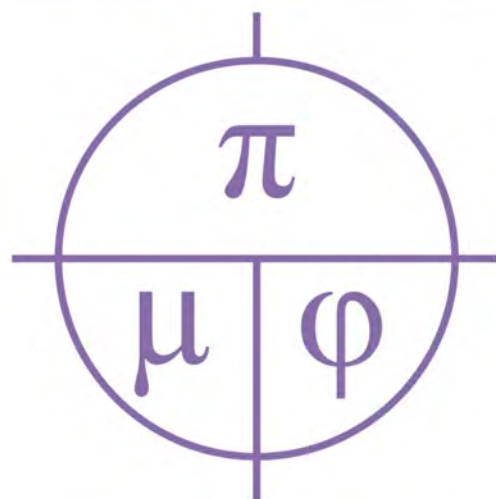


ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА & ФИЗИКА

APPLIED MATHEMATICS & PHYSICS





Прикладная математика & Физика

2021. Том 53, № 2

Основан в 1995 г. Журнал включен в Перечень ВАК рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней кандидата и доктора наук (1.1.1 – вещественный, комплексный и функциональный анализ, 1.1.2 – дифференциальные уравнения и математическая физика, 1.3.8 – физика конденсированного состояния). Ранее журнал издавался под названием «Научные ведомости Белгородского государственного университета. Математика. Физика».

УЧРЕДИТЕЛЬ:

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Белгородский государственный национальный исследовательский университет».

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:

Главный редактор: В. Б. Васильев, доктор физико-математических наук, НИУ «БелГУ»;

Заместители главного редактора: С. М. Ситник, доктор физико-математических наук, НИУ «БелГУ», Математика; А. В. Носков, доктор физико-математических наук, НИУ «БелГУ», Физика. Математическое моделирование;

Ответственный секретарь: О. В. Чернова, кандидат физико-математических наук, НИУ «БелГУ».

ЧЛЕНЫ РЕДАКЦИОННОЙ КОЛЛЕГИИ:

- | | |
|---|---|
| Ш. А. Алимов, д-р ф.-м. н., Ташкент, Узбекистан; | И. С. Ломов, д-р ф.-м. н., Москва, Россия; |
| Ю. А. Алхутов, д-р ф.-м. н., Владимир, Россия; | В. В. Меньших, д-р ф.-м. н., Воронеж, Россия; |
| А. Ашыралыев, д-р ф.-м. н., Алматы, Казахстан; | А. И. Назаров, д-р ф.-м. н., Санкт-Петербург, Россия; |
| С. В. Блажевич, д-р ф.-м. н., Белгород, Россия; | Е. Ю. Панов, д-р ф.-м. н., Великий Новгород, Россия; |
| А. Н. Беляков, д-р ф.-м. н., Белгород, Россия; | О. М. Пенкин, д-р ф.-м. н., Алматы, Казахстан; |
| А. Г. Брусенцев, д-р ф.-м. н., Белгород, Россия; | И. П. Половинкин, д-р ф.-м. н., Воронеж, Россия; |
| Ю. П. Вирченко, д-р ф.-м. н., Белгород, Россия; | Е. В. Радкевич, д-р ф.-м. н., Москва, Россия; |
| А. В. Глушак, д-р ф.-м. н., Белгород, Россия; | С. Е. Савотченко, д-р ф.-м. н., Белгород, Россия; |
| С. Б. Дабагов, д-р ф.-м. н., Москва, Россия; | А. П. Солдатов, д-р ф.-м. н., Москва, Россия; |
| Й. Диблик, д-р ф.-м. н., Брно, Чешская Республика; | В. Е. Федоров, д-р ф.-м. н., Челябинск, Россия; |
| Л. М. Кожевникова, д-р ф.-м. н., Стерлитамак, Россия; | А. А. Шибков, д-р ф.-м. н., Тамбов, Россия. |
| А. Н. Куликов, д-р ф.-м. н., Ярославль, Россия; | М. В. Шитикова, д-р ф.-м. н., Воронеж, Россия; |
| Д. М. Левин, д-р ф.-м. н., Тула, Россия; | Э. Л. Шишкина, д-р ф.-м. н., Воронеж, Россия. |

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор). Выходит 4 раза в год.

Выпускающий редактор: Л. П. Котенко	Гарнитура Times. Уч. изд. л. 5,7
Корректурa: Ю. В. Ивахненко	Дата выхода 30.06.2021.
Компьютерная верстка: О. В. Чернова	Оригинал-макет подготовлен отделом
Оригинал-макет: В. Б. Васильев	объединенной редакции научных журналов НИУ «БелГУ»
E-mail: vasilyev_v@bsu.edu.ru	308015, г. Белгород, ул. Победы, 85.

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

- А. М. Володченков, А. В. Юденков, Л. П. Римская**
Стохастическая модель напряженного состояния анизотропного тела в теории комплексного потенциала 89
- Ю. П. Вирченко, Н. Н. Витохина**
Формула Зигерта для многомерных случайных процессов Орнштейна – Уленбека 97
- О. Э. Яремко, Н. Н. Яремко**
Интегралы и производные дробного порядка на основе интегральных преобразований типа Лапласа с приложениями 114

ФИЗИКА. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

- С. Е. Кривобокова, В. А. Родин**
Алгоритм и программа для графического выделения множества парето в точечном массиве 125
- М. М. Дышаев, В. Е. Федоров**
Учет недостаточной ликвидности и транзакционных издержек при дельта-хеджировании 132
- С. Н. Тростянский, А. С. Тростянский**
Математическое моделирование зависимости уровня первичной заболеваемости алкоголизмом, наркоманией и токсикоманией от социально-экономических показателей 144

ПЕРСОНАЛИИ

- Редколлегия журнала «Прикладная математика & Физика»**
К 70-летию профессора Александра Васильевича Глушака 159

ОБЪЯВЛЕНИЯ

- Информация о конференциях** 165



Applied Mathematics & Physics

2021. Volume 53, № 2

Founded in 1995. The journal is included into the List of Higher Attestation Commission of peer-reviewed scientific publications where the main scientific results of dissertations for obtaining scientific degrees of a candidate and doctor of science should be published (1.1.1 – material, complex and functional analysis, 1.1.2 – differential equations and mathematical physics, 1.3.8 – condensed matter physics). Previously, the magazine was published under the title «Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics. Physics».

FOUNDER:

Federal state autonomous educational establishment of higher education
«Belgorod National Research University».

EDITORIAL BOARD:

Chief Editor: V. B. Vasilyev, Dr.Sc., Ph.D., Belgorod National Research University;
Deputy Editor-in-Chief: S. M. Sitnik, Dr.Sc., Ph.D., Belgorod National Research University, Mathematics;
A. V. Noskov, Dr.Sc., Ph.D., Belgorod National Research University, Physics. Mathematical modeling;
Executive Secretary: O. V. Chernova, PhD, Belgorod National Research University.

EDITORIAL BOARD MEMBERS:

Sh. A. Alimov, Dr.Sc., Ph.D., Tashkent, Uzbekistan;	I. S. Lomov, Dr.Sc., Ph.D., Moscow, Russia;
Yu. A. Alkhutov, Dr.Sc., Ph.D., Vladimir, Russia;	V. V. Menshih, Dr.Sc., Ph.D., Voronezh, Russia;
A. Ashyralyev, Dr.Sc., Ph.D., Almaty, Kazakhstan;	A. I. Nazarov, Dr.Sc., Ph.D., St. Petersburg, Russia;
S. V. Blazhevich, Dr.Sc., Ph.D., Belgorod, Russia;	E. Yu. Panov, Dr.Sc., Ph.D., Velikiy Novgorod, Russia;
A. N. Belyakov, Dr.Sc., Ph.D., Belgorod, Russia;	O. M. Penkin, Dr.Sc., Ph.D., Almaty, Kazakhstan;
A. G. Brusentsev, Dr.Sc., Ph.D., Belgorod, Russia;	I. P. Polovinkin, Dr.Sc., Ph.D., Voronezh, Russia;
Yu. P. Virchenko, Dr.Sc., Ph.D., Belgorod, Russia;	E. V. Radkevich, Dr.Sc., Ph.D., Moscow, Russia;
A. V. Glushak, Dr.Sc., Ph.D., Belgorod, Russia;	S. E. Savotchenko, Dr. Sc Ph.D., Belgorod, Russia;
S. B. Dabagov, Dr.Sc., Ph.D., Moscow, Russia;	A. P. Soldatov, Dr.Sc., Ph.D., Moscow, Russia;
J. Diblik, Dr.Sc., Ph.D., Brno, Czech Republic;	V. E. Fedorov, Dr.Sc., Ph.D., Chelyabinsk, Russia;
L. M. Kozhevnikova, Dr.Sc., Ph.D., Sterlitamak, Russia;	A. A. Shibkov, Dr.Sc., Ph.D., Tambov, Russia.
A. N. Kulikov, Dr.Sc., Ph.D., Yaroslavl, Russia;	M. V. Shitikova, Dr.Sc., Ph.D., Voronezh, Russia;
D. M. Levin, Dr.Sc., Ph.D., Tula, Russia;	E. L. Shishkina, Dr. Sc., Ph.D., Voronezh, Russia.

The journal has been registered at the Federal service for supervision of communications information technology and mass media (Roskomnadzor). Publication frequency: 4 /year.

Commissioning Editor L. P. Kotenko
Proofreading Yu. V. Ivakhnenko
Computer imposition O. V. Chernova
Dummy layout by V. B. Vasilyev
E-mail: vasilyev_v@bsu.edu.ru

Typeface Times. Publisher's signature 5,7
Date of publishing 30.06.2021.
The layout is presented by Department of the united
Editorial Board of Scientific Journals Belgorod
National Research University
Address: 85 Pobeda St., Belgorod, 308015, Russia

CONTENTS

MATHEMATICS

- Alexander Volodchenkov, Alexei Yudenkov, Lilia Rimskaya**
Stochastic model of the stress state of an anisotropic body in the theory of complex potential **89**
- Yuri Virchenko, Natalia Vitokhina**
The Ziegert formula for multidimensional Ornshtein – Uhlenbeck random processes **97**
- Oleg Iaremko, Natalia Iaremko**
Integrals and derivatives of fractional order based on Laplace type integral transformations with applications **114**

PHYSICS. MATHEMATICAL MODELING

- Svetlana Krivobokova, Vadimir Rodin**
Algorithm and program for graphical selection of the pareto set in a point array **125**
- Mikhail Dyshaev, Vladimir Fedorov**
The accounting of illiquidity and transaction costs during the delta-hedging **132**
- Sergey Trostyansky, Alexander Trostyansky**
Mathematical modeling of dependence of the primary morbidity level-alcoholism, drug addiction, toxicomania – on social and economic indices **144**

PERSONNEL

- Editorial board of the journal «Applied Mathematics & Physics»**
To the 70th anniversary of Professor Alexander Vasilievich Glushak **159**

ADS

- Conference information**
165

МАТЕМАТИКА

УДК 51.72
MSC 74S15

DOI 10.52575/2687-0959-2021-53-2-89-96

СТОХАСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ АНИЗОТРОПНОГО ТЕЛА В ТЕОРИИ КОМПЛЕКСНОГО ПОТЕНЦИАЛА

А. М. Володченков¹, А. В. Юденков², Л. П. Римская¹

(Статья представлена членом редакционной коллегии А. П. Солдатовым)

¹Смоленский филиал Российского экономического университета имени Г. В. Плеханова,
Смоленск, 214030, Россия

²Смоленская государственная академия физической культуры, спорта и туризма,
Смоленск, 214018, Россия

E-mail: alexmw2012@yandex.ru, aleks-ydenkov@mail.ru, lilirimska@yandex.ru

Аннотация. В работе изучена структура комплексного стохастического потенциала напряженно деформированного состояния анизотропной среды. С его помощью поставлены краевые задачи для определения неизвестных напряжений и деформаций. Разработан алгоритм их решения. Отличием указанных краевых задач от используемых краевых задач классической теории упругости является то, что детерминированные краевые условия заменяются на стохастические. Это позволяет расширить область применения модели на среды, которые не являются абсолютно однородными. Кроме того, предложенная форма стохастического комплексного потенциала позволяет учитывать внутренние напряжения исследуемых образцов. Для иллюстрации работы алгоритма приведено решение основной задачи теории упругости для анизотропной среды, ослабленной отверстием близким к эллиптическому.

Ключевые слова: Теория упругости, краевая задача, комплексный потенциал, анизотропное тело.

Для цитирования: Володченков А. М., Юденков А. В., Римская Л. П. 2021. Стохастическая модель напряженного состояния анизотропного тела в теории комплексного потенциала. Прикладная математика & Физика, 53(2): 89–96. DOI 10.52575/2687-0959-2021-53-2-89-96.

STOCHASTIC MODEL OF THE STRESS STATE OF ANISOTROPIC BODY IN THE THEORY OF COMPLEX POTENTIAL

Alexander Volodchenkov¹, Alexei Yudenkov², Lilia Rimskaya¹

(Article submitted by a member of the editorial board A. P. Soldatov)

¹Plekhanov Russian University of Economics, Smolensk Branch,
Smolensk, 214030, Russia

²Smolensk State Academy of Physical Culture, Sport and Tourism,
Smolensk, 214018, Russia

E-mail: alexmw2012@yandex.ru, aleks-ydenkov@mail.ru, lilirimska@yandex.ru

Received April, 22, 2021

Abstract. The structure of the complex stochastic potential of the stress-strain state of an anisotropic medium has been studied. With its help, boundary-value problems are posed for determining unknown stresses and strains. An algorithm for their solution has been developed. The difference between the indicated boundary value problems and the used boundary value problems of the classical theory of elasticity is that the deterministic boundary conditions are replaced by stochastic ones. This allows you to expand the scope of the model to media that are not completely homogeneous. In addition, the proposed form of the stochastic complex potential makes it possible to take into account the internal stresses of the samples under study. To illustrate the operation of the algorithm, the solution of the main problem of the theory of elasticity for an anisotropic medium weakened by a hole close to elliptical is given.

Key words: Elasticity theory, boundary value problem, complex potential, anisotropic body.

For citation: Volodchenkov A. M., Yudenkov A. V., Rimskaya L. P. 2021. Stochastic model of the stress state of an anisotropic body in the theory of complex potential. Applied Mathematics & Physics, 53(2): 89–96. (in Russian) DOI 10.52575/2687-0959-2021-53-2-89-96.

1. Введение. Важной задачей при проектировании подземных горных работ является оценка прочности сооружений. Для этого эффективно применяются методы математического моделирования с использованием комплексного потенциала (смотри, например, [1], [7], [11], [12]). Достаточно часто

при этом возникают задачи по определению напряженно деформированного состояния однородной упругой среды, ослабленной отверстиями ([3], [8]). В работах Г. В. Колосова и Н. И. Мухелишвили [5] было показано, что в случае упругой деформации изотропного тела основные задачи теории упругости сводятся к краевым задачам для аналитических компонент бигармонической функции. К настоящему времени теория классических краевых задач для бианалитических функций достаточно развита ([9], [13], [14]). Разработаны методы применения краевых задач для бианалитических функций для решения задач изотропной теории упругости. В то же время горные породы лишь приближённо можно считать изотропными. Для более точного описания напряженного состояния, особенно при предельных нагрузках, приводящих к образованию трещин, необходимо учитывать анизотропные свойства породы ([7], [12]). Наиболее полный разбор основных классических задач анизотропной теории упругости и их приложений к решению практических задач дан в работах [3] и [10].

В основе исследований упругих свойств анизотропных сред лежит использование функции комплексного потенциала. В отличие от изотропного случая, анизотропный комплексный потенциал и краевые условия для его определения имеют достаточно сложную структуру ([3], [10]), что существенно осложняет решение основных задач (смотри, например, [2]).

Помимо использования классического комплексного потенциала, для решения задач теории упругости можно эффективно использовать стохастический потенциал ([4], [9]). Использование стохастического комплексного потенциала позволяет существенно ослабить требования к граничным условиям. Это приводит к тому, что задачи теории упругости становятся применимы к средам, которые только приближённо являются однородными.

Целью работы является разработка математической модели для исследования напряжённо деформированного состояния упругого тела с учётом анизотропии и небольшой неоднородности. Кроме этого предлагаемая модель может остаться адекватной, если в исследуемой породе есть внутренние напряжения. Для достижения цели работы строится общий вид комплексного стохастического анизотропного потенциала, даются постановки основных задач теории упругости, приводится алгоритм их решения.

2. Построение модели и ее исследование. Исследования проводятся на основе теории стохастического потенциала и свойствах интеграла типа Коши. Приведём необходимые в дальнейшем определения и утверждения.

Определение 1. Сингулярный интеграл

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\tau - z} \quad (1)$$

называется интегралом типа Коши. Функция $\varphi(\tau)$ называется плотностью, $\frac{1}{\tau - z}$ — ядром интеграла типа Коши.

Справедливо утверждение.

Теорема 1. (Племеля – Сохоцкого) Интеграл типа Коши имеет предельные значения $\Phi^+(t)$ и $\Phi^-(t)$ при стремлении к точке t изнутри и извне соответственно, которые выражаются следующим образом

$$\begin{aligned} \Phi^+(t) &= \frac{1}{2} \varphi(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\tau - t}, \\ \Phi^-(t) &= -\frac{1}{2} \varphi(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\tau - t}. \end{aligned} \quad (2)$$

Определение 2. ([6], с. 145) τ_D — называется первым моментом выхода случайного процесса Ито $Z(t)$ из D , если $\tau_D = \inf\{t > 0, Z(t) \notin D\}$.

Теорема 2. (Формула Дынкина) Пусть f — непрерывная в среднем квадратическом функция, и пусть τ — момент остановки, причем $M(f(Z_{\tau_D})) < \infty$. Тогда

$$M[f(Z_{\tau})] = f(z) + M \left[\int_0^{\tau} Af(Z_s) ds \right]. \quad (3)$$

Определение 3. Пусть $Z(t)$ — диффузионный процесс Ито. Характеристический оператор A процесса $Z(t)$ определяется формулой

$$Af(z) = \lim_{U \rightarrow z} \frac{M[f(Z(\tau_U))] - f(z)}{M(\tau_U)}. \quad (4)$$

Здесь через U обозначаются множества U_k , стягивающиеся к точке z в том смысле, что $U_{k+1} \subset U_k$ и $\bigcap_k U_k = z$; τ_U — первый момент выхода из U процесса $Z(t)$.

Определение 4. Функция $F(z)$ есть случайная аналитическая функция, если выполнено $AF(z) = 0$.

Детерминированная модель. В случае, когда тело обладает анизотропией общего вида, неизвестные компоненты напряжений и смещений выражаются через функцию F , называемую комплексным потенциалом. В работе [3] показано, что при учёте внутренних напряжений комплексный потенциал имеет вид

$$F = F_1(z_1) + F_2(z_2) + F_3(z_3). \tag{5}$$

Сформулируем основные свойства комплексного потенциала.

Свойство 1. Функция (5) удовлетворяет уравнению

$$D_1 \dots D_6 \operatorname{Re} F = 0. \tag{6}$$

Здесь $D_k = \frac{\partial}{\partial y} - \mu_k \frac{\partial}{\partial x}$, μ_k – корни определённого характеристического уравнения.

Для удобства работают не с самими функциями $F_k(z_k)$, а с их производными $F'_k = \Phi_k$.

Приведём теперь математическую модель первой основной задачи теории упругости тел, обладающих анизотропией общего вида.

Определить функции $\Phi_k(z_k)$ ($k = 1, 2, 3$) по краевым условиям.

$$\begin{cases} 2\operatorname{Re}[\Phi_1 + \Phi_2 + \nu_3\Phi_3] = f_1(s), \\ 2\operatorname{Re}[\mu_1\Phi_1 + \mu_2\Phi_2 + \mu_3\nu_3\Phi_3] = f_2(s), \\ 2\operatorname{Re}[\nu_1\Phi_1 + \nu_2\Phi_2 + \Phi_3] = f_3(s). \end{cases} \tag{7}$$

Здесь f_k заданные на контуре L функции, определяемые внешними нагрузками и формой контура. В детерминированной постановке полагается, что функции f_k принадлежат классу Гёльдера.

Расширим требования к граничным условиям. Положим, что нагрузки и форма контура являются случайными функциями. Можно ли выразить решение задачи (7) в этом случае через компоненты функции (5)? В общем случае ответ отрицателен. Поэтому необходимо рассмотреть стохастический аналог комплексного потенциала.

Построение стохастической модели. Введём понятие стохастического комплексного потенциала.

Пусть w – открытая область на плоскости комплексного переменного $z = x + iy$. Области w_k ($k = 1, 2, 3$) находятся в аффинном соответствии области w на плоскостях $z_k = x_k + iy_k$.

Определение 5. Функция Ψ называется стохастическим комплексным потенциалом, если

$$M(\Psi) = M(\Psi_1(Z_{\tau_{w,1}}) + \Psi_2(Z_{\tau_{w,2}}) + \Psi_3(Z_{\tau_{w,3}})), \tag{8}$$

для всех $z_k \in D_k$ и всех открытых ограниченных множеств w_{km} , для которых замыкание которых принадлежит D_k . Здесь Ψ_k – случайная аналитическая функция.

Докажем следующее утверждение.

Теорема 3. Пусть Ψ – стохастический комплексный потенциал, заданный в области D , тогда

$$A_1 A_2 A_3 \operatorname{Re} \Psi = 0. \tag{9}$$

Здесь

$$A_k f(z_k) = \lim_{w_k \rightarrow z_k} \frac{M(f(Z_{\tau_{w,k}})) - f(z_k)}{M(Z_{\tau_{w,k}})}. \tag{10}$$

Доказательство. Из формулы (10) следует

$$A_3 \operatorname{Re} \Psi = \operatorname{Re} \left[\frac{1 + \mu_1^2}{1 + \mu_3^2} \Psi_1^{(2)}(z_1) + \frac{1 + \mu_2^2}{1 + \mu_3^2} \Psi_2^{(2)}(z_2) \right],$$

$$A_2 A_3 \operatorname{Re} \Psi = \operatorname{Re} \left[\frac{(1 + \mu_1^2)^2}{(1 + \mu_2^2)(1 + \mu_3^2)} \Psi_1^{(4)}(z_1) \right],$$

$$A_1 A_2 A_3 \operatorname{Re} \Psi = 0,$$

что т. д.

Теорема 4. Если для функции $\Psi \in C^{(6)}(D)$ выполняется условие (9), то сама функция имеет вид (8).

Доказательство. Для доказательства предложения воспользуемся формулой Дынкина (3).

$$A_2 A_3 \operatorname{Re} \Psi = M(\operatorname{Re} \Psi_1(Z_{\tau_{D,1}})) - \lim_{w \rightarrow z_1} \int_0^{\tau_D} A_1 A_2 A_3 (\operatorname{Re} \Psi) ds = M(\operatorname{Re} \Psi_1(Z_{\tau_{D,1}})).$$

Аналогично

$$A_3 \operatorname{Re} \Psi - M(\operatorname{Re} \Psi_1(Z_{\tau_{D1}})) = M(\Psi_2(Z_{\tau_{D2}})) - \lim_{w \rightarrow z_{11}} \int_0^{\tau_D} (A_2 A_3 \operatorname{Re} \Psi - M(\operatorname{Re} \Psi_1)) ds = M(\operatorname{Re} \Psi_2(Z_{\tau_{D2}})).$$

$$\operatorname{Re} \Psi = M(\operatorname{Re} \Psi_1(Z_{\tau_{D1}})) + M(\operatorname{Re} \Psi_2(Z_{\tau_{D2}})) + M(\operatorname{Re} \Psi_3(Z_{\tau_{D3}})).$$

Заметим, что функцию Ψ можно восстановить по её действительной части с точностью до постоянного слагаемого.

Таким образом, стохастический комплексный потенциал можно записать в виде

$$\Psi = \Psi_1(z_1) + \Psi_2(z_2) + \Psi_3(z_3). \quad (11)$$

Сформулируем математическую модель первой основной задачи теории упругости для анизотропного тела, в случае, когда нагрузка и форма контура являются случайными функциями.

Определить случайный вектор $\{\Psi'_1(z_1), \Psi'_2(z_2), \Psi'_3(z_3)\}$ по краевому условию

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}[\Psi'_1(T_{1\tau_D}) + \Psi'_2(T_{2\tau_D}) + v_3 \Psi'_3(T_{3\tau_D})] &= f_1(T_{\tau_D}), \\ \operatorname{Re}[\mu_1 \Psi'_1(T_{1\tau_D}) + \mu_2 \Psi'_2(T_{2\tau_D}) + \mu_3 v_3 \Psi'_3(T_{3\tau_D})] &= f_2(T_{\tau_D}), \\ \operatorname{Re}[v_1 \Psi'_1(T_{1\tau_D}) + v_2 \Psi'_2(T_{2\tau_D}) + \Psi'_3(T_{3\tau_D})] &= f_3(T_{\tau_D}). \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь $f_1(T_{\tau_D})$ – заданные случайные функции непрерывные в среднем квадратическом, $M(f_1(T_{\tau_D}))$ удовлетворяют условию Гельдера, $\{\mu_1, \mu_2, \mu_3\}$ $\{V_1, V_2, V_3\}$ – комплексные постоянные, условия (12) выполняются почти наверное.

Результаты. Для исследования стохастической модели предположим следующий алгоритм.

Функции $\{\Psi'_1(z_1), \Psi'_2(z_2), \Psi'_3(z_3)\}$ можно рассматривать и как случайные функции обычных комплексных переменных $z_k = x + iy_k$, где

$$x_k = x + \alpha_k y, \quad y_k = \beta_k y \quad (k = 1, 2, 3).$$

При этом указанные функции будут определены в областях D_1, D_2, D_3 соответственно, полученных из области поперечного сечения D путем аффинного преобразования. Точке A контура L области D , определяемой дугой s , должны аффинно соответствовать точки A_1, A_2, A_3 , на контурах L_1, L_2, L_3 областей D_1, D_2, D_3 .

Пусть функции $\omega_0(\xi), \omega_1(\xi), \omega_2(\xi)$ и $\omega_3(\xi)$ конформно отображают области D, D_1, D_2, D_3 соответственно на внутренность единичного круга γ . Обозначим обратные функции через $\omega_k^{-1}(z_k)$ ($k = 0, 1, 2, 3$). При отображении границ L, L_1, L_2, L_3 точки A, A_1, A_2, A_3 находящиеся в аффинном соответствии, перейдут в точки $\sigma, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ единичной окружности. Возникает так называемый сдвиг.

Выразим $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ через переменную σ :

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \omega_1^{-1}(t_1) = \omega_1^{-1}(\lambda_1(t)) = \omega_1^{-1}(\lambda_1(\omega_0(\sigma))) = \alpha_1 \sigma, \quad t \in L, t_1 \in L_1, \\ \sigma_2 &= \omega_2^{-1}(t_2) = \omega_2^{-1}(\lambda_2(t)) = \omega_2^{-1}(\lambda_2(\omega_0(\sigma))) = \alpha_2 \sigma, \quad t_2 \in L_2, \\ \sigma_3 &= \omega_3^{-1}(t_3) = \omega_3^{-1}(\lambda_3(t)) = \omega_3^{-1}(\lambda_3(\omega_0(\sigma))) = \alpha_3 \sigma, \quad t_3 \in L_3. \end{aligned} \quad (13)$$

Функции a_k называют функциями сдвига.

Перепишем краевые условия (12) в следующем виде

$$\begin{aligned} 2\operatorname{Re}[\psi_1(\alpha_1(\sigma_{\tau_y})) + \psi_2(\alpha_2(\sigma_{\tau_y})) + v_3 \psi_3(\alpha_3(\sigma_{\tau_y}))] &= g_1(\sigma_{\tau_y}), \quad \sigma \in \Gamma \\ 2\operatorname{Re}[\mu_1 \psi_1(\alpha_1(\sigma_{\tau_y})) + \mu_2 \psi_2(\alpha_2(\sigma_{\tau_y})) + \mu_3 v_3 \psi_3(\alpha_3(\sigma_{\tau_y}))] &= g_2(\sigma_{\tau_y}), \\ 2\operatorname{Re}[v_1 \psi_1(\alpha_1(\sigma_{\tau_y})) + v_2 \psi_2(\alpha_2(\sigma_{\tau_y})) + \psi_3(\alpha_3(\sigma_{\tau_y}))] &= g_3(\sigma_{\tau_y}). \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь $\psi_k(\alpha_k(\sigma)) = \Psi'_k(t_k)$.

Для решения системы (14) применим комбинированный метод, основанный как на использовании теории стохастического потенциала, так и на теории детерминированных краевых задач. Перепишем краевые условия (14) в следующем виде

$$\begin{aligned} \psi_1(\alpha_1(\sigma_{\tau_y})) &= \overline{-\psi_1(\alpha_1(\sigma_{\tau_y}))} + Q_1(\sigma_{\tau_y}), \\ \mu_2 \psi_2(\alpha_2(\sigma_{\tau_y})) &= \overline{-\mu_2 \psi_2(\alpha_2(\sigma_{\tau_y}))} + Q_2(\sigma_{\tau_y}), \\ \psi_3(\alpha_3(\sigma_{\tau_y})) &= \overline{-\psi_3(\alpha_3(\sigma_{\tau_y}))} + Q_3(\sigma_{\tau_y}). \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь

$$\begin{aligned} Q_1 &= -2\text{Re}[\psi_2(\alpha_2(\sigma_{\tau_y})) + v_3\psi_3(\alpha_3(\sigma_{\tau_y}))] + g_1(\sigma_{\tau_y}), \\ Q_2 &= -2\text{Re}[\mu_1\psi_2(\alpha_1(\sigma_{\tau_y})) + \mu_3v_3\psi_3(\alpha_3(\sigma_{\tau_y}))] + g_2(\sigma_{\tau_y}), \\ Q_3 &= -2\text{Re}[v_1\psi_2(\alpha_1(\sigma_{\tau_y})) + v_2\psi_2(\alpha_2(\sigma_{\tau_y}))] + g_3(\sigma_{\tau_y}). \end{aligned}$$

Краевые условия (15) представляют собой стохастические задачи Дирихле для Z -аналитических (X -гармонических) функций.

Считая временно функции Q_k ($k = 1, 2, 3$) известными, решим задачи (15). Получим ([6] с. 217)

$$\begin{aligned} \text{Re}\psi_1(\xi) &= M(Q_1(\beta_1(\Xi_{\tau_y}))), \\ \text{Re}\psi_2(\xi) &= \frac{1}{\text{Re}\mu_2}M(Q_2(\beta_2(\Xi_{\tau_y}))), \\ \text{Re}\psi_3(\xi) &= M(Q_3(\beta_3(\Xi_{\tau_y}))). \end{aligned} \tag{16}$$

Здесь $\alpha_k(\beta_k(\xi)) = \xi$.

Краевые условия (16) являются детерминированными.

Перейдем в первом уравнении (16) к граничным значениям.

Учитывая, что

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2}\psi_k(\alpha_k(\sigma)) &= \frac{1}{2\pi i} \int_Y \frac{\psi_k(\alpha_k(\sigma_0))\alpha_k'(\sigma_0)d\sigma_0}{\alpha_k(\sigma_0) - \alpha_k(\sigma)}, \\ \frac{1}{2}\overline{\psi_k(\alpha_k(\sigma))} &= -\frac{1}{2\pi i} \int_Y \frac{\overline{\psi_k(\alpha_k(\sigma_0))}\alpha_k'(\sigma_0)d\sigma_0}{\alpha_k(\sigma_0) - \alpha_k(\sigma)} + C_k \quad (k = 2, 3), \end{aligned} \right\} \tag{17}$$

получим

$$\begin{aligned} \psi_1(\alpha_1(\sigma)) &= -\psi_2(\alpha_2(\sigma)) - \lambda_3\psi_3(\alpha_3(\sigma)) + \int_Y A_2(\sigma, \sigma_0)\psi_2(\alpha_2(\sigma_0))d\sigma_0 + \\ &+ \int_Y A_2(\sigma, \sigma_0)\overline{\psi_2(\alpha_2(\sigma_0))}d\sigma_0 + \int_Y A_3(\sigma, \sigma_0)\psi_3(\alpha_3(\sigma_0))d\sigma_0 + \\ &+ \int_Y B_3(\sigma, \sigma_0)\overline{\psi_3(\alpha_3(\sigma_0))}d\sigma_0 + \frac{1}{2}g_1(\sigma) + \frac{1}{2\pi i} \int_Y \frac{M(g_1)\alpha_1'(\sigma_0)d\sigma_0}{\alpha_1(\sigma_0) - \alpha_1(\sigma)}. \end{aligned} \tag{18}$$

Здесь функции $A_2(\sigma, \sigma_0)$, $A_3(\sigma, \sigma_0)$, $B_3(\sigma, \sigma_0)$ являются ядрами Фредгольма.

Аналогично продолжим работу со вторым и третьим условием (16). Получим

$$\psi_2(\xi) = \frac{1}{2\pi i(\mu_2 - \mu_1)} \int_Y \frac{Q_2(\beta_2(\sigma_0))d\sigma_0}{\sigma_0 - \xi} + \int_Y R_2(\sigma_0, \sigma)Q_2(\beta_2(\sigma_0))d\sigma_0. \tag{19}$$

Через $Q_2(\sigma)$ обозначены заданные функции, зависящие от $M(g_1, M(g_2), \alpha_k(\sigma)$ ($k = 1, 2$).

$$\begin{aligned} \Delta_3\psi_3(\alpha_3(\sigma)) + \overline{\Delta_3}\Psi_3(\alpha_3(\sigma)) &+ \int_Y A_{33}(\sigma, \sigma_0)\Psi_3(\alpha_3(\sigma_0))d\sigma_0 + \\ &+ \int_Y B_{33}(\sigma, \sigma_0)\overline{\Psi_3(\alpha_3(\sigma_0))}d\sigma_0 = Q_3(\sigma), \end{aligned} \tag{20}$$

где $A_{33}(\sigma, \sigma_0)$, $B_{33}(\sigma, \sigma_0)$ – известные ядра Фредгольма, $Q_3(\sigma)$ – заданная функция.

Решая задачу (20), определим функцию $\psi(\xi)$. Подставим полученное выражение в уравнение (19), найдем функцию $\psi_2(\xi)$. Подставляя краевые значения функций $\psi_2(\xi)$ и $\psi_3(\xi)$ в первое краевое условие (16), найдем функцию $\psi_1(\xi)$.

Сформулируем полученный результат в виде теоремы.

Теорема 5. *Решение краевой задачи для стохастического комплексного потенциала сводится к решению трех стохастических задач Дирихле для Z – аналитических функций (15) и последовательного решения детерминированных задач Гильберта с интегральными ядрами (18) и (20).*

Пример. В качестве примера рассмотрим случай бесконечной анизотропной пластинки с эллиптическим отверстием свободным от внешних усилий ([3] гл. 3).

Пусть напряженное состояние на бесконечности представляет собой растяжение усилиями p , составляющими угол α с осью OX .

Запишем приведенные краевые условия

$$\begin{aligned} f_1^0 &= -2\operatorname{Re}[B_1 z_1 + (B_2 + iC_2)z_2], \\ f_2^0 &= -2\operatorname{Re}[B_1 \mu_1 z_1 + \mu_2(B + iC_2)z_2], \end{aligned}$$

где B_1, B_2, C_2 являются случайными величинами.

Функция, отображающая внутренность единичной окружности на внешность эллипса, имеет вид

$$z = \omega(\xi) = \frac{1}{R} \left(\frac{1}{\xi} + \xi m \right) \quad \left(R = \frac{a+b}{2}, m = \frac{a-b}{a+b} \right). \quad (21)$$

Особенность рассматриваемой области (бесконечной плоскости с эллиптическим отверстием) состоит в том, что при конформном отображении точки z_1, z_2 и z (здесь z принадлежит границе области) переходят в одну точку единичной окружности на плоскости ξ .

С учетом того, что $z_1 = \frac{a + i\mu_1 b}{2} \xi + \frac{a - i\mu_1 b}{2} \cdot \frac{1}{\xi}$, $z_2 = \frac{a + i\mu_2 b}{2} \xi + \frac{a - i\mu_2 b}{2} \cdot \frac{1}{\xi}$, преобразуем приведенные условия к следующему виду:

$$\left. \begin{aligned} f_1^0 &= -2\operatorname{Re}[k_1 \sigma + k_2 \frac{1}{\sigma}], \\ f_2^0 &= -2\operatorname{Re}[k_3 \sigma + k_4 \frac{1}{\sigma}], \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

где k_n ($n = 1, \dots, 4$) – случайные величины.

Граничные условия (15) примут вид

$$\begin{aligned} \psi_1(\sigma_{\tau_y}) + \overline{\psi_1(\sigma_{\tau_y})} + \psi_2(\sigma_{\tau_y}) + \\ + \overline{\psi_2(\sigma_{\tau_y})} &= f_1(\sigma_{\tau_y}), \\ \mu_1 \psi_1(\sigma_{\tau_y}) + \overline{\mu_1 \psi_1(\sigma_{\tau_y})} + \mu_2 \psi_2(\sigma_{\tau_y}) + \\ + \overline{\mu_2 \psi_2(\sigma_{\tau_y})} &= f_2(\sigma_{\tau_y}). \end{aligned} \quad (23)$$

Краевые условия (23) представляют собой две стохастических задачи Дирихле для Z -аналитических функций. Решая их, получим

$$\begin{aligned} \psi_1^0(\xi) &= -M \left(\frac{k_3 + \bar{k}_4 - \mu_2(k_1 + \bar{k}_2)}{\mu_1 - \mu_2} \right) \xi, \\ \psi_2^0(\xi) &= M \left(\frac{k_3 + \bar{k}_4 - \mu_1(k_1 + \bar{k}_2)}{\mu_1 - \mu_2} \right) \xi. \end{aligned} \quad (24)$$

Возвращаясь к исходным координатам, получим

$$\begin{aligned} \Phi_1^0(z_1) &= -M \left(\frac{k_3 + \bar{k}_4 - \mu_2(k_1 + \bar{k}_2)}{\mu_1 - \mu_2} \frac{z_1 - \sqrt{z_1^2 - (a^2 + \mu_1^2 b^2)}}{a + i\mu_1 b} \right), \\ \Phi_2^0(z_2) &= M \left(\frac{k_3 + \bar{k}_4 - \mu_1(k_1 + \bar{k}_2)}{\mu_1 - \mu_2} \frac{z_2 - \sqrt{z_2^2 - (a^2 + \mu_2^2 b^2)}}{a + i\mu_2 b} \right). \end{aligned} \quad (25)$$

Напряженное состояние тела определим по формулам

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= p \cos^2 \alpha + 2\operatorname{Re}[\mu_1^2 \Phi_1^{0'}(z_1) + \mu_2^2 \Phi_2^{0'}(z_2)], \\ \sigma_y &= p \sin^2 \alpha + 2\operatorname{Re}[\Phi_1^{0'}(z_1) + \Phi_2^{0'}(z_2)], \\ \tau_{xy} &= p \sin \alpha \cos \alpha - 2\operatorname{Re}[\mu_1 \Phi_1^{0'}(z_1) + \mu_2 \Phi_2^{0'}(z_2)]. \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

3. Обсуждение результатов. Основные результаты работы сформулированы в виде теорем 3, 4, 5. Из этих теорем следует, что разработана математическая модель для исследования напряжённо деформированного состояния упругого тела с учётом анизотропии, небольших неоднородностей, внутренних напряжений и допусков на внешние напряжения и форму тела. Сама модель представляет собой систему векторных, стохастических краевых задач со сдвигом для случайных аналитических функций. Предложен алгоритм решения основных задач теории упругости с использованием свойств разработанной модели. Таким образом, заявленная цель исследований достигнута.

Ограничения исследования и обобщения его результатов; предложения по практическому применению. При разработке математической модели полагалось, что зависимость между компонентами напряжений и смещений линейная. Это является главным ограничением к практическому применению результатов работы.

В то же время в области гуконских деформаций стохастическая модель основных задач теории упругости существенно обобщает аналогичные модели, основанные на использовании комплексного потенциала. Отличие предлагаемой модели состоит в том, что она, во-первых, работает с анизотропными средами за счёт введения в краевые условия функции сдвига; во-вторых, модель является стохастической, что позволяет применять её для почти однородных тел и в условиях неполной информации об упругих характеристиках среды; в-третьих, благодаря увеличению аналитических компонент в стохастическом комплексном потенциале до трёх, можно учитывать внутренние напряжения в образце. Указанные особенности позволяют рассчитывать, что построенная математическая модель будет эффективна при расчёте прочности подземных сооружений и других объектов.

4. Заключение. В статье построена и исследована математическая модель основных задач теории упругости для работы с анизотропными средами. При этом использовалась стохастическая теория комплексного потенциала. Получен алгоритм для решения основных задач теории упругости.

Список литературы

1. Борщ-Компониет В. И. 2013. Практическая механика горных пород. М., Горная книга, 322.
2. Ивлев Д. Д., Максимова Л. А., Миронов Б. Г. 2011. О соотношениях теории трансляционной идеально-пластической анизотропии в случае плоской деформации. Известия Российской академии наук. Механика твердого тела, 2: 41–43.
3. Лехницкий Г. С. 1977. Теория упругости анизотропного тела. М., Наука, 416.
4. Максимова Л. А., Юденков А. В. 2015. Теория стохастического потенциала в плоской теории упругости. Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 4(26): 134–142.
5. Мухелишвили Н. И. 1966. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М, Наука, 707.
6. Оксендаль Б. 2003. Стохастические дифференциальные уравнения. М, Мир, 300.
7. Оловянный А. Г. 2010. Математическое моделирование процессов деформирования и разрушения в трещиноватых массивах горных пород. Записки Горного института. СПб., 185.
8. Савин Г. Н. 1975. Распределение напряжений около отверстий. Киев, Наукова думка, 315.
9. Юденков А. В., Володченков А. М., Римская Л. П. 2020. Математическое моделирование на основе теории потенциала. Москва.
10. Юденков А. В., Володченков А. М. 2020. Устойчивость математических моделей основных задач анизотропной теории упругости. Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 30(1): 112–124.
11. Kuzmin Yu. O. 2015. Recent Geodynamics of a Fault System. Physics of the Solid Earth. 51(4): 480–485.
12. Kudo Y., Hashimoto K., Sano O., Nakagawa K. 1987. Relation between physical anisotropy and microstructures of granitic rock in Japan. Proc. 6th Int. Congress on Rock Mech. Canada.
13. Kuritsyn S. Y., Rasulov K. M. 2018. On a generalized Riemann problem for metaanalytic functions of the second type. Lobachevskii Journal of Mathematics. 39(1): 97–103.
14. Rasulov K. M. 2018. On the uniqueness of the solution of the Dirichlet boundary value problem for quasiharmonic functions in a non-unit disk. Lobachevskii Journal of Mathematics. 39(1): 142–145.

References

1. Borshch-Komponiets V. I. 2013. Prakticheskaya mekhanika gornyx porod [Practical rock mechanics]. Moskva : Gornaya kniga, 322. (in Russian)

2. Ivlev D. D., Maksimova L. A., Mironov B. G. 2011. O sootnosheniyakh teorii translyatsionnoi ideal'no-plasticheskoi anizotropii v sluchae ploskoi deformatsii [On relations of the theory of translational ideal-plastic anisotropy in the case of plane deformation]. *Izvestiya Rossiiskoi akademii nauk. Mekhanika tverdogo tela*. № 2: 41–43. (in Russian)
3. Lekhnitskii G. S. 1977. *Teoriya uprugosti anizotropnogo tela*. [Elasticity theory for the anisotropic body] – M.: Nauka, – 416 s. (in Russian)
4. Maksimova L. A., Yudenkov A. V. 2015. *Teoriya stokhasticheskogo potentsiala v ploskoi teorii uprugosti* [Stochastic potential theory in the two-dimensional elasticity theory]. *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. Ya. Yakovleva. Seriya: Mekhanika predel'nogo sostoyaniya*. № 4 (26). S. 134–142. (in Russian)
5. Muskhelishvili N. I. 1966. *Nekotorye osnovnye zadachi matematicheskoi teorii uprugosti* [Some primal problems of the mathematical theory of elasticity]. M, Nauka, 707 s. (in Russian)
6. Oksendal' B. 2003. *Stokhasticheskie differentsial'nye uravneniya* [Stochastic differential equations]. M, Mir, 300s. (in Russian)
7. Olovyanni A. G. 2010. *Matematicheskoe modelirovanie protsessov deformirovaniya i razrusheniya v treshchinovatykh massivakh gornykh porod* [Mathematical modeling of deformation and fracture processes in fractured rock mass]. *Zapiski Gornogo instituta*. SPb., 185. (in Russian)
8. Savin G. N. 1975. *Raspredelenie napryazhenii okolo otverstii* [Distribution of stresses around holes]. Kiev, Naukova dumka, 315. (in Russian)
9. Yudenkov A. V., Volodchenkov A. M., Rimskaya L. P. 2020. *Matematicheskoe modelirovanie na osnove teorii potentsiala* [Mathematical modeling based on potential theory]. Moskva. (in Russian)
10. Yudenkov A. V., Volodchenkov A. M. 2020. *Ustoichivost' matematicheskikh modelei osnovnykh zadach anizotropnoi teorii uprugosti* [Stability of mathematical models of the main problems of the anisotropic theory of elasticity]. *Vestnik Udmurtskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye nauki*. 30(1): 112-124. (in Russian)
11. Kuzmin Yu. O. 2015. Recent Geodynamics of a Fault System. *Physics of the Solid Earth*. 51(4): 480-485.
12. Kudo Y., Hashimoto K., Sano O., Nakagawa K. 1987. Relation between physical anisotropy and microstructures of granitic rock in Japan. *Proc. 6th Int. Congress on Rock Mech. Canada*.
13. Kuritsyn S. Y., Rasulov K. M. 2018. On a generalized Riemann problem for metaanalytic functions of the second type. *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 39(1): 97-103.
14. Rasulov K. M. 2018. On the uniqueness of the solution of the Dirichlet boundary value problem for quasiharmonic functions in a non-unit disk. *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 39(1): 142-145.

Получена 22.04.2021

Володченков Александр Михайлович – кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой естественнонаучных и гуманитарных дисциплин Смоленского филиала Российского экономического университета им. Г. В. Плеханова.

 <http://orcid.org/0000-0001-9314-7324>

ул. Нормандия-Неман, 21, Смоленск, 214030, Россия

E-mail: alexm2012@yandex.ru

Юденков Алексей Витальевич – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой менеджмента и естественно-научных дисциплин Смоленской государственной академии физической культуры, спорта и туризма.

 <http://orcid.org/0000-0001-8329-1146>

пр. Гагарина, 23, Смоленск, 214000, Россия

E-mail: aleks-yudenkov@mail.ru

Римская Лилия Павловна – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры менеджмента и таможенного дела Смоленского филиала Российского экономического университета им. Г. В. Плеханова.

ул. Нормандия-Неман, 21, Смоленск, 214030, Россия

E-mail: lilirimska@yandex.ru

ФОРМУЛА ЗИГЕРТА ДЛЯ МНОГОМЕРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ ОРНШТЕЙНА – УЛЕНБЕКА

Ю. П. Вирченко, Н. Н. Витохина

ООО «Матрица»,
Белгород, 308012, Россия
Белгородский государственный национальный исследовательский университет,
Белгород, 308015, Россия
E-mail: virch@bsu.edu.ru

Аннотация. Рассматриваются элементарные гауссовские, марковские случайные процессы $\{\tilde{x}(t); t \in [t_0, \infty)\}$ со значениями в \mathbb{R}^n , каждый из которых невырожден и обладает пределом при $t_0 \rightarrow -\infty$, являющимся стационарным процессом. Предельный стационарный процесс представляет собой многомерный случайный процесс Орнштейна – Уленбека. Получена формула для характеристической функции $Q(-i\lambda)$ квадратичного функционала $J_t[\tilde{x}(s)] = \int_0^t (\tilde{x}(s), V\tilde{x}(s))ds$ от случайных траекторий $\tilde{x}(t)$, справедливая для каждого процесса этого класса, которая является многомерным обобщением формулы Зигерта для одномерного процесса Орнштейна – Уленбека.

Ключевые слова: элементарные гауссовские процессы, многомерный процесс Орнштейна – Уленбека, матричное уравнение Риккати, белый шум, уравнение Колмогорова.

Для цитирования: Вирченко Ю. П., Витохина Н. Н. 2021. Формула Зигерта для многомерных случайных процессов Орнштейна – Уленбека. Прикладная математика & Физика, 53(2): 97–113.

DOI 10.52575/2687-0959-2021-53-2-97-113.

THE ZIEGERT FORMULA FOR MULTIDIMENSIONAL ORNSHTEIN-UHLENBECK RANDOM PROCESSES

Yuri Virchenko, Natalia Vitokhina

Belgorod National Research University,
Belgorod, 308015, Russia
E-mail: virch@bsu.edu.ru
Received May, 17, 2021

Abstract. Elementary gaussian and markovian random processes $\{\tilde{x}(t); t \in [t_0, \infty)\}$ with values in \mathbb{R}^n are investigated. Each such a process is nondegenerated and it possesses the limit at $t_0 \rightarrow -\infty$. It is a stationary process. The limiting stationary process represents the multidimensional Ornstein-Uhlenbeck one. It is obtained the formula of the characteristic function $Q(-i\lambda)$ of quadratic functional $J_t[\tilde{x}(s)] = \int_0^t (\tilde{x}(s), V\tilde{x}(s))ds$ on random trajectories $\tilde{x}(t)$. This formula is valid for each process of the class pointed out. It is the multidimensional generalization of the Ziegert formula which is known for one-dimensional Ornstein-Uhlenbeck process.

Key words: elementary gaussian processes, multidimensional Ornstein-Uhlenbeck process, Riccati's matrix equation, white noise, Kolmogorov's equation.

For citation: Virchenko Yu. P., Vitokhina N. N. 2021. The Ziegert formula for multidimensional Ornstein-Uhlenbeck random processes. Applied Mathematics & Physics, 53(2): 97–113. (in Russian) DOI 10.52575/2687-0959-2021-53-2-97-113.

1. Введение. Системы стохастических линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами можно рассматривать как основу математического моделирования в тех областях науки, где приходится использовать случайные функции для моделирования процессов изменения случайных величин со временем. По этому поводу см., например, [1-3]. Решениями систем стохастических дифференциальных уравнений являются случайные вектор-функции от $t \in \mathbb{R}_+$. Обозначим посредством $\tilde{x}(t)$ такую вектор-функцию, которая принимает значения в \mathbb{R}^n , $n \in \mathbb{N}$. Здесь и далее, знак «тильда», поставленный над символом математического объекта, указывает на его случайный характер с точки зрения концепций теории вероятностей. В общем виде любая система стохастических линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами записывается в канонической форме в терминах стохастического дифференциала $d\tilde{w}(t)$ по многомерному винеровскому процессу

$$d\tilde{x}(t) = A\tilde{x}(t)dt + S d\tilde{w}(t), \quad (1.1)$$

где A и S – вещественные $n \times n$ -матрицы, причем матрица S симметрична, $S^T = S$ и неотрицательна, а $\tilde{w}(t) = \langle \tilde{w}_j(t); j = 1 \div n \rangle$, $t \in \mathbb{R}_+$ – случайная вектор-функция, компонентами которой являются n экземпляров статистически независимых стандартных винеровских процессов (см., например, [4]) так, что

$$E w_j(s) w_k(t) = \delta_{jk} \min\{s, t\}, \quad (1.2)$$

где, здесь и далее, E – символ математического ожидания по мере рассматриваемого случайного процесса, без конкретизации того, какой процесс имеется в виду, что не должно вызвать недоразумений, а δ_{jk} – символ Кронекера, $j, k \in \{1, \dots, n\}$.

Остановимся кратко на том, что понимается в настоящей работе под стохастическим дифференциалом $d\tilde{w}(t) = \langle d\tilde{w}_j(t); j = 1 \div n \rangle$. Допустимы различные определения стохастического дифференциала (см., например, [3]). Использование того или иного определения тесно связано с той конкретной задачей, которая решается на основе стохастических дифференциальных уравнений. Наиболее употребительными в математике являются дифференциал в смысле Ито (см., например, [5]) и дифференциал в смысле Стратоновича [6]. Что касается того, какой из этих дифференциалов наиболее адекватен в рандомизированных задачах математической физики, то по этому поводу имеется обширная дискуссия (см., например, [7], [8]). Итогом ее можно считать известную теорему Вонга-Закаи [9], следствием которой является утверждение о том, что, при моделировании физических процессов с непрерывным временем, необходимо использование дифференциала Стратоновича. Заметим, однако, что в задачах, связанных со стохастическими системами с постоянными коэффициентами, не возникает различия в получаемых результатах при использовании того или иного конкретного типа дифференциала. Эти различия возникают только лишь в процессе математических доказательств и в технике вычислений.

В связи с вышесказанным, мы принимаем, что всюду, на протяжении этой статьи, мы используем стохастический дифференциал Стратоновича. В этом случае уравнение (1.1) допустимо записать в форме обычного дифференциального уравнения

$$\frac{d}{dt} \tilde{x}(t) = A \tilde{x}(t) + S \tilde{\varphi}(t), \quad (1.3)$$

где $\tilde{\varphi}(t) = d\tilde{w}(t)/dt = \langle \tilde{\varphi}_j(t); j = 1 \div n \rangle$. Так как траектории стандартного винеровского процесса $\tilde{w}(t)$ ¹⁾ с вероятностью 1 всюду непрерывны, но нигде не дифференцируемы (см. [10]), то производную $d\tilde{w}(t)/dt = \tilde{\varphi}(t)$ в уравнении (1.3) нужно понимать в обобщенном смысле. Так как винеровский процесс гауссовский (см., например, [11]) и его корреляционная функция (1.2) зависит от разности $|s - t|$, то обобщенную случайную вектор-функцию $\tilde{\varphi}(t)$ нужно трактовать как обобщенный случайный стационарный гауссовский векторнозначный процесс с нулевым средним значением. Компонентами $\varphi_j(t)$, $j = 1 \div n$ его векторных значений являются независимые гауссовские случайные процессы, для которых выполняется $E \tilde{\varphi}_j(s) \tilde{\varphi}_k(t) = 0$ при $j \neq k$ и каждый из которых имеет нулевое среднее значение $E \tilde{\varphi}_j(t) = 0$. Корреляционная функция каждой фиксированной компоненты равна $E \tilde{\varphi}_j(s) \tilde{\varphi}_j(t) = \delta(s - t)$, то есть каждая из компонент $\varphi_j(t)$, $j = 1 \div n$ является т.н. процессом «белого шума». Здесь $\delta(t)$ – т.н. обобщенная функция Дирака (см., например, [12]). Ввиду того, что уравнение (1.3) получается из (1.1) посредством дифференцирования по t , то производную $d\tilde{x}(t)/dt$ в уравнении (1.3) нужно понимать в обобщенном смысле, так как траектории случайного процесса $\tilde{x}(t)$, которые являются его решениями, также как и траектории процесса $\tilde{w}(t)$ с вероятностью 1 всюду непрерывны, но нигде не дифференцируемы. В данном случае интерпретация производной совершенно прозрачна. Если дифференциальное уравнение (1.3) понимается по Стратоновичу, то его можно формально проинтегрировать в смысле Римана

$$\tilde{x}(t) = e^{(t-t_0)A} \tilde{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \exp(A(t-s)) S \tilde{\varphi}(s) ds = e^{(t-t_0)A} \tilde{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \exp(A(t-s)) S d\tilde{w}(s). \quad (1.4)$$

Интеграл в правой части формулы следует понимать как стохастический интеграл Стратоновича (см. [2]). Таким образом, отображение, описываемое формулой (1.4), индуцирует случайный процесс $\{\tilde{x}(t); t \in [t_0, \infty)\}$, в том смысле, что оно определяет класс траекторий этого процесса на основе класса траекторий векторнозначного винеровского процесса $\{\tilde{w}(t); t \in [t_0, \infty)\}$ вместе со структурой измеримости на пространстве всех локально непрерывных вектор-функций на $[t_0, \infty)$, а также распределение вероятностей на σ -алгебре измеримых множеств в этом пространстве при учете распределения вероятностей $\Pr\{\tilde{x}(t_0) < x_0\}$ случайного вектора $\tilde{x}(t_0)$ – т.н. вероятности входа в процесс. А именно, для вероятности любого случайного события – измеримого подмножества траекторий Σ должно выполняться

$$\Pr\{\tilde{x}(t) \in \Sigma\} = \Pr\{e^{(t-t_0)A} \tilde{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \exp(A(t-s)) S d\tilde{w}(s) \in \Sigma\} =$$

¹⁾ Здесь и далее, мы под выражением стандартный винеровский процесс понимаем винеровский процесс с единичной дисперсией (см. формулу (1.2)), исходящий из точки $x = 0$, но со сдвинутым началом отсчета времени в момент $t = t_0$.

$$= \int \Pr\{\tilde{\mathbf{w}}(t) \in F_t^{-1}[\Sigma - e^{(t-t_0)A}\mathbf{x}_0]\} d\Pr\{\tilde{\mathbf{x}}(t_0) < \mathbf{x}_0\} \quad (1.5)$$

в том случае, когда случайная величина $\tilde{\mathbf{x}}(t_0)$ и процесс $\{\tilde{\mathbf{w}}(t); t \in [t_0, \infty)\}$ статистически независимы. Здесь введены: обозначение для отображения F_t в пространстве непрерывных функций на $[t_0, \infty)$ — траекторий винеровского процесса

$$F_t[\tilde{\mathbf{w}}(s)] = \int_{t_0}^t \exp(A(t-s))S d\tilde{\mathbf{w}}(s)$$

и неравенство $\tilde{\mathbf{x}}(t_0) < \mathbf{x}_0$, которое указывает на выполнение совокупности неравенств $\tilde{x}_j(t_0) < (x_0)_j$, $j = 1 \div n$. Таким образом, распределение вероятностей полностью определяется распределениями вероятностей: процесса $\{\tilde{\mathbf{w}}(t); t \in [t_0, \infty)\}$ и $\Pr\{\tilde{\mathbf{x}}(t_0) < \mathbf{x}_0\}$. Поэтому во всех формулах, в которых вычисляется математическое ожидание E по распределению вероятностей случайного процесса $\{\tilde{\mathbf{x}}(t); t \in [t_0, \infty)\}$ можно считать, что оно вычисляется по произведению распределений вероятностей порождающего его случайного процесса $\{\tilde{\mathbf{w}}(t); t \in [t_0, \infty)\}$ и распределению вероятностей случайного вектора $\tilde{\mathbf{x}}(t_0)$. Вычисление указанных математических ожиданий по распределению вероятностей процесса $\{\tilde{\mathbf{x}}(t); t \in \mathbb{R}\}$, эквивалентным образом, может выполняться на основе формулы (1.4) посредством использования распределения вероятностей $\Pr\{\tilde{\mathbf{x}}(t_0) < \mathbf{x}_0\}$ и характеристического функционала обобщенного гауссовского случайного процесса $\{\tilde{\varphi}(t); t \in \mathbb{R}\}$,

$$E \exp\left(i \int_{-\infty}^{\infty} (\mathbf{u}(t), \tilde{\varphi}(t)) dt\right) = \exp\left(-\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{u}^2(t) dt\right), \quad (1.6)$$

значения которого определены для любой финитной непрерывной вектор-функции $\mathbf{u}(t)$, $t \in \mathbb{R}$ и который вычисляется на основе указанных выше правил усреднения,

$$E\tilde{\varphi}_j(t) = 0, \quad E\tilde{\varphi}_j(s)\tilde{\varphi}_{jk}(t) = \delta_{jk}\delta(s-t), \quad j, k \in \{1, \dots, n\}. \quad (1.7)$$

Поэтому, далее, не оговаривая дополнительно, мы будем применять также и такой метод усреднения при вычислении математических ожиданий по распределению вероятностей случайного процесса $\{\tilde{\mathbf{x}}(t); t \in [t_0, \infty)\}$.

Пусть V — вещественная симметричная $n \times n$ -матрица. Определим на пространстве непрерывных вектор-функций $\mathbf{x}(t)$, $t \in \mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ квадратичный функционал

$$J_t[\mathbf{x}(s)] = \int_0^t (\mathbf{x}(s), V\mathbf{x}(s)) ds, \quad (1.8)$$

зависящий от параметра $t > 0$. Тогда значения этого функционала с вероятностью 1 определены для выборочных функций процесса $\{\tilde{\mathbf{x}}(t); t \in [t_0, \infty)\}$ при $t_0 \leq 0$. Таким образом, при каждом значении $t > 0$ совокупность его значений, принимаемых на классе допустимых случайных траекторий $\tilde{\mathbf{x}}(t)$, определяют случайную величину с распределением вероятностей, индуцированным распределением вероятностей процесса $\{\tilde{\mathbf{x}}(t); t \in [t_0, \infty)\}$.

В настоящей работе мы рассмотрим гауссовские марковские случайные процессы $\{\tilde{\mathbf{x}}(t); t \in [t_0, \infty)\}$ при выполнении двух условий, а именно, когда имеют место: невырожденность ковариационной матрицы S , $\det S \neq 0$ и *диссипативность матрицы* A . Точнее, мы будем считать, что матрица A диагонализуема (имеет скалярный тип в терминологии, применяемой в [13]) и реальная часть каждого из ее собственных чисел отрицательна. В этом случае каждый случайный процесс $\{\tilde{\mathbf{x}}(t); t \in [t_0, \infty)\}$ обладает предельным при $t_0 \rightarrow -\infty$ случайным процессом $\{\tilde{\mathbf{x}}_{\infty}(t); t \in \mathbb{R}\}$, который является многомерным стационарным гауссовским, марковским процессом — т.н. многомерным *процессом Орнштейна – Уленбека* с нулевым средним значением. В дальнейшем при обозначении процессов такого типа нижний индекс ∞ мы опускаем. Его распределение вероятностей полностью определяется парной корреляционной функций $K_{jk}(t, s) = E(\tilde{\mathbf{x}}_{\infty})_j(s) (\tilde{\mathbf{x}}_{\infty})_k(t)$.

Целью настоящей работы является вывод формулы для характеристической функции

$$Q_t(-i\lambda) = E \exp\left(i\lambda J_t[\tilde{\mathbf{x}}(s)]\right) \quad (1.9)$$

распределения вероятностей случайной величины $J_t[\tilde{\mathbf{x}}(s)]$, аналогичной т.н. формуле Зигерта [14], которая имеет место в одномерном случае и которая находит различные применения в задачах статистической радиотехники (см., например, пионерскую работу [15]) и в задачах статистики фотоотсчетов в квантовой оптике (см., например, [16]) и др., а также работы [17-19] одного из авторов этой статьи.

Для решения задач такого типа разработаны различные методы. Пионерским в этом отношении является метод, которым впервые была решена задача для функционала J_T , траекторий винеровского процесса [20] (см. также [21]). Этот метод существенно использует марковость случайного процесса, по мере которого производится усреднение. Более общий подход к решению таких задач основан на т.н. методе Карунена-Лоэва (см. [22], [23]), использующий только лишь гауссовость случайного процесса $\{\tilde{x}(t); t \in [a, b] \subset \mathbb{R}\}$. Он позволяет сводить нахождение математических ожиданий для более сложных квадратичных функционалов от траекторий процесса (см. [24–27]). В настоящей работе мы следуем методу, который был применен ранее одним из авторов статьи в [28],[29].

2. Элементарные гауссовские процессы. В этом разделе мы введем в рассмотрение класс гауссовских случайных процессов, связанных со стохастическими системами (1.1), которые М. Арато (см. [1]) называет *элементарными*.

Определение 1. Случайный векторно-значный процесс $\{\tilde{z}(t); t \in [t_0, \infty)\}$ называется гауссовским, если его характеристический функционал определяется формулой

$$E \exp \left(i \int_{t_0}^{\infty} (\mathbf{u}, \tilde{z}(t)) dt \right) = \exp \left(i \int_{t_0}^{\infty} (\mathbf{u}(t), \mathbf{z}_0(t)) dt - \frac{1}{2} \int_{t_0}^{\infty} dt \int_{t_0}^{\infty} C_{jk}(s, t) u_j(s) u_k(t) ds \right), \quad (2.1)$$

где $\mathbf{u}(t)$ – произвольная непрерывная финитная функция, а математическое ожидание E вычисляется по распределению вероятностей этого процесса. При этом $\mathbf{z}_0(t) = E\tilde{z}(t)$ и $C_{jk}(s, t) = E(\tilde{z}_j(s) - (\mathbf{z}_0)_j(s))(\tilde{z}_k(t) - (\mathbf{z}_0)_k(t))$ – корреляционная функция процесса.

Матричное ядро $C_{jk}(s, t)$ в (2.1) обладает свойством симметрии $C_{jk}(s, t) = C_{kj}(t, s)$ и положительной определенностью, то есть для любой непрерывной финитной функции имеет место

$$E \left[\int_{t_0}^{\infty} u_j(t) (\tilde{z}_j(t) - (\mathbf{z}_0)_j(t)) \right]^2 dt = \int_{t_0}^{\infty} dt \int_{t_0}^{\infty} C_{jk}(s, t) u_j(s) u_k(t) ds > 0.$$

Согласно этому определению, процесс $\{\tilde{\varphi}(t); t \in \mathbb{R}\}$ – гауссовский случайный процесс, с характеристическим функционалом (1.6). Он является обобщенным процессом, так как у него отсутствуют траектории, однако функционал (1.6) является пределом характеристических функционалов гауссовских процессов.

Согласно формуле (1.4), процесс $\{\tilde{x}(t); t \in [t_0, \infty)\}$ является линейным преобразованием гауссовского случайного процесса $\tilde{\varphi}(s)$, $s \in (t_0 - 0, \infty)$. Поэтому он также является гауссовским векторнозначным процессом (см. [11]). В этом легко удостовериться непосредственно.

Теорема 1. Для любых вещественных матриц A и S , $S^T = S$ случайный процесс $\{\tilde{x}(t); t \in [t_0, \infty)\}$ гауссовский.

□ Поставим в определение характеристического функционала выражение для траекторий (1.4). Так как $E\tilde{\varphi}(s) = 0$, то

$$\begin{aligned} E \exp \left(i \int_{t_0}^{\infty} (\mathbf{u}(t), \tilde{x}(t)) dt \right) &= \\ &= \exp \left(i \int_{t_0}^{\infty} (e^{(t-t_0)A} \mathbf{x}_0, \mathbf{u}(t)) dt \right) E \exp \left(i \int_{t_0}^{\infty} dt \int_{t_0}^t (\mathbf{u}(t), e^{A(t-s)} S \tilde{\varphi}(s)) ds \right). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Далее, вводя функцию

$$\mathbf{v}(s) = \int_s^{\infty} S e^{A(t-s)} \mathbf{u}(t) dt,$$

вычислим математическое ожидание

$$\begin{aligned} E \exp \left(i \int_{t_0}^{\infty} dt \int_{t_0}^t (\mathbf{u}(t), e^{A(t-s)} S \tilde{\varphi}(s)) ds \right) &= E \exp \left(i \int_{t_0}^{\infty} dt \int_{t_0}^t (S e^{A(t-s)} \mathbf{u}(t), \tilde{\varphi}(s)) ds \right) = \\ &= E \exp \left(i \int_{t_0}^{\infty} ds \int_s^{\infty} (S e^{A(t-s)} \mathbf{u}(t), \tilde{\varphi}(s)) dt \right) = E \exp \left(i \int_{t_0}^{\infty} (\mathbf{v}(s), \tilde{\varphi}(s)) ds \right) = \end{aligned}$$

$$= \exp\left(-\frac{1}{2} \int_{t_0}^{\infty} \mathbf{v}^2(s) ds\right) = \exp\left(-\frac{1}{2} \int_{t_0}^{\infty} \left(\int_s^{\infty} \mathbf{S} e^{\mathbf{A}^T(t-s)} \mathbf{u}(t) dt\right)^2 ds\right). \quad (2.3)$$

Интеграл в показателе экспоненты преобразуем, используя симметрию матрицы \mathbf{S} , так, что получающееся в процессе преобразований подинтегрального выражения по переменным интегрирования принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{t_0}^{\infty} \left(\int_s^{\infty} \mathbf{S} e^{\mathbf{A}^T(t-s)} \mathbf{u}(t) dt\right)^2 ds &= \int_{t_0}^{\infty} ds \int_s^{\infty} [\mathbf{S} e^{\mathbf{A}^T(t_1-s)} \mathbf{u}(t_1)]_j dt_1 \int_{t_1}^{\infty} [\mathbf{S} e^{\mathbf{A}^T(t_2-s)} \mathbf{u}(t_2)]_j dt_2 = \\ &= \int_{t_0}^{\infty} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} [\mathbf{S} e^{\mathbf{A}^T(t_1-s)} \mathbf{u}(t_1)]_j ds \int_{t_1}^{\infty} [\mathbf{S} e^{\mathbf{A}^T(t_2-s)} \mathbf{u}(t_2)]_j dt_2 = \\ &= \int_{t_0}^{\infty} dt_1 \int_{t_1}^{\infty} dt_2 \int_{t_0}^{t_1} [\mathbf{S} e^{\mathbf{A}^T(t_2-s)} \mathbf{u}(t_2)]_j [\mathbf{S} e^{\mathbf{A}^T(t_1-s)} \mathbf{u}(t_1)]_j ds = \\ &= \int_{t_0}^{\infty} dt_1 \int_{t_1}^{\infty} dt_2 \int_{t_0}^{t_1} (\mathbf{S} e^{\mathbf{A}^T(t_2-s)} \mathbf{u}(t_2), \mathbf{S} e^{\mathbf{A}^T(t_1-s)} \mathbf{u}(t_1)) ds = \\ &= \frac{1}{2} \int_{t_0}^{\infty} dt_1 \int_{t_0}^{\infty} \left(\int_{t_0}^{\min\{t_1, t_2\}} e^{\mathbf{A}(t_1-s)} \mathbf{S}^2 e^{\mathbf{A}^T(t_2-s)} ds\right) \mathbf{u}(t_2), \mathbf{u}(t_1) dt_2. \end{aligned}$$

Таким образом, подставляя это преобразованное выражение в (2.3), получаем

$$\mathbb{E} \exp\left(i \int_{t_0}^{\infty} dt \int_{t_0}^t (\mathbf{S} e^{\mathbf{A}^T(t-s)} \mathbf{u}(t), \tilde{\varphi}(s)) ds\right) = \exp\left(-\frac{1}{2} \int_{t_0}^{\infty} dt_1 \int_{t_0}^{\infty} (\mathbf{C}(t_1, t_2) \mathbf{u}(t_2), \mathbf{u}(t_1)) dt_2\right),$$

где матриц-функция $\mathbf{C}(t_1, t_2)$ определяется матричным интегральным ядром

$$\mathbf{C}_{j_1, j_2}(t_1, t_2) = \int_{t_0}^{\min\{t_1, t_2\}} \left[e^{\mathbf{A}(t_1-s)} \mathbf{S}^2 e^{\mathbf{A}^T(t_2-s)} \right]_{j_1, j_2} ds. \quad (2.4)$$

Принимая во внимание (2.2) и, затем, сравнивая с формулой (2.1), определяющей вид характеристического функционала гауссовского процесса, убеждаемся в справедливости утверждения теоремы, так как, по построению, ядро (2.4) является корреляционной функцией. ■

Таким образом, на основании доказанной теоремы, следуя терминологии, введенной в начале раздела, мы будем далее называть процессы $\{\tilde{\mathbf{x}}(t); t \in [t_0, \infty)\}$, определяемые (1.1), элементарными гауссовскими процессами.

Следствие. Корреляционная функция $C_{j,k}^{(w)}(s, t)$ стандартного винеровского процесса равна

$$C_{j,k}^{(w)}(s, t) = \delta_{jk} \min(s - t_0, t - t_0). \quad (2.5)$$

□ Достаточно положить в (2.4) $\mathbf{A} = 0$, $\mathbf{S} = \mathbf{I}$.

Пусть $\{\tilde{\mathbf{z}}(t); t \in [t_0, \infty)\}$ – элементарный гауссовский процесс. Положим, что носитель функций $\mathbf{u}(t)$ в формуле (2.3) совпадает с $[t_0, t]$. Перейдем к пределу в этой формуле на классе непрерывных на $[t_0, t]$ функций таким образом, что $\mathbf{u}(s) \rightarrow \delta(s - t) \mathbf{q}$ с фиксированным вектором $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$.

В этом случае формула (2.1) принимает вид

$$\tilde{f}(\mathbf{q}, t; \mathbf{z}_0, t_0) \equiv \mathbb{E} \exp\left(i(\mathbf{q}, \tilde{\mathbf{z}}(t))\right) = \exp\left(i(\mathbf{q}, e^{(t-t_0)\mathbf{A}} \mathbf{z}_0) - \frac{1}{2} (\mathbf{C}(t, t) \mathbf{q}, \mathbf{q})\right), \quad (2.6)$$

где матриц-функция $\mathbf{C}(t, t)$, согласно (2.4), определяется формулой

$$\mathbf{C}(t, t) = \int_{t_0}^t e^{\mathbf{A}(t-s)} \mathbf{S}^2 e^{\mathbf{A}^T(t-s)} ds = \int_0^{t-t_0} e^{s\mathbf{A}} \mathbf{S}^2 e^{s\mathbf{A}^T} ds. \quad (2.7)$$

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. Функция $\bar{f}(\mathbf{q}, t; \mathbf{x}_0, t_0)$ удовлетворяет условию $\bar{f}(\mathbf{q}, t; \mathbf{x}_0, t_0) \rightarrow \exp(i(\mathbf{q}, \mathbf{x}_0))$ при $t \rightarrow t_0$ и дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{f}(\mathbf{q}, t; \mathbf{x}_0, t_0) = (\mathbf{q}, \mathbf{A} \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \bar{f}(\mathbf{q}, t; \mathbf{x}_0, t_0)) - \frac{1}{2} (S^2 \mathbf{q}, \mathbf{q}) \bar{f}(\mathbf{q}, t; \mathbf{x}_0, t_0). \quad (2.8)$$

□ Заметим, что при $t \rightarrow t_0$ матрица $C(t, t) \rightarrow 0$, согласно (2.7) и, следовательно, $\bar{f}(\mathbf{q}, t; \mathbf{x}_0, t_0) \rightarrow \exp(i(\mathbf{q}, \mathbf{x}_0))$.

Из (2.6) следует, что производная по t функции $\bar{f}(\mathbf{q}, t; \mathbf{x}_0, t_0)$ имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{f}(\mathbf{q}, t; \mathbf{x}_0, t_0) = \left[i(\mathbf{q}, \mathbf{A} e^{(t-t_0)\mathbf{A}} \mathbf{x}_0) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial t} C(t, t) \mathbf{q}, \mathbf{q} \right) \right] \bar{f}(\mathbf{q}, t; \mathbf{x}_0, t_0). \quad (2.9)$$

С другой стороны, вычислим градиент в пространстве \mathbb{R}^n векторов \mathbf{q} ,

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \bar{f}(\mathbf{q}, t; \mathbf{x}_0, t_0) = \left[i e^{(t-t_0)\mathbf{A}} \mathbf{x}_0 - C(t, t) \mathbf{q} \right] \bar{f}(\mathbf{q}, t; \mathbf{x}_0, t_0).$$

Тогда, симметризовав матрицу, определяющую квадратичную форму

$$(AC(t, t) \mathbf{q}, \mathbf{q}) = ([AC(t, t) + C(t, t)A^T] \mathbf{q}, \mathbf{q})/2,$$

получаем

$$\left(\mathbf{q}, \mathbf{A} \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \right) \bar{f}(\mathbf{q}, t; \mathbf{x}_0, t_0) = \left[i(\mathbf{q}, \mathbf{A} e^{(t-t_0)\mathbf{A}} \mathbf{x}_0) - ([AC(t, t) + C(t, t)A^T] \mathbf{q}, \mathbf{q})/2 \right] \bar{f}(\mathbf{q}, t; \mathbf{x}_0, t_0). \quad (2.10)$$

Так как, согласно (2,7),

$$AC(t, t) + C(t, t)A^T = \int_0^{t-t_0} \left(\frac{d}{ds} e^{s\mathbf{A}} S^2 e^{s\mathbf{A}^T} \right) ds = e^{\mathbf{A}(t-t_0)} S^2 e^{\mathbf{A}^T(t-t_0)} - S^2$$

и

$$\frac{\partial}{\partial t} C(t, t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)} S^2 e^{\mathbf{A}^T(t-t_0)},$$

то, сравнением (2.10) с (2,9), находим, что имеет место (2.6). ■

Введем плотность распределения условных вероятностей перехода

$$f(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0) = E \delta(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}(t)) \quad (2.11)$$

для случайного процесса $\{\tilde{\mathbf{x}}(t); t \in [t_0, \infty)\}$, траектории которого начинаются в точке \mathbf{x}_0 , $\tilde{\mathbf{x}}(t_0) = \mathbf{x}_0$. Это т.н. плотность условных вероятностей перехода из точки \mathbf{x}_0 в момент времени t_0 в точку \mathbf{x} в момент времени t . В формуле (2.8) усредняется n -мерная δ -функция на \mathbb{R}^n . Записывая представление этой δ -функций в виде интеграла Фурье

$$\delta(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-i(\mathbf{q}, \mathbf{x})) d\mathbf{q},$$

находим, что образ Фурье по переменной \mathbf{x} для плотности $f(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0)$ равен

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{i(\mathbf{q}, \mathbf{x})} f(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0) d\mathbf{x} = E \exp(i(\mathbf{q}, \tilde{\mathbf{x}}(t))) = \bar{f}(\mathbf{q}, t; \mathbf{x}_0, t_0).$$

Следовательно, плотность $f(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0)$ восстанавливается, согласно (2.6), по образу Фурье следующим образом:

$$f(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(i(\mathbf{q}, e^{(t-t_0)\mathbf{A}} \mathbf{x}_0 - \mathbf{x}) - \frac{1}{2} (C(t, t) \mathbf{q}, \mathbf{q})\right) d\mathbf{q}. \quad (2.12)$$

Теорема 2. Плотность условных вероятностей перехода $f(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0)$ является решением параболического дифференциального уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t} f(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0) = \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}, \mathbf{A} \mathbf{x} \right) f(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}, S^2 \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right) f(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0) \quad (2.13)$$

с начальным условием $\lim_{t \rightarrow t_0} f(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$.

□ Тот факт, что $f(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0)$ удовлетворяет указанному начальному условию, непосредственно следует из (2.12) при учете того, что $\bar{f}(\mathbf{q}, t; \mathbf{x}_0, t_0) \rightarrow \exp(i(\mathbf{q}, \mathbf{x}_0))$ при $t \rightarrow t_0$, согласно утверждению леммы.

Тогда продифференцируем по t плотность $f(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0)$ (2.12) и учтем, что функция $f(\mathbf{q}, t; \mathbf{x}_0, t_0)$ удовлетворяет уравнению (2.8),

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} f(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0) &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-i(\mathbf{q}, \mathbf{x})) \cdot \frac{\partial}{\partial t} f(\mathbf{q}, t; \mathbf{x}_0, t_0) d\mathbf{q} = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-i(\mathbf{q}, \mathbf{x})) \left((\mathbf{q}, A \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \bar{f}(\mathbf{q}, t; \mathbf{x}_0, t_0)) - \frac{1}{2} (S^2 \mathbf{q}, \mathbf{q}) \bar{f}(\mathbf{q}, t; \mathbf{x}_0, t_0) \right) d\mathbf{q}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Первое слагаемое в (2.14) преобразуем следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-i(\mathbf{q}, \mathbf{x})) (\mathbf{q}, A \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \bar{f}(\mathbf{q}, t; \mathbf{x}_0, t_0)) \bar{f}(\mathbf{q}, t; \mathbf{x}_0, t_0) d\mathbf{q} = \\ = \frac{i}{(2\pi)^n} \frac{\partial}{\partial x_j} A_{jk} \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-i(\mathbf{q}, \mathbf{x})) \frac{\partial}{\partial q_k} \bar{f}(\mathbf{q}, t; \mathbf{x}_0, t_0) d\mathbf{q}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Преобразование последнего интеграла по частям, с учетом стремления к нулю интеграла по поверхности шара в \mathbf{q} -пространстве с неограниченно возрастающим радиусом, приводит его к выражению $(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}, A\mathbf{x}) f(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0)$.

Интеграл же, соответствующий второму слагаемому в (2.14), преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-i(\mathbf{q}, \mathbf{x})) (S^2 \mathbf{q}, \mathbf{q}) \bar{f}(\mathbf{q}, t; \mathbf{x}_0, t_0) d\mathbf{q} = \\ = \frac{(-i)}{(2\pi)^n} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}, S^2 \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{q} \exp(-i(\mathbf{q}, \mathbf{x})) \bar{f}(\mathbf{q}, t; \mathbf{x}_0, t_0) d\mathbf{q} \right) = \\ = \frac{1}{(2\pi)^n} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}, S^2 \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right) \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-i(\mathbf{q}, \mathbf{x})) \bar{f}(\mathbf{q}, t; \mathbf{x}_0, t_0) d\mathbf{q} = \\ = \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}, S^2 \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right) f(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0) d\mathbf{q}. \end{aligned}$$

Подставив это выражение вместе с выражением (2.15) в (2.14), получаем уравнение (2.13). ■

Следствие. Гауссовский процесс $\{\tilde{\mathbf{x}}(t); t \in [t_0, \infty)\}$, является марковским, обладающим непрерывными с вероятностью 1 траекториями (см. [4]).

Случайный процесс $\{\tilde{\mathbf{x}}(t); t \in [t_0, \infty)\}$ является марковским, так как плотность $f(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0)$ условных вероятностей перехода удовлетворяет параболическому уравнению (2.13), которое является т.н. *прямым уравнением Колмогорова*, для марковских случайных процессов с непрерывными траекториями.

3. Процессы Орнштейна – Уленбека в \mathbb{R}^n . Далее, в этой работе мы будем рассматривать случайные гауссовские марковские процессы $\{\tilde{\mathbf{x}}(t); t \in [t_0, \infty)\}$ при условии, что стохастическое уравнение (1.3) обладает свойством *невырожденности*, то есть когда имеет место $\det S \neq 0$. В этом случае интеграл (2.12), определяющий плотность $f(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0)$, вычисляется явно в терминах элементарных функций так, что эта плотность не содержит сингулярной составляющей.

Теорема 3. Плотность $f(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0)$ условных вероятностей перехода случайного гауссовского марковского процесса $\{\tilde{\mathbf{x}}(t); t \in [t_0, \infty)\}$, у которого $\det S \neq 0$, определяется формулой

$$f(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0) = \left[(2\pi)^n \det C(t, t) \right]^{-1/2} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(C^{-1}(t, t) [\mathbf{x} - e^{(t-t_0)A} \mathbf{x}_0], [\mathbf{x} - e^{(t-t_0)A} \mathbf{x}_0] \right) \right]. \quad (3.1)$$

□ Пусть $\det S \neq 0$. Так как $\det \exp(sA) = \exp(s \operatorname{Sp} A) \neq 0$, то эта матрица и транспонированная к ней матрица $\exp(sA^T)$ невырождены. Следовательно, симметричная матрица $e^{sA} S^2 e^{sA^T}$ невырождена. Более того, эта матрица положительно определена, так как для любого вектора $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ имеет место

$$(e^{sA} S^2 e^{sA^T} \mathbf{x}, \mathbf{x}) = (S^2 e^{sA^T} \mathbf{x}, e^{sA^T} \mathbf{x}) > 0,$$

так как матрица S^2 симметрична и положительно определена, а также $e^{sA^T} \mathbf{x} \neq 0$, ввиду невырожденности матрицы e^{sA^T} . Отсюда следует, что симметричная матрица $C(t, t)$ положительно определена и, следовательно, невырождена при любом $t \in [t_0, \infty)$, так как для любого $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ выполняется

$$(C(t, t) \mathbf{x}, \mathbf{x}) = \left(\left[\int_0^{t-t_0} e^{sA} S^2 e^{sA^T} ds \right] \mathbf{x}, \mathbf{x} \right) = \int_0^{t-t_0} (e^{sA} S^2 e^{sA^T} \mathbf{x}, \mathbf{x}) ds > 0.$$

Ввиду положительной определенности матрицы $C(t, t)$, интеграл в (2.12) вычисляется посредством «выделения полного квадрата» в показателе экспоненты

$$\begin{aligned} i(\mathbf{q}, e^{(t-t_0)A} \mathbf{x}_0 - \mathbf{x}) - \frac{1}{2}(C(t, t) \mathbf{q}, \mathbf{q}) &= \\ &= -\frac{1}{2} \left(C(t, t) (\mathbf{q} - iC^{-1}(e^{(t-t_0)A} \mathbf{x}_0 - \mathbf{x})), \mathbf{q} - iC^{-1}(e^{(t-t_0)A} \mathbf{x}_0 - \mathbf{x}) \right) - \\ &\quad - \frac{1}{2} \left(C^{-1}(t, t) (\mathbf{x} - e^{(t-t_0)A} \mathbf{x}_0), (\mathbf{x} - e^{(t-t_0)A} \mathbf{x}_0) \right). \end{aligned}$$

Вводя, теперь, новую переменную интегрирования $\mathbf{q} - iC^{-1}(e^{(t-t_0)A} \mathbf{x}_0 - \mathbf{x}) \Rightarrow \mathbf{q}$ в интеграле (2.12), находим

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0) &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \exp \left(i(\mathbf{q}, e^{(t-t_0)A} \mathbf{x}_0 - \mathbf{x}) - \frac{1}{2}(C(t, t) \mathbf{q}, \mathbf{q}) \right) d\mathbf{q} = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \exp \left(-\frac{1}{2}(C(t, t) \mathbf{q}, \mathbf{q}) \right) d\mathbf{q} \cdot \exp \left[-\frac{1}{2} \left(C^{-1}(t, t) [\mathbf{x} - e^{(t-t_0)A} \mathbf{x}_0], [\mathbf{x} - e^{(t-t_0)A} \mathbf{x}_0] \right) \right] \end{aligned}$$

и так как

$$\int_{\mathbb{R}^n} \exp \left(-\frac{1}{2}(C(t, t) \mathbf{q}, \mathbf{q}) \right) d\mathbf{q} = \frac{(2\pi)^{n/2}}{[\det C(t, t)]^{1/2}},$$

то для плотности условных вероятностей перехода выполняется формула (3.1). ■

Рассмотрим, наконец, элементарные гауссовские процессы $\{\tilde{\mathbf{x}}(t); t \in [t_0, \infty)\}$ при условии, когда матрица A является гурвицевой (устойчивой), то есть будем считать, что A диагонализуема и реальная часть каждого из ее собственных чисел отрицательна. При этом условии имеет место

Теорема 4. Пусть A – диагонализуемая $n \times n$ -матрица, все собственные числа которой имеют строго отрицательную реальную часть. Случайный гауссовский марковский процесс $\{\tilde{\mathbf{x}}(t); t \in [t_0, \infty)\}$, определяемый стохастическим дифференциальным уравнением (1.1) с матрицей A , имеет предел $\lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \tilde{\mathbf{x}}(t)$ по мере, который не зависит от значения $\tilde{\mathbf{x}}(t_0)$ и является стационарным случайным процессом.

□ Докажем, что существует предел матрицы $C(t, t)$ при $t_0 \rightarrow -\infty$, то есть сходится интеграл

$$\int_0^\infty e^{sA} S^2 e^{sA^T} ds.$$

Для любого вектора $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ неотрицательный диагональный элемент положительно определенной симметричной матрицы удовлетворяет неравенству

$$(e^{sA} S^2 e^{sA^T} \mathbf{x}, \mathbf{x}) = (S^2 e^{sA^T} \mathbf{x}, e^{sA^T} \mathbf{x}) \leq \|S\|^2 \|e^{sA^T} \mathbf{x}\|^2. \quad (3.2)$$

Пусть $\{\mathbf{e}^{(j)}; j = 1 \div n\}$ – базис в \mathbb{R}^n , состоящий из собственных векторов матрицы A с соответствующими собственными числами $\{-\nu^{(j)} < 0; j = 1 \div n\}$. Тогда, подействовав матрицей e^{sA} на разложение вектора $\mathbf{x} = \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbf{e}^{(j)}$, находим

$$e^{sA} \mathbf{x} = \sum_{j=1}^n \alpha_j e^{-s\nu^{(j)}} \mathbf{e}^{(j)}.$$

Следовательно,

$$\|e^{sA} \mathbf{x}\|^2 \leq \left| \sum_{j=1}^n \alpha_j e^{-s\nu^{(j)}} \right|^2 \leq e^{-2vs} \left(\sum_{j=1}^n |\alpha_j| \right)^2 \equiv e^{-2vs} \|\mathbf{x}\|_1^2, \quad (3.3)$$

где $v = \min\{\operatorname{Re} \nu^{(j)}; j = 1 \div n\}$. В сочетании с (3.2), получаем оценку

$$(e^{sA} S^2 e^{sA^T} \mathbf{x}, \mathbf{x}) \leq e^{-2vs} \|S\|^2 \|\mathbf{x}\|_1^2.$$

Тогда для любого вектора $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ равен нулю следующий предел для матриц-функции, значениями которой являются симметричные положительно определенные матрицы

$$\left(\left[\int_t^\infty e^{sA} S^2 e^{sA^T} ds \right] \mathbf{x}, \mathbf{x} \right) \leq \|\mathbf{x}\|_1^2 \frac{1 - e^{-2vt}}{2v} \|S\|^2 \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty.$$

Откуда следует сходимость интеграла. Тогда, согласно (2.7), существует предел

$$\lim_{t_0 \rightarrow -\infty} C(t, t) = \int_0^\infty e^{sA} S^2 e^{sA^T} ds \equiv C.$$

Кроме того, для любого вектора $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, согласно (3.2), $e^{(t-t_0)A} \mathbf{x}_0 \rightarrow 0$ при $t_0 \rightarrow -\infty$.

Перейдем к пределу $t_0 \rightarrow -\infty$ в формуле (3.1). Предельное значение плотности $f(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0)$, которое мы обозначим $f(\mathbf{x})$, существует и равно

$$f(\mathbf{x}) = [(2\pi)^n \det C]^{-1/2} \exp \left[-\frac{1}{2} (C^{-1} \mathbf{x}, \mathbf{x}) \right]. \quad (3.4)$$

Эта предельная плотность не зависит от \mathbf{x}_0 . Так как она не зависит от $t \in \mathbb{R}$ и плотность условных вероятностей перехода зависит только лишь от разности $t - t_0$, то предельный случайный гауссовский марковский процесс, который теперь определен для всех $t \in \mathbb{R}$, является стационарным (см. [30]). ■

4. Характеристическая функция случайной величины $J_t[\tilde{\mathbf{x}}(s)]$. Ввиду того, что случайная величина $J_t[\tilde{\mathbf{x}}(s)]$ с вероятностью 1 положительна, то ее распределение вероятностей удобно характеризовать производящей функцией

$$Q(\lambda, t) = E \exp \left(-\lambda J_t[\tilde{\mathbf{x}}(s)] \right), \quad \text{Re } \lambda \in [0, \infty). \quad (4.1)$$

Тогда характеристическая функция этой случайной величины равна $Q(-i\lambda, t)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Мы произведем вычисление функции (4.1) методом, идейно близким к методу Каца [20], а именно, сведем ее вычисление к решению вспомогательного параболического уравнения типа уравнения Шредингера. Однако при этом, в отличие от указанной работы, мы не будем явно использовать интегрирование по мере винеровского процесса $\{\tilde{\mathbf{w}}(t); t \in [0, \infty)\}$, а воспользуемся известной формулой усреднения Фуруцу – Новикова (см. [31], [32]), связанной с процессом белого шума.

Введем, следуя М. Кацу, совместную одновременную плотность $g(\mathbf{x}, v; t, \mathbf{x}_0)$ распределения вероятностей для составного случайного процесса, представляющего собой пару случайных процессов $\{\tilde{\mathbf{x}}(t), J_t[\tilde{\mathbf{x}}(s)]; t \in [0, \infty)\}$,

$$g(\mathbf{x}, v; t, \mathbf{x}_0) = E \delta(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}(t)) \delta(v - J_t[\tilde{\mathbf{x}}(s)])$$

при условии, что $\tilde{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{x}_0$, $J_0[\tilde{\mathbf{x}}(s)] = 0$. Здесь первая δ -функция n -мерная, а вторая – одномерная, хотя мы их обозначаем одной буквой. Однако, в дальнейшем, это не должно вызвать недоразумений. Следующие интегралы с этой плотностью определяют плотность $f(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, 0)$ и производящую функцию $Q(\lambda, t, \mathbf{x}_0)$ условного распределения вероятностей для величины $J_t[\tilde{\mathbf{x}}(s)]$:

$$f(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, 0) = \int_0^\infty g(\mathbf{x}, v; t, \mathbf{x}_0) dv, \quad h(\mathbf{x}, \lambda; t, \mathbf{x}_0) = \int_0^\infty g(\mathbf{x}, v; t, \mathbf{x}_0) e^{-\lambda v} dv,$$

$$Q(\lambda, t; \mathbf{x}_0) = \int_{\mathbb{R}^n} h(\mathbf{x}, \lambda; t, \mathbf{x}_0) d\mathbf{x} = \int_0^\infty dv \int_{\mathbb{R}^n} g(\mathbf{x}, v; t, \mathbf{x}_0) e^{-\lambda v} d\mathbf{x}. \quad (4.2)$$

Пусть случайные функции представляются линейным функционалом $\tilde{z}_j(t) = \int z_{jk}(t, s) \tilde{\varphi}_k(s) ds$, $j = 1 \div n$ от реализаций белого шума таким, что эти функции непрерывны с вероятностью 1. Пусть также $G[\tilde{\mathbf{z}}(s)]$ – функционал от случайных функций $\tilde{\mathbf{z}}(t)$, обладающий вариационной производной (производной Гато) на пространстве непрерывных функций. Тогда формула Фуруцу – Новикова утверждает, что для математического ожидания $E \tilde{\varphi}(t) G[\tilde{\mathbf{z}}(s')]$ имеет место равенство

$$E \tilde{\varphi}_j(t) G[\tilde{\mathbf{z}}(s')] = \int_{\mathbb{R}} \left(E \frac{\delta G[\tilde{\mathbf{z}}(s')]}{\delta z_k(s)} \right) (E \tilde{\varphi}_j(t) \tilde{z}_k(s)) ds. \quad (4.3)$$

Из формулы (4.3) вытекает, во-первых, что она линейна по функционалу $G[\tilde{\mathbf{z}}(s)]$ и, во-вторых, если $G[\tilde{\mathbf{z}}(s)] = w(H[\tilde{\mathbf{z}}(s)])$, $w(\cdot)$ – непрерывно дифференцируемая функция, то

$$E \tilde{\varphi}_j(t) G[\tilde{\mathbf{z}}(s')] = E \left(\frac{dw}{dH} \int_{\mathbb{R}} \frac{\delta H[\tilde{\mathbf{z}}(s')]}{\delta z_k(s)} \right) (E \tilde{\varphi}_j(t) \tilde{z}_k(s)) ds. \quad (4.4)$$

Пусть носитель непрерывной функции $z_{kk'}(s, s')$ относительно переменной s' , содержит t в качестве внутренней точки. Тогда $E\tilde{\varphi}_j(t)\tilde{z}_k(s) = z_{kj}(s, t)$. Если этот носитель не содержит точки t , то $E\tilde{\varphi}_j(t)\tilde{z}_k(s) = 0$. Наконец, если t является крайней точкой носителя, то $E\tilde{\varphi}_j(t)\tilde{z}_k(s) = z_{kj}(t, t)/2$. Последнее равенство, как раз, связано с использованием белого шума в смысле Стратоновича, так как в этом случае, согласно теореме Вонга – Закаи, правильное использование корреляционной функции белого шума состоит в замене $\delta(t-s)$ на какую-то непрерывную корреляционную функцию $c(s-t) = E\tilde{\varphi}(s)\tilde{\varphi}(t)$, которая является четной, с последующим переходом к пределу $c(t) \rightarrow \delta(t)$.

Используя перечисленные свойства устанавливаем справедливость следующей формулы.

Лемма 2. Пусть $\{\tilde{\mathbf{x}}(t); t \in [0, \infty)\}$ – элементарный гауссовский процесс с траекториями (1.4) и $G[\tilde{\mathbf{x}}(s)] = \exp(-i(\mathbf{q}, \tilde{\mathbf{x}}(t)) - \lambda J_t[\tilde{\mathbf{x}}(s)])$. Тогда имеет место формула

$$E\tilde{\varphi}_j(t)G[\tilde{\mathbf{x}}(s)] = -\frac{i}{2}(\mathbf{S}\mathbf{q})_j EG[\tilde{\mathbf{x}}(s)]. \quad (4.5)$$

□ Согласно (1.4), положим $\tilde{\mathbf{x}}(t) = e^{t\mathbf{A}}\mathbf{x}_0 + \tilde{\mathbf{z}}(t)$, $\tilde{z}_j(t) = \int_0^t z_{jk}(t, s)\tilde{\varphi}_k(s)ds$, $z_{jk}(t, s) = (e^{(t-s)\mathbf{A}}\mathbf{S})_{jk}\theta(t-s)$. Кроме того, $w(H) = \exp(-H)$, $H[\tilde{\mathbf{z}}(s)] = i(\mathbf{q}, \tilde{\mathbf{x}}(t)) + \lambda J_t[\tilde{\mathbf{x}}(s)]$. Тогда

$$\frac{\delta H[\tilde{\mathbf{z}}(s')]}{\delta \tilde{z}_k(s)} = iq_k\delta(t-s) + \lambda \frac{\delta J_t[\tilde{\mathbf{z}}(s')]}{\delta \tilde{z}_k(s)}$$

и

$$\begin{aligned} \frac{\delta J_t[\tilde{\mathbf{z}}(s')]}{\delta \tilde{z}_k(s)} &= 2 \int_0^t \delta(s-s')(\mathbf{V}\tilde{\mathbf{x}})_k(s') = 2\theta(t-s)\theta(s)(\mathbf{V}\tilde{\mathbf{x}})_k(s), \\ \int_0^t \frac{\delta J_t[\tilde{\mathbf{z}}(s')]}{\delta \tilde{z}_k(s)}(E\tilde{\varphi}_j(t)\tilde{z}_k(s))ds &= 2 \int_0^t (\mathbf{V}\tilde{\mathbf{x}})_k(s)(E\tilde{\varphi}_j(t)\tilde{z}_k(s))ds = \\ &= 2 \int_0^t (\mathbf{V}\tilde{\mathbf{x}})_k(s)z_{kj}(s, t)ds = 2 \int_0^t (\mathbf{V}\tilde{\mathbf{x}})_k(s)e^{(s-t)\mathbf{A}}\mathbf{S}_{kj}\theta(s-t)ds = 0, \end{aligned}$$

так как t является внешней точкой по отношению к интервалу интегрирования по s . Учитывая полученное равенство, получаем, согласно (4.4),

$$E\left(\frac{dw}{dH} \int_{\mathbb{R}} \frac{\delta H[\tilde{\mathbf{z}}(s')]}{\delta z_k(s)}\right)(E\tilde{\varphi}_j(t)\tilde{z}_k(s))ds = -\frac{i}{2}(\mathbf{S}\mathbf{q})_j EG[\tilde{\mathbf{z}}(s')],$$

так как t является крайней точкой интервала интегрирования, то мы положили $E\tilde{\varphi}_j(t)\tilde{z}_k(s) = S_{kj}/2$ и воспользовались симметрией матрицы \mathbf{S} . ■

Теперь мы в состоянии доказать следующее утверждение.

Теорема 5. Плотность $h(\mathbf{x}, \lambda; t)$ удовлетворяет следующему уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t} h(\mathbf{x}, \lambda; t, \mathbf{x}_0) = \left(-\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}, \mathbf{A}\mathbf{x}\right)h + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}, \mathbf{S}^2 \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right)h - \lambda(\mathbf{V}\mathbf{x}, \mathbf{x})h \right)(\mathbf{x}, \lambda; t, \mathbf{x}_0) \quad (4.6)$$

и начальному условию $h(\mathbf{x}, \lambda; 0, \mathbf{x}_0) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$.

□ Заметим, что

$$h(\mathbf{x}, \lambda; t, \mathbf{x}_0) = E\delta(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}(t)) \exp(-\lambda J_t[\tilde{\mathbf{z}}(s)]),$$

представим эту функцию в виде интеграла Фурье

$$h(\mathbf{x}, \lambda; t, \mathbf{x}_0) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(\mathbf{x}, \mathbf{q})} EG[\tilde{\mathbf{z}}(s)]d\mathbf{q}. \quad (4.7)$$

Запишем выражение для производной

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} G[\tilde{\mathbf{z}}(s)] &= -G[\tilde{\mathbf{z}}(s)] \left[i\left(\mathbf{q}, \frac{d}{dt}\tilde{\mathbf{x}}(t)\right) + \lambda(\tilde{\mathbf{x}}(t), \mathbf{V}\tilde{\mathbf{x}}(t)) \right] = \\ &= -G[\tilde{\mathbf{z}}(s)] \left[i(\mathbf{q}, \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}(t)) + i(\mathbf{q}, \mathbf{S}\tilde{\varphi}(t)) + \lambda(\tilde{\mathbf{x}}(t), \mathbf{V}\tilde{\mathbf{x}}(t)) \right]. \end{aligned}$$

Осуществляя, теперь, преобразование Фурье для математического ожидания от обеих частей этого равенства, воспользовавшись (4.5), находим

$$\frac{\partial}{\partial t} h(\mathbf{x}, \lambda; t, \mathbf{x}_0) = -\frac{i}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(\mathbf{x}, \mathbf{q})} (\mathbf{q}, \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}(t))G[\tilde{\mathbf{z}}(s)]d\mathbf{q} -$$

$$-\frac{\lambda}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(\mathbf{x}, \mathbf{q})} \mathbf{E}(\tilde{\mathbf{x}}(t), \mathbf{V}\tilde{\mathbf{x}}(t)) G[\tilde{\mathbf{z}}(s)] d\mathbf{q} - \frac{i}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(\mathbf{x}, \mathbf{q})} (\mathbf{q}, \mathbf{S} \mathbf{E}\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(t)) G[\tilde{\mathbf{z}}(s)] d\mathbf{q}. \quad (4.8)$$

Первое слагаемое в правой части формулы преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{i}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(\mathbf{x}, \mathbf{q})} (\mathbf{q}, \mathbf{A} \mathbf{E}\tilde{\mathbf{x}}(t) G[\tilde{\mathbf{z}}(s)]) d\mathbf{q} &= \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}, \mathbf{A} \mathbf{E}\tilde{\mathbf{x}}(t) \right) \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(\mathbf{x}, \mathbf{q})} G[\tilde{\mathbf{z}}(s)] d\mathbf{q} = \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}, \mathbf{A} \mathbf{E}\tilde{\mathbf{x}}(t) \right) \delta(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}(t)) \exp(-\lambda \mathbf{J}_t[\tilde{\mathbf{z}}(s)]) = \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}, \mathbf{A} \mathbf{x} \right) h(\mathbf{x}, \lambda; t, \mathbf{x}_0). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Преобразуем второе слагаемое в (4.8),

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(\mathbf{x}, \mathbf{q})} \mathbf{E}(\tilde{\mathbf{x}}(t), \mathbf{V}\tilde{\mathbf{x}}(t)) G[\tilde{\mathbf{z}}(s)] d\mathbf{q} &= \mathbf{E}(\tilde{\mathbf{x}}(t), \mathbf{V}\tilde{\mathbf{x}}(t)) \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(\mathbf{x}, \mathbf{q})} G[\tilde{\mathbf{z}}(s)] d\mathbf{q} = \\ &= \mathbf{E}(\tilde{\mathbf{x}}(t), \mathbf{V}\tilde{\mathbf{x}}(t)) \delta(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}(t)) \exp(-\lambda \mathbf{J}_t[\tilde{\mathbf{z}}(s)]) = (\mathbf{x}, \mathbf{V}\mathbf{x}) h(\mathbf{x}, \lambda; t, \mathbf{x}_0). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Наконец, для преобразования последнего слагаемого в (4.8) применим формулу (4.5),

$$\begin{aligned} \frac{i}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(\mathbf{x}, \mathbf{q})} (\mathbf{q}, \mathbf{S} \mathbf{E}\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(t)) G[\tilde{\mathbf{z}}(s)] d\mathbf{q} &= \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}, \mathbf{S} \mathbf{E}\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(t) \right) \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(\mathbf{x}, \mathbf{q})} G[\tilde{\mathbf{z}}(s)] d\mathbf{q} = \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}, \mathbf{S} \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(\mathbf{x}, \mathbf{q})} \mathbf{E}\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(t) G[\tilde{\mathbf{z}}(s)] d\mathbf{q} \right) = -\frac{i}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}, \mathbf{S}^2 \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{q} e^{i(\mathbf{x}, \mathbf{q})} \mathbf{E} G[\tilde{\mathbf{z}}(s)] d\mathbf{q} \right) = \\ &= -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}, \mathbf{S}^2 \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right) h(\mathbf{x}, \lambda; t, \mathbf{x}_0). \end{aligned}$$

Подставляя это выражение вместе с (4.9) и (4.10) в (4.8), получаем уравнение (4.6).

В заключение заметим, что $\mathbf{J}_0[\tilde{\mathbf{z}}(s)] = 0$ и вектор $\tilde{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{x}_0$ неслучаен. Поэтому $h(\mathbf{x}, \lambda; 0, \mathbf{x}_0) = f(\mathbf{x}, 0; \mathbf{x}_0, 0) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$. ■

5. Обобщенная формула Зигерта. По определению, функция $h(\mathbf{x}, \lambda; t, \mathbf{x}_0)$ существует и единственна, так как существует и единственна плотность распределения $g(\mathbf{x}, v; t, \mathbf{x}_0)$, а функция $h(\mathbf{x}, \lambda; t, \mathbf{x}_0)$ представляет собой условное математическое ожидание случайной величины $\exp(-\lambda \mathbf{J}_t[\tilde{\mathbf{z}}(s)])$, которая ограничена при $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$, ввиду $\mathbf{J}_t[\tilde{\mathbf{z}}(s)] \geq 0$ с вероятностью 1.

Найдем решение уравнения (4.6), удовлетворяющее начальному условию $h(\mathbf{x}, \lambda; 0, \mathbf{x}_0) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$. Нам понадобятся следующие утверждения относительно разрешимости матричного уравнения Риккати [33].

Теорема 6. Пусть \mathbf{A} , \mathbf{V} и \mathbf{S}^2 — $n \times n$ -матрицы, причем матрицы \mathbf{V} и \mathbf{S}^2 симметричны и положительно определены. Тогда квадратное матричное уравнение относительно матрицы \mathbf{B}

$$\mathbf{B}\mathbf{S}^2\mathbf{B}^T + (\mathbf{A}\mathbf{B}^T + \mathbf{B}\mathbf{A}^T) - 2\lambda\mathbf{V} = 0, \quad (5.1)$$

при $\lambda \geq 0$ имеет решение в виде вещественной матрицы \mathbf{B} .

□ Произведем замену $\mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{B} + \mathbf{R}$. Тогда

$$(\mathbf{B} + \mathbf{R})\mathbf{S}^2(\mathbf{B}^T + \mathbf{R}^T) + (\mathbf{A}(\mathbf{B}^T + \mathbf{R}^T) + (\mathbf{B} + \mathbf{R})\mathbf{A}^T) - 2\lambda\mathbf{V} = 0.$$

Так как \mathbf{S}^2 положительно определенная матрица, то \mathbf{S}^{-2} существует. Поэтому выберем матрицу \mathbf{R} так, чтобы выполнялось $\mathbf{R}\mathbf{S}^2 + \mathbf{A} = 0$, то есть $\mathbf{R} = -\mathbf{A}\mathbf{S}^{-2}$, $\mathbf{R}^T = -\mathbf{S}^{-2}\mathbf{A}^T$. В результате, получим уравнение

$$\mathbf{B}\mathbf{S}^2\mathbf{B}^T = 2\lambda\mathbf{V} - \mathbf{R}\mathbf{S}^2\mathbf{R}^T - \mathbf{R}\mathbf{A}^T - \mathbf{A}^T\mathbf{R} = 2\lambda\mathbf{V} + \mathbf{A}^T\mathbf{S}^{-2}\mathbf{A}.$$

Введем матрицы $\mathbf{X} = \mathbf{B}\mathbf{S}$, $\mathbf{E} = 2\lambda\mathbf{V} + \mathbf{A}\mathbf{S}^{-2}\mathbf{A}^T$. Тогда уравнение принимает вид

$$\mathbf{X}\mathbf{X}^T = \mathbf{E}. \quad (5.2)$$

Так как матрица $\mathbf{A}\mathbf{S}^{-2}\mathbf{A}^T$ симметрична и положительно определена и такими же свойствами обладает матрица $\lambda\mathbf{V}$, то матрица \mathbf{E} симметрична и положительно определена и следовательно существует единственная симметричная положительно определенная матрица, которая является квадратным корнем $\mathbf{E}^{1/2}$ из матрицы \mathbf{E} (см. [34]), так как для вещественной симметричной неотрицательно определенной матрицы ее взаимно ортогональные собственные векторы всегда могут быть выбраны вещественными. Тогда уравнение (5.2) имеет решение в виде вещественной симметричной матрицы $\mathbf{X} = \mathbf{E}^{1/2}$. Таким образом, $\mathbf{B} = \mathbf{E}^{1/2}\mathbf{S}^{-1}$. Наконец, возвращаясь к исходным обозначениям $\mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{B} - \mathbf{R}$, находим решение уравнения (5.1) в виде $\mathbf{B} = \mathbf{E}^{1/2}\mathbf{S}^{-1} + \mathbf{A}\mathbf{S}^{-2}$. ■

Следующее утверждение уточняет Теорему 6.

Теорема 7. Пусть A, V и $S^2 - n \times n$ -матрицы, причем матрицы V и S^2 симметричны и положительно определены. Пусть, кроме того, матрица S коммутирует с матрицами V и A . Тогда матричное уравнение (5.1) относительно матрицы B при $\lambda > 0$ имеет такое решение, что квадратичная форма (Bx, x) является положительно определенной.

□ Рассмотрим решение $B = E^{1/2}S^{-1} + AS^{-2}$, существование которого установлено в доказательстве Теоремы 6. При условии коммутации матрицы S с матрицами V и A , обратная матрица S^{-1} также коммутирует с этими матрицами, и поэтому $[S^{-1}, E^{1/2}] = 0$. Тогда матрица $S^{-1}E^{1/2}$ симметричная и положительно определенная, и поэтому $(S^{-1}E^{1/2}x, x) > 0$ при $x \neq 0$.

Рассмотрим квадратичную форму $(AS^{-2}x, x)$. Матрицы A и S^{-2} , ввиду их коммутации, обладают для них базисом $\{e_j; j = 1 \div n\}$ ортонормированных собственных векторов. Обозначим наборы их собственных чисел, соответственно, $\{\alpha_j; j = 1 \div n\}$, $\{\sigma_j^{-2} > 0; j = 1 \div n\}$. При этом α_j вещественны, так как являются собственными числами вещественной матрицы с вещественными собственными векторами e_j , являющимися, одновременно собственными векторами симметричной матрицы S . Тогда для любого вектора $x = \sum_{j=1}^n \xi_j e_j$, коэффициенты ξ_j вещественны, так как e_j вещественны, так как являются собственными векторами симметричной матрицы S и поэтому имеет место

$$(AS^{-2}x, x) = \sum_{j=1}^n \frac{\alpha_j}{\sigma_j^2} \xi_j^2 < 0,$$

так как $\alpha_j < 0, j = 1 \div n$. Следовательно, суммарная квадратичная форма положительно определена, $(S^{-1}E^{1/2}x, x) - \text{Re}(AS^{-2}x, x) > 0$ при $x \neq 0$. ■

Будем искать функцию $h(x, \lambda; t, x_0)$ в следующем виде

$$h = p \exp(at - (x, Bx)/2), \quad p = p(x, \lambda; t)$$

с симметричной матрицей $B^T = B$. Обозначив $\partial/\partial x_j \equiv \nabla_j$, вычислим градиент функции h ,

$$\nabla_j h = \exp(at - (x, Bx)/2) \nabla_j p - (Bx)_j p \exp(at - (x, Bx)/2),$$

ввиду $\nabla_j(x, Bx) = 2(Bx)_j$. Так как $\nabla_k \nabla_j(x, Bx) = 2B_{jk}$, то повторное дифференцирование функции h дает

$$\nabla_k \nabla_j h = \exp(at - (x, Bx)/2) \left[\nabla_k \nabla_j p - (Bx)_j \nabla_k p - (Bx)_k \nabla_j p + p(-B_{jk} + (Bx)_j(Bx)_k) \right]. \quad (5.3)$$

Кроме того,

$$\nabla_j(Ax)_j h = \exp(at - (x, Bx)/2) \left[A_{jj} p + (Ax)_j (\nabla_j p - (Bx)_j p) \right], \quad (5.4)$$

$$\dot{h} = (ap + \dot{p}) \exp(at - (x, Bx)/2). \quad (5.5)$$

Подстановка (5.3) - (5.5) в (4.6) дает следующее равенство:

$$ap + \dot{p} = - \left[A_{jj} p + (Ax)_j (\nabla_j p - (Bx)_j p) \right] + \\ + \frac{1}{2} (S^2)_{jk} \left[\nabla_k \nabla_j p - \nabla_k p \cdot (Bx)_j - \nabla_j p \cdot (Bx)_k + p(-B_{jk} + (Bx)_j(Bx)_k) \right] - \lambda(x, Vx) p.$$

Постоянную a и матрицу B выберем таким образом, чтобы уравнение для функции p не содержало членов, пропорциональных самой функции p . Отсюда следует, что

$$a = -\text{Sp}(A + S^2 B/2), \quad (5.6)$$

а матрица B должна быть решением матричного уравнения Риккати

$$BS^2 B^T + (AB^T + BA^T) - 2\lambda V = 0, \quad (5.7)$$

где мы воспользовались симметрией матрицы S^2 и равенством $(BAx, x) = (A^T Bx, x)$. При таком выборе матрицы B и постоянной a функция p должна удовлетворять дифференциальному уравнению

$$\dot{p} = \frac{1}{2} (S^2)_{jk} \nabla_k \nabla_j p - (Dx)_j \nabla_j p, \quad (5.8)$$

где $D = A + S^2 B$. При этом функция $p(x, \lambda; t)$ должна удовлетворять начальному условию

$$p(x, \lambda; 0) = \delta(x - x_0) \exp \left[(Bx_0, x_0)/2 \right]. \quad (5.9)$$

Найдем решение уравнения (5.8). Для этого перейдем к зависящим от времени радиус-векторам $\mathbf{y} = e^{tD}\mathbf{x}$ и положим $q(\mathbf{y}, \lambda; t) \equiv p(\mathbf{x}, \lambda; t) = p(e^{tD}\mathbf{y}, \lambda; t)$. Выразим производные $\partial q/\partial t$, $\partial^2 q/\partial y_j \partial y_k$ в терминах функции p ,

$$\frac{\partial}{\partial t} q(\mathbf{y}, \lambda; t) = \dot{p}(e^{tD}\mathbf{x}, \lambda; t) + (D e^{tD}\mathbf{x})_j (\nabla_j p)_{\mathbf{x} \Rightarrow e^{tD}\mathbf{x}} = [\dot{p} + (D\mathbf{x})_j \nabla_j p]_{\mathbf{x} \Rightarrow e^{tD}\mathbf{x}}, \quad (5.10)$$

$$\frac{\partial}{\partial y_j} q(\mathbf{y}, \lambda; t) = \frac{\partial}{\partial y_j} p(e^{tD}\mathbf{x}, \lambda; t) = (e^{tD})_{lj} (\nabla_l p)_{\mathbf{x} \Rightarrow e^{tD}\mathbf{x}},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y_j \partial y_k} q(\mathbf{y}, \lambda; t) = (e^{tD})_{lj} \frac{\partial}{\partial x_l} \frac{\partial}{\partial y_k} p(e^{tD}\mathbf{x}, \lambda; t) = (e^{tD})_{lj} (e^{tD})_{mk} (\nabla_l \nabla_m p)_{\mathbf{x} \Rightarrow e^{tD}\mathbf{x}}. \quad (5.11)$$

Определим матрицу

$$S_-^2(t) = \exp(-tD) S^2 \exp(-tD^T) \quad (5.12)$$

и, воспользовавшись (5.10), (5.11), преобразуем разность

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} q(\mathbf{y}, \lambda; t) - \frac{1}{2} (S_-^2(t))_{jk} \frac{\partial^2 q}{\partial y_j \partial y_k} &= \frac{\partial}{\partial t} q(\mathbf{y}, \lambda; t) - \frac{1}{2} [\exp(-tD) S^2 \exp(-tD^T)]_{jk} \frac{\partial^2 q}{\partial y_j \partial y_k} q = \\ &= \left[\dot{p} + (D\mathbf{x})_j \nabla_j p - \frac{1}{2} (S^2)_{jk} \nabla_j \nabla_k p \right]_{\mathbf{x} \Rightarrow e^{tD}\mathbf{x}}, \end{aligned}$$

которая равна нулю, в силу уравнения (5.8). Таким образом, функция $q(\mathbf{y}, \lambda; t)$ удовлетворяет уравнению

$$\dot{q} = \frac{1}{2} (S_-^2(t))_{jk} \frac{\partial^2 q}{\partial y_j \partial y_k}. \quad (5.13)$$

Необходимо найти решение этого уравнения, удовлетворяющее начальному условию

$$q(\mathbf{y}, \lambda; 0) = p(\mathbf{x}, \lambda; 0)_{\mathbf{x}=\mathbf{y}}.$$

Непосредственной подстановкой в (5.13) проверяется, что следующая функция является таким решением

$$q(\mathbf{y}, \lambda; t) = \frac{\exp[(\mathbf{x}_0, B\mathbf{x}_0)/2]}{[(2\pi)^n \det G_-(t)]^{1/2}} \exp\left[-((\mathbf{y} - \mathbf{x}_0), G_-^{-1}(t)(\mathbf{y} - \mathbf{x}_0))/2\right], \quad (5.14)$$

где введено обозначение

$$G_-(t) = \int_0^t S_-^2(s) ds. \quad (5.15)$$

Так как $S_-^2(t)$ – симметричная положительно определенная матрица, то таковой является матрица $G_-(t)$ при любом $t \in (0, \infty)$. Она стремится к нулю при $t \rightarrow 0$. Тогда функция (5.14) стремится к $\delta(\mathbf{y} - \mathbf{x}_0) \exp[(\mathbf{x}_0, B\mathbf{x}_0)/2]$, то есть она удовлетворяет требуемому начальному условию.

На основании (5.14), находим требуемое решение уравнения (5.8):

$$p(\mathbf{x}, \lambda; t) = \frac{\exp[(\mathbf{x}_0, B\mathbf{x}_0)/2]}{[(2\pi)^n \det G_-(t)]^{1/2}} \exp\left[-((e^{-tD}\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), G_-^{-1}(t)(e^{-tD}\mathbf{x} - \mathbf{x}_0))/2\right]$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} h(\mathbf{x}, \lambda; t, \mathbf{x}_0) &= \frac{e^{at}}{[(2\pi)^n \det G_-(t)]^{1/2}} \exp\{[(\mathbf{x}_0, B\mathbf{x}_0) - (\mathbf{x}, B\mathbf{x})]/2\} \times \\ &\quad \times \exp\left[-((\mathbf{x} - e^{tD}\mathbf{x}_0), [e^{tD} G_-(t) e^{tD^T}]^{-1}(\mathbf{x} - e^{tD}\mathbf{x}_0))/2\right]. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Наконец, после несложных преобразований в рамках матричного анализа

$$e^{tD} G_-(t) e^{tD^T} = e^{tD} \left(\int_0^t e^{-sD} S^2 e^{-sD^T} ds \right) e^{tD^T} = \int_0^t e^{(t-s)D} S^2 e^{(t-s)D^T} ds = \int_0^t e^{sD} S^2 e^{sD^T} ds = G_+(t); \quad (5.17)$$

$$\begin{aligned} \det G_+(t) &= \det e^{tD} G_-(t) e^{tD^T} = (\det e^{tD}) (\det G_-(t)) (\det e^{tD^T}) = \\ &= \exp(t \operatorname{Sp} D) \cdot \det G_-(t) \cdot \exp(t \operatorname{Sp} D^T) = \exp(2t \operatorname{Sp} D) \cdot \det G_-(t) \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$e^{-t\text{Sp}BS^2/2} [\det G_+(t)]^{1/2} = e^{-t\text{Sp}BS^2} (\exp(t\text{Sp}D) [\det G_-(t)]^{1/2}) = e^{-at} [\det G_-(t)]^{1/2}. \quad (5.18)$$

Формула (5.16) принимает следующий вид при использовании (5.17) и (5.18):

$$h(\mathbf{x}, \lambda; t, \mathbf{x}_0) = \frac{\exp(t\text{Sp}BS^2/2)}{[(2\pi)^n \det G_+(t)]^{1/2}} \exp\{[(\mathbf{x}_0, B\mathbf{x}_0) - (\mathbf{x}, B\mathbf{x})]/2\} \times \\ \times \exp\left[-((\mathbf{x} - e^{tD}\mathbf{x}_0), G_+^{-1}(t)(\mathbf{x} - e^{tD}\mathbf{x}_0))/2\right]. \quad (5.19)$$

Замечание. Так как уравнение (4.6) совпадает с (3.1) при $\lambda = 0$, то решение (3.4) получается из (5.14) при $\lambda \rightarrow 0$. В самом деле, положив $\lambda = 0$, в качестве решения уравнения (5.7) достаточно взять $B = 0$, и поэтому $D = A$, $G_+(t) = C(t, t)$ при $t_0 = 0$ (см. (2.7)), откуда получаем равенство $f(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, 0) = h(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, 0)$.

Теорема 8. Производящая функция $Q(\lambda, t; \mathbf{x}_0)$ распределения условных вероятностей при условии $\tilde{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{x}_0$ определяется следующей формулой:

$$Q(\lambda, t; \mathbf{x}_0) = \left[\frac{\exp\left[t\text{Sp}BS^2 + (\mathbf{x}_0, [B - e^{tD}B[1 + G_+(t)B]^{-1}e^{tD}]\mathbf{x}_0)\right]}{\det(1 + G_+(t)B)} \right]^{1/2}, \quad (5.20)$$

где зависимость функции $Q(\lambda, t; \mathbf{x}_0)$ от λ определяется зависимостью от этого параметра матрицы B и соответствующей ей матрицы $D = A + S^2B$.

□ Согласно определяющей формуле (4.2), необходимо вычислить следующий интеграл:

$$Q(\lambda, t, \mathbf{x}_0) = \int_{\mathbb{R}^n} h(\mathbf{x}, \lambda; t, \mathbf{x}_0) d\mathbf{x} = \\ \frac{\exp\left[(t\text{Sp}BS^2 + (\mathbf{x}_0, B\mathbf{x}_0))/2\right]}{[(2\pi)^n \det G_+(t)]^{1/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left\{-\left[(\mathbf{x}, B\mathbf{x}) + ((\mathbf{x} - e^{tD}\mathbf{x}_0), G_+^{-1}(t)(\mathbf{x} - e^{tD}\mathbf{x}_0))\right]/2\right\} d\mathbf{x}. \quad (5.21)$$

Так как матрица $G_-(t)$ положительно определена, то и матрица $G_+(t)$, согласно своему определению, положительно определена. Будем, далее, предполагать, что матрица S коммутирует с матрицами V и A . В этом случае квадратичная форма $(B\mathbf{x}, \mathbf{x})$ положительно определена согласно Теореме 7. Тогда вычисление интеграла производится посредством выделения полного квадрата по вектору \mathbf{x} ,

$$(\mathbf{x}, B\mathbf{x}) + ((\mathbf{x} - e^{tD}\mathbf{x}_0), G_+^{-1}(t)(\mathbf{x} - e^{tD}\mathbf{x}_0)) = \\ = (\mathbf{x}, (B + G_+^{-1}(t))\mathbf{x}) - 2(G_+^{-1}(t)e^{tD}\mathbf{x}_0, \mathbf{x}) + (e^{tD}\mathbf{x}_0, G_+^{-1}(t)e^{tD}\mathbf{x}_0) = \\ = ((B + G_+^{-1}(t))(\mathbf{x} - (B + G_+^{-1}(t))^{-1}G_+^{-1}(t)e^{tD}\mathbf{x}_0), \mathbf{x} - (B + G_+^{-1}(t))^{-1}G_+^{-1}(t)e^{tD}\mathbf{x}_0) + H(\lambda, t), \quad (5.22)$$

где мы воспользовались симметричностью значений матриц-функции $G_+(t)$ и тем, что функция $H(\lambda, t)$ определяется формулой:

$$H(\lambda, t) = (e^{tD}\mathbf{x}_0, G_+^{-1}(t)e^{tD}\mathbf{x}_0) - (G_+^{-1}(t)e^{tD}\mathbf{x}_0, (B + G_+^{-1}(t))^{-1}G_+^{-1}(t)e^{tD}\mathbf{x}_0) = \\ = (e^{tD}\mathbf{x}_0, G_+^{-1}(t)e^{tD}\mathbf{x}_0) - (e^{tD}\mathbf{x}_0, [G_+(t)BG_+(t) + G_+(t)]^{-1}e^{tD}\mathbf{x}_0) = \\ (e^{tD}\mathbf{x}_0, G_+^{-1}(t)[G_+(t)BG_+(t)][G_+(t)BG_+(t) + G_+(t)]^{-1}e^{tD}\mathbf{x}_0) = (e^{tD}\mathbf{x}_0, B[1 + G_+(t)B]^{-1}e^{tD}\mathbf{x}_0). \quad (5.23)$$

Подставив (5.22) и (5.23) в показатель экспоненты подинтегрального выражения (5.21) и вычислив n -мерный интеграл Пуассона по \mathbf{x} , находим

$$Q(\lambda, t; \mathbf{x}_0) = \frac{\exp\left[(t\text{Sp}BS^2 + (\mathbf{x}_0, B\mathbf{x}_0) - H(\lambda, t))/2\right]}{[\det G_+(t)]^{1/2} [\det(G_+^{-1}(t) + B)]^{1/2}} = \\ = \left[\frac{\exp\left[t\text{Sp}BS^2 + (\mathbf{x}_0, [B - e^{tD}B[1 + G_+(t)B]^{-1}e^{tD}]\mathbf{x}_0)\right]}{\det(1 + G_+(t)B)} \right]^{1/2}. \quad \blacksquare \quad (5.24)$$

Наконец, вычислим производящую функцию $Q(\lambda, t)$ безусловного распределения вероятностей значений функционала $J_t[\tilde{\mathbf{x}}(s)]$ от траекторий n -мерного случайного процесса Орнштейна – Уленбека, которую мы называем обобщенной формулой Зигерта.

Теорема 9. Производящая функция $Q(\lambda, t)$ распределения вероятностей случайной величины $J_t[\tilde{x}(s)]$ от траекторий n -мерного случайного процесса Орнштейна – Уленбека определяется следующей формулой:

$$Q(\lambda, t) = \left[\frac{\exp(t \operatorname{Sp} BS^2)}{\det(1 + CB - Ce^{tD}B[1 + G_+(t)B]^{-1}e^{tD}) \cdot \det(1 + G_+(t)B)} \right]^{1/2}, \quad (5.25)$$

где зависимость функции $Q(\lambda, t)$ от λ определяется зависимостью от этого параметра матрицы B и соответствующей ей матрицы $D = A + S^2B$.

□ Согласно определению производящей функции $Q(\lambda, t)$ распределения вероятностей случайной величины $J_t[\tilde{x}(s)]$, она выражается посредством следующего интеграла

$$Q(\lambda, t) = E \exp(-\lambda J_t[\tilde{x}(s)]) = \int_{\mathbb{R}^n} Q(\lambda, t; \mathbf{x}_0) f(\mathbf{x}_0) d\mathbf{x}_0, \quad (5.26)$$

где плотность $f(\cdot)$ определяется формулой (3.4). Используя определение плотности $f(\cdot)$, запишем интеграл (5.26) в следующем виде

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} Q(\lambda, t; \mathbf{x}_0) f(\mathbf{x}_0) d\mathbf{x}_0 &= \left[\frac{\exp(t \operatorname{Sp} BS^2)}{(2\pi)^n \det C \cdot \det(1 + G_+(t)B)} \right]^{1/2} \times \\ &\times \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x}_0, [C^{-1} + B - e^{tD}B[1 + G_+(t)B]^{-1}e^{tD}]\mathbf{x}_0)\right) d\mathbf{x}_0 \end{aligned}$$

и вычислим его как n -мерный интеграл Пуассона:

$$\begin{aligned} Q(\lambda, t) &= \left[\frac{\exp(t \operatorname{Sp} BS^2)}{\det C \cdot \det(1 + G_+(t)B)} \right]^{1/2} \cdot \left[\det(C^{-1} + B - e^{tD}B[1 + G_+(t)B]^{-1}e^{tD}) \right]^{-1/2} = \\ &= \left[\frac{\exp(t \operatorname{Sp} BS^2)}{\det(1 + CB - Ce^{tD}B[1 + G_+(t)B]^{-1}e^{tD}) \cdot \det(1 + G_+(t)B)} \right]^{1/2}. \end{aligned} \quad (5.27)$$

Возможность распространения интегрирования по \mathbf{x}_0 на все пространство \mathbb{R}^n обосновывается также как и при доказательстве Теоремы 8, на основе утверждения Теоремы 7, т.е. переходом в квадратичной форме в показателе экспоненты к общему для всех матриц S, A, V ортонормированному базису их собственных векторов, что возможно в случае их коммутации. ■

6. Заключение. В одномерном случае, когда все матрицы превращаются в числа, формула (5.27) принимает стандартный вид, найденный Зигертом в [14] в случае стандартного процесса Орнштейна – Уленбека, с чем связано название настоящей работы. Эта формула выражается в явной форме на основе элементарных функций. Но уже при $n = 2$, в общем случае, при произвольно выбранных допустимых в рамках постановки задачи матрицах S, A, V , проведение преобразований формулы (5.27), аналогичных одномерному случаю, вызывает определенные вычислительные затруднения. При решении такой задачи сложности возникают уже при определении явного вида матрицы B и, затем, уже при вычислении на его основе явного вида всех матриц, входящих в формулу (5.27).

В связи с найденной формулой (5.27) возникают также другие вопросы, связанные с ее распространением на более широкий класс троек матриц S, A, V , определяющих постановку задачи, которая изучалась в настоящей работе. В первую очередь, имеется настоятельная необходимость отказаться от довольно сильного ограничения на выбор этих матриц, заключающегося в их взаимной коммутации. Это ограничение сильно сужает область практической применимости найденной формулы в прикладных задачах, где прибегают к моделированию стохастического поведения системы на основе элементарных гауссовских процессов. Кроме того, основываясь на виде полученного результата, возникает мысль о том, что требование диагонализуемости матрицы A может быть также излишним. Наличие клеток Жордана в каноническом разложении этой матрицы не ограничивает существование тех матриц, которые входят в окончательное выражение. Желательно, чтобы перечисленные проблемы нашли свое решение в результате дальнейших исследований.

References

1. Arato M. 1982. Linear stochastic systems with constant coefficients. A statistical approach. Lecture Notes in Control and Information Sciences. Berlin: Springer-Verlag, 312.

2. Pugachev V.S. 2013. Theory of Random Functions: And Its Application to Control Problems. Elsevier Science, 708.
3. Pugachev V. S., Sinitin I. N. 2002. Stochastic Differential Systems Analysis and Filtering. World Scientific Publishing Company: Wiley, 928.
4. Gikhman I. I., Skorokhod A. V. 1996. Introduction to the Theory of Random Processes. Courier Corporation, 516.
5. Gikhman I. I., Skorokhod A. V. 2015. The Theory of Stochastic Processes I. Springer-Verlag, 574.
6. Stratonovich R. L. 1963 and 1967. Selected Topics in the Theory of Random Noise. Vols. 1 and 2. Gordon and Breach Science Publisher, New York, Inc.
7. Lavenda B. H., Compiani M. 1983. The Physical Implications of Two Forms of Stochastic Calculi. Lettere al Nuovo Cimento. 38(9): 345–352.
8. Smyth J., Moss P., McClintak P. V. E., Clarckson D. 1983. Ito versus Stratonovich revisited. Physical Letters. 97(3): 95–98.
9. Wong E., Zakai M. 1965. On the convergence of ordinary integrals to stochastic integrals. Ann. Math. Stat. 36: 1560–1564.
10. Doob J. L. 1953. Stochastic Processes. New York: John Wiley & Sons, 608.
11. Ibragimov I. A., Rozanov Yu. A. 1978. Gaussian random processes. New York.: Springer-Verlag, 277.
12. Antosik P., Mikusinski J., Sikorski R. 1973. Theory of distributions. The sequential approach. Amsterdam: Elsevier Scientific Publishing Company.
13. Glazman I. M., Lyubic Yu. I. 2006. Finite-dimensional Linear Analysis: A Systematic Presentation in Problem Form . Courier Corporation, 520.
14. Ziegert A. J. F. 1957. A systematic approach to a class of problems in the theory of noise and other random phenomena, part II. Trans.IRE. 3: 39–44.
15. Slepian D. 1958. Fluctuation of random noise power. Bell Systems Technical Journal. 163–184.
16. Lax M. 1968. Fluctuation and coherence phenomena in classical and quantum physics. New York: Gordon and Beach.
17. Virchenko Yu. P., Mazmanishvili A. S. 1988. Distribution of dissipative losses in an oscillatory circuit excited by white noise. Proceedings of Conference «Statistical Methods in the Theory of Signal Transmission and Transformation», Kiev, 151.
18. Virchenko Yu. P., Mazmanishvili A. S. 1989. Average power distribution for linear system perturbed by white noise. Radio Engng. Electron. Phys. 35(12): 2546–2549.
19. Virchenko Yu. P., Mazmanishvili A. S. 2004. Study of statistics of quality control functional in the rough surface treatment theory. Functional Materials. 11(1): 20–13.
20. Kac M. 1957. Probability and related topics in physical sciences. with special lectures by G. E. Uhlenbeck, A. R. Hibbs. New York: Interscience Publishers, Inc.
21. Laskin N. V., Mazmanishvili A. S. 1983. Functionals on trajectories of the Ornstein – Uhlenbeck process. Preprint KhFTI AN USSR. Kharkov: KhFTI, 1: 32.
22. Loève M. 1955. Probability Theory. Princeton, New Jersey: D. Van Nostrand Company Inc.
23. Karhunen K. 1947. Über Linearen Methoden in der Wahrscheinlichkeit Srechnung. Ann. Acad. Sci. Fennicae. Ser.A. 1; 2.
24. Virchenko Yu. P., Mazmanishvili A. S. 1989. Statistical properties of the convolution functional on normal Markovian process. ref.: Math.Rev. 90d:60043. Doklady Akademii nauk Ukr. SSR, ser.A. 1: 14–16.
25. Virchenko Yu. P., Mazmanishvili A. S. 1990. Probability distribution of the random convolution functional on normal markovian process. Problems Information Transmission. 26(3): 96–101.
26. Virchenko Yu. P., Mazmanishvili A. S. 1996. Statistical properties of the cross-correlation functional on the trajectories of two Ornstein-Uhlenbeck processes. Radiophysics. 39(7): 916–924.

27. Virchenko Yu. P., Mazmanishvili A. S. 1996. Distribution of the cross-correlation functional from the trajectories of two Ornstein-Uhlenbeck processes. Doklady Akademii nauk Ukr. SSR. 4: 27–30.
28. Virchenko Yu. P., Mazmanishvili A. S. 1987. The probability distribution density of the energy functional from the trajectories of the stochastic Ornstein-Uhlenbeck process. Moscow: In-t Atominform, 26p.
29. Virchenko Yu. P., Mazmanishvili A. S. 1984. Statistics of functionals defined on solutions of stochastic differential equations. Preprint DonFTI AN USSR - 84-8, Donetsk, 16p.
30. Korolyuc V. S., Portenko N. I., Skorochod A. V., Turbin A. F. 1985. Handbook on probability theory and mathematical statistics. Moscow: Nauka, (in Russian).
31. Furutsu K. 1963. On the statistical theory of electromagnetic waves in a fluctuating medium (I). J. Res. Nat. Bur. Standards. Sect. D (Radio Propagation). 67: 303–311.
32. Nonikov E. A. 1964. Functionals and method of random forces in the turbulence theory. ZhETF. 47: 1919–1927.
33. Palin V. V. 2008. On solvability of squared matrix equations. Bulletin of Moscow University. ser.1, Mathematics, Mechanics. 6: 36–41.
34. Gantmakher F. R. 1959. The theory of matrices. New York: Chelsea Pub. Co.

Получена 17.05.2021

Вирченко Юрий Петрович – доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры теоретической и математической физики института инженерных и цифровых технологий Белгородского государственного национального исследовательского университета

 <http://orcid.org/0000-0002-5413-6179>

ул. Королева, 2а, Белгород, Россия, 308012

E-mail: virch@bsu.edu.ru

Витохина Наталья Николаевна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики факультета математики и естественнонаучного образования Белгородского государственного национального исследовательского университета

 <http://orcid.org/0000-0003-1986-299X>

ул. Победы, 85, Белгород, Россия, 308015

E-mail: vitohina@bsu.edu.ru

ИНТЕГРАЛЫ И ПРОИЗВОДНЫЕ ДРОБНОГО ПОРЯДКА НА ОСНОВЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ТИПА ЛАПЛАСА С ПРИЛОЖЕНИЯМИ

О. Э. Яремко, Н. Н. Яремко

Статья представлена членом редакционной коллегии С. М. Ситником

Московский государственный технологический университет (Станкин),

Москва, 127055, Россия

Пензенский государственный университет,

Пенза, 449926, Россия

E-mail: yaremki8@gmail.com

Аннотация. Развивается теория интегралов и производных дробного порядка. Построен аналог операционного исчисления для дифференциального оператора с кусочно-постоянными коэффициентами. Предложены различные конструкции обобщенного преобразования Лапласа. При помощи операторов преобразования установлена связь интегральных преобразований Меллина – Лапласа с обобщенным интегральным преобразованием Лапласа. Найден изоморфизм пространства оригиналов и пространства обобщенных оригиналов. Установлены формулы обращения типа Меллина – Лапласа. Доказаны теоремы о дифференцировании обобщенного оригинала и другие. Дано определение обобщенной свертки и установлена формула для ее вычисления, указана связь обобщенной и классической свертки. На основе понятия обобщенной свертки дано определение обобщенного интеграла и обобщенной производной дробного порядка. Установлены соотношения между обобщенными интегралами дробного порядка и интегралами Римана – Лиувилля дробного порядка. Для модельного уравнения теплопроводности с кусочно-постоянным коэффициентом решена задача вычисления плотности теплового потока. Тепловой поток выражен в виде обобщенной производной порядка $1/2$ по времени от измеренной зависимости температуры на границе.

Ключевые слова: интеграл и производная дробного порядка, обобщенное интегральное преобразование Лапласа, оператор преобразования, свертка функций.

Для цитирования: Яремко О. Э., Яремко Н. Н. 2021. Интегралы и производные дробного порядка на основе интегральных преобразований типа Лапласа с приложениями. Прикладная математика & Физика, 52(2): 114–124. DOI 10.52575/2687-0959-2021-53-2-114-124.

INTEGRALS AND DERIVATIVES OF FRACTIONAL ORDER BASED ON LAPLACE TYPE INTEGRAL TRANSFORMATIONS WITH APPLICATIONS

Oleg Iaremko, Natalia Iaremko

Article submitted by a member of the editorial board S. M. Sitnik

Moscow State Technological University (Stankin),

Moscow, 127055, Russia,

Penza State University,

Penza, 449926, Russia

E-mail: yaremki@mail.ru

Received May, 17, 2020

Abstract. Integrals and derivatives of fractional order theory is being developed. An analogue of the operational calculus is constructed for a differential operator with piecewise constant coefficients. Various constructions of the generalized Laplace transform are proposed. The transformation operators establish a connection between the Mellin – Laplace integral transformations and the generalized Laplace integral transformation. Isomorphism between the space of originals and the space of generalized originals is found. Mellin – Laplace type inversion formulas are established. Theorems on the differentiation of the generalized original and others are proved. A definition of a generalized convolution is given and a formula for its calculation is established, a connection between the generalized and classical convolution is indicated. On the basis of the concept of generalized convolution, a definition of a generalized integral and a generalized fractional derivative is given. Relations between generalized fractional integrals and Riemann-Liouville integrals of fractional order are established. For a model equation of heat conduction with a piecewise constant coefficient, the problem of calculating the heat flow transfer is solved. The heat flow is expressed as a generalized time derivative of the order of $1/2$ of the measured temperature dependence at the boundary.

Key words: fractional integral and derivative, generalized integral Laplace transform, transformation operator, convolution of functions.

For citation: Oleg Iaremko, Natalia Iaremko. 2021. Integrals and derivatives of fractional order based on Laplace type integral transformations with applications. Applied Mathematics & Physics, 52(2): 114–124. (in Russian)
DOI 10.52575/2687-0959-2021-53-2-114-124.

Введение. Пусть функция $\tilde{f}(t)$ задана на промежутке $[0, \infty)$ и является оригиналом, а функция $\tilde{F}(p)$ ее изображение. Интеграл Римана – Лиувилля можно определить [15] формулой

$$\tilde{I}^\alpha \tilde{f}(t) = \tilde{L}^{-1} \left[\frac{1}{p^\alpha} \tilde{F}(p) \right].$$

С помощью теоремы о свертке последняя формула преобразуется к форме Римана – Лиувилля

$$\tilde{I}^\alpha \tilde{f}(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \tilde{f}(\tau) (t - \tau)^{\alpha-1} d\tau,$$

где Γ – гамма-функция, α – комплексное число в полуплоскости $\text{Re } \alpha > 0$. Для функции $\tilde{f}(t)$ определенной на промежутке $[0, \infty)$ производная дробного порядка α определяется по правилу

$$\tilde{D}^\alpha [\tilde{f}(t)] = D^n I^{n-\alpha} [\tilde{f}(t)], n = [\alpha] + 1.$$

Таким образом, дифференциальное исчисление дробного порядка можно построить на основе операционного исчисления. Теория дифференциального и интегрального исчисления дробного порядка рассматривается в работах [10-11], [15]-[16].

В настоящей статье авторы предлагают обобщенное операционное исчисление на основе дифференциального оператора с кусочно-постоянными коэффициентами

$$D_t = \frac{1}{x'(t)} \frac{d}{dt},$$

где функция $x = x(t)$ имеет вид линейного сплайна с узлами $t_0 = 0, t_k, k = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned} x(t) = & a_1 t (H(t - t_0) - H(t - t_1)) + (a_2(t - t_1) + a_1 \Delta t_1) (H(t - t_1) - H(t - t_2)) + \\ & + (a_3(t - t_2) + a_2 \Delta t_2 + a_1 \Delta t_1) (H(t - t_1) - H(t - t_2)) + \dots \\ & + (a_{n+1}(t - t_n) + a_n \Delta t_n + \dots + a_1 \Delta t_1) H(t - t_n), \end{aligned}$$

здесь $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}, t_0 = 0$. Оператор D_t возникает при моделировании переходных процессов.

Методы. 1.1 Обобщенное преобразование Лапласа на основе оператора дифференцирования с кусочно-постоянным множителем. Методы интегральных преобразований типа Лапласа можно использовать для построения обобщенного дифференциала Римана – Лиувилля. Обобщениям операционного исчисления посвящены работы [1], [3], [4], [6]-[9], [12]-[14], [17]-[20]. Идею конструирования ядер обобщенных преобразований Лапласа на основе оператора дифференцирования с кусочно-постоянным множителем проиллюстрируем на примере классического преобразования Лапласа. Как известно, ядро в формуле обращения Меллина [20] имеет вид $K(t, p) = e^{pt}$, и, значит, удовлетворяет уравнению

$$K'_t(t, p) = pK(t, p), 0 < t < \infty$$

и начальному условию

$$K(0, p) = 1.$$

Будем конструировать ядро $K(t, p)$ обобщенного преобразования Лапласа в виде решения сепаратной системы дифференциальных уравнений

$$K'_t(t, p) = a_k p K(t, p), t_{k-1} < t < t_k, k = 1, 2, \dots, n + 1; t_0 = 0, t_{n+1} = \infty,$$

удовлетворяющих начальному условию

$$K(0, p) = 1$$

и условиям непрерывности в точках деления $t_k, k = 1, 2, \dots, n$

$$K(t_k - 0, p) = K(t_k + 0, p).$$

Вычисления приводят к формуле:

$$\begin{aligned} K(t, p) &= e^{a_1 p t}, 0 < t < t_1, \\ K(t, p) &= e^{a_2 p(t-t_1) + a_1 \Delta t_1}, t_1 < t < t_2, \\ &\dots \\ K(t, p) &= e^{-p(a_{n+1}(t-t_n) + a_n \Delta t_n + \dots + a_1 \Delta t_1)}, t_n < t, \end{aligned}$$

где $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$. Пусть функция-оригинал $f(t)$ определена на промежутке $[0, \infty)$. Будем искать функцию-изображение $F(p)$ как решение интегрального уравнения

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} K(t, p) F(p) dp, 0 \leq t \leq t_1.$$

В развернутом виде получаем сепаратную систему интегральных уравнений

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{p t a_1} F(p) dp, 0 \leq t \leq t_1, \\ f(t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{p(a_2(t-t_1) + a_1 \Delta t_1)} F(p) dp, t_1 \leq t \leq t_2, \dots \\ f(t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{p(a_{n+1}(t-t_n) + a_n \Delta t_n + \dots + a_1 \Delta t_1)} F(p) dp, t_n \leq t. \end{aligned} \quad (1)$$

Выполним замену переменного в последней формуле $x = x(t)$, где функция $x = x(t)$ имеет вид линейного сплайна с узлами $t_0 = 0, t_k, k = 1, \dots, n$,

$$\begin{aligned} x(t) &= a_1 t (H(t-t_0) - H(t-t_1)) + (a_2(t-t_1) + a_1 \Delta t_1) (H(t-t_1) - H(t-t_2)) + \\ &+ (a_3(t-t_2) + a_2 \Delta t_2 + a_1 \Delta t_1) (H(t-t_1) - H(t-t_2)) + \dots \\ &+ (a_{n+1}(t-t_n) + a_n \Delta t_n + \dots + a_1 \Delta t_1) H(t-t_n), \end{aligned}$$

здесь $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}, t_0 = 0$. График сплайн-функции $x = x(t)$ является ломаной с вершинами в точках

$$\begin{aligned} M_0(0, 0), M_1(t_1, a_1 \Delta t_1), M_2(t_2, a_2 \Delta t_2 + a_1 \Delta t_1), \\ \dots, M_n(t_n, a_n \Delta t_n + \dots + a_1 \Delta t_1). \end{aligned}$$

Угловые коэффициенты звеньев ломаной равны, соответственно a_1, a_2, \dots, a_{n+1} . Заметим, что в частном случае $a_1 = 1, a_2 = 1, \dots, a_{n+1} = 1$ ломаная становится прямой. Функция $t = t(x)$, обратная к функции $x(t)$, есть полиномиальный сплайн первого порядка вида

$$\begin{aligned} t(x) &= \frac{x}{a_1} (H(x) - H(x - a_1 \Delta t_1)) + \\ &+ \left(\frac{x - a_1 \Delta t_1}{a_2} + t_2 \right) (H(x - a_1 \Delta t_1) - H(x - a_1 \Delta t_1 - a_2 \Delta t_2)) + \dots \\ &+ \left(\frac{x - a_1 \Delta t_1 - \dots - a_n \Delta t_n}{a_{n+1}} + t_n \right) H(x - a_1 \Delta t_1 - \dots - a_n \Delta t_n). \end{aligned}$$

Тогда из формулы (1) получим

$$\tilde{f}(x) \equiv f(t(x)) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{p x} F(p) dp.$$

По формуле для прямого преобразования Лапласа [20] получим выражение для обобщенного преобразования Лапласа

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-p x} \tilde{f}(x) dx.$$

Приведем строгие определения.

Определение 1. Функцию $f(t)$ назовем обобщенным оригиналом, если функция $\tilde{f}(x) = f(t(x))$ является функцией-оригиналом.

Определение 2. Оператор $J: \tilde{f} \rightarrow f$, действующий по правилу $f(t) = \tilde{f}(x(t))$, назовем оператором преобразования.

Определение 3. Изображением обобщенной функции-оригинала $f(t)$ назовем выражение

$$L[f(t)] = \tilde{L}[\tilde{f}(t)],$$

где \tilde{L} – оператор преобразования Лапласа.

Теорема 1. Оператор J^{-1} , обратный к оператору преобразования, действует по правилу $J^{-1} : f(t) \rightarrow \tilde{f}(t)$, где $\tilde{f}(t) = f(x^{-1}(t))$, причем выполняются равенства

$$L = \tilde{L} \cdot J^{-1}, \tilde{L} = L \cdot J.$$

Теорема 2. Обобщенное преобразование Лапласа находится по формуле

$$L[f(t)] \equiv F(p) = \int_0^{\infty} e^{-px(t)} x'(t) f(t) dt,$$

где функция $x'(t)$ кусочно-постоянная вида

$$x'(t) = a_1 (H(t - t_0) - H(t - t_1)) + a_2 (H(t - t_1) - H(t - t_2)) + \\ + a_3 (H(t - t_1) - H(t - t_2)) + \dots + a_{n+1} H(t - t_n),$$

Доказательство. По определению 1 имеем

$$L[f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-px} \tilde{f}(x) dx.$$

В приведенном интеграле выполним замену переменного $x = x(t)$. Тогда получим

$$L[f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-px(t)} \tilde{f}(x(t)) x'(t) dt.$$

Наконец, представим обоснование формулы для обобщенного преобразования Лапласа.

Следствие 1. Пусть $f(t)$ – функция-оригинал, тогда обобщенное изображение Лапласа вычисляется по формуле

$$F(p) = a_1 \int_0^{t_1} e^{-a_1 p t} f(t) dt + a_2 \int_{t_1}^{t_2} e^{-p(a_2(t-t_1)+a_1 \Delta t_1)} f(t) dt + \\ + a_3 \int_{t_2}^{t_3} e^{-p(a_3(t-t_2)+a_2 \Delta t_2+a_1 \Delta t_1)} f(t) dt + \dots \\ + a_{n+1} \int_{t_n}^{\infty} e^{-p(a_{n+1}(t-t_n)+a_n \Delta t_n+\dots+a_1 \Delta t_1)} f(t) dt.$$

Приведем аналог формулы Римана – Меллина.

Теорема 3. Если $f(t)$ оригинал, то интеграл (1) сходится всюду в полуплоскости $\text{Re } p > s_0$. При этом сходимость равномерная в любой области $\text{Re } p \geq s > s_0$. Функция $F(p)$ аналитична в полуплоскости $\text{Re } p > s_0$. Имеет место формула обращения

$$L^{-1}[F(p)] \equiv f(t) = \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{px(t)} F(p) dp.$$

На основании теоремы 3 и определения функции $x = x(t)$ получается

Следствие 2. Формула обращения Римана – Меллина для обобщенного преобразования Лапласа

$$f_1(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{pt a_1} F(p) dp, 0 \leq t \leq t_1, \\ f_2(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{p(a_2(t-t_1)+a_1 \Delta t_1)} F(p) dp, t_1 \leq t \leq t_2, \\ \dots \\ f_{n+1}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{p(a_{n+1}(t-t_n)+a_n \Delta t_n+\dots+a_1 \Delta t_1)} F(p) dp, t_n \leq t.$$

1.2 Дифференцирование обобщенного оригинала.

Теорема 4. Пусть $D = \frac{1}{x'(t)} \frac{d}{dt}$ оператор обобщенного дифференцирования, а функция $D[f(t)]$ есть обобщенный оригинал, тогда

$$L[D(f(t))] = -f(0) + pF(p).$$

Доказательство. Воспользуемся определением обобщенного преобразования Лапласа. Тогда, интегрируя по частям, получим

$$\int_0^{\infty} e^{-px(t)} x'(t) \frac{1}{x'(t)} f'(t) dt = -f(0) + p \int_0^{\infty} e^{-px(t)} x'(t) f(t) dt.$$

Свертка оригиналов.

Определение 4. Сверткой функций оригиналов $f(t)$, $g(t)$ назовем функцию

$$f(t) * g(t) = L^{-1}[F(p)G(p)].$$

Теорема 5. Свертка вычисляется по формулам

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(x^{-1}(x(t) - x(\tau))) x'(\tau) g(\tau) d\tau$$

или

$$f(t) * g(t) = J[\tilde{f}(t) * \tilde{g}(t)].$$

Доказательство. По определению 1 запишем

$$L[f(t) * g(t)] = \int_0^{\infty} e^{-px(t)} x'(t) \int_0^t f(x^{-1}(x(t) - x(\tau))) x'(\tau) g(\tau) d\tau dt.$$

Выполним замену переменного $x(t) = \beta$

$$L[f(t) * g(t)] = \int_0^{\infty} e^{-p\beta} \int_0^t f(x^{-1}(\beta - x(\tau))) x'(\tau) g(\tau) d\tau d\beta.$$

Проведем вторую замену $x(\tau) = \sigma$

$$L[f(t) * g(t)] = \int_0^{\infty} e^{-p\beta} \int_0^{x^{-1}(\sigma)} f(x^{-1}(\beta - \sigma)) g(x^{-1}(\sigma)) d\sigma d\beta.$$

По теореме о свертке для преобразования Лапласа [20] получим

$$L[f(t) * g(t)] = \tilde{L}[f(x^{-1}(\sigma))] \tilde{L}[g(x^{-1}(\sigma))] = L[f(t)] L[g(t)].$$

Докажем, что изображения правой и левой частей во второй формуле из теоремы 5 одинаковы. По определению 4 имеем равенство

$$L[f(t) * g(t)] = F(p)G(p).$$

С другой стороны, получим

$$L \cdot J[\tilde{f}(t) * \tilde{g}(t)] = \tilde{L}[\tilde{f}(t) * \tilde{g}(t)] = F(p)G(p).$$

Для доказательства второй формулы в теореме 5 перепишем ее правую часть в виде

$$\int_a^t \tilde{f}((x(t) - x(\tau))) \tilde{g}(x(\tau)) x'(\tau) d\tau.$$

Затем выполним замену переменной $\tau = x^{-1}(z)$. Тогда

$$\begin{aligned} \int_0^{x(t)} \tilde{f}((x(t) - z)) \tilde{g}(z) dz &= J \left[\int_0^t \tilde{f}((t - z)) \tilde{g}(z) dz \right] = \\ &= J[\tilde{f}(t) * \tilde{g}(t)] = f(t) * g(t). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Приведем формулу для обобщенной свертки в виде, удобном для приложений.

Следствие 3. Пусть функции $f(t), g(t)$ являются обобщенными оригиналами, тогда справедлива формула для свертки

$$\begin{aligned}
 f(t) * g(t) &= a_1 \int_0^t f(\tau) \tilde{g}(a_1 t - a_1 \tau) d\tau, 0 < t < t_1, \\
 f(t) * g(t) &= a_1 \int_0^{t_1} f(\tau) \tilde{g}(a_2(t - t_1) + a_1(t_1 - \tau)) d\tau + \\
 &\quad + a_2 \int_{t_1}^t f(\tau) \tilde{g}(a_2(t - \tau)) d\tau, t_1 < t < t_2, \\
 &\quad \dots \\
 f(t) * g(t) &= a_1 \int_0^{t_1} f(\tau) \tilde{g}(a_{n+1}(t - t_n) + a_n(t_n - t_{n-1}) + \dots + a_1(t_1 - \tau)) d\tau + \\
 &\quad + a_2 \int_{t_1}^{t_2} f(\tau) \tilde{g}(a_{n+1}(t - t_n) + a_n(t_n - t_{n-1}) + \dots + a_2(t_2 - \tau)) d\tau + \dots + \\
 &\quad + a_{n+1} \int_{t_n}^t f(\tau) \tilde{g}(a_{n+1}(t - \tau)) d\tau, t_n < t.
 \end{aligned}$$

Доказательство. Преобразуем формулу для свертки из теоремы 5. Имеем

$$f(t) * g(t) = J \left[\int_0^t \tilde{f}(\tau) \tilde{g}(t - \tau) d\tau \right] = \int_0^{x(t)} \tilde{f}(\tau) \tilde{g}(x(t) - \tau) d\tau.$$

Выполним замену в интеграле $\tau = x(z)$, тогда получим

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(z) \tilde{g}(x(t) - x(z)) x'(z) dz.$$

Подставим явное выражение функции $\tau = x(z)$. В результате получим доказываемую формулу.

2. Обобщенный дифференциал Римана – Лиувилля. 2.1 Обобщенный интеграл Римана – Лиувилля.

Определение 5. Пусть функция $f(t)$ является обобщенным оригиналом, а функция $F(p)$ – изображение функции $f(t)$. Обобщенный интеграл Римана – Лиувилля $I^\alpha f$ определим по формуле

$$I^\alpha f(t) = L^{-1} [p^{-\alpha} F(p)].$$

Из определения 5 следует полугрупповое свойство обобщенного интеграла Римана – Лиувилля

$$I^\alpha I^\beta = I^{\alpha+\beta}.$$

Теорема 6. Обобщенный интеграл Римана – Лиувилля $I^\alpha f$ порядка α вычисляется по формуле

$$I^\alpha f(t) = J \tilde{I}^\alpha \tilde{f}(t).$$

Доказательство. Воспользуемся определением обобщенного интеграла Римана – Лиувилля и формулой $\tilde{L} = LJ$. Тогда получим

$$I^\alpha f(p) = L^{-1} [p^{-\alpha} F(p)] = J \cdot \tilde{L}^{-1} [p^{-\alpha} F(p)] = J \tilde{I}^\alpha \tilde{f}(t).$$

Следствие 4. Обобщенный интеграл Римана – Лиувилля и интеграл Римана – Лиувилля порядка α связаны формулой

$$I^\alpha = J \tilde{I}^\alpha J^{-1}.$$

Из определения обобщенного интеграла порядка α можно получить формулу типа Римана – Лиувилля.

Теорема 7. Для обобщенного интеграла Римана – Лиувилля $I^\alpha f$ порядка α справедлива формула

$$\begin{aligned}
 I^\alpha f(t) &= a_1 \int_0^{t_1} f(\tau) H(x(t) - a_1 \tau) \frac{(x(t) - a_1 \tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} d\tau + \\
 &\quad + a_2 \int_{t_1}^{t_2} f(\tau) \frac{(x(t) - (a_2(\tau - t_1) + a_1 \Delta t_1))^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} H(x(t) - (a_2(\tau - t_1) + a_1 \Delta t_1)) d\tau + \\
 &\quad + \dots + a_{n+1} \int_{t_n}^\infty \frac{(x(t) - (a_{n+1}(\tau - t_n) + a_n \Delta t_n + \dots + a_1 \Delta t_1))^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}.
 \end{aligned}$$

$$\cdot H(x(t) - (a_{n+1}(\tau - t_n) + a_n \Delta t_n + \dots + a_1 \Delta t_1)) f(\tau) d\tau, 0 < t.$$

Доказательство. Пусть для простоты $0 < t < t_1$, тогда из определения обобщенного дробного интеграла Римана – Лиувилля $I^\alpha f$ имеем:

$$\begin{aligned} I^\alpha [f(t)] &= L^{-1} \left[\frac{1}{p^\alpha} G(p) \right] = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{pt a_1} \frac{1}{p^\alpha} F(p) dp = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{pt a_1} \frac{1}{p^\alpha} \left(a_1 \int_0^{t_1} e^{-a_1 p \tau} f_1(\tau) d\tau + \right. \\ &\quad \left. + a_2 \int_{t_1}^{t_2} e^{-p(a_2(\tau-t_1)+a_1 \Delta t_1)} f_2(\tau) d\tau + \right. \\ &\quad \left. + a_3 \int_{t_2}^{t_3} e^{-p(a_3(\tau-t_2)+a_2 \Delta t_2+a_1 \Delta t_1)} f_3(\tau) d\tau + \dots \right. \\ &\quad \left. + a_{n+1} \int_{t_n}^{\infty} e^{-p(a_{n+1}(\tau-t_n)+a_n \Delta t_n+\dots+a_1 \Delta t_1)} f_{n+1}(\tau) d\tau \right) dp = \\ &= a_1 \int_0^{t_1} f_1(\tau) H(t-\tau) \frac{(a_1 t - a_1 \tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} d\tau + \\ &+ a_2 \int_{t_1}^{t_2} f_2(\tau) \frac{(a_1 t - (a_2(\tau-t_1) + a_1 \Delta t_1))^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} H(a_1 t - (a_2(\tau-t_1) + a_1 \Delta t_1)) d\tau + \\ &\quad + a_{n+1} \int_{t_n}^{\infty} e^{-p(a_{n+1}(\tau-t_n)+a_n \Delta t_n+\dots+a_1 \Delta t_1)} \cdot \\ &\quad \cdot \frac{(a_1 t - (a_{n+1}(\tau-t_n) + a_n \Delta t_n + \dots + a_1 \Delta t_1))^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \cdot \\ &\quad \cdot H(a_1 t - (a_{n+1}(\tau-t_n) + a_n \Delta t_n + \dots + a_1 \Delta t_1)) f_{n+1}(\tau) d\tau, 0 < t < t_1. \end{aligned}$$

Учитывая, что на промежутке $0 < t < t_1$ выполняется условие $x(t) = a_1 t$, доказательство закончим.

Следствие 5. Для случая линейного сплайна $x = x(t)$ с двумя узлами t_0, t_1 обобщенный дробный интеграл Римана – Лиувилля имеет вид

$$\begin{aligned} I^\alpha [f(t)] &= a_1 \int_0^t f(\tau) \frac{(a_1 t - a_1 \tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} d\tau, \quad 0 < t < t_1 \\ I^\alpha [f(t)] &= a_1 \int_0^{t_1} f(\tau) \frac{(a_2(t-t_1) + a_1(t_1-\tau))^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} d\tau + \\ &+ a_2 \int_{t_1}^t f(\tau) \frac{(a_2(t-\tau))^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} d\tau, \quad t_1 < t. \end{aligned}$$

Следствие 6. Для случая линейного сплайна $x = x(t)$ с тремя узлами t_0, t_1, t_2 обобщенный дробный интеграл Римана – Лиувилля имеет вид

$$\begin{aligned} I^\alpha [f(t)] &= a_1 \int_0^t f(\tau) \frac{(a_1 t - a_1 \tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} d\tau, \quad 0 < t < t_1, \\ I^\alpha [f(t)] &= a_1 \int_0^{t_1} f(\tau) \frac{(a_2(t-t_1) + a_1(t_1-\tau))^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} d\tau + \\ &+ a_2 \int_{t_1}^t f(\tau) \frac{(a_2(t-\tau))^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} d\tau, \quad t_1 < t < t_2, \\ I^\alpha [f(t)] &= a_1 \int_0^{t_1} f(\tau) \frac{(a_3(t-t_2) + a_2(t_2-t_1) + a_1(t_1-\tau))^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} d\tau + \\ &+ a_2 \int_{t_1}^{t_2} f(\tau) \frac{(a_3(t-t_2) + a_2(t_2-\tau))^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} d\tau + \\ &+ a_3 \int_{t_2}^t f(\tau) \frac{(a_3(t-\tau))^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} d\tau, \quad t_2 < t. \end{aligned}$$

2.2 Обобщенная производная Римана – Лиувилля.

Определение 6. Для функции $f(t)$ определенной на промежутке $[0, \infty)$ производной дробного порядка α назовем функцию

$$D^\alpha[f(t)] = D^n I^{n-\alpha}[f(t)], n = [\alpha] + 1.$$

Теорема 8. Оператор обобщенного дифференцирования D и модельный оператор дифференцирования $\tilde{D}, \tilde{D} = \frac{d}{dt}$ удовлетворяют соотношению

$$D[f(t)] = J\tilde{D}[\tilde{f}(t)].$$

т.е. $D = J\tilde{D}J^{-1}$.

Если для функции $\tilde{f}(t)$ выполняется полугрупповое свойство

$$\tilde{D}^\alpha \tilde{D}^\beta [\tilde{f}(t)] = \tilde{D}^{\alpha+\beta} [\tilde{f}(t)],$$

то выполняется полугрупповое свойство для функции $f(t)$

$$D^\alpha D^\beta [f(t)] = D^{\alpha+\beta} [f(t)].$$

Доказательство. Преобразуем данное в условии тождество

$$JD^\alpha J^{-1} JD^\beta J^{-1} J[f(t)] = JD^{\alpha+\beta} J^{-1} J[f(t)].$$

Тогда получим

$$JD^\alpha D^\beta [f(t)] = JD^{\alpha+\beta} [f(t)]$$

. Свойство доказано.

Теорема 9. Фундаментальное соотношение имеет вид

$$DI^{\alpha+1} = I^\alpha.$$

Доказательство. Преобразуем левую часть доказываемого тождества

$$DI^{\alpha+1} = J\tilde{D}J^{-1} J\tilde{I}^{\alpha+1} J^{-1} = J\tilde{D}\tilde{I}^{\alpha+1} J^{-1}.$$

Аналогично преобразуем правую часть

$$I^\alpha = J\tilde{I}^\alpha J^{-1}.$$

На основании модельного фундаментального соотношения $\tilde{D}\tilde{I}^{\alpha+1} = \tilde{I}^\alpha$ доказательство закончим.

3. Уравнение теплопроводности с кусочно-постоянными коэффициентами. В качестве приложения рассмотрим задачу вычисления плотности теплового потока $q(t)$ по измеренной зависимости температуры на границе по времени $f(t)$. Рассмотрим смешанную краевую задачу Коши для однородного уравнения теплопроводности:

$$D_t u - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad x > 0, t > 0, \tag{2}$$

$$u(x, 0) = 0, \quad x > 0, \tag{3}$$

$$u(0, t) = f(t), \quad t > 0. \tag{4}$$

Дополним условия (2)-(4) условием непрерывности решения в моменты $t = t_k, k = 1, 2, \dots, n$.

$$\lim_{t \rightarrow t_k-0} u(t, x) = \lim_{t \rightarrow t_k+0} u(t, x)$$

Рассмотрим также модельную смешанную краевую задачу Коши для однородного уравнения теплопроводности:

$$c \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} - \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} = 0, \quad x > 0, t > 0, \tag{5}$$

$$\tilde{u}(x, 0) = 0, \quad x > 0, \tag{6}$$

$$\tilde{u}(0, t) = \tilde{f}(t), \quad t > 0. \tag{7}$$

В работе [2] доказана формула для потока $\tilde{q}(t)$ на границе $x = 0$

$$\tilde{q}(t) = k\tilde{D}^{\frac{1}{2}} [\tilde{f}(t)], \tag{8}$$

$\tilde{D}^{\frac{1}{2}}$ – производная порядка 1/2. Положим $J[\tilde{f}(t)] = f(t)$. Докажем аналог формулы (8). Для этого подействуем на обе части уравнения (5) оператором J

$$J\left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} - \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2}\right) = 0, \quad x > 0, t > 0.$$

Подставим также значение $[\tilde{f}(t)] = J^{-1}[f(t)]$. В итоге имеем

$$J\tilde{D}J^{-1}u - J \cdot J^{-1}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

Учитывая, что $J\tilde{D}J^{-1}u = Du$, приходим к уравнению (2). Из определения оператора J следует, что $u(0, x) = 0$. Имеем также

$$J[\tilde{u}(t, 0)] = J[\tilde{f}(t)],$$

значит,

$$u(t, 0) = f(t).$$

Итак, мы доказали, что решение задачи (2)-(4) находится по формуле

$$u(t, x) = J[\tilde{u}](t, x).$$

Отсюда следует, что

$$q(t) = J[\tilde{q}](t) = J\tilde{D}^{1/2}[\tilde{f}(t)] = D^{1/2}[f(t)] = DI^{1/2}[f(t)],$$

где интеграл порядка 1/2 определен в теореме 7.

4. Заключение. Разработано обобщенное операционное исчисление на основе оператора дифференцирования с кусочно-постоянным множителем. Установлен изоморфизм функций-оригиналов и обобщенных функций-оригиналов. При этом предполагалось, что функция-изображение и обобщенная функция-оригинал тождественны. Таким образом, стало возможным изучать обобщенное операционное исчисление, основываясь на классическом операционном исчислении. На этом пути определено понятие обобщенной свертки, а затем с ее помощью были определены обобщенный интеграл и обобщенная производная дробного порядка. Была решена задача вычисления плотности теплового потока $q(t)$ по измеренной зависимости температуры на границе по времени $f(t)$ для модельной смешанной краевой задачи для уравнения теплопроводности с кусочно-постоянными коэффициентами.

Дальнейшее развитие теоретических исследований возможно по двум направлениям: первое – модификация дифференциального оператора, например, выбрать дифференциальный оператор с множителем, имеющим счетное число точек стыка; второе – рассмотреть векторный аналог полученных в статье результатов. Практика применения обобщенного операционного исчисления предполагает решение обыкновенных дифференциальных уравнений и систем обыкновенных дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными коэффициентами. Методы обобщенного операционного исчисления будут полезны при моделировании переходных процессов теории управления.

Список литературы

1. Романовский П. И. 1980. Ряды Фурье. Теория поля. Аналитические и специальные функции. Преобразования Лапласа. М.: Наука, 336.
2. Яремко О. Э., Яремко Н. Н. Обобщенное двойное преобразование Лапласа и его применения для решения уравнений в частных производных. Прикладная математика и Физика. 52(4): 239–245, 2020, DOI 10.18413/2687-0959-2020-52-4-239-245.
3. Brychkov Yu. A., Prudnikov A. P., Shishov V. S. 1979, 1981. Operational calculus. Itogi Nauki i Tekhn. Ser. Mat. Anal., 16, VINITI, Moscow, 99–148; J. Soviet Math., 15:6, pp. 733–765.
4. Ermolova N. Y., Tirkkonen O. 2014. Laplace Transform of Product of Generalized Marcum Q, Bessel I, and Power Functions With Applications. IEEE Transactions on Signal Processing IEEE Trans. Signal Process. Signal Processing, IEEE Transactions on pp. 2938–2944 Jun.
5. Jeffreys H. and Jeffreys B. 1956. Methods of Mathematical Physics, 3rd ed., Cambridge Univ. Press.
6. Ganzha E. I. 2012. On Laplace and Dini transformations for multidimensional equations with a decomposable principal symbol. Programming and Computer Software. 38: 150–155.
7. Gonzalez-Acuna, Rafael G., Gutierrez-Vega, Julio C. 2019. Transition integral transform obtained from generalization of the Fourier transform. Ain Shams Engineering Journal; 10(4): 841–845.

8. Jarad Fahd, Abdeljawad Thabet. 2018. A modified Laplace transform for certain generalized fractional operators. *Results in Nonlinear Analysis*, 1(2): 88–98.
9. Koepf Wolfram, Kim Insuk, Rathie Arjun K. 2019. On a New Class of Laplace-Type Integrals Involving Generalized Hypergeometric Functions. *Axioms*, 8(3): 87.
10. Meerschaert M. M., Mortensen J., Wheatcraft S. W. 2006. Fractional Vector Calculus for Fractional Advection-Dispersion, *Physica A*, 367: 181–190.
11. Mainardi F. 2010. *Fractional Calculus and Waves in Linear Viscoelasticity*. Imperial College Press: London, 347.
12. Miller K. S., Ross B. 1993. *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*. John Wiley and Sons, Inc.: New York, NY, USA, 366.
13. Napalkov V. V., Mullabaeva A. U. 2015. On one class of differential operators and their application. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 288: 142–155.
14. Rashidi M. M. 2009. The modified differential transforms method for solving MHD boundary-layer equations *Comput. Phys. Commun.*, 180: 2210–2217.
15. Samko S., Kilbas A., Marichev O. 1993. *Fractional Integral and Derivative. Theory and Applications.*—Switzerland: Gordon and Breach.
16. Shishkina E. L., Sitnik S. M. 2020. *Transmutations, Singular and Fractional. Differential Equations with Applications to Mathematical Physics*. Elsevier.
17. Tsarev S. P. 2005. Generalized Laplace Transformations and Integration of Hyperbolic Systems of Linear Partial Differential Equations. In: Labahn, G. (ed.) *Proc. ISSAC 2005*. ACM Press, 325–331.
18. Zaikina Svetlana M. 2014. Generalized Integral Laplace Transform and Its Application to Solving Some Integral Equations. *Vestnik Samarskogo Gosudarstvennogo Tehnivceskogo Universiteta. Seria: Fiziko-Matematičeskie Nauki*, 1(34): 19–24.
19. Sitnik Sergei M., Yaremko Oleg, Yaremko Natalia. 2020. *Transmutation Operators and Applications. Transmutation Operators Boundary Value Problems*, Springer Nature Switzerland, 447–466.

References

1. Romanovsky P. I. 1980. *Fourier series. Field theory. Analytical and special functions. Laplace transformations*. Moscow: Nauka, 336.
2. Yaremko O. E., Yaremko N. N. Generalized double Laplace transform and its applications for solving partial differential equations. *Applied Mathematics and Physics*. 52(4): 239–245, 2020, DOI 10.18413/2687-0959-2020-52-4-239-245.
3. Brychkov Yu. A., Prudnikov A. P., Shishov V. S. 1979, 1981. Operational calculus. *Itogi Nauki i Tekhn. Ser. Mat. Anal.*, 16, VINITI, Moscow, 99–148; *J. Soviet Math.*, 15:6, pp. 733–765.
4. Ermolova N. Y., Tirkkonen O. 2014. Laplace Transform of Product of Generalized Marcum Q, Bessel I, and Power Functions With Applications. *IEEE Transactions on Signal Processing* *IEEE Trans. Signal Process. Signal Processing*, IEEE Transactions on pp. 2938–2944 Jun.
5. Jeffreys H. and Jeffreys B. 1956. *Methods of Mathematical Physics*, 3rd ed., Cambridge Univ. Press.
6. Ganzha E. I. 2012. On Laplace and Dini transformations for multidimensional equations with a decomposable principal symbol. *Programming and Computer Software*. 38: 150–155.
7. Gonzalez-Acuna, Rafael G., Gutierrez-Vega, Julio C. 2019. Transition integral transform obtained from generalization of the Fourier transform. *Ain Shams Engineering Journal*; 10(4): 841–845.
8. Jarad Fahd, Abdeljawad Thabet. 2018. A modified Laplace transform for certain generalized fractional operators. *Results in Nonlinear Analysis*, 1(2): 88–98.
9. Koepf Wolfram, Kim Insuk, Rathie Arjun K. 2019. On a New Class of Laplace-Type Integrals Involving Generalized Hypergeometric Functions. *Axioms*, 8(3): 87.
10. Meerschaert M. M., Mortensen J., Wheatcraft S. W. 2006. Fractional Vector Calculus for Fractional Advection-Dispersion, *Physica A*, 367: 181–190.

11. Mainardi F. 2010. Fractional Calculus and Waves in Linear Viscoelasticity . Imperial College Press: London, 347.
12. Miller K. S., Ross B. 1993. An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations. John Wiley and Sons, Inc.: New York, NY, USA, 366.
13. Napalkov V. V., Mullabaeva A. U. 2015. On one class of differential operators and their application. Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, 288: 142–155.
14. Rashidi M. M. 2009. The modified differential transforms method for solving MHD boundary-layer equations Comput. Phys. Commun., 180: 2210–2217.
15. Samko S., Kilbas A., Marichev O. 1993. Fractional Integral and Derivative. Theory and Applications.— Switzerland: Gordon and Breach.
16. Shishkina E. L., Sitnik S. M. 2020. Transmutations, Singular and Fractional. Differential Equations with Applications to Mathematical Physics. Elsevier.
17. Tsarev S. P. 2005. Generalized Laplace Transformations and Integration of Hyperbolic Systems of Linear Partial Differential Equations. In: Labahn, G. (ed.) Proc. ISSAC 2005. ACM Press, 325–331.
18. Zaikina Svetlana M. 2014. Generalized Integral Laplace Transform and Its Application to Solving Some Integral Equations. Vestnik Samarskogo Gosudarstvennogo Tehnivceskogo Universiteta. Seria: Fiziko-Matematičeskie Nauki, 1(34): 19–24.
19. Sitnik Sergei M., Yaremko Oleg, Yaremko Natalia. 2020. Transmutation Operators and Applications. Transmutation Operators Boundary Value Problems, Springer Nature Switzerland, 447–466.

Получена 17.05.2021

Яремко Олег Эмануилович – доктор физико-математических наук, доцент, профессор, Московский государственный технический университет «Станкин»

 <http://orcid.org/0000-0003-4619-0527>

Вадковский пер.,1, Москва,127055, Россия

E-mail: yaremki@mail.ru

Яремко Наталия Николаевна – доктор педагогических наук, доцент, профессор, Пензенский государственный университет

 <http://orcid.org/0000-0003-1491-624X>

ул. Красная, 40, г. Пенза, 440026, Россия

E-mail: yaremki@mail.ru

ФИЗИКА. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 519.85
MSC 49K27.

DOI 10.52575/2687-0959-2021-53-2-125-131

АЛГОРИТМ И ПРОГРАММА ДЛЯ ГРАФИЧЕСКОГО ВЫДЕЛЕНИЯ МНОЖЕСТВА ПАРЕТО В ТОЧЕЧНОМ МАССИВЕ

С. Е. Кривобокова, В. А. Родин

(Статья представлена членом редакционной коллегии В. В. Меньших)

Воронежский институт МВД России,
Воронеж, 394065, Россия

E-mail: svetlanafedyeva20@gmail.com, rodin_v@mail.ru

Аннотация. В настоящей работе рассмотрены основные алгоритмические сложности построения множества Парето, связанные с конфигурацией массива точек. На основе «максиминного» покоординатного подхода составлен авторский алгоритм построения, учитывающий эти сложности. Написана программа на языке Python. Проведена графическая апробация программы на конкретном примере: из множества акустических извещателей извлечена выборка с минимальной суммарной ценой и высоким «качеством» (желательность по Харринкнтону). С помощью комбинаторных рассуждений снижена размерность пространства поиска.

Ключевые слова: Многопараметрическая оптимизация, функция полезности, множество Парето, специальные средства охраны и сигнализации.

Для цитирования: Кривобокова С. Е., Родин В. А. 2021. Алгоритм и программа для графического выделения множества парето в точечном массиве. Прикладная математика & Физика, 53(2): 125–131.

DOI 10.52575/2687-0959-2021-53-2-125-131.

ALGORITHM AND PROGRAM FOR GRAPHICAL SELECTION OF THE PARETO SET IN A POINT ARRAY

Svetlana Krivobokova, Vadimir Rodin

(Article submitted by a member of the editorial board V. V. Menshikh)

Voronezh Institute of the Ministry of the Interior of Russia,
Voronezh, 394065, Russia

E-mail: svetlanafedyeva20@gmail.com

E-mail: rodin_v@mail.ru

Received April, 28, 2021

Abstract. In this paper, we consider the main algorithmic difficulties of constructing a Pareto set associated with the configuration of an array of points. On the basis of the coordinate approach «maximin» the author's algorithm of construction is made, taking into account these difficulties. The program is written in Python. The program was graphically tested on a specific example: a sample with a minimum total price and high «quality» (Harrinkton desirability) was extracted from a set of acoustic detectors. Using combinatorial reasoning, the dimension of the search space is reduced.

Key words: Multiparameter optimization; utility function, Pareto set, security and alarm special systems.

For citation: Krivobokova S. E., Rodin V. A. 2021. Algorithm and program for graphical selection of the pareto set in a point array. Applied Mathematics & Physics, 53(2): 125–131. (in Russian) DOI 10.52575/2687-0959-2021-53-2-125-131.

1. Введение. В настоящее время существует большой выбор специальных приборов охраны иностранных и отечественных фирм, выполняющих эквивалентные функции. При этом актуальной является задача формирования оптимального по цене комплекта необходимого числа приборов охраны из допустимого множества с сохранением высокого уровня желательности [1, 7, 8] (интегральный показатель, включающий и надежность). Комплект может содержать повторения, что увеличивает размерность пространства поиска. Возникает двухпараметрическая задача оптимизации. Данная задача связана с выделением множества Парето (см., например, [2]) из точечного массива. Размерность пространства поиска предварительно уменьшена с учетом следующего фактора – оба критерия инвариантны относительно перестановок элементов комплекта. Выделение множества Парето в данной работе основано

на максиминном по координатному подходу, в отличие от векторного подхода, который используется в стандартных программах [4].

2. Особенности выделения множества Парето. Рассмотрим трудности построения, связанные с границей точечного массива.

Так как граница точечного массива может быть невыпуклой, то стандартные программы [4] для решения данной задачи не подходят (рис. 1).

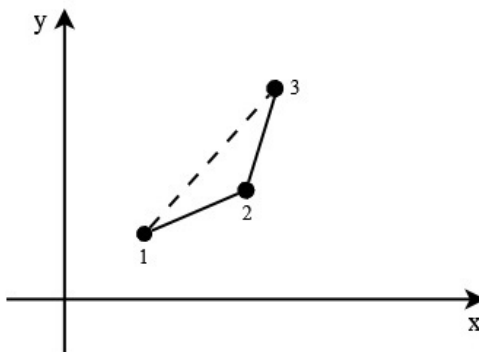


Рис. 1. Выпуклая и «подходящая» оболочки
Fig. 1. Convex and «suitable» boundaries

Пунктиром отмечена выпуклая оболочка, сплошной линией – подходящая. Точка 2 выпадает из поля зрения лица, принимающего решение (ЛПР), при выборе выпуклой оболочки. Однако данная точка принадлежит множеству Парето для данной задачи и может быть выбрана ЛПР.

На рис. 2 стрелками показаны разнонаправленные критерии (факторы), которые необходимо учитывать при выделении множества Парето. В данном случае 1 критерий – уменьшение цены (стрелка влево), 2 критерий – увеличение желательности (стрелка вверх).

«Стандартная граница» [3], также не может быть в определенных случаях множеством Парето.

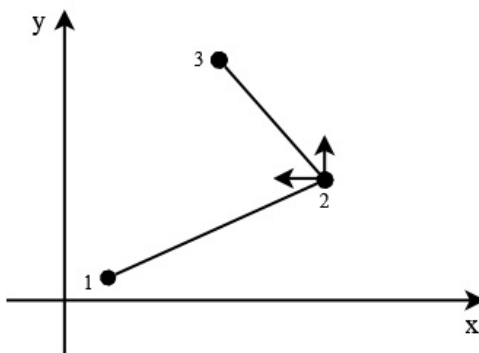


Рис. 2. «Стандартная граница» части оболочки
Fig. 2. «Standard border» of the shell part

При сравнении с точкой 2, точка 3 (рис. 2) имеет большую желательность при меньшей цене. В данном случае, очевидно, что точка 2 не является оптимальным выбором для ЛПР и не принадлежит множеству Парето. Рисунки 1 и 2 показывают, что ни выпуклая оболочка, ни стандартная граница не могут в общем случае быть множеством Парето для наших критериев.

3. Предварительные рассуждения. В качестве примера автоматизированного построения множества Парето рассмотрим прикладную задачу оптимальной выборки из эмперического множества акустических извещателей. Список данных приборов охраны приведен в списке технических средств безопасности [6].

Для построения дискретного пространства решений вычисляются координаты точек (элементов пространства поиска) по формулам:

$$\Omega_v = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \omega_i^v, D_v = \left[\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (d_i^v) \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (1)$$

Здесь ω_i^v – цена i -го датчика в наборе с индексом v . v – индекс, пробегающий все возможные наборы размера k . d_i^v – показатель желательности i -го прибора.

Пусть M – эмпирическое множество приборов, численностью m , из которых выбирается комплект из k приборов ($k \leq m$). Задача определения наилучшего состава комплекта имеет экспонентный рост. Размерность пространства поиска равна $N = \exp(k * \ln m)$.

Если k – достаточно большое число – эта задача в общем виде не по силам даже современным компьютерам.

Заметим, что формулы (1) инвариантны относительно перестановок. Значит перестановки в общем переборе можно не рассматривать, и размерность пространства поиска существенно уменьшится. А именно, на число перестановок в каждой конфигурации набора. Поэтому справедливо следующее:

Утверждение. *Размерность пространства поиска определяется по формуле сочетаний с повторениями:*

$$N_1 = C_m^{-k} = \frac{(m+k-1)!}{k!(m-1)!}. \quad (2)$$

Примеры:

а) при выборе комплекта длиной 3 формула (2) имеет вид:

$$N_1 = C_m^{-3} = \frac{(m+2)(m+1)m}{6}.$$

б) при выборе комплекта длиной 2 формула (2) имеет вид:

$$N_1 = C_m^{-2} = \frac{(m+1)m}{2}. \quad (3)$$

Для $m = 5$, формула (3) имеет следующее значение:

$$N_1 = C_5^{-2} = \frac{(5+1) \times 5}{2} = 15. \quad (4)$$

4. Определение наилучшего комплекта приборов охраны на примере акустических извещателей. Для сокращения размерности пространства поиска – множество координат всех возможных наборов целесообразно объединить извещатели в группы. В данном случае группы формируются с учетом цены. В результате получаем 5 групп:

- 1 – (ИО 329-8 «Звон-1»);
- 2 – (ИО 329-5 «Астра-С», ИО 320-13 «Стекло-3М»);
- 3 – (ИО 329-4 «Стекло-3»);
- 4 – («Ирбис»);
- 5 – (ИО 329-10 «Стекло-4»).

Численность различных конфигураций из данных групп (–множество координат всех возможных наборов) вычисляется по формуле (4) и представлена в столбце «Сочетание» таблицы 1.

Предположим, что нам для размещения необходимо выбрать 2 типа акустических извещателей. Сочетание 14 (столбец 2) означает, что мы, составляя пару, выбираем по одному прибору из групп № 1 и № 4.

В работе [5] рассматривалась таблица полученных сочетаний.

Последний столбец формировался на основе алгоритма желательности Харринктона, учитывающего показатели желательности каждого прибора, а также интегральный показатель по группам.

Таблица 1 используется для получения на плоскости множества точек M .

Дальнейшие рассуждения в работе посвящены построению алгоритма автоматического выбора множества Парето из множества M .

5. Максиминный алгоритм построения множества Парето. Имеем 2 критерия оптимизации, связанных с координатами точек M на плоскости. В нашем случае $x = F_1(M)$ – это цена или критерий, который желательно не увеличивать. Вторая координата $y = F_2(M)$ – это интегральный показатель, учитывающий как надежность прибора, так и мнение двух или более экспертов. Этот параметр сконструирован как интегральный показатель по алгоритму Харринктона [1, 7, 8]. Координаты точек M соответствуют 3 и 4 столбцу таблицы 1.

Пусть $M(x, y)$ – весь массив исходных точек. Алгоритм выбора множества Парето основан на сравнении и исключении неподходящих точек в каждой итерации из оставшихся в предыдущей итерации точек.

Пусть $x_0 = \min\{x \in \{M(x, y)\}\}$. Предположим, что в массиве существуют точки (x, y) , у которых координаты удовлетворяют неравенствам $x > x_0$, $y < y_0$. Здесь y_0 решение $M(x, y)$ из массива. Эти точки (рис. 3) мы исключаем.

После этого, а также в случаях, где их нет, мы рассматриваем точку x_1 первую при $x > x_0$, для которой $y > y_0$, и обозначаем ее y_1 . Если таких точек несколько, то выбираем с наибольшим значением $y_1 = \max\{y > y_0\}$.

Таблица 1. Варианты выбора комплекта акустических извещателей
Table 1. Options for selecting a set of acoustic detectors

№ п/п	Сочетание	Цена	Об. пок.
1	11	406	0,65
2	12	490	0,75
3	13	516	0,76
4	14	548	0,7
5	15	683	0,76
6	22	574	0,84
7	23	600	0,85
8	24	632	0,79
9	25	767	0,85
10	33	626	0,86
11	34	658	0,8
12	35	793	0,86
13	44	690	0,75
14	45	825	0,8
15	55	960	0,85

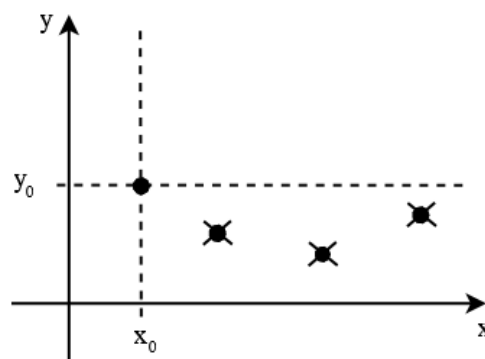


Рис. 3. Выбор минимальной точки
Fig. 3. Selecting the minimum point

После этого рисуем отрезок, соединяющий точки (x_0, y_0) и (x_1, y_1) (рис. 4.)

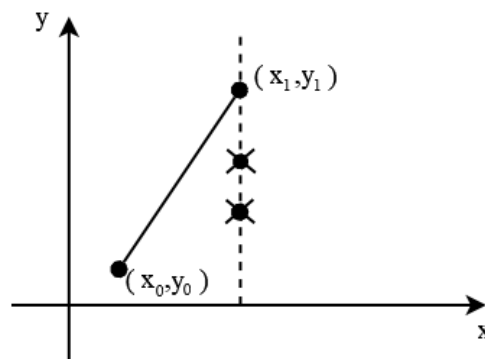


Рис. 4. Выбор следующей точки
Fig. 4. Selecting the next point

Во второй итерации – в качестве начальной точки рассматриваем точку с координатами (x_1, y_1) и повторяем приведенную выше последовательность действий, которая была проведена для точки с координатами (x_0, y_0) . Блок-схема алгоритма выполнения итераций представлена на рисунке 5.

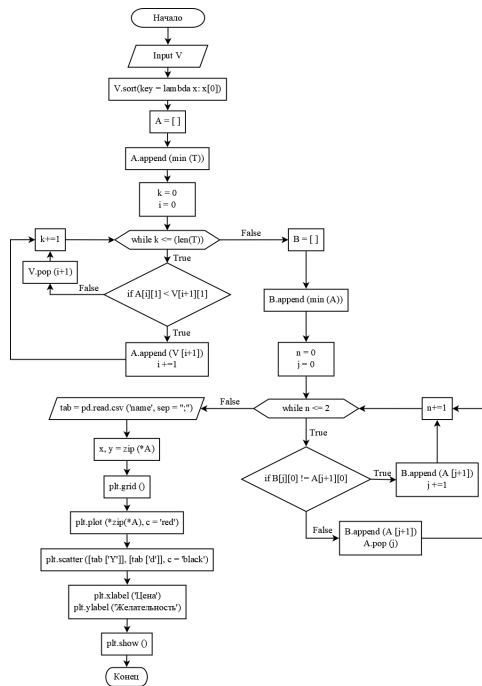


Рис. 5. Блок-схема алгоритма
Fig. 5. Flowchart of the algorithm

Построение выполняется автоматически после выполнения программы (рис. 6)

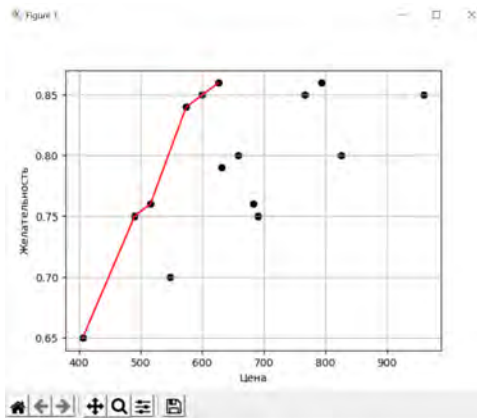


Рис. 6. Результат работы программы
Fig. 6. The result of the program

Точки, которые входят во множество Парето, соединены линией. ЛПР может выбрать любой комплект, который лежит на ломанной прямой.

5. Описание алгоритма. Рассмотрим алгоритм оптимизации выборки приборов охраны из эмпирического множества.

Для начала составляется таблица с координатами в приложении Microsoft Excel. Первый столбец заполняется информацией о цене, второй столбец – интегральным показателем каждого прибора охраны.

Далее, в коде программы записан цикл для заполнения двумерного массива V с той же информацией, что и в созданной таблице, и сортируется по возрастанию цены.

Для выделения множества Парето необходимо создать пустой массив A и записать в него минимальные координаты из массива V. С помощью цикла и условий из массива V в массив A записываются все необходимые точки для построения множества Парето на графике.

Далее необходимо отсортировать полученный массив, чтобы исключить возможность попадания точек с одинаковыми значениями цены. Для этого создается новый пустой массив B, и также используя цикл и условия, все неотсортированные точки записываются в массив B. Отсортированные точки остаются в массиве A – множество Парето.

Построение выполняется автоматически после выполнения программы. Точками на графике являются данные из таблицы, созданной в Microsoft Excel, линия на графике – массив A.

Таким образом, на графике отражено и исходное эмпирическое множество, и множество Парето, что наглядно отображает подходящие возможности выбора для ЛПП.

Заключение. При изучении опубликованных работ другими авторами не было обнаружено применение алгоритма построения интегральных показателей Харринктона для решения задач на экстремум. Это и послужило мотивом для написания данной работы.

В работе приведены возможные трудности для выделения множества Парето. Построен алгоритм выделения множества Парето из точечного множества на максиминной по координатной основе. Написана универсальная программа на языке программирования Python. Проведена графическая апробация программы на конкретном примере: извлечена оптимальная выборка из эмпирического множества акустических извещателей.

Список литературы

1. Любушин Н. П., Брикач Г. Е. 2014. Использование обобщенной функции желательности Харринктона в многопараметрических экономических задачах. *Экономический анализ: теория и практика*, 18(370): 2–10.
2. Малыхин В. И., Родин В. А. 2015. Теория принятия решений, лекции и задачи. Воронеж: ВГУ, 322.
3. Меньших В. В., Копылов А. Н., Кучер В. А., Телкова. 2016. Дискретная математика. Воронеж, Воронежский институт МВД России, 228.
4. Петров Н. Н. 2008. Введение в выпуклый анализ. Ижевск, Удмуртский государственный университет, 168.
5. Родин В. А., Кривобокова С. Е. 2021. Оптимальная комплектация объекта специальными средствами охраны на основе обобщенного показателя Харринктона. *Вестник Воронежского института МВД*, 2: 67–77.
6. Федеральная служба войск национальной гвардии российской федерации. 2020. Список технических средств безопасности, удовлетворяющих «Единым требованиям к системам передачи извещений, объектовым техническим средствам охраны и охраняемым сигнально-противоугонным устройствам автотранспортных средств, предназначенным для применения в подразделениях вневедомственной охраны войск национальной гвардии Российской Федерации». М.: Главное управление вневедомственной охраны, 84.
7. Samokhvalov Yu., Бурба О. 2018. Оценка эффективности научных и научно-технических проектов на основе обобщенной функции Харринктона. *Системы управління навігації та зв'язку*. 4(50): 77-85. DOI:10.26906/SUNZ.2018.4.077
8. Zade L. A. 1973. Outline of new approach to analyses of complex systems and decision processes. *On Systems, Man and Cybernetics*. 3: 28–44.

References

1. Lyubushin N. P., Brikach G. E. 2014. Ispol'zovanie obobshchennoj funkicii zhelatel'nosti Harrinktona v mnogoparametricheskikh ekonomicheskikh zadachah [Use of the generalized Harrinkton desirability function in multiparameter economic problems]. *Ekonomicheskij analiz: teoriya i praktika*, 18(370): 2–10.
2. Malyhin V. I., Rodin V. A. 2015. Teoriya prinyatiya reshenij, lekicii i zadachi [Decision theory, lectures and tasks]. Voronezh: VGU, 322.
3. Men'shikh V. V., Kopylov A. N., Kucher V. A., Telkova. 2016. Diskretnaya matematika [Discrete Mathematics]. Voronezh, Voronezhskij institut MVD Rossii, 228.
4. Petrov N. N. 2008. Vvedenie v vypuklyj analiz [Introduction to convex analysis]. Izhevsk, Udmurtskij gosudarstvennyj universitet, 168.
5. Rodin V. A., Krivobokova S. E. 2021. Optimal'naya komplektaciya ob"ekta special'nymi sredstvami ohrany na osnove obobshchennogo pokazatelya Harrinktona [Optimal equipment of the object with special security equipment based on the generalized Harrinkton indicator]. *Vestnik Voronezhskogo instituta MVD*, 2: 67–77.

6. Federal'naya sluzhba vojsk nacional'noj gvardii rossijskoj federacii. 2020. Spisok tekhnicheskikh sredstv bezopasnosti, udovletvoryayushchih «Edinym trebovaniyam k sistemam peredachi izveshchenij, ob'ektivym tekhnicheskim sredstvam ohrany i ohrannym signal'no-protivougonnym ustrojstvam avtotransportnyh sredstv, prednaznachennym dlya primeneniya v podrazdeleniyah vnevedomstvennoj ohrany vojsk nacional'noj gvardii Rossijskoj Federacii» [List of technical security devices that meet the « Uniform requirements for notification transmission systems, facility technical security equipment and security alarm and anti-theft devices of vehicles intended for use in non-departmental security units of the National Guard of the Russian Federation »]. M.: Glavnoe upravlenie vnevedomstvennoj ohrany, 84.
7. Samokhvalov Yu., Burba O. Ocenka effektivnosti nauchnyh i nauchno-tekhnicheskikh proektov na osnove obobshchennoj funkcii Harrinktona [Evaluation of the effectiveness of scientific and scientific-technical projects based on the generalized Harrinkton function]. Sistemi upravliniya navigacii ta zv'yazku. 4(50): 77–85. DOI:10.26906/SUNZ.2018.4.077
8. Zade L. A. 1973. Outline of new approach to analyses of complex systems and decision processes. On Systems, Man and Cybernetics. 3: 28–44.

Получена 28.04.2021

Кривобокова Светлана Евгеньевна – адъюнкт Воронежского института МВД России

 <http://orcid.org/0000-0001-7105-9227>

проспект Патриотов, 53, Воронеж, 394065, Россия

E-mail: svetlanafedyaeva20@gmail.com

Родин Владимир Александрович – доктор физико-математических наук, профессор, профессор Воронежского института МВД России

 <http://orcid.org/0000-0003-0655-3696>

проспект Патриотов, 53, Воронеж, 394065, Россия

E-mail: rodin_v@mail.ru

УЧЕТ НЕДОСТАТОЧНОЙ ЛИКВИДНОСТИ И ТРАНЗАКЦИОННЫХ ИЗДЕРЖЕК ПРИ ДЕЛЬТА-ХЕДЖИРОВАНИИ

М. М. Дышаев, В. Е. Федоров

(Статья представлена членом редакционной коллегии С. М. Ситником)

Челябинский государственный университет,
Челябинск, 454001, Россия

E-mail: Mikhail.Dyshaev@gmail.com

Аннотация. Статья посвящена исследованию оптимального временного интервала хеджирования при недостаточной ликвидности и наличии транзакционных издержек. Получены нелинейные уравнения типа Блэка – Шоулса для случая, когда функция затрат неликвидности является линейной и квадратичной. Для определения транзакционных издержек используется модель методологии ценообразования с поправкой на риск (risk-adjusted pricing methodology (RAPM) model). Практическое применение продемонстрировано для опционной комбинации «long butterfly».

Ключевые слова: хеджирование, ликвидность, транзакционные издержки, книга лимитных ордеров, нелинейные уравнения типа Блэка – Шоулса, численное решение

Благодарности: Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта No 19-01-00244.

Для цитирования: Дышаев М. М., Федоров В. Е. 2021. Учет недостаточной ликвидности и транзакционных издержек при дельта-хеджировании. Прикладная математика & Физика, 53(2): 132–143.

DOI 10.52575/2687-0959-2021-53-2-132-143.

THE ACCOUNTING OF ILLIQUIDITY AND TRANSACTION COSTS DURING THE DELTA-HEDGING

Mikhail Dyshaev, Vladimir Fedorov

(Article submitted by a member of the editorial board S. M. Sitnik)

Chelyabinsk State University,
Chelyabinsk, 454001, Russia

E-mail: Mikhail.Dyshaev@gmail.com

Received May, 17, 2021

Abstract. The article is devoted to the study of optimal time interval for re-hedging in the presence of illiquidity and transaction costs. A nonlinear Black – Scholes type equations are obtained for the case when the function of illiquidity costs is linear and quadratic. To determine the transaction costs, a risk-adjusted pricing methodology (RAPM) model is used. In order to demonstrate its practical application, the optimal time interval for the delta hedging is considered using an example of an optional combination «long butterfly».

Key words: hedging, liquidity, transaction costs, limit order book, nonlinear Black – Scholes type equations, numerical solutions.

Acknowledgements: The reported study was funded by RFBR according to the research project № 19-01-00244.

For citation: Dyshaev Mikhail, Fedorov Vladimir. 2021. The accounting of illiquidity and transaction costs during the delta-hedging. Applied Mathematics & Physics, 53(2): 132–143. (in Russian) DOI 10.52575/2687-0959-2021-53-2-132-143.

1. Введение. Наиболее известной и широко используемой в финансовой индустрии моделью ценообразования производных финансовых инструментов является модель Ф. Блэка и М. Шоулса [11]. Эта классическая модель цены для опционов европейского типа разрабатывалась при определенных ограничениях. «Идеальные условия» включают постоянную процентную ставку, отсутствие дивидендов или других выплат по базовому активу, лог-нормальную динамику цен, постоянную волатильность базового актива, возможность покупки и продажи любой доли базового актива, отсутствие транзакционных издержек. Сделки трейдеров в рамках указанной модели не могут оказывать ни временного, ни постоянного влияния на цену.

В последние годы появилось много работ, посвященных включению дополнительных факторов в модель Блэка – Шоулса. Моделирование ценообразования опционов охватывает многие области, и вот лишь несколько работ, демонстрирующих это [40, 23, 32, 3, 10]. Эти статьи посвящены вопросам

фактического распределения цен и волатильности, учету транзакционных издержек и рассмотрению постоянного или временного воздействия транзакций на цену актива.

Модель Блэка – Шоулса для колл (call) опциона Европейского типа может быть записана как:

$$\begin{aligned} u_t + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 u_{xx} + r(xu_x - u) &= 0, \\ u(0, t) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{u(x, t)}{x - Ke^{-r(T-t)}} &= 1, \\ u(x, T) &= \max(x - K, 0), \\ x \in [0, +\infty), \quad t \in [0, T], \quad K &= \text{const}, \quad K > 0, \\ \sigma &= \text{const}, \quad \sigma > 0, \quad r = \text{const}, \quad r \geq 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь x представляет собой цену базового актива, $u(x, t)$ – цена колл опциона Европейского типа, K – цена «страйк», то есть цена исполнения опциона, σ – это историческая волатильность (обычно принимается как стандартное отклонение цены), а r – это безрисковая процентная ставка.

Исследование влияния транзакционных издержек началось с работы Н. Е. Leland [30]. Автор предложил корректировать портфель, как в модели Блэка – Шоулса, но с использованием модифицированной волатильности, отражающей наличие транзакционных издержек. В модели модифицированная волатильность принимает вид

$$\hat{\sigma}_L^2 = \sigma^2 \left[1 + \sqrt{2/\pi} k/\sigma\sqrt{\Delta t} \right],$$

где σ – волатильность из модели Блэка – Шоулса, Δt – малый, но не бесконечно малый интервал времени между пересмотрами портфеля (рехеджированием), а k – стоимость транзакции:

$$k = \frac{x_{\text{ask}} - x_{\text{bid}}}{x} = 2 \frac{x_{\text{ask}} - x_{\text{bid}}}{x_{\text{ask}} + x_{\text{bid}}},$$

где x_{ask} и x_{bid} – цены лучшей покупки и продажи в книге лимитных ордеров (limit order book, LOB) соответственно.

Если пересмотр портфеля осуществляется нечасто и транзакционные издержки низкие, метод Н. Е. Leland хорошо работает на практике (см. также статью М. Avellaneda и А. Parás [6] для случая больших транзакционных издержек). Однако, как показали Y. M. Kabanov и М. М. Safarian в [28], ошибка хеджирования в стратегии Н. Е. Leland для цены европейского опциона колл стремится к нулю только тогда, когда уровень транзакционных издержек снижается до нуля при увеличении числа пересмотров портфеля [28, Теорема 2]. Поэтому авторы предположили, что $k = k_n = k_0 n^{-\alpha}$, $\alpha \in [0, 1/2]$, и тогда модифицированная волатильность $\hat{\sigma}_{KS}$, в зависимости от количества ребалансировок, примет вид

$$\hat{\sigma}_{KS}^2 = \sigma^2 \left(1 + \frac{Y_n}{\sigma} \right), \quad Y_n = \sqrt{\frac{8}{\pi}} k_n n^{1/2} = \sqrt{\frac{8}{\pi}} k_0 n^{1/2-\alpha}.$$

G. Barles и Н. М. Soner [8] использовали асимптотический анализ для вывода нелинейного уравнения Блэка – Шоулса для модели, которая учитывает транзакционные издержки и неприятие риска рыночными участниками. Волатильность $\hat{\sigma}_{BS}$ в модели принимает вид

$$\hat{\sigma}_{BS}^2 = \sigma^2 \left(1 + Y \left(e^{r(T-t)} k^2 \gamma C x^2 u_{xx} \right) \right),$$

где k – транзакционные издержки, пропорциональные объему операций. В модели учитывается количество проданных хеджируемых опционов C и фактор неприятия риска γ . В этом случае Y является функцией поправки к волатильности [8, теорема 3.1], которая удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d}{df} [Y(f)] = \frac{Y(f) + 1}{2\sqrt{fY(f)} - f}, \quad f \neq 0, \quad Y(0) = 0.$$

М. Jandačka и D. Ševčovič [27] обобщили и проанализировали модель методологии ценообразования с поправкой на риск (risk-adjusted pricing methodology (RAPM) model). Модель учитывает риск изменения стоимости портфеля, возникающий из-за недостаточно частых пересмотров портфеля, и риск увеличения транзакционных издержек при частом рехеджировании. В этой модели функция волатильности имеет вид

$$\hat{\sigma}_{JS}^2 = \sigma^2 \left(1 - q (xu_{xx})^{\frac{1}{3}} \right),$$

где $q = 3 (k^2 R / 2\pi)^{\frac{1}{3}}$, $R \geq 0$ – коэффициент премии за риск.

Мы также упомянем здесь несколько моделей с модифицированной волатильностью, которые учитывают недостаточную ликвидность и влияние на цены. Эти модели отражают учет влияния сделок хеджирования портфеля опционов на цены базового актива.

В модели R. Frey и A. Stremme [21] модифицированная волатильность имеет вид

$$\hat{\sigma}_{FS}^2 = \sigma^2 \left[\frac{1 - \rho\phi(t, x)}{1 - \rho\phi(t, x) - \rho x \frac{\partial \phi}{\partial x}(t, x)} \right]^2,$$

где $\phi(t, x)$ – нормализованная функция стратегии хеджирования программных трейдеров, ρ – это доля программных трейдеров. Программные трейдеры хеджируют свои портфели опционов согласно заранее определенному алгоритму, в соответствии с функцией стратегии хеджирования.

В модели P. J. Schönbucher и P. Wilmott [37] крупный трейдер использует торговую стратегию, которая не обязательно направлена на хеджирование портфеля опционов. Волатильность в этой модели представлена как

$$\hat{\sigma}_{SW}^2 = \left(\frac{\frac{\partial \chi(x, W, t)}{\partial W}}{\frac{\partial \chi(x, W, t)}{\partial x} + \frac{\partial f(x, t)}{\partial x}} \right)^2,$$

где $f(x, t)$ – торговая стратегия, $\chi(S, W, t)$ – избыточный спрос, W – это случайный процесс поступления информации на рынок.

Для описания ценообразования опционов R. K. Sircar и G. Papanicolaou [39] получили семейство нелинейных уравнений в частных производных с волатильностью в форме

$$\hat{\sigma}_{SP}^2 = \sigma^2 \left[\frac{V(1 - \rho u_x) U'(V(1 - \rho u_x))}{V(1 - \rho u_x) U'(V(1 - \rho u_x)) - \rho x u_{xx}} \right]^2,$$

ρ – доля программных трейдеров, C – цена Европейских опционов колл, $V(\cdot) = U^{-1}(\cdot)$ (обратная функция), а $U(\cdot)$ – функция относительного спроса трейдеров. Авторы исследуют случай функции спроса $D(x, y) = U(y^{\beta}/x)$ при $U(z) = \beta z$, $\beta = \text{const}$.

Помимо учета вышеперечисленных факторов, опубликован ряд работ, моделирующих влияния состояния книги лимитных ордеров (LOB) на хеджирование опционов [14, 36, 1, 4, 12, 7, 24]. Кроме того, в дополнение к упомянутым работам, существует обширная литература по оптимальному исполнению крупных ордеров, также оказывающих влияние на цены. Перечислим лишь некоторые из них [9, 3, 34, 2, 15]. В этих работах изучаются эффекты временного и постоянного влияния исполнения крупных ордеров на цены.

Отдельно отметим ряд работ, посвященных вопросу оптимального рехеджирования портфеля опционов при наличии транзакционных издержек. M. Davis, V. Panas and T. Zariphoroulou [17] максимизируют экспоненциальную полезность конечного капитала. Авторы предложили рассматривать три региона цен: «покупка», «продажа» и «без сделок» для рехеджирования портфеля. На границе этих регионов трейдер должен держать определенное количество базового актива. Эта модель также была изучена E. Whalley и P. Wilmott [41] с использованием асимптотического анализа. Следующие шаги по определению оптимального времени для повторного хеджирования были предприняты в работах V. Zakamouline [42] (аппроксимация оптимальной политики хеджирования и сравнение различных методов рехеджирования), A. Sepp [38] (максимизация коэффициента Шарпа) и J. Cai et. al. [13].

Численному решению нелинейных уравнений Блэка – Шоулса с модифицированной волатильностью посвящено множество исследований. В работах [5, 16, 26, 19] получены разностные схемы для различных нелинейных уравнений Блэка – Шоулса.

Основная цель данной работы – найти оптимальный временной интервал для дельта-хеджирования при наличии неликвидности и транзакционных издержек в рамках модели RAPM. M. Dyshaeв и V. Vedorov [20] рассматривают эту проблему, когда в модели RAPM стоимость ликвидности представлена линейной функцией. Здесь будет рассмотрен вариант степенной функции стоимости ликвидности. Будут изучены некоторые эмпирические свойства книги лимитных ордеров (LOB). В целях демонстрации практического применения базовым активом выбраны наиболее ликвидные фьючерсные контракты, торгуемые на Московской бирже. На основании эмпирических данных был рассчитан оптимальный временной интервал для рехеджирования опционной комбинации «long butterfly».

Статья организована следующим образом. В разделе 2 описывается функция стоимости неликвидности и приводятся некоторые эмпирические факты о ней. В разделе 3 мы кратко напоминаем об основных свойствах модели RAPM и пытаемся учесть неликвидность в этой модели. Для линейной и квадратичной функций стоимости ликвидности представлены соответствующие нелинейные уравнения типа Блэка – Шоулса. В разделе 4 получено численное решение нелинейного уравнения Блэка – Шоулса для модели RAPM, что позволило рассчитать оптимальный временной интервал для рехеджирования комбинации опционов «long butterfly».

2. Модель. Прежде всего, необходимо определить размер возможных потерь трейдера в случае недостаточной ликвидности. После этого, когда станет известен риск из-за недостаточной ликвидности, будет проведено обобщение модели RAPM для этого случая.

2.1 Функция стоимости ликвидности из модели L. C. G. Rogers и S. Singh [36]. В этом разделе мы кратко напомним метод оценки стоимости ликвидности, как это сделано в работе L. C. G. Rogers и S. Singh [36]. Авторы описывают стоимость ликвидности как нелинейные транзакционные издержки. Стоимость ликвидности, представленную в другом виде, можно найти в работе P. Malo and T. Pennanen [31]. Сравнение этих двух способов и пример практического использования можно найти в статье M. Dyshaev [18].

В рамках этой статьи мы предполагаем, что трейдер может оказывать только временное влияние на цены. Например, исходя из собственной стратегии хеджирования опционов, трейдеру необходимо приобрести h единиц базового актива. Для этого трейдер размещает рыночный ордер на покупку. Если объем ордера превышает объем, представленный по лучшей цене предложения (ask) в LOB, то он «сметает» существующие ордера на стороне продажи до тех пор, пока не наберет требуемую сумму в h единиц. После этого LOB быстро заполняется новыми лимитными ордерами. Другими словами, рынок считается абсолютно устойчивым.

В большинстве статей, посвященных вопросам хеджирования опционов, обычно используется *рыночная цена*. Это цена, по которой базовый актив продается или покупается (только в модели). Обычно рыночная цена рассчитывается как средняя цена между лучшей ценой спроса s_{bid} и лучшей ценой предложения s_{ask} :

$$\bar{s} = \frac{s_{bid} + s_{ask}}{2}.$$

Однако трейдер почти всегда уплатит денег при покупке h единиц больше, чем $\bar{s}h$. Значение $\bar{s}h$ часто называют *рыночной стоимостью* (the mark-to-market value). Фактически трейдер покупает по взвешенной цене

$$s^f(h) = \frac{1}{h} \sum_{i=1}^{N(h)} a_i s_i, \quad \sum_{i=1}^{N(h)} a_i = h,$$

где a_i — это купленная сумма базового актива по цене s_i в книге лимитных ордеров. $N(h)$ — это количество уровней цен в LOB, достаточных для исполнения рыночного ордера на покупку h единиц базового актива. На практике, если трейдер подает рыночный ордер для хеджирования опционов, не принимая во внимание эту разницу в ценах, он или она потеряет некоторую сумму денег.

Трейдер покупает базовый актив на h единиц,

$$h = \int_1^{s^m(h)} \rho(s) ds,$$

где $s^m(h) = s_{N(h)}/\bar{s}$ — это предельная относительная цена, а $\rho(s)$ — это плотность объема ордеров базовых активов в LOB. Таким образом, $s^m(h)$ — последняя максимальная (для рыночного ордера на покупку) относительная цена.

Общая стоимость, выраженная в деньгах, которую заплатит трейдер, зависит от h :

$$T(h) = h s^f(h) = \bar{s} \int_1^{s^m(h)} s \rho(s) ds.$$

Разница между рыночной стоимостью $\bar{s}h$ и общей стоимостью $T(h)$ как раз и представляет собой стоимость ликвидности:

$$T(h) - h\bar{s} = \bar{s} \int_1^{s^m(h)} s \rho(s) ds - h\bar{s} = \bar{s} \int_1^{s^m(h)} (s - 1) \rho(s) ds.$$

Таким образом, стоимость ликвидности $C(h)$, выраженная в количестве денег, принимает вид

$$C(h) = T(h) - h\bar{s} = \bar{s}l(h), \tag{2}$$

где

$$l(h) = \int_1^{s^m(h)} (s - 1) \rho(s) ds.$$

Авторы [36] использовали для функции стоимости ликвидности $l(h)$ для единиц базового актива в форме

$$l(h) = \frac{1}{2} \varepsilon h^2,$$

где ε – малый параметр. Для численного решения авторы принимают $\varepsilon = 0.006$, исходя из практических наблюдений. Форма функции $l(h)$ была выбрана из соображений разрешимости уравнения НЖВ (см. [36, Замечание и уравнение (3.12)]).

2.2 Эмпирическая функция стоимости ликвидности в LOB. Построению моделей или изучению эмпирических свойств LOB посвящено большое количество работ. Заинтересованный читатель может найти много полезных ссылок в работах М. D. Gould и др. [22] или J. Lehoczky и M. Schervish [29].

Если мы посмотрим на типичные графики с эмпирической функцией стоимости неликвидности на рисунке 1, мы можем предположить, что эта функция имеет вид

$$l(h) = \frac{1}{2} \varepsilon h^\alpha, \quad \varepsilon > 0, \quad \alpha > 1, \quad (3)$$

или ее можно аппроксимировать как линейную функцию от h , которая представляет максимальную стоимость ликвидности (пунктирные линии на рисунке 1)

$$l(h) = \frac{1}{2} v h, \quad v > 0, \text{ if } \alpha = 1. \quad (4)$$

Сплошные линии на рисунке 1 представляют собой нелинейную аппроксимацию эмпирических данных методом наименьших квадратов. Пунктирная линия примерно соответствует максимуму функции стоимости ликвидности в LOB. По оси абсцисс показано общее количество лотов в LOB до определенного уровня цен. Ось ординат представляет значения функции стоимости ликвидности $l(h)$. На левой панели представлена функция стоимости ликвидности для стороны спроса книги лимитных ордеров (LOB), на правой – для стороны предложения. Исходные данные были получены из мгновенных «снимков» LOB с интервалом 5 секунд для фьючерсного контракта (RIM0, RTS-6.20) на индекс РТС, торгуемого на Московской бирже [33]. Данные соответствуют периоду с 5 мая 2020 года по 29 мая 2020 года. Было обработано около 160 000 снимков со 100 уровнями цен каждый (50 уровней для стороны спроса и 50 уровней для стороны предложения). Таблица 1 содержит аналогичные данные для фьючерсного контракта на нефть марки Brent (BRM0, BR-06.20) и фьючерсного контракта на обменный курс доллара США по отношению к российскому рублю (SiM0, Si-06.20).

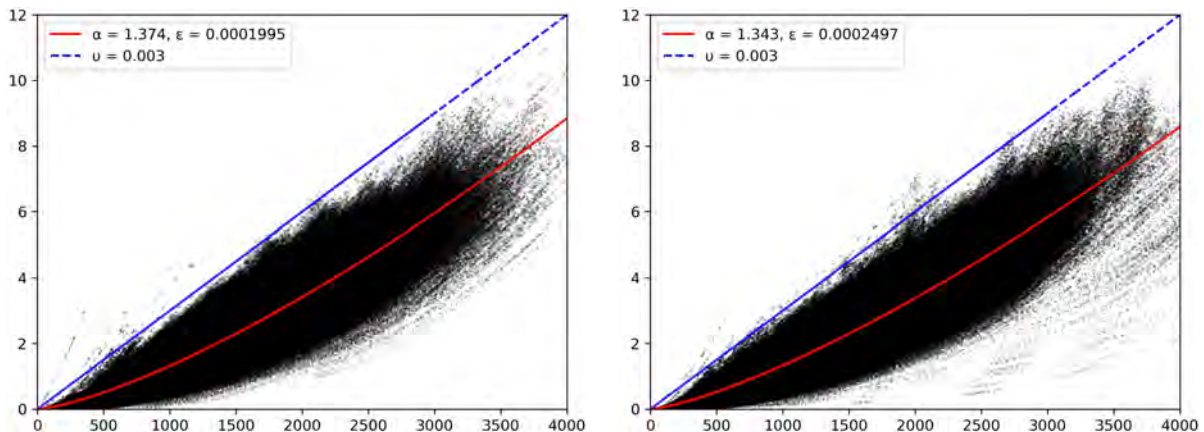


Рис. 1. Типичная форма функции стоимости ликвидности (левая панель – спрос, правая панель – предложение)

Fig. 1. The typical form of the liquidity cost function (left panel – for the bid side of LOB, right panel – for the ask side of LOB)

Расчет на основе мгновенных снимков книги лимитных ордеров был выполнен как для стороны спроса, так и для стороны предложения, поскольку ряд авторов указывают на наличие разницы в их свойствах [31, 25, 35].

Чтобы вычислить значения, приведенные в таблице 1, мы аппроксимировали их с помощью нелинейного метода наименьших квадратов. Использовалась функция `curve_fit()` из пакета SciPy для Python. Как видно на рисунке 1, ε и α сильно меняются со временем.

3 Модель RAPM с учетом недостаточной ликвидности. В начале кратко отмечаются некоторые результаты, полученные для модели RAPM [27]. После этого делается попытка дополнить эту модель

Таблица 1: Эмпирические значения ε и α для функции стоимости ликвидности в виде $l(h) = \frac{1}{2}\varepsilon h^\alpha$.

Фьючерс на ...	Brent oil	RTS index	USD/RUB FX-rate
Код контракта	BRM0, BR-06.20	RIM0, RI-06.20	SiM0, Si-06.20
Количество снимков, N	162481	162479	162480
$\varepsilon, \times 10^{-3}$: all/bid/ask	1.61/3.50/0.69	0.23/0.20/0.25	0.41/0.38/0.41
StdDev $\varepsilon, \times 10^{-6}$: all/bid/ask	3.39/10.3/2.04	0.24/0.30/0.37	0.33/0.47/0.46
α : all/bid/ask	1.16/1.08/1.25	1.36/1.37/1.34	1.04/1.05/1.04
StdDev $\alpha, \times 10^{-4}$: all/bid/ask	2.13/2.99/2.97	1.40/1.98/1.97	0.92/1.42/1.24

учетом недостаточной ликвидности в случае абсолютной устойчивости. С учетом эмпирического вида функции стоимости ликвидности получены соответствующие нелинейные уравнения типа Блэка – Шоулса.

3.1 Модель RAPM. Рассмотрим основные этапы получения модели RAPM. Если портфель состоит из одного опциона и δ единиц базового актива, изменение портфеля за временной интервал Δt составляет

$$\Delta\Pi = \Delta u + \delta\Delta x. \tag{5}$$

В предположении о геометрическом броуновском движении цены базового актива

$$dx = \mu x dt + \sigma x dW,$$

где дрейф равен μ , а σ – стандартное отклонение.

Прежде всего, было сделано предположение, что премия за риск добавляется к изменению портфеля Π за интервал времени Δt :

$$\Delta\Pi = r\Pi\Delta t + (r_{TC} + r_{VP})x\Delta t, \tag{6}$$

где r – безрисковая процентная ставка, r_{TC} – премия за риск операционных издержек на единицу цены актива, а r_{VP} – премия за риск волатильности портфеля. Первая из них соответствует риску увеличения транзакционных издержек при частом хеджировании. Вторая учитывает риск незащищенности портфеля (увеличение ошибки хеджирования) при недостаточно частом хеджировании.

Премия за риск увеличения общей стоимости транзакции r_{TC} имеет вид

$$r_{TC} = \frac{kx\sigma|u_{xx}|}{\sqrt{2\pi}\Delta t},$$

а премия за риск волатильности портфеля r_{VP} из-за редкого рехеджирования может быть представлена как

$$r_{VP} = \frac{1}{2}R\sigma^4 x^2 u_{xx}^2 \Delta t.$$

Находя минимум функции общего риска $r_T = r_{TC} + r_{VP}$ в зависимости от Δt , получаем выражение для оптимального интервала рехеджирования Δt_{opt} :

$$\Delta t_{opt} = \left(\frac{k}{R} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^{2/3} \frac{1}{\sigma^2 |xu_{xx}|^{2/3}}. \tag{7}$$

После этого, применив формулу Ито для цены опциона u , можно найти Δu

$$\Delta u = \left[u_t + \mu x u_x + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 u_{xx} \right] dt + \sigma x u_x dW.$$

Подставляя полученные выражения в (5) и учитывая, что используется стратегия δ -хеджирования, т.е. $\delta = -u_x$:

$$\Delta\Pi = \left[u_t + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 u_{xx} \right] dt.$$

Сравнивая с уравнением (6) и подставляя оптимальный временной интервал (7) в r_{TC} и r_{VP} , получаем уравнение Блэка – Шоулса с поправкой на риск в виде

$$u_t + \frac{1}{2}\sigma^2 \left(1 - q(xu_{xx})^{1/3}\right) x^2 u_{xx} - r(u - xu_x) = 0, \tag{8}$$

где $q = 3(k^2 R / 2\pi)^{1/3}$.

3.2 Премия за риск недостаточной ликвидности. Представляется возможным дополнить модель RAPM новым фактором риска в (6), если учитывать премию за риск неликвидности так же, как и другие премии. Как упоминалось выше, стоимость неликвидности может быть измерена как (2). В этом случае, поскольку интервал между корректировками портфеля принимается равным Δt (напомним, что $\bar{s} = x$):

$$r_{IL}x\Delta t = xl(h). \tag{9}$$

При выводе формулы для премии за риск транзакционных издержек в [27] было показано, что величина изменения базового актива для δ -хеджирования равна

$$\Delta\delta = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\sigma x u_{xx} \sqrt{\Delta t}.$$

Обратим внимание, что h соответствует этой сумме $\Delta\delta$ базового актива, необходимой для ребалансировки портфеля в модели RAPM. Аналогично аргументам при рассмотрении транзакционных издержек, $|u_{xx}|$ также следует использовать при расчете стоимости ликвидности. Заменяв $l(h)$ из (3) в (9) и используя выражение для $\Delta\delta$ вместо h , получаем

$$r_{IL} = \frac{1}{\Delta t}l(h) = \frac{\varepsilon}{2\Delta t}h^\alpha = \frac{\varepsilon}{2\Delta t} \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\sigma x |u_{xx}| \sqrt{\Delta t} \right)^\alpha = \frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \right)^\alpha (\sigma x |u_{xx}|)^\alpha \Delta t^{\frac{\alpha}{2}-1}.$$

Функция общей премии за риск изображена на рисунке 2. Представлены графики для разных α . По оси абсцисс показан временной интервал Δt (как часть года) для последовательных корректировок портфеля, соответствующих стратегии δ -хеджирования. По оси ординат показаны значения функции общего риска r_R . Для сопоставимости вычислений в расчетах использованы значения $q = 0.2, k = 0.01$ и $\sigma = 0.3$, как в [27], и $\varepsilon = 0.006$, как в [36]. Также для расчетов принято $x|u_{xx}| = 0.5$. Эта функция имеет вид

$$r_R = r_{TC} + r_{VP} + r_{IL} = \frac{kx\sigma|u_{xx}|}{\sqrt{2\pi}}\Delta t^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}R\sigma^4x^2u_{xx}^2\Delta t + \frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \right)^\alpha (\sigma x |u_{xx}|)^\alpha \Delta t^{\frac{\alpha}{2}-1}. \tag{10}$$

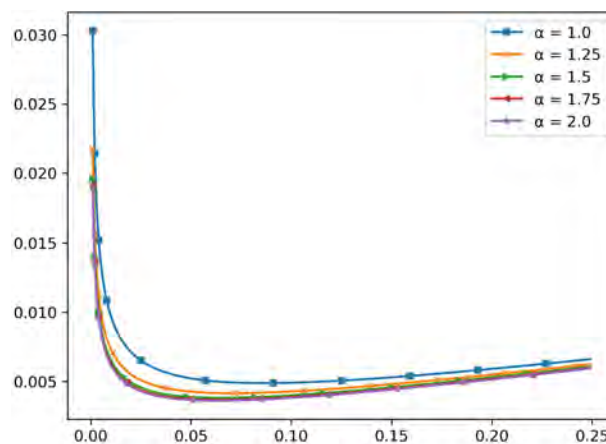


Рис. 2. Функция общей премии за риск r_R для различных α
 Fig. 2. The function of the total risk premium r_R for different α

Необходимо найти интервал времени Δt_{opt} , при котором общий риск r_R минимален. Найдем минимум функции r_R :

$$r'_R = -\frac{1}{2} \frac{k\sigma x |u_{xx}|}{\sqrt{2\pi}} \Delta t^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{2} R\sigma^4 x^2 u_{xx}^2 + \frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \right)^\alpha (\sigma x |u_{xx}|)^\alpha \left(\frac{\alpha}{2} - 1 \right) \Delta t^{\frac{\alpha}{2}-2} = 0.$$

Теперь необходимо убедиться, что функция r_R достигает минимума на интервалах $\Delta t \in (0, 1], \alpha > 1$. Для этого найдем вторую производную r_R по Δt и покажем, что $r''_R > 0$ для любых Δt и α из вышеуказанных интервалов:

$$\begin{aligned} r''_R &= \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{3}{2}\right) \frac{k\sigma x |u_{xx}|}{\sqrt{2\pi}} \Delta t^{-\frac{5}{2}} + \frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \right)^\alpha (\sigma x |u_{xx}|)^\alpha \left(\frac{\alpha}{2} - 1 \right) \left(\frac{\alpha}{2} - 2 \right) \Delta t^{\frac{\alpha}{2}-3} \\ &= \frac{3}{4} \frac{k\sigma x |u_{xx}|}{\sqrt{2\pi}} \Delta t^{-\frac{5}{2}} + \frac{\varepsilon}{4} \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \right)^\alpha (\sigma x |u_{xx}|)^\alpha ((\alpha - 3)^2 - 1) \Delta t^{\frac{\alpha}{2}-3} > 0. \end{aligned}$$

Первое слагаемое положительное для всех α и Δt . Второе слагаемое положительно тогда и только тогда, когда $\alpha < 2$ или $\alpha > 4$.

Вернемся к поиску минимума для (10) и корня его первой производной. Используя следующие подстановки и обозначения

$$y = \Delta t^{\frac{3}{2}}, 0 < \Delta t \leq 1 \Rightarrow \Delta t = y^{\frac{2}{3}}, \Delta t^{\frac{\alpha-2}{2}} = y^{\frac{\alpha-4}{3}}, 0 < y \leq 1,$$

$$a = -\frac{1}{2} \frac{k\sigma x |u_{xx}|}{\sqrt{2\pi}}, \quad b = \frac{1}{2} R\sigma^4 x^2 u_{xx}^2, \quad c = \frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \right)^\alpha (\sigma x |u_{xx}|)^\alpha \left(\frac{\alpha}{2} - 1 \right),$$

мы получим уравнение в виде $ay^{-1} + b + cy^{\frac{\alpha-4}{3}} = 0$. Затем, умножая на y и разделив на a , получаем

$$Cy^{\frac{\alpha-1}{3}} + By + 1 = 0, \tag{11}$$

где

$$C = \frac{c}{a} = -\frac{\varepsilon}{k} \frac{\sqrt{2}^{\alpha+1}}{\sqrt{\pi}^{\alpha-1}} \left(\frac{\alpha}{2} - 1 \right) (\sigma x |u_{xx}|)^{\alpha-1}, \quad B = \frac{b}{a} = -\frac{R}{k} \sqrt{2\pi} \sigma^3 x |u_{xx}|.$$

Исходя из вида полученного уравнения (11) и наличия в нем неизвестного эмпирического параметра α , мы будем искать значения оптимального интервала рехеджирования Δt_{opt} численно.

Замечание 1. Если мы рассмотрим простую модель, когда $l(h)$ является линейной функцией относительно h , как (4), то есть $\alpha = 1$, мы получим следующее нелинейное уравнение Блэка – Шоулса

$$u_t - \frac{1}{2} \sigma^2 \left(1 - q(xu_{xx})^{1/3} \right) x^2 u_{xx} - r(xu_x - u) = 0, \tag{12}$$

$$q = 3((k + \varepsilon)^2 R / 2\pi)^{1/3}.$$

Обратим внимание, что в случае, когда $\alpha = 2$, премия за риск недостаточной ликвидности r_{IL} не зависит от Δt . Для $\alpha = 2$ оптимальный интервал рехеджирования Δt_{opt} будет таким же, как (7), но соответствующее нелинейное уравнение Блэка – Шоулса будет другим. Чтобы получить его, заменим Δt_{opt} из (7) на r_R (уравнение (10)). Затем стандартными шагами, (применяя формулу Ито для $u(x, t)$ и следуя стратегии δ -хеджирования), мы получаем новую нелинейную модель Блэка – Шоулса (ср. (8))

$$u_t - \frac{1}{2} \sigma^2 \left(1 - q(xu_{xx})^{1/3} - pxu_{xx} \right) x^2 u_{xx} - r(xu_x - u) = 0, \tag{13}$$

$$q = 3(k^2 R / 2\pi)^{1/3}, \quad p = 2\varepsilon/\pi.$$

4. Численное решение. Наличие эмпирического параметра α затрудняет получение аналитического решения (11). Поскольку отсутствует выражение в явном виде для Δt_{opt} , также невозможно представить аналитическое выражение для модифицированной волатильности. А это, в свою очередь, не позволяет явно записать нелинейное уравнение Блэка – Шоулса с параметром α . Однако для практических целей мы рассчитаем оптимальный интервал рехеджирования при определенных допущениях. Прежде всего, мы найдем значения xu_{xx} , полученные для модели RAPM. Затем мы используем эти значения xu_{xx} для численного решения уравнения (11), и это позволит найти Δt_{opt} .

4.1 Численная схема для нелинейного уравнения в частных производных для модели RAPM. Первое, что необходимо сделать, это численно решить начально-краевую задачу для модели RAPM. Расчеты проводились по методике, описанной в [19].

Рассматривается комбинация опционов

$$\text{«Long butterfly»} = +1 \text{ Long call}(K_1) \text{ at } p_1 + 2 \text{ Short call}(K_0) \text{ at } p_0 + 1 \text{ Long call}(K_2) \text{ at } p_2,$$

где $K_2 > K_0 > K_1 > 0$ – цены исполнения («strikes»), $p_1, p_0, p_2 > 0$ – цены приобретения или продажи опционов (это могут быть реальные рыночные цены, однако для простоты взяты расчетные цены из модели Блэка – Шоулса).

Для решения произведено усечение области определения с правой стороны и смена направления времени. Время было заменено на $t' = T - t$, поэтому время в задаче становится обратным. В результате мы получим начально-краевую задачу (снова обозначив переменную t' как t).

Для комбинации опционов «long butterfly» начально-краевая задача, в отличие от (1), выглядит так:

$$u_t - \frac{1}{2} \sigma^2 \left(1 - q(xu_{xx})^{1/3} \right) x^2 u_{xx} - r(xu_x - u) = 0, \quad q = 3(k^2 R / 2\pi)^{1/3},$$

$$(x, t) \in [0, 1] \times [0, 1], \quad \sigma = \text{const}, \quad \sigma > 0, \quad r = \text{const}, \quad r \geq 0,$$

$$u(0, t) = (-p_1 + 2p_0 - p_2)e^{-rt}, \tag{14}$$

$$u(1, t) = [2K_0 - K_1 - K_2 + 2p_0 - p_1 - p_2] e^{-rt},$$

$$u(x, 0) = \max(x - K_1, 0) - 2 \max(x - K_0, 0) + \max(x - K_2, 0) - p_1 + 2p_0 - p_2.$$

Для численного решения задачи (14) использовался шаблон для шеститочечной двухслойной неявной схемы с весами. Соответствующая разностная схема в случае $\theta = 1/2$ называется схемой Кранк — Николсон. В нашей схеме значения искомой функции u_n^{m+1} на слое $m + 1$ имеют вес θ , а значения из предыдущего слоя рассматриваются с весом $1 - \theta$.

Разностные представления функции $u(x, t)$ и ее производных

$$\begin{aligned} u &\sim \theta u_n^{m+1} + (1 - \theta) u_n^m, & u_t &\sim \frac{u_n^{m+1} - u_n^m}{\tau}, \\ u_x &\sim \theta \frac{u_{n+1}^{m+1} - u_{n-1}^{m+1}}{h} + (1 - \theta) \frac{u_{n+1}^m - u_{n-1}^m}{h}, \\ u_{xx} &\sim \theta \frac{u_{n+1}^{m+1} - 2u_n^{m+1} + u_{n-1}^{m+1}}{h^2} + (1 - \theta) \frac{u_{n+1}^m - 2u_n^m + u_{n-1}^m}{h^2}, \end{aligned}$$

где τ — шаг сетки для t , а h — постоянный шаг сетки для x .

Расчеты выполнены методом «прогонки». Использовались следующие параметры модели:

- волатильность $\sigma = 0.3$;
- шаг изменения волатильности $\Delta\sigma = 0.01$;
- цены исполнения $K_0 = 0.40$, $K_1 = 0.32$, $K_2 = 0.48$;
- процентная ставка $r = 0.0$.

Выбраны следующие параметры разностной схемы:

- весовой множитель для верхнего слоя шаблона: $\Theta = 0.9$;
- количество узлов сетки вдоль оси x : $N = 120$.

На рисунке 3 показан график так называемой GammaP ($\text{GammaP} = \frac{x}{100} u_{xx}$) для комбинации опционов «long butterfly». Использовались следующие цены исполнения опционов: $K_0 = 0.40$, $K_1 = 0.32$, $K_2 = 0.48$.

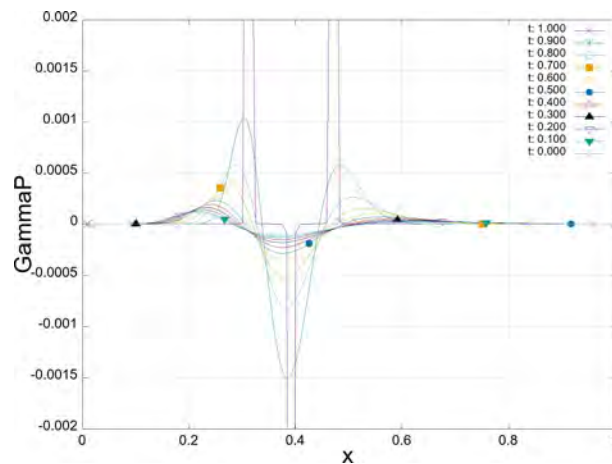


Рис. 3. GammaP для опционной комбинации «long butterfly»
Fig. 3. The GammaP for the options combination «long butterfly»

4.2 Оптимальный временной интервал для корректировки комбинации опционов. Данные, полученные численно в предыдущем разделе, позволяют рассчитать Δt_{opt} . Теперь, когда массив значений $x|u_{xx}|$ из модели RAPM определен, можно найти коэффициенты уравнения (11). Для расчета использовались $\varepsilon = 2.3 \times 10^{-4}$ и $\alpha = 1.36$. Эти значения соответствуют фьючерсному контракту на индекс РТС. Для каждой пары (x, t) и, соответственно, $x|u_{xx}|$ были найдены значения коэффициентов C и B . После этого корни уравнения (11) были найдены численно.

Расчеты проводились по методу Ньютона. Использовалась функция `root_scalar` (`method = 'newton'`) из пакета SciPy для Python. Начальное приближение было установлено как $x_0 = 1.0$, допустимое отклонение для завершения составляет $\varepsilon_y = 2.36 \times 10^{-11}$.

Результаты показаны на рисунке 4. Представлена зависимость оптимального временного интервала Δt_{opt} для рехеджирования комбинации опционов «long butterfly» от цены базового актива x и времени t . На левой панели изображен оптимальный временной интервал рехеджирования для модели RAPM без учета наличия недостаточной ликвидности. На правой панели представлен тот же интервал, но с учетом стоимости ликвидности фьючерсного контракта на индекс РТС. Используются эмпирические значения

$\varepsilon = 2.3 \times 10^{-4}$, $\alpha = 1.36$. Как видно из представленных графиков, оптимальный интервал пересмотра портфеля Δt_{opt} уменьшается при $t \rightarrow T$. Дельта-хеджирование становится особенно необходимым, если цена базового актива приближается к одному из страйков рассматриваемой комбинации опционов.

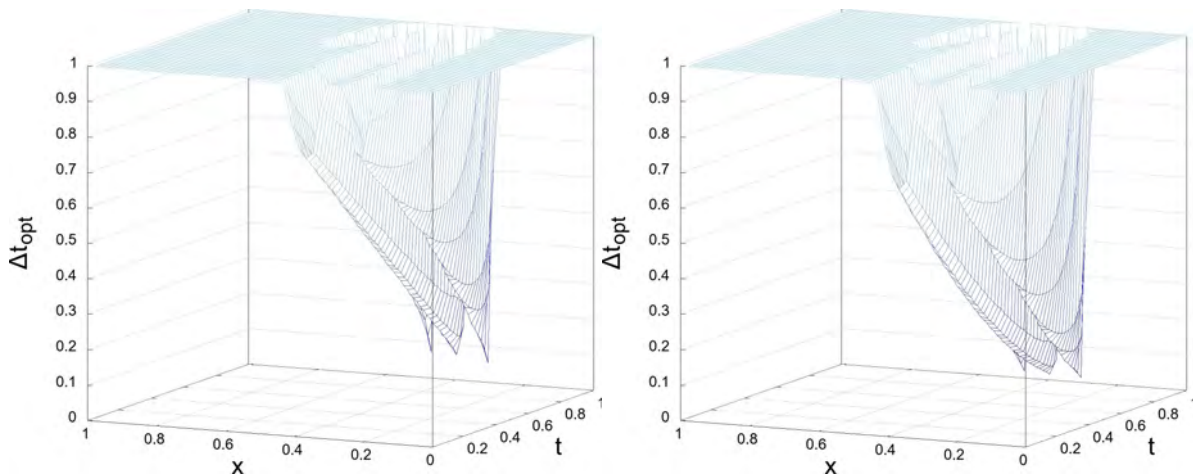


Рис. 4. Зависимость оптимального временного интервала дельта-хеджирования Δt_{opt} для комбинации опционов «long butterfly» от цены базового актива x и времени t

Fig. 4. The dependence of the optimal time interval Δt_{opt} for adjustment of options combination «long butterfly» on the price of underlying asset x and time t

5. Заключение. В статье предлагается обобщение учета затрат при недостаточной ликвидности при исполнении крупных ордеров в LOB в рамках дельта-хеджирования портфеля опционов. Получено нелинейное уравнение типа Блэка – Шоулса для случая, когда цена неликвидности является линейной или квадратичной. Демонстрируется методика расчета оптимального интервала дельта-хеджирования Δt_{opt} для практического использования.

Интересной перспективой развития полученных в данной работе результатов представляется качественное и численное изучение уравнения (13). Это новое нелинейное уравнение в частных производных типа Блэка – Шоулса, которое учитывает нехватку ликвидности в LOB.

Возможно, с практической точки зрения, когда необходимо оценить максимально возможные издержки на неликвидность, стоит использовать линейную аппроксимацию функции стоимости ликвидности. С другой стороны, есть много работ, посвященных вопросу оптимального исполнения ордеров. Эти работы направлены на разработку алгоритмов выполнения крупных ордеров с наименьшим влиянием на цену и наименьшей стоимостью ликвидности. Очевидно, что использование таких алгоритмов на практике позволяет избежать потери ликвидности в LOB. В этом случае, как правило, трейдер дробит крупный ордер и покупает или продает за один раз только небольшое количество базового актива. Тем не менее, если по каким-либо причинам использовать алгоритм невозможно, будет полезна оценка влияния стоимости ликвидности, полученная в данной работе.

References

1. Agliardi R., GenÇay R. 2014. Hedging through a limit order book with varying liquidity. *The Journal of Derivatives*, 22(2):32–49. DOI:10.3905/jod.2014.22.2.032.
2. Alfonsi A., Fruth A., Schied A. 2010. Optimal execution strategies in limit order books with general shape functions. *Quantitative Finance*, 10(2):143–157. DOI:10.1080/14697680802595700.
3. Almgren R., Chriss N. 2001. Optimal execution of portfolio transactions. *Journal of Risk*, 3(2):5–39. DOI:10.21314/JOR.2001.041.
4. Almgren R., Li T. M. 2016. Option hedging with smooth market impact. *Mark. Microstructure Liq.*, 02(01):1650002. DOI:10.1142/s2382626616500027.
5. Ankudinova J., Ehrhardt M. 2008. On the numerical solution of nonlinear Black-Scholes equations. *Computers & Mathematics with Applications*, 56(3):799–812. DOI:10.1016/j.camwa.2008.02.005.
6. Avellaneda M., Parás A. 1994. Dynamic hedging portfolios for derivative securities in the presence of large transaction costs. *Applied Mathematical Finance*, 1(2):165–194. DOI:10.1080/1350486940000010.
7. Bank P., Soner H. M., Voß, M. 2017. Hedging with temporary price impact. *Mathematics and Financial Economics*, 11(2):215–239. DOI:10.1007/s11579-016-0178-4.

8. Barles G., Soner H. M. 1998. Option pricing with transaction costs and a nonlinear Black – Scholes equation. *Finance and Stochastics*, 2(4):369–397. DOI:10.1007/s007800050046.
9. Bertsimas D., Lo A. W. 1998. Optimal control of execution costs. *Journal of Financial Markets*, 1(1):1–50. DOI:10.1016/S1386-4181(97)00012-8.
10. Biais B., Glosten L., Spatt C. 2005. Market microstructure: A survey of microfoundations empirical results policy implications. *Journal of Financial Markets*, 8(2):217–264. DOI:10.1016/j.finmar.2004.11.001.
11. Black F., Scholes M. 1973. The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, 81(3):637–654. DOI:10.1086/260062.
12. Bouchard B., Loeper G., Zou Y. 2017. Hedging of covered options with linear market impact and gamma constraint. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 55(5):3319–3348. DOI:10.1137/15M1054109.
13. Cai J., Fukasawa M., Rosenbaum M., Tankov P. 2016. Optimal discretization of hedging strategies with directional views. *SIAM Journal on Financial Mathematics*, 7(1):34–69. DOI:10.1137/151004306.
14. Cartea A., Gan L., Jaimungal S. 2019. Hedge and speculate: replicating option payoffs with limit and market orders. *SIAM Journal on Financial Mathematics*, 10(3):790–814. DOI:10.1137/18M1192706.
15. Cartea Á., Jaimungal S. 2015. Optimal execution with limit and market orders. *Quantitative Finance*, 15(8):1279–1291. DOI:10.1080/14697688.2015.1032543.
16. Company R., Navarro E., Pintos J. R., Ponsoda E. 2008. Numerical solution of linear and nonlinear Black-Scholes option pricing equations. *Computers & Mathematics with Applications*, 56(3):813–821. DOI:10.1016/j.camwa.2008.02.010.
17. Davis M. H. A., Panas V. G., Zariphopoulou T. 1993. European option pricing with transaction costs. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 31(2):470–493. DOI:10.1137/0331022.
18. Dyshaev M. M. 2020. On measuring the cost of liquidity in the limit order book. *Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal*, 5(1):96–104. DOI:10.24411/2500-0101-2020-15107.
19. Dyshaev M. M., Fedorov V. E. 2019. Comparing of some sensitivities (Greeks) for nonlinear models of option pricing with market illiquidity. *Mathematical notes of NEFU*, 26(2):94–108. DOI:10.25587/SVFU.2019.102.31514.
20. Dyshaev M. M., Fedorov V. E. 2020. The optimal reheding interval for the options portfolio within the RAPM, taking into account transaction costs and liquidity costs. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series: Mathematics*, 31:3–17. DOI:10.26516/1997-7670.2020.31.3.
21. Frey R., Stremme A. 1997. Market volatility and feedback effects from dynamic hedging. *Mathematical Finance*, 7(4):351–374. DOI:10.1111/1467-9965.00036.
22. Gould M. D., Porter M. A., Williams S., McDonald M., Fenn D. J., Howison S. D. 2013. Limit order books. *Quantitative Finance*, 13(11):1709–1742. DOI:10.1080/14697688.2013.803148.
23. Guéant O. 2016. *The financial mathematics of market liquidity: from optimal execution to market making*. Chapman and Hall/CRC. DOI:10.1201/b21350.
24. Guéant O., Pu J. 2017. Option pricing and hedging with execution costs and market impact. *Mathematical Finance*, 27(3):803–831. DOI:10.1111/mafi.12102.
25. Harris L., Hasbrouck J. 1996. Market vs. limit orders: the SuperDOT evidence on order submission strategy. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 31(2):213–231. DOI:10.2307/2331180.
26. Heider P. 2010. Numerical methods for non-linear Black – Scholes equations. *Applied Mathematical Finance*, 17:59–81. DOI:10.1080/13504860903075670.
27. Jandačka M., Ševčovič, D. 2005. On the risk-adjusted pricing-methodology-based valuation of vanilla options and explanation of the volatility smile. *Journal of Applied Mathematics*, 2005(3):235–258. DOI:10.1155/JAM.2005.235.
28. Kabanov Y. M., Safarian M. M. 1997. On Leland’s strategy of option pricing with transactions costs. *Finance and Stochastics*, 1(3):239–250. DOI:10.1007/s007800050023.
29. Lehoczky J., Schervish M. 2018. Overview and history of statistics for equity markets. *Annual Review of Statistics and Its Application*, 5:265–288. DOI:10.1146/annurev-statistics-031017-100518.

30. Leland H. E. 1985. Option pricing and replication with transactions costs. *The Journal of Finance*, 40(5):1283–1301. DOI:10.1111/j.1540-6261.1985.tb02383.x.
31. Malo P., Pennanen T. 2012. Reduced form modeling of limit order markets. *Quantitative Finance*, 12(7):1025–1036. DOI:10.1080/14697688.2011.589402.
32. McAleer M., Medeiros M. C. 2008. Realized volatility: A review. *Econometric Reviews*, 27(1-3):10–45. DOI:10.1080/07474930701853509.
33. Moscow Exchange. Search by contracts 2020. Accessed Nov 2020. URL:<https://www.moex.com/en/derivatives/contracts.aspx?p=act>.
34. Obizhaeva A. A., Wang J. 2013. Optimal trading strategy and supply/demand dynamics. *Journal of Financial Markets*, 16(1):1–32. DOI:10.1016/j.finmar.2012.09.001.
35. Rinaldo A. 2004. Order aggressiveness in limit order book markets. *Journal of Financial Markets*, 7(1):53–74. DOI:10.1016/S1386-4181(02)00069-1.
36. Rogers L. C. G., Singh S. 2010. The cost of illiquidity and its effects on hedging. *Mathematical Finance*, 20(4):597–615. DOI:10.1111/j.1467-9965.2010.00413.x.
37. Schönbucher P. J., Wilmott P. 2000. The feedback effect of hedging in illiquid markets. *SIAM J. Appl. Math.*, 61(1):232–272. DOI:10.1137/S0036139996308534.
38. Sepp A. 2013. When you hedge discretely: optimization of sharpe ratio for delta-hedging strategy under discrete hedging and transaction costs. *Journal of Investment Strategies*, 3(1):19–59. DOI:10.2139/ssrn.1865998.
39. Sircar R. K., Papanicolaou G. 1998. General Black-Scholes models accounting for increased market volatility from hedging strategies. *Appl. Math. Finance*, 5(1):45–82. DOI:10.1080/135048698334727.
40. Tarasov V. E. 2020. Fractional econophysics: market price dynamics with memory effects. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, p. 124865. DOI:10.1016/j.physa.2020.124865.
41. Whalley A. E., Wilmott P. 1997. An asymptotic analysis of an optimal hedging model for option pricing with transaction costs. *Mathematical Finance*, 7(3):307–324. DOI:10.1111/1467-9965.00034.
42. Zakamouline V. I. 2006. Efficient analytic approximation of the optimal hedging strategy for a European call option with transaction costs. *Quantitative Finance*, 6(5):435–445. DOI:10.1080/14697680600724809.

Получена 17.05.2021


Дышаев Михаил Михайлович – кандидат физико-математических наук, Челябинский государственный университет

 <http://orcid.org/0000-0003-4265-1752>

ул. Бр. Кашириных, 129, Челябинск, 454001, Россия

E-mail: Mikhail.Dyshaev@gmail.com

Федоров Владимир Евгеньевич – доктор физико-математических наук, профессор, Челябинский государственный университет

 <http://orcid.org/0000-0002-0787-3272>

ул. Бр. Кашириных, 129, Челябинск, 454001, Россия

E-mail: kar@csu.ru

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАВИСИМОСТИ УРОВНЯ ПЕРВИЧНОЙ
ЗАБОЛЕВАЕМОСТИ АЛКОГОЛИЗМОМ, НАРКОМАНИЕЙ И ТОКСИКОМАНИЕЙ ОТ
СОЦИАЛЬНО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ**

С. Н. Тростянский, А. С. Тростянский

(Статья представлена членом редакционной коллегии В. В. Меньших)

ВУНЦ ВВС «Военно-воздушная академия им. проф. Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина»,
Воронеж, 394064, Россия;
Воронежский государственный университет,
Воронеж, 394018, Россия

E-mail: trostyansky2012@yandex.ru, trostalx@gmail.ru

Аннотация. Разработана математическая модель, определяющая зависимость первичной заболеваемости алкоголизмом, наркоманией и токсикоманией от статистически регистрируемых показателей уровня жизни населения и цены соответствующих психоактивных веществ. Результаты предложенной математической модели корректно согласуются с расчетами на основе модели авторегрессии с панельными данными по регионам России с 2006 по 2018 годы.

Ключевые слова: математическое моделирование, уровень заболеваемости, алкоголизм, статистический анализ панельных данных.

Для цитирования: Тростянский С. Н., Тростянский А. С. 2021. Математическое моделирование зависимости уровня первичной заболеваемости алкоголизмом, наркоманией и токсикоманией от социально-экономических показателей. Прикладная математика & Физика, 53(2): 144–158.

DOI 10.52575/2687-0959-2021-53-2-144-158.

**MATHEMATICAL MODELING OF DEPENDENCE OF THE PRIMARY MORBIDITY
LEVEL-ALCOHOLISM, DRUG ADDICTION, TOXICOMANIA – ON SOCIAL AND ECONOMIC
INDICES**

Sergey Trostyansky, Alexander Trostyansky

(Article submitted by a member of the editorial board V. V. Menshikh)

Military educational-scientific center of air forces (VUNC VVS) «Air-force academy named after Prof. N. E. Zhukovsky and Yu. A. Gagarin»,
Voronezh, 394064, Russia;
Voronezh State University,
Voronezh, 394018, Russia

E-mail: trostyansky2012@yandex.ru, trostalx@gmail.ru

Received May, 15, 2021

Abstract. Mathematical model determining dependence of the primary morbidity to the alcohol addiction, drug addiction and toxicomania on statistically registered indices concerned to the living standards of population and the price of corresponding psychoactive substances is developed in the work. Results of the proposed mathematical model are in a reasonable agreement with the calculations basing on autoregressive model for the panel data over the regions of Russia from 2006 to 2018 years.

Key words: mathematical modeling, morbidity level, alcoholism, statistical analysis of the panel data.

For citation: Trostyansky S., Trostyansky A. 2021. Mathematical modeling of dependence of the primary morbidity level-alcoholism, drug addiction, toxicomania – on social and economic indices. Applied Mathematics & Physics, 53(2): 144–158. (in Russian) DOI 10.52575/2687-0959-2021-53-2-144-158.

1. Введение. Алкоголизм, наркомания и токсикомания являются социально значимыми заболеваниями населения, обуславливающими значительный ущерб как конкретным людям и их семьям, так и всему обществу и государству. В связи с этим возникает необходимость государственного вмешательства в процессы, влияющие на уровень алкоголизма, наркомании и токсикомании среди населения страны, с целью прогнозирования их динамики и возможности управляющих воздействий для минимизации этих негативных явлений. Соответственно, актуально построение теоретической модели,

описывающей зависимость уровня этих социально значимых заболеваний, определяемых поведением людей по отношению к рискам приобретения этих заболеваний, в зависимости от статистически регистрируемых социально-экономических показателей.

2. Теоретическая модель. В настоящее время в качестве моделей потребления алкоголя и других психоактивных веществ известны экономические модели рационального привыкания (аддиктивности) [10, 11, 12], описывающие зависимость спроса индивида на аддиктивный продукт от дохода индивида в различные периоды времени и от цены аддиктивного продукта. Однако проблема моделирования зависимости уровня заболеваемости населения алкоголизмом, наркоманией и токсикоманией от социально-экономических факторов остается открытой и требует решения. Согласно данным официальной статистики Министерства здравоохранения Российской Федерации (РФ) за период с 2006 по 2018 годы по регионам РФ, зарегистрированный уровень общей заболеваемости от общего числа населения для алкоголизма в среднем составлял 1,5 % и не превышал 2%, для наркомании в среднем составлял 0,2 % и не превышал 0,7 %, для токсикомании в среднем составлял 0,008 % и не превышал 0,035%. Поэтому для этих типов социально значимых заболеваний уровень первичной заболеваемости в регионе за год можно с достаточной точностью оценивать количеством впервые заболевших на 10^5 человек от всего населения. Уровень Z_i первичной заболеваемости i типа за год, определяемой количеством впервые заболевших на 10^5 человек, связан с вероятностью p_i приобретения заболевания соотношением:

$$Z_i = p_i \cdot 10^5, \quad (1)$$

где индекс i соответствует следующим типам заболеваемости: 1 – алкоголизм, 2 – наркомания, 3 – токсикомания.

При этом уровень Z_i первичной заболеваемости i типа, обусловленной социальным поведением людей, должен находиться в пропорциональной зависимости от доли D_i населения, нарушающей нормы социального поведения (НСП), с риском приобретения соответствующего заболевания типа i :

$$Z_i = k_i \cdot D_i, \quad (2)$$

где k_i – коэффициент пропорциональности. Следовательно, имеет место соотношение:

$$p_i = k_i \cdot 10^5 \cdot D_i. \quad (3)$$

Для анализа вероятности нарушений индивидом норм социального поведения можно использовать модель рационального правонарушителя [9]. Из этой модели следует, что нарушения НСП, приводящие к заболеванию i типа, происходят только тогда, когда предполагаемая дополнительная полезность v от нарушений НСП превышает предполагаемые убытки u , в случае приобретения индивидом заболевания i типа. При этом должно выполняться неравенство:

$$(1 - p_i) \cdot v > p_i \cdot u, \quad (4)$$

где p_i – вероятность заболевания i типа для индивида при нарушении НСП. Рассмотрим применение модели рационального нарушителя НСП к социально значимым заболеваниям на примере алкоголизма. Соответственно, индекс $i = 1$ при переменных, фигурирующих в предлагаемой математической модели, будем опускать. При оценке вероятности p заболевания алкоголизмом, на основе гипотезы рационального нарушителя НСП, учитывается, что индивид может рассматривать как дополнительную полезность v , разность между стоимостью покупки за год объема C этанола по потребительской цене S_p за единицу объема (литр), которую индивид готов заплатить за этанол, и фактической стоимостью приобретенного объема C этанола по фактической цене S за единицу объема, то есть:

$$v = (S_p - S) \cdot C = \Delta S \cdot C, \quad (5)$$

где будем считать, что:

$$\Delta S = S_p - S \approx \text{const}, \quad (6)$$

а возможный для приобретения годовой объем C этанола ограничивается стоимостью располагаемого годового дохода I_r индивида:

$$I_r = r \cdot I = r \cdot 12 \cdot M, \quad (7)$$

где I – средний годовой доход индивида; r – средний коэффициент остающегося (располагаемого) дохода индивида после обязательных платежей и взносов; M – средний доход индивида за месяц.

Для оценки вида функции распределения покупаемого населением в t году объема C_t этанола, запишем модель спроса на аддиктивный продукт, полученную из модели рациональной аддиктивности [12]:

$$C_t = a_0 + a_1 \cdot C_{t-1} + a_2 \cdot I_t + a_3 \cdot S_t + \varepsilon_t, \quad (8)$$

где C_t – объем потребления этанола индивидом в t году; C_{t-1} – объем потребления этанола индивидом в $t - 1$ году; I_t – доходы индивида в t году; S_t – цена литра этанола в t году; a_j – коэффициенты при объясняющих переменных, a_0 – константа, ε_t – ошибка модели. При этом из модели [12] следует, что коэффициенты:

$$a_2 > 0, a_3 < 0. \quad (9)$$

Вид функции распределения для C_t в году t не изменится, если при некоторых предшествующих экономических условиях в $t - 1$ году имело место $C_{t-1} = 0$. В этом случае из модели [12] следует зависимость:

$$C_t = a_0 + a_2 \cdot I_t + a_3 \cdot S_t + \varepsilon_t. \quad (10)$$

Представим зависимость (10) в виде:

$$C_t = q \cdot r \cdot I_t - w \cdot S_t - c + \varepsilon_t, \quad (11)$$

где: $q \cdot r = a_2$, $w = -a_3$, $c = -a_0$, тогда соответственно из (9) коэффициенты: $q > 0$, $w > 0$. При этом дополнительную полезность можно оценить соотношением:

$$v = \Delta S \cdot C = \Delta S \cdot [q \cdot I_r - w \cdot S - c] = \Delta S \cdot [12 \cdot q \cdot r \cdot M - w \cdot S - c]. \quad (12)$$

Запишем выражение (12) для дополнительной полезности в следующем виде:

$$v = b - f, \quad (13)$$

где:

$$b = \Delta S \cdot q \cdot r \cdot I = \Delta S \cdot 12 \cdot q \cdot r \cdot M, \quad (14)$$

$$f = \Delta S \cdot [w \cdot S + c]. \quad (15)$$

Для оценки вида функции распределения величины годовых убытков u индивидов от заболевания алкоголизмом среди населения, можно определить зависимость величины u от годового I или месячного M дохода индивида, соотношением:

$$u = g \cdot I_r = g \cdot r \cdot I = 12 \cdot g \cdot r \cdot M, \quad (16)$$

где u – убытки от потери индивидом доли g своего прежнего располагаемого дохода I_r за год, обусловленные потерей работоспособности или места работы при заболевании алкоголизмом. С учетом (13), условие (4) для рациональности нарушения индивидом НСП принимает вид:

$$(1 - p)(b - f) > p \cdot u. \quad (17)$$

Из результатов работ [4], [5] следует, что логарифм величины доходов населения M имеет нормальную плотность распределения. Тогда из соотношения (16) следует, что и функция распределения натурального логарифма величины u годовых убытков населения от заболевания алкоголизмом также описывается функцией плотности нормального распределения:

$$\rho_{N(\ln(\mu), \sigma_{\ln(u)}^2)}(\ln(u)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\ln(u)}u} \exp\left(-\frac{[\ln(u) - \ln(\mu)]^2}{2\sigma_{\ln(u)}^2}\right), \quad (18)$$

где $\rho_{N(\ln(\mu), \sigma_{\ln(u)}^2)}(\ln(u))$ – функция плотности нормального распределения натурального логарифма величины годовых убытков u населения от заболевания алкоголизмом, μ – медианное значение для распределения величины годовых убытков населения от заболевания алкоголизмом, $\sigma_{\ln(u)}^2$ – дисперсия нормального распределения натурального логарифма величины годовых убытков населения от заболевания алкоголизмом. На основании работы [4], [5] и соотношения (14) следует, что распределение натурального логарифма величины b , связанной с дополнительной годовой полезностью от приобретения этанола, описывается функцией плотности нормального распределения $\rho_{N(\ln(\eta), \sigma_{\ln(b)}^2)}(\ln(b))$: плотности распределения:

$$\rho_{N(\ln(\eta), \sigma_{\ln(b)}^2)}(\ln(b)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\ln(b)}b} \exp\left(-\frac{[\ln(b) - \ln(\eta)]^2}{2\sigma_{\ln(b)}^2}\right), \quad (19)$$

где η – медианное значение для распределения величины b , $\sigma_{\ln(b)}^2$ – дисперсия нормального распределения натурального логарифма величины b .

С учетом (17), (18), (19) при стационарности социально-экономических факторов, долю населения D , готовую ради прибыли $v = b - f$ рискнуть заболеть алкоголизмом, можно определить выражением:

$$D = \int_{\ln(f)}^{\infty} \rho_{N(\ln(\eta), \sigma_{\ln(b)}^2)}(\ln(b)) \int_{-\infty}^{\ln\left(\frac{(1-p)}{p}(b-f)\right)} \rho_{N(\ln(\mu), \sigma_{\ln(u)}^2)}(\ln(u)) d \ln(u) d \ln(b) \quad (20)$$

где f – определяется соотношением (15) и является параметром, связанным с влиянием фактической цены S одного литра этанола на среднее годовое потребление этанола жителями региона.

Для определения динамики изменения доли D нарушителей НСП, при изменении социально-экономических показателей: $\ln(\mu)$, $\sigma_{\ln(u)}$, f , найдем знаки производных: $\frac{dD}{d \ln(\mu)}$, $\frac{dD}{d \sigma_{\ln(u)}}$, $\frac{dD}{df}$.

При вычислении производной $\frac{dD}{d \ln(\mu)}$, воспользуемся соотношением:

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_{N(\ln(\mu), \sigma^2 \ln(u))}}{d \ln(\mu)} &= -\frac{2(\ln(u) - \ln(\mu))}{2\sigma_{\ln(u)}^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\ln(u)}} \exp\left(-\frac{(\ln(u) - \ln(\mu))^2}{2\sigma_{\ln(u)}^2}\right) = \\ &= -\frac{d\rho_{N(\ln(\mu), \sigma^2 \ln(u))}}{d \ln(u)}. \end{aligned} \quad (21)$$

На основании (21) запишем:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d \ln(\mu)} \int_{-\infty}^{\ln\left(\frac{(1-p)}{p}(b-f)\right)} \rho_{N(\ln(\eta), \sigma_{\ln(b)}^2)}(u) d \ln(u) &= -\frac{d}{d \ln(u)} \int_{-\infty}^{\ln\left(\frac{(1-p)}{p}(b-f)\right)} \rho_{N(\ln(\eta), \sigma_{\ln(b)}^2)}(u) d \ln(u) = \\ &= -\rho_{N(\ln(\mu), \sigma_{\ln(u)}^2)}\left(\ln\left(\frac{1-p}{p}(b-f)\right)\right). \end{aligned} \quad (22)$$

Из формул (20) и (22) следует:

$$\begin{aligned} \frac{dD}{d \ln(\mu)} &= -\int_{\ln(f)}^{\infty} \rho_{N(\ln(\mu), \sigma_{\ln(u)}^2)}\left(\ln\left(\frac{(1-p)}{p}(b-f)\right)\right) \rho_{N(\ln(\eta), \sigma_{\ln(b)}^2)}(\ln(b)) d \ln(b) = \\ &= -\int_{\ln(f)}^{\infty} \frac{(b-f)}{b} \frac{\exp\left(-\frac{[\ln(b)-\ln(\eta)]^2}{2\sigma_{\ln(b)}^2}\right)}{\exp\left(-\frac{[\ln(b-f)-\ln(\eta-f)]^2}{2\sigma_{\ln(b)}^2}\right)} \times \\ &\times \frac{1}{(b-f)} \rho_{N(\ln(\mu), \sigma_{\ln(u)}^2)}\left(\ln\left(\frac{(1-p)}{p}(b-f)\right)\right) \rho_{N(\ln(\eta-f), \sigma_{\ln(b)}^2)}(\ln(b-f)) db. \end{aligned} \quad (23)$$

Произведя замену переменной: $t = b - f$ и учитывая: $b = t + f$, получим выражение:

$$\frac{dD}{d \ln(\mu)} = -\int_0^{\infty} \frac{t}{(t+f)} \frac{\exp\left(-\frac{[\ln(t+f)-\ln(\eta)]^2}{2\sigma_{\ln(b)}^2}\right)}{\exp\left(-\frac{[\ln(t)-\ln(\eta-f)]^2}{2\sigma_{\ln(b)}^2}\right)} \frac{1}{t} \rho_{N(\ln(\mu), \sigma_{\ln(u)}^2)}\left(\ln\left(\frac{(1-p)}{p}t\right)\right) \rho_{N(\ln(\eta-f), \sigma_{\ln(b)}^2)}(\ln(t)) dt. \quad (24)$$

Выражение под интегралом в (24) можно представить произведением функции

$$\varphi(t) = \frac{t}{(t+f)} \frac{\exp\left(-\frac{[\ln(t+f)-\ln(\eta)]^2}{2\sigma_{\ln(b)}^2}\right)}{\exp\left(-\frac{[\ln(t)-\ln(\eta-f)]^2}{2\sigma_{\ln(b)}^2}\right)},$$

которая монотонно растет при увеличении t , и функции

$$g(t) = \frac{1}{t} \rho_{N(\ln(\mu), \sigma_{\ln(u)}^2)}\left(\ln\left(\frac{(1-p)}{p}t\right)\right) \rho_{N(\ln(\eta-f), \sigma_{\ln(b)}^2)}(\ln(t)),$$

являющейся интегрируемой на интервале $[0, \infty]$, поэтому к интегралу (24) применима вторая теорема о среднем [6]:

$$\begin{aligned} \frac{dD}{d \ln(\mu)} &= -\int_0^{\infty} \varphi(t)g(t)dt = -\varphi(\infty) \int_{\varepsilon}^{\infty} g(t)dt = \\ &= -\int_{\ln(\varepsilon)}^{\infty} \rho_{N(\ln(\mu), \sigma_{\ln(u)}^2)}\left(\ln\left(\frac{1-p}{p}t\right)\right) \rho_{N(\ln(\eta-f), \sigma_{\ln(b)}^2)}(\ln(t)) d \ln(t) = \end{aligned}$$

$$- \int_{\ln(\varepsilon)}^{\infty} \rho_{N(\ln(\frac{\mu p}{1-p}), \sigma_{\ln(u)}^2)}(\ln t) \rho_{N(\ln(\eta-f), \sigma_{\ln(b)}^2)}(\ln(t)) d \ln(t), \quad (25)$$

где $0 \leq \varepsilon \leq \infty$.

Используем лемму из работы [1]:

$$\rho_{N(m_2, \sigma_2^2)}(s \cdot y + l \cdot x) \rho_{N(m_1, \sigma_1^2)}(y) = \rho_{N(m_2-s \cdot m_1, \sigma_2^2+s^2 \sigma_1^2)}(0) \rho_{N(M, \sigma^2)}(y), \quad (26)$$

где:

$$M = \frac{m_1 \sigma_2^2 - s(l \cdot x - m_2) \sigma_1^2}{\sigma_2^2 + s^2 \sigma_1^2}; \quad \sigma^2 = \frac{\sigma_1^2 \sigma_2^2}{\sigma_2^2 + s^2 \sigma_1^2}.$$

В выражении (25) произведение:

$$\rho_{N(\ln(\frac{\mu p}{1-p}), \sigma_{\ln(u)}^2)}(\ln t) \cdot \rho_{N(\ln(\eta-f), \sigma_{\ln(b)}^2)}(\ln(t)) d \ln(t)$$

аналогично (26) при подстановке:

$$y = \ln(t); \quad s = 1; \quad l = 0; \quad m_1 = \ln(\eta - f); \quad m_2 = \ln \frac{\mu p}{1-p}; \quad \sigma_1 = \sigma_b; \quad \sigma_2 = \sigma_u. \quad (27)$$

Тогда, на основании формул (25)–(27) следует соотношение:

$$\begin{aligned} \frac{dD}{d \ln(\mu)} &= -\rho_{N(\ln \frac{\mu p}{(1-p)(\eta-f)}, \sigma_u^2 + \sigma_b^2)}(0) \times \\ &\times \int_{\ln(\varepsilon)}^{\infty} \rho_{N(\frac{\ln(\eta-f)\sigma_u^2 + \ln \frac{\mu p}{1-p} \sigma_b^2}{\sigma_u^2 + \sigma_b^2}, \frac{\sigma_b^2 \sigma_u^2}{\sigma_u^2 + \sigma_b^2})}(\ln(t)) d \ln(t) = \\ &= -\rho_{N(\ln \frac{\mu p}{(1-p)(\eta-f)}, \sigma_u^2 + \sigma_b^2)}(0) \left[\frac{1}{2} - \Phi \left[\frac{\ln \frac{\varepsilon}{\eta-f} \sigma_u^2 + \ln \frac{\varepsilon(1-p)}{\mu p} \sigma_b^2}{\sigma_b \sigma_u \sqrt{\sigma_u^2 + \sigma_b^2}} \right] \right] \leq 0, \end{aligned} \quad (28)$$

т. к. модуль функции Лапласа $\left| \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy \right| \leq \frac{1}{2}$ [2].

Отсюда получаем соотношение:

$$\begin{aligned} \frac{dD}{d\mu} &= \frac{dD}{d \ln(\mu)} \cdot \frac{d \ln(\mu)}{d\mu} = -k \rho_{N(\ln \frac{\mu p}{(1-p)(\eta-f)}, \sigma_u^2 + \sigma_b^2)}(0) \times \\ &\times \left[\frac{1}{2} - \Phi \left[\frac{\ln \frac{\varepsilon}{\eta-f} \sigma_u^2 + \ln \frac{\varepsilon(1-p)}{\mu p} \sigma_b^2}{\sigma_b \sigma_u \sqrt{\sigma_u^2 + \sigma_b^2}} \right] \right] \cdot \frac{1}{\mu} \leq 0. \end{aligned} \quad (29)$$

Из формул (29) и (3) следует:

$$\frac{dp}{d\mu} = -k \cdot 10^{-5} \cdot \rho_{N(\ln \frac{\mu p}{(1-p)(\eta-f)}, \sigma_u^2 + \sigma_b^2)}(0) \cdot \left[\frac{1}{2} - \Phi \left[\frac{\ln \frac{\varepsilon}{\eta-f} \sigma_u^2 + \ln \frac{\varepsilon(1-p)}{\mu p} \sigma_b^2}{\sigma_b \sigma_u \sqrt{\sigma_u^2 + \sigma_b^2}} \right] \right] \cdot \frac{1}{\mu} \leq 0. \quad (30)$$

Из соотношений (29) и (30) следует снижение среди населения региона доли D – нарушителей НСП и уменьшение вероятности p первичных заболеваний алкоголизмом, при увеличении μ – медианного значения в распределении величины годовых убытков u от потерь доходов населения при заболевании алкоголизмом.

Связь среднего u_{cp} и медианного μ значений убытков от заболеваний алкоголизмом определяется формулой [4]: $u_{cp} = \exp\left(\ln(\mu) + \frac{\sigma_{\ln(u)}^2}{2}\right)$ и следовательно: $\ln(\mu) = \ln(u_{cp}) - \frac{\sigma_{\ln(u)}^2}{2}$; тогда: $\frac{dZ}{d \ln(u_{cp})} = \frac{dZ}{d \ln(\mu)}$. $\frac{d \ln(\mu)}{d \ln(u_{cp})} = \frac{dZ}{d \ln(\mu)}$; и с учетом соотношений (2) и (28):

$$\frac{dZ}{du_{cp}} = \frac{dZ}{d \ln(u_{cp})} \cdot \frac{d \ln(u_{cp})}{du_{cp}} = \frac{1}{u_{cp}} \cdot \frac{dZ}{d \ln(\mu)} = \frac{1}{u_{cp}} \cdot k \cdot \frac{dD}{d \ln(\mu)} \leq 0. \quad (31)$$

Из формулы (16), для средних годовых убытков индивидов от заболеваний алкоголизмом, следует соотношение:

$$u_{cp} = g \cdot I_{cpr} = 12 \cdot g \cdot r \cdot M_{cp}, \quad (32)$$

где: u_{cp} – средние по региону годовые убытки от заболеваний алкоголизмом; M_{cp} – средние месячные доходы населения региона. Следовательно, с учетом (31):

$$\frac{dZ}{dM_{cp}} = \frac{dZ}{du_{cp}} \cdot \frac{du_{cp}}{dM_{cp}} = \frac{dZ}{du_{cp}} \cdot 12 \cdot g \cdot r \leq 0. \tag{33}$$

Таким образом, из соотношения (33) следует, что при увеличении средних легальных (среднедушевых) доходов M_{cp} населения региона уровень Z первичной заболеваемости алкоголизмом среди населения региона должен понижаться. Для исследования зависимости доли D нарушителей НСП от среднеквадратического отклонения σ_u убытков, найдем производную $\frac{dD}{d\sigma_u}$:

$$\frac{dD}{d\sigma_u} = \frac{d}{d\sigma_u} \int_{\ln(f)}^{\infty} \rho_{N(\ln(\eta), \sigma_\eta^2)}(\ln(b)) \int_{-\infty}^{\ln\left(\frac{1-p}{p}(b-f)\right)} \rho_{N(\ln(\mu), \sigma_u^2)}(\ln(u)) d\ln(u) d\ln(b). \tag{34}$$

Начнем с вычисления выражения:

$$\frac{d}{d\sigma_u} \int_{-\infty}^{\ln\left(\frac{1-p}{p}(b-f)\right)} \rho_{N(\ln(\mu), \sigma_u^2)}(\ln(u)) d\ln(u) = \int_{-\infty}^{\ln\left(\frac{1-p}{p}(b-f)\right)} \frac{d\rho_{N(\ln(\mu), \sigma_u^2)}(\ln(u))}{d\sigma_u} d\ln(u). \tag{35}$$

Продифференцируем функцию плотности нормального распределения по среднеквадратическому отклонению:

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_{N(\ln(\mu), \sigma_u^2)}(\ln(u))}{d\sigma_u} &= \frac{d}{d\sigma_u} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_u} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_u^2}(\ln(u) - \ln(\mu))^2\right) \right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \left(-\frac{1}{\sigma_u^2} + \frac{(\ln(u) - \ln(\mu))^2}{\sigma_u^3} \right) \cdot \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_u^2}(\ln(u) - \ln(\mu))^2\right) = \\ &= \frac{1}{\sigma_u} \cdot \left[1 - \frac{(\ln(u) - \ln(\mu))^2}{\sigma_u^2} \right] \rho_{N(\ln(\mu), \sigma_u^2)}(\ln(u)). \end{aligned} \tag{36}$$

При подстановке выражения (36) в (35) запишем:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\sigma_u} \int_{-\infty}^{\ln\left(\frac{1-p}{p}(b-f)\right)} \rho_{N(\ln(\mu), \sigma_u^2)}(\ln(u)) d\ln(u) &= \int_{-\infty}^{\ln\left(\frac{1-p}{p}(b-f)\right)} \frac{d\rho_{N(\ln(\mu), \sigma_u^2)}(\ln(u))}{d\sigma_u} d\ln(u) = \\ &= -\frac{1}{\sigma_u} \int_{-\infty}^{\ln\left(\frac{1-p}{p}(b-f)\right)} \left[1 - \frac{(\ln(u) - \ln(\mu))^2}{\sigma_u^2} \right] \rho_{N(\ln(\mu), \sigma_u^2)}(\ln(u)) d\ln(u) = \\ &= -\frac{1}{\sigma_u} \left[\int_{-\infty}^{\ln\left(\frac{1-p}{p}(b-f)\right)} \rho_{N(\ln(\mu), \sigma_u^2)}(\ln(u)) d\ln(u) - \int_{-\infty}^{\ln\left(\frac{1-p}{p}(b-f)\right)} \left[\frac{(\ln(u) - \ln(\mu))^2}{\sigma_u^2} \right] \rho_{N(\ln(\mu), \sigma_u^2)}(\ln(u)) d\ln(u) \right] \end{aligned} \tag{37}$$

Для входящего в формулу (37) интеграла получим:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\ln\left(\frac{1-p}{p}(b-f)\right)} \left[\frac{(\ln(u) - \ln(\mu))^2}{\sigma_u^2} \right] \rho_{N(\ln(\mu), \sigma_u^2)}(\ln(u)) d\ln(u) &= \\ &= \int_{-\infty}^{\ln\left(\frac{1-p}{p}(b-f)\right)} (\ln(u) - \ln(\mu)) \rho_{N(\ln(\mu), \sigma_u^2)}(\ln(u)) d\ln(u) = \\ &= -\left(\ln\left(\frac{1-p}{p}(b-f)\right) - \ln(\mu) \right) \rho_{N(\ln(\mu), \sigma_u^2)} \ln\left(\frac{1-p}{p}(b-f)\right) + \\ &+ \int_{-\infty}^{\ln\left(\frac{1-p}{p}(b-f)\right)} \rho_{N(\ln(\mu), \sigma_u^2)}(\ln(u)) d\ln(u). \end{aligned} \tag{38}$$

При подстановке (38) в (37) имеем выражение:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\sigma_u} \int_{-\infty}^{\ln\left(\frac{1-p}{p}(b-f)\right)} \rho_{N(\ln(\mu), \sigma_u^2)}(\ln(u)) d\ln(u) &= \\ &= -\frac{1}{\sigma_u} \left(\ln\left(\frac{1-p}{p}(b-f)\right) - \ln(\mu) \right) \rho_{N(\ln(\mu), \sigma_u^2)} \ln\left(\frac{1-p}{p}(b-f)\right). \end{aligned} \tag{39}$$

При подстановке выражения (39) в (34) получаем:

$$\begin{aligned} \frac{dD}{d\sigma_u} &= -\frac{1}{\sigma_u} \int_{\ln(f)}^{\infty} \left(\ln \left(\frac{1-p}{p} (b-f) \right) - \ln(\mu) \right) \times \\ &\quad \times \rho_{N(\ln(\mu), \sigma_u^2)} \ln \left(\frac{1-p}{p} (b-f) \right) \rho_{N(\ln(\eta), \sigma_\eta^2)} (\ln(b)) d \ln(b) = \\ &= -\frac{1}{\sigma_u} \int_{\ln(f)}^{\infty} \left(\ln \left(\frac{1-p}{p} (b-f) \right) - \ln(\mu) \right) \rho_{N(\ln \frac{\mu p}{1-p}, \sigma_u^2)} (\ln(b-f)) \rho_{N(\ln(\eta), \sigma_\eta^2)} (\ln(b)) d \ln(b) = \\ &= -\int_f^{\infty} \frac{\left[\ln \left[\frac{1-p}{p} (b-f) \right] - \ln(\mu) \right]}{\sigma_u b} \rho_{N(\ln \frac{\mu p}{1-p}, \sigma_u^2)} (\ln(b-f)) \rho_{N(\ln(\eta), \sigma_\eta^2)} (\ln(b)) db. \end{aligned} \tag{40}$$

Произведя замену переменных: $t = b - f$ и учитывая: $b = t + f$, получим выражение:

$$\begin{aligned} \frac{dD}{d\sigma_u} &= -\frac{1}{\sigma_u} \int_0^{\infty} \frac{t}{(t+f)} \frac{\exp \left[-\frac{[\ln(t+f) - \ln(\eta)]^2}{2\sigma_b^2} \right]}{\exp \left[-\frac{[\ln(t) - \ln(\eta-f)]^2}{2\sigma_b^2} \right]} \times \\ &\quad \times \frac{1}{t} \left(\ln \frac{1-p}{p} t - \ln(\mu) \right) \rho_{N(\ln \frac{\mu p}{1-p}, \sigma_u^2)} (\ln(t)) \rho_{N(\ln(\eta-f), \sigma_b^2)} (\ln(t)) dt. \end{aligned} \tag{41}$$

Выражение под интегралом в (41) можно представить произведением функции

$$\varphi(t) = \frac{t}{t+f} \frac{\exp \left[-\frac{[\ln(t+f) - \ln(\eta)]^2}{2\sigma_b^2} \right]}{\exp \left[-\frac{[\ln(t) - \ln(\eta-f)]^2}{2\sigma_b^2} \right]},$$

которая монотонно растет при увеличении t , и функции

$$q(t) = \frac{1}{t} \left(\ln \frac{1-p}{p} t - \ln(\mu) \right) \rho_{N(\ln \frac{\mu p}{1-p}, \sigma_u^2)} (\ln(t)) \rho_{N(\ln(\eta-f), \sigma_b^2)} (\ln(t)),$$

являющейся интегрируемой на интервале $[0, \infty]$, поэтому к интегралу (41) применима вторая теорема о среднем [6]:

$$\begin{aligned} \frac{dD}{d\sigma_u} &= -\int_0^{\infty} \varphi(t) q(t) dt = -\varphi(\infty) \int_{\varepsilon}^{\infty} q(t) dt = \\ &= -\int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{1}{t} \left(\ln \frac{1-p}{p} t - \ln(\mu) \right) \rho_{N(\ln \frac{\mu p}{1-p}, \sigma_u^2)} (\ln(t)) \rho_{N(\ln(\eta-f), \sigma_b^2)} (\ln(t)) dt = \\ &= -\int_{\ln(\varepsilon)}^{\infty} \left(\ln \frac{1-p}{p} t - \ln(\mu) \right) \rho_{N(\ln \frac{\mu p}{1-p}, \sigma_u^2)} (\ln(t)) \rho_{N(\ln(\eta-f), \sigma_b^2)} (\ln(t)) d \ln(t), \end{aligned} \tag{42}$$

где $0 \leq \varepsilon \leq \infty$.

Применим к произведению функций $\rho_{N(\ln \frac{\mu p}{1-p}, \sigma_u^2)} (\ln(t)) \rho_{N(\ln(\eta-f), \sigma_b^2)} (\ln(t))$, которое входит в выражение (42) лемму из работы [1]. Тогда при подстановке в (42) соотношений (26) с учетом (27) получим выражение:

$$\begin{aligned} \frac{dD}{d\sigma_u} &= -\frac{1}{\sigma_u} \rho_{N(\ln \frac{\mu p}{(1-p)(\eta-f)}, \sigma_u^2 + \sigma_b^2)} (0) \times \\ &\quad \times \int_{\ln(\varepsilon)}^{\infty} \left(\ln \frac{1-p}{p} t - \ln(\mu) \right) \rho_{N\left(\frac{\ln(\eta-f) \sigma_u^2 + \ln \frac{\mu p}{1-p} \sigma_b^2}{\sigma_u^2 + \sigma_b^2}, \frac{\sigma_b^2 \sigma_u^2}{\sigma_u^2 + \sigma_b^2}\right)} (\ln(t)) d \ln(t) = \\ &= -\frac{1}{\sigma_u} \rho_{N(\ln \frac{\mu p}{(1-p)(\eta-f)}, \sigma_u^2 + \sigma_b^2)} (0) \left[\frac{\sigma_u^2}{(\sigma_u^2 + \sigma_b^2)} \ln \left[\frac{(1-p)(\eta-f)}{p\mu} \right] \right] \times \\ &\quad \times \left[\frac{1}{2} - \Phi \left[\frac{\ln \frac{\varepsilon}{\eta-f} \sigma_u^2 + \ln \frac{\varepsilon(1-p)}{\mu p} \sigma_b^2}{\sigma_b \sigma_u \sqrt{\sigma_u^2 + \sigma_b^2}} \right] \right] + \frac{\sigma_b^2 \sigma_u^2}{(\sigma_u^2 + \sigma_b^2)} \rho_{N\left(\frac{\ln(\eta-f) \sigma_u^2 + \ln \frac{\mu p}{1-p} \sigma_b^2}{\sigma_u^2 + \sigma_b^2}, \frac{\sigma_b^2 \sigma_u^2}{\sigma_u^2 + \sigma_b^2}\right)} (\ln \varepsilon). \end{aligned} \tag{43}$$

Рассмотрим условие, когда $\frac{dD}{d\sigma_u} = 0$. В этом случае

$$\begin{aligned} & \frac{\sigma_u^2}{(\sigma_u^2 + \sigma_b^2)} \ln \left[\frac{(1-p)(\eta-f)}{p\mu} \right] \cdot \left[\frac{1}{2} - \Phi \left[\frac{\ln \frac{\varepsilon}{\eta-f} \sigma_u^2 + \ln \frac{\varepsilon(1-p)}{\mu p} \sigma_b^2}{\sigma_b \sigma_u \sqrt{\sigma_u^2 + \sigma_b^2}} \right] \right] = \\ & = - \frac{\sigma_b^2 \sigma_u^2}{(\sigma_u^2 + \sigma_b^2)} \rho N_{\left(\frac{\ln(\eta-f)\sigma_u^2 + \ln \frac{\mu p}{1-p} \sigma_b^2}{\sigma_u^2 + \sigma_b^2}, \frac{\sigma_b^2 \sigma_u^2}{\sigma_u^2 + \sigma_b^2} \right)} (\ln \varepsilon); \\ & \ln \left[\frac{p\mu}{(1-p)(\eta-f)} \right] = \frac{\sigma_b^2 \cdot \rho N_{\left(\frac{\ln(\eta-f)\sigma_u^2 + \ln \frac{\mu p}{1-p} \sigma_b^2}{\sigma_u^2 + \sigma_b^2}, \frac{\sigma_b^2 \sigma_u^2}{\sigma_u^2 + \sigma_b^2} \right)} (\ln \varepsilon)}{\left[\frac{1}{2} - \Phi \left[\frac{\ln \frac{\varepsilon}{\eta-f} \sigma_u^2 + \ln \frac{\varepsilon(1-p)}{\mu p} \sigma_b^2}{\sigma_b \sigma_u \sqrt{\sigma_u^2 + \sigma_b^2}} \right] \right]}. \end{aligned}$$

Отсюда следует:

$$\frac{p\mu}{(1-p)(\eta-f)} = \exp \left[\frac{\sigma_b^2 \cdot \rho N_{\left(\frac{\ln(\eta-f)\sigma_u^2 + \ln \frac{\mu p}{1-p} \sigma_b^2}{\sigma_u^2 + \sigma_b^2}, \frac{\sigma_b^2 \sigma_u^2}{\sigma_u^2 + \sigma_b^2} \right)} (\ln \varepsilon)}{\left[\frac{1}{2} - \Phi \left[\frac{\ln \frac{\varepsilon}{\eta-f} \sigma_u^2 + \ln \frac{\varepsilon(1-p)}{\mu p} \sigma_b^2}{\sigma_b \sigma_u \sqrt{\sigma_u^2 + \sigma_b^2}} \right] \right]} \right]. \quad (44)$$

Множитель:

$$\exp \left[\frac{\sigma_b^2 \cdot \rho N_{\left(\frac{\ln(\eta-f)\sigma_u^2 + \ln \frac{\mu p}{1-p} \sigma_b^2}{\sigma_u^2 + \sigma_b^2}, \frac{\sigma_b^2 \sigma_u^2}{\sigma_u^2 + \sigma_b^2} \right)} (\ln \varepsilon)}{\left[\frac{1}{2} - \Phi \left[\frac{\ln \frac{\varepsilon}{\eta-f} \sigma_u^2 + \ln \frac{\varepsilon(1-p)}{\mu p} \sigma_b^2}{\sigma_b \sigma_u \sqrt{\sigma_u^2 + \sigma_b^2}} \right] \right]} \right] = d > 1. \quad (45)$$

Следовательно:

$$\frac{dD}{d\sigma_u} = 0, \quad \text{при условии} \quad p \cdot \mu = (1-p)(\eta-f) \cdot d, \quad (46)$$

$$\frac{dD}{d\sigma_u} > 0, \quad \text{при условии} \quad p \cdot \mu > (1-p)(\eta-f) \cdot d, \quad (47)$$

$$\frac{dD}{d\sigma_u} < 0, \quad \text{при условии} \quad p \cdot \mu < (1-p)(\eta-f) \cdot d. \quad (48)$$

Из соотношений (2) и (3) следует, что:

$$\frac{dZ}{d\sigma_u} = k \cdot \frac{dD}{d\sigma_u}; \quad (49)$$

$$\frac{dp}{d\sigma_u} = 10^{-5} \cdot k \cdot \frac{dD}{d\sigma_u}. \quad (50)$$

Из выражения для коэффициента Джини [3]:

$$J_u = \operatorname{erf} \left(\frac{\sigma_{\ln(u)}}{2} \right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^{\frac{\sigma_{\ln(u)}}{2}} \exp(-t^2) dt, \quad (51)$$

при использовании соотношения:

$$\frac{dZ}{d\sigma_{\ln(u)}} = \frac{dZ}{dJ_u} \cdot \frac{dJ_u}{d\sigma_{\ln(u)}} \quad (52)$$

получим:

$$\frac{dZ}{dJ_u} = \frac{dZ}{d\sigma_{\ln(u)}} \cdot \sqrt{\pi} \cdot \exp \left(-\frac{\sigma_{\ln(u)}^2}{4} \right). \quad (53)$$

Таким образом, $\frac{dZ}{dJ_u}$ имеет тот же знак, что и $\frac{dZ}{d\sigma_{\ln(u)}}$.

Из (46)–(50) и (53) следует, что:

$$\frac{dD}{d\sigma_{\ln(u)}} < 0, \quad \frac{dp}{d\sigma_{\ln(u)}} < 0, \quad \frac{dZ}{dJ_u} < 0, \quad \text{если} \quad p \cdot \mu < (1-p) \cdot (\eta-f) \cdot d; \quad (54)$$

$$\frac{dD}{d\sigma_{\ln(u)}} > 0, \quad \frac{dp}{d\sigma_{\ln(u)}} > 0, \quad \frac{dZ}{dJ_u} > 0, \quad \text{если} \quad p \cdot \mu > (1-p) \cdot (\eta-f) \cdot d; \quad (55)$$

$$\frac{dD}{d\sigma_{\ln(u)}} = 0, \quad \frac{dp}{d\sigma_{\ln(u)}} = 0, \quad \frac{dZ}{dJ_u} = 0, \quad \text{если } p \cdot \mu = (1-p) \cdot (\eta - f) \cdot d; \quad (56)$$

где μ – медианное значение годовых убытков от первичных заболеваний алкоголизмом; η – медианное значение в логнормальном распределении b из (14); f – определяется соотношением (15) и является параметром, связанным с влиянием фактической цены S одного литра этанола на среднее годовое потребление этанола.

Согласно [5], логарифм величины доходов населения M имеет нормальную плотность распределения. Тогда на основании (16) запишем соотношение для наиболее распространенных (модальных) убытков u_{mod} от первичных заболеваний алкоголизмом в регионе и модальных месячных доходов M_{mod} населения региона:

$$u_{mod} = 12 \cdot g \cdot r \cdot M_{mod}. \quad (57)$$

Тогда, из (32) и (57), с учетом [4], следует:

$$\sigma_{\ln(u)} = \sqrt{\frac{2}{3}(\ln(u_{cp}) - \ln(u_{mod}))} = \sqrt{\frac{2}{3}(\ln(M_{cp}) - \ln(M_{mod}))} = \sigma_{\ln(M)}. \quad (58)$$

Из выражения для коэффициента Джини [3]:

$$J_D = \operatorname{erf}\left(\frac{\sigma_{\ln(M)}}{2}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^{\frac{\ln(M)}{2}} \exp(-t^2) dt. \quad (59)$$

При использовании соотношения:

$$\frac{dZ}{d\sigma_{\ln(M)}} = \frac{dZ}{dJ_M} \cdot \frac{dJ_M}{d\sigma_{\ln(M)}} \quad (60)$$

получим:

$$\frac{dZ}{dJ_M} = \frac{dZ}{d\sigma_{\ln(M)}} \cdot \sqrt{\pi} \cdot \exp\left(-\frac{\sigma_{\ln(M)}^2}{4}\right). \quad (61)$$

Учитывая из (58), что: $\sigma_{\ln(u)} = \sigma_{\ln(M)}$, получим соотношение:

$$\frac{dZ}{dJ_M} = \frac{dZ}{d\sigma_{\ln(u)}} \cdot \sqrt{\pi} \cdot \exp\left(-\frac{\sigma_{\ln(M)}^2}{4}\right) = \frac{dZ}{dJ_u}, \quad (62)$$

тогда производная $\frac{dZ}{dJ_M}$ имеет тот же знак, что и $\frac{dZ}{dJ_u}$.

Из (54)–(56), (58) и (62) следует, что:

$$\frac{dZ}{dJ_M} < 0, \quad \text{если } p \cdot \mu < (1-p) \cdot (\eta - f) \cdot d; \quad (63)$$

$$\frac{dZ}{dJ_M} > 0, \quad \text{если } p \cdot \mu > (1-p) \cdot (\eta - f) \cdot d; \quad (64)$$

$$\frac{dZ}{dJ_M} = 0, \quad \text{если } p \cdot \mu = (1-p) \cdot (\eta - f) \cdot d. \quad (65)$$

При возникновении у индивида заболевания алкоголизмом, связанные с этим убытки от потери индивидуумом работоспособности или места работы, существенно превосходят выгоды от покупки этанола. Это соответствует выполнению условия (64) для зависимости уровня Z первичной заболеваемости алкоголизмом от коэффициента Джини для распределения месячных доходов населения. То есть с увеличением коэффициента Джини J_M уровень Z первичной заболеваемости алкоголизмом в регионе также должен увеличиваться. Проведем расчет производной $\frac{dD}{df}$. Для этого представим выражение для D в виде:

$$D = \int_0^\infty \rho_{N(\ln(\mu), \sigma_u^2)}(\ln(u)) \int_{\left(\ln \frac{p}{1-p} u + f\right)}^\infty \rho_{N(\ln(\eta), \sigma_b^2)}(\ln(b)) d \ln(b) d \ln(u). \quad (66)$$

Тогда:

$$\frac{dD}{df} = \frac{d}{df} \int_0^\infty \rho_{N(\ln(\mu), \sigma_u^2)}(\ln(u)) \int_{\left(\ln \frac{p}{1-p} u + f\right)}^\infty \rho_{N(\ln(\eta), \sigma_b^2)}(\ln(b)) d \ln(b) d \ln(u) =$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^\infty \rho_{N(\ln(\mu), \sigma_u^2)}(\ln(u)) \frac{d}{df} \int_{\left(\ln \frac{p}{1-p} u + f\right)}^\infty \rho_{N(\ln(\eta), \sigma_b^2)}(\ln(b)) d \ln(b) d \ln(u) = \\
 &= \int_0^\infty \rho_{N(\ln(\mu), \sigma_u^2)}(\ln(u)) \frac{d}{df} \left[1 - \int_{-\infty}^{\left(\ln \frac{p}{1-p} u + f\right)} \rho_{N(\ln(\eta), \sigma_b^2)}(\ln(b)) d \ln(b) \right] d \ln(u) = \\
 &= - \int_0^\infty \rho_{N(\ln(\mu), \sigma_u^2)}(\ln(u)) \frac{d}{df} \int_{-\infty}^{\left(\ln \frac{p}{1-p} u + f\right)} \rho_{N(\ln(\eta), \sigma_b^2)}(\ln(b)) d \ln(b) d \ln(u) = \\
 &= - \int_0^\infty \rho_{N(\ln(\mu), \sigma_u^2)}(\ln(u)) \frac{1}{\frac{p}{1-p} u + f} \rho_{N(\ln(\eta), \sigma_b^2)}\left(\ln\left(\frac{p}{1-p} u + f\right)\right) d \ln(u) = \\
 &= - \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_u u} \exp\left[-\frac{[\ln(u) - \ln(\mu)]^2}{2\sigma_u^2}\right] \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_b \frac{p}{1-p} \left[u + \frac{1-p}{p} f\right]} \times \\
 &\quad \times \exp\left[-\frac{\left[\ln\left[\frac{p}{1-p} \left[u + \frac{1-p}{p} f\right]\right] - \ln(\eta)\right]^2}{2\sigma_b^2}\right] du. \tag{67}
 \end{aligned}$$

Введем замену переменной $t = u + \frac{1-p}{p} f$. Тогда выражение (67) запишем в виде:

$$\begin{aligned}
 \frac{dD}{df} &= - \int_{\frac{1-p}{p} f}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_u \left[t - \frac{1-p}{p} f\right]} \exp\left[-\frac{\left[\ln\left[t - \frac{1-p}{p} f\right] - \ln(\mu)\right]^2}{2\sigma_u^2}\right] \times \\
 &\quad \times \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_b \frac{p}{1-p} t} \exp\left[-\frac{\left[\ln\left[\frac{p}{1-p} t - \ln(\eta)\right]\right]^2}{2\sigma_b^2}\right] dt \\
 &= - \int_{\frac{1-p}{p} f}^\infty \frac{1}{\left[t - \frac{1-p}{p} f\right]} \frac{\exp\left[-\frac{\left[\ln\left[t - \frac{1-p}{p} f\right] - \ln(\mu)\right]^2}{2\sigma_u^2}\right]}{\exp\left[-\frac{\left[\ln[t] - \ln\left(\mu + \frac{1-p}{p} f\right)\right]^2}{2\sigma_u^2}\right]} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_u} \exp\left[-\frac{\left[\ln[t] - \ln\left(\mu + \frac{1-p}{p} f\right)\right]^2}{2\sigma_u^2}\right] \times \\
 &\quad \times \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_b} \exp\left[-\frac{\left[\ln[t] - \ln\left(\frac{1-p}{p} \eta\right)\right]^2}{2\sigma_b^2}\right] dt. \tag{68}
 \end{aligned}$$

Выражение под интегралом в (68) можно представить произведением функций

$$\beta(t) = \frac{1}{\left[t - \frac{1-p}{p} f\right]} \frac{\exp\left[-\frac{\left[\ln\left[t - \frac{1-p}{p} f\right] - \ln(\mu)\right]^2}{2\sigma_u^2}\right]}{\exp\left[-\frac{\left[\ln[t] - \ln\left(\mu + \frac{1-p}{p} f\right)\right]^2}{2\sigma_u^2}\right]},$$

которая монотонно растет при увеличении t , и функции

$$\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_u} \exp\left[-\frac{\left[\ln[t] - \ln\left(\mu + \frac{1-p}{p} f\right)\right]^2}{2\sigma_u^2}\right] \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_b} \exp\left[-\frac{\left[\ln[t] - \ln\left(\frac{1-p}{p} \eta\right)\right]^2}{2\sigma_b^2}\right],$$

которая является интегрируемой на интервале $\frac{1-p}{p} f, \infty$, поэтому к интегралу (68) применима вторая теорема о среднем [6]:

$$\frac{dD}{df} = - \int_{\frac{1-p}{p} f}^\infty \beta(t) \psi(t) dt = -\beta\left(\frac{1-p}{p} f\right) \int_{\frac{1-p}{p} f}^{\frac{1-p}{p} f + \varepsilon} \psi(t) dt = - \exp\left[-\frac{\left[\ln\left[\frac{1-p}{p} f\right] - \ln\left(\mu + \frac{1-p}{p} f\right)\right]^2}{2\sigma_u^2}\right] \times$$

$$\begin{aligned} & \times \int_{\ln \frac{1-p}{p} f}^{\ln \frac{1-p}{p} f + \varepsilon} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_u} \exp \left[-\frac{\left[\ln[t] - \ln \left(\mu + \frac{1-p}{p} \right) \right]^2}{2\sigma_u^2} \right] \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_b} \exp \left[-\frac{\left[\ln[t] \ln \left(\frac{1-p}{p} \eta \right) \right]^2}{2\sigma_b^2} \right] d \ln(t) = \\ & = -\exp \left[\frac{\left[\ln \left[\frac{1-p}{p} f - \ln \left(\mu + \frac{1-p}{p} f \right) \right] \right]^2}{2\sigma_u^2} \right] \int_{\left[\ln \frac{1-p}{p} f \right]}^{\ln \frac{1-p}{p} f + \varepsilon} \rho \left[\ln \left(\mu + \frac{1-p}{p} f \right), \sigma_u^2 \right] (\ln(t)) \rho \left[\ln \frac{1-p}{p} \eta, \sigma_b^2 \right] (\ln(t)) d \ln(t), \quad (69) \end{aligned}$$

где $0 \leq \varepsilon \leq \infty$.

Применим к произведению функций $\rho \left[\ln \left(\mu + \frac{1-p}{p} f \right), \sigma_u^2 \right] (\ln(t)) \rho \left[\ln \frac{1-p}{p} \eta, \sigma_b^2 \right] (\ln(t))$ в формуле (69) лемму [1]. При этом произведем подстановку в выражение (69) соотношения (26), где

$$y = \ln(t); s = 1; l = 0; m_1 = \ln \frac{1-p}{p} \eta; m_2 = \ln \left(\mu + \frac{1-p}{p} f \right); \sigma_1 = \sigma_b; \sigma_2 = \sigma_u. \quad (70)$$

В результате получим следующее соотношение для производной $\frac{dD}{df}$:

$$\begin{aligned} \frac{dD}{df} &= -\exp \left[-\frac{\ln \left[1 + \frac{\mu}{\frac{1-p}{p} f} \right]^2}{2\sigma_u^2} \right] \rho \left[\ln \left(\mu + \frac{1-p}{p} f \right) - \ln \left(\frac{1-p}{p} \eta \right), \sigma_u^2 + \sigma_b^2 \right] (0) \times \\ & \times \int_{\ln \frac{1-p}{p} f}^{\ln \frac{1-p}{p} f + \varepsilon} \rho \left[\frac{\ln \left[\mu + \frac{1-p}{p} f \right] \sigma_b^2 + \ln \left[\frac{1-p}{p} \eta \right] \sigma_u^2}{\sigma_u^2 + \sigma_b^2}, \frac{\sigma_u \sigma_b^2}{\sigma_u^2 + \sigma_b^2} \right] (\ln(t)) d \ln(t) = \\ & = -\exp \left[-\frac{\ln \left[1 + \frac{\mu}{\frac{1-p}{p} f} \right]^2}{2\sigma_u^2} \right] \rho \left[\ln \left(\mu + \frac{1-p}{p} f \right) - \ln \frac{1-p}{p} \eta, \sigma_u^2 + \sigma_b^2 \right] (0) \times \\ & \times \left[\Phi \left[\frac{\ln \left[\frac{1-p}{p} f + \varepsilon \right] \sigma_b^2 + \ln \left[\frac{1-p}{p} \eta \right] \sigma_u^2}{\sigma_u \sigma_b \sqrt{\sigma_u^2 + \sigma_b^2}} \right] - \Phi \left[\frac{\ln \left[\frac{1-p}{p} f \right] \sigma_b^2 + \ln \left[\frac{1-p}{p} \eta \right] \sigma_u^2}{\sigma_u \sigma_b \sqrt{\sigma_u^2 + \sigma_b^2}} \right] \right]. \quad (71) \end{aligned}$$

Из (71) и (3) следует:

$$\begin{aligned} \frac{dp}{df} &= -k \cdot 10^{-5} \cdot \exp \left[-\frac{\ln \left[1 + \frac{\mu}{\frac{1-p}{p} f} \right]^2}{2\sigma_u^2} \right] \rho \left[\ln \left(\mu + \frac{1-p}{p} f \right) - \ln \left(\frac{1-p}{p} \eta \right), \sigma_u^2 + \sigma_b^2 \right] (0) \times \\ & \times \left[\Phi \left[\frac{\ln \left[\frac{1-p}{p} f + \varepsilon \right] \sigma_b^2 + \ln \left[\frac{1-p}{p} \eta \right] \sigma_u^2}{\sigma_u \sigma_b \sqrt{\sigma_u^2 + \sigma_b^2}} \right] - \Phi \left[\frac{\ln \left[\frac{1-p}{p} f \right] \sigma_b^2 + \ln \left[\frac{1-p}{p} \eta \right] \sigma_u^2}{\sigma_u \sigma_b \sqrt{\sigma_u^2 + \sigma_b^2}} \right] \right] \leq 0. \quad (72) \end{aligned}$$

Также из (71) и (2) следует:

$$\begin{aligned} \frac{dZ}{df} &= -k \cdot \exp \left[-\frac{\ln \left[1 + \frac{\mu}{\frac{1-p}{p} f} \right]^2}{2\sigma_u^2} \right] \rho \left[\ln \left(\mu + \frac{1-p}{p} f \right) - \ln \left(\frac{1-p}{p} \eta \right), \sigma_u^2 + \sigma_b^2 \right] (0) \times \\ & \times \left[\Phi \left[\frac{\ln \left[\frac{1-p}{p} f + \varepsilon \right] \sigma_b^2 + \ln \left[\frac{1-p}{p} \eta \right] \sigma_u^2}{\sigma_u \sigma_b \sqrt{\sigma_u^2 + \sigma_b^2}} \right] - \Phi \left[\frac{\ln \left[\frac{1-p}{p} f \right] \sigma_b^2 + \ln \left[\frac{1-p}{p} \eta \right] \sigma_u^2}{\sigma_u \sigma_b \sqrt{\sigma_u^2 + \sigma_b^2}} \right] \right] \leq 0. \quad (73) \end{aligned}$$

Тогда на основании соотношения (15), где: $f = \Delta S \cdot [w \cdot S + c]$, где $w > 0$ и $\Delta S > 0$, следует соотношение:

$$\frac{dZ}{dS} = \frac{dZ}{df} \cdot \frac{df}{dS} = \frac{dZ}{df} \cdot \Delta S \cdot w \leq 0. \quad (74)$$

Таким образом, из выражения (73) следует, что при увеличении средней стоимости S одного литра этанола, уровень Z первичной заболеваемости алкоголизмом в регионе должен понижаться.

3. Результаты на основе статистического анализа панельных данных. Для анализа статистики заболеваемости населения алкоголизмом, наркоманией и токсикоманией в зависимости от социально-экономических факторов применялись панельные данные с 2006 года до 2018 года по 82 регионам Российской Федерации (кроме республики Чечня и республики Крым, вследствие отсутствия соответствующих статистических данных по этим регионам за ряд лет). При этом использовались данные официальной статистики Министерства здравоохранения Российской Федерации с 2006 по 2018 годы из сборников «Социально значимые заболевания населения России». Эти данные включали: 1) число больных с впервые в жизни установленным диагнозом зависимости от алкоголя (алкоголизм), включая алкогольные психозы на 100 тысяч населения; 2) число больных с впервые в жизни установленным диагнозом зависимости от наркотиков (наркомания) на 100 тысяч населения; 3) число больных с впервые в жизни установленным диагнозом зависимости от ненаркотических ПАВ (токсикомания) на 100 тысяч населения. Статистические данные с 2006 по 2018 годы для регионов РФ по среднедушевым доходам населения, коэффициентам Джини и показателям инфляции составлены на основе публикаций Росстата и из статистических сборников «Регионы России. Социально-экономические показатели». Из этих же статистических сборников получены данные по доле потребительских расходов населения на покупку алкогольных напитков и по количеству литров приобретенных алкогольных напитков, отличающихся содержанием этанола, приходящихся за год на одного жителя региона. На основе этих данных и данных о среднедушевых доходах населения региона, с учетом инфляции, рассчитывалась средняя цена продажи одного литра этанола в составе употребляемых населением спиртных напитков.

Рассмотрим далее модели, определяющие статистические связи уровней первичной заболеваемости населения алкоголизмом, наркоманией и токсикоманией в регионах РФ с социально-экономическими показателями. Для этого воспользуемся моделью авторегрессии с панельными данными [8]. Оценка параметров таких моделей выполняется обобщенным методом моментов, на основе подхода из работ [8, 7], с использованием программы DPD 98 [7].

Запишем соответствующие этим моделям уравнения для уровней заболеваемости i -типа. Для уровня первичной заболеваемости алкоголизмом ($i = 1$) уравнения имеют вид:

$$Z_{1jt} = a_{11}Z_{1j(t-1)} + a_{21}I_{jt} + a_{31}J_{jt} + a_{41}S_{jt} + C_1. \quad (75)$$

Для уровня первичной заболеваемости наркоманией ($i = 2$) уравнения имеют вид:

$$Z_{2jt} = a_{12}Z_{2j(t-1)} + a_{22}I_{jt} + a_{32}J_{jt} + C_2. \quad (76)$$

Для уровня первичной заболеваемости токсикоманией ($i = 3$) уравнения имеют вид:

$$Z_{3jt} = a_{13}Z_{3j(t-1)} + a_{23}I_{jt} + a_{33}J_{jt} + C_3. \quad (77)$$

В приведенных выше уравнениях вида (75)–(77) индексы j и t обозначают регион и год соответственно. Объясняемые переменные в уравнениях (74): Z_{ijt} – уровень первичной заболеваемости i -м заболеванием за 1 год на 100 тысяч человек.

Объясняющие переменные в уравнениях вида (75)–(77): I_{jt} – среднедушевые годовые доходы населения региона в тысячах рублей, с учетом инфляции относительно 2006 года; J_{jt} – коэффициент Джини в регионе; S_{jt} – цена продажи 1 литра этанола в тысячах рублей, с учетом инфляции относительно 2006 года. Константы C_i в уравнениях вида (75)–(77) соответствуют неучтенным факторам в соответствующих уравнениях. На основе результатов регрессионного анализа уравнений вида (75)–(77) были получены коэффициенты при объясняющих переменных I_{jt} , J_{jt} , S_{jt} и константы C_i (таблица 1).

В таблице 1 значения p характеризуют статистическую значимость и соответственно, значения уровней ошибок полученных коэффициентов и констант. Качество моделей характеризуется значениями теста Вальда χ_i .

Результаты регрессионного анализа, представленные в таблице 1 для количественной зависимости от социально-экономических показателей, корректно согласуются с представленной выше моделью рационального нарушителя норм социального поведения. Действительно, согласно этой модели, из соотношения (33): $\frac{dZ}{dM_{cp}} \leq 0$, следует, что при увеличении среднедушевых доходов M_{cp} населения, уровень Z_i первичной заболеваемости алкоголизмом, наркоманией и токсикоманией среди населения региона должен понижаться. Это согласуется с тем, что согласно таблице 1, коэффициенты при объясняющей переменной, связанной со среднедушевым месячным доходом $I_{jt} = 12 \cdot M_{cpjt}$:

$$a_{21} < 0, a_{22} < 0, a_{23} < 0. \quad (78)$$

Таблица 1. Результаты статистического анализа панельных данных по зависимости уровня первичной заболеваемости населения алкоголизмом, наркоманией и токсикоманией в регионах РФ от показателей уровня жизни населения и цены продажи этанола, с учетом инфляции

Table 1. Results of statistical analysis of panel data on the dependence of the level of primary morbidity of the population with alcoholism, drug addiction and substance abuse in the regions of the Russian Federation on the indicators of the living standards of the population and the price of ethanol sales, taking into account inflation

Факторы	Модель для уровня: алкоголизма	Модель для уровня: наркомании	Модель для уровня: токсикомании
	уравнение (75) для Z_{1jt} при $i=1$ [больных/ 10^5 человек*год]	уравнение (76) для Z_{2jt} при $i=2$ [больных/ 10^5 человек*год]	уравнение (77) для Z_{3jt} при $i=3$ [больных/ 10^5 человек*год]
$Z_{ij(t-1)}$, количество больных/ 10^5 человек*год	0,6993391 ($p=0,000$)	0,6335375 ($p=0,000$)	0,1403149 ($p=0,000$)
I_{jt} , тыс. руб	- 0,528367 ($p=0,000$)	-0,0951753 ($p=0,000$)	- 0,0191628 ($p=0,000$)
J_{jt}	396,4947 ($p=0,000$)	63,98057 ($p=0,001$)	20,3435 ($p=0,000$)
S_{jt} , тыс. руб	-29,70998 ($p=0,002$)		
C_i , количество больных/ 10^5 человек*год	-43,9411 ($p=0,207$)	-6,879305 ($p=0,256$)	- 4,67383 ($p=0,000$)
Тест Ваальда, χ_i	2746,20	889,45	288,65

Далее, из соотношения (64): $\frac{dZ}{dJ_m} > 0$, если $p \cdot \mu > (1 - p) \cdot (\eta - f) \cdot d$, следует, что при увеличении коэффициента Джини J_m , уровень Z_i первичной заболеваемости алкоголизмом, наркоманией и токсикоманией среди населения региона должен повышаться.

Это согласуется с тем, что согласно таблице 1, коэффициенты при переменной, связанной с коэффициентом Джини J_{jt} :

$$a_{31} > 0, a_{32} > 0, a_{33} > 0. \quad (79)$$

Соответственно, из соотношения (74): $\frac{dZ}{dS} \leq 0$ следует, что при увеличении средней стоимости S одного литра этанола, с учетом инфляции, уровень Z_1 первичной заболеваемости алкоголизмом среди населения региона должен понижаться. Это согласуется с тем, что согласно таблице 1, коэффициент при переменной S_{jt} :

$$a_{41} < 0. \quad (80)$$

Корректность полученных соотношений (77), (79), (80) подтверждается высокой статистической значимостью ($p \leq 0,002$) для этих коэффициентов и приемлемым качеством теста Ваальда ($\chi_i \geq 288,65$) для используемых моделей.

4. Заключение. Результаты расчетов на основе математической модели, определяющей зависимости уровня первичной заболеваемости населения алкоголизмом, наркоманией и токсикоманией от показателей уровня жизни населения и цены продажи психоактивных веществ, вызывающих эти заболевания, корректно согласуются с результатами, определяющими соответствующие зависимости, полученными на основе регрессионного анализа региональных панельных данных.

Список литературы

1. Андриенко Ю. В. 2003. Экономика преступления: Теоретическое и эмпирическое исследование определяющих факторов преступности (криминометрический подход): дис. ... канд. экон. наук, 133.
2. Гмурман В. Е. 2004. Теория вероятностей и математическая статистика. Учебное пособие. Издание десятое, стереотипное. М., Высшая школа, 480.

3. Золотухина Л. А. 2015. Исследование зависимостей между показателями дифференциации населения по доходам. *Финансы и бизнес*, 3: 55–64.
4. Колмаков И. Б. 2006. Прогнозирование показателей дифференциации денежных доходов населения. *Проблемы прогнозирования*, 1: 136–162.
5. Суворов А. В. 2001. Проблемы анализа дифференциации доходов населения и построения дифференцированного баланса денежных доходов и расходов населения. *Проблемы прогнозирования*, 1: 58–74.
6. Фиктенгольц Г. М. 1970. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.2. М., ФМЛ, 800.
7. Arellano M., Bond S. 1998. *Dynamic Panel Data Estimation Using DPD98 for Gauss: a Guide for Users*, mimeo, Institute for Fiscal Studies, London, Dec, 46.
8. Arellano M., Bond S. 1991. Some tests of specification for panel data: Monte Carlo evidence and an application to employment equations. *Review of Economic Studies*, 58: 277–297.
9. Becker G. 1968. Crime and Punishment: An Economic Approach. *Journal of Political Economy*, 76: 169–217.
10. Becker G. S., Grossman M. and Murphy K. M. 1994. An empirical analysis of cigarette addiction, *American Economic Review*, 84(3): 396–418.
11. Becker G. S. and Murphy K. M. 1988. A theory of rational addiction. *Journal of Political Economy*, 96(4): 675–700.
12. Cook P. J. and Moore M. J. 1995. Habit and heterogeneity in the youthful demand for alcohol, NBER WP No. 5152.

References

1. Andrienko Yu. V. 2003. *Ekonomika prestupleniya: Teoreticheskoe i empiricheskoe issledovanie opredelyayushchikh faktorov prestupnosti (kriminometricheskij podkhod)*[Economics of Crime: A Theoretical and Empirical Study of the Determinants of Crime (Criminometric Approach)]: dis. . . . kand. ekon. nauk, 133.
2. Gmurman V. Ye. 2004. *Teoriya veroyatnostey i matematicheskaya statistika* [Theory of Probability and Mathematical Statistics]. *Uchebnoe posobie. Izdanie desyatoye, stereotipnoe*. М., Vysshaya shkola, 480.
3. Zolotukhina L. A. 2015. The study of dependences between the factors of population's incomes differentiation. *Finances and business*, 3: 55–64.
4. Kolmakov I. B. 2006. Prediction of the factors for the differentiation of the money population's incomes. *Prognostics problems*, 1: 136–162.
5. Suvorov A. V. 2001. Problems of analysis in the differentiation of the population's incomes and building of the differential balance of money incomes and expenses of the population. *Problems of prediction*, 1: 58–74.
6. Fikhtengolts G. M. 1970. *Kurs differentsialnogo i integralnogo ischisleniya* [Differential and Integral Calculus Course]. Т.2. М., FML, 800.
7. Arellano M., Bond S. *Dynamic Panel Data Estimation Using DPD98 for Gauss: a Guide for Users*, mimeo, Institute for Fiscal Studies, London, Dec. 1998. 46 p.
8. Arellano M., Bond S. 1991. Some tests of specification for panel data: Monte Carlo evidence and an application to employment equations. *Review of Economic Studies*, 58: 277–297.
9. Becker G. 1968. Crime and Punishment: An Economic Approach. *Journal of Political Economy*, 76: 169–217.
10. Becker G. S., Grossman M. and Murphy K. M. 1994. An empirical analysis of cigarette addiction. *American Economic Review*, 84(3): 396–418.
11. Becker G. S. and Murphy K. M. 1988. A theory of rational addiction. *Journal of Political Economy*, 96(4): 675–700.
12. Cook P. J. and Moore M. J. 1995. Habit and heterogeneity in the youthful demand for alcohol, NBER WP No. 5152.

Получена 04.06.2021

Тростянский Сергей Николаевич – доктор технических наук, доцент, профессор кафедры физики и химии Военного учебно-научного центра Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина»

 <http://orcid.org/0000-0002-2737-1771>

ул. Старых большевиков, 54а, Воронеж, 394064, Россия

E-mail: trostyansky2012@yandex.ru

Тростянский Александр Сергеевич – магистрант второго года обучения кафедры математического анализа Воронежского государственного университета

 <http://orcid.org/0000-0002-7368-9959>

Университетская пл.1, Воронеж, 394018, Россия

E-mail: trostalx@gmail.com

ПЕРСОНАЛИИ

К 70-летию профессора Александра Васильевича Глушака,

профессора федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Белгородский государственный национальный исследовательский университет» (НИУ «БелГУ»)

В этом году исполнилось 70 лет доктору физико-математических наук, профессору кафедры прикладной математики и компьютерного моделирования института инженерных и цифровых технологий Белгородского государственного национального исследовательского университета, члену редколлегии журнала «Прикладная математика & Физика» Александру Васильевичу Глушаку.

Александр Васильевич Глушак родился в 1951 году в Черниговской области (Украина). В 1973 году окончил Воронежский ордена Ленина государственный университет им. Ленинского комсомола по специальности «прикладная математика». Математическими исследованиями в области вырождающихся дифференциальных уравнений он начал заниматься ещё будучи студентом, а затем продолжил их в аспирантуре под руководством профессора В. П. Глушко. После окончания аспирантуры в 1977 году Александр Васильевич защитил кандидатскую диссертацию в РУДН им. Патриса Лумумбы.

С 1976 г. Александр Васильевич занимал преподавательские должности в Воронежском государственном техническом университете и параллельно в Воронежском государственном университете. В это время он вместе с коллегами В. И. Кононенко, С. Д. Шмулевичем, В. Д. Репниковым начал исследовать вопросы разрешимости и стабилизации решения задачи Коши для абстрактного уравнения Эйлера – Пуассона – Дарбу, а также для ряда других, связанных с ним сингулярных уравнений. В частности, им получен критерий существования операторной функции Бесселя, являющейся разрешающим оператором задачи Коши для абстрактного уравнения Эйлера – Пуассона – Дарбу и обобщающей понятие известной косинус оператор-функции – разрешающего оператора для абстрактного волнового уравнения. Результаты этих исследований составили предмет его докторской диссертации, успешно защищённой в 1997 г. в МГУ им. М. В. Ломоносова. В 2000 году ему присвоено ученое звание профессора.

Развитию и приложениям теории дифференциальных уравнений с особенностями в коэффициентах посвящены и последующие работы А. В. Глушака, а также работы его учеников. В частности, исследована разрешимость начальных, граничных, а также неклассических (нелокальных, обратных) задач для уравнений Эйлера – Пуассона – Дарбу, Лежандра, Бесселя – Струве и введены в рассмотрение операторные функции Лежандра, Струве, гипергеометрические функции. Кроме того, исследованы вопросы возмущения и ряд абстрактных уравнений дробного порядка. Под его руководством были защищены 4 кандидатских диссертации.

С 2004 г. работает профессором Белгородского государственного национального исследовательского университета. Вначале профессором, а затем деканом факультета, который ранее назывался факультетом математики и информационных технологий. В настоящее время занимает должность профессора кафедры прикладной математики и компьютерного моделирования.

Он является автором более 200 научных и методических работ, опубликованных в периодических специализированных научных изданиях, из них индексируемых в базах данных Web of Science – 36, Scopus – 20 и свыше 100 публикаций из перечня ВАК.

Регулярно участвует в проектах/грантах РФФИ:

- «Методы теории представлений групп, полугрупп и банаховых алгебр в спектральном анализе линейных операторов и линейных отношений», 2013;
- «Научный проект организации и проведения международной конференции «Дифференциальные уравнения и их приложения», 2013;
- «Методы теории представлений групп, полугрупп и банаховых алгебр в спектральном анализе функций и линейных операторов», 2016;
- «Интеллектуальная поддержка принятия решений при разработке, внедрении и использовании инновационных агротехнологий точного земледелия», 2016;
- «Методы теории представлений функций, групп, банаховых алгебр в спектральном анализе функций и линейных операторов», 2019.

Принимал участие в научно-практических конференциях, выступал с пленарными докладами. Наиболее важные из них: Российско-Казахский симпозиум, Нальчик, 2004; Российско-Азербайджанский симпозиум, Эльбрус, 2008; Российско-Абхазский симпозиум, Нальчик-Эльбрус, 2009; Российско-Болгарский симпозиум, Нальчик, 2010; International Conference on Differential and Functional Differential Equations, 2005, 2008, 2011, 2014, 2017, Moscow; International Conference KROMSH, 2009–2017, Simferopol; International

Conference on Numerical Analysis and Applications, Lozenetz, Bulgaria, 2008; Международная научная конференция по дифференциальным уравнениям «Еругинские чтения», Новополюцк, 2011; Международная научная конференция «Актуальные проблемы теории уравнений в частных производных», Москва, 2016; International conference on mathematical modelling in applied sciences, Saint Petersburg, Russia, 2017; Международная научно-техническая конференция «Информационные технологии в науке, образовании и производстве» (ИТНОП), 2018, 2020, Белгород; 2nd international conference on mathematical modelling in applied sciences, BSU, Belgorod-Russia, 2019; 9th International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications (IECMSA-2020), Skopje, MACEDONIA.

В настоящее время является членом двух диссертационных советов при НИУ «БелГУ», входит в состав редколлегии журнала «Прикладная математика & Физика», является ведущим научным сотрудником Центра прикладной математики НИУ БелГУ.

Александр Васильевич проводит плодотворную работу по развитию и совершенствованию учебного процесса, принимает активное участие в подготовке будущих специалистов. Им подготовлено 15 учебных пособий и свыше 50 методических указаний.

Научная, педагогическая и административная деятельность не осталась незамеченной. За плодотворный добросовестный труд, значительный вклад в практическую подготовку обучающихся, развитие системы высшего образования Александр Васильевич неоднократно поощрен руководством университета Благодарностями и Почетными грамотами НИУ «БелГУ», награждён благодарностью Белгородской областной Думы и Почётной грамотой Министерства образования и науки Российской Федерации.

***Редколлегия журнала «Прикладная математика & Физика»
сердечно поздравляет Александра Васильевича Глушака
с юбилеем и желает ему здоровья, долголетия,
новых успехов и научных результатов.***

Основные публикации А. В. Глушака

2021

Глушак А. В. О разрешимости вырождающихся гиперболических дифференциальных уравнений с неограниченными операторными коэффициентами. Дифференциальные уравнения. 2021. Т. 57. № 1. С. 61–75.

Глушак А. В. Критерий единственности решения граничных задач для абстрактного уравнения Эйлера – Пуассона – Дарбу на конечном интервале. Матем. Заметки. 2021. 109: 6. С. 821–831.

2020

Глушак А. В. Операторные гипергеометрические функции, Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз., 174 (2020), 37–45.

Glushak A. V. A family of singular differential equations. Lobachevskii Journal of Mathematics. 2020. Т. 41. № 5. С. 763–771.

Glushak A. V. Transmutation operators as a solvability concept of abstract singular equations. Transmutation Operators and Applications. Trends in Mathematics. Springer, Birkhauser. 2020, 379–410.

Глушак А. В. Семейство операторных функций Бесселя. Геометрия и механика, Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз., 187, ВИНТИ РАН, М., 2020, 36–43.

2019

Глушак А. В. Нелокальная задача для абстрактного уравнения Бесселя – Струве. Изв. вузов. Матем. 2019, 7, 29–38.

Глушак А. В. Операторная формула сдвига решения задачи Коши для абстрактного уравнения Эйлера – Пуассона – Дарбу. Матем. заметки, 105: 5 (2019), 65–665.

Глушак А. В. О разрешимости граничных задач для абстрактного уравнения Бесселя – Струве. Дифференциальные уравнения. 2019. Т. 55. № 8. С. 1103–1110.

Глушак А. В. Тарасова О.А. Дифференциальное исчисление и дифференциальные уравнения. Электронный ресурс: учебное пособие. НИУ БелГУ. Белгород, 2019. 35 с.

2018

- Глушак А. В. Однозначно разрешимые задачи для абстрактного уравнения Лежандра. Изв. вузов. Матем. 2018, 7, 3–15.
- Глушак А. В., Малай Н. В., Шукин Е. Р. Решение краевой задачи для линейризованных по скорости уравнений Навье – Стокса в случае седиментации нагретой твердой гидрозольной частицы сферической формы. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 58: 7 (2018), 1178–1188.
- Глушак А. В. Критерий разрешимости весовой задачи Коши для абстрактного уравнения Эйлера – Пуассона – Дарбу. Дифференциальные уравнения. 2018. Т. 54. № 5. С. 627–637.
- Глушак А. В. Априорная оценка решения задачи Дирихле для одного класса вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка, содержащего различные весовые функции. ПМ&Ф, 2018. Т. 50. № 1. С. 14–20.
- Глушак А. В. Представление суммы регулярного эллиптического оператора и вырождающихся эллиптических операторов высокого порядка в виде композиции. ПМ&Ф, 2018. Т. 50. № 2. С. 111–120.
- Глушак А. В. Разрешимость задачи Дирихле для одного класса вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка, содержащего различные весовые функции. ПМ&Ф, 2018. Т. 50. № 4. С. 373–383.
- Petrosov D. A., Lomazov V. A., Lomazova V. I., Glushak A. V. Journal of Advanced Research in Dynamical and Control Systems. 2018. Т. 10. № 10 Special Issue. С. 1840–1846.
- Глушак А. В., Ядута А. З. Обыкновенные дифференциальные уравнения и основные методы их составления и решения. Учебное пособие для вузов. НИУ БелГУ. Белгород: ИД Белгород, 2018. 79 с.

2017

- Глушак А. В. Априорная оценка решения задачи Дирихле для дифференциального уравнения высокого порядка с двумя вырождающимися эллиптическими операторами ПМ&Ф, 2017. № 20 (269). С. 50–57.
- Глушак А. В. Разрешимость задачи Дирихле для дифференциального уравнения высокого порядка с двумя вырождающимися эллиптическими операторами. ПМ&Ф, 2017. № 27 (276). С. 5–14.
- Глушак А. В. Абстрактная задача Коши для уравнения Бесселя – Струве. Дифференциальные уравнения. 2017. Т. 53. № 7. С. 891–905.

2016

- Глушак А. В., Покручин О. А. Критерий разрешимости задачи Коши для абстрактного уравнения Эйлера – Пуассона – Дарбу. Дифференциальные уравнения. 2016. Т. 52. № 1. С. 41–59.
- Глушак А. В. Нелокальная задача для абстрактного уравнения Эйлера – Пуассона – Дарбу. Изв. вузов. Матем., 2016, 6, 27–35.
- Малай Н. В., Глушак А. В., Лиманская А. В. Решение краевой задачи медленного обтекания сферы вязким неизотермическим газом. Изв. вузов. Матем., 2016, 12, 54–65.
- Глушак А. В., Романченко Т. Г. Формулы связи между решениями абстрактных сингулярных дифференциальных уравнений. ПМ&Ф, 42:6 (2016), 36–39.
- Glushak A. V., Gordeeva N. O., Manaeva E. N., Palasheva I., Primak I. M. Non-local problem for Malmsteen abstract equation. Journal of Engineering and Applied Science. 2016. Т. 11. № 4. С. 907–914.

2015

- Глушак А. В. Зависимость решений уравнения Эйлера – Пуассона – Дарбу с фредгольмовым оператором при производных от коэффициентов уравнения. ПМ&Ф, 2015. № 5 (202). С. 18–22.

2014

- Глушак А. В. Уравнения Эйлера – Пуассона – Дарбу с фредгольмовым оператором при производных. ПМ&Ф, 2014. № 25 (196). С. 5–18.
- Glushak A. V., Avad H. K. On the solvability of an abstract differential equation of fractional order with a variable operator. Journal of Mathematical Sciences. 202: 5 (2014), 637–652.

2013

- Глушак А. В., Авад Х. К. О разрешимости абстрактного дифференциального уравнения дробного порядка с переменным оператором. Современная математика. Фундаментальные направления. 2013. Т. 47. С. 18–32.
- Глушак А. В. Дифференциальные уравнения. Электронный ресурс: учебно-методический комплекс. Белгород, 2013.

2012

Глушак А. В., Малай Н. В., Миронова Н. Н. Решение краевой задачи для линеаризованных по скорости уравнений Навье–Стокса в случае неизотермического обтекания нагретого сфероида газообразной средой. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 52: 5 (2012), 946–959.

Малай Н. В., Миронова Н. Н., Глушак А. В. Решение краевой задачи для уравнения Навье – Стокса при обтекании нагретого сфероида газообразной средой. Дифференциальные уравнения. 2012. Т. 48. № 6. С. 879–883.

2011

Глушак А. В., Манаенкова Т. А. Прямая и обратная задачи для абстрактного дифференциального уравнения, содержащего дробные производные Адамара Дифференциальные уравнения. 2011. Т. 47. № 9. С. 1294–1304.

2010

Авад Х. К., Глушак А. В. О возмущении абстрактного дифференциального уравнения, содержащего дробные производные, нелинейным оператором. СМФН, 35 (2010), 5–21.

Глушак А. В. Об одной обратной задаче для абстрактного дифференциального уравнения дробного порядка. Матем. заметки, 87:5 (2010), 684–693.

Глушак А. В., Авад Х. К. Метод квазиобращения для эволюционного уравнения дробного порядка. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2010. Т. 67. С. 49–57.

Авад Х. К., Глушак А. В. О возмущении абстрактного дифференциального уравнения, содержащего дробные производные Римана – Лиувилля. Дифференциальные уравнения. 2010. Т. 46. № 6. С. 859–873.

2009

Глушак А. В. О корректности задачи типа Коши для абстрактного дифференциального уравнения с дробными производными. Изв. вузов. Матем., 2009, 9, 13–24.

2008

Глушак А. В. Обратная задача для эволюционного уравнения с интегралом дробного порядка в граничном условии. СМФН, 29 (2008), 49–61.

2007

Глушак А. В. О свойствах задачи типа Коши для абстрактного дифференциального уравнения с дробными производными. Матем. заметки, 82:5 (2007), 665–677.

2006

Глушак А. В., Попова В. А. Обратная задача для абстрактного дифференциального уравнения Эйлера – Пуассона – Дарбу. СМФН, 15 (2006), 126–141.

Глушак А. В. О связи проинтегрированной косинус-оператор-функции с операторной функцией Бесселя. Дифференц. уравнения, 42:5 (2006), 583–589.

Глушак А. В., Каракеев Т. Т. Численное решение линейной обратной задачи для уравнения Эйлера – Дарбу. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 46:5 (2006), 848–857.

2005

Глушак А. В. Задача типа Коши для абстрактного дифференциального уравнения с дробными производными. Матем. заметки, 77:1 (2005), 28–41.

2004

Глушак А. В., Заварзин Н. В., Цуканова Л. П. Элементы высшей алгебры. Аналитическая геометрия. Введение в анализ. Учебное пособие. Воронеж, ВГТУ. 2004. 194 с.

Глушак А. В., Заварзин Н. В., Цуканова Л. П. Опорный конспект лекций, задачи и контрольные задания по высшей математике. Часть IV. Компьютерное учебное пособие. Воронеж, ВГТУ. 2004. 121 с.

2003

Глушак А. В. О свойствах решений уравнений, содержащих степени неограниченного оператора. Дифференц. уравнения, 39:10 (2003), 1355–1365.

Глушак А. В., Заварзин Н. В., Цуканова Л. П. Опорный конспект лекций, задачи и контрольные задания по высшей математике. Часть III. Компьютерное учебное пособие. Воронеж, ВГТУ. 2003. 106 с.

2002

Глушак А. В., Заварзин Н. В., Цуканова Л. П. Опорный конспект лекций, задачи и контрольные задания по высшей математике. Часть II. Компьютерное учебное пособие. Воронеж, ВГТУ. 2002. 99 с.

Глушак А. В., Заварзин Н. В., Цуканова Л. П. Опорный конспект лекций и задачи по высшей математике для студентов специальности 130400 «Ракетные двигатели». Часть IV. Учебное пособие. Воронеж, ВГТУ. 2002. 100 с.

2001

Воробьева С. А., Глушак А. В. Абстрактное уравнение Эйлера – Пуассона – Дарбу, содержащее степени неограниченного оператора. Дифференц. уравнения, 37:5 (2001), 706–709.

Глушак А. В. Операторная функция Лежандра. Изв. РАН. Сер. матем., 65:6 (2001), 3–14.

Глушак А. В. О стабилизации решения задачи Коши для абстрактного дифференциального уравнения первого порядка. Изв. вузов. Матем., 2001, 11, 3–13.

Глушак А. В., Заварзин Н. В., Цуканова Л. П. Опорный конспект лекций и задачи по высшей математике для студентов специальности 130400 «Ракетные двигатели». Часть II. Учебное пособие. Воронеж, ВГТУ. 2001. 113 с.

Глушак А. В., Заварзин Н. В., Цуканова Л. П. Опорный конспект лекций и задачи по высшей математике для студентов специальности 130400 «Ракетные двигатели». Часть III. Учебное пособие. Воронеж, ВГТУ. 2001. 192 с.

Глушак А. В., Заварзин Н. В., Цуканова Л. П. Опорный конспект лекций, задачи и контрольные задания по высшей математике. Часть I. Компьютерное учебное пособие. ВГТУ. 2001. Заварзин Н.В., Цуканова Л.П. 144 с.

2000

Глушак А. В., Заварзин Н. В., Цуканова Л. П. Опорный конспект лекций и задачи по высшей математике для студентов специальности 130400 «Ракетные двигатели». Первый семестр. Учебное пособие. Воронеж, ВГТУ. 2000. 111 с.

1999

Глушак А. В. Операторная функция Бесселя и связанные с нею полугруппы и модифицированное преобразование Гильберта. Дифференц. уравнения, 35:1 (1999), 128–130.

Глушак А. В. Итерированные задачи Коши и Дирихле с оператором Бесселя в банаховом пространстве. Изв. вузов. Матем., 1999, 8, 3–10.

Глушак А. В. Регулярное и сингулярное возмущения абстрактного уравнения Эйлера – Пуассона – Дарбу. Матем. заметки, 66:3 (1999), 364–371.

Бырдин А. П., Глушак А. В., Репников В. Д., Трубецкой В. А., Цуканова Л. П., Шаруда В. А., Шаруда Д. В. Некоторые вопросы моделирования и исследования математических моделей технических систем. Учебное пособие. Воронеж, ВГТУ. 1999. 111 с.

1998

Глушак А. В. Об одном линейном неоднородном уравнении первого порядка с сингулярностью. Дифференц. уравнения, 34: 9 (1998), 1284–1285.

1997

Глушак А. В. Операторная функция Бесселя. Докл. РАН, 352:5 (1997), 587–589.

Глушак А. В. О стабилизации решения задачи Дирихле для одного эллиптического уравнения в банаховом пространстве. Дифференц. уравнения, 33:4 (1997), 510–514.

Глушак А. В. Об асимптотической близости решений задачи Коши для дифференциальных уравнений первого порядка в банаховом пространстве. Изв. вузов. Матем., 1997, 7, 14–17.

Глушак А. В. Операторная функция Бесселя и стабилизация решений дифференциальных уравнений. Компьютерное учебное пособие. Воронеж, ВГТУ. 1997. 236 с.

Глушак А. В. О возмущении абстрактного уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу. Матем. заметки, 60: 3 (1996), 363–369.

1995

Глушак А. В. Об одном абстрактном уравнении Эйлера – Пуассона – Дарбу с младшим членом, содержащим особенность. Изв. вузов. Матем., 1995, 3, 3–7.

Глушак А. В. Интегральное представление и стабилизация решения задачи Коши для уравнения с двумя некоммутирующими операторами. Матем. заметки, 58: 1 (1995), 38–47.

1994

Глушак А. В. Необходимое и достаточное условие стабилизации решения задачи Коши для уравнения с операторными коэффициентами. Дифференц. уравнения, 30: 7 (1994), 1111–1117.

1993

Глушак А. В., Глушко Е. Г., Купцов В. С. Решение экономических задач математическими методами. Учебное пособие. Воронеж, ВПИ. 1993. 142 с.

1992

Глушак А. В., Репников В. Д. О стабилизации решения задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка в банаховом пространстве. Докл. РАН, 326: 2(1992), 224–226.

Глушак А. В., Шмулевич С. Д. Интегральные представления решений одного сингулярного уравнения, содержащего сумму коммутирующих операторов. Дифференц. уравнения, 28: 5(1992), 831–838.

1986

Глушак А. В., Шмулевич С. Д. О некоторых корректных задачах для параболических уравнений высокого порядка, вырождающихся по временной переменной. Дифференц. уравнения, 22:6 (1986), 1065–1068.

Глушак А. В., Кононенко В. И., Шмулевич С. Д. Об одной сингулярной абстрактной задаче Коши. Изв. вузов. Матем., 1986, 6, 55–56.

1975

Глушак А. В. Разрешимость задачи Дирихле для вырождающегося эллиптического уравнения в секторе на плоскости. Докл. АН СССР, 223: 5 (1975), 1048–1051.

Глушак А. В. О вырожденном эллипτικο-параболическом уравнении в неограниченной области. Сиб. матем. журн., 16: 4 (1975), 691–699.

ИНФОРМАЦИЯ О КОНФЕРЕНЦИЯХ

ИТНОП – 2020

В период с 24 по 25 сентября 2020 года на базе Белгородского государственного национального исследовательского университета (НИУ «БелГУ») проводилась VIII Международная научно-техническая конференция «Информационные технологии в науке, образовании и производстве» (ИТНОП – 2020).

Конференция проводилась на базе Белгородского государственного национального исследовательского университета (г. Белгород, Россия) при участии Орловского государственного университета имени И. С. Тургенева, Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской Академии Наук, Российского аграрного университета им. К. А. Тимирязева при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований.

В работе конференции приняли участие руководители высших учебных заведений, профессорско-преподавательский состав, научные работники, представители производства и бизнеса, аспиранты и студенты. Рабочими языками конференции были русский и английский языки.

Президиум конференции возглавили:

Полухин Олег Николаевич, доктор политических наук, профессор, ректор Белгородского государственного национального исследовательского университета (НИУ «БелГУ»), председатель;

Соколов Игорь Анатольевич, академик РАН, доктор технических наук, профессор, директор Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» РАН (ФИЦ ИУ РАН), сопредседатель;

Трухачев Владимир Иванович, академик РАН, доктор сельскохозяйственных наук, профессор, ректор Российского государственного аграрного университета имени Тимирязева (РГАУ-МСХА имени К. А. Тимирязева);

Пилипенко Ольга Васильевна, доктор технических наук, профессор, ректор Орловского государственного университета им. И. С. Тургенева (ОГУ им. И. С. Тургенева), сопредседатель.

В программный комитет конференции вошли:

Константинов Игорь Сергеевич, доктор технических наук, профессор, проректор по науке и инновационному развитию Российского государственного аграрного университета имени Тимирязева;

Каляев Игорь Анатольевич, академик РАН, доктор технических наук, профессор, руководитель направления Южного федерального университета;

Васильев Владимир Борисович, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой «Прикладная математика и компьютерное моделирование» Института инженерных и цифровых технологий НИУ «БелГУ»;

Жилияков Евгений Георгиевич, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой «Информационно-телекоммуникационных систем и технологий» Института инженерных и цифровых технологий НИУ «БелГУ»;

Ивашук Ольга Александровна, доктор технических наук, заведующий кафедрой «Информационных и робототехнических систем» Института инженерных и цифровых технологий НИУ «БелГУ»;

Меньших Валерий Владимирович, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры «Математики и моделирования систем» Воронежского института МВД России;

Польщиков Константин Александрович, доктор технических наук, директор Института инженерных и цифровых технологий НИУ «БелГУ»;

Ситник Сергей Михайлович, доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры «Прикладная математика и компьютерное моделирование» Института инженерных и цифровых технологий НИУ «БелГУ»;

Солдатов Александр Павлович, доктор физико-математических наук, профессор, вычислительный центр РАН Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» РАН;

Фёдоров Владимир Евгеньевич, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой «Математического анализа» Челябинского государственного университета.

Конференция открылась 24 сентября следующими пленарными докладами.

1. Соколов И. А. (г. Москва). Вопросы цифровой трансформации общества.
2. Халимон В. И. (г. Санкт-Петербург). Реализация комплекса поддержки принятия решений реального времени в системе управления объектами электротермического производства.
3. Фелих Садырбаев, Светлана Атслега, Инна Самуилик (г. Рига, Латвия). Об управляемости в моделях биологических сетей.
4. Герман Немировский (Альштадт, Германия). Как помочь Малому бизнесу – использовать искусственный интеллект?

Основные доклады по тематике прикладной математики и математического моделирования были включены в работу секции «Прикладная математика», председатели секции Васильев В. Б., Ситник С. М., секретарь: Полуниин В. А. Работа секции проходила в смешанном очно–заочном формате, на ней были представлены следующие доклады.

1. Васильев В. Б. О некоторых эллиптических задачах.
2. Глушак А. В. Критерий единственности решения граничных задач для абстрактных вырождающихся уравнений.
3. Ситник С. М. О последних результатах теории операторов преобразования.
4. Дорофеева В. И., Федяев Ю. С. Численное моделирование эволюции границы раздела жидкостей в задачах экологии.
5. Паровик Р. И. Дробная динамическая система Селькова как модель взаимодействия трещин.
6. Макаров Д. В., Паровик Р. И. Численное моделирование длинных волн Кондратьева с учетом эрмитности.
7. Чернова О. В. Задача линейного сопряжения для эллиптических систем на плоскости.
8. Ковалева Л. А. Разрешимость задачи Дирихле на двумерном комплексе.
9. Мотькина Н. Н. О задаче Клоостермана.
10. Тарасова О. А. О дискретных решениях эллиптических псевдодифференциальных уравнений.
11. Ходырева А. А. О дискретных операторах в теории краевых задач.
12. Эберлейн Н. В. О разрешимости одного класса уравнений.
13. Ломакин А. В. Анализ погрешности вычислений при нейросетевом решении уравнения теплопроводности.

Информацию о конференции и опубликованные тезисы участников можно найти в интернете на сайте конференции <http://myconfs.ru/itnop2020>

ОБЪЯВЛЕНИЕ

Мы приглашаем всех участников конференции и их коллег присылать свои статьи по материалам тезисов и докладов на конференции для опубликования в журнале «Прикладная математика & Физика» (БелГУ). Ранее, до 2019 года включительно, журнал издавался под названием «Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика».

Главный редактор: Васильев В. Б.

Рубрики журнала:

Математика.

Физика. Математическое моделирование.

Публикация статей в журнале бесплатная! Статьи публикуются по итогам рецензирования.

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор).

Свидетельство о регистрации СМИ: ЭЛ № ФС 77 – 77959 от 19.02.2020.

Международный стандартный серийный номер журнала (ISSN) 2687-0959.

Журнал включен в Перечень ВАК рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней кандидата и доктора наук по следующим группам научных специальностей:

1.1 Математика и механика.

1.1.1 Вещественный, комплексный и функциональный анализ.

1.1.2 Дифференциальные уравнения и математическая физика.

1.3 Физические науки.

1.3.8 Физика конденсированного состояния.

Сайт журнала: <http://maths-physics-journal.ru/index.php/journal/about>