НИУ БелГУ
BELGOROD STATE UNIVERSITY (BSU)

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА & ФИЗИКА

APPLIED MATHEMATICS & PHYSICS

Том 53, № 3

Прикладная математика & Физика

2021. Том 53, № 3

Основан в 1995 г. Журнал включен в Перечень ВАК рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней кандидата и доктора наук (1.1.1 – вещественный, комплексный и функциональный анализ, 1.1.2 – дифференциальные уравнения и математическая физика, 1.3.8 – физика конденсированного состояния). До 2020 г. журнал издавался под названием «Научные ведомости Белгородского государственного университета. Математика. Физика».

УЧРЕДИТЕЛЬ:

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Белгородский государственный национальный исследовательский университет».

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор). Выходит 4 раза в год.

Выпускающий редактор: Л. П. Котенко
Корректура: Ю. В. Ивахненко
Компьютерная верстка: О. В. Чернова
Оригинал-макет: В. Б. Васильев
E-mail: vasilyev_v@bsu.edu.ru

Гарнитура Times. Уч. изд. л. 8,0
Дата выхода 30.09.2021.
Оригинал-макет подготовлен отделом
объединенной редакции научных журналов НИУ «БелГУ»
308015, г. Белгород, ул. Победы, 85.

Свидетельство о регистрации средства массовой информации
ЭЛ № ФС 77-77959 от 19.02.2020.

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

ФИЗИКА. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

ОБЪЯВЛЕНИЯ

Applied Mathematics & Physics

2021. Volume 53, № 3

Founded in 1995. The journal is included into the List of Higher Attestation Commission of peer-reviewed scientific publications where the main scientific results of dissertations for obtaining scientific degrees of a candidate and doctor of science should be published (1.1.1 – material, complex and functional analysis, 1.1.2 – differential equations and mathematical physics, 1.3.8 – condensed matter physics). Until 2020, the magazine was published with the name «Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics. Physics».

FOUNDER:

Federal state autonomous educational establishment of higher education
«Belgorod National Research University».

The journal has been registered at the Federal service for supervision of communications information technology and mass media (Roskomnadzor). Publication frequency: 4 /year.

Commissioning Editor L. P. Kotenko
Proofreading Yu. V. Ivakhnenko
Computer imposition O. V. Chernova
Dummy layout by V. B. Vasilyev
E-mail: vasilyev_v@bsu.edu.ru

Typeface Times. Publisher's signature 8,0
Date of publishing 30.09.2021.
The layout is presented by Department of the united Editorial Board of Scientific Journals Belgorod National Research University
Address: 85 Pobeda St., Belgorod, 308015, Russia

Mass media registration certificate
EL № FS 77-77959 dd 19.02.2020.

CONTENTS

MATHEMATICS

PHYSICS. MATHEMATICAL MODELING

ADS

Прикладная математика & Физика, 2021, том 53, №3. С. 171–204.

МАТЕМАТИКА

УДК 512.542
MSC 20D10, 20F17

DOI 10.52575/2687-0959-2021-53-3-171-204

Посвящается моим дорогим родителям —
Владимиру Ивановичу Щербине и
Нине Ефимовне Щербине

ЧАСТИЧНО КОМПОЗИЦИОННЫЕ ФОРМАЦИИ С ЗАДАННОЙ СТРУКТУРОЙ. I

В. В. Щербина

(*Статья представлена членом редакционной коллегии В. Б. Васильевым*)

г. Минск, 220136, Республика Беларусь

E-mail: shcherbinavv@tut.by

Аннотация. Пусть ω — непустое множество простых чисел, n — целое неотрицательное число и τ — подгрупповой функтор в смысле А. Н. Скибы. Через τ_{sn} обозначим также подгрупповой функтор такой, что $\tau_{sn}(G)$ — множество всех субнормальных подгрупп из G для любой группы G. В работе исследуются связи между различными решетками формаций. Получены достаточные условия, при которых решетка формаций H^{ω_l} является полной подрешеткой решетки формаций Θ^{ω_c}, где H и Θ — некоторые полные решетки формаций. В частности, доказано, что для любого подгруппового функтора τ такого, что $\tau \leq \tau_{sn}$, решетка всех τ-замкнутых n-кратно (тотально) ω-насыщенных формаций является полной подрешеткой решетки всех τ-замкнутых n-кратно (соответственно тотально) ω-композиционных формаций. Кроме того, установлено, что если $|\omega| > 1$, $m > n \geq 0$, где m и n — целые числа, и $\tau \leq \tau_{sn}$, то решетка всех τ-замкнутых m-кратно ω-композиционных формаций не является подрешеткой решетки всех τ-замкнутых n-кратно ω-композиционных формаций.

Ключевые слова: конечная группа, формация групп, подгрупповой функтор, τ-замкнутая формация, n-кратно ω-насыщенная формация, тотально ω-насыщенная формация, n-кратно ω-композиционная формация, тотально ω-композиционная формация, полная решетка формаций, полная подрешетка.

Для цитирования: Щербина В. В. 2021. Частично композиционные формации с заданной структурой. I. Прикладная математика & Физика. 53(3): 171–204. DOI 10.52575/2687-0959-2021-53-3-171-204.

PARTIALLY COMPOSITION FORMATIONS WITH A GIVEN STRUCTURE. I

Vladimir Shcherbina

(*Article submitted by a member of the editorial board V. B. Vasiliev*)

Minsk, 220136, Republic of Belarus

E-mail: shcherbinavv@tut.by
Received April, 19, 2021

Abstract. All groups under consideration are finite. Let ω be a non-empty set of primes, n be a non-negative integer, and τ be a subgroup functor in the sense of A. N. Skiba. We also denote by τ_{sn} the subgroup functor such that for every group G the set $\tau_{sn}(G)$ coincides with the set of all subnormal subgroups of the group G . Recall that a formation is a class of groups that is closed under taking homomorphic images and finite subdirect products. The paper studies the connections between different lattices of formations. We obtain sufficient conditions under which the lattice of formations H^{ω_l} is complete sublattice of the lattice of formations Θ^{ω_c} for some complete lattices of formations H and Θ. In particular, we show that the lattice of all τ-closed n-multiply (totally) ω-saturated formations is complete sublattice of the lattice of all τ-closed n-multiply (respectively, totally) ω-composition formations for every subgroup functor τ such that $\tau \leq \tau_{sn}$. Furthemore, we prove that if $|\omega| > 1$, $m > n \geq 0$ be integers, and $\tau \leq \tau_{sn}$, then the lattice of all τ-closed m-multiply ω-composition formations is not sublattice of the lattice of all τ-closed n-multiply ω-composition formations.

Key words: finite group, formation of groups, subgroup functor, τ-closed formation, n-multiply ω-saturated formation, totally ω-saturated formation, n-multiply ω-composition formation, totally ω-composition formation, complete lattice of formations, complete sublattice.

For citation: Shcherbina Vladimir. 2021. Partially composition formations with a given structure. I. Applied Mathematics & Physics. 53(3): 171–204. (in Russian) DOI 10.52575/2687-0959-2021-53-3-171-204.

1. Введение. Все рассматриваемые в работе группы предполагаются конечными. Мы будем использовать стандартные обозначения и определения [6, 11, 16, 26, 27]. Напомним, что *формацией* называется класс групп, замкнутый относительно взятия гомоморфных образов и конечных подпрямых произведений. В различных приложениях теории формаций наиболее полезными оказались локальные и композиционные (или разрешимо насыщенные, локальные в смысле Р. Бэра) формации, а также их обобщения — частично локальные и частично композиционные формации (см. [1, 5, 6, 11, 15, 16, 18, 19, 26, 27]).

В дальнейшем ω обозначает некоторое непустое множество простых чисел, p и q — некоторые простые числа. Для каждого множества простых чисел π через π' обозначается множество $\mathbb{P} \setminus \pi$, где $\mathbb{P}$ — множество всех простых чисел. Символ $\pi(G)$ обозначает множество всех различных простых делителей порядка группы G, $\pi(\mathfrak{X})$ — объединение множеств $\pi(G)$ для всех групп G из $\mathfrak{X}$. Символом (1) обозначается класс всех единичных групп. Для произвольного класса групп $\mathfrak{F} \supseteq (1)$ символ $G^{\mathfrak{F}}$ обозначает пересечение всех таких нормальных подгрупп N, что $G/N \in \mathfrak{F}$, символ $G_{\mathfrak{F}}$ — произведение всех нормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп группы G.

Символы $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}_\pi$, $\mathfrak{N}_p$, $\mathfrak{S}_\pi$ и $\mathfrak{N}_\pi$ обозначают класс всех групп, π-групп, p-групп, разрешимых π-групп и нильпотентных π-групп соответственно. Если $\pi = \varnothing$, то, по определению, $\mathfrak{G}_\varnothing = \mathfrak{N}_\varnothing = \mathfrak{S}_\varnothing = (1)$. Следуя [26], символом $\mathfrak{G}_{\omega d}$ мы обозначаем класс всех тех групп, у которых каждый композиционный фактор является ωd-группой.

Полагают

$$G_{\omega d} = G_{\mathfrak{G}_{\omega d}}, \quad F_p(G) = G_{\mathfrak{G}_{p'}\mathfrak{N}_p}, \quad R_\omega(G) = G_{\mathfrak{S}_\omega}, \quad O_p(G) = G_{\mathfrak{N}_p}, \quad O_\pi(G) = G_{\mathfrak{G}_\pi}.$$

Как и в [16], символ $C^p(G)$ обозначает пересечение централизаторов всех тех главных факторов группы G, чьи композиционные факторы имеют простой порядок p (если в группе G нет таких факторов, то полагают $C^p(G) = G$). Для произвольной совокупности групп $\mathfrak{X}$ символ $(\mathfrak{X})$ обозначает абстрактное замыкание $\mathfrak{X}$, т. е. класс всех групп, изоморфных группам из $\mathfrak{X}$. Символы $\mathcal{K}(\mathfrak{X})$ и $\mathrm{Com}(\mathfrak{X})$ обозначают класс всех тех простых групп и соответственно класс всех тех простых *абелевых* групп, которые встречаются в качестве композиционных факторов некоторых групп из $\mathfrak{X}$.

Класс всех простых групп мы обозначаем символом $\mathfrak{I}$. Для произвольного подкласса $\mathfrak{L}$ из $\mathfrak{I}$ полагают $\mathfrak{L}' = \mathfrak{I} \setminus \mathfrak{L}$, $\mathfrak{L}^+$ — класс всех абелевых групп из $\mathfrak{L}$ и $\mathfrak{L}^- = \mathfrak{L} \setminus \mathfrak{L}^+$.

Для произвольного класса простых групп $\mathfrak{T}$ символ $E(\mathfrak{T})$ обозначает класс всех таких групп G, что $\mathcal{K}(G) \subseteq \mathfrak{T}$. По определению, единичные группы принадлежат $E(\mathfrak{T})$.

Всякая функция вида

$$f : \omega \cup \{\omega'\} \to \{\text{формации групп}\} \tag{1}$$

называется *формационной ω-функцией.*

Следуя работам А. Н. Скибы и Л. А. Шеметкова [26, 27], соответственно, сопоставим функции f два класса групп

$$LF_\omega(f) = \big(G \mid G/G_{\omega d} \in f(\omega') \text{ и } G/F_p(G) \in f(p) \\ \text{для всех } p \in \pi(G) \cap \omega\big)$$

и

$$CF_\omega(f) = \big(G \mid G/R_\omega(G) \in f(\omega') \text{ и } G/C^p(G) \in f(p) \\ \text{для всех } p \in \pi\big(\mathrm{Com}(G)\big) \cap \omega\big).$$

Для любой функции f вида (1) классы групп $LF_\omega(f)$ и $CF_\omega(f)$ являются формациями.

Если формация $\mathfrak{F}$ такова, что $\mathfrak{F} = LF_\omega(f)$ для некоторой функции f вида (1), то $\mathfrak{F}$ называется *ω-насыщенной* или *ω-локальной формацией* с *ω-локальным спутником* f [26]. Если при этом все значения f лежат в $\mathfrak{F}$, то f называется *внутренним* (или *приведенным*) *ω-локальным спутником* формации $\mathfrak{F}$. Согласно замечанию 1 [26], всякая ω-насыщенная формация $\mathfrak{F}$ имеет такой единственный ω-локальный спутник F, что $F(\omega') = \mathfrak{F}$ и $F(p) = \mathfrak{N}_p F(p) \subseteq \mathfrak{F}$ для всех $p \in \omega$. Такой спутник называется *каноническим ω-локальным спутником* формации $\mathfrak{F}$.

Если формация $\mathfrak{F}$ такова, что $\mathfrak{F} = CF_\omega(f)$ для некоторой функции вида (1), то $\mathfrak{F}$ называется *ω-композиционной* или *разрешимо ω-насыщенной формацией* с *ω-композиционным спутником* f [27]. При этом если все значения f лежат в $\mathfrak{F}$, то f называется *внутренним* (или *приведенным*) *ω-композиционным спутником* формации $\mathfrak{F}$. Согласно замечанию 1 [27], любая ω-композиционная формация $\mathfrak{F}$ имеет такой единственный ω-композиционный спутник F, что $F(\omega') = \mathfrak{F}$ и $F(p) = \mathfrak{N}_p F(p) \subseteq \mathfrak{F}$ для всех $p \in \omega$. Такой спутник называется *каноническим ω-композиционным спутником* формации $\mathfrak{F}$.

Отметим, что класс локальных формаций совпадает с классом $\mathbb{P}$-локальных формаций, а класс композиционных формаций совпадает с классом $\mathbb{P}$-композиционных формаций (см. [26, 27]).

Всякая формация считается 0-*кратно ω-насыщенной*, а при $n \geq 1$ формация $\mathfrak{F}$ называется *n-кратно ω-насыщенной*, если $\mathfrak{F} = LF_\omega(f)$, где все (непустые) значения спутника f являются $(n-1)$-кратно ω-насыщенными формациями [26]. Формация $\mathfrak{F}$ называется *тотально ω-насыщенной*, если она n-кратно ω-насыщенна для всех натуральных n. n-кратно ω-композиционные и тотально ω-композиционные формации определяются аналогично [27].

Сопоставим со всякой группой G некоторую систему ее подгрупп $\tau(G)$. Говорят, что τ — *подгрупповой функтор* (в смысле А. Н. Скибы [6], с. 16), если выполняются следующие условия:

1) $G \in \tau(G)$ для любой группы G;

2) для всякого эпиморфизма $\varphi\colon A \to B$ и любых групп $H \in \tau(A)$, $T \in \tau(B)$ имеет место $H^\varphi \in \tau(B)$ и $T^{\varphi^{-1}} \in \tau(A)$.

Через $\mathrm{S}(G)$ обозначают совокупность всех подгрупп группы G, а через $\mathrm{S}_n(G)$ — совокупность всех нормальных подгрупп группы G. Подгрупповой функтор τ называется *тривиальным*, если $\tau(G) = \{G\}$, и *единичным*, если $\tau(G) = \mathrm{S}(G)$. Формация $\mathfrak{F}$ называется *τ-замкнутой*, если $\tau(G) \subseteq \mathfrak{F}$ для любой группы $G \in \mathfrak{F}$.

В дальнейшем символом τ_{sn} мы обозначаем подгрупповой функтор такой, что множество $\tau_{sn}(G)$ совпадает с множеством всех субнормальных подгрупп из G для каждой группы G.

Напомним, что непустая совокупность формаций Θ называется *полной решеткой формаций* (см. [6], с. 151), если пересечение любой совокупности формаций из Θ снова принадлежит Θ и во множестве Θ имеется такая формация $\mathfrak{F}$, что $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$ для любой формации $\mathfrak{H} \in \Theta$.

Пусть Θ — полная решетка формаций. Формационная функция вида (1) называется *Θ-значной*, если все ее значения принадлежат решетке Θ. Символом $\Theta^{\omega l}$ мы обозначаем совокупность всех формаций, обладающих ω-локальным Θ-значным спутником (см. [26]), а символом Θ^{ω_c} — совокупность всех формаций, обладающих ω-композиционным Θ-значным спутником (см. [27]).

Символами $l^\tau_{\omega_n}$ и $l^\tau_{\omega_\infty}$ обозначены совокупность всех τ-замкнутых n-кратно ω-насыщенных формаций и совокупность всех τ-замкнутых тотально ω-насыщенных формаций соответственно. Аналогично символы $c^\tau_{\omega_n}$ и $c^\tau_{\omega_\infty}$ используются для обозначения совокупности всех τ-замкнутых n-кратно ω-композиционных формаций и совокупности всех τ-замкнутых тотально ω-композиционных формаций соответственно. Каждая из совокупностей $l^\tau_{\omega_n}$ и $l^\tau_{\omega_\infty}$, а также $c^\tau_{\omega_n}$ и $c^\tau_{\omega_\infty}$, частично упорядоченная по включению, образует полную решетку формаций (см. [1], теоремы 1.5.3, 1.5.4, 1.6.3 и 1.6.4 на сс. 52, 54, 68 и 70 соответственно). Будем также использовать символы $\mathcal{F}$ и $\mathcal{F}^\tau$ для обозначения решетки всех формаций и решетки всех τ-замкнутых формаций соответственно (см. [28, 38]).

Известно, что подрешетка полной решетки L может быть полной решеткой, в то же время не являясь полной подрешеткой решетки L. Подрешетка H полной решетки L называется *полной*, если для любого непустого подмножества $X \subseteq H$ имеет место $\sup_L X \in H$ и $\inf_L X \in H$. В таком случае имеем $\sup_H X = \sup_L X$ и $\inf_H X = \inf_L X$.

Полные подрешетки формаций исследовались в работах В. Г. Сафонова, Л. А. Шеметкова и других авторов [4, 13, 28, 38, 39, 40], а также книгах А. Н. Скибы, Н. Н. Воробьева и Го Вэньбиня [1, 6, 19]. При этом важным этапом в установлении полноты подрешеток насыщенных и разрешимо насыщенных формаций явилось развитие функторных методов исследования формаций [6]. Так, А. Н. Скибой (см. [6], следствие 4.1.14, с. 158) было показано, что решетка l^τ_n всех τ-замкнутых n-кратно насыщенных формаций является полной подрешеткой решетки l_n всех n-кратно насыщенных формаций. В. Г. Сафонов и Л. А. Шеметков [4] доказали полноту подрешетки l^τ_∞ всех τ-замкнутых тотально насыщенных формаций в решетке l_∞ всех тотально насыщенных формаций, а в работе автора и В. Г. Сафонова [13] данный результат был распространен на аналогичные структуры, рассмотренные в свете теории частично насыщенных формаций.

В совместной работе [28] А. Н. Скибой и Н. Н. Воробьевым установлено, что решетка l всех насыщенных формаций является полной подрешеткой решетки c всех композиционных формаций. Позднее Н. Н. Воробьевым в работах [38, 39], соответственно, данный результат был обобщен на пары решеток (первая — полная подрешетка второй): всех τ-замкнутых насыщенных формаций l^τ, τ-замкнутых композиционных формаций c^τ и всех ω-насыщенных формаций l^ω, ω-композиционных формаций c^ω.

В упомянутой выше работе [28] также были сформулированы следующие вопросы.

Вопрос 1 ([28], вопрос 5.3). Верно ли, что решетка l_n всех n-кратно насыщенных формаций является полной подрешеткой решетки c_n всех n-кратно разрешимо насыщенных формаций (n — произвольное целое неотрицательное число)?

Вопрос 2 ([28], вопрос 5.4). Верно ли, что решетка l_∞ всех тотально насыщенных формаций является полной подрешеткой решетки c_∞ всех тотально разрешимо насыщенных формаций?

Целью настоящей работы является получение достаточных условий, при которых решетка формаций вида $\mathrm{H}^{\omega l}$ оказывается полной подрешеткой решетки формаций вида Θ^{ω_c}, где $\mathrm{H}^{\omega l}$ и Θ^{ω_c} — некоторые полные решетки формаций (см. теорема 1). В качестве следствия полученного результата мы даем положительные ответы на указанные вопросы 1 и 2 (см. следствия 16 и 31 соответственно). Кроме того, мы укажем также решение вопроса 5.4 [36], предложенного А. А. Царевым и Н. Н. Воробьевым, и покажем, что если $|\omega| > 1$, $m > n \geq 0$, где m и n — целые числа, и $\tau \leq \tau_{sn}$, то решетка $c^{\tau}_{\omega_m}$ всех τ-замкнутых m-кратно ω-композиционных формаций не является подрешеткой решетки $c^{\tau}_{\omega_n}$ всех τ-замкнутых n-кратно ω-композиционных формаций (см. следствие 36). Заметим, что теоремы, леммы, определения, утверждения, предложения, примеры и замечания имеют самостоятельную нумерацию.

2. Вспомогательные результаты. В дальнейшем для произвольной полной решетки формаций Θ символом $\mathfrak{M}_{\Theta}$ мы будем обозначать ее *наибольший элемент* (*единицу*). *Наименьшим элементом* (*нулем*) всех рассматриваемых решеток формаций всегда будем считать пустую формацию $\varnothing$ (если нуль решетки Θ не совпадает с $\varnothing$, то, как следует из определения полной решетки формаций, решетку Θ можно вложить естественным образом в решетку $\tilde{\Theta}$, которая получается присоединением $\varnothing$ к Θ.)

Напомним, что для любой полной решетки формаций Θ и любой совокупности групп $\mathfrak{X}$ такой, что $(\mathfrak{X}) \subseteq \mathfrak{M}_{\Theta}$, через $\Theta\mathrm{form}(\mathfrak{X})$ обозначается пересечение всех тех формаций из Θ, которые содержат все группы из $\mathfrak{X}$. В частности, если $\mathfrak{X} = \{G\}$, то используется обозначение $\Theta\mathrm{form}(G)$. В случае, когда $\Theta = \mathcal{F}$ — решетка всех формаций, знак Θ опускают. Если $\Theta = \mathcal{F}^{\tau}$ — решетка всех τ-замкнутых формаций, то вместо $\Theta\mathrm{form}(\mathfrak{X})$ пишут $\tau\mathrm{form}(\mathfrak{X})$.

Для любой совокупности формаций $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ из Θ полагают $\vee_{\Theta}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I) = \Theta\mathrm{form}\big(\bigcup_{i\in I}\mathfrak{F}_i\big)$. Пусть $\{f_i \mid i \in I\}$ — произвольная совокупность Θ-значных формационных ω-функций. Тогда символом $\vee_{\Theta}(f_i \mid i \in I)$ обозначают формационную ω-функцию f такую, что $f(a) = \Theta\mathrm{form}\big(\bigcup_{i\in I} f_i(a)\big)$ для всех $a \in \omega \cup \{\omega'\}$.

Напомним также, что если Θ является полной решеткой формаций, то каждая из совокупностей Θ^{ω_l} и Θ^{ω_c} также является полной решеткой формаций (подробнее см. [26, 27]).

Лемма 1. *Для произвольного простого числа p цоколь $\mathrm{Soc}(G)$ группы G содержится в подгруппе $C^p(G)$, причем последняя является характеристической подгруппой в G. В частности, если $G \neq 1$, то $C^p(G) \neq 1$.*

Доказательство. Зафиксируем произвольное простое число p. Если $G = 1$, то утверждение леммы очевидно. Поэтому в дальнейшем считаем, что $G \neq 1$. Вследствие леммы 1.2 работы [23] $C^p(G) = G_{\mathfrak{G}_{cp}}$, где $\mathfrak{G}_{cp}$ — класс всех таких групп, все главные p-факторы которых центральны. Заметим, что в силу леммы 1.1 [23] класс $\mathfrak{G}_{cp}$ является классом Фиттинга (подробнее см. лемма 3 [31], а также лемма 3.1 [20]). Отсюда и из определений следует, что подгруппа $C^p(G)$ — характеристическая. (То, что $C^p(G)$ является характеристической подгруппой в G, может быть также установлено из того замечания, что ввиду определения подгруппы $C^p(G)$ для любого эпиморфизма θ группы G справедливо включение $\theta\big(C^p(G)\big) \subseteq C^p\big(\theta(G)\big)$.)

Пусть L — минимальная нормальная подгруппа группы G. Тогда если $Z_p \notin \mathcal{K}(L)$, то вследствие леммы 1 [27] (см. также лемма 3.2 [20]) получаем $L \subseteq C^p(G)$. Если же $Z_p \in \mathcal{K}(L)$, то L — p-группа, и, учитывая лемму 3.9 [9], с. 26 (см. также [16], лемма 13.6, с. 45) и определение группы $C^p(G)$, имеем $L \subseteq F_p(G) \subseteq C^p(G)$. Таким образом, в каждом из рассмотренных случаев $L \subseteq C^p(G)$, и следовательно, $\mathrm{Soc}(G) \subseteq C^p(G)$. Лемма доказана.

Лемма 2 ([30], лемма 3.2; [32], лемма 2.4). *Пусть p — простое число, и пусть $\mathfrak{F}$ — разрешимо p-насыщенная формация, содержащая $\mathfrak{N}_p$. Предположим также, что N — элементарная абелева нормальная p-подгруппа из G такая, что $G/N \in \mathfrak{F}$ и $[N]\big(G/C_G(N)\big) \in \mathfrak{F}$. Тогда $G \in \mathfrak{F}$.*

Лемма 3. *Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ — непустые формации, причем формация $\mathfrak{H}$ — разрешимо p-насыщенна, и G — группа минимального порядка из $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H}$. Тогда G — монолитическая группа и ее монолит $\mathrm{Soc}(G)$ совпадает с $G^{\mathfrak{H}}$. Если при этом $G^{\mathfrak{H}}$ — p-группа, то*

$$G^{\mathfrak{H}} = C_G(G^{\mathfrak{H}}) = C^p(G) = F_p(G) = F_{\nu}(G) = F(G) = O_p(G),$$

где ν — произвольное непустое множество простых чисел такое, что $p \in \nu$.

Доказательство. Поскольку $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ — формации, то G — монолитическая группа с монолитом $P = \mathrm{Soc}(G) = G^{\mathfrak{H}}$. Пусть P — p-группа для некоторого простого $p \in \omega$, ν — множество из условия леммы. И пусть $T = [P]\big(G/C_G(P)\big)$. Так как $G \in \mathfrak{F}$, то ввиду предложения 1.5 [16], с. 335 имеет место $T \in \mathfrak{F}$.

Предоложим, что $|T| < |G|$. Тогда $T \in \mathfrak{H}$ в силу выбора группы G. Ясно, что в таком случае $p \in \pi\big(\mathrm{Com}(\mathfrak{H})\big)$, и следовательно, ввиду замечания 1 [27] $\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{H}$. Учитывая также, что по тем же соображениям группа $G/P \in \mathfrak{H}$, вследствие леммы 2 имеем $G \in \mathfrak{H}$. Противоречие.

Поэтому $|T| = |G|$. В таком случае $P = C_G(P)$. Последнее равенство ввиду включений $F_p(G) \subseteq C^p(G) \subseteq C_G(P)$ (см. [9], лемма 3.9, с. 26; [16], лемма 13.6, с. 45), а также включений

$$P \subseteq O_p(G) \subseteq \prod_{q\in\pi(G)}^{\times} O_q(G) = F(G) = \bigcap_{q\in\mathbb{P}} F_q(G) \subseteq \bigcap_{q\in\nu} F_q(G) = F_{\nu}(G) \subseteq F_p(G)$$

(см. [16], теорема 13.4(g), с. 44) влечет справедливость равенств из условия леммы. Лемма доказана.

Пусть π — некоторое непустое множество простых чисел.

Определение 1. Полную решетку формаций Θ назовем *π-частичной алгеброй формаций*, если для любого простого числа $p \in \pi$ и для любой формации $\mathfrak{F} \in \Theta$ имеет место $\mathfrak{N}_p\mathfrak{F} \in \Theta$. В случае, когда $\pi = \mathbb{P}$, условимся опускать символ π и говорить просто о *частичной алгебре формаций* (см. [6]).

Лемма 4. *Пусть* H — *полная решетка формаций такая, что* $\mathrm{H}^{\omega_l} \subseteq \mathrm{H}$. *И пусть* $\mathfrak{F} = LF_\omega(f) \in \mathrm{H}^{\omega_l}$, *где* f — *произвольный внутренний* ω-*локальный* H-*значный спутник формации* $\mathfrak{F}$. *Тогда* $\mathfrak{F} = CF_\omega(h) \in \mathrm{H}^{\omega_c}$, *где* h — ω-*композиционный спутник такой, что* $h(p) = f(p)$ *для любого* $p \in \omega$ *и* $h(\omega') = \mathfrak{F}$. *Если, кроме того,* H *является* ω-*частичной алгеброй формаций, то канонический* ω-*композиционный спутник формации* $\mathfrak{F}$ H-*значен и совпадает с ее каноническим* ω-*локальным спутником.*

Доказательство. Заметим, что если формация $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{G}_{\omega'}$, то утверждение леммы следует из примера 1 [26] и примера 1 [27]. В частности, лемма верна, если $\mathfrak{F} = \varnothing$. Поэтому в дальнейшем можно считать, что формация $\mathfrak{F} \neq \varnothing$. Пусть $\mathfrak{H} = CF_\omega(h)$, где h — спутник из условия. Очевидно, что в таком случае формация $\mathfrak{H} \neq \varnothing$. Из условия и определений следует, что $\mathfrak{H} \in \mathrm{H}^{\omega_c}$. Покажем, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$.

Предположим, что $\mathfrak{H} \not\subseteq \mathfrak{F}$ и G — группа минимального порядка из $\mathfrak{H} \setminus \mathfrak{F}$. Тогда G — монолитическая группа с монолитом $R = G^{\mathfrak{F}}$.

Если $R_\omega(G) = 1$, то $G \cong G/1 = G/R_\omega(G) \in h(\omega') = \mathfrak{F}$. Противоречие. Следовательно, $R_\omega(G) \neq 1$, и R — абелева p-группа для некоторого простого $p \in \omega$. Так как формация $\mathfrak{F}$ ω-насыщенна, то $\mathfrak{F}$ — разрешимо ω-насыщенна. Следовательно, вследствие леммы 3 справедливы равенства $R = O_p(G) = C^p(G)$. Ввиду того, что спутник f — внутренний, последнее влечет

$$G/O_p(G) = G/R = G/C^p(G) \in h(p) = f(p) = f(p) \cap \mathfrak{F}.$$

Применяя лемму 4 [26], заключаем, что $G \in \mathfrak{F}$. Вновь полученное противоречие показывает, что $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$.

Покажем теперь, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$. Предоложим, что это неверно, и G — группа минимального порядка из $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H}$. Тогда G — монолитическая группа и $R = G^{\mathfrak{H}}$ — ее монолит.

Предположим, что $R_\omega(G) = 1$. Тогда R — неабелева или абелева ω'-группа, и следовательно, $\pi\big(\mathrm{Com}(G)\big) \cap \omega = \pi\big(\mathrm{Com}(G/R)\big) \cap \omega$.

Пусть $q \in \pi\big(\mathrm{Com}(G)\big) \cap \omega$. Тогда ввиду леммы 1 [27] (см. также лемма 3.2 [20]) $C^q(G/R) = C^q(G)/R$. Следовательно, так как $G/R \in \mathfrak{H}$ и $q \in \pi\big(\mathrm{Com}(G/R)\big) \cap \omega$, имеем

$$G/C^q(G) \cong (G/R)/(C^q(G)/R) = (G/R)/C^q(G/R) \in h(q).$$

Таким образом, $G/C^q(G) \in h(q)$ для всех $q \in \pi\big(\mathrm{Com}(G)\big) \cap \omega$. Кроме того,

$$G/R_\omega(G) = G/1 \cong G \in \mathfrak{F} = h(\omega').$$

Следовательно, $G \in \mathfrak{H}$. Противоречие.

Значит, $R_\omega(G) \neq 1$ и R — абелева p-группа для некоторого $p \in \omega$. Поскольку $\mathfrak{H}$ — непустая ω-композиционная формация, то ввиду леммы 3 имеют место равенства $R = O_p(G) = F_p(G)$. Поэтому

$$G/O_p(G) = G/R = G/F_p(G) \in f(p) = h(p).$$

Кроме того, поскольку $R = G^{\mathfrak{H}}$, то $G/O_p(G) = G/R \in \mathfrak{H}$. Значит,

$$G/O_p(G) \in h(p) \cap \mathfrak{H}.$$

Применяя теперь лемму 4 [27], видим, что $G \in \mathfrak{H}$. Вновь полученное противоречие показывает, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$. Значит, $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$. Таким образом, $\mathfrak{F} = CF_\omega(h) \in \mathrm{H}^{\omega_c}$.

Предположим, что H — ω-частичная алгебра формаций. И пусть $\mathfrak{F} = LF_\omega(F)$ (F — канонический ω-локальный спутник формации $\mathfrak{F}$). Напомним, что ввиду замечания 1 [26] $F(p) = \mathfrak{N}_p\mathfrak{F}(F_p)$ для каждого $p \in \omega$ и $F(\omega') = \mathfrak{F}$. Учитывая, что по условию $\mathfrak{F} \in \mathrm{H}^{\omega_l} \subseteq \mathrm{H}$, из леммы 8 [26] получаем, что спутник F является H-значным. По доказанному $\mathfrak{F} = CF_\omega(F) \in \mathrm{H}^{\omega_c}$. Так как при этом $F(p) = \mathfrak{N}_pF(p)$ и $F(\omega') = \mathfrak{F}$ для всех $p \in \omega$, то ввиду замечания 1 [27] заключаем, что спутник F — канонический ω-композиционный спутник формации $\mathfrak{F}$. Лемма доказана.

Непосредственно из леммы 11 [24] и доказательства леммы 11 [26] вытекает следующее утверждение (см. также следствие 9 [26] и лемма 11 [13]).

Лемма 5. *Для любого подгруппового функтора* τ *и всякого целого неотрицательного числа* n *каждая из решеток* $l^\tau_{\omega_n}$ *и* $l^\tau_{\omega_\infty}$ *является частичной алгеброй формаций.*

Аналогично ввиду леммы 11 [24] и доказательства теоремы 3 [27] получаем следующий результат (см. также следствие 4 [27] и лемма 2.1 [12]).

Лемма 6. *Для любого подгруппового функтора* τ *и всякого целого неотрицательного числа* n *каждая из решеток* $c^\tau_{\omega_n}$ *и* $c^\tau_{\omega_\infty}$ *является частичной алгеброй формаций.*

Следствие 1. *Пусть* $\mathfrak{F} = LF_\omega(f)$ — τ-*замкнутая* n-*кратно* ω-*насыщенная формация, где* f — *произвольный внутренний* ω-*локальный* $l^\tau_{\omega_{n-1}}$-*значный спутник* $\mathfrak{F}$, $n \in \mathbb{N}$. *И пусть* h — *формационная* ω-*функция такая, что* $h(p) = f(p)$ *для любого* $p \in \omega$ *и* $h(\omega') = \mathfrak{F}$. *Тогда* $\mathfrak{F} = CF_\omega(h)$ — τ-*замкнутая* n-*кратно* ω-*композиционная формация, причем спутник* h $c^\tau_{\omega_{n-1}}$-*значен. В частности, канонический* ω-*композиционный спутник формации* $\mathfrak{F}$ $l^\tau_{\omega_{n-1}}$-*значен и совпадает с ее каноническим* ω-*локальным спутником.*

Доказательство. Проведем индукцию по n. Для $n = 1$ утверждение леммы следует из леммы 4 для решетки $\mathrm{H} = l^{\tau}_{\omega_0} = c^{\tau}_{\omega_0} = \mathcal{F}^{\tau}$) ввиду леммы 1.5.11 [1], с. 60, леммы 1.6.8 [1], с. 71 и доказательства леммы 1.5.6 [1], с. 58 с учетом леммы 5.

Пусть теперь $n > 1$ и утверждение при $n-1$ верно. Пусть $\mathfrak{F}$ — формация, а f и h — формационные ω-функции из условия. Положим в лемме 4 $\mathrm{H} = l^{\tau}_{\omega_{n-1}}$. Учитывая, что ввиду леммы 1.5.11 [1], с. 60 (см. также лемма 2 [34]) $\mathrm{H}^{\omega_l} = (l^{\tau}_{\omega_{n-1}})^{\omega_l} = l^{\tau}_{\omega_n}$, имеем $\mathfrak{F} = LF_{\omega}(f) \in l^{\tau}_{\omega_n} \subseteq l^{\tau}_{\omega_{n-1}}$. Применяя лемму 4, видим, что $\mathfrak{F} = CF_{\omega}(h)$.

Из предположения индукции следует, что $l^{\tau}_{\omega_{n-1}} \subseteq c^{\tau}_{\omega_{n-1}}$. Следовательно, так как $h(p) = f(p) \in l^{\tau}_{\omega_{n-1}}$ для всех $p \in \omega$ и $h(\omega') = \mathfrak{F} \in l^{\tau}_{\omega_{n-1}}$, то спутник h является $c^{\tau}_{\omega_{n-1}}$-значным.

Последняя часть следствия вытекает из соответствующей части леммы 4 ввиду леммы 5. Лемма доказана.

Из следствия 1 с учетом леммы 5 вытекает следующий результат.

Следствие 2. *Пусть $\mathfrak{F} = LF_{\omega}(f)$ — τ-замкнутая тотально ω-насыщенная формация, где f — произвольный внутренний ω-локальный $l^{\tau}_{\omega_\infty}$-значный спутник $\mathfrak{F}$. И пусть h — формационная ω-функция такая, что $h(p) = f(p)$ для любого $p \in \omega$ и $h(\omega') = \mathfrak{F}$. Тогда $\mathfrak{F} = CF_{\omega}(h)$ — τ-замкнутая тотально ω-композиционная формация, причем спутник h $c^{\tau}_{\omega_\infty}$-значен. В частности, канонический ω-композиционный спутник формации $\mathfrak{F}$ $l^{\tau}_{\omega_\infty}$-значен и совпадает с ее каноническим ω-локальным спутником.*

Следующая лемма является простым следствием теоремы 1 [26].

Лемма 7. *Пусть $\mathfrak{F}$ — ω-насыщенная формация. Тогда $\pi\big(\mathrm{Com}(\mathfrak{F})\big) \cap \omega = \pi(\mathfrak{F}) \cap \omega$.*

Утверждение 1. *Пусть H — ω-частичная алгебра формаций такая, что $\mathrm{H}^{\omega_l} \subseteq \mathrm{H}$. И пусть $\mathfrak{F}$ — H^{ω_l}-формация, g — минимальный ω-локальный H-значный спутник формации $\mathfrak{F}$. Тогда $\mathfrak{F} = LF_{\omega}(f)$, где f — ω-локальный H-значный спутник такой, что $f(p) = \mathrm{Hform}\big(\mathfrak{F}(C^p)\big)$ для всех $p \in \omega$ и $f(\omega') = \mathfrak{F}$. Кроме того, для любого $p \in \omega$ справедливо равенство $f(p) = g(p)$.*

Доказательство. Прежде всего, заметим, что ввиду леммы 4 $\mathfrak{F}$ является H^{ω_c}-формацией и $\mathfrak{F} = LF_{\omega}(F) = CF_{\omega}(F)$, причем канонический спутник F H-значен. Обозначим через h минимальный ω-композиционный H-значный спутник формации $\mathfrak{F}$.

Так как формация $\mathfrak{F}$ ω-насыщенна, то вследствие леммы 7 справедливо равенство $\pi\big(\mathrm{Com}(\mathfrak{F})\big) \cap \omega = \pi(\mathfrak{F}) \cap \omega$. Из последнего ввиду леммы 5 [27] имеем $h(p) = \mathrm{Hform}\big(\mathfrak{F}(C^p)\big)$ для всех $p \in \omega$ и $h(\omega') = \mathrm{Hform}\,(G/R_{\omega}(G) \mid G \in \mathfrak{F})$. В силу же леммы 5 [26] $g(p) = \mathrm{Hform}\big(\mathfrak{F}(F_p)\big)$ для каждого $p \in \omega$ и $g(\omega') = \mathrm{Hform}\,(G/G_{\omega d}(G) \mid G \in \mathfrak{F})$. Далее, поскольку $\mathrm{H}^{\omega_l} \subseteq \mathrm{H}$, спутники h и g являются внутренними спутниками формации $\mathfrak{F}$. Поэтому в силу замечания 2 [27] и замечания 2 [26] $F(p) = \mathfrak{N}_p h(p) = \mathfrak{N}_p g(p)$ для любого $p \in \omega$.

Если $p \in \omega \setminus \pi(\mathfrak{F})$, то в силу равенства $\pi\big(\mathrm{Com}(\mathfrak{F})\big) \cap \omega = \pi(\mathfrak{F}) \cap \omega$ имеем $f(p) = \varnothing$. Ясно также, что $g(p) = \varnothing$.

Пусть $\pi(\mathfrak{F}) \cap \omega \neq \varnothing$ и $p \in \pi(\mathfrak{F}) \cap \omega$. Учитывая, что спутник F — внутренний, а также принимая во внимание включение $F_p(G) \subseteq C^p(G)$, справедливое для любой группы G (см. лемма 3.9 [9], с. 26), вследствие леммы 5 [26] имеем

$$
\begin{gathered}
g(p) = \mathrm{Hform}\big(G \mid G \in F(p),\ O_p(G) = 1\big) = \mathrm{Hform}\big(G \mid G \in \mathfrak{N}_p h(p),\ O_p(G) = 1\big) = \\
= \mathrm{Hform}\big(G \mid G \in h(p),\ O_p(G) = 1\big) = \mathrm{Hform}\big(G \mid G \in \mathrm{Hform}\big(\mathfrak{F}(C^p)\big),\ O_p(G) = 1\big) \subseteq \\
\subseteq \mathrm{Hform}\Big(\mathrm{Hform}\big(\mathfrak{F}(C^p)\big)\Big) = \mathrm{Hform}\big(\mathfrak{F}(C^p)\big) = \mathrm{Hform}\big(G/C^p(G) \mid G \in \mathfrak{F}\big) = f(p) \subseteq \\
\subseteq \mathrm{Hform}\big(G/F_p(G) \mid G \in \mathfrak{F}\big) = \mathrm{Hform}\big(\mathfrak{F}(F^p)\big) = g(p).
\end{gathered}
$$

Из последних включений следует, что $f(p) = g(p)$ для всякого $p \in \pi(\mathfrak{F}) \cap \omega$.

Таким образом, $f(p) = g(p)$ для всех $p \in \omega$. Снова применяя лемму 5 [26], заключаем, что $\mathfrak{F} = LF_{\omega}(f)$. Утверждение доказано.

Полагая в утверждении 1 $\mathrm{H} = l^{\tau}_{\omega_{n-1}}$, где $n \in \mathbb{N}$ и τ — произвольный подгрупповой функтор, ввиду леммы 5 и леммы 1.5.11 [1], с. 60 (см. также лемма 2 [34]) получаем

Утверждение 2. *Пусть $\mathfrak{F}$ — $l^{\tau}_{\omega_n}$-формация и g — минимальный ω-локальный $l^{\tau}_{\omega_{n-1}}$-значный спутник формации $\mathfrak{F}$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда $\mathfrak{F} = LF_{\omega}(f)$, где f — ω-локальный спутник такой, что $f(p) = l^{\tau}_{\omega_{n-1}}\mathrm{form}\,\big(\mathfrak{F}(C^p)\big)$ для всех $p \in \omega$ и $f(\omega') = \mathfrak{F}$. Кроме того, для любого $p \in \omega$ справедливо равенство $f(p) = g(p)$.*

Для тривиального подгруппового функтора τ и $n = 1$ из утверждения 2 с учетом п. (2.10) [30] вытекает следующий результат.

Следствие 3 ([32], теорема 4.6; [30], теорема 3.1(b)). *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая ω-насыщенная формация и h — минимальный композиционный спутник формации $\mathrm{cform}\,(\mathfrak{F})$. Тогда $\mathfrak{F} = LF_{\omega}(f)$, где f — такой ω-локальный спутник, что $f(p) = h(p)$ для любого $p \in \omega$ и $f(\omega') = \mathfrak{F}$.*

Полагая теперь в утверждении 1 $\mathrm{H} = l^{\tau}_{\omega_\infty}$, где τ — произвольный подгрупповой функтор, вследствие леммы 5 и леммы 17 [13] устанавливаем следующее

Утверждение 3. *Пусть* $\mathfrak{F}$ — $l^{\tau}_{\omega_\infty}$*-формация и* g — *минимальный* ω*-локальный* $l^{\tau}_{\omega_\infty}$*-значный спутник формации* $\mathfrak{F}$*. Тогда если* f — ω*-локальный спутник такой, что* $f(p) = l^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}\big(\mathfrak{F}(C^p)\big)$ *для всех* $p \in \omega$ *и* $f(\omega') = \mathfrak{F}$*, то* $\mathfrak{F} = LF_\omega(f)$*. Кроме того, для любого* $p \in \omega$ *справедливо равенство* $f(p) = g(p)$*.*

Лемма 8. *Пусть* Θ — *полная решетка формаций,* $\mathfrak{H}$ — *непустая* S_n*-замкнутая формация, такая, что для любой формации* $\mathfrak{F} \in \Theta$ *имеет место* $\mathfrak{H}\mathfrak{F} \in \Theta$*. Тогда для любого набора* $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ *формаций* $\mathfrak{F}_i \in \Theta$ *имеет место включение*

$$\vee_\Theta(\mathfrak{H}\mathfrak{F}_i \mid i \in I) \subseteq \mathfrak{H}\big(\vee_\Theta(\mathfrak{F}_i \mid i \in I)\big).$$

Доказательство. Поскольку для любого $i \in I$ выполняется включение $\mathfrak{F}_i \subseteq \vee_\Theta(\mathfrak{F}_i \mid i \in I)$, то, учитывая, что $\mathfrak{H}$ — S_n-замкнутая формация, имеем $\mathfrak{H}\mathfrak{F}_i \subseteq \mathfrak{H}\big(\vee_\Theta(\mathfrak{F}_i \mid i \in I)\big)$. Поэтому

$$\bigcup_{i\in I}\mathfrak{H}\mathfrak{F}_i \subseteq \mathfrak{H}\big(\vee_\Theta(\mathfrak{F}_i \mid i \in I)\big).$$

По условию формация $\mathfrak{H}\big(\vee_\Theta(\mathfrak{F}_i \mid i \in I)\big) \in \Theta$. Следовательно,

$$\vee_\Theta(\mathfrak{H}\mathfrak{F}_i \mid i \in I) = \Theta\mathrm{form}\,\big(\bigcup_{i\in I}\mathfrak{H}\mathfrak{F}_i\big) \subseteq \mathfrak{H}\big(\vee_\Theta(\mathfrak{F}_i \mid i \in I)\big).$$

Лемма доказана.

Напомним, что полная решетка формаций Θ^{ω_l} называется *индуктивной* (см. [6], с. 151), если для любого набора $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ формаций $\mathfrak{F}_i \in \Theta^{\omega_l}$ и для всякого набора $\{f_i \mid i \in I\}$ внутренних Θ-значных ω-локальных спутников, где $\mathfrak{F}_i = LF_\omega(f_i)$, имеет место

$$\vee_{\Theta^{\omega_l}}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I) = LF_\omega\big(\vee_\Theta(f_i \mid i \in I)\big).$$

Аналогично, полная решетка формаций Θ^{ω_c} называется *индуктивной* (см. [6], с. 151; [1], с. 220), если для любого набора $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ формаций $\mathfrak{F}_i \in \Theta^{\omega_c}$ и для всякого набора $\{f_i \mid i \in I\}$ внутренних Θ-значных ω-композиционных спутников, где $\mathfrak{F}_i = CF_\omega(f_i)$, имеем

$$\vee_{\Theta^{\omega_c}}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I) = CF_\omega\big(\vee_\Theta(f_i \mid i \in I)\big).$$

Предложение 1. *Пусть* $\Theta^{\omega_c} = \Theta$ — *индуктивная решетка формаций,* $\mathfrak{F}_i \in \Theta$*, где* $i \in I$*, и* π — *такое непустое множество простых чисел, что* $\pi \subseteq \omega$*. Тогда если для любой формации* $\mathfrak{F} \in \Theta$ *формация* $\mathfrak{N}_\pi\mathfrak{F} \in \Theta$*, то*

$$\vee_\Theta\big(\mathfrak{N}_\pi\mathfrak{F}_i \mid i \in I\big) = \mathfrak{N}_\pi\big(\vee_\Theta(\mathfrak{F}_i \mid i \in I)\big).$$

Доказательство. Пусть $\mathfrak{X}_1 = \vee_\Theta\big(\mathfrak{N}_\pi\mathfrak{F}_i \mid i \in I\big)$, $\mathfrak{X}_2 = \mathfrak{N}_\pi\big(\vee_\Theta(\mathfrak{F}_i \mid i \in I)\big)$. Утверждение леммы очевидно, если $\mathfrak{F}_i = \varnothing$ для каждого $i \in I$. Поэтому в дальнейшем считаем, что $\mathfrak{F}_{i_0} \neq \varnothing$ для некоторого $i_0 \in I$ и, следовательно, каждая из формаций $\mathfrak{X}_1$ и $\mathfrak{X}_2$ не является пустой. Полагая, далее, в лемме 8 $\mathfrak{H} = \mathfrak{N}_\pi$ и учитывая, что $\mathfrak{N}_\pi$ — S-замкнутая формация, имеем $\mathfrak{X}_1 \subseteq \mathfrak{X}_2$.

Прежде чем доказать обратное включение, заметим следующее. Нетрудно видеть (см. лемма 11 [27]), что формация $\mathfrak{N}_\pi$ имеет такой внутренний (минимальный) ω-композиционный спутник n, что $n(q) = (1)$ для любого $q \in \pi$, $n(q) = \varnothing$ для всех $q \in \omega \setminus \pi$ и $n(\omega') = (1)$. Ввиду условия формация $\mathfrak{F}_i \in \Theta = \Theta^{\omega_c}$. Пусть $\mathfrak{F}_i = CF_\omega(f_i)$, где $i \in I$, причем спутник f_i является внутренним. Согласно теореме 6 [27], формация $\mathfrak{N}_\pi\mathfrak{F}_i$ имеет такой внутренний ω-композиционный спутник $\tilde{f_i}$, что $\tilde{f_i}(q) = \mathfrak{F}_i$ для каждого $q \in \pi$, $\tilde{f_i}(q) = f_i(q)$ для всякого $q \in \omega\setminus\pi$ и $\tilde{f_i}(\omega') = \mathfrak{N}_\pi\mathfrak{F}_i$. По условию $\Theta^{\omega_c} = \Theta$ — индуктивная решетка формаций. Следовательно, $\vee_\Theta(\mathfrak{F}_i \mid i \in I) = \vee_{\Theta^{\omega_c}}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I) = CF_\omega\big(\vee_\Theta(f_i \mid i \in I)\big)$. Применяя теперь теорему 6 [27], заключаем, что формация $\mathfrak{X}_2$ имеет такой ω-композиционный спутник x_2, что $x_2(q) = \vee_\Theta(\mathfrak{F}_i \mid i \in I)$ для любого $q \in \pi$, $x_2(q) = \vee_\Theta(f_i \mid i \in I)(q) = \vee_\Theta(f_i(q) \mid i \in I)$ для всех $q \in \omega \setminus \pi$ и $x_2(\omega') = \mathfrak{N}_\pi\big(\vee_\Theta(\mathfrak{F}_i \mid i \in I)\big) = \mathfrak{X}_2$. Проводя аналогичные рассуждения с учетом равенств $\mathfrak{N}_\pi\mathfrak{F}_i = CF_\omega(\tilde{f_i})$ $(i \in I)$, видим, что формация $\mathfrak{X}_1$ имеет такой ω-композиционный спутник x_1, что $x_1(q) = \vee_\Theta(\mathfrak{F}_i \mid i \in I)$ для каждого $q \in \pi$, $x_1(q) = \vee_\Theta(f_i(q) \mid i \in I)$ для всякого $q \in \omega \setminus \pi$ и $x_1(\omega') = \mathfrak{X}_1$. Сравнивая спутники x_1 и x_2, заключаем, что $x_1(q) = x_2(q)$ для любого $q \in \omega$. Заметим также, что спутники x_1 и x_2 — внутренние.

Перейдем теперь непосредственно к доказательству включения $\mathfrak{X}_2 \subseteq \mathfrak{X}_1$. Допустим, что $\mathfrak{X}_2 \setminus \mathfrak{X}_1 \neq \varnothing$, и пусть A — группа минимального порядка из $\mathfrak{X}_2\setminus\mathfrak{X}_1$. Тогда A — монолитическая группа и $P = \mathrm{Soc}(A) = A^{\mathfrak{X}_1}$.

Если P — неабелева группа или абелева π'-группа, то $A \in \vee_\Theta(\mathfrak{F}_i \mid i \in I) \subseteq \vee_\Theta\big(\mathfrak{N}_\pi\mathfrak{F}_i \mid i \in I\big) = \mathfrak{X}_1$. Противоречие. Значит, P — абелева p-группа для некоторого простого числа $p \in \pi \subseteq \omega$. Тогда, так как $\varnothing \neq \mathfrak{X}_1$ — ω-композиционная формация и по условию $\Theta^{\omega_c} = \Theta$, вследствие леммы 3 имеем $P = C^p(A) = O_p(A)$.

Выше было установлено, что $x_1(q) = x_2(q)$ для любого $q \in \omega$. Учитывая, что $A \in \mathfrak{X}_2$ и $p \in \omega$, получаем

$$A/O_p(A) = A/P = A/C^p(A) \in x_2(p) = x_1(p).$$

Поскольку спутник x_1 является внутренним, то, применяя лемму 4 [27], заключаем, что $A \in \mathfrak{X}_1$. Противоречие. Следовательно, $\mathfrak{X}_2 \subseteq \mathfrak{X}_1$. Таким образом, $\mathfrak{X}_1 = \mathfrak{X}_2$. Предложение доказано.

Предложение 2. *Пусть $\Theta^{\omega_c} = \Theta$ — индуктивная решетка формаций, $\pi \subseteq \omega$ — непустое множество простых чисел, и для любой любой формации $\mathfrak{H} \in \Theta$ имеет место $\mathfrak{N}_\pi\mathfrak{H} \in \Theta$. И пусть $v(x_1, \ldots, x_n)$ — терм сигнатуры $\{\cap, \vee_\Theta\}$, $\mathfrak{F}_i$ — Θ-формация для каждого $i = 1, \ldots, n$. Тогда*

$$v(\mathfrak{N}_\pi\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{N}_\pi\mathfrak{F}_n) = \mathfrak{N}_\pi v(\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_n).$$

Доказательство. Проведем индукцию по числу t вхождений символов из $\{\cap, \vee_\Theta\}$ в терм v.

При $t = 0$ утверждение леммы очевидно.

При $t = 1$ лемма верна ввиду леммы 13 [3] (с учетом радикальности формации $\mathfrak{N}_\pi$) и предложения 1.

Предположим теперь, что терм v имеет $t > 1$ вхождений символов из $\{\cap, \vee_\Theta\}$. Пусть терм v имеет вид

$$v(x_1, \ldots, x_n) = v_1(x_{i_1}, \ldots, x_{i_r})\Delta v_2(x_{j_1}, \ldots, x_{j_s}),$$

где $\Delta \in \{\cap, \vee_\Theta\}$, r, $s \in \mathbb{N}$,

$$\{x_{i_1}, \ldots, x_{i_r}\} \cup \{x_{j_1}, \ldots, x_{j_s}\} = \{x_1, \ldots, x_n\},$$

и лемма для термов v_1 и v_2 верна. Тогда

$$v_1(\mathfrak{N}_\pi\mathfrak{F}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{N}_\pi\mathfrak{F}_{i_r}) = \mathfrak{N}_\pi v_1(\mathfrak{F}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{i_r}),$$
$$v_2(\mathfrak{N}_\pi\mathfrak{F}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{N}_\pi\mathfrak{F}_{j_s}) = \mathfrak{N}_\pi v_2(\mathfrak{F}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{j_s}).$$

Следовательно, по индукции

$$\begin{aligned} v(\mathfrak{N}_\pi\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{N}_\pi\mathfrak{F}_n) &= v_1(\mathfrak{N}_\pi\mathfrak{F}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{N}_\pi\mathfrak{F}_{i_r})\Delta v_2(\mathfrak{N}_\pi\mathfrak{F}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{N}_\pi\mathfrak{F}_{j_s}) = \\ &= \mathfrak{N}_\pi v_1(\mathfrak{F}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{i_r})\Delta\mathfrak{N}_\pi v_2(\mathfrak{F}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{j_s}) = \\ &= \mathfrak{N}_\pi\big(v_1(\mathfrak{F}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{i_r})\Delta v_2(\mathfrak{F}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{j_s})\big) = \mathfrak{N}_\pi v(\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_n). \end{aligned}$$

Предложение доказано.

Предложение 3. *Пусть $\mathrm{H}^{\omega_l} = \mathrm{H}$ — индуктивная решетка формаций, $\mathfrak{F}_i \in \mathrm{H}$, где $i \in I$, и π — такое непустое множество простых чисел, что $\pi \subseteq \omega$. Тогда если для любой формации $\mathfrak{H} \in \mathrm{H}$ формация $\mathfrak{N}_\pi\mathfrak{H} \in \mathrm{H}$, то*

$$\vee_{\mathrm{H}}\big(\mathfrak{N}_\pi\mathfrak{F}_i \mid i \in I\big) = \mathfrak{N}_\pi\big(\vee_{\mathrm{H}}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I)\big).$$

Доказательство в целом дословно повторяет доказательство предложения 1. Используя лемму 1.5.2 [1], с. 61, теорему 7 [26] и лемму 4 [26] вместо леммы 8 [35], теоремы 6 [27] и леммы 4 [27] соответственно, заменяя каждое вхождение символов Θ, Θ^{ω_c} на символы H, H^{ω_l} соответственно и рассматривая вместо ω-композиционных спутников ω-локальные с учетом того, что каждая ω-насыщенная формация является ω-композиционной, получаем требуемое. Предложение доказано.

Предложение 4. *Пусть $\mathrm{H}^{\omega_l} = \mathrm{H}$ — индуктивная решетка формаций, $\pi \subseteq \omega$ — непустое множество простых чисел, и для любой формации $\mathfrak{H} \in \mathrm{H}$ имеет место $\mathfrak{N}_\pi\mathfrak{H} \in \mathrm{H}$. Предположим также, что $v(x_1, \ldots, x_n)$ — терм сигнатуры $\{\cap, \vee_{\mathrm{H}}\}$, $\mathfrak{F}_i$ — H-формация для каждого $i = 1, \ldots, n$. Тогда*

$$v(\mathfrak{N}_\pi\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{N}_\pi\mathfrak{F}_n) = \mathfrak{N}_\pi v(\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_n).$$

Доказательство совершенно аналогично доказательству предложения 2. Необходимо лишь заменить каждое вхождение символов Θ, Θ^{ω_c} на символы H, H^{ω_l} соответственно (т. е. рассмотреть соответствующие решетки формаций) и применить предложение 3 вместо предложения 1. Предложение доказано.

Лемма 9 (см. [26], теоремы 7 и 8; [31], теорема 3). *Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{H}$, где $\mathfrak{M} = LF_\omega(m)$ для некоторого внутреннего спутника m. Тогда если $\mathfrak{H}$ — такая непустая формация, что $\pi(\mathfrak{H}) \cap \omega \subseteq \pi(\mathfrak{M})$, то $\mathfrak{F} = LF_\omega(f)$, где $f(\omega') = m(\omega')\mathfrak{H}$ и*

$$f(p) = \begin{cases} m(p)\mathfrak{H}, & \text{если } p \in \pi(\mathfrak{M}) \cap \omega, \\ \varnothing, & \text{если } p \in \omega \setminus \pi(\mathfrak{M}). \end{cases}$$

Доказательство. Пусть $\mathfrak{M}_1 = LF_\omega(f)$. Покажем, что $\mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{F}$. Предположим, что это неверно, и пусть G — группа минимального порядка из $\mathfrak{M}_1 \setminus \mathfrak{F}$. Тогда G монолитична, и $L = G^{\mathfrak{F}}$ — ее монолит. Ввиду включения $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{M}\mathfrak{H} = \mathfrak{F}$ имеем $G^{\mathfrak{H}} \neq 1$. Поэтому $L \subseteq G^{\mathfrak{H}}$. Кроме того, поскольку $G/L \in \mathfrak{F}$, имеем $(G/L)^{\mathfrak{H}} = G^{\mathfrak{H}}/L$ и, следовательно, $G^{\mathfrak{H}}/L \in \mathfrak{M}$.

Предположим, что $G_{\omega d} = 1$. Тогда, учитывая, что $G \in \mathfrak{M}_1$, получаем

$$G \cong G/1 = G/G_{\omega d} \in f(\omega') = m(\omega')\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{M}\mathfrak{H} = \mathfrak{F}.$$

Противоречие. Следовательно, $G_{\omega d} \neq 1$ и L является ωd-группой (L — монолит G). Пусть $p \in \pi(L) \cap \omega$. Тогда если L — неабелева группа, то, очевидно, $F_p(G) = 1$ и

$$G \cong G/1 = G/F_p(G) \in f(p) = m(p)\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{M}\mathfrak{H} = \mathfrak{F}.$$

Противоречие. Значит, L является p-группой и, так как $G/F_p(G) \in f(p) = m(p)\mathfrak{H}$ и $p \in \pi(L) \cap \omega \subseteq \pi(G^{\mathfrak{H}}) \cap \omega$, то

$$(G/F_p(G))^{\mathfrak{H}} = G^{\mathfrak{H}}F_p(G)/F_p(G) \cong G^{\mathfrak{H}}/(G^{\mathfrak{H}} \cap F_p(G)) = G^{\mathfrak{H}}/F_p(G^{\mathfrak{H}}) \in m(p).$$

Выше было показано, что $G^{\mathfrak{H}}/L \in \mathfrak{M}$. Так как L — p-группа, то из последнего для любого $q \in \big(\pi(G^{\mathfrak{H}}) \cap \omega\big) \setminus \{p\}$ имеем $F_q(G^{\mathfrak{H}}/L) = F_q(G^{\mathfrak{H}})/L$, и следовательно,

$$G^{\mathfrak{H}}/F_q(G^{\mathfrak{H}}) \cong (G^{\mathfrak{H}}/L)/(F_q(G^{\mathfrak{H}})/L) = (G^{\mathfrak{H}}/L)/F_q(G^{\mathfrak{H}}/L) \in m(q).$$

Таким образом, для любого $r \in \pi(G^{\mathfrak{H}}) \cap \omega$ имеет место $G^{\mathfrak{H}}/F_r(G^{\mathfrak{H}}) \in m(r)$. Кроме того, очевидно, $(G^{\mathfrak{H}}/L)_{\omega d} = (G^{\mathfrak{H}})_{\omega d}/L$. Поэтому

$$G^{\mathfrak{H}}/(G^{\mathfrak{H}})_{\omega d} \cong (G^{\mathfrak{H}}/L)/((G^{\mathfrak{H}})_{\omega d}/L) = (G^{\mathfrak{H}}/L)/(G^{\mathfrak{H}}/L)_{\omega d} \in m(\omega').$$

Значит, $G^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{M}$, или $G \in \mathfrak{M}\mathfrak{H} = \mathfrak{F}$. Полученное противоречие показывает, что $\mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{F}$.

Предположим теперь, что $\mathfrak{F} \nsubseteq \mathfrak{M}_1$, и G — группа минимального порядка из $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{M}_1$. Тогда группа G является монолитической, и $L = G^{\mathfrak{M}_1}$ — ее монолит. Предположим, что $G^{\mathfrak{H}} = 1$. Тогда $G \in \mathfrak{H} \subseteq m(\omega')\mathfrak{H} = f(\omega')$ и $G/F_p(G) \in \mathfrak{H} \subseteq m(p)\mathfrak{H} = f(p)$ для всех $p \in \pi(G) \cap \omega$. Следовательно, $G \in \mathfrak{M}_1$. Получили противоречие. Следовательно, $G^{\mathfrak{H}} \neq 1$. Так как $G \in \mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{H}$, то $G^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{M}$, и следовательно, $G^{\mathfrak{H}}/(G^{\mathfrak{H}})_{\omega d} \in m(\omega')$.

Поскольку при этом

$$G^{\mathfrak{H}}/(G^{\mathfrak{H}})_{\omega d} = G^{\mathfrak{H}}/(G^{\mathfrak{H}} \cap G_{\omega d}) \cong G^{\mathfrak{H}}G_{\omega d}/G_{\omega d} = (G/G_{\omega d})^{\mathfrak{H}},$$

то

$$G/G_{\omega d} \in m(\omega')\mathfrak{H} = f(\omega').$$

Далее, несложно видеть, что $\pi(G^{\mathfrak{H}}) \cap \omega = \pi(G) \cap \omega$. Действительно, последнее имеет место в силу очевидного равенства $\pi(G^{\mathfrak{H}}) \cup \pi(G/G^{\mathfrak{H}}) = \pi(G)$, а также включения $\pi(G/G^{\mathfrak{H}}) \cap \omega \subseteq \pi(G^{\mathfrak{H}})$, которое непосредственно следует из условия. Следовательно, если $p \in \pi(G) \cap \omega$, имеем

$$(G/F_p(G))^{\mathfrak{H}} = G^{\mathfrak{H}}F_p(G)/F_p(G) \cong G^{\mathfrak{H}}/(G^{\mathfrak{H}} \cap F_p(G)) = G^{\mathfrak{H}}/F_p(G^{\mathfrak{H}}) \in m(p).$$

Из последнего следует, что $G/F_p(G) \in m(p)\mathfrak{H} = f(p)$ для всех $p \in \pi(G) \cap \omega$. Значит, $G \in LF_\omega(f) = \mathfrak{M}_1$. Противоречие. Следовательно, $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{M}_1$. Таким образом, $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}_1$. Лемма доказана.

В дальнейшем для любой непустой формации $\mathfrak{F}$ мы полагаем $\mathfrak{F}^0 = (1)$, где (1) — класс (формация) единичных групп.

Лемма 10. *Пусть $\mathfrak{H}$ — произвольная τ-замкнутая формация, π — такое множество простых чисел, что $\pi(\mathfrak{H}) \cap \omega \subseteq \pi$, n — целое неотрицательное число. И пусть f — такая формационная ω-функция, что $f(q) = \mathfrak{N}_\pi^{n-1}\mathfrak{H}$ для каждого $q \in \pi \cap \omega$, $f(q) = \varnothing$ для всякого $q \in \omega \setminus \pi$ и $f(\omega') = \mathfrak{N}_{\pi\setminus\omega}\mathfrak{N}_\pi^{n-1}\mathfrak{H}$, где $n \geq 1$. Тогда формация $\mathfrak{N}_\pi^n\mathfrak{H}$ является τ-замкнутой n-кратно (разрешимо) ω-насыщенной. Кроме того, если $n \geq 1$, то $\mathfrak{N}_\pi^n\mathfrak{H} = LF_\omega(f) = CF_\omega(f)$, причем формационная функция f $l^\tau_{\omega_{n-1}}$-значна ($c^\tau_{\omega_{n-1}}$-значна). В частности, если формация $\mathfrak{H}$ такова, что $\pi(\mathfrak{H}) \cap \omega \subseteq \{p\}$ для некоторого простого числа p, то формация $\mathfrak{N}_p\mathfrak{H}$ является τ-замкнутой тотально (разрешимо) ω-насыщенной.*

Доказательство. Если $\mathfrak{H} = \varnothing$, то утверждение леммы тривиально. Поэтому в дальнейшем считаем, что $\mathfrak{H}$ — непустая формация.

Предположим, что $\pi = \varnothing$. Тогда $\mathfrak{H}$ является, очевидно, $\mathfrak{G}_{\omega'}$-формацией. Следовательно, так как $\mathfrak{G}_{\omega'} \subseteq E(\mathfrak{L}')$, где $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}^+$ — такой непустой класс абелевых простых групп, что $\omega = \pi(\mathfrak{L})$ (см. замечание 3 [27]), то ввиду примера 1 [26] и примера 1 [27] заключаем, что формация $\mathfrak{N}_\pi^n\mathfrak{H} = \mathfrak{N}_\varnothing^n\mathfrak{H} = (1)^n\mathfrak{H} = \mathfrak{H}$ является тотально (разрешимо) ω-насыщенной. (В этом случае $\mathfrak{H} = LF_\omega(f) = CF_\omega(f)$, где $f(q) = \varnothing$ для всех $q \in \omega = \omega \setminus \pi$ и $f(\omega') = \mathfrak{H} = \mathfrak{N}_{\pi\setminus\omega}\mathfrak{N}_\pi^{n-1}\mathfrak{H}$, $n \geq 1$.) Значит, поскольку $\mathfrak{H}$ τ-замкнута, в рассматриваемом случае утверждение леммы верно.

Пусть теперь $\pi \neq \varnothing$. Заметим, что поскольку для любого натурального n формация $\mathfrak{N}_\pi^n$ наследственна, а формация $\mathfrak{H}$ τ-замкнута, то ввиду леммы 11 [24] формация $\mathfrak{N}_\pi^n\mathfrak{H}$ τ-замкнута.

Индукцией по n покажем, что $\mathfrak{N}_\pi^n\mathfrak{H}$ является n-кратно (разрешимо) ω-насыщенной формацией и, кроме того, если $n \geq 1$, то $\mathfrak{N}_\pi^n\mathfrak{H} = LF_\omega(f) = CF_\omega(f)$, где f — спутник из условия леммы.

При $n = 0$ утверждение тривиально.

Пусть $n = 1$. Заметим, что согласно лемме 10 [26] и лемме 11 [27], $\mathfrak{N}_\pi = LF_\omega(m) = CF_\omega(m)$, где m — такая формационная ω-функция, что $m(q) = (1)$ для всякого $q \in \pi \cap \omega$, $m(q) = \varnothing$ для любого $q \in \omega \setminus \pi$ и $m(\omega') = \mathfrak{N}_{\pi\setminus\omega}$ (здесь мы воспользовались тем, что для произвольной нильпотентной группы G нормальная подгруппа $G_{\omega d}$ совпадает с $O_\omega(G)$ и является холловой в G; в этой связи см. также определение ω-насыщенной формации, предложенное В. А. Ведерниковым и М. М. Сорокиной [37]). Несложно также видеть, что формационная ω-функция m является минимальной. Далее, из условия следует, что $\pi\big(\mathrm{Com}(\mathfrak{H})\big) \cap \omega \subseteq \pi(\mathfrak{H}) \cap \omega \subseteq \pi = \pi(\mathfrak{N}_\pi) = \pi\big(\mathrm{Com}(\mathfrak{N}_\pi)\big)$. Следовательно, вследствие леммы 9 и леммы 4.5 [21] (см. также теорема 2 [31]) $\mathfrak{N}_\pi\mathfrak{H} = LF_\omega(f) = CF_\omega(f)$, где для формационной функции f имеет место $f(q) = m(q)\mathfrak{H} = (1)\mathfrak{H} = \mathfrak{H} = \mathfrak{N}_\pi^0\mathfrak{H}$ для каждого $q \in \pi \cap \omega$, $f(q) = \varnothing$ для всякого $q \in \omega \setminus \pi$ и $f(\omega') = m(\omega')\mathfrak{H} = \mathfrak{N}_{\pi\setminus\omega}\mathfrak{H} = \mathfrak{N}_{\pi\setminus\omega}\mathfrak{N}_\pi^0\mathfrak{H}$. Таким образом, $\mathfrak{N}_\pi\mathfrak{H}$ — (разрешимо) ω-насыщенная формация. Кроме того, поскольку формация $\mathfrak{N}_{\pi\setminus\omega}$ наследственна, а $\mathfrak{H}$ τ-замкнута, то ввиду леммы 11 [24] формация $\mathfrak{N}_{\pi\setminus\omega}\mathfrak{H}$ τ-замкнута. Следовательно, формационная ω-функция f τ-значна.

Предположим, что $n > 1$ и утверждение справедливо для $n-1$. Так как по условию $\pi(\mathfrak{H}) \cap \omega \subseteq \pi$, то

$$\pi\big(\mathrm{Com}(\mathfrak{N}_\pi^{n-1}\mathfrak{H})\big) \cap \omega \subseteq \pi(\mathfrak{N}_\pi^{n-1}\mathfrak{H}) \cap \omega \subseteq \big(\pi(\mathfrak{N}_\pi^{n-1}) \cup \pi(\mathfrak{H})\big) \cap \omega = (\pi(\mathfrak{N}_\pi^{n-1}) \cap \omega) \cup (\pi(\mathfrak{H}) \cap \omega) =$$
$$= (\pi \cap \omega) \cup (\pi(\mathfrak{H}) \cap \omega) \subseteq (\pi \cap \omega) \cup \pi = \pi = \pi(\mathfrak{N}_\pi) = \pi\big(\mathrm{Com}(\mathfrak{N}_\pi)\big).$$

Далее, применяя лемму 9 и лемму 4.5 [21], видим, что $\mathfrak{N}_\pi^n\mathfrak{H} = \mathfrak{N}_\pi(\mathfrak{N}_\pi^{n-1}\mathfrak{H}) = LF_\omega(f) = CF_\omega(f)$, где $f(q) = m(q)(\mathfrak{N}_\pi^{n-1}\mathfrak{H}) = (1)(\mathfrak{N}_\pi^{n-1}\mathfrak{H}) = \mathfrak{N}_\pi^{n-1}\mathfrak{H}$ для любого $q \in \pi \cap \omega$, $f(q) = \varnothing$ для каждого $q \in \omega \setminus \pi$ и $f(\omega') = m(\omega')(\mathfrak{N}_\pi^{n-1}\mathfrak{H}) = \mathfrak{N}_{\pi\setminus\omega}(\mathfrak{N}_\pi^{n-1}\mathfrak{H}) = \mathfrak{N}_{\pi\setminus\omega}\mathfrak{N}_\pi^{n-1}\mathfrak{H}$. По индуктивному предположению формация $\mathfrak{N}_\pi^{n-1}\mathfrak{H}$ — $(n-1)$-кратно (разрешимо) ω-насыщенна. Кроме того, так как формация $\mathfrak{N}_{\pi\setminus\omega}$ является, очевидно, тотально (разрешимо) ω-насыщенной, то ввиду следствия 9 [26] и следствия 4 [27] формация $\mathfrak{N}_{\pi\setminus\omega}(\mathfrak{N}_\pi^{n-1}\mathfrak{H}) = \mathfrak{N}_{\pi\setminus\omega}\mathfrak{N}_\pi^{n-1}\mathfrak{H}$ — $(n-1)$-кратно (разрешимо) ω-насыщенна. Следовательно, $\mathfrak{N}_\pi^n\mathfrak{H}$ — n-кратно (разрешимо) ω-насыщенная формация. Кроме того, поскольку формация $\mathfrak{N}_{\pi\setminus\omega}$ наследственна, а $\mathfrak{N}_\pi^{n-1}\mathfrak{H}$ τ-замкнута (см. выше), то ввиду леммы 11 [24] формация $\mathfrak{N}_{\pi\setminus\omega}\mathfrak{N}_\pi^{n-1}\mathfrak{H}$ является τ-замкнутой. Таким образом, все значения формационной ω-функции f являются τ-замкнутыми $(n-1)$-кратно (разрешимо) ω-насыщенными формациями.

Если для формации $\mathfrak{H}$ имеет место $\pi(\mathfrak{H}) \cap \omega \subseteq \{p\}$ для некоторого простого p, то, полагая $\pi = \{p\}$, ввиду доказанного получаем, что для любого $m \geq 1$ формация $\mathfrak{N}_p\mathfrak{H} = (\mathfrak{N}_p)^m\mathfrak{H}$ является τ-замкнутой m-кратно (разрешимо) ω-насыщенной. Следовательно, $\mathfrak{N}_p\mathfrak{H}$ — τ-замкнутая тотально (разрешимо) ω-насыщенная формация. Лемма доказана.

Следствие 4. *Пусть $\mathfrak{H}$ — произвольная τ-замкнутая формация. Тогда для любого простого p формация $\mathfrak{N}_p\mathfrak{H}$ является τ-замкнутой тотально (разрешимо) p-насыщенной.*

Доказательство следующей леммы аналогично доказательству леммы 10 и использует в своем рассуждении, в отличие от последнего, только пример 1 [27], лемму 11 [24], лемму 11 [27], лемму 4.5 [21] (см. также теорема 2 [31]) и следствие 4 [27].

Лемма 11. *Пусть $\mathfrak{H}$ — произвольная τ-замкнутая формация, π — такое множество простых чисел, что $\pi\big(\mathrm{Com}(\mathfrak{H})\big) \cap \omega \subseteq \pi$, n — целое неотрицательное число. И пусть f — такой ω-композиционный спутник, что $f(q) = \mathfrak{N}_\pi^{n-1}\mathfrak{H}$ для каждого $q \in \pi \cap \omega$, $f(q) = \varnothing$ для всякого $q \in \omega \setminus \pi$ и $f(\omega') = \mathfrak{N}_{\pi\setminus\omega}\mathfrak{N}_\pi^{n-1}\mathfrak{H}$, где $n \geq 1$. Тогда формация $\mathfrak{N}_\pi^n\mathfrak{H}$ является τ-замкнутой n-кратно ω-композиционной. Кроме того, если $n \geq 1$, то $\mathfrak{N}_\pi^n\mathfrak{H} = CF_\omega(f)$, причем спутник f $c^\tau_{\omega_{n-1}}$-значен. В частности, если формация $\mathfrak{H}$ такова, что $\pi\big(\mathrm{Com}(\mathfrak{H})\big) \cap \omega \subseteq \{p\}$ для некоторого простого числа p, то формация $\mathfrak{N}_p\mathfrak{H}$ является τ-замкнутой тотально ω-композиционной.*

Лемма 12 ([12], лемма 3.1). *Пусть $\mathfrak{H}$ — произвольная τ-замкнутая формация, π — такое множество простых чисел, что $\pi\big(\mathrm{Com}(\mathfrak{H})\big) \cap \omega \subseteq \pi$. Тогда формация $\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{H}$ является τ-замкнутой тотально ω-композиционной. Кроме того, $\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{H} = CF_\omega(f)$, где f — такой (канонический) ω-композиционный спутник, что $f(q) = \mathfrak{S}_\pi\mathfrak{H}$ для любого $q \in \pi \cap \omega$, $f(q) = \varnothing$ для каждого $q \in \omega \setminus \pi$ и $f(\omega') = \mathfrak{S}_\pi\mathfrak{H}$.*

Доказательство. Поскольку для $\mathfrak{H} = \varnothing$ утверждение леммы тривиально, в дальнейшем считаем, что формация $\mathfrak{H}$ не является пустой.

Если $\pi = \varnothing$, то $\mathfrak{H}$ является, очевидно, $E(\mathfrak{L}')$-формацией, где $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}^+$ — такой непустой класс абелевых простых групп, что $\omega = \pi(\mathfrak{L})$ (см. замечание 3 [27]). Следовательно, ввиду примера 1 [27] $\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{H} = \mathfrak{S}_\varnothing\mathfrak{H} = (1)\mathfrak{H} = \mathfrak{H}$ — тотально ω-композиционная формация, поскольку $\mathfrak{H} = CF_\omega(f)$, где $f(q) = \varnothing$ для каждого $q \in \omega = \omega \setminus \pi$ и $f(\omega') = \mathfrak{H}$. Теперь вследствие τ-замкнутости $\mathfrak{H}$ заключаем, что утверждение леммы в данном случае верно.

Предположим, что $\pi \neq \varnothing$. Покажем, что формация $\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{H}$ является тотально разрешимо ω-насыщенной. Пусть $\mathfrak{X} = (Z_p \mid p \in \pi)$, где Z_p — группа простого порядка p. Тогда, очевидно, $\mathfrak{S}_\pi = E(\mathfrak{X})$. Заметим также, что $\pi\big(\mathrm{Com}(\mathfrak{X})\big) = \pi\big(\mathrm{Com}(\mathfrak{S}_\pi)\big) = \pi$. В таком случае ввиду леммы 2.6 [12] $\mathfrak{S}_\pi = CF_\omega(m)$, где $m(q) = \mathfrak{S}_\pi$ для любого $q \in \pi \cap \omega$, $m(q) = \varnothing$ для каждого $q \in \omega \setminus \pi$ и $m(\omega') = \mathfrak{S}_\pi$. Несложно видеть, что спутник m является каноническим; более того, ввиду насыщенности формации $\mathfrak{S}_\pi$ из следствия 2 вытекает, что также имеет место $\mathfrak{S}_\pi = LF_\omega(m)$. Далее, из условия следует, что $\pi\big(\mathrm{Com}(\mathfrak{H})\big) \cap \omega \subseteq \pi = \pi\big(\mathrm{Com}(\mathfrak{S}_\pi)\big)$. Применяя теперь лемму 4.5 [21], заключаем, что формация $\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{H}$ имеет такой ω-композиционный спутник f (очевидно, канонический), что $f(q) = m(q)\mathfrak{H} = \mathfrak{S}_\pi\mathfrak{H}$ для каждого $q \in \pi \cap \omega$, $f(q) = \varnothing$ для всякого $q \in \omega \setminus \pi$ и

$f(\omega') = m(\omega')\mathfrak{H} = \mathfrak{S}_\pi\mathfrak{H}$. Поэтому формация $\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{H}$ является n-кратно разрешимо ω-насыщенной для любого натурального n. Следовательно, $\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{H}$ — тотально разрешимо ω-насыщенная формация.

Поскольку формация $\mathfrak{S}_\pi$ наследственна, а $\mathfrak{H}$ τ-замкнута, то ввиду леммы 11 [24] формация $\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{H}$ является τ-замкнутой. Таким образом, $\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{H}$ — τ-замкнутая тотально ω-композиционная формация, и, кроме того, $\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{H} = LF_\omega(f) = CF_\omega(f)$, где f — формационная функция из условия леммы. Лемма доказана.

Предложение 5 (см. [3], лемма 11). *Пусть $\mathfrak{H}$ — произвольная τ-замкнутая формация, π — такое множество простых чисел, что $\pi(\mathfrak{H}) \cap \omega \subseteq \pi$. Тогда формация $\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{H}$ является τ-замкнутой тотально (разрешимо) ω-насыщенной. Кроме того, $\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{H} = LF_\omega(f) = CF_\omega(f)$, где f — такая (каноническая) формационная ω-функция, что $f(q) = \mathfrak{S}_\pi\mathfrak{H}$ для любого $q \in \pi \cap \omega$, $f(q) = \varnothing$ для всякого $q \in \omega \setminus \pi$ и $f(\omega') = \mathfrak{S}_\pi\mathfrak{H}$.*

Доказательство. Ввиду тривиальности утверждения для $\mathfrak{H} = \varnothing$, считаем, что $\mathfrak{H}$ — непустая формация. Далее, предполагая, как и при доказательстве леммы 10, что $\pi = \varnothing$, видим, что $\mathfrak{H}$ является $\mathfrak{G}_{\omega'}$-формацией. Поэтому, учитывая включение $\mathfrak{G}_{\omega'} \subseteq E(\mathfrak{L}')$, где $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}^+$ — такой непустой класс абелевых простых групп, что $\omega = \pi(\mathfrak{L})$ (см. замечание 3 [27]), вследствие примера 1 [26] и примера 1 [27] заключаем, что формация $\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{H} = \mathfrak{S}_\varnothing\mathfrak{H} = (1)\mathfrak{H} = \mathfrak{H}$ является тотально (разрешимо) ω-насыщенной. (В данном случае $\mathfrak{H} = LF_\omega(f) = CF_\omega(f)$, где $f(q) = \varnothing$ для всякого $q \in \omega = \omega \setminus \pi$ и $f(\omega') = \mathfrak{H}$.) Ввиду τ-замкнутости формации $\mathfrak{H}$ видим, что в рассматриваемом случае утверждение леммы верно.

Пусть теперь $\pi \neq \varnothing$. Заметим, что так как формация $\mathfrak{S}_\pi$ наследственна, а $\mathfrak{H}$ τ-замкнута, то ввиду леммы 11 [24] формация $\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{H}$ является τ-замкнутой.

Покажем, что $\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{H}$ является тотально (разрешимо) ω-насыщенной формацией, и, кроме того, $\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{H} = LF_\omega(f) = CF_\omega(f)$, где f — формационная функция из условия леммы.

Из докательства леммы 12 следует, что $\mathfrak{S}_\pi = LF_\omega(m) = CF_\omega(m)$, где m — такая (каноническая) формационная ω-функция, что $m(q) = \mathfrak{S}_\pi$ для любого $q \in \pi \cap \omega$, $m(q) = \varnothing$ для всех $q \in \omega \setminus \pi$ и $m(\omega') = \mathfrak{S}_\pi$. Кроме того, из условия вытекает, что $\pi\big(\mathrm{Com}(\mathfrak{H})\big) \cap \omega \subseteq \pi(\mathfrak{H}) \cap \omega \subseteq \pi = \pi(\mathfrak{S}_\pi) = \pi\big(\mathrm{Com}(\mathfrak{S}_\pi)\big)$. Следовательно, ввиду леммы 9 и леммы 4.5 [21] $\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{H} = LF_\omega(f) = CF_\omega(f)$, где для формационной функции f (очевидно, канонической) имеет место $f(q) = m(q)\mathfrak{H} = \mathfrak{S}_\pi\mathfrak{H}$ для каждого $q \in \pi \cap \omega$, $f(q) = \varnothing$ для всякого $q \in \omega \setminus \pi$ и $f(\omega') = m(\omega')\mathfrak{H} = \mathfrak{S}_\pi\mathfrak{H}$. Поэтому формация $\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{H}$ является n-кратно (разрешимо) ω-насыщенной для любого натурального n. Следовательно, $\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{H}$ — тотально (разрешимо) ω-насыщенная формация. Предложение доказано.

Пример 1. Пусть $\mathfrak{H}$ — такая непустая τ-замкнутая формация, что $\big(\pi(\mathfrak{H}) \setminus \pi\big(\mathrm{Com}(\mathfrak{H})\big)\big) \cap \omega \neq \varnothing$ и $p \in \big(\pi(\mathfrak{H}) \setminus \pi\big(\mathrm{Com}(\mathfrak{H})\big)\big) \cap \omega$ (например, $\mathfrak{H} = \mathrm{form}(A)$, где A — простая неабелева группа такая, что $p \in \pi(A) \cap \omega$, $\tau \leq \tau_{sn}$). И пусть π — такое множество простых чисел, что $\pi\big(\mathrm{Com}(\mathfrak{H})\big) \cap \omega \subseteq \pi$, причем $p \notin \pi$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Тогда формация $\mathfrak{N}_\pi^n\mathfrak{H} \in c_{\omega_n}^\tau \setminus l^\omega$, а формация $\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{H} \in c_{\omega_\infty}^\tau \setminus l^\omega$. Действительно, ввиду леммы 11 формация $\mathfrak{N}_\pi^n\mathfrak{H} \in c_{\omega_n}^\tau$, а ввиду леммы 12 формация $\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{H} \in c_{\omega_\infty}^\tau$. Предположим, что $\mathfrak{N}_\pi^n\mathfrak{H} \in l^\omega$. Тогда, в частности, так как $p \in \omega$, формация $\mathfrak{N}_\pi^n\mathfrak{H}$ является p-насыщенной. Поскольку $p \notin \pi = \pi(\mathfrak{N}_\pi^n)$ и $\mathfrak{N}_\pi^n$ — насыщенная формация, то из последнего вследствие теоремы 8 [26] следует, что формация $\mathfrak{H}$ является p-насыщенной. Учитывая, что $\mathfrak{H} \neq \varnothing$ и $p \in \pi(\mathfrak{H})$, ввиду теоремы 1 [26] заключаем, что $\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{H}$, и следовательно, $p \in \pi\big(\mathrm{Com}(\mathfrak{H})\big)$; противоречие. Значит, $\mathfrak{N}_\pi^n\mathfrak{H} \notin l^\omega$. Аналогично доказывается, что формация $\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{H} \notin l^\omega$. Таким образом, формация $\mathfrak{N}_\pi^n\mathfrak{H} \in c_{\omega_n}^\tau \setminus l^\omega$, а формация $\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{H} \in c_{\omega_\infty}^\tau \setminus l^\omega$. Из последнего, в частности, следует, что $\mathfrak{N}_\pi^n\mathfrak{H} \in c_{\omega_n}^\tau \setminus l_{\omega_m}^{\tau_1}$, а также $\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{H} \in c_{\omega_\infty}^\tau \setminus l_{\omega_m}^{\tau_1}$, где τ_1 — произвольный подгрупповой функтор, $m \in \mathbb{N}$ или $m = \infty$.

В связи с рассмотрением примера 1 укажем на формацию $\mathfrak{N}^*$ всех квазинильпотентных групп, которая является разрешимо насыщенной, однако не является насыщенной (см. пример 1.2.27 [1], с. 27). Напомним, что группа G называется *квазинильпотентной*, если для любого главного фактора H/K группы G каждый автоморфизм, индуцируемый произвольным элементом из G, является внутренним, или, что равносильно, если для любого главного фактора H/K группы G справедливо равенство $C_G(H/K)H = G$ (см. определение 13.2 [22], с. 124; [11], с. 155). Из последнего, в частности, следует, что $\mathfrak{N}^* = CF(f)$, где f — такой композиционный спутник, что $f(p) = (1)$ (см. также [32]).

3. Индексы ω-локальности и ω-композиционности: определения, основные свойства и примеры. Для дальнейшего изложения нам понадобятся следующие определения.

Определение 1. Для произвольной формации $\mathfrak{F}$ *индексом ω-локальности* назовем такое неотрицательное целое число n, для которого формация $\mathfrak{F}$ является n-кратно ω-насыщенной, но не является $(n+1)$-кратно ω-насыщенной. Если же формация $\mathfrak{F}$ является тотально ω-насыщенной, то будем говорить, что $\mathfrak{F}$ имеет *бесконечный индекс ω-локальности.*

Индекс ω-локальности формации $\mathfrak{F}$ будем обозначать через $\mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{F})$. При этом если $\omega = \{p\}$, то вместо символа $\mathrm{Ind}_{\{p\}_l}(\mathfrak{F})$ мы условимся использовать символ $\mathrm{Ind}_{p_l}(\mathfrak{F})$. Если же $\omega = \mathbb{P}$ — множество всех простых чисел, то вместо символа $\mathrm{Ind}_{\mathbb{P}_l}(\mathfrak{F})$ будем использовать символ $\mathrm{Ind}_l(\mathfrak{F})$ и говорить просто об *индексе локальности*, что согласуется с введенным в гл. 1 книги [6] определением (см. [6], с. 27).

Аналогично введем следующее понятие *индекса ω-композиционности* формации $\mathfrak{F}$.

Определение 2. Для всякой формации $\mathfrak{F}$ *индексом ω-композиционности* назовем такое неотрицательное целое число n, для которого формация $\mathfrak{F}$ является n-кратно ω-композиционной, но не является

$(n+1)$-кратно ω-композиционной. Для тотально ω-композиционной формации $\mathfrak{F}$ будем считать, что $\mathfrak{F}$ имеет *бесконечный индекс ω-композиционности.*

Индекс ω-композиционности формации $\mathfrak{F}$ условимся обозначать через $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{F})$.

Обозначения для индекса ω-композиционности формации $\mathfrak{F}$ в случаях, когда $\omega = \{p\}$ и $\omega = \mathbb{P}$, как и его название в последнем случае, совершенно аналогичны рассмотренным выше для индекса ω-локальности формации $\mathfrak{F}$.

Следующая лемма обобщает лемму 1.3.1 [6], с. 27 на случай частично насыщенных формаций.

Лемма 13. *Пусть $\mathfrak{F} = LF_\omega(F)$, где спутник F является каноническим, и $n \in \mathbb{N}$. Тогда в том и только в том случае* $\mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{F}) = n$, *когда найдется такое $p \in \pi(\mathfrak{F}) \cap \omega$, что* $\mathrm{Ind}_{\omega_l}\big(F(p)\big) = n-1$, *а для всех $q \in \big(\pi(\mathfrak{F}) \cap \omega\big) \setminus \{p\}$ имеет место* $\mathrm{Ind}_{\omega_l}\big(F(q)\big) \geq n-1$.

Доказательство. Необходимость. Предположим, что $\mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{F}) = n$. Тогда $\mathfrak{F}$ является l_n^ω-формацией, и ввиду леммы 11 [26] спутник F l_{n-1}^ω-значен. Следовательно, $\mathrm{Ind}_{\omega_l}\big(F(q)\big) \geq n-1$ для любого $q \in \pi(\mathfrak{F}) \cap \omega$. С другой стороны, условие $\mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{F}) = n$ влечет существование такого простого $p \in \pi(\mathfrak{F}) \cap \omega$, что $\mathrm{Ind}_{\omega_l}\big(F(p)\big) \leq n-1$. (Последнее имеет место также для любого ω-локального спутника формации $\mathfrak{F}$.) Следовательно, $\mathrm{Ind}_{\omega_l}\big(F(p)\big) = n-1$.

Достаточность. Предположим, что $\mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{F}) > n$. Тогда в силу доказанного выше $\mathrm{Ind}_{\omega_l}\big(F(q)\big) \geq \mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{F}) - 1 \geq n$ для каждого $q \in \pi(\mathfrak{F}) \cap \omega$. Полученное противоречие показывает, что $\mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{F}) = n$. Лемма доказана.

Аналогичные рассуждения (с использованием теоремы 3 [27] вместо леммы 11 [26]) приводят к следующему утверждению.

Лемма 14. *Пусть $\mathfrak{F} = CF_\omega(F)$, где спутник F является каноническим, и $n \in \mathbb{N}$. Тогда в том и только в том случае* $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{F}) = n$, *когда найдется такое $p \in \pi\big(\mathrm{Com}(\mathfrak{F})\big) \cap \omega$, что* $\mathrm{Ind}_{\omega_c}\big(F(p)\big) = n-1$, *а для всех $q \in \big(\pi\big(\mathrm{Com}(\mathfrak{F})\big) \cap \omega\big) \setminus \{p\}$ имеет место* $\mathrm{Ind}_{\omega_c}\big(F(q)\big) \geq n-1$.

Лемма 15. *Пусть $\mathfrak{F}$ — произвольная формация. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) если $\mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{F}) < \infty$, *то* $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{F}) \geq \mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{F})$. *В частности, если $\mathfrak{F}$ является l_n^ω-формацией и* $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{F}) = n$, *то* $\mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{F}) = n$;

2) если $\mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{F}) = \infty$, *то* $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{F}) = \infty$.

Доказательство. 1) Пусть $\mathfrak{H}$ — произвольная формация и $\mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{H}) = m$, где $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Тогда $\mathfrak{H}$ является l_m^ω-формацией. Учитывая следствие 1 (для тривиального подгруппового функтора τ), а также равенства $l_0^\omega = c_0^\omega = \mathcal{F}$, видим, что $\mathfrak{H}$ является также c_m^ω-формацией. Последнее ввиду определения индекса ω-композиционности влечет $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{H}) \geq m = \mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{H})$. Отметим, что в рассматриваемом случае, как следует из примера 1, $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{H})$ может быть равен ∞ (см. также пример 3). Понятно, что если $\mathfrak{H} \in l_n^\omega$ и $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{H}) = n$, то $\mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{H}) \geq n$ и, ввиду доказанного, $\mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{H}) \leq n$, что влечет $\mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{H}) = n$.

2) Данное утверждение следует из утверждения 1) и определений (см. также следствие 2). Лемма доказана.

Непосредственно из лемм 5 и 6 и определений вытекает следующая

Лемма 16. *Предположим, что $\mathfrak{F}$ — формация и $p \in \mathbb{P}$. Тогда имеют место следующие утверждения:*

1) если $\mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{F}) < \infty$, *то* $\mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{N}_p\mathfrak{F}) \geq \mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{F})$. *Если* $\mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{F}) = \infty$, *то* $\mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{N}_p\mathfrak{F}) = \infty$;

2) если $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{F}) < \infty$, *то* $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{N}_p\mathfrak{F}) \geq \mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{F})$. *Если* $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{F}) = \infty$, *то* $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{N}_p\mathfrak{F}) = \infty$.

Отметим, что в предыдущей лемме в случае, когда $\mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{F}) < \infty$ ($\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{F}) < \infty$), значение $\mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{N}_p\mathfrak{F})$ (соответственно $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{N}_p\mathfrak{F})$) может быть равным ∞. В самом деле, с учетом теоремы 1 [27], леммы 15 и леммы 5 для формации $\mathfrak{F} = \mathfrak{A}_p\mathfrak{N}_q$, где $\mathfrak{A}_p = \mathfrak{N}_p \cap \mathfrak{A}$ — формация всех абелевых p-групп, $q \in \mathbb{P} \setminus \{p\} = p'$, причем $\omega \ni p$, имеем $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{F}) = \mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{F}) = 0$, но в то же время $\mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{N}_p\mathfrak{F}) = \mathrm{Ind}_{\omega_l}\big(\mathfrak{N}_p(\mathfrak{A}_p\mathfrak{N}_q)\big) = \mathrm{Ind}_{\omega_l}\big((\mathfrak{N}_p\mathfrak{A}_p)\mathfrak{N}_q\big) = \mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{N}_p\mathfrak{N}_q) = \mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{N}_p\mathfrak{N}_q) = \infty$.

Замечание 1. Предположим, что $\mathfrak{F}$ является l_ω^τ-формацией (c_ω^τ-формацией) и $|\pi(\mathfrak{F}) \cap \omega| \leq 1$ (соответственно $|\pi\big(\mathrm{Com}(\mathfrak{F})\big) \cap \omega| \leq 1$), где τ — произвольный подгрупповой функтор. Тогда $\mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{F}) = \infty$ (соответственно $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{F}) = \infty$). Действительно, если $|\pi(\mathfrak{F}) \cap \omega| = 0$ (соответственно $|\pi\big(\mathrm{Com}(\mathfrak{F})\big) \cap \omega| = 0$), то $\pi(\mathfrak{F}) \cap \omega = \varnothing$ и $\mathfrak{F} \in \mathfrak{G}_{\omega'}$ (соответственно $\pi\big(\mathrm{Com}(\mathfrak{F})\big) \cap \omega = \varnothing$ и $\mathfrak{F} \in E(\mathfrak{L}')$, где $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}^+$ — такой непустой класс абелевых простых групп, что $\omega = \pi(\mathfrak{L})$). Следовательно, ввиду примера 1 [26] (соответственно замечания 3 [27] и примера 1 [27]) формация $\mathfrak{F}$ является тотально ω-насыщенной (соответственно тотально ω-композиционной). Пусть теперь $|\pi(\mathfrak{F}) \cap \omega| = 1$ (соответственно $|\pi\big(\mathrm{Com}(\mathfrak{F})\big) \cap \omega| = 1$). Тогда $\pi(\mathfrak{F}) \cap \omega = \{p\}$ (соответственно $\pi\big(\mathrm{Com}(\mathfrak{F})\big) \cap \omega = \{p\}$) для некоторого простого $p \in \omega$. Учитывая замечание 1 [26] и лемму 1.5.5 [1], с. 55] (соответственно замечание 1 [27] и лемму 1.6.2 [1], с. 66; см. также доказательство леммы 2.1 [40]), видим, что формация $\mathfrak{F}$ имеет такой канонический ω-локальный (соответственно ω-композиционный) τ-значный спутник F, что $F(q) = \mathfrak{N}_q\mathfrak{F}(F_q)$ (соответственно $F(q) = \mathfrak{N}_q\mathfrak{F}(C^q)$) для любого $q \in \omega$ и $F(\omega') = \mathfrak{F}$. Из условия следует, что $\mathfrak{F}(F_q) \neq \varnothing$ (соответственно $\mathfrak{F}(C^q) \neq \varnothing$), если $q = p$, и $\mathfrak{F}(F_q) = \varnothing$ для каждого $q \in \omega \setminus \big(\pi(\mathfrak{F}) \cap \omega\big) = \omega \setminus \{p\}$ (соответственно $\mathfrak{F}(C^q) = \varnothing$ для каждого $q \in \omega \setminus \big(\pi\big(\mathrm{Com}(\mathfrak{F})\big) \cap \omega\big) = \omega \setminus \{p\}$). Таким образом, спутник F таков, что $F(p) = \mathfrak{N}_p\mathfrak{F}(F_p) \neq \varnothing$ (соответственно $F(p) = \mathfrak{N}_p\mathfrak{F}(C^p) \neq \varnothing$), $F(q) = \varnothing$ для любого $q \in \omega \setminus \{p\}$ и $F(\omega') = \mathfrak{F}$. Так как $\mathfrak{F}(F_p) \subseteq \mathfrak{F}$ (соответственно $\mathfrak{F}(C^p) \subseteq \mathfrak{F}$), то, снова учитывая условие, имеем $\pi\big(\mathfrak{F}(F_p)\big) \cap \omega \subseteq \pi(\mathfrak{F}) \cap \omega = \{p\}$ (соответственно $\pi\big(\mathrm{Com}(\mathfrak{F}(C^p))\big) \cap \omega \subseteq \pi\big(\mathrm{Com}(\mathfrak{F})\big) \cap \omega = \{p\}$). Применяя теперь лемму 10) (соответственно лемму 11), видим, что $\mathfrak{N}_p\mathfrak{F}(F_p) = F(p) \in l^{\omega}_{\infty}$ (соответственно $\mathfrak{N}_p\mathfrak{F}(C^p) = F(p) \in c^{\omega}_{\infty}$). Поэтому все значения спутника F являются $l^{\tau}_{\omega_\infty}$-формациями (соответственно $c^{\tau}_{\omega_\infty}$-формациями), и следовательно, $\mathfrak{F}$ является $l^{\tau}_{\omega_\infty}$-формацией (соответственно $c^{\tau}_{\omega_\infty}$-формацией). Итак, в каждом из рассмотренных случаев $\mathfrak{F} \in l^{\tau}_{\omega_\infty}$ (соответственно $\mathfrak{F} \in c^{\tau}_{\omega_\infty}$). Последнее, как несложно видеть, равносильно равенству $\mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{F}) = \infty$ (соответственно $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{F}) = \infty$). Отметим, что в случае, когда $\mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{F}) = \infty$, ввиду леммы 15 также имеем $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{F}) = \infty$.

Замечание 2. Для любого простого числа p, натурального n и всякого подгруппового функтора τ имеют место следующие равенства: $l^{\tau}_{p_n} = l^{\tau}_{p} = l^{\tau}_{p_\infty}$, $c^{\tau}_{p_n} = c^{\tau}_{p} = c^{\tau}_{p_\infty}$. В частности, $l^{\tau}_{p_m} = l^{\tau}_{p_n}$, $c^{\tau}_{p_m} = c^{\tau}_{p_n}$ для любых натуральных чисел m, n и произвольного подгруппового функтора τ. В самом деле, пусть $\mathfrak{F}$ — произвольная l^{τ}_{p}-формация (соответственно c^{τ}_{p}-формация). Полагая в замечании 1 $\omega = \{p\}$, видим, что $\mathfrak{F}$ является $l^{\tau}_{p_\infty}$-формацией (соответственно $c^{\tau}_{p_\infty}$-формацией), и следовательно, $l^{\tau}_{p} \subseteq l^{\tau}_{p_\infty}$ (соответственно $c^{\tau}_{p} \subseteq c^{\tau}_{p_\infty}$). Поскольку в силу определений для каждого натурального n справедливы включения $l^{\tau}_{p_\infty} \subseteq l^{\tau}_{p_n} \subseteq l^{\tau}_{p_1} = l^{\tau}_{p}$ (соответственно $c^{\tau}_{p_\infty} \subseteq c^{\tau}_{p_n} \subseteq c^{\tau}_{p_1} = c^{\tau}_{p}$), заключаем, что $l^{\tau}_{p_n} = l^{\tau}_{p} = l^{\tau}_{p_\infty}$ (соответственно $c^{\tau}_{p_n} = c^{\tau}_{p} = c^{\tau}_{p_\infty}$). Кроме того, из последних равенств и включения $l^p \subseteq c^p$ (см. также лемма 15) следует, что для произвольной формации $\mathfrak{F}$ имеет место $\mathrm{Ind}_{p_l}(\mathfrak{F}) = 0$, если $\mathfrak{F} \notin l^p$, и $\mathrm{Ind}_{p_l}(\mathfrak{F}) = \mathrm{Ind}_{p_c}(\mathfrak{F}) = \infty$, если $\mathfrak{F} \in l^p$ (соответственно $\mathrm{Ind}_{p_c}(\mathfrak{F}) = \mathrm{Ind}_{p_l}(\mathfrak{F}) = 0$, если $\mathfrak{F} \notin c^p$, и $\mathrm{Ind}_{p_c}(\mathfrak{F}) = \infty$, если $\mathfrak{F} \in c^p$).

Лемма 17 (см. [10]; [11], лемма 7.16). *Пусть $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ — формации, причем $\mathfrak{M} \neq \varnothing$. Тогда если формация $\mathfrak{M}\mathfrak{H}$ является p-насыщенной (p-композиционной) для некоторого простого p и $p \notin \pi(\mathrm{Com}(\mathfrak{M}))$, то и формация $\mathfrak{H}$ является p-насыщенной (соответственно p-композиционной).*

Доказательство. Действительно, утверждение тривиально, если $\mathfrak{H} = \varnothing$. Предположим, что $\mathfrak{H} \neq \varnothing$, и пусть $G/O_p(\Phi(G)) \in \mathfrak{H}$ (или $G/\Phi(O_p(G)) \in \mathfrak{H}$). Тогда, так как $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{M}\mathfrak{H}$, то $G/O_p(\Phi(G)) \in \mathfrak{M}\mathfrak{H}$ (соответственно $G/\Phi(O_p(G)) \in \mathfrak{M}\mathfrak{H}$), и в силу p-насыщенности (p-композиционности соответственно) формации $\mathfrak{M}\mathfrak{H}$ заключаем, что $G \in \mathfrak{M}\mathfrak{H}$. Последнее влечет $G^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{M}$. С другой стороны, поскольку $G/O_p(\Phi(G)) \in \mathfrak{H}$ (соответственно $G/\Phi(O_p(G)) \in \mathfrak{H}$), то $G^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{N}_p$. Таким образом, $G^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}_p$. По условию $p \notin \pi(\mathrm{Com}(\mathfrak{M}))$. Следовательно, $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}_p = (1)$, и мы получаем, что $G^{\mathfrak{H}} = 1$, т. е. $G \in \mathfrak{H}$. Таким образом, формация $\mathfrak{H}$ является p-насыщенной (p-композиционной). Лемма доказана.

Непосредственно из леммы 17 и замечания 1 [27] вытекает

Следствие 5. *Пусть $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ — формации, причем $\mathfrak{M} \neq \varnothing$. Тогда если формация $\mathfrak{M}\mathfrak{H}$ является p-композиционной для некоторого простого p и $p \notin \pi(\mathrm{Com}(\mathfrak{M}))$, то $\mathfrak{N}_p\mathfrak{H}(C^p) \subseteq \mathfrak{H}$.*

Следующее утверждение является простым следствием леммы 17, а также лемм 5 и 6.

Утверждение 4. *Пусть $\mathfrak{F}$ — произвольная формация, $p \in \mathbb{P}$. Тогда в том и только в том случае для любого $q \in p' = \mathbb{P} \setminus \{p\}$ формация $\mathfrak{N}_q\mathfrak{F}$ является p-насыщенной (p-композиционной), когда p-насыщенной (соответственно p-композиционной) является формация $\mathfrak{F}$.*

Из утверждения 4 с учетом замечания 2 получаем следующий результат.

Следствие 6. *Пусть $\mathfrak{F}$ — произвольная формация и $p \in \mathbb{P}$. Тогда для каждого $q \in p' = \mathbb{P} \setminus \{p\}$ имеют место равенства $\mathrm{Ind}_{p_l}(\mathfrak{N}_q\mathfrak{F}) = \mathrm{Ind}_{p_l}(\mathfrak{F})$, $\mathrm{Ind}_{p_c}(\mathfrak{N}_q\mathfrak{F}) = \mathrm{Ind}_{p_c}(\mathfrak{F})$.*

Замечание 3. Если для некоторого простого p равенство $\mathrm{Ind}_{p_l}(\mathfrak{N}_q\mathfrak{F}) = \mathrm{Ind}_{p_l}(\mathfrak{F})$ (равенство $\mathrm{Ind}_{p_c}(\mathfrak{N}_q\mathfrak{F}) = \mathrm{Ind}_{p_c}(\mathfrak{F})$) имеет место для каждой формации $\mathfrak{F}$, то необходимо $q \in p'$. Действительно, если $q = p$, то ввиду следствия 4 для всякой формации $\mathfrak{F}$ имеем $\mathrm{Ind}_{p_l}(\mathfrak{N}_p\mathfrak{F}) = \mathrm{Ind}_{p_c}(\mathfrak{N}_p\mathfrak{F}) = \infty$. С другой стороны, для любой не p-композиционной формации $\mathfrak{F}$ (например, в случае, когда $\mathfrak{F} = \mathfrak{A}$, где $\mathfrak{A}$ — формация всех абелевых групп) получаем $\mathrm{Ind}_{p_c}(\mathfrak{F}) = \mathrm{Ind}_{p_l}(\mathfrak{F}) = 0$. Поэтому равенство $\mathrm{Ind}_{p_l}(\mathfrak{N}_p\mathfrak{F}) = \mathrm{Ind}_{p_l}(\mathfrak{F})$ (соответственно равенство $\mathrm{Ind}_{p_c}(\mathfrak{N}_p\mathfrak{F}) = \mathrm{Ind}_{p_c}(\mathfrak{F})$) в общем случае неверно, откуда и получаем требуемое.

Следствие 7. *Пусть $|\omega| > 1$ и $\mathfrak{F}$ — произвольная формация. Тогда в том и только в том случае существуют такие различные простые q, $r \in \omega$, что имеет место $\mathrm{Ind}_{q_c}(\mathfrak{F}) = \mathrm{Ind}_{r_c}(\mathfrak{F}) = 0$, когда для любого $t \in \mathbb{P}$ выполнено $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{N}_t\mathfrak{F}) = 0$.*

Доказательство. Необходимость. Предположим, что $\mathrm{Ind}_{q_c}(\mathfrak{F}) = \mathrm{Ind}_{r_c}(\mathfrak{F}) = 0$ для некоторых q, $r \in \omega$. Тогда ввиду следствия 6 условие $\mathrm{Ind}_{q_c}(\mathfrak{F}) = 0$ влечет для любого $u \in q' = \mathbb{P} \setminus \{q\}$ выполнение равенства $\mathrm{Ind}_{q_c}(\mathfrak{N}_u\mathfrak{F}) = 0$. Аналогично из $\mathrm{Ind}_{r_c}(\mathfrak{F}) = 0$ следует, что для каждого $v \in r' = \mathbb{P} \setminus \{r\}$ имеет место $\mathrm{Ind}_{r_c}(\mathfrak{N}_v\mathfrak{F}) = 0$. Тогда, как несложно видеть, если $t \in \mathbb{P} = q' \cup r'$ ($q \neq r$), то по крайней мере один из индексов $\mathrm{Ind}_{q_c}(\mathfrak{N}_t\mathfrak{F})$ или $\mathrm{Ind}_{r_c}(\mathfrak{N}_t\mathfrak{F})$ равен 0. Из последнего ввиду включения $\{q, r\} \subseteq \omega$ вытекает, что формация $\mathfrak{N}_t\mathfrak{F}$ не является ω-композиционной. Следовательно, $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{N}_t\mathfrak{F}) = 0$.

Достаточность. Предположим, что для каждого $t \in \mathbb{P}$ имеет место $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{N}_t\mathfrak{F}) = 0$. Фиксируем произвольное простое u. Так как $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{N}_u\mathfrak{F}) = 0$, то формация $\mathfrak{N}_u\mathfrak{F}$ не является ω-композиционной. Следовательно, $\mathfrak{N}_u\mathfrak{F}$ не является q-композиционной для некоторого $q \in \omega$. Поэтому $\mathrm{Ind}_{q_c}(\mathfrak{N}_u\mathfrak{F}) = 0$. Заметим, что в силу следствия 4 $q \neq u$. Применяя теперь следствие 6, видим, что $\mathrm{Ind}_{q_c}(\mathfrak{F}) = 0$. Далее, рассматривая равенство $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{N}_q\mathfrak{F}) = 0$ и рассуждая аналогично, заключаем, что найдется такое простое $r \in \omega$, $r \neq q$, что $\mathrm{Ind}_{r_c}(\mathfrak{F}) = 0$. Следствие доказано. Проводя совершенно аналогичные рассуждения, как и при обосновании следствия 7, из следствия 6 также получаем

Следствие 8. *Пусть $|\omega| > 1$ и $\mathfrak{F}$ — произвольная формация. Тогда в том и только в том случае существуют такие различные простые q, $r \in \omega$, что имеет место $\mathrm{Ind}_{q_l}(\mathfrak{F}) = \mathrm{Ind}_{r_l}(\mathfrak{F}) = 0$, когда для* *любого* $t \in \mathbb{P}$ *выполнено* $\mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{N}_t\mathfrak{F}) = 0$.

В дальнейшем нам понадобятся также следующие определения.

Определение 3. Для произвольной последовательности простых чисел $p_1, p_2, \dots, p_n$ $(n \in \mathbb{N})$ и всякой совокупности групп $\mathfrak{X}$ рекурсивно определим класс групп $\mathfrak{X}^{p_1p_2\cdots p_n}_{(c)}$ следующим образом:

1) $\mathfrak{X}^{p_1}_{(c)} = \big(G/C^{p_1}(G) \mid G \in \mathfrak{X}\big)$;

2) $\mathfrak{X}^{p_1p_2\cdots p_n}_{(c)} = \big(\mathfrak{X}^{p_1p_2\cdots p_{n-1}}_{(c)}\big)^{p_n}_{(c)} = \big(G/C^{p_n}(G) \mid G \in \mathfrak{X}^{p_1p_2\cdots p_{n-1}}_{(c)}\big)$, если $n \geq 2$.

Определение 4. Для произвольной последовательности простых чисел $p_1, p_2, \dots, p_n$ $(n \in \mathbb{N})$ и всякой совокупности групп $\mathfrak{X}$ рекурсивно определим также класс групп $\mathfrak{X}(C^{p_1p_2\cdots p_n})$:

1) $\mathfrak{X}(C^{p_1}) = \mathrm{form}\big(\mathfrak{X}^{p_1}_{(c)}\big) = \mathrm{form}\big(G/C^{p_1}(G) \mid G \in \mathfrak{X}\big)$, если $p_1 \in \pi\big(\mathrm{Com}(\mathfrak{X})\big)$, и $\mathfrak{X}(C^{p_1}) = \varnothing$, если $p_1 \notin \pi\big(\mathrm{Com}(\mathfrak{X})\big)$ (см. [27]);

2) $\mathfrak{X}(C^{p_1p_2\cdots p_n}) = \mathfrak{X}(C^{p_1p_2\cdots p_{n-1}})(C^{p_n})$, если $n \geq 2$.

Определение 5. Последовательность простых чисел $p_1, p_2, \dots, p_n$ из ω назовем *c-подходящей для $\mathfrak{X}$ ω-последовательностью*, если $p_1 \in \pi\big(\mathrm{Com}(\mathfrak{X})\big) \cap \omega$ и для любого $i \in \{2, \dots, n\}$ имеет место $p_i \in \pi\big(\mathrm{Com}(\mathfrak{X}(C^{p_1p_2\cdots p_{i-1}}))\big) \cap \omega$.

Предложение 6. *Пусть $\mathfrak{X}$ — непустая формация и $p_1, p_2, \dots, p_n$ — некоторая последовательность простых чисел из ω. Тогда и только тогда последовательность $p_1, p_2, \dots, p_n$ является c-подходящей для $\mathfrak{X}$ ω-последовательностью, когда $p_1 \in \pi\big(\mathrm{Com}(\mathfrak{X})\big) \cap \omega$ и для любого $i \in \{2, \dots, n\}$ число p_i принадлежит $\pi\big(\mathrm{Com}(\mathfrak{X}^{p_1p_2\cdots p_{i-1}}_{(c)})\big) \cap \omega$.*

Доказательство. Достаточность. Предположим, что $p_1 \in \pi\big(\mathrm{Com}(\mathfrak{X})\big) \cap \omega$ и для каждого $i \in \{2, \dots, n\}$ имеет место $p_i \in \pi\big(\mathrm{Com}(\mathfrak{X}^{p_1p_2\cdots p_{i-1}}_{(c)})\big) \cap \omega$. Если $n = 1$, то утверждение тривиально. Если $n > 1$, то элементарная индукция по j показывает справедливость включения $\mathfrak{X}^{p_1\cdots p_j}_{(c)} \subseteq \mathfrak{X}(C^{p_1\cdots p_j})$, где $j \in \{1, \dots, n-1\}$, из которого и вытекает, что последовательность $p_1, \dots, p_n$ является c-подходящей для $\mathfrak{X}$.

Необходимость. Предположим, что последовательность простых чисел $p_1, \dots p_n$ является c-подходящей для $\mathfrak{X}$ ω-последовательностью. Тогда $p_1 \in \pi\big(\mathrm{Com}(\mathfrak{X})\big) \cap \omega$ и, кроме того, для каждого $i \in \{2, \dots, n\}$ имеет место $p_i \in \pi\big(\mathrm{Com}(\mathfrak{X}(C^{p_1p_2\cdots p_{i-1}}))\big) \cap \omega$. Поэтому если $n = 1$, то доказываемое утверждение очевидно. Предположим теперь, что $n > 1$. Покажем, что тогда для всякого $j \in \{1, \dots, n-1\}$ справедливо равенство

$$\mathfrak{X}(C^{p_1\cdots p_j}) = \mathrm{Q}\big(\mathfrak{X}^{p_1\cdots p_j}_{(c)}\big),$$

где для произвольной совокупности групп $\mathfrak{Y}$ через $\mathrm{Q}(\mathfrak{Y})$ нами обозначен класс всех гомоморфных образов всех групп из $\mathfrak{Y}$. Воспользуемся индукцией по j. Если $j = 1$, то

$$\mathfrak{X}(C^{p_1}) = \mathrm{form}\big(\mathfrak{X}^{p_1}_{(c)}\big) = \mathrm{Q}\big(\mathfrak{X}^{p_1}_{(c)}\big)$$

вследствие предложения 1.10 [16], с. 339.

Предположим теперь, что $j > 1$ и утверждение справедливо для $j-1$, т. е. $\mathfrak{X}(C^{p_1\cdots p_{j-1}}) = \mathrm{Q}\big(\mathfrak{X}^{p_1\cdots p_{j-1}}_{(c)}\big)$. Для доказательства шага индукции заметим, что для всякой группы G имеет место $\theta\big(C^p(G)\big) \subseteq C^p\big(\theta(G)\big)$, где θ — произвольный эпиморфизм G. Последнее влечет для любой совокупности групп $\mathfrak{Y}$ и произвольного простого числа p включение

$$\big(\mathrm{Q}(\mathfrak{Y})\big)^p_{(c)} \subseteq \mathrm{Q}\big(\mathfrak{Y}^p_{(c)}\big),$$

с учетом которого и в силу базы и предположения индукции имеем

$$\mathfrak{X}(C^{p_1\cdots p_j}) = \mathfrak{X}(C^{p_1\cdots p_{j-1}})(C^{p_j}) = \mathrm{Q}\Big(\big(\mathfrak{X}(C^{p_1\cdots p_{j-1}})\big)^{p_j}_{(c)}\Big) = \mathrm{Q}\Big(\big(\mathrm{Q}(\mathfrak{X}^{p_1\cdots p_{j-1}}_{(c)})\big)^{p_j}_{(c)}\Big) \subseteq$$
$$\subseteq \mathrm{Q}\Big(\mathrm{Q}\big(\mathfrak{X}^{p_1\cdots p_{j-1}}_{(c)}\big)^{p_j}_{(c)}\Big) = \mathrm{Q}\Big(\big(\mathfrak{X}^{p_1\cdots p_{j-1}}_{(c)}\big)^{p_j}_{(c)}\Big) = \mathrm{Q}\big(\mathfrak{X}^{p_1\cdots p_j}_{(c)}\big),$$

т. е. $\mathfrak{X}(C^{p_1\cdots p_j}) \subseteq \mathrm{Q}\big(\mathfrak{X}^{p_1\cdots p_j}_{(c)}\big)$. В частности, $\pi\big(\mathrm{Com}(\mathfrak{X}(C^{p_1\cdots p_j}))\big) \cap \omega \subseteq \pi\Big(\mathrm{Com}\big(\mathrm{Q}(\mathfrak{X}^{p_1\cdots p_j}_{(c)})\big)\Big) \cap \omega$, и следовательно, как вытекает из доказательства достаточности (см. выше), $\mathrm{Q}\big(\mathfrak{X}^{p_1\cdots p_j}_{(c)}\big) \subseteq \mathfrak{X}(C^{p_1\cdots p_j})$. Поэтому $\mathfrak{X}(C^{p_1\cdots p_j}) = \mathrm{Q}\big(\mathfrak{X}^{p_1\cdots p_j}_{(c)}\big)$. Итак, для любого $j \in \{1, \dots, n-1\}$ имеет место равенство $\mathfrak{X}(C^{p_1\cdots p_j}) = \mathrm{Q}\big(\mathfrak{X}^{p_1\cdots p_j}_{(c)}\big)$. Теперь для для каждого $i \in \{2, \dots, n\}$ мы получаем

$$p_i \in \pi\big(\mathrm{Com}(\mathfrak{X}(C^{p_1p_2\cdots p_{i-1}}))\big) \cap \omega = \pi\Big(\mathrm{Com}\big(\mathrm{Q}(\mathfrak{X}^{p_1\cdots p_{i-1}}_{(c)})\big)\Big) \cap \omega = \pi\big(\mathrm{Com}(\mathfrak{X}^{p_1\cdots p_{i-1}}_{(c)})\big) \cap \omega$$

(здесь мы воспользовались также очевидным для произвольного множества групп $\mathfrak{Y}$ соотношением $\mathrm{Com}\big(\mathrm{Q}(\mathfrak{Y})\big) = \mathrm{Com}(\mathfrak{Y})$). Предложение доказано.

Замечание 6. Из доказательства предложения 6 следует, что если $\mathfrak{X}$ — произвольная совокупность групп, то для того чтобы последовательность простых чисел $p_1, \dots, p_n$ из ω являлась c-подходящей для $\mathfrak{X}$ ω-последовательностью, достаточно выполнения условий $p_1 \in \pi\big(\mathrm{Com}(\mathfrak{X})\big) \cap \omega$ и $p_i \in \pi\big(\mathrm{Com}(\mathfrak{X}^{p_1p_2\cdots p_{i-1}}_{(c)})\big) \cap \omega$ для всех $i \in \{2, \dots, n\}$.

Аналогично введем понятия классов групп $\mathfrak{X}_{(l)}^{p_1p_2\dots p_n}$ и $\mathfrak{X}(F_{p_1p_2\dots p_n})$, а также дадим определение l-подходящей для $\mathfrak{X}$ ω-последовательности.

Определение 6. Для произвольной последовательности простых чисел $p_1, p_2, \dots, p_n$ $(n \in \mathbb{N})$ и любой совокупности групп $\mathfrak{X}$ класс групп $\mathfrak{X}_{(l)}^{p_1p_2\dots p_n}$ рекурсивно определим следующим образом:

1) $\mathfrak{X}_{(l)}^{p_1} = \big(A/F_{p_1}(A) \mid A \in \mathfrak{X}\big)$;

2) $\mathfrak{X}_{(l)}^{p_1p_2\dots p_n} = \big(\mathfrak{X}_{(l)}^{p_1p_2\dots p_{n-1}}\big)_{(l)}^{p_n} = \big(A/F_{p_n}(A) \mid A \in \mathfrak{X}_{(l)}^{p_1p_2\dots p_{n-1}}\big)$, если $n \geq 2$.

Определение 7. Для произвольной последовательности простых чисел $p_1, p_2, \dots, p_n$ $(n \in \mathbb{N})$ и всякой совокупности групп $\mathfrak{X}$ рекурсивно определим также класс групп $\mathfrak{X}(F_{p_1p_2\dots p_n})$:

1) $\mathfrak{X}(F_{p_1}) = \mathrm{form}\big(\mathfrak{X}_{(l)}^{p_1}\big) = \mathrm{form}\,\big(G/F_{p_1}(G) \mid G \in \mathfrak{X}\big)$, если $p_1 \in \pi(\mathfrak{X})$, и $\mathfrak{X}(F_{p_1}) = \varnothing$, если $p_1 \notin \pi(\mathfrak{X})$ (см. [26]);

2) $\mathfrak{X}(F_{p_1p_2\dots p_n}) = \mathfrak{X}(F_{p_1p_2\dots p_{n-1}})(F_{p_n})$, если $n \geq 2$.

Определение 8. Последовательность простых чисел $p_1, p_2, \dots, p_n$ из ω назовем *l-подходящей для $\mathfrak{X}$ ω-последовательностью,* если $p_1 \in \pi(\mathfrak{X}) \cap \omega$ и для любого $i \in \{2, \dots, n\}$ имеет место $p_i \in \pi\big(\mathfrak{X}(F_{p_1p_2\dots p_{i-1}})\big) \cap \omega$.

Аналогично предложению 6 доказывается следующее

Предложение 7. *Пусть $\mathfrak{X}$ — непустая формация и $p_1, p_2, \dots, p_n$ — некоторая последовательность простых чисел из ω. Тогда и только тогда последовательность $p_1, p_2, \dots, p_n$ является l-подходящей для $\mathfrak{X}$ ω-последовательностью, когда $p_1 \in \pi(\mathfrak{X}) \cap \omega$ и для каждого $i \in \{2, \dots, n\}$ число p_i принадлежит $\pi\big(\mathfrak{X}_{(l)}^{p_1p_2\dots p_{i-1}}\big) \cap \omega$.*

Замечание 7. Подходящие для любой совокупности групп $\mathfrak{X}$ последовательности были введены А.Н. Скибой [6], с. 45. Напомним, что последовательность простых чисел $p_1, \dots, p_n$ называется *подходящей для $\mathfrak{X}$*, если $p_1 \in \pi(\mathfrak{X})$ и для любого $i \in \{2, \dots, n\}$ число p_i принадлежит $\pi\big(\mathfrak{X}_{(l)}^{p_1p_2\dots p_{i-1}}\big)$. Если, кроме того, каждое из чисел $p_1, \dots, p_n$ содержится во множестве ω, то такая последовательность естественным образом называется *подходящей для $\mathfrak{X}$ ω-последовательностью* (см. [3]). Для произвольной совокупности групп $\mathfrak{X}$ каждая подходящая для $\mathfrak{X}$ ω-последовательность простых чисел является l-подходящей для $\mathfrak{X}$ ω-последовательностью (ср. замечание 6). Кроме того, если совокупность групп $\mathfrak{X}$ такова, что класс $(\mathfrak{X})$ — формация, то, как следует из предложения 7, имеет место обратное утверждение, т. е. данные определения равносильны.

Представляется целесообразным отметить, что для произвольной совокупности групп $\mathfrak{X}$ каждая c-подходящая для $\mathfrak{X}$ ω-последовательность простых чисел является также l-подходящей для $\mathfrak{X}$ ω-последовательностью. Пример формации $\mathrm{form}(A)$ и простого $p_1 = p$ таких, что A — простая неабелева группа, причем $\varnothing \neq \pi(A) \cap \omega \ni p$, показывает, что обратное в общем случае неверно.

Нам будут полезны также следующие понятия C-подходящей и L-подходящей для произвольной совокупности групп $\mathfrak{X}$ ω-последовательностей.

Определение 9. Для любой совокупности групп $\mathfrak{X}$ и всякой последовательности простых чисел $p_1, p_2, \dots, p_n$ $(n \in \mathbb{N})$ определим рекурсивно класс групп $\mathfrak{X}(NC^{p_1p_2\dots p_n})$:

1) $\mathfrak{X}(NC^{p_1}) = \mathfrak{N}_{p_1}\mathfrak{X}(C^{p_1})$;

2) $\mathfrak{X}(NC^{p_1p_2\dots p_n}) = \mathfrak{X}(NC^{p_1p_2\dots p_{n-1}})(NC^{p_n})$, если $n \geq 2$.

Определение 10. Последовательность простых чисел $p_1, p_2, \dots, p_n$ из ω назовем *C-подходящей для $\mathfrak{X}$ ω-последовательностью,* если $p_1 \in \pi\big(\mathrm{Com}(\mathfrak{X})\big) \cap \omega$ и для любого $i \in \{2, \dots, n\}$ число

$$p_i \in \pi\big(\mathrm{Com}(\mathfrak{X}(NC^{p_1p_2\dots p_{i-1}}))\big) \cap \omega.$$

Аналогично определению 9 введем также следующее

Определение 11. Для любой совокупности групп $\mathfrak{X}$ и всякой последовательности простых чисел $p_1, p_2, \dots, p_n$ $(n \in \mathbb{N})$ класс групп $\mathfrak{X}(NF_{p_1p_2\dots p_n})$ определим рекурсивно следующим образом:

1) $\mathfrak{X}(NF_{p_1}) = \mathfrak{N}_{p_1}\mathfrak{X}(F_{p_1})$;

2) $\mathfrak{X}(NF_{p_1p_2\dots p_n}) = \mathfrak{X}(NF_{p_1p_2\dots p_{n-1}})(NF_{p_n})$, если $n \geq 2$.

Определение 12. Последовательность простых чисел $p_1, p_2, \dots, p_n$ из ω назовем *L-подходящей для $\mathfrak{X}$ ω-последовательностью,* если $p_1 \in \pi(\mathfrak{X}) \cap \omega$ и для любого $i \in \{2, \dots, n\}$ имеет место $p_i \in \pi\big(\mathfrak{X}(NF_{p_1p_2\dots p_{i-1}})\big) \cap \omega$.

Как следует из вышеприведенных определений, для любой совокупности групп $\mathfrak{X}$ всякая c-подходящая для $\mathfrak{X}$ ω-последовательность является C-подходящей для $\mathfrak{X}$ ω-последовательностью, а каждая l-подходящая для $\mathfrak{X}$ ω-последовательность — L-подходящей для $\mathfrak{X}$ ω-последовательностью, т. е. последние определения расширяют соответствующие первые. Простой пример формации $\mathfrak{N}$ всех нильпотентных групп и последовательности p_1, p_2, где $p_1 = p_2 = p$ для произвольного (фиксированного) простого $p \in \omega$, показывает, что утверждения, обратные указанным, вообще говоря, не имеют места.

Соотношения между L- и C-подходящими для произвольной совокупности групп $\mathfrak{X}$ ω-последовательностями также очевидны: каждая C-подходящая для $\mathfrak{X}$ ω-последовательность простых оказывается L-подходящей для $\mathfrak{X}$ ω-последовательностью, причем, как несложно видеть, обратное неверно.

Пример 2. Пусть A — такая простая неабелева группа, что $|\pi(A) \cap \omega| \geq 2$, и пусть $\mathfrak{F} = l_{\omega_n}^{\tau}\mathrm{form}(A)$, где τ — произвольный подгрупповой функтор, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Покажем, что $\mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{F}) = n$. Пусть $n = 0$, и предположим, что $\mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{F}) > 0$. Тогда $\mathfrak{F}$ является l_{ω}^{τ}-формацией. Пусть $p \in \pi(A) \cap \omega$. Тогда вследствие теоремы 1 [26] $\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{F} = l^{\tau}_{\omega_0}\mathrm{form}(A) = \tau\mathrm{form}(A) \subseteq s\mathrm{form}(A)$. Последнее противоречит лемме 3.1.5 [6], с. 100. (Ясно, что в данном случае для выполнения равенства $\mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{F}) = n$ достаточно, чтобы $|\pi(A)\cap\omega| \geq 1$; заметим также, что для указанного равенства вследствие примера 1 [26] последнее условие является и необходимым.) Следовательно, $\mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{F}) = 0$, и для $n = 0$ утверждение верно. Пусть теперь $n > 0$. Предположим, что $\mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{F}) > n$. Тогда формация $\mathfrak{F}$ является $l^{\tau}_{\omega_{n+1}}$-формацией, и если $\mathfrak{F} = LF_{\omega}(F)$ (F — канонический ω-локальный спутник), то ввиду леммы 1.5.6 [1], с. 58 спутник F $l^{\tau}_{\omega_n}$-значен. Отметим, что в силу леммы 1.5.12 [1], с. 61 $\pi(\mathfrak{F})\cap\omega = \pi(A)\cap\omega$. Пусть $p \in \pi(A)\cap\omega$. Тогда, очевидно, $F_p(A) = 1$, и вследствие леммы 1.5.12 [1], с. 61 и замечания 2 [26] имеем $F(p) = \mathfrak{N}_p l^{\tau}_{\omega_{n-1}}\mathrm{form}(A/F_p(A)) = \mathfrak{N}_p l^{\tau}_{\omega_{n-1}}\mathrm{form}(A)$. Положим $n = 1$. Тогда $F(p) = \mathfrak{N}_p\tau\mathrm{form}(A) \in l^{\tau}_{\omega}$, и если $q \in \big(\pi(A) \cap \omega\big) \setminus \{p\}$ (такое простое существует, так как по условию $|\pi(A)\cap\omega| \geq 2$, и следовательно, $\big(\pi(A)\cap\omega\big) \setminus \{p\} \neq \varnothing$), то ввиду теоремы 1 [26] $\mathfrak{N}_q \subseteq \mathfrak{N}_p\tau\mathrm{form}(A)$. Последнее влечет $\mathfrak{N}_q \subseteq \tau\mathrm{form}(A) \subseteq s\mathrm{form}(A)$; вновь получаем противоречие с леммой 3.1.5 [6], с. 100. Значит, при $n = 1$ утверждение также справедливо. Поэтому считаем, что $n > 1$. Положим $s_1 = p$. Тогда $F(s_1) = \mathfrak{N}_{s_1} l^{\tau}_{\omega_{n-1}}\mathrm{form}(A) \in l^{\tau}_{\omega_n}$.

Предположим теперь, что для некоторого натурального $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ построена l-подходящая для $\mathfrak{F}$ ω-последовательность простых чисел s_1, s_2, …, s_k, каждое из которых принадлежит множеству $\pi(A)$, причем $s_i \neq s_{i-1}$ для всех $i \in \{2, \dots, k\}$, а также для каждого $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ построена формация $Fs_1s_2\dots s_{j-1}(s_j)$ такая, что $Fs_1s_2\dots s_{j-1}(s_j) = \mathfrak{N}_{s_j} l^{\tau}_{\omega_{n-j}}\mathrm{form}(A) \in l^{\tau}_{\omega_{n-j+1}}$, где $Fs_1s_2\dots s_{j-1}$ — канонический ω-локальный спутник формации $Fs_1s_2\dots s_{j-2}(s_{j-1})$ (при $j = 1$ мы считаем, что спутник $Fs_1s_2\dots s_{j-1}$ совпадает с F, а формация $Fs_1s_2\dots s_{j-2}(s_{j-1})$ — с формацией $\mathfrak{F}$). Возьмем в качестве s_{k+1} произвольное простое из $\big(\pi(A) \cap \omega\big) \setminus \{s_k\}$ (напомним, что $\big(\pi(A) \cap \omega\big) \setminus \{s_k\} \neq \varnothing$, так как в силу условия $|\pi(A) \cap \omega| \geq 2$). И пусть $Fs_1\dots s_{k-1}s_k$ — канонический ω-локальный спутник формации $Fs_1\dots s_{k-1}(s_k)$ (последняя является ω-насыщенной, так как по предположению $n > k$). Тогда, так как $Fs_1\dots s_{k-1}(s_k) \in l^{\tau}_{\omega_{n-k+1}}$, применяя лемму 1.5.6 [1], с. 58 видим, что спутник $Fs_1\dots s_{k-1}s_k$ является $l^{\tau}_{\omega_{n-k}}$-значным. Учитывая, что $s_{k+1} \in \pi(A) \cap \omega$, и следовательно, $F_{s_{k+1}}(A) = 1$, а также принимая во внимание, что $s_{k+1} \neq s_k$, вследствие теоремы 7 [26], леммы 1.5.12 [1], с. 61 и замечания 2 [26] заключаем, что $Fs_1\dots s_{k-1}s_k(s_{k+1}) = \mathfrak{N}_{s_{k+1}} l^{\tau}_{\omega_{n-(k+1)}}\mathrm{form}(A) \in l^{\tau}_{\omega_{n-(k+1)+1}}$. Кроме того, несложно видеть, что $(A) = (A)^{p_1p_2\dots p_k}_{(l)} \subseteq \mathfrak{F}^{p_1p_2\dots p_k}_{(l)}$. Значит, поскольку $s_{k+1} \in \pi(A) \cap \omega$, то $s_{k+1} \in \pi(\mathfrak{F}^{p_1p_2\dots p_k}_{(l)}) \cap \omega$. Тем самым нами описано правило, которое при выполнении условия $k < n$ для данной подходящей (т. е. l-подходящей, поскольку $\mathfrak{F}$ — формация; см. замечание 7) для $\mathfrak{F}$ ω-последовательности простых чисел s_1, s_2, …, s_k и формации $Fs_1s_2\dots s_{k-1}(s_k) \in l^{\tau}_{\omega_{n-k+1}}$ позволяет найти ее новый член s_{k+1} и формацию $Fs_1\dots s_{k-1}s_k(s_{k+1}) \in l^{\tau}_{\omega_{n-(k+1)+1}}$. Таким образом, можно считать, что построена l-подходящая для $\mathfrak{F}$ ω-последовательность простых s_1, s_2, …, s_n, и наряду с формациями $Fs_1s_2\dots s_{j-1}(s_j) \in l^{\tau}_{\omega_{n-j+1}}$, где $j \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, также найдена формация $Fs_1\dots s_{n-1}(s_n) = \mathfrak{N}_{s_n} l^{\tau}_{\omega_0}\mathrm{form}(A) = \mathfrak{N}_{s_n}\tau\mathrm{form}(A) \in l^{\tau}_{\omega_1} = l^{\tau}_{\omega}$. Пусть r — произвольное простое из $\big(\pi(A) \cap \omega\big) \setminus \{s_n\}$. Тогда, поскольку $Fs_1\dots s_{n-1}(s_n) \in l^{\tau}_{\omega}$, вследствие теоремы 1 [26] $\mathfrak{N}_r \subseteq \mathfrak{N}_{s_n}\tau\mathrm{form}(A)$. Следовательно, $\mathfrak{N}_r \subseteq \tau\mathrm{form}(A) \subseteq s\mathrm{form}(A)$. Последнее противоречит лемме 3.1.5 [6], с. 100. Итак, исходное допущение неверно, и для любого целого неотрицательного n имеет место $\mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{F}) = n$, где $\mathfrak{F} = l^{\tau}_{\omega_n}\mathrm{form}(A)$, A — неабелева простая группа и $|\pi(A) \cap \omega| \geq 2$.

Отметим, что равенство $\mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{F}) = n$ можно доказать и индукцией по n. В связи с этим рассмотрим следующий

Пример 3. Пусть, как и в примере 2, A — простая неабелева группа и $\mathfrak{F} = l^{\tau}_{\omega_n}\mathrm{form}(A)$, где τ — произвольный подгрупповой функтор. И пусть $\mathrm{S}_{\bar\tau}(A) = \{A_1, \dots, A_t\}$ — совокупность всех $\bar\tau$-подгрупп группы A, где $\bar\tau$ — замыкание подгруппового функтора τ, $\tilde{A} = A_1 \times \ldots \times A_t$ ($t \in \mathbb{N}$). Кроме того, для заданного простого числа q через $\mathfrak{B}_{(q)}$ обозначим формацию $\mathfrak{N}_q\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_q l^{\tau}_{\omega_n}\mathrm{form}(A)$.

Пусть $n = 0$. Тогда вследствие леммы 1.2.22 [6], с. 24

$$\mathfrak{F} = l^{\tau}_{\omega_0}\mathrm{form}(A) = \tau\mathrm{form}(A) = \mathrm{form}\big(S_{\bar\tau}(A)\big) = \mathrm{form}(\tilde{A}).$$

Заметим, что $\pi(\mathfrak{F}) = \pi(\tilde{A}) = \pi\big(S_{\bar\tau}(A)\big) = \pi(A)$ и $\pi\big(\mathrm{Com}(\mathfrak{F})\big) = \pi\big(\mathrm{Com}(\tilde{A})\big) = \pi\big(\mathrm{Com}(S_{\bar\tau}(A))\big)$. Предположим, что $|\pi(A) \cap \omega| = 0$. В этом случае $\pi(\mathfrak{F}) \cap \omega = \pi(A) \cap \omega = \varnothing$, и из примера 1 [26] следует, что $\mathfrak{F}$ является l^{ω}_{∞}-формацией. Значит, $\mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{F}) = \infty$. Поэтому вследствие леммы 16 для любого $q \in \mathbb{P}$ имеет место $\mathrm{Ind}_{\omega_l}\big(\mathfrak{B}_{(q)}\big) = \infty$. Кроме того, согласно лемме 15, из последних равенств вытекают следующие $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{F}) = \mathrm{Ind}_{\omega_c}\big(\mathfrak{B}_{(q)}\big) = \infty$, причем последнее равенство имеет место также для любого $q \in \mathbb{P}$. Пусть теперь $|\pi(A) \cap \omega| \geq 1$. Тогда если $p \in \pi(A) \cap \omega = \pi(\mathfrak{F}) \cap \omega$, то, как следует из леммы 3.1.5 [6], с. 100 $\mathfrak{N}_p \nsubseteq \mathfrak{F} = \mathrm{form}\big(S_{\bar\tau}(A)\big) = \mathrm{form}(\tilde{A})$, и следовательно, в силу теоремы 1 [26] формация $\mathfrak{F}$ не является p-насыщенной. Поэтому $\mathrm{Ind}_{p_l}(\mathfrak{F}) = 0$, и следовательно, $\mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{F}) = 0$. Кроме того, если $|\pi(A) \cap \omega| = 1$ и $\pi(A) \cap \omega = \{p\}$, то ввиду следствия 6 для любого $q \in p' = \mathbb{P} \setminus \{p\}$ имеет место $\mathrm{Ind}_{p_l}\big(\mathfrak{B}_{(q)}\big) = \mathrm{Ind}_{p_l}(\mathfrak{F}) = 0$, и значит, $\mathrm{Ind}_{\omega_l}\big(\mathfrak{B}_{(q)}\big) = 0$; в силу же леммы $(\mathfrak{N}^n_{\omega}\mathfrak{F})$ с учетом равенства $\pi(A) \cap \omega = \pi(\mathfrak{F}) \cap \omega$ видим, что $\mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{B}_{(p)}) = \mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{N}_p\mathfrak{F}) = \infty$. Далее, если $|\pi(A) \cap \omega| \geq 2$, то, учитывая справедливость для всякого $p \in \pi(A) \cap \omega$ равенства $\mathrm{Ind}_{p_l}(\mathfrak{F}) = 0$, а также принимая во внимание следствие 8, заключаем, что для любого $q \in \mathbb{P}$ имеет место равенство $\mathrm{Ind}_{p_l}\big(\mathfrak{B}_{(q)}\big) = 0$, а потому и равенство $\mathrm{Ind}_{\omega_l}\big(\mathfrak{B}_{(q)}\big) = 0$.

Если, кроме того, $|\pi\big(\mathrm{Com}(\mathrm{S}_{\bar\tau}(A))\big) \cap \omega| = 0$, то $\pi\big(\mathrm{Com}(\mathfrak{F})\big) \cap \omega = \pi\big(\mathrm{Com}(S_{\bar\tau}(A))\big) \cap \omega = \varnothing$, и вследствие примера 1 [27] $\mathfrak{F}$ является c^{ω}_{∞}-формацией. Тогда $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{F}) = \infty$, и вследствие леммы 16 также имеем $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{B}_{(q)}) = \infty$ для всякого $q \in \mathbb{P}$. Пусть, далее, $|\pi(\mathrm{Com}(\mathrm{S}_{\bar{\tau}}(A))) \cap \omega| \geq 1$ (ясно, что в этом случае условие $|\pi(A) \cap \omega| \geq 1$ является необходимым). Тогда, выбирая произвольное простое число p из $\pi(\mathrm{Com}(\mathrm{S}_{\bar{\tau}}(A))) \cap \omega = \pi(\mathrm{Com}(\mathfrak{F})) \cap \omega$ и применяя лемму 3.1.5 [6], с. 100 видим, что $\mathfrak{N}_p \nsubseteq \mathfrak{F}$. Значит, ввиду теоремы 1 [27] формация $\mathfrak{F}$ не является p-композиционной, и значит, $\mathrm{Ind}_{p_c}(\mathfrak{F}) = 0$. Следовательно, $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{F}) = 0$. Продолжая далее рассуждения, аналогичные рассмотренному выше случаю, когда $|\pi(A) \cap \omega| \geq 1$, и используя следствия 6 и 7, а также лемму 11, заключаем, что если $|\pi(\mathrm{Com}(\mathrm{S}_{\bar{\tau}}(A))) \cap \omega| = 1$ и $\pi(\mathrm{Com}(\mathrm{S}_{\bar{\tau}}(A))) \cap \omega = \{p\}$, то $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{B}_{(q)}) = 0$, если $q \in p' = \mathbb{P} \setminus \{p\}$, и $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{B}_{(p)}) = \infty$; если же $|\pi(\mathrm{Com}(\mathrm{S}_{\bar{\tau}}(A))) \cap \omega| \geq 2$, то равенство $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{B}_{(q)}) = 0$ имеет место уже для любого $q \in \mathbb{P}$.

Пусть теперь $n > 0$. Тогда ввиду следствия 1 $\mathfrak{F} \in l^{\tau}_{\omega_n} \subseteq c^{\tau}_{\omega_n}$, и следовательно, вследствие леммы 7 и леммы 1.5.12 [1], с. 61 имеют место равенства $\pi(\mathrm{Com}(\mathfrak{F})) \cap \omega = \pi(\mathfrak{F}) \cap \omega = \pi(A) \cap \omega$. Отметим, что в силу очевидного неравенства $\mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{F}) \geq n$ из леммы 16 вытекает, что для всякого $q \in \mathbb{P}$ имеет место $\mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{B}_{(q)}) \geq n$. Из указанных неравенств вследствие леммы 15 получаем также неравенства $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{F}) \geq n$ и $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{B}_{(q)}) \geq n$. Далее, если $|\pi(A) \cap \omega| < 2$, то с учетом равенства $\pi(\mathfrak{F}) \cap \omega = \pi(A) \cap \omega$ и леммы 16 из замечания 1 следует, что $\mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{F}) = \infty$ и для любого $q \in \mathbb{P}$ $\mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{B}_{(q)}) = \infty$. Тогда, согласно лемме 15, имеем $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{F}) = \mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{B}_{(q)}) = \infty$ (последнее равенство имеет место, конечно, для любого $q \in \mathbb{P}$). Пусть $|\pi(A) \cap \omega| \geq 2$. Индукцией по n покажем, что $\mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{F}) = \mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{B}_{(q)}) = n$. Действительно, если $n = 0$, то, как установлено выше, $\mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{F}) = 0$ и, кроме того, для всякого $q \in \mathbb{P}$ $\mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{B}_{(q)}) = \mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{N}_q l^{\tau}_{\omega_0}\mathrm{form}(A)) = 0$. Пусть снова $n > 0$, и предположим, что $\mathrm{Ind}_{\omega_l}(l^{\tau}_{\omega_{n-1}}\mathrm{form}(A)) = \mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{N}_q l^{\tau}_{\omega_{n-1}}\mathrm{form}(A)) = n-1$, причем последнее равенство имеет силу для каждого $q \in \mathbb{P}$. Обозначим через F и $V_{(q)}$ канонические ω-локальные спутники формаций $\mathfrak{F} = l^{\tau}_{\omega_n}\mathrm{form}(A)$ и $\mathfrak{B}_{(q)} = \mathfrak{N}_q l^{\tau}_{\omega_n}\mathrm{form}(A)$ соответственно. Ясно, что поскольку A — неабелева простая группа, то для любого $p \in \pi(A) \cap \omega$ имеет место $F_p(A) = 1$. Учитывая последнее, а также применяя лемму 1.5.12 [1], с. 61 теорему 7 [26] и замечание 2 [26], видим, что $F(p) = \mathfrak{N}_p l^{\tau}_{\omega_{n-1}}\mathrm{form}(A)$ для любого $p \in \pi(A) \cap \omega$, $F(p) = \varnothing$ для всякого $p \in \omega \setminus \pi(A)$, $F(\omega') = \mathfrak{F}$, и если $q \in \omega$, то $V_{(q)}(q) = \mathfrak{N}_q l^{\tau}_{\omega_{n-1}}\mathrm{form}(A) = \mathfrak{B}_{(q)}$, $V_{(q)}(p) = \mathfrak{N}_p l^{\tau}_{\omega_{n-1}}\mathrm{form}(A) = F(p)$ для каждого $p \in (\pi(A) \cap \omega) \setminus \{q\}$, $V_{(q)}(\omega') = \mathfrak{B}_{(q)}$; если $q \notin \omega$, то $V_{(q)}(p) = F(p)$ для любого $p \in \omega$, $V_{(q)}(\omega') = \mathfrak{B}_{(q)}$. По индукции $\mathrm{Ind}_{\omega_l}(F(p)) = n-1$ для каждого $p \in \pi(A) \cap \omega = \pi(\mathfrak{F}) \cap \omega$. Следовательно, учитывая, что $|\pi(A) \cap \omega| \geq 2$ и $\mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{B}_{(q)}) \geq n$, ввиду леммы 13 заключаем, что $\mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{F}) = \mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{B}_{(q)}) = n$.

Предположим теперь, что наряду с условием $|\pi(A) \cap \omega| \geq 2$ имеет место также $|\pi(\mathrm{Com}(\mathrm{S}_{\bar{\tau}}(A))) \cap \omega| = 0$. Покажем, что тогда $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{F}) = \infty$ и для любого $q \in \mathbb{P}$ $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{B}_{(q)}) = \infty$. Здесь также воспользуемся индукцией по n. При $n = 0$ (база индукции) данное утверждение, как отмечено выше, верно. Пусть $n > 0$; при этом считаем, что утверждение справедливо для $n-1$. В силу следствия 1 $\mathfrak{F} = LF_{\omega}(F) = CF_{\omega}(F)$ и $\mathfrak{B}_{(q)} = LF_{\omega}(V_{(q)}) = CF_{\omega}(V_{(q)})$, причем каждый из канонических спутников F и $V_{(q)}$ соответственно формации $\mathfrak{F}$ и формации $\mathfrak{B}_{(q)}$ (см. выше) является $l^{\tau}_{\omega_{n-1}}$-значным, а следовательно, и $c^{\tau}_{\omega_{n-1}}$-значным. По индукции для любого $p \in \pi(A) \cap \omega = \pi(\mathrm{Com}(\mathfrak{F})) \cap \omega$ имеет место $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(F(p)) = \mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{N}_p l^{\tau}_{\omega_{n-1}}\mathrm{form}(A)) = \infty$. Следовательно, ввиду леммы 14 заключаем, что $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{F}) = \mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{B}_{(q)}) = \infty$, т. е. рассматриваемое утверждение верно и для n (последнее равенство, как следует из доказательства, имеет место для любого $q \in \mathbb{P}$). Таким образом, $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{F}) = \mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{B}_{(q)}) = \infty$, если только $|\pi(A) \cap \omega| \geq 2$, причем $|\pi(\mathrm{Com}(\mathrm{S}_{\bar{\tau}}(A))) \cap \omega| = 0$.

Наконец, рассмотрим случай, когда $|\pi(A) \cap \omega| \geq 2$ и, кроме того, $|\pi(\mathrm{Com}(\mathrm{S}_{\bar{\tau}}(A))) \cap \omega| \geq 1$. Предположим сначала, что выполнено одно из следующих условий: либо $|\pi(\mathrm{Com}(\mathrm{S}_{\bar{\tau}}(A))) \cap \omega| = 1$, причем $|\pi(A) \cap \omega| \geq 3$, либо $|\pi(\mathrm{Com}(\mathrm{S}_{\bar{\tau}}(A))) \cap \omega| \geq 2$ (ясно, что в последнем случае условие $|\pi(A) \cap \omega| \geq 2$ будет необходимым). Рассуждаем, как и в предыдущих случаях, по индукции. Напомним, что, как установлено выше, если $n = 0$, то для случая, когда $|\pi(\mathrm{Com}(\mathrm{S}_{\bar{\tau}}(A))) \cap \omega| = 1$, причем $\pi(\mathrm{Com}(\mathrm{S}_{\bar{\tau}}(A))) \cap \omega = \{p\}$, имеет место $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{B}_{(p)}) = \infty$ и $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{B}_{(q)}) = 0$ для всякого $q \in p' = \mathbb{P} \setminus \{p\}$; для случая $|\pi(\mathrm{Com}(\mathrm{S}_{\bar{\tau}}(A))) \cap \omega| \geq 2$ имеем $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{B}_{(q)}) = 0$ для любого $q \in \mathbb{P}$. Кроме того, в каждом из отмеченных случаев $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{F}) = 0$. Далее, снова считаем, что $n > 0$, а также выполнены равенства $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{N}_p l^{\tau}_{\omega_{n-1}}\mathrm{form}(A)) = \infty$, $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{N}_q l^{\tau}_{\omega_{n-1}}\mathrm{form}(A)) = \mathrm{Ind}_{\omega_c}(l^{\tau}_{\omega_{n-1}}\mathrm{form}(A)) = n-1$ для каждого $q \in p'$, если $n = 1$ и $|\pi(\mathrm{Com}(\mathrm{S}_{\bar{\tau}}(A))) \cap \omega| = 1$, причем $\pi(\mathrm{Com}(\mathrm{S}_{\bar{\tau}}(A))) \cap \omega = \{p\}$, и $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{N}_q l_{\omega_{n-1}}\mathrm{form}(A)) = \mathrm{Ind}_{\omega_c}(l_{\omega_{n-1}}\mathrm{form}(A)) = n-1$ для всякого $q \in \mathbb{P}$, в остальных случаях (т. е. если либо $n = 1$ и $|\pi(\mathrm{Com}(\mathrm{S}_{\bar{\tau}}(A))) \cap \omega| \geq 2$, либо $n \geq 2$). Тогда, как отмечено выше, $\mathfrak{F} = CF_{\omega}(F)$ и $\mathfrak{B}_{(q)} = CF_{\omega}(V_{(q)})$, причем каждый из канонических спутников F и $V_{(q)}$ $c^{\tau}_{\omega_{n-1}}$-значен. Фиксируем произвольное $q \in \mathbb{P}$. Выбирая теперь любое r с условием $r \in (\pi(A) \cap \omega) \setminus \{p, q\}$ — при $n = 1$ и $|\pi(\mathrm{Com}(\mathrm{S}_{\bar{\tau}}(A))) \cap \omega| = 1$, или $r \in (\pi(A) \cap \omega) \setminus \{q\}$ — в противном случае, видим, согласно предположению, что $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(V_{(q)}(r)) = \mathrm{Ind}_{\omega_c}(F(r)) = \mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{N}_r l^{\tau}_{\omega_{n-1}}\mathrm{form}(A)) = n-1$. Учитывая теперь, что $\pi(A) \cap \omega = \pi(\mathrm{Com}(\mathfrak{F})) \cap \omega$, $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{B}_{(q)}) \geq n$, а также принимая во внимание справедливое для $n = 1$ и $|\pi(\mathrm{Com}(\mathrm{S}_{\bar{\tau}}(A))) \cap \omega| = 1$ равенство $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{N}_p l^{\tau}_{\omega_{n-1}}\mathrm{form}(A)) = \infty$, вследствие леммы 14 заключаем, что $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{B}_{(q)}) = \mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{F}) = n$. Таким образом, если либо $|\pi(A) \cap \omega| \geq 3$, $|\pi(\mathrm{Com}(\mathrm{S}_{\bar{\tau}}(A))) \cap \omega| = 1$, либо $|\pi(A) \cap \omega| \geq 2$, $|\pi(\mathrm{Com}(\mathrm{S}_{\bar{\tau}}(A))) \cap \omega| \geq 2$, то $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{F}) = \mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{B}_{(q)}) = n$. Отметим, что из указанных равенств ввиду леммы 15 вытекают также равенства $\mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{F}) = \mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{B}_{(q)}) = n$, установленные ранее для более широкого случая, когда $|\pi(A) \cap \omega| \geq 2$.

Рассмотрим теперь последнюю оставшуюся возможность, когда $|\pi(\mathrm{Com}(\mathrm{S}_{\bar{\tau}}(A))) \cap \omega| = 1$ и $|\pi(A) \cap \omega| =$

2. Считаем, что $\pi(A) \cap \omega = \{p, q\}$ и $\pi(\mathrm{Com}(\mathrm{S}_{\bar{\tau}}(A))) \cap \omega = \{p\}$. Кроме того, в рассматриваемом случае для данного целого неотрицательного n и простого r условимся для обозначения формаций $l^{\tau}_{\omega_n}\mathrm{form}(A)$ и $\mathfrak{N}_r l^{\tau}_{\omega_n}\mathrm{form}(A)$ вместо символов соответственно $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{V}_{(r)}$ использовать соответственно символы $\tilde{\mathfrak{F}}_{(n)}$ и $\tilde{\mathfrak{V}}_{(n,r)}$; канонические спутники указанных формаций также обозначим соответствующим образом: $\tilde{F}_{(n)}$ и $\tilde{\mathfrak{V}}_{(n,q)}$. Тогда, как доказано выше, $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\tilde{\mathfrak{V}}_{(0,r)}) = \infty$, если $r = p$, и $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\tilde{\mathfrak{V}}_{(0,r)}) = 0$, если $r \in p'$. Кроме того, $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\tilde{\mathfrak{F}}_{(0)}) = 0$. Далее, для $n > 0$ будем иметь: если $r \in \{p, q\} = \pi(A) \cap \omega$, то $\tilde{V}_{(n,r)}(r) = \tilde{V}_{(n,r)}(\omega') = \tilde{\mathfrak{V}}_{(n,r)}$, $\tilde{V}_{(n,r)}(\bar{r}) = \mathfrak{N}_{\bar{r}} l^{\tau}_{\omega_{n-1}}\mathrm{form}(A) = \tilde{\mathfrak{V}}_{(n-1,\bar{r})} = \tilde{F}_{(n)}(\bar{r})$, где $\bar{r} \in (\pi(A) \cap \omega) \setminus \{r\}$; если $r \in \omega \setminus \pi(A) = \omega \setminus (\pi(A) \cap \omega)$ или $r \in \omega'$, то $\tilde{V}_{(n,r)}(\bar{r}) = \tilde{\mathfrak{V}}_{(n-1,\bar{r})} = \tilde{F}_{(n)}(\bar{r})$ для любого $\bar{r} \in \pi(A) \cap \omega$. Рассматривая вначале первый подслучай, когда $r \in \pi(A) \cap \omega$, с учетом единственности элемента $\bar{r} \in (\pi(A) \cap \omega) \setminus \{r\}$ и равенства $\tilde{V}_{(n,r)}(\bar{r}) = \tilde{\mathfrak{V}}_{(n-1,\bar{r})}$, в силу леммы 14 заключаем, что $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\tilde{\mathfrak{V}}_{(n,r)}) = \mathrm{Ind}_{\omega_c}(\tilde{\mathfrak{V}}_{(n-1,\bar{r})}) + 1$, если $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\tilde{\mathfrak{V}}_{(n-1,\bar{r})}) < \infty$, и $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\tilde{\mathfrak{V}}_{(n,r)}) = \infty$, если $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\tilde{\mathfrak{V}}_{(n-1,\bar{r})}) = \infty$. Вследствие равенств $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\tilde{\mathfrak{V}}_{(0,p)}) = \infty$ и $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\tilde{\mathfrak{V}}_{(0,q)}) = 0$, простая индукция по n показывает, что если n четно, то $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\tilde{\mathfrak{V}}_{(n,p)}) = \infty$, $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\tilde{\mathfrak{V}}_{(n,q)}) = n$; если n нечетно, то $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\tilde{\mathfrak{V}}_{(n,p)}) = n$, $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\tilde{\mathfrak{V}}_{(n,q)}) = \infty$. Но последние соотношения приводят нас также не только к рассмотрению второго подслучая, когда $r \in (\omega \setminus \pi(A)) \cup \omega'$, но и к нахождению общего для рассматриваемых подслучаев значения $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\tilde{\mathfrak{F}}_{(n)})$ индекса ω-композиционности формации $\tilde{\mathfrak{F}}_{(n)}$. Действительно, для указанного (второго) подслучая, как отмечалось выше, для любого $\bar{r} \in \pi(A) \cap \omega = \{p, q\}$ имеет место $\tilde{F}_{(n)}(\bar{r}) = \tilde{\mathfrak{V}}_{(n-1,\bar{r})} = \tilde{V}_{(n,r)}(\bar{r})$, где $n > 0$. По доказанному для каждого $\bar{r} \in \{p, q\}$ справедливо $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\tilde{\mathfrak{V}}_{(n-1,\bar{r})}) \geq n - 1$, причем $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\tilde{\mathfrak{V}}_{(n-1,\bar{r}_0)}) = n - 1$, где $\bar{r}_0 = p$, если n четно, и $\bar{r}_0 = q$, если n нечетно. Из последнего в силу леммы 14 заключаем, что для всякого $r \in (\omega \setminus \pi(A)) \cup \omega'$ имеют место равенства $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\tilde{\mathfrak{F}}_{(n)}) = \mathrm{Ind}_{\omega_c}(\tilde{\mathfrak{V}}_{(n,r)}) = \mathrm{Ind}_{\omega_c}(\tilde{\mathfrak{V}}_{(n-1,\bar{r}_0)}) + 1 = (n-1) + 1 = n$.

Возвращаясь к прежним обозначениям, отметим, что из вышеприведенных рассуждений следует, в частности, что для данного целого неотрицательного числа n множество значений индексов формации $\mathfrak{F}$: индекса ω-локальности $\mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{F})$ и индекса ω-композиционности $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{F})$ — содержится во множестве $\{n, \infty\}$. Сказанное выше относится также и к формации $\mathfrak{V}_{(q)}$ для каждого простого числа q.

Таким образом, для формации $\mathfrak{F} = l^{\tau}_{\omega_n}\mathrm{form}(A)$, такой, что A — некоторая простая неабелева группа, n — целое неотрицательное число и τ — произвольный подгрупповой функтор, имеем:
если $n = 0$, то

$|\pi(A) \cap \omega| = 0 \Longrightarrow \mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{F}) = \mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{F}) = \infty$,

$|\pi(A) \cap \omega| \geq 1$, $|\pi(\mathrm{Com}(\mathrm{S}_{\bar{\tau}}(A))) \cap \omega| = 0 \Longrightarrow \mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{F}) = n$, $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{F}) = \infty$,

$|\pi(A) \cap \omega| \geq 1$, $|\pi(\mathrm{Com}(\mathrm{S}_{\bar{\tau}}(A))) \cap \omega| \geq 1 \Longrightarrow \mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{F}) = \mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{F}) = n$;

если $n > 0$, то

$|\pi(A) \cap \omega| < 2 \Longrightarrow \mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{F}) = \mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{F}) = \infty$,

$|\pi(A) \cap \omega| \geq 2$, $|\pi(\mathrm{Com}(\mathrm{S}_{\bar{\tau}}(A))) \cap \omega| = 0 \Longrightarrow \mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{F}) = n$, $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{F}) = \infty$,

$|\pi(A) \cap \omega| \geq 2$, $|\pi(\mathrm{Com}(\mathrm{S}_{\bar{\tau}}(A))) \cap \omega| \geq 1 \Longrightarrow \mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{F}) = \mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{F}) = n$,

где $\mathrm{S}_{\bar{\tau}}(A) = \{A_1, \ldots, A_t\}$ — совокупность всех $\bar{\tau}$-подгрупп группы A ($t \in \mathbb{N}$), $\bar{\tau}$ — замыкание подгруппового функтора τ (здесь множества простых $\pi(A)$ и $\pi(\mathrm{Com}(S_{\bar{\tau}}(A)))$ могут быть заменены соответственно на $\pi(\tilde{A})$ и $\pi(\mathrm{Com}(\tilde{A}))$, если только $\tilde{A} = A_1 \times \ldots \times A_t$).

Для формации $\mathfrak{V}_{(q)} = \mathfrak{N}_q l^{\tau}_{\omega_n}\mathrm{form}(A)$ получаем:
если $n = 0$, то

$|\pi(A) \cap \omega| = 0 \Longrightarrow \forall q \in \mathbb{P} : \mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{V}_{(q)}) = \mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{V}_{(q)}) = \infty$,

$|\pi(A) \cap \omega| = 1$, причем $\pi(A) \cap \omega = \{p\}$, и $|\pi(\mathrm{Com}(\mathrm{S}_{\bar{\tau}}(A))) \cap \omega| = 0 \Longrightarrow \mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{V}_{(p)}) = \infty$, $\forall q \in p' : \mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{V}_{(q)}) = 0$, $\forall r \in \mathbb{P} : \mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{V}_{(r)}) = \infty$,

$|\pi(A) \cap \omega| = |\pi(\mathrm{Com}(\mathrm{S}_{\bar{\tau}}(A))) \cap \omega| = 1$, причем $\pi(\mathrm{Com}(\mathrm{S}_{\bar{\tau}}(A))) \cap \omega = \{p\} = \pi(A) \cap \omega \Longrightarrow \mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{V}_{(p)}) = \mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{V}_{(p)}) = \infty$, $\forall q \in p' : \mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{V}_{(q)}) = \mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{V}_{(q)}) = 0$,

$|\pi(A) \cap \omega| \geq 2$, $\pi(\mathrm{Com}(\mathrm{S}_{\bar{\tau}}(A))) \cap \omega| = 0 \Longrightarrow \forall q \in \mathbb{P} : \mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{V}_{(q)}) = 0$, $\forall r \in \mathbb{P} : \mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{V}_{(r)}) = \infty$,

$|\pi(A) \cap \omega| \geq 2$, $|\pi(\mathrm{Com}(\mathrm{S}_{\bar{\tau}}(A))) \cap \omega| = 1$, причем $\pi(\mathrm{Com}(\mathrm{S}_{\bar{\tau}}(A))) \cap \omega = \{p\} \Longrightarrow \forall q \in \mathbb{P} : \mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{V}_{(q)}) = 0$, $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{V}_{(p)}) = \infty$, $\forall r \in p' : \mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{V}_{(r)}) = 0$,

$|\pi(A) \cap \omega| \geq 2$ и, кроме того, $|\pi(\mathrm{Com}(\mathrm{S}_{\bar{\tau}}(A))) \cap \omega| \geq 2 \Longrightarrow \forall q \in \mathbb{P} : \mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{V}_{(q)}) = \mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{V}_{(q)}) = 0$;

если $n > 0$, то

$|\pi(A) \cap \omega| < 2 \Longrightarrow \forall q \in \mathbb{P} : \mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{V}_{(q)}) = \mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{V}_{(q)}) = \infty$,

$|\pi(A) \cap \omega| \geq 2$, $|\pi(\mathrm{Com}(\mathrm{S}_{\bar{\tau}}(A))) \cap \omega| = 0 \Longrightarrow \forall q \in \mathbb{P} : \mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{V}_{(q)}) = n$, $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{V}_{(q)}) = \infty$,

$|\pi(A) \cap \omega| = 2$, $|\pi(\mathrm{Com}(\mathrm{S}_{\bar{\tau}}(A))) \cap \omega| = 1$, причем $\pi(A) \cap \omega = \{p, q\}$ и $\pi(\mathrm{Com}(\mathrm{S}_{\bar{\tau}}(A))) \cap \omega = \{p\} \Longrightarrow \forall r \in \mathbb{P} : \mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{V}_{(r)}) = n$ и

если $s \in \pi(A) \cap \omega$, то $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{V}_{(s)}) = \infty$ — при $s = p$, и $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{V}_{(s)}) = n$ — при $s = q$, в случае, когда n четно, и $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{V}_{(s)}) = n$ — при $s = p$, и $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{V}_{(q)}) = \infty$ — при $s = q$, в случае нечетного n;

если $s \in (\omega \setminus \pi(A)) \cup \omega'$, то $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{V}_{(s)}) = n$,

$|\pi(A) \cap \omega| \geq 3$, $|\pi(\mathrm{Com}(\mathrm{S}_{\bar{\tau}}(A))) \cap \omega| \geq 1$ или $|\pi(A) \cap \omega| \geq 2$, $|\pi(\mathrm{Com}(\mathrm{S}_{\bar{\tau}}(A))) \cap \omega| \geq 2$ (т. е. $|\pi(A) \cap \omega| \geq 2$ и $|\pi(\mathrm{Com}(\mathrm{S}_{\bar{\tau}}(A))) \cap \omega| \geq 1$, причем равенства $|\pi(A) \cap \omega| = 2$ и $|\pi(\mathrm{Com}(\mathrm{S}_{\bar{\tau}}(A))) \cap \omega| = 1$ не выполняются одновременно) $\Longrightarrow \forall q \in \mathbb{P} : \mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{V}_{(q)}) = \mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{V}_{(q)}) = n$.

В частности, если τ — такой подгрупповой функтор, что $\mathrm{Com}\big(\mathrm{S}_{\bar\tau}(A)\big) = \varnothing$ (например, $\tau \le \tau_{sn}$), $p \in \mathbb{P}$ и $|\pi(A) \cap \omega| \ge 2$, то для любого целого неотрицательного n имеем $\mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{F}) = \mathrm{Ind}_{\omega_l}\big(\mathfrak{V}_{(p)}\big) = n$, $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{F}) = \mathrm{Ind}_{\omega_c}\big(\mathfrak{V}_{(p)}\big) = \infty$, и следовательно, $\mathfrak{F} = l^{\tau}_{\omega_n}\mathrm{form}(A) \in c^{\tau}_{\omega_\infty} \setminus l^{\omega}_{m}$, а также $\mathfrak{V}_{(p)} = \mathfrak{N}_p l^{\tau}_{\omega_n}\mathrm{form}(A) \in c^{\tau}_{\omega_\infty} \setminus l^{\omega}_{m}$, где m — такое натуральное число, что $m > n$.

В заключение отметим, что если $|\omega| > 1$, то всегда найдется неабелевая простая группа $\hat{A}$ такая, что $|\pi(\hat{A})\cap\omega| \ge 2$. Действительно, полагая $\hat{A} = A_5$, если $p \le 5$, и $\hat{A} = A_p$, если $p > 5$, где $p = m\big(\omega\setminus\{m(\omega)\}\big)$ (здесь через A_k обозначена знакопеременная группа степени k, $k \in \mathbb{N}$, а для произвольного непустого множества $\pi \subseteq \mathbb{P}$ через $m(\pi)$ обозначен его наименьший элемент), вследствие теоремы Галуа (см., например, [25], с. 44) убеждаемся, что это действительно так. Тогда по доказанному для формации $\hat{\mathfrak{F}} = l^{\tau}_{\omega_n}\mathrm{form}(\hat{A})$ имеем $\hat{\mathfrak{F}} \in l^{\tau}_{\omega_n} \setminus l^{\tau}_{\omega_{n+1}}$, где τ — произвольный подгрупповой функтор, n — целое неотрицательное число. На этом рассмотрение примера 3 мы оканчиваем.

Здесь целесообразно заметить, что рассуждения, использованные в примере 2, приводящие к построению L-подходящей (l-подходящей) или C-подходящей (c-подходящей) последовательности для (частично) кратно насыщенных или композиционных формаций соответственно, являются более общими (см. доказательство приводимой ниже теоремы 1) в отличие от примера 3, где существенно используются свойства порождающего множества (в данном случае — простой неабелевой группы).

В связи с примерами 2 и 3 рассмотрим также следующее утверждение, которое в известном смысле является обобщением примера 1.3.3 [6], с. 28.

Утверждение 5. *Пусть $\mathfrak{H}$ — непустая не ω-композиционная формация, π — множество простых чисел такое, что $\pi(\mathfrak{H}) \cap \omega \subseteq \pi$, причем $|\pi \cap \omega| > 1$, и n — целое неотрицательное число. И пусть $\mathfrak{F}_n = \mathfrak{N}^n_\pi\mathfrak{H}$. Тогда*

$$\mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{F}_n) = \mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{F}_n) = n.$$

Доказательство. Для произвольного целого неотрицательного n и всякого простого r обозначим через $\mathfrak{V}_{n,r}$ формацию $\mathfrak{N}_r\mathfrak{F}_n = \mathfrak{N}_r\mathfrak{N}^n_\pi\mathfrak{H}$. Заметим, что ввиду леммы 10 формация $\mathfrak{F}_n = \mathfrak{N}^n_\pi\mathfrak{H}$ является n-кратно (разрешимо) ω-насыщенной. Поэтому в силу леммы 5 и леммы 6 n-кратно (разрешимо) ω-насыщенной является и формация $\mathfrak{V}_{n,r} = \mathfrak{N}_r\mathfrak{N}^n_\pi\mathfrak{H}$ (то, что формация $\mathfrak{V}_{n,r}$ n-кратно ω-композиционна, вытекает также из следствия 1 и того, что $\mathfrak{V}_{n,r}$ n-кратно ω-насыщенна). Итак, обе формации $\mathfrak{F}_n$ и $\mathfrak{V}_{n,r}$ являются n-кратно (разрешимо) ω-насыщенными. Кроме того, обозначая через F_n и $V_{n,r}$ канонические ω-локальные спутники формаций $\mathfrak{F}_n = \mathfrak{N}^n_\pi\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{V}_{n,r} = \mathfrak{N}_r\mathfrak{N}^n_\pi\mathfrak{H}$ соответственно, где $n > 0$ и r — произвольное простое, в силу леммы 10 видим, что F_n и $V_{n,r}$ являются также каноническими ω-композиционными спутниками указанных формаций (см. также следствие 1). Вследствие леммы 10, теоремы 7 [26] и замечания 2 [26] находим, что $F_n(s) = \mathfrak{N}_s\mathfrak{N}^{n-1}_\pi\mathfrak{H}$ для всех $s \in \pi \cap \omega$, $F_n(s) = \varnothing$ для всякого $s \in \omega \setminus \pi$, $F_n(\omega') = \mathfrak{F}_n$, и если $r \in \omega$, то $V_{n,r}(r) = \mathfrak{N}_r\mathfrak{N}^n_\pi\mathfrak{H} = \mathfrak{V}_{n,r}$, $V_{n,r}(s) = \mathfrak{N}_s\mathfrak{N}^{n-1}_\pi\mathfrak{H} = \mathfrak{V}_{n-1,s}$ для каждого $s \in (\pi \cap \omega) \setminus \{r\}$, $V_{n,r}(s) = \varnothing$ для любого $s \in \omega \setminus (\pi \cup \{r\})$, $V_{n,r}(\omega') = \mathfrak{V}_{n,r}$; если $r \notin \omega$, то, как несложно видеть, $V_{n,r}(s) = F_n(s)$ для каждого $s \in \omega$, т. е. $V_{n,r}(s) = \mathfrak{N}_s\mathfrak{N}^{n-1}_\pi\mathfrak{H}$ для всех $s \in \pi \cap \omega$ и $V_{n,r}(s) = \varnothing$ для любого $s \in \omega \setminus \pi$, а также $V_{n,r}(\omega') = \mathfrak{V}_{n,r}$. Заметим, что вследствие леммы 15 для формаций $\mathfrak{F}_n$ и $\mathfrak{V}_{n,r}$ справедливы неравенства $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{F}_n) \ge \mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{F}_n) \ge n$, а также неравенства $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{V}_{n,r}) \ge \mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{V}_{n,r}) \ge n$. Несмотря на то, что в силу той же леммы 15 для доказательства равенства $\mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{F}_n) = n$ достаточно установить, что $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{F}_n) = n$, рассмотрим, тем не менее, общий случай, полезный для получения некоторых следствий рассматриваемого утверждения.

Проведем индукцию по n. Пусть $n = 0$. По условию формация $\mathfrak{H} = \mathfrak{N}^0_\pi\mathfrak{H} = \mathfrak{F}_0$ не является ω-композиционной. Поэтому с учетом примера 1 [27] найдется такое простое $p \in \pi\big(\mathrm{Com}(\mathfrak{H})\big)\cap\omega \subseteq \pi(\mathfrak{H})\cap\omega$, что $\mathfrak{H}$ не является p-композиционной, а следовательно, и p-насыщенной формацией. Последнее равносильно соотношениям $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{F}_0) = \mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{F}_0) = 0$, а также $\mathrm{Ind}_{p_c}(\mathfrak{F}_0) = \mathrm{Ind}_{p_l}(\mathfrak{F}_0) = 0$. Отсюда и из следствия 6 вытекает, что для всех $r \in p' = \mathbb{P} \setminus \{p\}$ имеют место равенства $\mathrm{Ind}_{p_c}(\mathfrak{V}_{0,r}) = \mathrm{Ind}_{p_c}(\mathfrak{N}_r\mathfrak{F}_0) = \mathrm{Ind}_{p_c}(\mathfrak{N}_r\mathfrak{H}) = 0$ и, кроме того, равенства $\mathrm{Ind}_{p_l}(\mathfrak{V}_{0,r}) = \mathrm{Ind}_{p_l}(\mathfrak{N}_r\mathfrak{F}_0) = \mathrm{Ind}_{p_l}(\mathfrak{N}_r\mathfrak{H}) = 0$, что влечет для тех же r выполнение равенств $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{V}_{0,r}) = \mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{V}_{0,r}) = 0$. Таким образом, утверждение для $n = 0$ справедливо. Для дальнейших рассуждений введем также следующие обозначения: $i_c = \mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{V}_{0,p})$, $i_l = \mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{V}_{0,p})$.

Пусть теперь $n > 0$. Предположим сначала, что $|\pi \cap \omega| = 2$, причем $\pi \cap \omega = \{p, q\}$. Если $r \in \pi \cap \omega$ (первый подслучай), то для канонического ω-композиционного (ω-локального) спутника $V_{n,r}$ формации $\mathfrak{V}_{n,r}$, как отмечено выше, будем иметь $V_{n,r}(r) = \mathfrak{V}_{n,r}$ и $V_{n,r}(\bar r) = \mathfrak{V}_{n-1,\bar r} = F_n(\bar r)$, где $\bar r \in (\pi \cap \omega) \setminus \{r\}$; при $r \in (\omega \setminus \pi) \cup \omega'$ (второй подслучай) имеем $V_{n,r}(r) = \mathfrak{V}_{n,r}$, если только $r \in \omega \setminus \pi$, и $V_{n,r}(\bar r) = \mathfrak{V}_{n-1,\bar r} = F_n(\bar r)$ для любого $\bar r \in (\pi \cap \omega) \setminus \{r\} = \pi \cap \omega$. Индукцией по n покажем, что в первом подслучае, когда $r \in \pi \cap \omega$, для индекса ω-композиционности $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{V}_{n,r})$ формации $\mathfrak{V}_{n,r}$ имеет место:

если n четно, то

$$\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{V}_{n,r}) = \begin{cases} i_c(n), & \text{если } r = p,\\ n, & \text{если } r = q;\end{cases}$$

если n нечетно, то

$$\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{V}_{n,r}) = \begin{cases} n, & \text{если } r = p,\\ i_c(n), & \text{если } r = q,\end{cases}$$

где $i_c(n) = i_c + n$ — при $i_c < \infty$, и $i_c(n) = \infty$ — при $i_c = \infty$.

Действительно, для $n = 0$ ввиду нашего определения $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{B}_{0,p}) = i_c$, а вследствие ранее доказанного $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{B}_{(0,q)}) = 0$, и следовательно, утверждение верно. Вновь считая, что $n > 0$, а также предполагая справедливость данного утверждения для $n-1$, с учетом единственности элемента $\bar{r} \in (\pi \cap \omega) \setminus \{r\}$, соотношения $\pi\big(\mathrm{Com}(\mathfrak{B}_{n,r})\big) \cap \omega = \pi \cap \omega$, равенств $V_{n,r}(r) = \mathfrak{B}_{n,r}$ и $V_{n,r}(\bar{r}) = \mathfrak{B}_{n-1,\bar{r}}$, а также неравенства $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{B}_{n,r}) \geq n$, в силу леммы 14 заключаем, что $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{B}_{n,r}) = \mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{B}_{n-1,\bar{r}}) + 1$, если $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{B}_{n-1,\bar{r}}) < \infty$, и $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{B}_{n,r}) = \infty$, если $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{B}_{n-1,\bar{r}}) = \infty$. Из последнего непосредственно вытекает требуемое, т. е. справедливость данного утверждения для любого целого неотрицательного n.

Проводя аналогичные рассуждения для индекса ω-локальности $\mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{B}_{n,r})$ формации $\mathfrak{B}_{n,r}$, учитывая равенство $\mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{B}_{0,p}) = i_l$, соотношение $\pi(\mathfrak{B}_{n,r}) \cap \omega = \pi \cap \omega$ и неравенство $\mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{B}_{n,r}) \geq n$, а также принимая во внимание теорему 13, имеем:

если n четно, то

$$\mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{B}_{n,r}) = \begin{cases} i_l(n), & \text{если } r = p,\\ n, & \text{если } r = q; \end{cases}$$

если n нечетно, то

$$\mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{B}_{n,r}) = \begin{cases} n, & \text{если } r = p,\\ i_l(n), & \text{если } r = q, \end{cases}$$

где $i_l(n) = i_l + n$ — при $i_l < \infty$, и $i_l(n) = \infty$ — при $i_l = \infty$.

Рассмотрим теперь второй подслучай, когда $r \in (\omega \setminus \pi) \cup \omega'$. Как отмечалось выше, $V_{n,r}(r) = \mathfrak{B}_{n,r}$, если только $r \in \omega \setminus \pi$, $V_{n,r}(\bar{r}) = \mathfrak{B}_{n-1,\bar{r}}$ для любого $\bar{r} \in \pi \cap \omega = \{p, q\}$, $V_{n,r}(\bar{r}) = \varnothing$ для всякого $\bar{r} \in \omega \setminus (\pi \cup \{r\})$ и $V_{n,r}(\omega') = \mathfrak{B}_{n,r}$. По доказанному для каждого $\bar{r} \in \{p, q\}$ справедливо неравенство $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{B}_{n-1,\bar{r}}) \geq n-1$, причем $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{B}_{n-1,\bar{r}_0}) = n-1$, где $\bar{r}_0 = p$, если n четно, и $\bar{r}_0 = q$, если n нечетно. Тогда в силу леммы 14 заключаем, что для любого $r \in (\omega \setminus \pi) \cup \omega'$ имеют место равенства $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{B}_{n,r}) = \mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{B}_{n-1,\bar{r}_0}) + 1 = (n-1) + 1 = n$. Аналогичное рассуждение для $\mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{B}_{n,r})$ (с использованием леммы 13 вместо леммы 14) показывает справедливость для данного подслучая также равенства $\mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{B}_{n,r}) = n$. Вспоминая, наконец, что для каждого $\bar{r} \in \pi \cap \omega = \{p, q\}$ имеет место $F_n(\bar{r}) = \mathfrak{B}_{n-1,\bar{r}} = V_{n,r}(\bar{r})$, приходим к выводу, что для двух рассматриваемых подслучаев (т. е. для всего случая $|\pi \cap \omega| = 2$) для формации $\mathfrak{F}_n$ верны равенства $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{F}_n) = \mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{F}_n) = n$.

Пусть теперь $|\pi \cap \omega| \geq 3$. Предположим, что $n > 0$ и выполнены равенства $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{B}_{n-1,p}) = i_c$, $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{B}_{n-1,t}) = n-1$ для любого $t \in p'$, если $n = 1$, и $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{B}_{n-1,t}) = n-1$ для всякого $t \in \mathbb{P}$, если $n \geq 2$. Зафиксируем произвольное простое q. Выбирая теперь произвольное r с условием $r \in (\pi \cap \omega) \setminus \{p, q\}$, если $q \neq p$, $q \in \omega$, и $r \in (\pi \cap \omega) \setminus \{p\}$, если $q \neq p$, $q \in \omega'$ или $q = p$, — при $n = 1$, и $r \in (\pi \cap \omega) \setminus \{q\}$, если $q \in \omega$, и $r \in \pi \cap \omega$, если $q \notin \omega$, — при $n \geq 2$, видим, согласно предположению, что $\mathrm{Ind}_{\omega_c}\big(V_{n,q}(r)\big) = \mathrm{Ind}_{\omega_c}\big(\mathfrak{B}_{n-1,r}\big) = \mathrm{Ind}_{\omega_c}\big(F_n(r)\big) = n-1$. Учитывая теперь базу индукции, равенство $\pi\big(\mathrm{Com}(\mathfrak{B}_{n,q})\big) \cap \omega = \pi \cap \omega$ или $\pi\big(\mathrm{Com}(\mathfrak{B}_{n,q})\big) \cap \omega = (\pi \cap \omega) \cup \{q\}$ — в зависимости от того, принадлежит ли q множеству $(\pi \cap \omega) \cup \omega'$ или $\omega \setminus \pi$ соответственно, принимая во внимание также равенство $\pi\big(\mathrm{Com}(\mathfrak{F}_n)\big) \cap \omega = \pi \cap \omega$ и неравенство $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{B}_{n,q}) \geq n$ (последнее — только при $q \in \omega$), из леммы 14 получаем, что $\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{B}_{n,q}) = \mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{F}_n) = n$. Таким образом, для любого натурального n и всякого простого q имеют место равенства $\mathrm{Ind}_{\omega_c}\big(\mathfrak{B}_{n,q}\big) = \mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{F}_n) = n$.

Аналогичные рассуждения, но уже с применением леммы 13, приводят нас также к равенствам $\mathrm{Ind}_{\omega_l}\big(\mathfrak{B}_{n,q}\big) = \mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{F}_n) = n$, справедливым для всякого натурального числа n и произвольного простого q.

Итак, для любого целого неотрицательного n справедливы равенства $\mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{F}_n) = \mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{F}_n) = n$. Утверждение доказано.

Из доказательства утверждения 5 в силу следствия 7 и следствия 8 вытекает следующее

Утверждение 6. *Пусть ω — множество простых чисел с $|\omega| > 1$, q — произвольное простое, а n — произвольное целое неотрицательное число. И пусть $\mathfrak{F}_n = \mathfrak{N}_\pi^n \mathfrak{H}$, $\mathfrak{B}_{n,q} = \mathfrak{N}_q \mathfrak{N}_\pi^n \mathfrak{H}$, где $\mathfrak{H}$ — непустая формация, которая не является p-композиционной ни при каком $p \in \{r, s\}$, где r, s — некоторые различные простые числа из ω, π — такое множество простых чисел, что $\pi(\mathfrak{H}) \cap \omega \subseteq \pi$. Тогда*

$$\mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{F}_n) = \mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{F}_n) = \mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{B}_{n,q}) = \mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{B}_{n,q}) = n.$$

Следующие четыре утверждения также следуют из доказательства утверждения 5, при этом рассматриваются либо только насыщенные формации и соответствующие им спутники (утверждения 7 и 8), либо только композиционные (утверждения 9 и 10). Сообразно с этим в утверждениях 9 и 10 вместо леммы 10 в базе индукции используется лемма 11. Аналогично теорема 7 и замечание 2 работы [26] заменяются на теорему 6 и замечание 2 работы [27] соответственно. Отметим также, что обоснование утверждения 8 опирается также на следствие 8, а обоснование утверждения 10 — на следствие 7.

Утверждение 7. *Пусть $\mathfrak{H}$ — непустая не ω-насыщенная формация, π — такое множество простых чисел, что $\pi(\mathfrak{H}) \cap \omega \subseteq \pi$, причем $|\pi \cap \omega| > 1$, и n — целое неотрицательное число. И пусть $\mathfrak{F}_n = \mathfrak{N}_\pi^n \mathfrak{H}$. Тогда*

$$\mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{F}_n) = n.$$

Утверждение 8. *Пусть ω — множество простых чисел с $|\omega| > 1$, q — произвольное простое, а n — произвольное целое неотрицательное число. И пусть $\mathfrak{F}_n = \mathfrak{N}_\pi^n \mathfrak{H}$, $\mathfrak{V}_{n,q} = \mathfrak{N}_q \mathfrak{N}_\pi^n \mathfrak{H}$, где $\mathfrak{H}$ — непустая формация, которая не является p-насыщенной ни для какого $p \in \{r, s\}$, где r, s — некоторые различные простые числа из ω, π — такое множество простых чисел, что $\pi(\mathfrak{H}) \cap \omega \subseteq \pi$. Тогда*

$$\mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{F}_n) = \mathrm{Ind}_{\omega_l}(\mathfrak{V}_{n,q}) = n.$$

Утверждение 9. *Пусть $\mathfrak{H}$ — непустая не ω-композиционная формация, π — такое множество простых чисел, что $\pi\big(\mathrm{Com}(\mathfrak{H})\big) \cap \omega \subseteq \pi$, причем $|\pi \cap \omega| > 1$, и n — целое неотрицательное число. И пусть $\mathfrak{F}_n = \mathfrak{N}_\pi^n \mathfrak{H}$. Тогда*

$$\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{F}_n) = n.$$

Утверждение 10. *Пусть ω — множество простых чисел с $|\omega| > 1$, q — произвольное простое, а n — произвольное целое неотрицательное число. И пусть $\mathfrak{F}_n = \mathfrak{N}_\pi^n \mathfrak{H}$, $\mathfrak{V}_{n,q} = \mathfrak{N}_q \mathfrak{N}_\pi^n \mathfrak{H}$, где $\mathfrak{H}$ — непустая формация, которая не является p-композиционной ни при каком $p \in \{r, s\}$, где r, s — некоторые различные простые числа из ω, π — такое множество простых чисел, что $\pi\big(\mathrm{Com}(\mathfrak{H})\big) \cap \omega \subseteq \pi$. Тогда*

$$\mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{F}_n) = \mathrm{Ind}_{\omega_c}(\mathfrak{V}_{n,q}) = n.$$

3. Условия вложимости решетки H^{ω_l} в решетку Θ^{ω_c}. Основной результат работы предварим определением и небольшим числом лемм.

Определение 13. *Пусть Θ — такая полная решетка формаций, что $\Theta \subseteq \Theta^{\omega_c}$, причем для любой Θ-формации ее канонический ω-композиционный спутник Θ-значен. И пусть для формации $\mathfrak{F}$ имеет место $\mathfrak{F} = CF_\omega(F) \in \Theta$. Для любой последовательности простых чисел $p_1, p_2 \dots, p_n$ ($n \in \mathbb{N}$) из ω определим ω-композиционный Θ-значный спутник $Fp_1p_2 \dots p_n$ следующим образом:*

1) Fp_1 — канонический ω-композиционный спутник Θ-формации $F(p_1)$;

2) $Fp_1p_2 \dots p_n$ — канонический ω-композиционный спутник Θ-формации $Fp_1p_2 \dots p_{n-1}(p_n)$, если $n \geq 2$.

Лемма 18. *Пусть Θ — такая полная решетка формаций, что $\Theta \subseteq \Theta^{\omega_c}$, причем для любой Θ-формации ее канонический ω-композиционный спутник Θ-значен. И пусть $\mathfrak{F} = CF_\omega(F) \in \Theta$, $p_1, p_2, \dots, p_n$ — некоторая последовательность простых чисел из ω ($n \in \mathbb{N}$). Тогда и только тогда последовательность $p_1, p_2, \dots, p_n$ является C-подходящей для $\mathfrak{F}$ ω-последовательностью, когда $p_1 \in \pi\big(\mathrm{Com}(\mathfrak{F})\big) \cap \omega$ и для любого $k \in \{2, \dots, n\}$ имеет место $p_k \in \pi\big(\mathrm{Com}(Fp_1 \dots p_{k-2}(p_{k-1}))\big) \cap \omega$ (при $k = 2$ мы отождествляем запись (спутник) $Fp_1 \dots p_{k-2}(a)$ с $F(a)$, где $a \in \omega \cup \{\omega'\}$).*

Доказательство. Если $n = 1$, то утверждение леммы очевидно. При $n > 1$ требуемое утверждение следует, как несложно видеть, из справедливого для всякого $k \in \{1, \dots, n\}$ равенства $Fp_1 \dots p_{k-1}(p_k) = \mathfrak{F}(NC^{p_1 \cdots p_k})$. Последнее соотношение докажем индукцией по k.

Пусть $k = 1$. Заметим, что вследствие замечания 1 [27] для любой ω-композиционной формации $\mathfrak{H}$ такой, что $\mathfrak{H} = CF_\omega(H)$, имеет место $H(p) = \mathfrak{N}_p \mathfrak{H}(C^p) = \mathfrak{H}(NC^p)$ для всех $p \in \omega$. По условию $\mathfrak{F} = CF_\omega(F) \in \Theta$ и, кроме того, спутник F Θ-значен. Следовательно, так как $p_1 \in \omega$, имеем $F(p_1) = \mathfrak{F}(NC^{p_1})$. Итак, при $k = 1$ рассматриваемое равенство верно.

Пусть теперь $k > 1$ и предположим, что $Fp_1 \dots p_{k-2}(p_{k-1}) = \mathfrak{F}(NC^{p_1 \cdots p_{k-1}})$. Учитывая базу индукции, а также принимая во внимание, что $Fp_1p_2 \dots p_{k-2}(p_{k-1}) = CF_\omega(Fp_1p_2 \dots p_{k-1}) \in \Theta$, причем спутник $Fp_1p_2 \dots p_{k-1}$ является Θ-значным, в силу предположения и условия $p_k \in \omega$ имеем

$$Fp_1p_2 \dots p_{k-1}(p_k) = Fp_1 \dots p_{k-2}(p_{k-1})(NC^{p_k}) = \mathfrak{F}(NC^{p_1 \cdots p_{k-1}})(NC^{p_k}) = \mathfrak{F}(NC^{p_1 p_2 \cdots p_k}).$$

Итак, для любого $k \in \{1, \dots, n\}$ имеет место $Fp_1 \dots p_{k-1}(p_k) = \mathfrak{F}(NC^{p_1 \cdots p_k})$. Лемма доказана.

Лемма 19. *Пусть H и Θ — такие ω-частичные алгебры формаций, что $\mathrm{H} \subseteq \Theta$, $\mathrm{H}^{\omega_l} \subseteq \mathrm{H}$ и $\Theta^{\omega_c} \subseteq \Theta$, причем решетка Θ^{ω_c} индуктивна. Предположим также, что для всякого $i \in I$ формация $\mathfrak{F}_i = LF_\omega(F_i) \in \mathrm{H}^{\omega_l}$, где спутник F_i — канонический, $\mathfrak{H} = \vee_{\Theta^{\omega_c}}\big(\mathfrak{F}_i \mid i \in I\big)$, $\mathfrak{F} = \vee_{\mathrm{H}^{\omega_l}}\big(\mathfrak{F}_i \mid i \in I\big)$. Тогда*

1) $\pi\big(\mathrm{Com}(\mathfrak{H})\big) \cap \omega = \pi(\mathfrak{F}) \cap \omega$;

2) спутник $H = \vee_\Theta\big(F_i \mid i \in I\big)$ является внутренним ω-композиционным спутником формации $\mathfrak{H}$, а спутник $F = \vee_\mathrm{H}\big(F_i \mid i \in I\big)$ — внутренним ω-локальным спутником формации $\mathfrak{F}$;

3) предположим также, что $\mathrm{H}^{\omega_l} = \mathrm{H}$, $\Theta^{\omega_c} = \Theta$, и пусть, кроме того, $p_1, \dots, p_n$ — некоторая C-подходящая для $\mathfrak{F}$ ω-последовательность простых чисел ($n \in \mathbb{N}$). Тогда последовательность простых чисел $p_1, \dots, p_n$ является C-подходящей для $\mathfrak{H}$ ω-последовательностью, спутники $H = \vee_\Theta\big(F_i \mid i \in I\big)$, $Hp_1 = \vee_\Theta\big(F_ip_1 \mid i \in I\big), \dots, Hp_1 \dots p_n = \vee_\Theta\big(F_ip_1 \dots p_n \mid i \in I\big)$ являются каноническими ω-композиционными спутниками формаций $\mathfrak{H}$, $H(p_1), \dots, Hp_1 \dots p_{n-1}(p_n)$ соответственно, а спутники $F = \vee_\mathrm{H}\big(F_i \mid i \in I\big)$, $Fp_1 = \vee_\mathrm{H}\big(F_ip_1 \mid$

$i \in I)$,..., $Fp_1 \dots p_n = \vee_{\mathrm{H}}(F_i p_1 \dots p_n \mid i \in I)$ — каноническими ω-локальными спутниками формаций $\mathfrak{F}$, $F(p_1)$,..., $Fp_1 \dots p_{n-1}(p_n)$ соответственно.

Доказательство. 1) Заметим прежде всего, что ввиду леммы 4 и условия имеют место включения $\mathrm{H}^{\omega_l} \subseteq \mathrm{H}^{\omega_c} \subseteq \Theta^{\omega_c}$. Следовательно, $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$. Поэтому с учетом леммы 7 имеем $\pi\big(\mathrm{Com}(\mathfrak{H})\big) \cap \omega \subseteq \pi\big(\mathrm{Com}(\mathfrak{F})\big) \cap \omega = \pi(\mathfrak{F}) \cap \omega$. Значит, если $\pi(\mathfrak{F}) \cap \omega = \varnothing$, то утверждение верно. Пусть $\pi(\mathfrak{F}) \cap \omega \neq \varnothing$ и $p \in \pi(\mathfrak{F}) \cap \omega$. Так как $\mathfrak{F} = \vee_{\mathrm{H}^{\omega_l}}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I) = \mathrm{H}^{\omega_l}\mathrm{form}\big(\bigcup_{i\in I}\mathfrak{F}_i\big)$, то вследствие леммы 5 [26] $\pi(\mathfrak{F}) \cap \omega = \pi\big(\bigcup_{i\in I}\mathfrak{F}_i\big) \cap \omega$. Следовательно, $p \in \pi\big(\bigcup_{i\in I}\mathfrak{F}_i\big) \cap \omega = \big(\bigcup_{i\in I}\pi(\mathfrak{F}_i)\big) \cap \omega = \bigcup_{i\in I}\big(\pi(\mathfrak{F}_i) \cap \omega\big)$. Из последнего вытекает существование такого $j \in I$, что $p \in \pi(\mathfrak{F}_j) \cap \omega$. Поскольку $\mathfrak{F}_j \in H^{\omega_l}$, то ввиду леммы 7 $\pi(\mathfrak{F}_j) \cap \omega = \pi\big(\mathrm{Com}(\mathfrak{F}_j)\big) \cap \omega$. Значит, $p \in \pi\big(\mathrm{Com}(\mathfrak{F}_j)\big) \cap \omega$. Поскольку $\mathfrak{H} = \vee_{\Theta^{\omega_c}}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I) = \Theta^{\omega_c}\mathrm{form}\big(\bigcup_{i\in i}\mathfrak{F}_i\big)$, заключаем, что $p \in \pi\big(\mathrm{Com}(\mathfrak{H})\big) \cap \omega$. Итак, $\pi\big(\mathrm{Com}(\mathfrak{F})\big) \cap \omega \subseteq \pi\big(\mathrm{Com}(\mathfrak{H})\big) \cap \omega$. Таким образом, $\pi\big(\mathrm{Com}(\mathfrak{H})\big) \cap \omega = \pi\big(\mathrm{Com}(\mathfrak{F})\big) \cap \omega$.

2) Поскольку $\mathfrak{F}_i$ — H^{ω_l}-формация ($i \in I$) и H — ω-частичная алгебра формаций, то вследствие леммы 4 $\mathfrak{F}_i = LF_\omega(F_i) = CF_\omega(F_i)$, причем все значения спутника F_i принадлежат структуре $\mathrm{H} \subseteq \Theta$. В силу условия из леммы 21 [13] следует, что решетка H^{ω_l} является индуктивной. Учитывая также индуктивность решетки Θ^{ω_c}, видим, что спутник $H = \vee_\Theta(F_i \mid i \in I)$ является ω-композиционным спутником формации $\mathfrak{H} = \vee_{\Theta^{\omega_c}}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I)$, а спутник $F = \vee_{\mathrm{H}}(F_i \mid i \in I)$ — ω-локальным спутником формации $\mathfrak{F} = \vee_{\mathrm{H}^{\omega_l}}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I)$. Из включений $\Theta^{\omega_c} \subseteq \Theta$ и $\mathrm{H}^{\omega_l} \subseteq \mathrm{H}$ следует, что спутники H и F — внутренние.

3) Предположим теперь, что $\mathrm{H}^{\omega_l} = \mathrm{H}$, $\Theta^{\omega_c} = \Theta$. И пусть $p_1, \dots, p_n$ — произвольная C-подходящая для $\mathfrak{F}$ ω-последовательность простых чисел ($n \in \mathbb{N}$). Заметим, что так как H — ω-частичная алгебра формаций, то вследствие леммы 4 имеет место $\mathrm{H} = \mathrm{H}^{\omega_l} \subseteq \mathrm{H}^{\omega_c}$, причем для любой H-формации ее канонический ω-композиционный спутник (совпадающий с каноническим ω-локальным спутником) H-значен. Последнее обстоятельство делает корректным наряду со спутниками H и F формаций $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F}$ соответственно также определение формаций $H(p_1)$,..., $Hp_1 \dots p_{n-1}(p_n)$ и $F(p_1)$,..., $Fp_1 \dots p_{n-1}(p_n)$ и соответствующих им спутников $Hp_1, \dots, Hp_1 \dots p_n$ и $Fp_1, \dots, Fp_1 \dots p_n$. Напомним, что, как отмечено в 2), решетка $\mathrm{H}^{\omega_l} = \mathrm{H}$ индуктивна.

Доказательство утверждения проведем индукцией по n.

Пусть $n = 1$. Из условия вследствие леммы 7 имеем $p_1 \in \pi\big(\mathrm{Com}(\mathfrak{F})\big) \cap \omega = \pi(\mathfrak{F}) \cap \omega$. Ввиду 1) $\pi\big(\mathrm{Com}(\mathfrak{H})\big) \cap \omega = \pi(\mathfrak{F}) \cap \omega$, и следовательно, $p_1 \in \pi\big(\mathrm{Com}(\mathfrak{H})\big) \cap \omega$. Далее, из 2) вытекает, что спутник $H = \vee_\Theta(F_i \mid i \in I)$ является внутренним ω-композиционным спутником формации $\mathfrak{H}$, а спутник $F = \vee_{\mathrm{H}}(F_i \mid i \in I)$ — внутренним ω-локальным спутником формации $\mathfrak{F}$ (поскольку формация $\mathfrak{F}_i \in \mathrm{H} = \mathrm{H}^{\omega_l}$ для каждого $i \in I$, то, как отмечено выше, $\mathfrak{F}_i = LF_\omega(F_i) = CF_\omega(F_i)$ и спутник F_i H-значен). Применяя теперь предложение 1 и предложение 3 и учитывая условие и определение канонического спутника, для любого $p \in \omega$ имеем

$$H(p) = \vee_\Theta(F_i(p) \mid i \in I) = \vee_\Theta(\mathfrak{N}_p F_i(p) \mid i \in I) = \mathfrak{N}_p\big(\vee_\Theta(F_i(p) \mid i \in I)\big) = \mathfrak{N}_p H(p),$$
$$F(p) = \vee_{\mathrm{H}}(F_i(p) \mid i \in I) = \vee_{\mathrm{H}}(\mathfrak{N}_p F_i(p) \mid i \in I) = \mathfrak{N}_p\big(\vee_{\mathrm{H}}(F_i(p) \mid i \in I)\big) = \mathfrak{N}_p F(p).$$

Кроме того,

$$H(\omega') = \vee_\Theta(F_i(\omega') \mid i \in I) = \vee_\Theta(\mathfrak{F}_i \mid i \in I) = \vee_{\Theta^{\omega_c}}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I) = \mathfrak{H},$$
$$F(\omega') = \vee_{\mathrm{H}}(F_i(\omega') \mid i \in I) = \vee_{\mathrm{H}}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I) = \vee_{\mathrm{H}^{\omega_l}}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I) = \mathfrak{F}.$$

Следовательно, H — канонический ω-композиционный спутник формации $\mathfrak{H}$, а F — канонический ω-локальный спутник формации $\mathfrak{F}$.

По доказанному $H(p_1) = \vee_\Theta(F_i(p_1) \mid i \in I) = \vee_{\Theta^{\omega_c}}(F_i(p_1) \mid i \in I)$, $F(p_1) = \vee_{\mathrm{H}}(F_i(p_1) \mid i \in I) = \vee_{\mathrm{H}^{\omega_l}}(F_i(p_1) \mid i \in I)$ и, кроме того, $F_i(p_1) \in \mathrm{H} = \mathrm{H}^{\omega_l}$ для любого $i \in I$. Последнее, как отмечено выше (см. лемма 4) влечет $F_i(p_1) = LF_\omega(F_i p_1) = CF_\omega(F_i p_1)$, причем все значения спутника $F_i p_1$ принадлежат решетке $\mathrm{H} \subseteq \Theta$. Тогда ввиду индуктивности решеток $\Theta^{\omega_c} = \Theta$ и $\mathrm{H}^{\omega_l} = \mathrm{H}$ заключаем, что $Hp_1 = \vee_\Theta(F_i p_1 \mid i \in I)$ — внутренний ω-композиционный спутник формации $H(p_1)$, а $Fp_1 = \vee_{\mathrm{H}}(F_i p_1 \mid i \in I)$ — внутренний ω-локальный спутник формации $F(p_1)$.

Применяя предложение 1 и предложение 3 с учетом условия и определения канонического спутника, для любого $q \in \omega$ получаем

$$Hp_1(q) = \vee_\Theta(F_i p_1(q) \mid i \in I) = \vee_\Theta(\mathfrak{N}_q F_i p_1(q) \mid i \in I) = \mathfrak{N}_q\big(\vee_\Theta(F_i p_1(q) \mid i \in I)\big) = \mathfrak{N}_q Hp_1(q),$$
$$Fp_1(q) = \vee_{\mathrm{H}}(F_i p_1(q) \mid i \in I) = \vee_{\mathrm{H}}(\mathfrak{N}_q F_i p_1 \mid i \in I) = \mathfrak{N}_q\big(\vee_{\mathrm{H}}(F_i p_1(q) \mid i \in I)\big) = \mathfrak{N}_q Fp_1(q).$$

Несложно видеть также, что

$$Hp_1(\omega') = \vee_\Theta(F_i p_1(\omega') \mid i \in I) = \vee_\Theta(F_i(p_1) \mid i \in I) = \vee_{\Theta^{\omega_c}}(F_i(p_1) \mid i \in I) = H(p_1),$$
$$Fp_1(\omega') = \vee_{\mathrm{H}}(F_i p_1(\omega') \mid i \in I) = \vee_{\mathrm{H}}(F_i(p_1) \mid i \in I) = \vee_{\mathrm{H}^{\omega_l}}(F_i(p_1) \mid i \in I) = F(p_1).$$

Таким образом, Hp_1 — канонический ω-композиционный спутник формации $H(p_1)$, а Fp_1 — канонический ω-локальный спутник формации $F(p_1)$. Тем самым доказано, что рассматриваемое утверждение для случая $n = 1$ справедливо.

Пусть теперь $n > 1$ и предположим, что данное утверждение верно для $n-1$, т. е. ω-последовательность простых чисел $p_1, \dots, p_{n-1}$ является C-подходящей для формации $\mathfrak{H}$ и, помимо этого, для всех $j \in \{1, \dots, n-1\}$ спутники H и $Hp_1 \dots p_j = \vee_\Theta\big(F_ip_1 \dots p_j \mid i \in I\big)$ являются каноническими ω-композиционными спутниками формаций $\mathfrak{H}$ и $Hp_1 \dots p_{j-1}(p_j)$ соответственно, а спутники F и $Fp_1 \dots p_j = \vee_{\mathrm{H}}\big(F_ip_1 \dots p_j \mid i \in I\big)$ — каноническими ω-локальными спутниками формаций $\mathfrak{F}$ и $Fp_1 \dots p_{j-1}(p_j)$ соответственно (при $j = 1$ мы отождествляем запись (спутник) $Hp_1 \dots p_{j-1}(a)$ с $H(a)$, а запись (спутник) $Fp_1 \dots p_{j-1}(a)$ — с $F(a)$, где $a \in \omega \cup \{\omega'\}$; упомянутое относится также к записи (спутнику) $F_ip_1 \dots p_{j-1}(a)$ для каждого $i \in I$).

Так как последовательность $p_1, \dots, p_n$ C-подходит для $\mathfrak{F}$, то с учетом леммы 18 и леммы 7 $p_n \in \pi\big(\mathrm{Com}(Fp_1 \dots p_{n-2}(p_{n-1}))\big) \cap \omega = \pi\big(Fp_1 \dots p_{n-2}(p_{n-1})\big) \cap \omega$. Согласно нашему предположению,

$$Hp_1 \dots p_{n-2}(p_{n-1}) = \vee_\Theta(F_ip_1 \dots p_{n-2}(p_{n-1}) \mid i \in I) = \vee_{\Theta^{\omega_c}}(F_ip_1 \dots p_{n-2}(p_{n-1}) \mid i \in I),$$
$$Fp_1 \dots p_{n-2}(p_{n-1}) = \vee_{\mathrm{H}}(F_ip_1 \dots p_{n-2}(p_{n-1}) \mid i \in I) = \vee_{\mathrm{H}^{\omega_l}}(F_ip_1 \dots p_{n-2}(p_{n-1}) \mid i \in I).$$

Кроме того, ясно, что $F_ip_1 \dots p_{n-2}(p_{n-1}) \in \mathrm{H} = \mathrm{H}^{\omega_l}$ для каждого $i \in I$. Теперь в силу 1) имеем

$$\pi\big(\mathrm{Com}(Hp_1 \dots p_{n-2}(p_{n-1}))\big) \cap \omega = \pi\big(Fp_1 \dots p_{n-2}(p_{n-1})\big) \cap \omega.$$

Последнее влечет $p_n \in \pi\big(\mathrm{Com}(Hp_1 \dots p_{n-2}(p_{n-1}))\big) \cap \omega$, откуда с учетом леммы 18 и предположения получаем, что $p_1, \dots, p_n$ — C-подходящая для $\mathfrak{H}$ ω-последовательность простых чисел.

Далее, поскольку спутник $Hp_1 \dots p_{n-1}$ является каноническим ω-композиционным спутником формации $Hp_1 \dots p_{n-2}(p_{n-1})$, а спутник $Fp_1 \dots p_{n-1}$ — каноническим ω-локальным спутником формации $Fp_1 \dots p_{n-2}(p_{n-1})$, то

$$Hp_1 \dots p_{n-1}(p_n) = \vee_\Theta(F_ip_1 \dots p_{n-1}(p_n) \mid i \in I) = \vee_{\Theta^{\omega_c}}(F_ip_1 \dots p_{n-1}(p_n) \mid i \in I),$$
$$Fp_1 \dots p_{n-1}(p_n) = \vee_{\mathrm{H}}(F_ip_1 \dots p_{n-1}(p_n) \mid i \in I) = \vee_{\mathrm{H}^{\omega_l}}(F_ip_1 \dots p_{n-1}(p_n) \mid i \in I),$$

причем формация $F_ip_1 \dots p_{n-1}(p_n) \in \mathrm{H} = \mathrm{H}^{\omega_l}$ для любого $i \in I$. Имеем (см. лемма 4)

$$F_ip_1 \dots p_{n-1}(p_n) = LF_\omega(F_ip_1 \dots p_n) = CF_\omega(F_ip_1 \dots p_n),$$

где все значения спутника $F_ip_1 \dots p_n$ принадлежат решетке $\mathrm{H} \subseteq \Theta$. Следовательно, в силу индуктивности решеток $\Theta^{\omega_c} = \Theta$ и $\mathrm{H}^{\omega_l} = \mathrm{H}$ спутник $Hp_1 \dots p_n = \vee_\Theta(F_ip_1 \dots p_n \mid i \in I)$ является внутренним ω-композиционным спутником формации $Hp_1 \dots p_{n-1}(p_n)$, а спутник $Fp_1 \dots p_n = \vee_{\mathrm{H}}(F_ip_1 \dots p_n \mid i \in I)$ — внутренним ω-локальным спутником формации $Fp_1 \dots p_{n-1}(p_n)$.

Применяя теперь предложение 1 и предложение 3 с учетом условия и определений, для любого $r \in \omega$ получаем

$$Hp_1 \dots p_n(r) = \vee_\Theta(F_ip_1 \dots p_n(r) \mid i \in I) = \vee_\Theta(\mathfrak{N}_rF_ip_1 \dots p_n(r) \mid i \in I) =$$
$$= \mathfrak{N}_r\big(\vee_\Theta(F_ip_1 \dots p_n(r) \mid i \in I)\big) = \mathfrak{N}_rHp_1 \dots p_n(r),$$
$$Fp_1 \dots p_n(r) = \vee_{\mathrm{H}}(F_ip_1 \dots p_n(r) \mid i \in I) = \vee_{\mathrm{H}}(\mathfrak{N}_rF_ip_1 \dots p_n \mid i \in I) =$$
$$= \mathfrak{N}_r\big(\vee_{\mathrm{H}}(F_ip_1 \dots p_n(r) \mid i \in I)\big) = \mathfrak{N}_rFp_1 \dots p_n(r).$$

Ясно также, что

$$Hp_1 \dots p_n(\omega') = \vee_\Theta(F_ip_1 \dots p_n(\omega') \mid i \in I) = \vee_\Theta(F_ip_1 \dots p_{n-1}(p_n) \mid i \in I) =$$
$$= \vee_{\Theta^{\omega_c}}(F_ip_1 \dots p_{n-1}(p_n) \mid i \in I) = Hp_1 \dots p_{n-1}(p_n),$$
$$Fp_1(\omega') = \vee_{\mathrm{H}}(F_ip_1 \dots p_n(\omega') \mid i \in I) = \vee_{\mathrm{H}}(F_ip_1 \dots p_{n-1}(p_n) \mid i \in I) =$$
$$= \vee_{\mathrm{H}^{\omega_l}}(F_ip_1 \dots p_{n-1}(p_n) \mid i \in I) = Fp_1 \dots p_{n-1}(p_n).$$

Таким образом, спутник $Hp_1 \dots p_n$ является каноническим ω-композиционным спутником формации $Hp_1 \dots p_{n-1}(p_n)$, а спутник $Fp_1 \dots p_n$ – каноническим ω-локальным спутником формации $Fp_1 \dots p_{n-1}(p_n)$, т. е. рассматриваемое утверждение верно и для n. Последнее и завершает доказательство утверждения 3) и леммы 19.

Лемма 20. *Пусть $\mathfrak{X}$ — класс Фиттинга, $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F}$ — непустые формации, T — группа с $T_\mathfrak{X} = 1$ такая, что $T \in \mathfrak{F}$. Тогда если для любой монолитической группы U с $U_\mathfrak{X} = 1$ условие $U \in \mathfrak{F}$ влечет $U \in \mathfrak{H}$, то $T \in \mathfrak{H}$. Если, кроме того, $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}\mathfrak{X}$ — радикальная формация, то для любой группы $G \in \mathfrak{F}$ имеет место включение $G^\mathfrak{H} \subseteq G_\mathfrak{X}$.*

Доказательство. Если группа T является монолитической, то утверждение леммы следует из условия. Пусть группа T не является монолитической, и $\mathrm{Soc}(T) = N_1\times\ldots\times N_k = \prod_{j=1}^{k}{}^{\times} N_j$, где N_j — минимальная нормальная подгруппа группы T, $k > 1, k \in \mathbb{N}, j = 1,\ldots,k$. Обозначим через M_i наибольшую нормальную в T подгруппу, содержащую $N_1\times\ldots\ N_{i-1}\times N_{i+1}\times\ldots\times N_k = \prod_{j\neq i}{}^{\times} N_j$, но не содержащую N_i, где $i = 1,\ldots,k$. Тогда, как следует из доказательства леммы 4.1.3 [6], с. 152 факторгруппа T/M_i — монолитическая группа с монолитом N_iM_i/M_i, T-изоморфным N_i, и, кроме того, $M_1\cap\ldots\cap M_k = 1$. Значит, так как по условию $\mathfrak{X}$ является классом Фиттинга и $T_{\mathfrak{X}} = 1$, то $(T/M_i)_{\mathfrak{X}} = 1$. Учитывая последнее, вследствие включения $T/M_i \in \mathfrak{F}$ и условия видим, что $T/M_i \in \mathfrak{H}$. Следовательно, $T \cong T/1 = T/\big(\bigcap_{i=1}^{k} M_i\big) \in \mathrm{R}_0(T/M_1,\ldots,T/M_k) \subseteq \mathfrak{H}$.

Если, кроме того, $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}\mathfrak{X}$ — радикальная формация и $G \in \mathfrak{F}$, то $\big(G/G_{\mathfrak{X}}\big)_{\mathfrak{X}} = G_{\mathfrak{X}}/G_{\mathfrak{X}} \cong 1$. Так как $G \in \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}$ — формация, то и $G/G_{\mathfrak{X}} \in \mathfrak{F}$. Поэтому ввиду доказанного $G/G_{\mathfrak{X}} \in \mathfrak{H}$. Последнее влечет $G^{\mathfrak{H}} \subseteq G_{\mathfrak{X}}$. Лемма доказана.

Поскольку $\mathfrak{S}_\omega\mathfrak{S}_\omega = \mathfrak{S}_\omega$ — радикальная формация и для произвольной группы G в рамках наших определений $R_\omega(G) = G_{\mathfrak{S}_\omega}$, из леммы ПР-6 получаем следующее утверждение.

Лемма 21. *Пусть $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F}$ — непустые формации, T — группа с $R_\omega(T) = 1$ такая, что $T \in \mathfrak{F}$. Тогда если для любой монолитической группы U с $R_\omega(U) = 1$ условие $U \in \mathfrak{F}$ влечет $U \in \mathfrak{H}$, то и $T \in \mathfrak{H}$. В частности, для любой группы $G \in \mathfrak{F}$ имеет место включение $G^{\mathfrak{H}} \subseteq R_\omega(G)$.*

Основным результатом работы является следующая

Теорема 1. *Пусть H и Θ — такие ω-частичные алгебры формаций, что $\mathrm{H} \subseteq \Theta$, $\mathrm{H}^{\omega_l} \subseteq \mathrm{H}$ и $\Theta^{\omega_c} \subseteq \Theta$, причем решетка Θ^{ω_c} индуктивна. Предположим также, что выполнено следующее условие: либо $\mathrm{H}^{\omega_l} \subsetneq \mathrm{H}$ и H — полная подрешетка в Θ, либо $\mathrm{H}^{\omega_l} = \mathrm{H}$ и $\Theta^{\omega_c} = \Theta$. Тогда если для произвольного набора $\{\mathfrak{H}_j \mid j \in J\}$ формаций из H^{ω_l} и для любой монолитической группы A с $R_\omega(A) = 1$ условие $A \in \vee_{\mathrm{H}^{\omega_l}}\big(\mathfrak{H}_j \mid j \in J\big)$ влечет $A \in \vee_{\Theta^{\omega_c}}\big(\mathfrak{H}_j \mid j \in J\big)$, то решетка H^{ω_l} является полной подрешеткой решетки Θ^{ω_c}.*

Доказательство. Прежде всего заметим, что вследствие леммы 4 и условия имеют место включения $\mathrm{H}^{\omega_l} \subseteq \mathrm{H}^{\omega_c} \subseteq \Theta^{\omega_c}$, из которых следует, что произвольная H^{ω_l}-формация является Θ^{ω_c}-формацией и, в частности, $\mathfrak{M}_{\mathrm{H}^{\omega_l}} \subseteq \mathfrak{M}_{\Theta^{\omega_c}}$.

Пусть $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ — произвольный набор H^{ω_l}-формаций, F_i — канонический ω-локальный спутник формации $\mathfrak{F}_i$,

$$\mathfrak{H} = \vee_{\Theta^{\omega_c}}\big(\mathfrak{F}_i \mid i \in I\big) = \Theta^{\omega_c}\mathrm{form}\big(\bigcup_{i\in I}\mathfrak{F}_i\big) \quad \text{и} \quad \mathfrak{F} = \vee_{\mathrm{H}^{\omega_l}}\big(\mathfrak{F}_i \mid i \in I\big) = \mathrm{H}^{\omega_l}\mathrm{form}\big(\bigcup_{i\in I}\mathfrak{F}_i\big).$$

Понятно, что $\bigcap_{i\in I}\mathfrak{F}_i$ — H^{ω_l}-формация, которая является нижней гранью для $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ как в решетке Θ^{ω_c}, так и в решетке H^{ω_l}. Понятно также, что $\mathfrak{H}$ является верхней гранью для $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ в решетке Θ^{ω_c}, а $\mathfrak{F}$ является верхней гранью для $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ в решетке H^{ω_l}. Докажем, что $\mathfrak{H} = \mathfrak{F}$. Включение $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$ очевидно. Следовательно, необходимо лишь показать, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$.

Если $\mathfrak{F} = \varnothing$, то доказываемое включение очевидно. В связи с этим далее считаем, что $\mathfrak{F} \neq \varnothing$. Предположим, что $\pi(\mathfrak{F}) \cap \omega = \varnothing$, и пусть G — произвольная группа из $\mathfrak{F} = \vee_{\mathrm{H}^{\omega_l}}\big(\mathfrak{F}_i \mid i \in I\big)$. Тогда $R_\omega(G) = 1$, и ввиду условия и леммы 21 заключаем, что $G \in \mathfrak{H} = \vee_{\Theta^{\omega_c}}\big(\mathfrak{F}_i \mid i \in I\big)$. Следовательно, $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$ и теорема в данном случае верна.

Пусть теперь $\pi(\mathfrak{F}) \cap \omega \neq \varnothing$. В силу леммы 19 $\pi\big(\mathrm{Com}(\mathfrak{H})\big) \cap \omega = \pi(\mathfrak{F}) \cap \omega$. Поэтому $\pi\big(\mathrm{Com}(\mathfrak{H})\big) \cap \omega \neq \varnothing$, и следовательно, $\mathfrak{H} \neq \varnothing$.

Предположим, что $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H} \neq \varnothing$, и пусть A — группа минимального порядка из $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H}$. Тогда A — монолитическая группа с монолитом $P = A^{\mathfrak{H}}$. Если $R_\omega(A) = 1$, то по условию $A \in \mathfrak{H}$. Противоречие. Значит, $R_\omega(A) \neq 1$, и следовательно, $P \subseteq R_\omega(A)$. Поэтому P — абелева p-группа для некоторого простого $p \in \omega$. Поскольку $\mathfrak{H}$ — непустая ω-композиционная формация, то ввиду леммы 3

$$P = C_A(P) = C^p(A) = F_p(A) = O_p(A).$$

Выше было отмечено, что вследствие леммы 19 $\pi\big(\mathrm{Com}(\mathfrak{H})\big) \cap \omega = \pi(\mathfrak{F}) \cap \omega$. Из указанной леммы следует также, что $\mathfrak{H} = CF_\omega(H)$ и $\mathfrak{F} = LF_\omega(F)$, где $H = \vee_\Theta\big(F_i \mid i \in I\big)$, $F = \vee_{\mathrm{H}}\big(F_i \mid i \in I\big)$ и, кроме того, спутники H и F — внутренние. Заметим, что ввиду условия и включения $\mathfrak{F}_i \in \mathrm{H}^{\omega_l}$ из леммы 8 [26] (см. также лемма 4) вытекает, что для каждого $i \in I$ спутник F_i H-значен (а потому, так как $\mathrm{H} \subseteq \Theta$, и Θ-значен).

Если $\mathrm{H}^{\omega_l} \subsetneq \mathrm{H}$, причем H является полной подрешеткой Θ, то

$$\begin{aligned} A/O_p(A) = A/P = A/F_p(A) \in F(p) = \big(\vee_{\mathrm{H}}(F_i \mid i \in I)\big)(p) = \vee_{\mathrm{H}}\big(F_i(p) \mid i \in I\big) = \\ = \vee_\Theta\big(F_i(p) \mid i \in I\big) = \big(\vee_\Theta(F_i \mid i \in I)\big)(p) = H(p), \end{aligned}$$

т. е.

$$A/O_p(A) \in H(p) = H(p) \cap \mathfrak{H}.$$

Следовательно, в силу леммы 4 [27] $A \in \mathfrak{H}$. Вновь полученное противоречие показывает, что в случае, когда $\mathrm{H}^{\omega_l} \subsetneq \mathrm{H}$ и H — полная подрешетка Θ, имеет место включение $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$.

Продолжим рассуждения, считая теперь, что $\mathrm{H}^{\omega_l} = \mathrm{H}$ и, кроме того, $\Theta^{\omega_c} = \Theta$. В таком случае, как следует из леммы 19, спутник H оказывается каноническим ω-композиционным спутником формации $\mathfrak{H}$, а спутник F — каноническим ω-локальным спутником формации $\mathfrak{F}$. Кроме того, ввиду леммы 4 F совпадает с каноническим ω-композиционным спутником $\mathfrak{F}$. Поскольку $p \in \pi(A) \cap \omega \subseteq \pi(\mathfrak{F}) \cap \omega$ и $\pi\big(\mathrm{Com}(\mathfrak{H})\big) \cap \omega = \pi(\mathfrak{F}) \cap \omega$ (см. лемма 19), то $p \in \pi\big(\mathrm{Com}(\mathfrak{H})\big) \cap \omega$, и следовательно, $H(p) \neq \varnothing$ (с учетом теоремы 1 [27] из последнего следует, в частности, что A не является p-группой). Далее, с учетом включения $\mathrm{H} \subseteq \Theta$ из задания спутников H и F имеем $H(p) \subseteq F(p)$ (см. также лемма 7 [27]). Более того, так как $A \notin \mathfrak{H}$, то $H(p) \subsetneq F(p)$. Действительно, поскольку $H(\omega') = \mathfrak{H}$ (спутник H — канонический) и $P = A^{\mathfrak{H}} \subseteq R_\omega(A)$, согласно лемме 9 [27]

$$A/C^p(A) = A/P \notin H(p),$$

но в то же время $A/P = A/F_p(A) \in F(p)$.

Обозначим группу $A/C^p(A)$ через A_1. Так как $A \neq 1$, то вследствие леммы 1 $C^p(A) \neq 1$. Заметим также, что поскольку $A_1 = A/C^p(A) \notin H(p) \neq \varnothing$, то $A_1 \neq 1$. Таким образом,

$$A_1 = A/C^p(A) \in F(p) \setminus H(p),\ H(p) \neq \varnothing,$$
$$C^p(A) \neq 1 \neq A_1.$$

В силу леммы 19 $\pi\big(\mathrm{Com}(H(p))\big) \cap \omega = \pi\big(F(p)\big) \cap \omega$ и, помимо этого, спутник $Hp = \vee_\Theta\big(F_ip \mid i \in I\big)$ является каноническим ω-композиционным спутником формации $H(p)$, а спутник $Fp = \vee_{\mathrm{H}}\big(F_ip \mid i \in I\big)$ — каноническим ω-локальным (вследствие леммы 4, и ω-композиционным) спутником формации $F(p)$. Отметим, что ввиду условия и включения $F_i(p) \in \mathrm{H} = \mathrm{H}^{\omega_l}$ из леммы 8 [26] (см. также лемма 4) вытекает, что для каждого $i \in I$ спутник F_ip является H-значным (а следовательно, так как $\mathrm{H} \subseteq \Theta$, и Θ-значным).

Поскольку $A_1 \notin H(p)$, то $P_1 = A_1^{H(p)} \neq 1$. Далее, учитывая, что $A_1 \in F(p) = \vee_{\mathrm{H}}\big(F_i(p) \mid i \in I\big) = \vee_{\mathrm{H}^{\omega_l}}\big(F_i(p) \mid i \in I\big)$, $H(p) = \vee_\Theta\big(F_i(p) \mid i \in I\big) = \vee_{\Theta^{\omega_c}}\big(F_i(p) \mid i \in I\big)$, ввиду условия из леммы 21 имеем $P_1 = A_1^{H(p)} \subseteq R_\omega(A_1)$. Следовательно, так как $Hp(\omega') = H(p)$ (спутник Hp — канонический), то в силу леммы 9 [27] найдется такое простое $p_1 \in \pi\big(\mathrm{Com}(P_1)\big) \cap \omega$, что $A_1/C^{p_1}(A_1) \notin Hp(p_1)$.

Обозначим через A_2 группу $A_1/C^{p_1}(A_1)$. Учитывая, что формация $F(p) \in \mathrm{H} = \mathrm{H}^{\omega_l}$, а также принимая во внимание лемму 7, имеем $\pi\big(\mathrm{Com}(P_1)\big) \cap \omega \subseteq \pi\big(\mathrm{Com}(F(p))\big) \cap \omega = \pi\big(F(p)\big) \cap \omega = \pi\big(\mathrm{Com}(H(p))\big) \cap \omega$. Следовательно, так как $p_1 \in \pi\big(\mathrm{Com}(P_1)\big) \cap \omega$, то $p_1 \in \pi\big(\mathrm{Com}(H(p))\big) \cap \omega$ и $Hp(p_1) \neq \varnothing$ (с учетом леммы 18 из последнего следует, в частности, что ω-последовательность простых чисел p, p_1 является C-подходящей как для формации $\mathfrak{F}$, так и для формации $\mathfrak{H}$; см. также лемма 19). Так как $A_1 \neq 1$, то ввиду леммы 1 $C^{p_1}(A_1) \neq 1$. Заметим также, что поскольку $A_2 = A_1/C^{p_1}(A_1) \notin Hp(p_1) \neq \varnothing$, то $A_2 \neq 1$. Таким образом,

$$A_2 = A_1/C^{p_1}(A_1) \in Fp(p_1) \setminus Hp(p_1),\ Hp(p_1) \neq \varnothing,$$
$$C^{p_1}(A_1) \neq 1 \neq A_2.$$

Далее, вследствие леммы 19 справедливо равенство $\pi\big(\mathrm{Com}(Hp(p_1))\big) \cap \omega = \pi\big(Fp(p_1)\big) \cap \omega$ и, кроме того, спутник $Hpp_1 = \vee_\Theta\big(F_ipp_1 \mid i \in I\big)$ является каноническим ω-композиционным спутником формации $Hp(p_1)$, а спутник $Fpp_1 = \vee_{\mathrm{H}}\big(F_ipp_1 \mid i \in I\big)$ — каноническим ω-локальным (вследствие леммы 4, и ω-композиционным) спутником формации $Fp(p_1)$. При этом, в силу условия и включения $F_ip(p_1) \in \mathrm{H} = \mathrm{H}^{\omega_l}$ из леммы 8 [26] (см. также лемма 4) следует, что спутник F_ipp_1 является H-значным (ввиду включения $\mathrm{H} \subseteq \Theta$, и Θ-значным) для любого $i \in I$.

Так как $A_2 \notin Hp(p_1)$, то $P_2 = A_2^{Hp(p_1)} \neq 1$. Ввиду того, что $A_2 \in Fp(p_1) = \vee_{\mathrm{H}}\big(F_ip(p_1) \mid i \in I\big) = \vee_{\mathrm{H}^{\omega_l}}\big(F_ip(p_1) \mid i \in I\big)$, $Hp(p_1) = \vee_\Theta\big(F_ip(p_1) \mid i \in I\big) = \vee_{\Theta^{\omega_c}}\big(F_ip(p_1) \mid i \in I\big)$, согласно условию из леммы 21 имеем $P_2 = A_2^{Hp(p_1)} \subseteq R_\omega(A_2)$. Следовательно, в силу леммы 9 [27] существует такое простое $p_2 \in \pi\big(\mathrm{Com}(P_2)\big) \cap \omega$, что $A_2/C^{p_2}(A_2) \notin Hpp_1(p_2)$.

Обозначим через A_3 группу $A_2/C^{p_2}(A_2)$. Учитывая, что формация $Fp(p_1) \in \mathrm{H} = \mathrm{H}^{\omega_l}$, а также принимая во внимание лемму 7, аналогично имеем $\pi\big(\mathrm{Com}(P_2)\big) \cap \omega \subseteq \pi\big(\mathrm{Com}(Fp(p_1))\big) \cap \omega = \pi\big(Fp(p_1)\big) \cap \omega = \pi\big(\mathrm{Com}(Hp(p_1))\big) \cap \omega$. Следовательно, так как $p_2 \in \pi\big(\mathrm{Com}(P_2)\big) \cap \omega$, то $p_2 \in \pi\big(\mathrm{Com}(Hp(p_1))\big) \cap \omega$ и $Hpp_1(p_2) \neq \varnothing$. При этом с учетом леммы 18 последовательность простых чисел p, p_1, p_2 оказывается C-подходящей для $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ ω-последовательностью (см. также лемма 19). Вновь применив лемму 1 и проведя для группы A_2 такие же рассуждения, как и для группы A_1, получаем

$$A_3 = A_2/C^{p_2}(A_2) \in Fpp_1(p_2) \setminus Hpp_1(p_2),\ Hpp_1(p_2) \neq \varnothing,$$
$$C^{p_2}(A_2) \neq 1 \neq A_3.$$

По тем же самым соображениям группа A_3 будет удовлетворять аналогичным условиям. Продолжая этот процесс, мы получим группы

$$A_4 = A_3/C^{p_3}(A_3), \ldots, A_n = A_{n-1}/C^{p_{n-1}}(A_{n-1}), \ldots .$$

При этом для любого натурального k выполняются условия (мы полагаем $A_0 = A$ и $p_0 = p$)

$$A_k = A_{k-1}/C^{p_{k-1}}(A_{k-1}) \in Fp_0p_1\ldots p_{k-2}(p_{k-1}) \setminus Hp_0p_1\ldots p_{k-2}(p_{k-1}),\ Hp_0p_1\ldots p_{k-2}(p_{k-1}) \neq \varnothing,$$
$$C^{p_{k-1}}(A_{k-1}) \neq 1 \neq A_k,$$

причем последовательность простых чисел $p_0, \ldots, p_{k-1}$ является C-подходящей для формаций $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ ω-последовательностью (при $k = 1$ мы отождествляем запись (спутник) $Fp_0p_1\ldots p_{k-2}(a)$ с $F(a)$, а запись (спутник) $Hp_0p_1\ldots p_{k-2}(a)$ — с $H(a)$, где $a \in \omega \cup \{\omega'\}$).

Ввиду условия $C^{p_{k-1}}(A_{k-1}) \neq 1$ для построенной последовательности групп $A_0 = A$, A_1, $A_2, \ldots$, $A_n, \ldots$ имеем $|A_0| > |A_1| > |A_2| > \ldots > |A_n| > \ldots$. Но поскольку группа $A = A_0$ конечна, то на некотором шаге m мы получим, что $|A_m| = 1$, т. е. A_m — единичная группа ($m \in \mathbb{N}$). Имеет место противоречие.

Итак, наше предположение неверно, и в данном случае, т. е. когда $\mathrm{H}^{\omega_l} = \mathrm{H}$ и $\Theta^{\omega_c} = \Theta$, имеет место включение $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$. Таким образом, в обоих случаях справедливо равенство $\mathfrak{H} = \mathfrak{F}$. Теорема доказана.

Замечание 8. Как следует из теоремы 2.1 [12], для индуктивности решетки Θ^{ω_c} достаточно, чтобы Θ являлась ω-частичной алгеброй формаций, $\Theta^{\omega_c} \subseteq \Theta$ и для любой совокупности групп $\mathfrak{X}$ такой, что $(\mathfrak{X}) \subseteq \mathfrak{M}_{\Theta^{\omega_c}}$, имело место $\pi\big(\mathrm{Com}(\mathfrak{X})\big) \cap \omega = \pi\big(\mathrm{Com}(\mathfrak{V})\big) \cap \omega$, где $\mathfrak{V} = \Theta^{\omega_c}\mathrm{form}\,(\mathfrak{X})$. Таким образом, заменяя условие индуктивности решетки Θ^{ω_c} последним указанным условием, можно получить частный случай теоремы 1.

4. Следствия основного результата. Применение доказанной теоремы к конкретным решеткам формаций позволяет получить важные следствия.

Следствие 9. *Пусть τ_1 и τ_2 — подгрупповые функторы такие, что $\tau_1 \geq \tau_2$, причем $\tau_2 \leq \tau_{sn}$. Тогда решетка $l^{\tau_1}_{\omega_n}$ всех τ_1-замкнутых n-кратно ω-насыщенных формаций является полной подрешеткой решетки $c^{\tau_2}_{\omega_n}$ всех τ_2-замкнутых n-кратно ω-композиционных формаций.*

Доказательство. Индукция по n. Пусть $n = 0$. Тогда, как несложно видеть, ввиду условия $\tau_1 \geq \tau_2$ и определений имеем $l^{\tau_1}_{\omega_0} = c^{\tau_1}_{\omega_0} = \mathcal{F}^{\tau_1} \subseteq \mathcal{F}^{\tau_2} = c^{\tau_2}_{\omega_0}$, и если $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ — произвольный набор $\mathcal{F}^{\tau_1}$-формаций, то в силу следствия 1.2.24 [6], с. 24

$$l^{\tau_1}_{\omega_0}\mathrm{form}\big(\bigcup_{i\in I}\mathfrak{F}_i\big) = \tau_1\mathrm{form}\big(\bigcup_{i\in I}\mathfrak{F}_i\big) = \mathrm{form}\big(\bigcup_{i\in I}\mathfrak{F}_i\big) = \tau_2\mathrm{form}\big(\bigcup_{i\in I}\mathfrak{F}_i\big) = l^{\tau_2}_{\omega_0}\mathrm{form}\big(\bigcup_{i\in I}\mathfrak{F}_i\big).$$

Следовательно, $l^{\tau_1}_{\omega_0}$ является полной подрешеткой $l^{\tau_2}_{\omega_0}$, и утверждение верно.

Пусть $n > 0$ и рассматриваемое утверждение справедливо для $n - 1$. Покажем, что для решеток формаций $\mathrm{H} = l^{\tau_1}_{\omega_{n-1}}$ и $\Theta = c^{\tau_2}_{\omega_{n-1}}$ выполнены условия теоремы 1. Действительно, в силу лемм 5 и 6 структуры $l^{\tau_1}_{\omega_{n-1}}$ и $c^{\tau_2}_{\omega_{n-1}}$ являются частичными алгебрами формаций. Ввиду следствия 1 и условия $\tau_1 \geq \tau_2$, учитывая также, что $l^{\tau_1}_{\omega_0} = c^{\tau_1}_{\omega_0} \subseteq c^{\tau_2}_{\omega_0}$, для любого целого неотрицательного m имеем $l^{\tau_1}_{\omega_m} \subseteq c^{\tau_1}_{\omega_m} \subseteq c^{\tau_2}_{\omega_m}$. В частности, для $m = n - 1$ последнее влечет $\mathrm{H} = l^{\tau_1}_{\omega_{n-1}} \subseteq c^{\tau_2}_{\omega_{n-1}} = \Theta$, причем, согласно индуктивному предположению, $l^{\tau_1}_{\omega_{n-1}}$ — полная подрешетка $c^{\tau_2}_{\omega_{n-1}}$. Вследствие леммы 2 [34] (см. также [1], лемма 1.5.11, с. 60) имеют место равенства $\mathrm{H}^{\omega_l} = (l^{\tau_1}_{\omega_{n-1}})^{\omega_l} = l^{\tau_1}_{\omega_n}$, а вследствие лемм 2.1 и 3.1 [40] (см. также [1], лемма 4.6.3, с. 216) — равенства $\Theta^{\omega_c} = (c^{\tau_2}_{\omega_{n-1}})^{\omega_c} = c^{\tau_2}_{\omega_n}$. Включения $l^{\tau_1}_{\omega_n} \subseteq l^{\tau_1}_{\omega_{n-1}}$ и $c^{\tau_2}_{\omega_n} \subseteq c^{\tau_2}_{\omega_{n-1}}$ вытекают непосредственно из определений. В силу теоремы 1 [2] или теоремы 2.1 [40] (см. также [1], теорема 4.6.8, с. 223; [35], теорема) решетка $c^{\tau_2}_{\omega_n}$ индуктивна.

Заметим, далее, что если $n > 1$ и $|\omega| = 1$, то ввиду замечания 2 $l^{\tau_1}_{\omega_n} = l^{\tau_1}_{\omega_{n-1}}$, $c^{\tau_2}_{\omega_n} = c^{\tau_2}_{\omega_{n-1}}$, и следовательно, с учетом индуктивного предположения, $l^{\tau_1}_{\omega_n}$ — полная подрешетка $c^{\tau_2}_{\omega_n}$, т. е. доказываемое утверждение справедливо. Поэтому в дальнейшем считаем, что либо $n = 1$, либо $n > 1$ и $|\omega| > 1$ (т. к. $\omega \neq \varnothing$). В таком случае $\mathrm{H}^{\omega_l} = l^{\tau_1}_{\omega_n} \subsetneq l^{\tau_1}_{\omega_{n-1}} = \mathrm{H}$ и $\Theta^{\omega_c} = c^{\tau_2}_{\omega_n} \subsetneq c^{\tau_2}_{\omega_{n-1}} = \Theta$. В самом деле, вследствие теоремы 1 [27] (наследственная) формация $\mathfrak{A}$ всех абелевых групп не является p-композиционной ни для какого простого числа p. Поэтому если $n = 1$, то, рассматривая наряду с $\mathfrak{A}$ также формацию $\mathfrak{N}_q\mathfrak{A}$, с учетом утверждения 4 имеем

$$\mathfrak{A},\ \mathfrak{N}_q\mathfrak{A} \in \mathcal{F}^{\mathrm{S}} \setminus c^{\omega} = l^{\mathrm{S}}_{\omega_0} \setminus c^{\omega}_1 \subseteq l^{\tau_1}_{\omega_0} \setminus c^{\omega}_1 \subseteq l^{\tau_1}_{\omega_0} \setminus c^{\tau_2}_{\omega_1} = l^{\tau_1}_{\omega_{n-1}} \setminus c^{\tau_2}_{\omega_n},$$

где q — произвольное простое число из $p' = \mathbb{P} \setminus \{p\}$, если $|\omega| = 1$, причем $\omega = \{p\}$, и q — произвольное простое число, если $|\omega| > 1$.

Если $n > 1$ и, кроме того, $|\omega| > 1$, то, вводя в рассмотрение формации $\mathfrak{N}^{n-1}_{\pi}\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{N}_q\mathfrak{N}^{n-1}_{\pi}\mathfrak{A}$, вследствие утверждения 6 и леммы 11 [24] (см. также доказательство утверждения 5 и лемму 10) получим

$$\mathfrak{N}^{n-1}_{\pi}\mathfrak{A},\ \mathfrak{N}_q\mathfrak{N}^{n-1}_{\pi}\mathfrak{A} \in l^{\mathrm{S}}_{\omega_{n-1}} \setminus c^{\omega}_n \subseteq l^{\tau_1}_{\omega_{n-1}} \setminus c^{\omega}_n \subseteq l^{\tau_1}_{\omega_{n-1}} \setminus c^{\tau_2}_{\omega_n},$$

где q — произвольное простое, π — произвольное множество простых чисел такое, что $\pi \supseteq \omega$. Теперь ввиду включений $l^{\tau_1}_{\omega_{n-1}} \subseteq c^{\tau_2}_{\omega_{n-1}}$, $l^{\tau_1}_{\omega_n} \subseteq c^{\tau_2}_{\omega_n}$ (см. выше) видим, что в каждом из рассмотренных случаев указанные формации содержатся как в $l^{\tau_1}_{\omega_{n-1}} \setminus l^{\tau_1}_{\omega_n}$, так и в $c^{\tau_2}_{\omega_{n-1}} \setminus c^{\tau_2}_{\omega_n}$, откуда и получаем требуемое. Отметим, что при некоторых ограничениях на подгрупповые функторы τ_1 и τ_2 ранее в примерах 2 и 3 нами также были рассмотрены $(l^{\tau_1}_{\omega_{n-1}} \setminus l^{\tau_1}_{\omega_n})$-формации и $(c^{\tau_2}_{\omega_{n-1}} \setminus c^{\tau_2}_{\omega_n})$-формации специального вида.

Наконец, пусть $\{\mathfrak{H}_j \mid j \in J\}$ — произвольный набор $l^{\tau_1}_{\omega_n}$-формаций и A — такая монолитическая группа, что $R_\omega(A) = 1$. И пусть $A \in \vee_{\mathrm{H}^{\omega_l}}(\mathfrak{H}_j \mid j \in J) = \vee^{\tau_1^l}_{\omega_n}(\mathfrak{H}_j \mid j \in J) = l^{\tau_1}_{\omega_n}\mathrm{form}\big(\underset{j\in J}{\cup}\mathfrak{H}_j\big)$. Тогда, учитывая следствие 1.2.24 [6], с. 24 согласно которому $\tau_1\mathrm{form}\big(\underset{j\in J}{\cup}\mathfrak{H}_j\big) = \mathrm{form}\big(\underset{j\in J}{\cup}\mathfrak{H}_j\big)$, ввиду леммы 10 имеем $\mathfrak{N}^n_{\tilde\pi}\mathrm{form}\big(\underset{j\in J}{\cup}\mathfrak{H}_j\big) \in l^{\tau_1}_{\omega_n}$, где $\tilde\pi = \pi\Big(\mathrm{form}\big(\underset{j\in J}{\cup}\mathfrak{H}_j\big)\Big) \cap \omega = \pi\big(\underset{j\in J}{\cup}\mathfrak{H}_j\big) \cap \omega$. Поэтому $l^{\tau_1}_{\omega_n}\mathrm{form}\big(\underset{j\in J}{\cup}\mathfrak{H}_j\big) \subseteq \mathfrak{N}^n_{\tilde\pi}\mathrm{form}\big(\underset{j\in J}{\cup}\mathfrak{H}_j\big)$. Значит, $A \in \mathfrak{N}^n_{\tilde\pi}\mathrm{form}\big(\underset{j\in J}{\cup}\mathfrak{H}_j\big)$. Так как $R_\omega(A) = 1$ и $\tilde\pi \subseteq \omega$, то из последнего включения получаем $A \in \mathrm{form}\big(\underset{j\in J}{\cup}\mathfrak{H}_j\big) \subseteq c^{\tau_2}_{\omega_n}\mathrm{form}\big(\underset{j\in J}{\cup}\mathfrak{H}_j\big) = \vee^{\tau_2^c}_{\omega_n}(\mathfrak{H}_j \mid j \in J) = \vee_{\Theta^{\omega_c}}(\mathfrak{H}_j \mid j \in J)$.

Итак, все условия теоремы 1 выполнены. Применяя ее, заключаем, что решетка $\mathrm{H}^{\omega_l} = l^{\tau_1}_{\omega_n}$ является полной подрешеткой решетки $\Theta^{\omega_c} = c^{\tau_2}_{\omega_n}$. Следствие доказано.

Следствие 10. *Пусть τ_1 и τ_2 — подгрупповые функторы такие, что $\tau_1 \geq \tau_2$, причем $\tau_2 \leq \tau_{sn}$. Тогда решетка $l^{\tau_1}_{\omega_\infty}$ всех τ_1-замкнутых тотально ω-насыщенных формаций является полной подрешеткой решетки $c^{\tau_2}_{\omega_\infty}$ всех τ_2-замкнутых тотально ω-композиционных формаций.*

Доказательство. Покажем выполнение условий теоремы 1 для решеток формаций $\mathrm{H} = l^{\tau_1}_{\omega_\infty}$ и $\Theta = c^{\tau_2}_{\omega_\infty}$. Прежде всего, в силу лемм 5 и 6 каждая из решеток $l^{\tau_1}_{\omega_\infty}$ и $c^{\tau_2}_{\omega_\infty}$ является частичной алгеброй формаций, причем, как вытекает из следствия 2 с учетом условия $\tau_1 \geq \tau_2$, $\mathrm{H} = l^{\tau_1}_{\omega_\infty} \subseteq c^{\tau_1}_{\omega_\infty} \subseteq c^{\tau_2}_{\omega_\infty} = \Theta$. Из леммы 17 [13] следуют равенства $\mathrm{H}^{\omega_l} = (l^{\tau_1}_{\omega_\infty})^{\omega_l} = l^{\tau_1}_{\omega_\infty} = \mathrm{H}$, а из леммы 2.4 [12] — равенства $\Theta^{\omega_c} = (c^{\tau_2}_{\omega_\infty})^{\omega_c} = c^{\tau_2}_{\omega_\infty} = \Theta$. Вследствие теоремы 2.2 [12] решетка $c^{\tau_2}_{\omega_\infty}$ индуктивна.

Пусть $\{\mathfrak{H}_j \mid j \in J\}$ — произвольный набор $l^{\tau_1}_{\omega_\infty}$-формаций и A — такая монолитическая группа, что $R_\omega(A) = 1$. И пусть $A \in \vee_{\mathrm{H}}(\mathfrak{H}_j \mid j \in J) = \vee^{\tau_1^l}_{\omega_\infty}(\mathfrak{H}_j \mid j \in J) = l^{\tau_1}_{\omega_\infty}\mathrm{form}\big(\underset{i\in J}{\cup}\mathfrak{H}_j\big)$. Учитывая следствие 1.2.24 [6], с. 24, согласно которому $\tau_1\mathrm{form}\big(\underset{i\in J}{\cup}\mathfrak{H}_j\big) = \mathrm{form}\big(\underset{i\in J}{\cup}\mathfrak{H}_j\big)$, ввиду леммы 11 [3] и леммы 11 [24] (см. также предложение 5) имеем $\mathfrak{S}_{\tilde\pi}\mathrm{form}\big(\underset{i\in J}{\cup}\mathfrak{H}_j\big) \in l^{\tau_1}_{\omega_\infty}$, где $\tilde\pi = \pi\Big(\mathrm{form}\big(\underset{j\in J}{\cup}\mathfrak{H}_j\big)\Big) \cap \omega = \pi\big(\underset{j\in J}{\cup}\mathfrak{H}_j\big) \cap \omega$. Поэтому $l^{\tau_1}_{\omega_\infty}\mathrm{form}\big(\underset{i\in J}{\cup}\mathfrak{H}_j\big) \subseteq \mathfrak{S}_{\tilde\pi}\mathrm{form}\big(\underset{i\in J}{\cup}\mathfrak{H}_j\big)$, и следовательно, $A \in \mathfrak{S}_{\tilde\pi}\mathrm{form}\big(\underset{i\in J}{\cup}\mathfrak{H}_j\big)$. Так как $R_\omega(A) = 1$ и $\tilde\pi \subseteq \omega$, то последнее влечет $A \in \mathrm{form}\big(\underset{i\in J}{\cup}\mathfrak{H}_j\big) \subseteq c^{\tau_2}_{\omega_\infty}\mathrm{form}\big(\underset{i\in J}{\cup}\mathfrak{H}_j\big) = \vee^{\tau_2^c}_{\omega_\infty}(\mathfrak{H}_j \mid j \in J) = \vee_\Theta(\mathfrak{H}_j \mid j \in J)$.

Таким образом, все требования теоремы 1 выполнены. Применяя ее, заключаем, что решетка $\mathrm{H} = l^{\tau_1}_{\omega_\infty}$ является полной подрешеткой решетки $\Theta = c^{\tau_2}_{\omega_\infty}$. Следствие доказано.

Из следствия 9 (с учетом замечания 2) получаем также следующие результаты.

Следствие 11. *Пусть τ — подгрупповой функтор такой, что $\tau \leq \tau_{sn}$. Тогда решетка $l^\tau_{\omega_n}$ всех τ-замкнутых n-кратно ω-насыщенных формаций является полной подрешеткой решетки $c^\tau_{\omega_n}$ всех τ-замкнутых n-кратно ω-композиционных формаций.*

Следствие 12. *Для произвольного подгруппового функтора τ решетка $l^\tau_{\omega_n}$ всех τ-замкнутых n-кратно ω-насыщенных формаций является полной подрешеткой решетки c^ω_n всех n-кратно ω-композиционных формаций.*

Следствие 13. *Решетка l^ω_n всех n-кратно ω-насыщенных формаций является полной подрешеткой решетки c^ω_n всех n-кратно ω-композиционных формаций.*

Следствие 14. *Для произвольного подгруппового функтора τ такого, что $\tau \leq \tau_{sn}$, решетка l^τ_n всех τ-замкнутых n-кратно насыщенных формаций является полной подрешеткой решетки c^τ_n всех τ-замкнутых n-кратно композиционных формаций.*

Следствие 15. *Для произвольного подгруппового функтора τ структура l^τ_n всех τ-замкнутых n-кратно насыщенных формаций является полной подструктурой структуры c_n всех n-кратно композиционных формаций.*

Следующее следствие является положительным ответом на открытый вопрос 5.3, предложенный А. Н. Скибой и Н. Н. Воробьевым [28].

Следствие 16. *Решетка l_n всех n-кратно насыщенных формаций является полной подрешеткой решетки c_n всех n-кратно композиционных формаций.*

Следствие 17. *Пусть τ — подгрупповой функтор такой, что $\tau \leq \tau_{sn}$. Тогда решетка l^τ_ω всех τ-замкнутых ω-насыщенных формаций является полной подрешеткой решетки c^τ_ω всех τ-замкнутых ω-композиционных формаций.*

Следствие 18. *Для произвольного подгруппового функтора τ решетка l^τ_ω всех τ-замкнутых ω-насыщенных формаций является полной подрешеткой решетки c^ω всех ω-композиционных формаций.*

Следствие 19 ([39], теорема). *Решетка l^{ω} всех ω-насыщенных формаций является полной подрешеткой решетки c^{ω} всех ω-композиционных формаций.*

Следствие 20 ([38], теорема). *Пусть τ — подгрупповой функтор такой, что $\tau \leq \tau_{sn}$. Тогда решетка l^{τ} всех τ-замкнутых насыщенных формаций является полной подрешеткой решетки c^{τ} всех τ-замкнутых композиционных формаций.*

Следствие 21. *Для произвольного подгруппового функтора τ решетка l^{τ} всех τ-замкнутых насыщенных формаций является полной подрешеткой решетки c всех композиционных формаций.*

Следствие 22 ([28], теорема 1.1). *Решетка l всех насыщенных формаций является полной подрешеткой решетки c всех композиционных формаций.*

Следствие 23. *Предположим, что τ — подгрупповой функтор такой, что $\tau \leq \tau_{sn}$. Тогда решетка l_p^{τ} всех τ-замкнутых p-насыщенных формаций является полной подрешеткой решетки c_p^{τ} всех τ-замкнутых p-композиционных формаций.*

Следствие 24. *Пусть τ — произвольный подгрупповой функтор. Тогда решетка l_p^{τ} всех τ-замкнутых p-насыщенных формаций является полной подрешеткой решетки c^p всех p-композиционных формаций.*

Следствие 25. *Решетка l^p всех p-насыщенных формаций является полной подрешеткой решетки c^p всех p-композиционных формаций.*

Отметим также следующие результаты, которые вытекают из следствия 10.

Следствие 26. *Пусть τ — подгрупповой функтор такой, что $\tau \leq \tau_{sn}$. Тогда решетка $l_{\omega_\infty}^{\tau}$ всех τ-замкнутых тотально ω-насыщенных формаций является полной подрешеткой решетки $c_{\omega_\infty}^{\tau}$ всех τ-замкнутых тотально ω-композиционных формаций.*

Следствие 27. *Для произвольного подгруппового функтора τ решетка $l_{\omega_\infty}^{\tau}$ всех τ-замкнутых тотально ω-насыщенных формаций является полной подрешеткой решетки c_{∞}^{ω} всех тотально ω-композиционных формаций.*

Следствие 28. *Решетка l_{∞}^{ω} всех тотально ω-насыщенных формаций является полной подрешеткой решетки c_{∞}^{ω} всех тотально ω-композиционных формаций.*

Следствие 29. *Пусть τ — подгрупповой функтор такой, что $\tau \leq \tau_{sn}$. Тогда решетка l_{∞}^{τ} всех τ-замкнутых тотально насыщенных формаций является полной подрешеткой решетки c_{∞}^{τ} всех τ-замкнутых тотально композиционных формаций.*

Следствие 30. *Для произвольного подгруппового функтора τ решетка l_{∞}^{τ} всех τ-замкнутых тотально насыщенных формаций является полной подрешеткой решетки c_{∞} всех τ-замкнутых тотально композиционных формаций.*

Следующее следствие дает положительный ответ на вопрос 5.4, поставленный А. Н. Скибой и Н. Н. Воробьевым [28].

Следствие 31. *Решетка l_{∞} всех тотально насыщенных формаций является полной подрешеткой решетки c_{∞} всех тотально композиционных формаций.*

Напомним, что элемент a решетки L называется *компактным*, если из $a \leq \bigvee(x_i \mid i \in I)$ следует $a \leq \bigvee(x_j \mid j \in J)$ для некоторого конечного подмножества $J \subseteq I$. Полная решетка называется *алгебраической*, или *компактно порожденной*, если любой ее элемент является решеточным объединением компактных элементов. Напомним также, что решетка L называется *модулярной*, если для любых элементов x, y, $z \in L$ таких, что $x \leq y$, выполняется *модулярный закон*

$$x \vee (y \wedge z) = y \wedge (x \vee z),$$

и *дистрибутивной*, если для любых элементов x, y, $z \in L$ имеет место *дистрибутивный закон*

$$x \vee (y \wedge z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z).$$

Для получения дальнейших следствий нам понадобится следующее известное утверждение.

Лемма 22 ([17], теорема 8). *Пусть L — алгебраическая решетка, а H — полная подрешетка L. Тогда H является алгебраической решеткой.*

Доказательство. Обозначим через m_H наибольший элемент решетки H. Для произвольного элемента $x \in L$ такого, что $x \leq m_H$, определим элемент $\alpha(x)$ следующим образом

$$\alpha(x) = \bigwedge(h \mid h \in H,\ h \geq x).$$

Поскольку H — полная подрешетка L, то $\alpha(x) \in H$. Понятно, что $\alpha(x)$ является наименьшим из элементов $h \in H$ с условием $h \geq x$, и следовательно, $x \leq \alpha(x)$. Несложно видеть также, что если x — компактный элемент в L, причем $x \leq m_H$, то компактным является и элемент $\alpha(x)$ в H. Действительно, если $\alpha(x) \leq \bigvee(h_i \mid h_i \in H,\ i \in I)$, где $x \leq m_H$, то вследствие условия $x \leq \alpha(x)$ имеем $x \leq \bigvee(h_i \mid h_i \in H,\ i \in I)$. Так как x — компактный элемент решетки L и H — полная подрешетка в L, то $x \leq \bigvee(h_j \mid h_j \in H, j \in J) \in H$ для некоторого конечного множества $J \subseteq I$. Из последнего в силу определения элемента $\alpha(x)$ получаем $\alpha(x) \leq \bigvee(h_j \mid h_j \in H,\ j \in J)$, и значит, $\alpha(x)$ компактен в H. Наконец, для произвольного элемента

$h \in H \subseteq L$ в силу алгебраичности решетки L имеем $h = \bigvee(x_s \mid s \in S)$, где каждый элемент x_s компактен в L. Поскольку $x_s \leq h \in H$ (понятно, что тогда $x_s \leq m_H$), то $\alpha(x_s) \leq h$, и следовательно, $\bigvee(\alpha(x_s) \mid s \in S) \leq h$. С другой стороны, так как $x_s \leq \alpha(x_s)$, то $h = \bigvee(x_s \mid s \in S) \leq \bigvee(\alpha(x_s) \mid s \in S)$. Значит, $h = \bigvee(\alpha(x_s) \mid s \in S)$, причем, как установлено выше, каждый элемент $\alpha(x_s)$ компактен в H. Снова учитывая, что H — полная подрешетка L, ввиду произвольности выбора элемента $h \in H$ заключаем, что H является алгебраической решеткой. Лемма доказана.

Из доказательства леммы 22 ввиду леммы 4.1 [28] (см. также [1], лемма 4.8.1, с. 247]) и определений вытекает следующая

Лемма 23. *Предположим, что* Θ — *алгебраическая решетка формаций и* H — *полная подрешетка* Θ. *Тогда* H — *алгебраическая решетка формаций. Кроме того, если* $\mathfrak{R} = \Theta\mathrm{form}(G)$ — *компактный элемент в* Θ, *причем* $(G) \subseteq \mathfrak{M}_{\mathrm{H}}$, *то* $\mathfrak{R}_1 = \mathrm{Hform}(G)$ *является компактным элементом в* H.

Следствие 32 ([7], теорема 3.1 и [8], теорема 1). *Для любого подгруппового функтора* τ *решетка* $l^{\tau}_{\omega_n}$ *всех* τ*-замкнутых* n*-кратно* ω*-насыщенных формаций алгебраична и модулярна.*

Доказательство. Ввиду теоремы 4 [27] (см. также следствие 3.2 [40] и следствие 2 [2]) решетка c^{ω}_n алгебраична и модулярна. Следовательно, согласно лемме 22, лемме 16 [14] и следствию 12, алгебраической и модулярной является решетка $l^{\tau}_{\omega_n}$, где τ — произвольный подгрупповой функтор. Отметим, что из доказательства теоремы 4 [27] с учетом леммы 4.1 [28] (см. также [1], лемма 4.8.1, с. 247) следует, что компактными элементами решетки c^{ω}_n являются в точности однопорожденные c^{ω}_n-формации. Поэтому вследствие леммы 23, теоремы 1.5.3 [1], с. 52 и леммы 4.1 [28] аналогично заключаем, что компактными элементами структуры $l^{\tau}_{\omega_n}$ являются однопорожденные $l^{\tau}_{\omega_n}$-формации, и только они. Следствие доказано.

Следствие 33 ([14], теорема 2; [29], теорема). *Для любого подгруппового функтора* τ *решетка* $l^{\tau}_{\omega_\infty}$ *всех* τ*-замкнутых тотально* ω*-насыщенных формаций является алгебраической.*

Доказательство. Ввиду следствия 3.2 [12] решетка c^{ω}_{∞} алгебраична, причем, как следует из доказательства теоремы 3.1 [12], компактными элементами c^{ω}_{∞} являются однопорожденные c^{ω}_{∞}-формации, и только они. Из леммы 23, следствия 27 и теоремы 1.5.4 [1], с. 54 с учетом леммы 4.1 [28] (см. также [1], лемма 4.8.1, с. 247) получаем, что для произвольного подгруппового функтора τ решетка $l^{\tau}_{\omega_\infty}$ алгебраична и, кроме того, ее компактными элементами являются в точности однопорожденные $l^{\tau}_{\omega_\infty}$-формации. Следствие доказано.

Следующая лемма непосредственно вытекает из доказательства основного результата (теоремы) работы [34] (см. также [1], теорема 4.5.1, с. 206).

Лемма 24. *Пусть* ω — *множество простых чисел,* $m > n \geq 0$, *где* m *и* n — *целые числа и* $|\omega| > 1$. *Предположим также, что* τ_1 *и* τ_2 — *подгрупповые функторы такие, что* $\tau_1 \geq \tau_2$. *Тогда решетка* $l^{\tau_1}_{\omega_m}$ *всех* τ_1*-замкнутых* m*-кратно* ω*-насыщенных формаций не является подрешеткой решетки* $l^{\tau_2}_{\omega_n}$ *всех* τ_2*-замкнутых* n*-кратно* ω*-насыщенных формаций.*

Следствие 34. *Пусть* ω — *множество простых чисел,* $m > n \geq 0$, *где* m *и* n — *целые числа и* $|\omega| > 1$. *И пусть* τ_1 *и* τ_2 — *подгрупповые функторы такие, что* $\tau_2 \leq \tau_1 \leq \tau_{sn}$. *Тогда решетка* $c^{\tau_1}_{\omega_m}$ *всех* τ_1*-замкнутых* m*-кратно* ω*-композиционных формаций не является подрешеткой решетки* $c^{\tau_2}_{\omega_n}$ *всех* τ_2*-замкнутых* n*-кратно* ω*-композиционных формаций.*

Доказательство. Предположим, что $c^{\tau_1}_{\omega_m}$ является подрешеткой в $c^{\tau_2}_{\omega_n}$. И пусть $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ — произвольные $l^{\tau_1}_{\omega_m}$-формации. Тогда, поскольку ввиду следствия 11 $l^{\tau_1}_{\omega_m}$ — (полная) подрешетка в $c^{\tau_1}_{\omega_m}$, в силу нашего предположения имеем

$$\mathfrak{F}_1 \vee^{\tau_1{}^l}_{\omega_m} \mathfrak{F}_2 = \mathfrak{F}_1 \vee^{\tau_1{}^c}_{\omega_m} \mathfrak{F}_2 = \mathfrak{F}_1 \vee^{\tau_2{}^c}_{\omega_n} \mathfrak{F}_2.$$

Так как $m > n$ и $\tau_1 \geq \tau_2$, то $\mathfrak{F}_i \in l^{\tau_1}_{\omega_m} \subseteq l^{\tau_2}_{\omega_n}$, где $i = 1, 2$. Согласно следствию 11, решетка $l^{\tau_2}_{\omega_n}$ является (полной) подрешеткой в $c^{\tau_2}_{\omega_n}$. Поэтому

$$\mathfrak{F}_1 \vee^{\tau_2{}^l}_{\omega_n} \mathfrak{F}_2 = \mathfrak{F}_1 \vee^{\tau_2{}^c}_{\omega_n} \mathfrak{F}_2.$$

Значит,

$$\mathfrak{F}_1 \vee^{\tau_1{}^l}_{\omega_m} \mathfrak{F}_2 = \mathfrak{F}_1 \vee^{\tau_2{}^l}_{\omega_n} \mathfrak{F}_2,$$

и в силу произвольности выбора $l^{\tau_1}_{\omega_m}$-формаций $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ заключаем, что $l^{\tau_1}_{\omega_m}$ является подрешеткой решетки $l^{\tau_2}_{\omega_n}$. Последнее противоречит лемме 24. Таким образом, исходное допущение неверно, и для любых целых неотрицательных чисел m и n, а также подгрупповых функторов таких, что $\tau_2 \leq \tau_1 \leq \tau_{sn}$, решетка $c^{\tau_1}_{\omega_m}$ не является подрешеткой в $c^{\tau_2}_{\omega_n}$, если только $|\omega| > 1$. Следствие доказано.

Предложение 8. *Пусть* τ_1 *и* τ_2 — *подгрупповые функторы такие, что* $\tau_2 \leq \tau_1 \leq \tau_{sn}$. *Тогда решетка* $c^{\tau_1}_{\omega_n}$ *является полной подрешеткой решетки* $c^{\tau_2}_{\omega_n}$.

Доказательство. Проведем индукцию по n. Пусть $\{\mathfrak{H}_i \mid i \in I\}$ — произвольный набор $c^{\tau_1}_{\omega_n}$-формаций. По условию $\tau_1 \geq \tau_2$, и следовательно, $c^{\tau_1}_{\omega_n} \subseteq c^{\tau_2}_{\omega_n}$. Поэтому для каждого $i \in I$ формация $\mathfrak{H}_i$ является также $c^{\tau_2}_{\omega_n}$-формацией. Пусть $n = 0$. Тогда, согласно следствию 1.2.24 [6], с. 24 имеем

$$c^{\tau_1}_{\omega_0}\mathrm{form}\big(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{H}_i\big) = \tau_1\mathrm{form}\big(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{H}_i\big) = \mathrm{form}\big(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{H}_i\big) = \tau_2\mathrm{form}\big(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{H}_i\big) = c^{\tau_2}_{\omega_0}\mathrm{form}\big(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{H}_i\big).$$

Значит, при $n = 0$ утверждение верно.

Пусть $n > 0$ и при $n-1$ утверждение верно. И пусть h_i — произвольный внутренний (например, минимальный) ω-композиционный $c^{\tau_1}_{\omega_{n-1}}$-значный спутник формации $\mathfrak{H}_i$. Из теоремы 1 [2] или теоремы 2.1 [40] (см. также [1], теорема 4.6.8, с. 223; [35], теорема) для подгруппового функтора $\tau = \tau_2$ имеем

$$\vee^{\tau_2{}^c}_{\omega_n}(\mathfrak{H}_i \mid i \in I) = CF_\omega\big(\vee^{\tau_2{}^c}_{\omega_{n-1}}(h_i \mid i \in I)\big).$$

Ввиду предположения индукции при любом $p \in \pi\Big(\mathrm{Com}\big(\bigcup\limits_{i\in I}\mathfrak{H}_i\big)\Big) \cap \omega$ формации

$$\big(\vee^{\tau_2{}^c}_{\omega_{n-1}}(h_i \mid i \in I)\big)(p) \quad \text{и} \quad \big(\vee^{\tau_2{}^c}_{\omega_{n-1}}(h_i \mid i \in I)\big)(\omega')$$

τ_1-замкнуты. Значит, в силу леммы 3.1 [40] (см. также [1], лемма 1.6.2, с. 66) τ_1-замкнутой является и формация $\vee^{\tau_2{}^c}_{\omega_n}(\mathfrak{H}_i \mid i \in I)$. Лемма доказана.

Аналогично предыдущему утверждению, но с применением леммы 5 [33] (см. также [1], лемма 4.4.6, с. 196) и леммы 1.5.5 [1], с. 55 вместо теоремы 1 [2] (или теоремы 2.1 [40]) и леммы 3.1 [40] соответственно может быть доказано

Предложение 9. *Пусть τ_1 и τ_2 — подгрупповые функторы такие, что $\tau_1 \geq \tau_2$. Тогда решетка $l^{\tau_1}_{\omega_n}$ является полной подрешеткой решетки $l^{\tau_2}_{\omega_n}$.*

Из предложения 8, замечания 2 и следствия 34 вытекает следующий результат.

Следствие 35. *Пусть ω — множество простых чисел, $m > n \geq 0$, где m и n — целые числа. И пусть τ_1 и τ_2 — подгрупповые функторы такие, что $\tau_2 \leq \tau_1 \leq \tau_{sn}$.Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) если $|\omega| = 1$, то решетка $c^{\tau_1}_{\omega_m}$ является полной подрешеткой решетки $c^{\tau_2}_{\omega_n}$;

2) если $|\omega| > 1$, то решетка $c^{\tau_1}_{\omega_m}$ не является подрешеткой решетки $c^{\tau_2}_{\omega_n}$.

В силу совпадения при $\tau_1 = \tau_2 = \tau$, $|\omega| = 1$ в следствии 35 решеток формаций $c^{\tau_1}_{\omega_m}$ и $c^{\tau_2}_{\omega_n}$ (см. замечание 2), из указанного результата получаем

Следствие 36. *Пусть ω — множество простых чисел, $m > n \geq 0$, где m и n — целые числа и $|\omega| > 1$. И пусть τ — подгрупповой функтор такой, что $\tau \leq \tau_{sn}$. Тогда решетка $c^{\tau}_{\omega_m}$ всех τ-замкнутых m-кратно ω-композиционных формаций не является подрешеткой решетки $c^{\tau}_{\omega_n}$ всех τ-замкнутых n-кратно ω-композиционных формаций.*

Последнее следствие является решением открытого вопроса 5.4, предложенного А. А. Царевым и Н. Н. Воробьевым [36].

В заключение отметим, что следствие 11 может быть также использовано и для доказательства недистрибутивности при $\tau \leq \tau_{sn}$ структуры $c^{\tau}_{\omega_n}$ (см. теорема 4.1 [36]). Для этого вначале необходимо в свете теории частично насыщенных формаций показать справедливость утверждений, аналогичных леммам 4.1 и 4.2 [36], и установить недистрибутивность решетки $l^{\tau}_{\omega_n}$, а далее наряду с упомянутым выше следствием 11 воспользоваться леммой 16 [14].

5. Заключение. В работе исследована полнота подрешеток формаций специального вида. Указаны достаточные условия, при которых решетка формаций H^{ω_l} является полной подрешеткой решетки формаций Θ^{ω_c}. В частности, доказано, что решетка всех n-кратно насыщенных формаций l_n — полная подрешетка решетки всех n-кратно композиционных формаций c_n. Аналогичный результат установлен для решетки всех тотально насыщенных формаций l_∞ и решетки всех тотально композиционных формаций c_∞. Кроме того, показано, что если $|\omega| > 1$, $m > n \geq 0$, где m и n — целые числа, и $\tau \leq \tau_{sn}$, то решетка всех τ-замкнутых m-кратно ω-композиционных формаций не является подрешеткой решетки всех τ-замкнутых n-кратно ω-композиционных формаций. Тем самым даны положительные ответы на два вопроса структурной теории формаций, поставленных А. Н. Скибой и Н. Н. Воробьевым, а также указано решение одного из вопросов А. А. Царева и Н. Н. Воробьева в границах данной теории.

Список литературы

1. Воробьев Н. Н. 2012. Алгебра классов конечных групп. Витебск, Изд-во Витебского государственного университета имени П. М. Машерова, 322.

2. Жизневский П. А. 2010. О модулярности и индуктивности решетки всех τ-замкнутых n-кратно ω-композиционных формаций конечных групп. Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины, 58(1): 185–191.

3. Сафонов В. Г. 2004. О тотально ω-насыщенных формациях конечных групп. Препринт, № 7. Гомель, Изд-во Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины, 18.

4. Сафонов В. Г., Шеметков Л. А. 2008. О подрешетках решетки тотально насыщенных формаций конечных групп. Доклады НАН Беларуси, 52(4): 34–37.

5. Селькин В. М. 2011. Однопорожденные формации. Гомель, Изд-во Гомельского государственного университета имени Франциска Скорины, 240.

6. Скиба А. Н. 1997. Алгебра формаций. Минск, Беларуская навука, 240.

7. Шабалина И. П. 2002. Алгебраичность решетки τ-замкнутых n-кратно ω-локальных формаций. Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. Вопросы алгебры-18, 5(14): 59–67.

8. Шабалина И. П. 2003. О решетке τ-замкнутых n-кратно ω-локальных формаций конечных групп. Вести НАН Беларуси. Серия физико-математических наук, 1: 28–30.

9. Шеметков Л. А. 1978. Формации конечных групп. М., Наука, 267.

10. Шеметков Л. А. 1984. О произведении формаций. Доклады АН БССР, 28(2): 101–103.

11. Шеметков Л. А, Скиба А. Н. 1989. Формации алгебраических систем. М., Наука, 253.

12. Щербина В. В. 2020. О двух задачах теории частично тотально композиционных формаций конечных групп. Прикладная математика & Физика, 52(1): 18–32. DOI 10.18413/2687-0959-2020-52-1-18-32.

13. (а) Щербина В. В., Сафонов В. Г. 2019. О подрешетках решетки частично тотально насыщенных формаций конечных групп. Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика. 51(1): 64–87. DOI 10.18413/2075-4639-2019-51-1-64-87.

14. (б) Щербина В. В., Сафонов В. Г. 2019. О некоторых свойствах решетки частично тотально насыщенных формаций конечных групп. Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика. 51(2): 227–244. DOI 10.18413/2075-4639-2019-51-2-227-244.

15. Ballester-Bolinches A., Ezquerro L. M. 2006. Classes of Finite Groups. Dordrecht, Springer, 385.

16. Doerk K., Hawkes T. 1992. Finite Soluble Groups. Berlin–New York, Walter de Gruyter & Co, 891.

17. Grätzer G., Schmidt E. T. 1963. Characterizations of congruence lattices of abstract algebras. Acta Scientiarum Mathematicarum, 24(1–2): 34–59.

18. Guo W. 2000. The Theory of Classes of Groups. Beijing–New York, Science Press–Kluwer Academic Publishers, 261.

19. Guo W. 2015. Structure Theory for Canonical Classes of Finite Groups. Berlin–Heidelberg, Springer-Verlag, 359.

20. Guo W., Shum K. P. 2003. Uncancellative factorizations of Baer-local formations. Journal of Algebra, 267(2): 654–672. DOI 10.1016/S0021-8693(03)00306-5.

21. Guo W., Sel'kin V. M., Shum K. P. 2007. Factorization theory of 1-generated ω-composition formations. Communications in Algebra, 35(9): 2901–2931. DOI 10.1080/00927870701302248.

22. Huppert B., Blackburn N. 1982. Finite Groups III. Berlin–Heidelberg–New York, Springer-Verlag, 455.

23. Kamornikov S. F., Shemetkov L. A. 1995. Coradicals of subnormal subgroups. Algebra and Logic, 34(5): 273–284. DOI 10.1007/BF00768098.

24. Safonov V. G. 2007. Characterization of the soluble one-generated totally saturated formations of finite groups. Siberian Mathematical Journal, 48(1): 150-155. DOI: 10.1007/s11202-007-0015-3.

25. Schmidt O. U. 1966. Abstract Theory of Groups. San Francisco–London, W. H. Freeman and Company, 174.

26. Skiba A. N., Shemetkov L. A. 2000. Multiply ω-local formations and Fitting classes of finite groups. Siberian Advances in Mathematics, 10(2): 112–141.

27. Skiba A. N., Shemetkov L. A. 2000. Multiply $\mathfrak{L}$-composite formations of finite groups. Ukrainian Mathematical Journal, 52(6): 898–913.

28. Skiba A. N., Vorob'ev N. N. 2013. On the lattices of saturated and solubly saturated formations of finite groups. Southeast Asian Bulletin of Mathematics, 37(5): 771–780.

29. Shcherbina V. V. 2020. Algebraicity of lattice of τ-closed totally ω-saturated formations of finite groups. Ufa Mathematical Journal, 12(1): 82–90. DOI 10.13108/2020-12-1-82.

30. Shemetkov L. A. 1997. Frattini extensions of finite groups and formations. Communications in Algebra, 25(3): 955–964. DOI 10.1080/00927879708825900.

31. Shemetkov L. A. 2001. On partially saturated formations and residuals of finite groups. Communications in Algebra, 29(9):4125–4137. DOI 10.1081/AGB-100105992.

32. Shemetkov L. A. 2012. Local definitions of formations of finite groups. Journal of Mathematical Sciences, 185(2): 324–334. DOI 10.1007/s10958-012-0917-x.

33. Shemetkov L. A., Skiba A. N., Vorob'ev N. N. 2009. On laws of lattices of partially saturated formations, Asian-European Journal of Mathematics, 2(1): 155–169. DOI 10.1142/S1793557109000133.

34. Shemetkov L. A., Skiba A. N., Vorob'ev N. N. 2010. On lattices of formations of finite groups. Algebra Colloquium, 17(4): 557–564. DOI 10.1142/S1005386710000532.

35. Tsarev A. A., Vorob'ev N. N. 2014. On a question of the theory of partially composition formations. Algebra Colloquium, 21(3): 437–447. DOI 10.1142/S1005386714000388.

36. Tsarev A. A., Vorob'ev N. N. 2018. Lattices of composition formations of finite groups and the laws. Journal of Algebra and Its Applications, 17(5): 1850084 (17 pages). DOI 10.1142/S0219498818500846.

37. Vedernikov V. A., Sorokina M. M. 2002. ω-Fibered formations and Fitting flasses of finite groups. Mathematical Notes, 71(1): 39-55. DOI 10.1023/A:1013922206539.

38. Vorob'ev N. N. 2018. On complete sublattices of formations of finite groups. Russian Mathematics, 62(1): 17–22. DOI 10.3103/S1066369X18010036.

39. Vorob'ev N. N. 2018. On sublattices of the lattice of all ω-composition formations of finite groups. Advances in Group Theory and Applications, 6: 89–100. DOI 10.32037/agta-2018-006.

40. Vorob'ev N. N., Tsarev A. A. 2010. On the modularity of a lattice of τ-closed n-multiply ω-composite formations. Ukrainian Mathematical Journal, 62(4): 518–529. DOI 10.1007/s11253-010-0368-9.

References

1. Vorob'ev N. N. 2012. Algebra klassov konechnykh grupp [Algebra of Classes of Finite Groups]. Vitebsk, Vitebsk State University named after P. M. Masherov, 322.

2. Zhiznevsky P. A. 2010. O modulyarnosti i induktivnosti reshetki vsekh τ-zamknutykh n-kratno ω-kompozitsionnykh formatsiy konechnykh grupp [On modularity and inductance of the lattice of all τ-closed n-multiply ω-composition formations of finite groups]. Izvestiya Gomel'skogo gosudarstvennogo universiteta imeni F. Skoriny, 58(1): 185–191.

3. Safonov V. G. 2004. O total'no ω-nasyshchennykh formatsiyakh konechnykh grupp. Preprint, № 7 [On totally ω-saturated formations of finite groups. Preprint, N 7]. Gomel, Gomel State University named after Francisk Skorina, 18.

4. Safonov V. G., Shemetkov L. A. 2008. O podreshetkakh reshetki total'no nasyshchennykh formatsiy konechnykh grupp [Sublattices of the lattice of totally saturated formations of finite groups]. Doklady NAN Belarusi, 52(4): 34–37.

5. Sel'kin V. M. 2011. Odnoporozhdennye formatsii [One-generated Formations]. Gomel, Gomel State University named after Francisk Skorina, 240.

6. Skiba A. N. 1997. Algebra formatsiy [Algebra of Formations]. Minsk, Publ. Belaruskaya navuka, 240.

7. Shabalina I. P. 2002. Algebraichnost' reshetki τ-zamknutykh n-kratno ω-lokal'nykh formatsiy [Algebraicity of the lattice of τ-closed n-multiply ω-local formations]. Izvestiya Gomel'skogo gosudarstvennogo universiteta imeni F. Skoriny. Voprosy algebry-18, 5(14): 59–67.

8. Shabalina I. P. 2003. O reshetke τ-zamknutykh n-kratno ω-lokal'nykh formatsiy konechnykh grupp [On the lattice of τ-closed n-multiply ω-local formations of finite groups]. Vesti NAN Belarusi. Seriya fiziko-matematicheskikh nauk, 1: 28–30.

9. Shemetkov L. A. 1978. Formatsii konechnykh grupp [Formations of Finite Groups]. Moscow, Publ. Nauka, 267.

10. Shemetkov L. A. 1984. O proizvedenii formatsiy [On the product of formations]. Doklady Akademii nauk BSSR, 28(2): 101–103.

11. Shemetkov L. A, Skiba A. N. 1989. Formatsii algebraicheskikh sistem [Formations of Algebraic Systems]. M., Publ. Nauka, 253.

12. Shcherbina V. V. 2020. On two problems of the theory of partially totally composition formations of finite groups. Applied Mathematics & Physics. 52(1): 18–32 (in Russian). DOI 10.18413/2687-0959-2020-52-1-18-32.

13. (a) Shcherbina V. V., Safonov V. G. 2019. On sublattices of the lattice of partially totally saturated formations of finite groups. Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics. Physics. 51(1): 64–87 (in Russian). DOI 10.18413/2075-4639-2019-51-1-64-87.

14. (b) Shcherbina V. V., Safonov V. G. 2019. On some properties of the lattice of partially totally saturated formations of finite groups. Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics. Physics. 51(2): 227–244 (in Russian). DOI 10.18413/2075-4639-2019-51-2-227-244.

15. Ballester-Bolinches A., Ezquerro L. M. 2006. Classes of Finite Groups. Dordrecht, Springer, 385.

16. Doerk K., Hawkes T. 1992. Finite Soluble Groups. Berlin–New York, Walter de Gruyter & Co, 891.

17. Grätzer G., Schmidt E. T. 1963. Characterizations of congruence lattices of abstract algebras. Acta Scientiarum Mathematicarum, 24(1–2): 34–59.

18. Guo W. 2000. The Theory of Classes of Groups. Beijing–New York, Science Press–Kluwer Academic Publishers, 261.

19. Guo W. 2015. Structure Theory for Canonical Classes of Finite Groups. Berlin–Heidelberg, Springer-Verlag, 359.

20. Guo W., Shum K. P. 2003. Uncancellative factorizations of Baer-local formations. Journal of Algebra, 267(2): 654–672. DOI 10.1016/S0021-8693(03)00306-5.

21. Guo W., Sel'kin V. M., Shum K. P. 2007. Factorization theory of 1-generated ω-composition formations. Communications in Algebra, 35(9): 2901–2931. DOI 10.1080/00927870701302248.

22. Huppert B., Blackburn N. 1982. Finite Groups III. Berlin–Heidelberg–New York, Springer-Verlag, 455.

23. Kamornikov S. F., Shemetkov L. A. 1995. Coradicals of subnormal subgroups. Algebra and Logic, 34(5): 273–284. DOI 10.1007/BF00768098.

24. Safonov V. G. 2007. Characterization of the soluble one-generated totally saturated formations of finite groups. Siberian Mathematical Journal, 48(1): 150-155. DOI: 10.1007/s11202-007-0015-3.

25. Schmidt O. U. 1966. Abstract Theory of Groups. San Francisco–London, W. H. Freeman and Company, 174.

26. Skiba A. N., Shemetkov L. A. 2000. Multiply ω-local formations and Fitting classes of finite groups. Siberian Advances in Mathematics, 10(2): 112–141.

27. Skiba A. N., Shemetkov L. A. 2000. Multiply $\mathfrak{L}$-composite formations of finite groups. Ukrainian Mathematical Journal, 52(6): 898–913.

28. Skiba A. N., Vorob'ev N. N. 2013. On the lattices of saturated and solubly saturated formations of finite groups. Southeast Asian Bulletin of Mathematics, 37(5): 771–780.

29. Shcherbina V. V. 2020. Algebraicity of lattice of τ-closed totally ω-saturated formations of finite groups. Ufa Mathematical Journal, 12(1): 82–90. DOI 10.13108/2020-12-1-82.

30. Shemetkov L. A. 1997. Frattini extensions of finite groups and formations. Communications in Algebra, 25(3): 955–964. DOI 10.1080/00927879708825900.

31. Shemetkov L. A. 2001. On partially saturated formations and residuals of finite groups. Communications in Algebra, 29(9):4125–4137. DOI 10.1081/AGB-100105992.

32. Shemetkov L. A. 2012. Local definitions of formations of finite groups. Journal of Mathematical Sciences, 185(2): 324–334. DOI 10.1007/s10958-012-0917-x.

33. Shemetkov L. A., Skiba A. N., Vorob'ev N. N. 2009. On laws of lattices of partially saturated formations, Asian-European Journal of Mathematics, 2(1): 155–169. DOI 10.1142/S1793557109000133.

34. Shemetkov L. A., Skiba A. N., Vorob'ev N. N. 2010. On lattices of formations of finite groups. Algebra Colloquium, 17(4): 557–564. DOI 10.1142/S1005386710000532.

35. Tsarev A. A., Vorob'ev N. N. 2014. On a question of the theory of partially composition formations. Algebra Colloquium, 21(3): 437–447. DOI 10.1142/S1005386714000388.

36. Tsarev A. A., Vorob'ev N. N. 2018. Lattices of composition formations of finite groups and the laws. Journal of Algebra and Its Applications, 17(5): 1850084 (17 pages). DOI 10.1142/S0219498818500846.

37. Vedernikov V. A., Sorokina M. M. 2002. ω-Fibered formations and Fitting flasses of finite groups. Mathematical Notes, 71(1): 39-55. DOI 10.1023/A:1013922206539.

38. Vorob'ev N. N. 2018. On complete sublattices of formations of finite groups. Russian Mathematics, 62(1): 17–22. DOI 10.3103/S1066369X18010036.

39. Vorob'ev N. N. 2018. On sublattices of the lattice of all ω-composition formations of finite groups. Advances in Group Theory and Applications, 6: 89–100. DOI 10.32037/agta-2018-006.

40. Vorob'ev N. N., Tsarev A. A. 2010. On the modularity of a lattice of τ-closed n-multiply ω-composite formations. Ukrainian Mathematical Journal, 62(4): 518–529. DOI 10.1007/s11253-010-0368-9.

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.
Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Получена 19.04.2021

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Щербина Владимир Владимирович – выпускник Белорусского государственного университета
http://orcid.org/0000-0002-8709-1181
ул. Одинцова, 109–37, Минск, 220136, Республика Беларусь
E-mail: shcherbinavv@tut.by

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Vladimir V. Shcherbina – graduate of the Belarusian State University, Minsk, Republic of Belarus

Прикладная математика & Физика, 2021, том 53, №3. С. 205–212.

УДК 517.9
MSC 47A10, 35P05.

DOI 10.52575/2687-0959-2021-53-3-205-212

МЕТОД ПОДОБНЫХ ОПЕРАТОРОВ В СПЕКТРАЛЬНОМ АНАЛИЗЕ ОПЕРАТОРНЫХ БЕСКОНЕЧНЫХ МАТРИЦ. ПРИМЕРЫ II

А. Г. Баскаков, Г. В. Гаркавенко, И. А. Криштал, Н. Б. Ускова

(*Статья представлена членом редакционной коллегии А. В. Глушаком*)

Северо-Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова,
г. Владикавказ, 362025, Россия

Воронежский государственный педагогический университет,
г. Воронеж, 394043, Россия

Университет Северного Иллинойса,
WH320 Department of Mathematical sciences, DeKalb, IL 60115, USA

Воронежский государственный технический университет,
г. Воронеж, 394006, Россия

E-mail: anatbaskakov@yandex.ru, g.garkavenko@mail.ru, ikrishtal@niu.edu, nat-uskova@mail.ru

Аннотация. В работе приводятся примеры, иллюстрирующие применение метода подобных операторов с предварительным преобразованием подобия. Метод применяется, в основном, к операторам, определяемым своими матрицами. Предварительное преобразование используется, в частности, когда у невозмущенного оператора расстояние между собственными значениями не увеличивается. К таким операторам относятся оператор Дирака и оператор дифференцирования первого порядка с инволюцией.

Ключевые слова: метод подобных операторов, предварительное преобразование подобия, операторные матрицы, спектр.

Благодарности: Работа первого и четвертого авторов выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-01-00732).

Для цитирования: Баскаков А. Г., Гаркавенко Г. В., Криштал И. А., Ускова Н. Б. 2021. Метод подобных операторов в спектральном анализе операторных бесконечных матриц. Примеры II. Прикладная математика & Физика. 53(3): 205–212. DOI 10.52575/2687-0959-2021-53-3-205-212.

THE METHOD OF SIMILAR OPERATORS IN THE SPECTRAL ANALYSIS OF INFINITE OPERATOR MATRICES. EXAMPLES II

Anatoly Baskakov, Galina Garkavenko, Ilya Krishtal and Uskova Natalia

(*Article submitted by a member of the editorial board A. V. Glushak*)

North Ossetian State University after K. L. Khetagurov,
Vladikavkaz, 362025, Russia

Voronezh State Pedagogical University,
Voronezh, 394043, Russia

Northern Illinois University,
WH320 Department of Mathematical sciences, DeKalb, IL 60115, USA

Voronezh State Technical University,
Voronezh, 394006, Russia

E-mail: anatbaskakov@yandex.ru, g.garkavenko@mail.ru, ikrishtal@niu.edu, nat-uskova@mail.ru

Received July, 9, 2021

Abstract. We illustrate the method of similar operators with examples including the preliminary similarity transformation. The method is applied primarily to operators defined by their matrices. The preliminary similarity transformation is used, in particular, for operators with non-increasing spectral gaps, such as certain Dirac operators and operators with an involution.

Key words: method of similar operators, preliminary similarity transformation, operator matrices, spectrum

Acknowledgements: The work is supported by RFBR, № 19-01-00732.

For citation: Baskakov A. G., Garkavenko G. V., Krishtal I. A., Uskova N. B. 2021. The method of similar operators in the spectral analysis of infinite operator matrices. Examples II. Applied Mathematics & Physics. 53(3): 205–212. (in Russian)
DOI 10.52575/2687-0959-2021-53-3-205-212.

1. Введение. Метод подобных операторов применяется для спектрального анализа широкого класса возмущенных неограниченных линейных операторов. В работе [2] подробно выведена и обоснована модификация метода подобных операторов в терминах бесконечных операторных матриц в частности и для случая, когда собственные значения невозмущенного оператора “не разбегаются”. Такая модификация нужна, например, для исследования дифференциальных операторов первого порядка, таких как, популярный в последнее время дифференциальный оператор с инволюцией (см. [5, 9]). В [3] приведены примеры, иллюстрирующие теоретические выкладки из [2]. Отметим, что в примерах из [3] не использовалось предварительное преобразование подобия. Данная статья является продолжением работ [2] и [3]. Здесь собраны примеры, иллюстрирующие теорию из [2], причем акцент, в отличие от [3], делается на применении не столько самого метода подобных операторов, сколько предварительного преобразования подобия. Для удобства, в начале статьи (в § 2) приводятся вкратце те теоретические сведения, на которые мы будем опираться.

2. Обзор теоретических результатов. Рассмотрим комплексное (сепарабельное) гильбертово пространство $\mathcal{H}$ и линейный замкнутый нормальный оператор $A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$.

Пусть спектр $\sigma(A)$ оператора A состоит из полупростых собственных значений λ_n, $n \in \mathbb{J}$, $\mathbb{J} \in \{\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_+\}$, конечной геометрической кратности, не превосходящей некоторого числа $M_0 \in \mathbb{N}$. При этом требуется

$$\sup_{i\in\mathbb{J}} \sum_{n\in\mathbb{J}\setminus\{i\}} \frac{1}{(\lambda_i-\lambda_n)^2} < \infty,$$

откуда вытекает условие равномерной разделенности спектра оператора A:

$$\inf_{n\in\mathbb{J}} \operatorname{dist}\left(\{\lambda_n\}, \sigma(A)\setminus\{\lambda_n\}\right) \geqslant \beta > 0, \tag{1}$$

при некотором $\beta > 0$.

Через $P_n = P(\{\lambda_n\}, A)$, $n \in \mathbb{J}$, обозначим проектор Рисса (спектральный проектор), построенный по множеству $\sigma_n = \{\lambda_n\}$, $n \in \mathbb{J}$, оператора A; таким образом, $AP_n = \lambda_n P_n$, $n \in \mathbb{J}$.

Символом $\mathfrak{L}_A(\mathcal{H})$ обозначается банахово пространство операторов, подчиненных оператору A, а символом $\operatorname{End}\mathcal{H}$ — банахова алгебра всех линейных ограниченных операторов в $\mathcal{H}$ с нормой $\|X\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1}\|Xx\|$, $X \in \operatorname{End}\mathcal{H}$, $x \in \mathcal{H}$. Отметим, что если $\overline{D(A)} = \mathcal{H}$, то $\operatorname{End}\mathcal{H}$ непрерывно вложено в $\mathfrak{L}_A(\mathcal{H})$.

Все рассуждения далее будут проводиться, используя операторные матрицы рассматриваемых операторов. Для каждого оператора $X \in \mathfrak{L}_A(\mathcal{H})$ введем в рассмотрение его матрицу (X_{ij}), положив $X_{ij} = P_iXP_j$, $i, j \in \mathbb{J}$. Отметим, что любой оператор из $\mathfrak{L}_A(\mathcal{H})$ однозначно определяется своей матрицей.

Также введем двусторонний идеал операторов Гильберта-Шмидта $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H}) \subset \operatorname{End}\mathcal{H}$. Отметим, что стандартная норма $\|\cdot\|_2$ этого идеала удовлетворяет равенству $\|X\|_2^2 = \sum_{i,j\in\mathbb{J}}\|X_{ij}\|_2^2$.

Подчеркнем, что в настоящей работе мы рассматриваем возмущение $B \in \mathfrak{L}_A(\mathcal{H})$, в отличие от [3], где B предполагалось из идеала $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Вследствие этого необходимо вначале произвести предварительное преобразование подобия. Для построения предварительного преобразования подобия считаются выполненными следующие условия, накладываемые на оператор-возмущение $B \in \mathfrak{L}_A(\mathcal{H})$:

1)

$$\sum_{i\in\mathbb{J}} \|B_{ii}\|_2^2 < \infty; \tag{2}$$

2)

$$\sum_{i,j\in\mathbb{J}, i\neq j} \frac{\|B_{ij}\|_2^2}{(\lambda_i-\lambda_j)^2} < \infty; \tag{3}$$

3)

$$\sum_{i,j\in\mathbb{J}} \left\| \sum_{l\in\mathbb{J}, l\neq j} \frac{B_{il}B_{lj}}{\lambda_l-\lambda_j} \right\|_2^2 < \infty; \tag{4}$$

4) для любого положительного ε найдется такое число $\lambda_\varepsilon \in \rho(A)$, что

$$\|B(A-\lambda_\varepsilon I)^{-1}\| < \varepsilon. \tag{5}$$

Также для построения предварительного преобразования подобия необходимы две последовательности операторов $M^{(n)}$, $N^{(n)}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, которые удобно определить, используя их операторные матрицы $M^{(n)} \sim (M_{ij})$, $N^{(n)} \sim (N_{ij})$, $i, j \in \mathbb{J}$, положив

$$M_{ij}^{(n)} = \begin{cases} B_{ij}, & i = j, \\ B_{ij}, & \max\{|i|,|j|\} \leqslant n, \\ 0, & \text{в остальных случаях}, \end{cases} \qquad N_{ij}^{(n)} = \begin{cases} \frac{B_{ij}}{\lambda_i-\lambda_j}, & i\neq j, \quad \min\{|i|,|j|\} \geqslant n, \\ 0, & \text{в остальных случаях}. \end{cases} \tag{6}$$

Теорема 1 (см. [2, теорема 4.1]). *Пусть $B \in \mathfrak{L}_A(\mathcal{H})$ и выполнены условия* (1) – (5). *Тогда существует такое целое $k \in \mathbb{Z}_+$, что оператор $A - B$ подобен оператору $A - M^{(k)} - C^{(k)} = A - Q$, $C^{(k)} = (I + N^{(k)})(BN^{(k)} - N^{(k)}M^{(k)})$, где $N^{(k)}$ и $M^{(k)}$ заданы формулой* (6), *и $C^{(k)}$, $N^{(k)}$, $M^{(k)} \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. При этом $(A - B)(I + N^{(k)}) = (I + N^{(k)})(A - Q)$, $Q \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$.*

Определим еще две последовательности операторов J_kX и $\Gamma_kX \in \operatorname{End}\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, $k \in \mathbb{Z}_+$, следующим образом. Сначала положим для $X \sim (X_{ij})$, $X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ и $k = 0$:

$$(J_0X)_{ij} = \begin{cases} X_{ij}, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \quad (\Gamma_0X)_{ij} = \begin{cases} \frac{X_{ij}}{\lambda_i - \lambda_j}, & i \neq j, \\ 0, & i = j. \end{cases}$$

Для $k > 0$ обозначим $P_{(k)} = \sum_{|i| \leqslant k} P_i$ и определим J_kX и Γ_kX формулами:

$$J_kX = P_{(k)}XP_{(k)} + \sum_{|i| > k, i \in \mathbb{J}} P_iXP_i, \quad X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H}),$$

$$\Gamma_kX = \Gamma_0X - P_{(k)}(\Gamma_0X)P_{(k)} = \Gamma_0(X - J_kX), \quad X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H}).$$

Теорема 2 (см. [2, теорема 5.8]). *Пусть для операторов A и B, $B \in \mathfrak{L}_A(\mathcal{H})$ выполнены условия* (1) – (5). *Тогда существуют такие числа n, $k \in \mathbb{Z}_+$ и оператор $X_* \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, что оператор $A - B$ подобен оператору*

$$A - P_{(k)}X_*P_{(k)} - \sum_{|i| > k, i \in \mathbb{J}} P_iX_*P_i = A - V;$$

при этом матрица оператора $V \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ блочно-диагональна, и оператором преобразования служит оператор $(I + M^{(k)})(I + \Gamma_nX_*) = I + U_{kn}$, где $U_{kn} \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$.

Оператор $X_* \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ из теоремы 2 является решением операторного уравнения метода подобных операторов (см. [2]), получить которое можно методом простых итераций.

Пусть $\widehat{\lambda} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ – взвешенное среднее $\widehat{\lambda}$ собственных значений $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Введем также обозначения $l_i = \dim\operatorname{Im} P_i$, $i \in \mathbb{J}$, и b^i_{nj}, $\widetilde{b}^i_{nj}$, $1 \leqslant n, j \leqslant l_i$, для элементов матриц P_iBP_i и $P_iBN^{(k)}P_i$, $|i| > m$, соответственно.

Теорема 3 (см. [2, теорема 6.1]). *Имеют место следующие асимптотические представления:*

$$\widehat{\lambda}_i = \lambda_i - \frac{1}{l_i}\sum_{n=1}^{l_i} b^i_{nn} - \frac{1}{l_i}\sum_{n=1}^{l_i} \widetilde{b}^i_{nn} + \beta_i, \quad \text{где} \quad \beta_i \in \ell_1(\mathbb{J}). \tag{7}$$

Теорема 4 (см. [2, следствие 6.1]). *Если $\dim\operatorname{Im} P_i = 1$, $|i| > m$, $i \in \mathbb{J}$, то для собственных значений $\widetilde{\lambda}_i$ оператора $A - B$ имеют место асимптотические формулы*

$$\widetilde{\lambda}_i = \lambda_i - b_{ii} - \sum_{l \neq i} \frac{b_{il}b_{li}}{\lambda_l - \lambda_i} + \beta_i, \quad \text{где} \quad \beta_i \in \ell_1(\mathbb{J}) \text{ и } |i| > m.$$

Далее приведем примеры применения общих теорем.

Пример 1. Сначала сформулируем следующий известный результат. Его доказательство можно найти, например, в [8].

Теорема 5. *Пусть есть самосопряженный оператор $A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ и оператор B из идеала $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Тогда существует такая непрерывная функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $f \in L_2(\mathbb{R})$, что для всех $\lambda \in \sigma(A + B)$ выполнено неравенство $|\operatorname{Im}\lambda| \leqslant f(\operatorname{Re}\lambda)$.*

Алгоритм построения функции f можно найти в [4, 8].

Пусть теперь $B \in \mathfrak{L}_A(\mathcal{H})$. Тогда, при условии, что теорема 1 имеет место, получаем, что операторы $A - B$ и $A - Q$ подобны, где Q уже оператор из $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Вследствие совпадения спектров подобных операторов (см., например, [2, лемма 6.1]) и выполнения теоремы 5 для оператора $A - Q$, следует, что она имеет место и для оператора $A - B$.

Теорема 6. *Пусть $A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ — линейный замкнутый самосопряженный оператор, оператор B подчинен оператору A, и выполнены условия* (1) – (5). *Тогда существует такая непрерывная положительная функция $f \in L_2(\mathbb{R})$, что для всех $\lambda \in \sigma(A - B)$ имеет место неравенство $|\operatorname{Im}\lambda| \leqslant f(\operatorname{Re}\lambda)$.*

Наличие такой функции f означает, что спектр возмущенного оператора $A - B$ лежит между графиками функций f и $-f$.

Пример 2. Пусть $L_2[0, \omega]$ — гильбертово пространство (классов эквивалентности) комлекснозначных функций, измеримых по Лебегу и суммируемых с квадратом модуля на отрезке $[0, \omega]$, со скалярным произведением

$$(x, y) = \frac{1}{\omega}\int_0^{\omega} x(s)\overline{y(s)}\, ds$$

и нормой

$$\|x\|^2 = \frac{1}{\omega}\int_0^\omega |x(s)|^2\,ds, \quad x \in L_2[0,\omega].$$

Через $W_2^1[0,\omega]$ будем обозначать пространство Соболева абсолютно непрерывных функций из $L_2[0,\omega]$ с производными из $L_2[0,\omega]$.

Пусть $\mathcal{H} = L_2[0,\omega]$ и задан оператор $A = \frac{d}{dt}$, $D(A) = \{x \in W_2^1[0,1], x(0) = x(1)\}$. Возмутим оператор A оператором B вида

$$Bx(t) = v(t)x(\omega - t), \quad t \in [0,\omega], x \in L_2[0,\omega], \tag{8}$$

где $v \in L_2[0,\omega]$. Таким образом, возмущение есть оператор с инволюцией. Напомним, что некоторый оператор $C \in \operatorname{End} L_2[0,\omega]$ называется инволюцией, если $C^2 = I$. В рассматриваемом случае $(Cx)(t) = x(\omega - t)$, $t \in [0,\omega]$, $x \in L_2[0,\omega]$.

Отметим, что в общем случае возмущение B не принадлежит пространству $\mathfrak{S}_2(L_2[0,\omega])$, но лежит в $\mathfrak{L}_A(L_2[0,\omega])$. Непосредственный подсчет показывает, что $B_{ij} = \widehat{v}(i+j)$. Здесь через $\widehat{x}(n)$ обозначены коэффициенты Фурье функции $x \in L_2[0,\omega]$, имеющей ряд Фурье $x(t) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{x}(n)e^{i\frac{2\pi n}{\omega}t}$, и $\widehat{x}(n) = \frac{1}{\omega}\int\limits_0^\omega x(t)e^{-i\frac{2\pi n}{\omega}t}dt = (x, e_n)$, $n \in \mathbb{Z}$. Очевидно также, что $P_n x = (x, e_n)e_n = \widehat{x}(n)e_n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Матрицы M и N состоят из элементов

$$M_{ij} = \begin{cases} \widehat{v}(2i), & i = j; \\ 0, & i \neq j; \end{cases} \qquad N_{lj} = \begin{cases} \frac{\omega\widehat{v}(l+j)}{2\pi(l-j)}, & l \neq j; \\ 0, & l = j. \end{cases}$$

Отсюда немедленно следует выполнение условия $N, M \in \mathfrak{S}_2(H)$ (выполнение условий (2), (3)). Матрица BN состоит из элементов $(BN)_{lj} = \dfrac{\omega}{2\pi}\sum\limits_{k\neq j}\dfrac{\widehat{v}(l+k)\widehat{v}(j+k)}{j-k}$. Принадлежность оператора BN идеалу $\mathfrak{S}_2(H)$ (или выполнения условия (4)) следует из интегрального представления этого оператора (см., например, [7]):

$$(BNx)(t) = \frac{1}{2\omega}\int\limits_0^{2\omega} f\left(\frac{t-\tau}{2}\right)v\left(\frac{2\omega - t - \tau}{2}\right)v(t)x(t)\,d\tau,$$

$f(t) = i\left(t - \frac{\omega}{2}\right)$, $t \in [0,\omega]$.

Проверку условия (5) также можно найти [1, 7].

Таким образом, для исследуемого оператора с инволюцией $A - B$ из теорем 2 и 4 вытекает

Теорема 7. *Для достаточно больших $k \geq 0$ дифференциальный оператор $\mathcal{L} = A - B : D(\mathcal{L}) \subset L_2[0,\omega] \to L_2[0,\omega]$, заданный формулами $(\mathcal{L}x)(t) = \dfrac{dx}{dt} - v(t)x(\omega - t)$, $D(\mathcal{L}) = \{x \in W_2^1 : x(0) = x(\omega)\}$, подобен оператору*

$$A - V = A - P_{(k)}VP_{(k)} - \sum_{|i|>k} P_iVP_i,$$

где $V \in \mathfrak{S}_2(L_2[0,\omega])$ – решение нелинейного операторного уравнения метода подобных операторов. Для собственных значений $\tilde{\lambda}_j$, $|j| > k$, оператора $\mathcal{L}$ имеют место асимптотические формулы

$$\tilde{\lambda}_j = i\frac{2\pi j}{\omega} - \widehat{v}(2j) - \frac{\omega}{2\pi j}\sum_{l\neq j}\frac{(\widehat{v}(j+l))^2}{l-j} + c_n,$$

где $(c_n) \in \ell_1$.

Пример 4. В этом примере будет показано, что оператор Дирака из [1, 6] также укладывается в приведенную в [2] схему.

Пусть теперь $\Omega = [0,\omega]^2 = [0,\omega] \times [0,\omega]$ и невозмущенный оператор $A : D(A) \subset L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$ задается формулой

$$(Ax)(t) = i\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\frac{d}{dt},$$

где $t \in [0,\omega]$, $x = (x_1, x_2) \in L_2(\Omega)$ и $D(A) = \{x \in L_2(\Omega) : x(0) = x(\omega)\}$. Отметим, что обычно, наряду с периодическими краевыми условиями, также рассматривают антипериодические краевые условия и условия Дирихле (см. [1, 6]). Так как все рассуждения для антипериодических условий и условий Дирихле аналогичны соответствующим для периодических краевых условий (опять же, см. [1, 6]), то мы ограничимся только рассмотрением периодических краевых условий.

Собственными значениями оператора A являются числа $\lambda_n = \frac{2\pi n}{\omega}$, $n \in \mathbb{Z}$. Они двукратны, и собственными векторами являются функции

$$e_n^1 = \begin{pmatrix} e_{-n} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_n^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ e_n \end{pmatrix}, \quad e_n(t) = e^{i\lambda_n t}, t \in [0, \omega].$$

Спектральные проекторы $P_n = P(\{\lambda_n\}, A)$ задаются формулами $P_n x = (x, e_n)e_n^1 + (x, e_{-n})e_n^2$, $n \in \mathbb{Z}$, $\dim \operatorname{Im} P_n = 2$ для всех $n \in \mathbb{Z}$.

Возмутим оператор A оператором $B \in \mathfrak{L}_A(L_2[0, \omega])$ вида

$$(Bx)(t) = \begin{pmatrix} 0 & v_1(t) \\ v_2(t) & 0 \end{pmatrix}, \quad v_1, v_2 \in L_2[0, \omega].$$

Блочная матрица оператора-возмущения B имеет вид

$$b_{nj} = \begin{pmatrix} 0 & \widehat{v}_1(-(n+j)) \\ \widehat{v}_2(n+j) & 0 \end{pmatrix},$$

где $\widehat{v}_1(n), \widehat{v}_2(n)$ – коэффициенты Фурье функций v_1 и v_2 в стандартном базисе $e_n(t) = e^{i\frac{2\pi n}{\omega}}$ пространства $L_2[0, \omega]$.

Операторы, имеющие матрицы N и M, участвующие в предварительном преобразовании подобия в [1, 7], приведены в интегральном виде:

$$(Mx)(s) = \frac{1}{2\omega}\int\limits_0^{2\omega} \begin{pmatrix} 0 & v_1\left(\frac{s+\tau}{2}\right) \\ v_1\left(\frac{s-\tau}{2}\right) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(\tau) \\ x_2(\tau) \end{pmatrix} d\tau,$$

$$(Nx)(s) = \frac{1}{2\omega}\int\limits_0^{2\omega} \begin{pmatrix} 0 & f\left(\frac{s-\tau}{2}\right) v_1\left(\frac{s+\tau}{2}\right) \\ f\left(\frac{s-\tau}{2}\right) v_1\left(\frac{s+\tau}{2}\right) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(\tau) \\ x_2(\tau) \end{pmatrix} d\tau,$$

где $(x_1, x_2) \in L_2[\Omega], s \in (0, \omega), f(t) = i\left(t - \frac{\omega}{2}\right)$, $t \in [0, \omega]$, поэтому условия (2) – (5) автоматически выполняются, там же в [1] доказано выполнение условия (5).

Интегральный вид оператора BN следующий (см. [1, формула (38)])

$$(BNx)(s) = \frac{1}{2\omega}\int\limits_0^{2\omega} \begin{pmatrix} f\left(\frac{\tau-s}{2}\right) v_1(s) v_2\left(\frac{s+\tau}{2}\right) & 0 \\ 0 & f\left(\frac{s-\tau}{2}\right) v_2(s) v_1\left(\frac{s+\tau}{2}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(\tau) \\ x_2(\tau) \end{pmatrix} d\tau,$$

следовательно, $BN \in \mathfrak{S}_2(H)$. Нас в оценках собственных значений будут интересовать только диагональные блоки матрицы BN. Легко проверить, что

$$(BN)_{nn} = \sum_{j \in \mathbb{Z}, j \neq n} \frac{\omega}{2\pi(j-n)} \begin{pmatrix} 0 & \widehat{v}_1(-(n+j)) \\ \widehat{v}_2(n+j) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \widehat{v}_1(-(n+j)) \\ \widehat{v}_2(n+j) & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{\omega}{2\pi} \begin{pmatrix} \sum\limits_{j \in \mathbb{Z}, j \neq n} \frac{\widehat{v}_1(-(n+j))\widehat{v}_2(n+j)}{j-n} & 0 \\ 0 & \sum\limits_{j \in \mathbb{Z}, j \neq n} \frac{\widehat{v}_1(-(n+j))\widehat{v}_2(n+j)}{j-n} \end{pmatrix}.$$

Важным для оценок собственных значений является то, что блок $(BN)_{nn}$ является диагональным и на главной диагонали у него стоят одинаковые элементы.

Приведем без доказательства лемму 7.5 из [1], которая потребуется нам в дальнейшем.

Лемма 1. *Пусть*

$$z_n = \begin{pmatrix} 0 & b_n^2 \\ b_n^3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_n^1 & c_n^2 \\ c_n^3 & c_n^4 \end{pmatrix},$$

где последовательности $b^k : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}, k = 2, 3$, *принадлежат* $\ell_2(\mathbb{Z})$, *а последовательности* $c^k : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}, k = 1, 2, 3, 4$, *принадлежат* $\ell_1(\mathbb{Z})$. *Тогда*

$$\sigma(z_n) = \{\sqrt{b_n^2 b_n^3} + d_n^1, -\sqrt{b_n^2 b_n^3} + d_n^2\},$$

где последовательности $d^k : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}, k = 1, 2$, *принадлежат* $\ell_{4/3}(\mathbb{Z})$. *Более того, если существуют постоянные* $c_1, c_2 > 0$ *такие, что* $c_1 b_n^2 \leq b_n^3 \leq c_2 b_n^2$, *для всех* $n \in \mathbb{Z}$ *достаточно больших по абсолютной величине, то последовательности* $d^k : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}, k = 1, 2$, *принадлежат* $\ell_1(\mathbb{Z})$.

Итак, нам надо вычислить собственные значения матрицы 2×2 вида

$$\begin{pmatrix} \frac{2\pi n}{\omega} - \frac{\omega}{2\pi} \sum\limits_{j \in \mathbb{Z}, j \neq n} \frac{\widehat{v}_1(-(n+j))\widehat{v}_2(n+j)}{j-n} & 0 \\ 0 & \frac{2\pi n}{\omega} - \frac{\omega}{2\pi} \sum\limits_{j \in \mathbb{Z}, j \neq n} \frac{\widehat{v}_1(-(n+j))\widehat{v}_2(n+j)}{j-n} \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 & \widehat{v}_1(-2n) \\ \widehat{v}_2(2n) & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_n^1 & c_n^2 \\ c_n^3 & c_n^4 \end{pmatrix},$$

где последовательности $c^k : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}, k = 1, 2, 3, 4$, принадлежат $\ell_1(\mathbb{Z})$.

Определение 1. *Потенциал* $B = \begin{pmatrix} 0 & v_1 \\ v_2 & 0 \end{pmatrix}$ *называется сбалансированным, если существуют* $c_1, c_2 > 0$ *и* $N \in \mathbb{N}$ *такие, что*

$$c_1|\widehat{v}_1(-2n)| \leq |\widehat{v}_2(2n)| \leq c_2|\widehat{v}_1(-2n)|$$

для $n \in \mathbb{Z}$ *таких, что* $|n| \geq N$.

Из теоремы 2 и леммы 1 получится

Теорема 8. *Для достаточно больших целых* k *спектр оператора Дирака* $A-B$ *представим в виде объединения*

$$\sigma(A - B) = \tilde{\sigma}_{(k)} \cup \Big(\bigcup_{|n|>k} \tilde{\sigma}_{(n)} \Big),$$

где множество $\tilde{\sigma}_{(k)}$ *имеет не более* $4k + 2$ *собственных значений, множества* $\tilde{\sigma}_{(n)}, |n| > k$, *двухточечны*

$$\tilde{\sigma}_n = \left\{ \frac{2\pi n}{\omega} - \frac{\omega}{2\pi} \sum_{j \in \mathbb{Z}, j \neq n} \frac{\widehat{v}_1(-n-j)\widehat{v}_2(n+j)}{j-n} + \sqrt{\widehat{v}_1(-2n)\widehat{v}_2(2n)} + d_n^1 , \right.$$

$$\left. \frac{2\pi n}{\omega} - \frac{\omega}{2\pi} \sum_{j \in \mathbb{Z}, j \neq n} \frac{\widehat{v}_1(-n-j)\widehat{v}_2(n+j)}{j-n} - \sqrt{\widehat{v}_1(-2n)\widehat{v}_2(2n)} + d_n^2 \right\},$$

и последовательности $d^k : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}, k = 1, 2$, *принадлежат* $\ell_{4/3}(\mathbb{Z})$. *Если же потенциал* B *является сбалансированным, то последовательности* $d^k : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}, k = 1, 2$, *принадлежат* $\ell_1(\mathbb{Z})$.

Замечание. *В рассматриваемом случае можно было использовать формулу* (7) *для взвешенных средних* $\widehat{\lambda}_n$ *собственных значений, входящих в спектральные множества* $\tilde{\sigma}_n, |n| > k$, *но получается более грубый результат.*

Список литературы

1. Баскаков А. Г., Дербушев А. В., Щербаков А. О. 2011. Метод подобных операторов в спектральном анализе несамосопряженного оператора Дирака с негладким потенциалом. Известия РАН. Серия математическая, 75(3): 3–28.

2. Баскаков А. Г., Криштал И. А., Ускова Н. Б. 2020. Метод подобных операторов в спектральном анализе операторных бесконечных матриц. Прикладная математика & Физика, 52(2): 71–85.

3. Баскаков А. Г., Криштал И. А., Ускова Н. Б. 2020. Метод подобных операторов в спектральном анализе операторных бесконечных матриц. Примеры I. Прикладная математика & Физика, 52(3): 185–194.

4. Баскаков А. Г., Криштал И. А., Ускова Н. Б. 2021. О спектральных свойствах оператора Дирака на прямой. Дифференциальные уравнения, 57(2): 153–161.

5. Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П. 2011. Метод Фурье в смешанной задаче для уравнения первого порядка с инволюцией. Журнал вычислительной математики и математической физики, 51(12): 2233–2246.

6. Джаков П. Б., Митягин Б. С. 2006. Зоны неустойчивости одномерных периодических операторов Шрёдингера и Дирака. Успехи математических наук, 61(4(370)): 77–182.

7. Криштал И. А., Ускова Н. Б. 2019. Спектральные свойства дифференциальных операторов первого порядка с инволюцией и группы операторов. Сибирские электронные математические известия, 16: 1091–1132.

8. Baskakov A. G., Krishtal I. A., Uskova N. B. 2020. Closed operator functional calculus in Banach modules and applications. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 492(2): 124473.

9. Kopzhassarova A. A., Lukashov A. L., Sarsenbi A. M. 2012. Spectral properties of non-self-adjoint perturbations for a spectral problem with involution. Abstract and Applied Analysis, Article ID 590781.

References

1. Baskakov A. G., Derbushev A. V., Shcherbakov A. O. 2011. The method of similar operators in the spectral analysis of non-self-adjoint Dirac operators with non-smooth potentials. Izvestiya: Mathematics, 75 (3): 445–469.

2. Baskakov A. G., Krishtal I. A., Uskova N. B. 2020. The method of similar operators in the spectral analysis of infinite operator matrices. Applied Mathematics & Physics, 52 (2): 71–85 (in Russian).

3. Baskakov A. G., Krishtal I. A., Uskova N. B. 2020. The method of similar operators in the spectral analysis of infinite operator matrices. Examples I. Applied Mathematics & Physics, 52 (3): 185–194 (in Russian).

4. Baskakov A. G., Krishtal I. A., Uskova N. B. 2021. On spectral properties of the Dirac operator on a real line. Differential Equations, 57 (2): 153–161.

5. Burlutskaya M. Sh., Khromov A. P. 2011. Fourier method in an initial-boundary value problem for a first-order partial differential equation with involution. Computational Mathematics and Mathematical Physics, 51 (12): 2102–2114.

6. Djakov P. B., Mityagin B. S. 2006. Instability zones of periodic 1-dimensional Schrödinger and Dirac operators. Russian Mathematical Surveys, 61 (4): 663–766.

7. Krishtal I. A., Uskova N. B. 2019. Spectral properties of first-order differential operators with an involution and groups of operators. Siberian Electronic Mathematical Reports, 16: 1091–1132 (in Russian).

8. Baskakov A. G., Krishtal I. A., Uskova N. B. 2020. Closed operator functional calculus in Banach modules and applications. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 492 (2): 124473.

9. Kopzhassarova A. A., Lukashov A. L., Sarsenbi A. M. 2012. Spectral properties of non-self-adjoint perturbations for a spectral problem with involution. Abstract and Applied Analysis, Article ID 590781.

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.
Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Получена 09.07.2021

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Баскаков Анатолий Григорьевич – доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник Северо-Осетинского государственного университета им. К. Л. Хетагурова

http://orcid.org/0000-0003-4616-840X
ул. Ватутина, 44-46, г. Владикавказ, 362025, Северная Осетия-Алания, Россия
E-mail: anatbaskakov@yandex.ru

Гаркавенко Галина Валериевна – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент Воронежского государственного педагогического университета

http://orcid.org/0000-0002-5220-5775
ул. Ленина 86, г. Воронеж, 394043, Россия
E-mail: g.garkavenko@mail.ru

Криштал Илья Аркадьевич – кандидат физико-математических наук, доцент, профессор Университета Северного Иллинойса

http://orcid.org/000-0001-7171-2177
WH320 Department of Mathematical sciences, DeKalb, IL, 60115, USA
E-mail: ikrishtal@niu.edu

Ускова Наталья Борисовна – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент Воронежского государственного технического университета

http://orcid.org/000-0002-9212-8786
ул. 20 лет Октября, 84, Воронеж, 394006, Россия

E-mail: nat-uskova@mail.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Anatoly G. Baskakov – Doctor of Sciences Phys. Math., Professor, Leading Researcher of the North Ossetian State University named after K. L. Khetagurova, Vladikavkaz, North Ossetia-Alania, Russia

Galina V. Garkavenko – PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor, Associate Professor, Voronezh State Pedagogical University, Voronezh, Russia

Ilya A. Krishtal – PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor, Professor at the University of Northern, DeKalb, IL, USA

Natalia B. Uskova – PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor, Associate Professor, Voronezh State Technical University, Voronezh, Russia

Прикладная математика & Физика, 2021, том 53, №3. С. 213–229.

УДК 51(091) DOI 10.52575/2687-0959-2021-53-3-213-229

Посвящается 100-летнему юбилею уравнения Некрасова

ОБ ИСТОРИИ УРАВНЕНИЯ НЕКРАСОВА[1]

Е. М. Богатов

(*Статья представлена членом редакционной коллегии Ю. П. Вирченко*)

Филиал Национального исследовательского технологического университета «МИСиС» в г. Губкине Белгородской области,
Белгородская обл., г. Губкин, 309180, Россия
Старооскольский технологический институт им. А. А. Угарова (филиал) Национального исследовательского технологического университета «МИСиС»,
Белгородская обл., г. Старый Оскол, 309516, Россия

E-mail: embogatov@inbox.ru

Аннотация. Появившись в 1921 г. как уравнение волн малой амплитуды на поверхности бесконечно глубокой жидкости, уравнение Некрасова быстро стало источником получения новых результатов. Это проявилось как в области математики (теория нелинейных интегральных уравнений А. И. Некрасова; 1922, позже – Н. Н. Назарова; 1941), так и в области механики (переход к жидкости конечной глубины – А. И. Некрасов; 1927, и отказ от малости амплитуды волн – Ю. П. Красовский; 1960). Основная задача автора – выяснить предысторию возникновения уравнения Некрасова и проследить изменение подходов к его решению в контексте развития нелинейного функционального анализа 1940-х – 1960-х гг. Пристальное внимание будет уделено вкладу европейских и отечественных математиков и механиков: А. М. Ляпунова, Э. Шмидта, Т. Леви-Чивита, А. Вилля, Л. Лихтенштейна, М. А. Красносельского, Н. Н. Моисеева, В. В. Покорного и др. В контексте развития качественных методов исследования уравнения Некрасова будет также освещён вопрос о взаимодействии воронежской школы нелинейного функционального анализа под руководством профессора М. А. Красносельского и ростовской школы нелинейной механики под руководством профессора И. И. Воровича.

Ключевые слова: нелинейные интегральные уравнения, уравнение Некрасова, уравнение Гаммерштейна, теория Ляпунова-Шмидта, Т. Леви-Чивита, Н. Н. Назаров, М. А. Красносельский, Ю. П. Красовский, воронежская школа нелинейного функционального анализа; ростовская школа нелинейной механики.

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект 20-011-00402.
Автор выражает признательность участникам Воронежской весенней математической школы «Понтрягинские чтения – XXXII» за внимание к работе и полезные обсуждения, а также В.П. Богатовой за помощь в доступе к первоисточниками.

Для цитирования: Богатов Е. М. 2021. Об истории уравнения Некрасова. Прикладная математика & Физика. 53(3): 213–229. DOI 10.52575/2687-0959-2021-53-3-213-229.

ON THE HISTORY OF THE NEKRASOV EQUATION

Egor Bogatov

(*Article submitted by a member of the editorial board Yu. P. Virchenko*)

Branch of National Research University of Science and Technology «MISIS» in Gubkin town of Belgorod Region
Gubkin, 309180, Russia;
Stary Oskol Technological Institute of National Research University of Science and Technology «MISIS»
Stary Oskol, 309516, Russia
E-mail: embogatov@inbox.ru

Received September, 4, 2021

Abstract. Appearing in 1921 as an equation for small-amplitude waves on the surface of an infinitely deep liquid, the Nekrasov equation quickly became a source of new results. This manifested itself both in the field of mathematics (theory of nonlinear integral equations of A. I. Nekrasov; 1922, later - of N. N. Nazarov; 1941), and in the field of mechanics (transition to a fluid of finite depth – A. I. Nekrasov; 1927 and refusal on the smallness of the wave amplitude - Yu. P. Krasovskii; 1960). The main task of the author is to find out the prehistory of the Nekrasov equation and to trace the change in approaches to its solution in the context of the nonlinear functional analysis development in the 1940s - 1960s. Close attention will be paid to the contribution of European and Russian mathematicians and mechanics: A. M. Lyapunov, E. Schmidt, T. Levi-Civita,

[1]Основные результаты работы обсуждались на Воронежской весенней математической школе «Понтрягинские чтения – XXXII» 04.05.2021 [5].

A. Villat, L. Lichtenstein, M. A. Krasnoselskii, N. N. Moiseev, V. V. Pokornyi, etc. In the context of the development of qualitative methods for the Nekrasov equation investigating, the question of the interaction between Voronezh school of nonlinear functional analysis under the guidance of Professor M. A. Krasnoselskii and Rostov school of nonlinear mechanics under the guidance of Professor I. I. Vorovich.

Keywords: nonlinear integral equations, Nekrasov equation, Hammerstein equation, Lyapunov-Schmidt theory, T. Levi-Civita, N. N. Nazarov, M. A. Krasnoselskii, Yu. P. Krasovskii, Voronezh School of Nonlinear Functional Analysis; Rostov School of Nonlinear Mechanics.

Acknowledgements: The work is supported by RFBR, project No 20-011-00402.

For citation: Bogatov E. M. 2021. On the history of the Nekrasov equation. Applied Mathematics & Physics. 53(3): 213–229. (in Russian) DOI 10.52575/2687-0959-2021-53-3-213-229.

---

1. Введение. С момента опубликования Александром Ивановичем Некрасовым своего уравнения, описывающего распространение малых волн на поверхности тяжёлой жидкости [Некрасов, 1921]:

$$\Phi(\theta) = -\frac{\mu}{12\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\sin\Phi(\varepsilon)}{1+\mu\int_0^{\varepsilon}\sin\Phi(\alpha)d\alpha}K(\varepsilon,\theta)d\varepsilon, \tag{1}$$

где $K(\varepsilon,\theta) = \ln\left|\frac{1-\cos(\varepsilon-\theta)}{1-\cos(\varepsilon+\theta)}\right|$; μ – параметр, $\Phi(\theta)$ – угол наклона касательной к профилю волны, прошло 100 лет. Несмотря на это, полноценный историко-научный анализ его математических работ, в особенности по нелинейным интегральным уравнениям, до 2020 г. проведён не был (некоторые фрагменты такого анализа можно найти в [Вайнберг, Треногин, 1962, §2], [Секерж-Зенькович, 1960], [Волгина, Тюлина, 2001, Гл. 3]). В 2021 вышла статья российского учёного Н. Г. Кузнецова «Повесть о двух интегральных уравнениях Некрасова» [Kuznetsov, 2021], в которой указанный пробел был частично восполнен. В настоящей работе мы попытаемся дополнить исследование Кузнецова новыми фактами и предложить свой взгляд на историю уравнения (1).

Основным инструментом для построения решений (1), предложенным Некрасовым, было разложение в степенной ряд. С того времени появились новые подходы к исследованию подобных уравнений, основанные, прежде всего, на методах нелинейного функционального анализа. При этом само уравнение не потеряло своей актуальности как для математиков, так и для механиков [Kuznetsov, 2021, § 3].

Задача автора – проследить эволюцию подходов к изучению уравнения (1), ответив на следующие вопросы:

1. На каком уровне находилась теория нелинейных интегральных уравнений до Некрасова?
2. Что привело Некрасова к нелинейным интегральным уравнениям? На какие работы он опирался?
3. Проводились ли подобные исследования в других странах?
4. Можно ли сопоставить метод Некрасова с другими методами?
5. Кто и когда занимался продолжением идей Некрасова до начала 1960-х гг.?

2. Предыстория: работы А. М. Ляпунова и Э. Шмидта. Прежде чем перейти к исследованиям самого Некрасова, обозначим уровень развития нелинейных интегральных уравнений к концу 1910-х гг. Одним из первых таких уравнений было уравнение (2), возникшее при отыскании форм равновесия вращающихся жидкостей в работе 1903 г. выдающегося русского математика Александра Михайловича Ляпунова [Liapunoff, 1903]

$$\int_0^A \rho^2(a')da'\int_S (1+(\varsigma'))^2\left(1+\frac{\partial(a'\varsigma')}{\partial a'}\right)\frac{d\sigma'}{\Delta} + \frac{\omega^3}{2g}a^2(1+\varsigma^2)\sin^2\theta = F(a). \tag{2}$$

Здесь ω – угловая скорость вращения жидкой массы, g – постоянная всемирного тяготения; Δ – расстояние между переменной точкой $P'(r',\theta',\varphi')$ внутри жидкости и фиксированной точкой $P(r,\theta,\varphi)$ на S; (r,θ,φ) – сферические координаты, ζ – искомая функция параметра a и координат (θ,φ), характеризующая отклонение поверхности уровня жидкой массы от сферы радиуса ; $F(a)$ – заданная функция; интегрирование во втором интеграле производится по поверхности единичной сферы S.

Более общий случай был рассмотрен Ляпуновым в работе 1905 г. [Liapounoff, 1905]. В процессе доказательства существования неэллипсоидальных форм равновесия жидкой массы он вывел уравнение

$$R\zeta - \int_S \frac{\varsigma' d\sigma}{\Delta} = W(\zeta), \tag{3}$$

где $R = R(\theta,\varphi)$ – заданная функция. Основную сложность этого уравнения составляла правая часть, состоящая из бесконечного числа интегро-степенных слагаемых (пояснение будет дано ниже, при описании вклада Э. Шмидта).

Ляпунов искал малые решения (3) в виде ряда по степеням некоторого малого параметра (равного отношению центробежной силы к силе тяжести на экваторе жидкой планеты). Сходимость этого ряда доказывалась методом мажорант. Доказательство наличия нескольких решений опиралось на нетривиальную разрешимость соответствующего линейного интегрального уравнения.

Ляпунов получил свои результаты ещё до того, как теория линейных интегральных уравнений обрела более или менее сложившуюся форму. Его аргументация отличалась большой сложностью, тем не менее его теория малых решений нелинейных интегральных уравнений вызвала в Европе живой интерес. Математический аппарат теории уравнений вида (3) был разработан немецким математиком Эрхардом Шмидтом (1907-1908), учеником Д. Гильберта [Schmidt, 1907] – [Schmidt, 1908]. Он, как и Ляпунов, ограничился случаем малых решений уравнений

$$u(x)-\int_a^b K(x,s)u(s)ds=f(x)+\int_a^b K_1(x,s)v(s)ds-\sum_{m+n\geq 2}U_{mn}\begin{pmatrix}x\\u,v\end{pmatrix}, \tag{4}$$

где $x\in(a,b)$; $v(s)$, $f(x)$, $K(x,s)$ и $K_1(x,s)$ – заданные функции; $u(x)$ – искомая функция; $U_{mn}\begin{pmatrix}x\\u,v\end{pmatrix}$ – конечная или бесконечная сумма интегро-степенных слагаемых. При малых $|u|$, $|v|$ ряды правой части (4) должны, по условию, сходиться абсолютно и равномерно при всех $x\in(a,b)$.
В качестве простейшего примера уравнения (4) можно предложить уравнение

$$u(x)-\int_0^1 K(x,s)u(s)ds=v(x)+\int_0^1\int_0^1 K(x,y_1,y_2)u^2(y_1)v^3(y_2)dy_1dy_2.$$

Для исследования разрешимости уравнения (4) Шмидт представил его как уравнение с известной правой частью и применил к нему теорию Фредгольма о представлении решений линейного уравнения посредством резольвенты (разрешающего ядра) $R(x,t)$. В соответствии с этой теорией здесь необходимо было выделить два варианта дальнейшего рассмотрения, в зависимости от того, является ли оператор, стоящий в левой части (4), обратимым или нет.

В случае, когда единица является собственным значением интегрального оператора A, решение линейного интегрального уравнения с «замороженной» правой частью будет зависеть от нескольких произвольных постоянных ξ_i (по величине кратности единицы, как собственного значения оператора А). При этом оказалось естественным, ориентируясь на принцип Коха обращения ряда, искать решение исходного уравнения в виде [2]

$$u(x)=\sum_{m+n\geq 1}\xi^m V_n^m\begin{pmatrix}x\\v\end{pmatrix}. \tag{5}$$

Для определения возможных значений ξ оставалось подставить ряд (5) в выражение для u через резольвенту линейного уравнения (по Фредгольму) и получить уравнение разветвления [3]:

$$\xi=\sum_{m+n\geq 1}\xi^m\int_a^b\varphi(s)V_n^m\begin{pmatrix}s\\v\end{pmatrix}ds; \tag{6}$$

$\varphi(x)$ – собственная функция линейного оператора А.

Шмидт показал, что в правой части уравнения (6) фактически отсутствуют первые степени ξ, значит, в общем случае оно имеет не единственное решение. Независимо от величины модуля функции $v(x)$, число решений исходного уравнения определяется числом решений уравнения разветвления (6). Из уравнения (6) можно также получить информацию о виде всех нетривиальных малых решений уравнения (4).

После опубликования работ Ляпунова и Шмидта стало очевидным, что неединственность решений нелинейных интегральных уравнений является их типичным свойством. Уравнение разветвления быстро превратилось в рабочий инструмент для исследования интегральных уравнений [Богатов, Мухин, 2021].

3. Задача об обтекания препятствия – исток уравнения Некрасова. А. И. Некрасов был учеником Н. Н. Жуковского – основателя московской школы механики, имеющей международное признание. Одной из первых работ Некрасова, связанных с уравнением (1), была статья *«О прерывном течении жидкости в двух измерениях вокруг препятствия в форме дуги круга»* (1922) [Некрасов, 1922], в которой он

[2]В этой формуле $V_n\begin{pmatrix}x\\v\end{pmatrix}$ – подлежащая определению интегро-степенная форма степени n.

[3]Такой вид уравнения (6) соответствует случаю, когда кратность единицы, как собственного значения оператора А, равна одному.

обобщил результаты итальянского математика и механика Тулио Леви-Чивита[4] и его французского коллеги Анри Вилля[5]. Обзор более ранних результатов по теории струйных течений конца XIX в. – начала XX в. (работы Г. Гельмгольца, Г. Кирхгофа, Н. И Жуковского и др.) был сделан учеником А. И. Некрасова, механиком Л.И. Седовым [Седов, 1939, § 10].

К Леви-Чивита восходит исследование подобных задач на плоскости методами комплексного анализа[6]. При его подходе предполагалось, что решение будет зависеть от нахождения некоторой функции φ, способ определения которой не был указан [Levi-Civita, 1907]. Кроме того, данная функция никак не была связана с формой препятствия текущей жидкости. Вилля взялся исправить ситуацию, продолжив исследования Леви-Чивиты по совету своего учителя, французского механика М. Бриллюэна [Tazzioli, 2017]. Вилля применил конформное отображение области с неизвестной границей на полукольцо и ввёл новую функцию θ, которая уже имела тесную связь с формой препятствия. В своей диссертации 1911 г., сведя задачу к отысканию двух сопряжённых тригонометрических рядов переменной θ, он получил некоторое соотношение между ними, которое привело его к нелинейному интегро-дифференциальному уравнению вида[7] [Villat, 1911]:

$$\theta'(\sigma) = \lambda H(\theta, \sigma) \exp\left\{-\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \theta'(\varepsilon) K(\varepsilon, \sigma) d\varepsilon\right\}, \tag{7}$$

где $\lambda > 0$ – некоторая постоянная; $H(\theta, \sigma)$ – некоторая заданная функция; $K(\varepsilon, \sigma) = \ln\left|\frac{\sin\frac{\varepsilon-\sigma}{2}}{\sin\frac{\varepsilon+\sigma}{2}}\right|$.

Отметим, что до начала 1920-х гг. методы решения уравнения (7) отсутствовали. Они были предложены в работах А. И. Некрасова применительно к аналогу уравнения (7) и основывались на использовании функции Жуковского (логарифма от комплексной скорости течения жидкости $\frac{dw}{dz}$; $w = \varphi + i\psi$ – комплексный потенциал). Задачу обтекания криволинейной дуги Некрасов свёл к уравнению относительно некоторой вспомогательной функции $h(\theta)$, зная которую можно найти функцию Жуковского. Следуя методу Вилля, он привёл задачу к отысканию двух сопряжённых тригонометрических рядов

$$g(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n+1}\cos(2n+1)\theta; \tag{8}$$

$$h(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n+1}\sin(2n+1)\theta, \tag{9}$$

между которыми имелось следующее соотношение

$$g'(\theta) = -\frac{\pi\lambda}{2} e^{-h(\theta)}\sin\theta(1-\sin\theta). \tag{10}$$

Здесь $\lambda > 0$ – некоторая постоянная, θ – аргумент параметрического переменного u, от которого зависят w и $\frac{dw}{dz}$ (определение этой зависимости позволяет рассчитать все силовые, кинематические и геометрические характеристики течения).

Соотношение (10) привело Некрасова к нелинейному интегральному уравнению

$$h(\theta) = F(\theta) + \lambda\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[1 - e^{-h(\varepsilon)}\right]\frac{(1 + 2\sin\varepsilon - \cos 2\varepsilon)}{4}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{\varepsilon-\theta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\varepsilon+\theta}{2}}\right| d\varepsilon, \tag{11}$$

где $F(\theta)$ – некоторая известная функция.

Решение уравнения (11) Некрасов представил рядом по степеням λ, сходящимся при $\lambda < \lambda_0$ (при этом числу λ_0 соответствует дуга окружности, ограничивающей препятствие, равная 20°).

4. Задачи плоской теории волн. Задачам нелинейной теории волн установившегося вида на поверхности тяжёлой жидкости Некрасов посвятил семь работ, вышедших в 1919 – 1928 гг. [Некрасов, 1919] – [Некрасов, 1928]. На протяжении XX в. подобные задачи решались приближённо, из-за сложности этих задач в них отбрасывались нелинейные члены, что оставляло открытым само существование установившихся волн. В работе [Некрасов, 1922a] Некрасов впервые представил алгоритм решения указанной задачи для волн на поверхности бесконечно глубокой тяжёлой жидкости. Как и в приведённой выше задаче об обтекании препятствия, решение задачи о волнах было основано на идее, идущей от Вилля: область, занятая одной волной конформно отображается внутрь единичного круга так, что

[4] В 1934 г. Леви-Чивита был избран почётным членом Академии наук СССР.
[5] Действительный член Парижской Академии наук с 1932 г.
[6] Метод Леви-Чивита описан в книге М.И. Гуревича [Гуревич, 1979, Гл. IV, § 17].
[7] Вывод уравнения (7) можно найти в статье [Гуревич, 1970, § 2].

свободная поверхность жидкости соответствует границе этого круга. При этом опять возникают тригонометрические ряды вида (8)-(9) и соотношение между ними вида (10), что в конечном итоге [8] даёт уравнение (1) [Некрасов, 1961, с. 255].

Для волн малой амплитуды ($sin\Phi \approx \Phi$) уравнение (1) переходит в линейное интегральное уравнение вида

$$\Phi(\theta) = -\frac{\mu}{12\pi}\int_0^{2\pi}\Phi(\varepsilon)\ln\left|\frac{1-\cos(\varepsilon-\theta)}{1-\cos(\varepsilon+\theta)}\right|d\varepsilon. \tag{12}$$

Некрасов показал, что если параметр μ принадлежит промежутку $[0, \mu_1^*)$, где μ_1^* – первое собственное значение уравнения (12), то установившиеся волны отсутствуют. Математический смысл этого результата состоит в том, что первое собственное значение линеаризованного интегрального уравнения является бифуркационным значением исходного (нелинейного) интегрального уравнения.

Для исследования уравнения (1), (10) Некрасов разрабатывает самостоятельную теорию [Некрасов, 1922b] – [Некрасов, 1922c], в которой рассматривает нелинейное интегральное уравнение общего вида [9] с вырожденным ядром:

$$f(x) = \lambda\int_a^b f(y)K(x,y)dy + \varepsilon\lambda\int_a^b R[\lambda, y, f(y)]K(x,y)dy. \tag{13}$$

Здесь $K(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_n(x)\varphi_n(y)}{\lambda_n}$, $\{\varphi_i(x)\}$ – некоторая система ортонормированных на отрезке $[a,b]$ функций; λ_i – собственные значения однородного уравнения Фредгольма, получающегося из (13) при подстановке $\varepsilon = 0$.

Некрасов искал решения (13) в виде

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty}(\lambda')^{p+i}\cdot f_i(x), \tag{14}$$

где $\lambda = \lambda_1 \pm \varepsilon\cdot\lambda'$ – малый параметр, $p = \frac{1}{m-1}$; $m \geq 2$ – наименьшая степень разложения функции R по степеням $f(y)$:

$$(\lambda_1 \pm \varepsilon\cdot\lambda')R[\lambda, y, f(y)] = (\lambda')^{p+1}R_1 + (\lambda')^{p+2}R_2 + \cdots, \; R_i = R_i(y, \lambda_1, \varepsilon).$$

Используя специальный приём, Некрасов пришёл к выражению $f_m(x)$ через функции системы $\varphi_m(x)$:

$$f_0(x) = C_0\varphi_1(x),$$
$$f_m(x) = C_m\varphi_1(a) + \sum_{i=2}^{\infty}\frac{\lambda_1}{\lambda_i-\lambda_1}a_{im}\varphi_i(x), m = 1, 2, \ldots \tag{15}$$

для которого величины C_m и a_{im} определяются однозначно, а вот величина C_0 – нет:

$$C_0 = \mp\int_a^b R_1[\lambda_1, y, C_0\varphi(y)]dy$$

[Некрасов, 1961, с. 87], что приводит к ветвлению.

Для доказательства сходимости рядов (14) – (15) Некрасов применял (как Ляпунов и Шмидт) метод мажорант. Однако в отличие от своих предшественников Некрасов решал исходное нелинейное интегральное уравнение *непосредственно* (не используя редукцию задачи к решению преобразованного функционального уравнения).

Для построения решения уравнения (1) Некрасову удалось использовать более простое соображение. Полагая $\mu = 3 + \lambda$, он отыскивал решение этого уравнения в виде степенного ряда

$$\Phi(\theta, \lambda) = \sum_{k=1}^{\infty}\lambda^k\Phi_k(\theta). \tag{16}$$

Подстановка данного ряда в уравнение (1) привела к рекуррентной системе для определения Φ_k:

$$\begin{cases} \Phi_1(\theta) = 3\int_0^{2\pi}\Phi_1(\varphi)K(\varphi,\theta)d\varphi \\ \Phi_2(\theta) = 3A(\Phi_2) + A_2(\Phi_1) \\ \Phi_3(\theta) = 3A(\Phi_3) + A_3(\Phi_1, \Phi_2) \\ \ldots \\ \Phi_n(\theta) = 3A(\Phi_n) + A_n(\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_{n-1}) \\ \ldots \end{cases} \tag{17}$$

[8]Некрасов применил здесь преобразования, идею которых предложил один из основателей Московской математической школы профессор Н. Н. Лузин [Некрасов, 1961, с. 44].

[9]Специальный случай уравнения, введённого через 8 лет после Некрасова в работе [Hammerstein, 1930].

где A_k – нелинейные операторы по всем своим переменным, кроме последней, но при $k = 3, 4, \ldots$ операторы A_k являются линейными относительно Φ_{k-1} [Вайнберг, Треногин, 1962, § 2]. Оператор A – линейный интегральный оператор с ядром $K(\varphi, \theta)$.

Следует отметить, что за работу [Некрасов, 1921] по теории волн Некрасов был удостоен премии Жуковского [Секерж-Зенькович, 1960, с. 154].

В более поздней своей работе Некрасов исследует задачу о волне установившегося вида на поверхности конечной глубины [Некрасов, 1928]. В этом случае область, занятая одной волной, конформно отображается в круговое кольцо. Опираясь опять на метод Вилля, Некрасов сводит задачу к решению нелинейного интегрального уравнения, аналогичного (1), в котором

$$K(\varepsilon, \theta) = -\ln \left| \frac{\sigma\left[\frac{\omega}{\pi}(\theta+\varepsilon)\right]\sigma_3\left[\frac{\omega}{\pi}(\theta-\varepsilon)\right]}{\sigma_3\left[\frac{\omega}{\pi}(\theta+\varepsilon)\right]\sigma\left[\frac{\omega}{\pi}(\theta-\varepsilon)\right]} \right|.$$

Здесь $\omega = Const$; σ_3 и σ – это эллиптические сигма-функции Вейерштрасса [Некрасов, 1947].

Поскольку основные результаты по теории нелинейных интегральных уравнений Некрасова были опубликованы в малоизвестных журналах, они не получили широкого распространения в то время ни в России, ни за рубежом.

Отметим, что на международном съезде по теоретической механике (1924) доклад Некрасова (по причине отсутствия докладчика) был прочитан Леви-Чивитой [Лапко, Люстерник, 1957, с. 119]. После этого некоторые западноевропейские учёные обратили внимание на статьи Некрасова 1921-22 гг. (см., например, книгу Л. Лихтенштейна [Lichtenstein, 1931, с. 54]). Леви-Чивита работал над определением профиля устоявшихся безвихревых волн на поверхности жидкости бесконечной глубины параллельно с Некрасовым. Об этом говорит тот факт, что в 1921 г. он включил эту тему в цикл лекций по вопросам классической и релятивистской механики [Levi-Civita, 1922]. В 1925 г. Леви-Чивита опубликовал *своё* «уравнение волны» [Levi-Civita, 1925], [Stoker, 1957, с. 523-524]:

$$\frac{d\Phi}{d\theta} = pe^{-3\Phi}\sin\Psi, \tag{18}$$

где $p > 0$ – параметр; $\Psi = Im\,\omega$, $\Phi = Re\,\omega$; $\varsigma = \rho e^{i\theta}$; $\omega = \omega(\varsigma)$ – аналог потенциала скорости течения жидкости.

Функция ω предполагается аналитической внутри круга $|\varsigma| < 1$, непрерывной при $|\varsigma| \leq 1$ и обладающей свойством $\omega(0) = 0$. Уравнение (18) относится к точкам окружности $|\varsigma| = 1$; оно является следствием условия постоянства давления жидкости на её поверхности.

Существование решения уравнения (18) доказывалось Леви-Чивитой с помощью довольно сложной процедуры, в которой были задействованы нелинейные тригонометрические выражения и метод мажорант. Он оказался в более выгодном, по сравнению с Некрасовым, положении: 50-страничная работа [Levi-Civita, 1925] вышла в престижном немецком журнале *Mathematische Annalen* и быстро стала классической. Но и исследования Некрасова долгое время продолжали оставаться актуальными, и в 1951 году на эту тему им была опубликована монография [Некрасов, 1951], за которую Некрасов получил Сталинскую премию. После этого его результаты стали более востребованы западно-европейскими учёными (см., например, [Stoker, 1957, с. IX]) и встал вопрос о приоритете Некрасова в нелинейной теории волн. Для решения этого вопроса в начале 1960-х гг. во Франции было осуществлено подробное сопоставление результатов Некрасова и Леви-Чивита, которое показало их равносильность [Jolas, 1962].

В начале 1940-х гг. метод Некрасова был «переоткрыт[10]» среднеазиатским математиком Николаем Николаевичем Назаровым [Назаров, 1941], учеником В.А. Стеклова. Назаров стал применять указанный метод для абстрактных аналогов уравнений (1), (11):

$$u(x) = \lambda \int_a^b H(x, y, u(y))dy \tag{19}$$

с аналитическими операторами H, раскладывающихся в ряд в окрестности известного решения $u_0(x)$:

$$H(x, y, u_0(x) + v) = \sum_{k=0}^{\infty} H_k(x, y)v^k.$$

В этих условиях Назаров преобразовал исходное уравнение к равенству

$$v(x) - \lambda_0 \int_a^b H_1(x, y)v(y))dy = \int_a^b \left[\mu(H_0 + H_1 v) + (\mu + \lambda_0)(H_2 v^2 + H_3 v^3 + \cdots)\right] dy$$

[10]Назаров не был знаком с результатами Некрасова, поскольку он не ссылается на работы [Некрасов, 1919] – [Некрасов, 1928].

и представил его малые решения в виде рядов по целым или дробным степеням параметра $\mu = \lambda - \lambda_0$. Коэффициенты этих рядов были определены рекуррентно из бесконечной системы уравнений, а их сходимость установлена путём построения мажорант.

Важным моментом в результатах Назарова является возможность судить о существовании решения уравнения (19) для любого значения λ, лежащего в окрестности λ_0, на основе знания решения u_0 исходного уравнения, соответствующего λ_0. Назаровым были также найдены условия единственности и неединственности такого решения [Назаров, 1945].

Впоследствии под *методом Некрасова – Назарова* стали подразумевать представление решения уравнения в виде рядов по степеням $\lambda - \lambda_0$ или $(\lambda - \lambda_0)^{\frac{1}{n}}$, причём функциональные коэффициенты этих рядов находятся последовательным решением линейных интегральных уравнений, а сходимость полученных рядов устанавливается методом мажорант [Ахмедов, 1957, с.137].

5. Метод Ляпунова – Шмидта в решении уравнения Некрасова. В 1930-м г. немецкий математик А. Гаммерштейн ввёл в рассмотрение уравнение[11]

$$y(x) = \int_a^b K(x,s) f(s, y(x)) ds, \tag{20}$$

и доказал его разрешимость «в целом», используя вариационный подход [Hammerstein, 1930], [Bogatov, 2020]. Кроме того, он применил к изучению уравнения (20) метод Ляпунова – Шмидта и вывел для него систему уравнений разветвления [Смирнов, 1936, § 15].

Подход Гаммерштейна был взят на вооружение его коллегой Л. Лихтенштейном, который исследовал задачи теории волн в постановке Леви-Чивиты [Lichtenstein, 1931, Гл. II, § 1]. Лихтенштейн ввёл условия нечётности на функции Ψ и чётности функций Φ из уравнения (18), связанные с предполагаемой симметричностью волн. Это позволило ему, опираясь на теорию потенциала, свести задачу к системе нелинейных интегральных уравнений Вольтерра – Фредгольма

$$\begin{cases} \Psi(\varphi) = \dfrac{p}{\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} \ln \frac{1}{\theta} e^{-3\Phi} \sin \Psi d\theta \\ \Phi(\varphi) = p \displaystyle\int_0^{\varphi} e^{-3\Phi} \sin \Psi d\theta \end{cases} \tag{21}$$

и вывести для неё уравнение разветвления [Lichtenstein, 1931, с. 48-52].

Дальнейшее продвижение в исследовании уравнения Некрасова (1) было связано с развитием методов Ляпунова – Шмидта в контексте общей теории операторов в банаховых пространствах [Вайнберг, Айзенгендлер, 1966, § 5].

Эта теория позволяла записать уравнение (1) (и ему подобные) в операторной форме:

$$\varphi = \lambda A(\varphi, \lambda), \tag{22}$$

где $\lambda = -\dfrac{\mu}{12\pi}$; A – вполне непрерывный оператор:

$$A(\varphi, \lambda) = \int_0^{2\pi} \frac{\sin \varphi(\varepsilon)}{1 - 12\pi\lambda \int_0^{\varepsilon} \sin \varphi(\alpha) d\alpha} K(\varepsilon, \varphi) d\varepsilon.$$

Для исследования уравнения (22) на предмет наличия малых решений удобно преобразовать его к виду

$$x = \lambda B(x), \tag{23}$$

где B – оператор Ляпунова – Шмидта (данное преобразование было выполнено Н. Н. Моисеевым в [Моисеев, 1957]). Тогда теорема существования нелинейных волн не требует специальных доказательств – она является прямым следствием теории Ляпунова – Шмидта.

Редукция к интегральным уравнениям Шмидта оказалась выгодной и с прикладной точки зрения. Она позволила применить метод Ляпунов – Шмидта для эффективного расчёта нелинейных волн. Как показал Моисеев, уравнение разветвления, соответствующее интегральному уравнению (23), имеет *«полезный»* вид $c = f(\lambda, \alpha)$, c – скорость движения жидкости; λ — длина волны; α – амплитуда.

В начале 1960-х метод Ляпунова – Шмидта был также применён к исследованию уравнения (22) непосредственно [Hyers, 1964, с. 322-324].

В середине 1950-х гг. М. А. Красносельский высказал гипотезу о том, что для нелинейных интегральных уравнений (19) формальные решения в виде рядов всегда являются истинными решениями при достаточно малых значениях параметров [Покорный, 1958, с. 711]. Справедливость этой гипотезы была

[11] Оно получило название *уравнение Гаммерштейна.*

проверена В. В. Покорным, который обобщил теорию формальных рядов с числовыми коэффициентами, развитую С. Бохнером и У. Мартиным, на случай формальных степенных рядов с функциональными коэффициентами [Покорный, 1958]. Рассматривая аналог «обобщённого уравнения Некрасова» (13) в виде

$$\varphi(x) = \int_0^1 A_{10}(x,y)\varphi(y)dy + \int_0^1 \Gamma[x,y,\varphi(y);\lambda]dy, \tag{24}$$

где $\Gamma[x,y,z;\lambda] = \lambda A_{01}(x,y) + \sum_{k+i\geq 2} A_{ki}(x,y)z^k\lambda^i$, Покорный представил его решение, в соответствии с методом Ляпунова – Шмидта, следующим образом [Покорный, 1956, с. 43]

$$\varphi(x,\lambda) = \psi(x,\lambda) + \alpha(\lambda)\omega(x). \tag{25}$$

Здесь $\omega(x)$ – нормированная собственная функция ядра $A_{10}(x,y)$; $\alpha(\lambda)$ определяется условием ортогональности функций $\omega(x)$ и $\psi(x,\lambda)$ в пространстве $L^2(0,1)$.

Функция $\psi(x,\lambda)$ определялась решением уравнения

$$\psi(x) = \int_0^1 A_{10}(x,y)\psi(y)dy + f[x,\psi(x);\alpha,\lambda], \tag{26}$$

где через $f[x,\psi(x);\alpha,\lambda]$ обозначен интеграл $\int_0^1 \Gamma[x,y,\varphi(y);\lambda]dy$ при подстановке в него выражения для $\varphi(x,\lambda)$ из (25).

Условие разрешимости уравнения (26) даёт зависимость между α и λ, которую можно представить в упрощённом виде

$$F(\alpha,\lambda) = 0, \tag{27}$$

где $F(\alpha,\lambda)$ – аналитическая в некоторой окрестности точки (0,0) относительно обеих своих переменных функция.

Покорный показал, что система уравнений (17), используемая в методе Некрасова – Назарова, эквивалентна уравнению разветвления, составленному для уравнения (24) и даже совпадает с ним, если правую часть уравнения разветвления разложить в ряд по соответствующему параметру и условие (27) заменить условием обращения в нуль всех коэффициентов этого разложения [Покорный, 1960]. Попутно Покорный обнаружил, что применение методов Ляпунова – Шмидта и Некрасова – Назарова требует преодоления одинаковых технических трудностей – построения резольвенты и решения уравнения разветвления.

6. Качественный анализ уравнения Некрасова. Применение качественных методов к анализу задач гидродинамики восходит к французскому учёному Жану Лере (1935) [Leray, 1935a]-[Leray, 1935b], который исследовал вопросы существования и единственности решений задачи о струйном обтекании препятствия неограниченным потоком (см. также [Гуревич, 1979, Гл. IV, § 18]). Лере опирался на созданную им вместе с польским математиком Юлиушем Шаудером теорию степени отображения [Leray, Schauder, 1934] (историю вопроса см., например, в [Mawhin, 2006]). В середине 1950-х гг. подход Лере был распространён на задачи плоской теории волн тяжёлой жидкости в постановке Леви-Чивиты (Р. Жербе, [Gerber, 1955]), однако и здесь дальше вопросов разрешимости дело не пошло.

Поворотным моментом следует, по-видимому, считать защиту докторской диссертации советского математика Марка Александровича Красносельского [Красносельский, 1950], в которой идеи Лере – Шаудера получили своё дальнейшее развитие. Красносельский смотрел на нелинейный функциональный анализ, как на возможность проводить *качественное исследование* уравнений, не прибегая к построению их решений по примеру того, как это происходило в теории дифференциальных уравнений [Немыцкий, Степанов, 1947]. Он разработал ряд топологических методов анализа, которые нашли своё применение в различных прикладных областях [Красносельский, 2000], в том числе, при анализе задач теории волн.

В работе [Красносельский, 1956] Красносельский рассмотрел оператор Некрасова вида

$$A_1(\varphi,\mu) = \mu\int_0^{2\pi} \frac{K(x,y)\sin\varphi(y)dy}{1+\mu\int_0^y \sin\varphi(t)dt}, \tag{28}$$

где

$$K(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx \sin ny}{\mu_n}, \tag{29}$$

а $\mu_n = \mu_n^\delta$ – положительные собственные значения ядра $K(x,y)$, имеющие различный вид для жидкости конечной ($\delta = 1$) и бесконечной ($\delta = 2$) глубины. Точные формулы для μ_n^δ имеют следующий вид: $\mu_n^1 = 3ncoth\frac{2\pi nh}{\lambda}$, где λ – длина волны, h – глубина жидкости [Некрасов, 1961, с. 405]; $\mu_n^2 = 3n$.

Красносельский показал, что оператор A_1 допускает разложение по формуле Тейлора в окрестности нуля θ банахова пространства E:

$$A_1(\varphi,\mu) = \mu B\varphi + C(\varphi,\mu) + D(\varphi,\mu), \tag{30}$$

где B – линейный вполне непрерывный оператор (производная Фреше оператора A_1 в точке θ);

$C(\varphi,\mu)$ – оператор k-го порядка относительно φ:

$$C(\alpha\varphi,\mu) = \alpha^k C(\varphi,\mu); \tag{31}$$

$D(\varphi,\mu)$ – оператор высшего, чем k порядка относительно φ:

$$\lim_{\|\varphi\|\to 0} \frac{\|D(\varphi,\mu)\|}{\|\varphi\|^k} = 0. \tag{32}$$

При выполненных условиях уравнение

$$\varphi = A_1(\varphi,\mu) \tag{33}$$

имеет нулевое решение θ при всех значениях μ.

Интерес представляют случаи, когда наряду с тривиальным решением, при некотором значении μ, близком к критическому[12] значению μ^*, уравнение (33) имеет ещё одно (малое) решение, которое и будет определять форму волны.

Развитая Красносельским теория бифуркаций (историю вопроса см. в [Богатов, Мухин, 2015]) включала в себя обоснование линеаризации для уравнения (28). Соответствующая теорема может быть сформулирована так [Красносельский, 1956, с.457]:

Теорема 1. *Пусть оператор $A_1(\varphi,\mu)$ представляется в виде (30) и выполнены условия (31)-(32). Тогда каждая точка бифуркации этого оператора является характеристическим значением линейного оператора B. Каждое характеристическое значение нечётной кратности оператора B является точкой бифуркации оператора A_1.*

Поскольку производная Фреше оператора A_1 в точке θ имеет вид $B\varphi = \int_0^{2\pi} K(s,t)\varphi(t)dt$, [Красносельский, 1956a, с. 204], все его характеристические значения μ_n нечётнократны. Следовательно, все они будут точками бифуркации для операторов Некрасова (28).

Отметим, что подход Красносельского позволял ответить на вопрос о точках бифуркации уравнения Некрасова *без построения уравнения разветвления или исследования сходимости рядов* Назарова.

Доказанные Красносельским теоремы о структуре множества решений уравнения (33) для вполне непрерывных операторов A_1 общего вида и его линеаризованных аналогов были основаны на свойствах вращения вполне непрерывных векторных полей [Красносельский, 1956a, Гл. IV]. Эти теоремы помогли обнаружить качественно новые свойства *глобальных* решений уравнения Некрасова. В частности, было выяснено, что

1. *Решения φ_μ уравнения (33), отвечающие значениям параметра μ, близким к μ_n, образуют в окрестности θ непрерывную ветвь*[13]*, причём $\mu \to \mu_n$, когда $\|\varphi_\mu\| \to 0$* [Красносельский, 1956a, с. 203].

2. *В каждой непрерывной ветви, существование которой обозначено в предыдущем пункте, фиксированным значениям μ, близким к μ_n, соответствует единственное ненулевое решение уравнения (33), непрерывно зависящее от μ.* [Красносельский, 1956, с. 458].

7. Переход к теории волн немалой амплитуды. Топологические методы теории бифуркаций, разработанные Красносельским и основанные на степени отображения, позволили отказаться от предположения о малости амплитуды волны в теории Некрасова. Кроме того, поскольку физически осмысленные решения уравнений, подобных (1), (11) являются неотрицательными, для дальнейшего анализа уравнений вида (33) с оператором (28) имело смысл задействовать теорию конусов, основанную М. Г. Крейном и М. А. Рутманом [Крейн, Рутман, 1948] и развитую Красносельским (историю вопроса см. в [Богатов, 2020a]). Несмотря на то, что Красносельский хорошо ориентировался в задачах нелинейной механики (см., например, [Бахтин, Красносельский, 1955]), для дальнейшего качественного анализа задач о волнах установившегося вида лучше подходили специалисты, имеющие базовое образование в области механики и гидродинамики.

Так сложилось, что в 1950-х гг. одна из школ нелинейной механики СССР была создана в Ростовском-на-Дону государственном университете (РГУ). Её организатором был выдающийся механик, впоследствии академик, Иосиф Израилевич Ворович. Он сам получил фундаментальную математическую подготовку (в том числе в области нелинейного анализа) на мехмате МГУ и хорошо понимал необходимость

[12]Такое значение параметра называется бифуркационным.

[13]Собственные функции некоторого оператора A образуют в области $G \subset E$ *непрерывную ветвь*, проходящую через точку φ_0, если граница каждого ограниченного открытого множества $U \subset G$, содержащего φ_0, имеет непустое пересечение с множеством собственных векторов A [Красносельский, 1956, с. 190].

аналогичной подготовки для своих учеников, занимающихся вопросами нелинейной механики сплошной среды. По словам Воровича [Ворович, Хапланов, 1963, с.213]

«Коллектив механиков[14] *ощутил, что углубленная математическая разработка задач нелинейной механики возможна только на базе современных методов, в первую очередь, на базе нелинейного функционального анализа.»*

В связи с этим в 1953 г. на кафедре теоретической механики РГУ был организован семинар по функциональному анализу, который имел тесные связи с одноимённым Воронежским семинаром. Это подтверждается выступлениями ростовчан на семинаре Красносельского [Красносельский, Крейн, Мышкис, 1957, с.249], а также выходом совместного сборника статей по функциональному анализу Воронежского госуниверситета и РГУ. Как отмечали Ворович и Хапланов [Ворович, Хапланов, 1963, с.213],

«Работа семинара сблизила ростовчан с воронежскими математиками, прежде всего с М.А. Красносельским, С.Г. Крейном и В.И. Соболевым.»

В результате один из учеников Воровича – Юрий Петрович Красовский – смог применить методы нелинейного функционального анализа к решению задач теории волн [Ворович, Хапланов, 1963, с. 226]. Красовский предполагал, что установившаяся жидкость бесконечной глубины движется без образования вихрей с постоянной скоростью, направленной по горизонтали, а профиль свободной границы является неподвижной периодической кривой. Отталкиваясь от постановки Леви-Чивита (18) и считая волны симметричными, Красовский пришёл к задаче отыскания периодической функции $\Phi(\varphi) \not\equiv \theta$

$$\Phi(\varphi) = \mu \int_0^{\pi} K_1(\varepsilon, \varphi) e^{3\Psi} \sin \Phi d\varepsilon, \tag{34}$$

где $\mu > 0$ – число Фруда, а $K_1(\varepsilon, \varphi)$ – ядро, определяемое аналогично формуле (29) с заменой μ_n на величину $\frac{\pi n}{2}$. Ψ – функция, сопряжённая с Φ и удовлетворяющая условию

$$\int_0^{2\pi} \Psi(\varepsilon) d\varepsilon = 0.$$

Искомая функция $\Phi(\varphi)$ (как и в работах Некрасова) – это угол, образованный касательной к профилю волны с горизонталью.

Красовский ограничился случаем, когда волны имеют по одному гребню (точка $\varphi = \pi$) и одной впадине (точка $\varphi = 0$). То есть

1. $\Phi(\varphi) \geq 0$ при $\varphi \in [0, \pi]$;
2. $\Phi(0) = \Phi(\pi) = 0$.

Это предположение позволило использовать теорию положительных операторов Красносельского [Красносельский, 1956а, Гл. V], краеугольным камнем которой является понятие *конуса* K банахова пространства E – замкнутого выпуклого множества, содержащее вместе с каждой своей точкой x луч, проходящий через неё и такого, что из того, что $x, -x \in K$ следует, что $x = \theta$. При помощи конуса K в пространстве E вводят полуупорядоченность, полагая $x \preceq y$, если $y - x \in K$(при этом знак $\preceq$ обладает всеми свойствами обычного знака $\leq$), а также определяют *положительные операторы*, как операторы, оставляющие конус K инвариантным. Большую пользу в контексте теории конусов приносит рассмотрение *монотонных* операторов A, обладающих свойством $x \preceq y \Rightarrow Ax \preceq Ay$.

Вернёмся к уравнению (34) – его можно записать в операторном виде:

$$\Phi = \mu A \Phi, \tag{35}$$

где $A\Phi = \int_0^{\pi} K_1(\varepsilon, \varphi) e^{3\Psi} \sin \Phi d\varepsilon$.

Обозначим через $\dot{C}[0, \pi]$ – пространство непрерывных на $[0, \pi]$ функций, обращающихся в ноль на границе отрезка $[0, \pi]$; K – конус неотрицательных в $\dot{C}[0, \pi]$ функций; B_r – шар пространства $\dot{C}[0, \pi]$ радиуса $r < \dfrac{\pi}{6}$. Тогда, как показал Красовский [Красовский, 1960, с. 1238], оператор A из (35) будет вполне непрерывным в B_r и положительным на множестве $K_r = B_r \cap K$. При этом оператор A не является монотонным из-за наличия множителя $sin\,\Phi$. Тем не менее, поскольку он имеет монотонную миноранту (монотонный оператор B, для которого при всех $x \in K_r$ выполнено неравенство $Bx \preceq Ax$), к анализу уравнения (35) применимы теоремы о собственных функциях положительных операторов, доказанные Красносельским [Красносельский, 1956а, Гл. V, § 2-3]:

Теорема 2. *Положительные собственные функции оператора A образуют в конусе K непрерывную ветвь длиной r.*

Теорема 3. *Позитивный*[15] *спектр оператора A целиком лежит в некотором интервале* $0 < a < \mu < b$, *причём a и b не зависят от* $\|\Phi\|$.

[14]Имеется в виду коллектив кафедры теоретической механики РГУ.

[15]*Позитивный спектр* положительного оператора А – совокупность тех его собственных чисел, которым соответствуют положительные собственные функции.

Из этих теорем следует, что в жидкости бесконечно большой глубины [Красовский, 1960, с. 1238]

1. при ограниченной скорости *нет волн произвольно большой амплитуды*;

2. существуют периодические симметричные волны, у которых максимум угла наклона к профилю волны принимает любое значение из интервала $(0; \frac{\pi}{6})$.

Похожие результаты были получены Красовским и при изучении волновых движений жидкости конечной глубины [Красовский, 1961].

Заключение. Появлению уравнения Некрасова предшествовали исследования двух ярких представителей школ механики: итальянской (Т. Леви-Чивиты, который стал изучать задачи об обтекании жидкостью препятствий методами теории функций комплексного переменного) и французской (А. Вилля, который получил нелинейное интегро-дифференциальное уравнение для формы обтекания жидкости с использованием подхода Леви-Чивиты). Наличие указанных результатов дало Некрасову возможность двигаться дальше и применить принятый в московской школе механики во главе с Жуковским подход, основанный на использовании функции Жуковского. Вкупе со взаимодействием с сильной математической школой МГУ во главе с Н. Н. Лузиным это помогло Некрасову перейти к более простому (интегральному) варианту уравнения, описывающему течение жидкости вокруг препятствия в задаче Вилля – Леви-Чивиты. Кроме того, это позволило распространить данный подход на задачи теории волн.

В силу ряда обстоятельств Некрасов, как и многие его коллеги (в том числе математики Н. Н. Лузин, А. Я. Хинчин и др.) был вынужден уехать из Москвы в 1920-м г. в г. Иваново в поисках лучшего жизнеобеспечения [Люстерник, 1967, с. 160]. До 1922 г. Некрасов был штатным профессором Иваново-Вознесенского политехнического института, организованного в 1918 г. [Секерж-Зенькович, 1960, с. 153]. Научная библиотека этого института, естественно, не шла ни в какое сравнение со столичными научными библиотеками, что затрудняло доступ профессуры к трудам своих зарубежных и даже петербургских коллег. Этим, по-видимому, можно объяснить тот факт, что Некрасов не использовал метод Ляпунова-Шмидта для решения своего уравнения, а создавал свой метод самостоятельно, «с нуля». С другой стороны, данное обстоятельство сослужило хорошую службу Некрасову, побуждая его к созданию теории нелинейных интегральных уравнений, ставшую хорошим дополнением к теории Ляпунова – Шмидта. Как выяснилось позднее, теория Некрасова содержала в себе потенциал для её распространения на нелинейные уравнения общего вида в абстрактных пространствах. Поскольку методы, используемые Некрасовым – разложение в ряд по степеням малого параметра и мажорирование (как, впрочем, и метод Ляпунова – Шмидта) – имели локальный характер, ответить на вопросы о глубинных свойствах решений уравнения Некрасова они не могли. Здесь на помощь пришли топологические методы нелинейного анализа, развитые в работах М. А. Красносельского середины 1950-х гг. и основанные на теории степени отображения в банаховом пространстве.

Это позволило выяснить

• сколько малых ненулевых решений имеет уравнение Некрасова при значениях параметра, близких к бифуркационному значению μ_n;

• когда ненулевые решения образуют непрерывные ветви и сколько таких ветвей существует при $\mu \longrightarrow \mu_n$;

• как зависят от μ ненулевые решения уравнения Некрасова;

• при каких условиях на уравнение спектр оператора Некрасова будет сплошным.

Кроме того, применение Ю. П. Красовским теории конусов, разработанной Красносельским для решения задач нелинейного функционального анализа во второй половине 1950-х гг., позволило отказаться от предположения о малости амплитуды волны в уравнении Некрасова и провести его качественный анализ в новых условиях (1960). Немаловажную роль здесь сыграло тесное сотрудничество двух молодых научных школ СССР: воронежской школы функционального анализа (руководитель – М. А. Красносельский) и ростовской школы нелинейной механики (руководитель – И. И. Ворович).

Дальнейшее использование теории конусов применительно к глобальному анализу уравнения Некрасова было осуществлено в 1970-е гг. силами западных учёных [Kuznetsov, 2021, § 3.1].

Поводя итог, можно утверждать, что уравнение Некрасова достойно того, чтобы быть поставленным в один ряд с известными нелинейными уравнениями, таким как, например, уравнение Лиувилля, изучение которых даёт всё новые результаты и находит новое применение [Богатов, 2020b]. Ожидать ослабления интереса к уравнению Некрасова в ближайшем будущем не приходится.

Список литературы

1. Ахмедов К. Т. 1957. Аналитический метод Некрасова – Назарова в нелинейном анализе. Успехи математических наук, 12:4(76): 135–153.

2. Бахтин И. А., Красносельский М. А. 1955. К задаче о продольном изгибе стержня переменной жёсткости. Доклады Академии наук СССР, 105(4): 621-624.

3. Богатов Е. М. 2020 a. Об истории положительных операторов (1900-е-1960-е гг.) и вкладе М. А. Красносельского. Научные ведмости БелГУ. Серия Прикладная математика, Физика, 52(2): 105-127.

4. Богатов Е. М. 2020 b. Об истории уравнения $\Delta u = ke^u$ и вкладе отечественных математиков. Обозрение Промышленной и Прикладной Математики, 27(1): 67-69.

5. Богатов Е. М. 2021. О развитии теории нелинейных интегральных уравнений в работах А. И. Некрасова. Современные методы теории краевых задач : материалы Международ. конф. : Воронежская весенняя математическая школа Понтрягинские чтения – XXXII (3–9 мая 2021 г.). ВГУ; МГУ им. М. В. Ломоносова. Воронеж : Издат. дом ВГУ, 42-45.

6. Богатов Е. М., Мухин Р. Р. 2015. О связи между нелинейным анализом, бифуркациями и нелинейной динамикой: на примере воронежской школы нелинейного функционального анализа. Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика, 23(6): 74-88.

7. Богатов Е. М., Мухин Р. Р. 2021. О развитии нелинейных интегральных уравнений на раннем этапе и вкладе отечественных математиков. Чебышевский сборник, 3 (В печати).

8. Вайнберг М. М., Треногин В. А. 1962. Методы Ляпунова и Шмидта в теории нелинейных уравнений и их дальнейшее развитие. Успехи математических наук, 17:2(104): 13–75.

9. Вайнберг М. М., Айзенгендлер П. Г. 1966. Методы исследования в теории разветвления решений. Итоги науки. Серия Математика. Математический анализ. 1965. М., ВИНИТИ, 7–69.

10. Волгина В. Н., Тюлина И. А. 2001. Александр Иванович Некрасов. 1883-1957. Отв. ред. В.П. Карликов. М: Наука, 102.

11. Ворович И. И., Хапланов М. Г. 1963. О работах ростовских математиков за последние годы. Успехи математических наук, 18:2(110) : 211–233.

12. Гуревич М. И. 1970. Теория струй. Механика в СССР за 50 лет. Том 2. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 5-36.

13. Гуревич М. И. 1979. Теория струй идеальной жидкости. Предисловие Л.И. Седова, Г.Ю. Степанова. 2-е изд., переработанное и дополненное. М. : Наука, 536.

14. Красносельский М. А. 1950. Исследования по нелинейному функциональному анализу. Автореферат докторской диссертации. Киев, Ин-т математики АН УССР, 1-21.

15. Красносельский М. А. 1956. Об уравнении Некрасова в теории волн на поверхности тяжёлой жидкости. Доклады Академии наук СССР, 109 (3) : 456-459.

16. Красносельский М.А. 1956 a. Топологические методы в теории интегральных уравнений. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 392.

17. Красносельский М. А., Крейн С. Г., Мышкис А. Д. 1957. Расширенные заседания Воронежского семинара по функциональному анализу в марте 1957 г. Успехи математических наук, 12:4(76): 241–250.

18. Красовский Ю. П. 1960. К теории установившихся волн немалой амплитуды. Доклады Академии наук СССР, 130(6): 1237–1240.

19. Красовский Ю. П. 1961. К теории установившихся волн конечной амплитуды. Журнал вычислительной математики и математической физики 1(5): 836–855.

20. Крейн М. Г., Рутман М. А. 1948. Линейные операторы, оставляющие инвариантным конус в пространстве Банаха. Успехи математических наук, 3:1(23) : 3–95.

21. Лапко А. Ф., Люстерник Л. А. 1957. Математические съезды и конференции в СССР. Успехи математических наук, 12:6(78): 47–130.

22. Люстерник Л. А. 1967. Молодость Московской математической школы. Успехи математических наук, 22:1(133): 137–161.

23. Марк Александрович Красносельский. К 80-летию со дня рождения. Сб. статей. М.: Институт проблем передачи информации РАН, 2000, 216.

24. Назаров Н.Н. 1941. Нелинейные интегральные уравнения типа Гаммерштейна. Труды Среднеазиатского гос. ун-та. Серия V-a, Математика, 33: 1-79.

25. Назаров Н.Н. 1945. Методы решения нелинейных интегральных уравнений типа Гаммерштейна. Труды Среднеазиатского гос. ун-та. Серия 6, физико-математические науки, 3-14.

26. Некрасов А. И. 1919. О волне Стокса. Известия Иваново-Вознесенского политехнического ин-та, 2: 81-89.

27. Некрасов А. И. 1921. О волнах установившегося вида. Известия Иваново-Вознесенского политехнического ин-та, 3: 52-65.

28. Некрасов А. И. 1922. О прерывном течении жидкости в двух измерениях вокруг препятствия в форме дуги круга. Известия Иваново-Вознесенского политехнического ин-та, 5: 3-19.

29. Некрасов А. И. 1922 a. О волнах установившегося вида на поверхности тяжёлой жидкости. Научные известия Академического центра Народного Комиссариата Просвещения. Физика, 3: 128-138.

30. Некрасов А. И. 1922 b. О волнах установившегося вида, гл.2. О нелинейных интегральных уравнениях. Известия Иваново-Вознесенского политехнического ин-та, 6: 155-171.

31. Некрасов А. И. 1922 c. О нелинейных интегральных уравнениях с постоянными пределами. Известия Физического института при Московском научном институте и Института биологической физики при Народном комиссариате здравоохранения, 2: 221-238.

32. Некрасов А. И. 1928. О волнах установившегося вида на поверхности тяжёлой жидкости (конечной глубины). Труды Всероссийского математического съезда 1927 г. в Москве. М.-Л., 258-262.

33. Некрасов А. И. 1947. Обзор работ автора по аэрогидромеханике. Известия Академии наук СССР. Отделение технических наук, 10: 1265-1270.

34. Некрасов А. И. 1951. Точная теория волн установившегося вида на поверхности тяжелой жидкости. М. : Изд-во Академии наук СССР, 96.

35. Некрасов А. И. 1961. Собрание сочинений, Т. 1. Отв. ред. Я.И. Секерж-Зенькович. М.: Изд-во Академии наук СССР, 444.

36. Немыцкий В. В., Степанов В. В. 1947. Качественная теория дифференциальных уравнений. М.-Л.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 448.

37. Моисеев Н. Н. 1957. О течении тяжелой жидкости над волнистым дном. Прикладная математика и механика, 21(1): 15-20.

38. Покорный В. В. 1958. О сходимости формальных решений нелинейных интегральных уравнений. Доклады Академии наук СССР, 120(4): 711–714.

39. Покорный В.В. 1956. Об аналитичности решений некоторых нелинейных уравнений. Труды семинара по функциональному анализу, 2: 39-45.

40. Покорный В. В. 1960. О двух аналитических методах в теории малых решений нелинейных интегральных уравнений. Доклады Академии наук СССР, 133(5) : 1027–1030.

41. Седов Л. И. 1939. Приложение теории функций комплексного переменного к некоторым задачам плоской гидродинамики. Успехи математических наук, 6: 120–182.

42. Секерж-Зенькович Я. И. 1960. Александр Иванович Некрасов (к 75-летию со дня рождения). Успехи математических наук, 15(1): 153-162 .

43. Смирнов Н. С. 1936. Введение в теорию нелинейных интегральных уравнений. Л.-М., Объединённое научно-техническое издательство, 124.

44. Bogatov E. M. 2020. On the history of variational methods of non-linear equations investigations and the contribution of Soviet scientists (1920s-1950s). Antiquitates Mathematicae, 14: 1-36.

45. Gerber R. 1955. Sur les solutions exactes des équations du mouvement avec surface libre d'un liquide pesant: theses. Université Joseph-Fourier-Grenoble I, 128.

46. Hammerstein A. 1930. Nichtlineare Integralgleichungen nebst Anwendungen. Acta Mathematica, 54: 117–176.

47. Hyers D. H. 1964. Some nonlinear integral equations of hydrodynamics. Nonlinear Integral Equations. (P. M. Anselone, ed.), Madison, University of Wisconsin Press, 319-344.

48. Jolas P. 1962. Contribution à l'étude des oscillations périodiques des liquides pesants avec surface libre. Grenoble, La Houille Blanche, 5: 635-655
49. Kuznetsov N. 2021. A tale of two Nekrasov's integral equations. Water Waves, 1-29.
50. Leray J. 1935 a. Les problèmes de représentation conforme d'Helmholtz; théories des sillages et des proues I. Commentarii Mathematici Helvetici, 8 (1): 149-180.
51. Leray J. 1935 b. Les problèmes de représentation conforme d'Helmholtz; théories des sillages et des proues II. Commentarii Mathematici Helvetici, 8 (1): 250-263.
52. Leray J., Schauder J. 1934 Topologie et équationss fonctionnelles. Annales Scientifiques de l' École Normale Supérieure, 61 : 45-73.
53. Levi-Civita T. 1907. Sulla resistenza d'attrito. Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, 23 : 1-37.
54. Levi-Civita T. 1922. Qüestions de mecànica clàssica i relativista: conferències donades el gener de 1921. Barcelona, Institut d'estudis catalans, 151.
55. Levi-Civita T. 1925. Détermination rigoureuse des ondes permanentes d'ampleur finie. Mathematische Annalen, 93 (1): 264-314.
56. Liapunoff A. M. 1903. Recherches dans la théorie de lafigures des corps célestes. Mémoires de l'Académie impériale des sciences de St. Pétersbourg. 8-me Série, 14 (7) : 1-37.
57. Liapounoff A. 1905. Sur un probléme de Tchebycheff. Mémoires de l'Académie impériale des sciences de St. Pétersbourg. 8-me Série, 17 (3) : 1-31.
58. Lichtenstein L. 1931. Vorlesungen über einige Klassen nichtlinearer Integralgleichungen und Integro-Differentialgleichungen nebst Anwendungen. Berlin, Julius Springer, 164.
59. Mawhin J. 2006. Le théorème du point fixe de Brouwer: Un siècle de métamorphoses. Sciences et Techniques en Perspective, Blanchard, 10 (1-2): 175–220.
60. Schmidt E. 1907. Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen. II. Teil. Auflösung der allgemeinen linearen Integralgleichung. Mathematische Annalen, 64:161-174.
61. Schmidt E. 1908. Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen. III. Teil. Über die Auflösung der nichtlinearen Integralgleichung und die Verzweigung ihrer Lösungen. Mathematische Annalen, 65(3): 370-399.
62. Stoker J. J. 1957. Water Waves. The Mathematical Theory with Applications. New York, Interscience Publ. Inc., 609.
63. Tazzioli R. 2017. D'Alembert's paradox, 1900–1914: Levi-Civita and his Italian and French followers. Comptes Rendus Mécanique, 345 (7): 488-497.
64. Villat H. 1911. Sur la résistance des fluides. Annales scientifiques l' École Normale Supérieure, 28 : 203-311.

References

1. Akhmedov K. T. 1957. The analytic method of Nekrasov–Nazarov in non-linear analysis. Uspekhi Mat. Nauk, 12:4(76): 135–153.
2. Bakhtin I. A., Krasnosel'skii M. A. 1955. On the problem of longitudinal bending of a rod of variable stiffness. Dokl. Akad. Nauk SSSR, 105 (4) : 621-624. (in Russian).
3. Bogatov E. M. 2020. On the history of variational methods of non-linear equations investigations and the contribution of Soviet scientists (1920s-1950s). Antiq. Math., 14: 1-36.
4. Bogatov E. M. 2020 a. On the history of the positive operators (1900s-1960s) and the contribution of M. A. Krasnosel'skii. Scientific bulletin of BelSU. Ser. Appl. Mat. Phys., 52 (2) : 105-127. (in Russian).
5. Bogatov E. M. 2020 b. On the history of the equation $\Delta u = ke^u$ and the contribution of domestic scientists. Surveys on Applied and Industrial Maths., 27 (1): 67-69.(in Russian).
6. Bogatov E. M. 2021. On the development of the theory of nonlinear integral equations in the works of A. I. Nekrasov. Modern methods of the theory of boundary value problems: materials International. conf.: Voronezh Spring Mathematical School Pontryagin Readings - XXXII (May 3-9, 2021), Voronezh, VSU Publishing House, 42-45. (In Russian).

7. Bogatov E. M., Mukhin R. R. 2015. On the relationship between nonlinear analysis, bifurcations and nonlinear dynamics: on the example of the Voronezh school of nonlinear functional analysis. Izvestiya VUZ. Applied nonlinear dynamics, 23 (6) : 74-88.(in Russian).

8. Bogatov E. M., Mukhin R. R. 2021 On the development of nonlinear integral equations at an early stage and the contribution of Russian mathematicians. Chebyshevskii Sbornik, 3. (To appear in Russian).

9. Vainberg M. M., Trenogin V. A. 1962. The methods of Lyapunov and Schmidt in the theory of non-linear equations and their further development. Russian Math. Surveys, 17:2: 1–60.

10. Vainberg M. M., Aizengendler P. G. 1966. Methods of investigation in the theory of branching of solutions. Moscow, Itogi Nauki. Ser. Matematika. Mat. Anal. 1965, VINITI, 7–69. (in Russian).

11. Volgina V. N., Tyulina I. A. 2001. Aleksandr Ivanovich Nekrasov 1883-1957. Moscow, Nauka, 102.

12. Vorovich I. I., Khaplanov M. G. 1963. On the work of mathematicians of Rostov for the last years. Uspekhi Mat. Nauk, 18:2(110) : 211–233. (in Russian).

13. Gurevich M. I. 1970. Teoriya struj . Mekhanika v SSSR za 50 let. Tom 2. Mekhanika zhidkosti i gaza. [Jet Theory. Mechanics in the USSR for 50 years. Volume 2. Mechanics of liquid and gas]. Moscow: Nauka, 5-36.

14. Gurevich M. I. 2014.The theory of jets in an ideal fluid. Pure and Applied Mathematics, Vol. 39. London, Elsevier, 602.

15. Krasnoselskii M. A. 1950. Issledovaniya po nelinejnomu funkcional'nomu analizu. [Research in nonlinear functional analysis]. Abstract of doctoral dissertation. Institute of Mathematics. Academy of Sciences of the Ukrainian SSR. Kiev, 1-21.

16. Krasnoselskii M. A. 1956. Ob uravnenii Nekrasova v teorii voln na poverhnosti tyazhyoloj zhidkosti [On the Nekrasov equation in the theory of waves on the surface of a heavy liquid]. Dokl. Akad. Nauk SSSR, 109: 456-459.

17. Krasnosel'skii M. A. 1956 a. Topologicheskie metody v teorii integral'nyh uravnenii, Moscow, GITL, 392. English translation: Topological methods in the theory of integral equations. International Series of Monographs on Pure and Applied Mathematics, Vol. 45, Oxford/ London/New York/Paris, Pergamon Press. 1964.

18. Krasnosel'skii M. A., Krein S. G., Myshkis A. D. 1957. Enlarged Session of Voronezh Seminar on Functional Analysis, March 1957. Uspekhi Mat. Nauk, 12:4(76) : 241–250. (in Russian).

19. Krasovskii Yu. P. 1960. The theory of steady-state waves of large amplitude. Dokl. Akad. Nauk SSSR, 130 (6) : 1237–1240. (in Russian).

20. Krasovskii Yu. P. 1962. On the theory of steady-state waves of finite amplitude. U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys., 1(4) : 996–1018.

21. Krein M. G., Rutman M. A. 1948. Linear operators leaving invariant a cone in a Banach space. Uspekhi Mat. Nauk, 3:1(23) : 3–95 (in Russian).

22. Lapko A. F., Lyusternik L. A. 1957. Mathematical sessions and conferences in the USSR. Uspekhi Mat. Nauk, 12:6 (78): 47–130. (in Russian).

23. Lyusternik L. A. 1967. The early years of the Moscow Mathematics School. Russian Math. Surveys, 22 (1) : 133–157.

24. Mark Aleksandrovich Krasnosel'skij. K 80-letiyu so dnya rozhdeniya. Sb. Statej [On the occasion of the 80th birthday. Digest of articles]. 2000. Moscow: Institut problem peredachi informacii RAN, 216.

25. Nazarov N.N. 1941. Nonlinear integral equations of Hammerstein's type. Acta Universitatis Asiae Mediae, ser. V-a, Mathematicae, 33: 1-79 (in Russian).

26. Nazarov N. N. 1945 Metody reshenija nelinejnyh integral'nyh uravnenij tipa Gammershtejna [Methods for solving nonlinear integral equations of Hammerstein type]. Acta Universitatis Asiae Mediae, new ser., 6: 3-14.

27. Nekrasov A. I. 1919. O volne Stoksa [On Stokes' wave]. Izvestia Ivanovo-Voznesensk. Politekhn. Inst. 2: 81-89.

28. Nekrasov A. I. 1921. O volnah ustanovivshegosya vida [On steady-state waves]. Izv. Ivanovo-Voznesensk. Politehn Inst., 3: 52-65.

29. Nekrasov A. I. 1922. O preryvnom techenii zhidkosti v dvuh izmereniyah vokrug prepyatstviya v forme dugi kruga [Discontinuous flow of fluid in two dimensions around an obstacle in the form of an arc of a circle]. Izv. Ivanovo-Voznesensk. Politehn Inst., 5: 3-19.

30. Nekrasov A. I. 1922a. O volnah ustanovivshegosya vida na poverhnosti tyazhyoloj zhidkosti [On waves of permanent type on the surface of a heavy fluid]. Nauch. Izvestia Akad. Tsentra Narkomprosa. Physics, 3:128-138.

31. Nekrasov A. I. 1922b. O volnah ustanovivshegosja vida, gl.2. O nelinejnyh integral'nyh uravnenijah [On steady waves. Part 2, On nonlinear integral equations]. Izvestia Ivanovo-Voznesensk. Politekhn. Inst., 6: 155-171.

32. Nekrasov A. I. 1922c. O nelinejnyh integral'nyh uravneniyah s postoyannymi predelami [Nonlinear integral equations with constant limits]. Bulletin of Physics Institute at Moscow Scientific Institute and Institute of Biological Physics at People's Commissariat of Health, 2: 221-238. (In Russian).

33. Nekrasov A. I. 1928 O volnah ustanovivshegosya vida na poverhnosti tyazhyoloj zhidkosti (konechnoj glubiny) [On steady-state waves on the surface of a heavy liquid (finite depth)]. Moscow-Leningrad, Proc. All-Russian. Math. Congress of 1927 in Moscow, 258-262.

34. Nekrasov A. I. 1947. Obzor rabot avtora po aerogidromekhanike [Review of the author's work on aerohydromechanics]. Izv. Acad. Sci. USSR. Department of Engineering Sciences, 10: 1265-1270 (in Russian).

35. Nekrasov A. I. 1951. Tochnaya teoriya voln ustanovivshegosya vida na poverhnosti tyazheloj zhidkosti [The Exact Theory of Steady Waves on the Surface of a Heavy Fluid]. Moscow, Izdat. Akad. Nauk SSSR, 96; translated as University of Wisconsin MRC Report No. 813 (1967).

36. Nekrasov A. I. 1961. Collected Papers, I. Moscow, Izdat. Akad. Nauk SSSR, 444.

37. Nemytskii V. V., Stepanov V. V. 1989. Qualitative Theory of Differential Equations. New York, Dover Publication Inc., 523.

38. Moiseev N. N. 1957. O techenii tyazheloj zhidkosti nad volnistym dnom [About the flow of heavy fluid over a wavy bottom] Prikladnaya matematika i mekhanika, 21 (1): 15-20.

39. Pokornyj V. V. 1956. Ob analitichnosti reshenij nekotoryh nelinejnyh uravnenij [On the analyticity of solutions of some nonlinear equations]. Tr. seminara po funkc. analizu, 2: 39-45.

40. Pokornyj V. V. 1958. Convergence of formal solutions of nonlinear integral equations. Dokl. Akad. Nauk SSSR, 120 (4):711–714. (in Russian).

41. Pokornyj V. V. 1960. Two analytic methods in the theory of small solutions of nonlinear integral equations. Dokl. Akad. Nauk SSSR, 133(5):1027–1030. (in Russian).

42. Sedov L. I. 1939. Application of the theory of functions of a complex variable to some problems of the plane hydrodynamics. Uspekhi Mat. Nauk, 6: 120–182. (In Russian).

43. Sekerzh-Zen'kovich Ya. I. 1960. Aleksandr Ivanovich Nekrasov (on the 75th anniversary of his birth). Uspekhi Mat. Nauk, 15:1(91): 153–162. (In Russian).

44. Smirnov N. S. 1936. Vvedenie v teoriju nelinejnyh integral'nyh uravnenij [Introduction to the theory of nonlinear integral equations]. Moscow-Leningrad, ONTI, 124.

45. Gerber R. 1955. Sur les solutions exactes des équations du mouvement avec surface libre d'un liquide pesant: theses. Université Joseph-Fourier-Grenoble I, 128.

46. Hammerstein A. 1930. Nichtlineare Integralgleichungen nebst Anwendungen. Acta Math. 54: 117–176.

47. Hyers D.H. 1964. Some nonlinear integral equations of hydrodynamics. Nonlinear Integral Equations. (P. M. Anselone, ed.), Madison, University of Wisconsin Press, 319-344.

48. Jolas P. 1962. Contribution à l'étude des oscillations périodiques des liquides pesants avec surface libre. Grenoble, La Houille Blanche, 5: 635-655

49. Kuznetsov N. 2021. A tale of two Nekrasov's integral equations. Water Waves, 1-29.

50. Leray J. 1935 a. Les problèmes de représentation conforme d'Helmholtz; théories des sillages et des proues I. Commentarii Mathematici Helvetici, 8 (1): 149-180.
51. Leray J. 1935 b. Les problèmes de représentation conforme d'Helmholtz; théories des sillages et des proues II. Commentarii Mathematici Helvetici, 8 (1): 250-263.
52. Leray J., Schauder J. 1934 Topologie et équationss fonctionnelles. Annales Scientifiques de l' École Normale Supérieure, 61 : 45-73.
53. Levi-Civita T. 1907. Sulla resistenza d'attrito. Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, 23 : 1-37.
54. Levi-Civita T. 1922. Qüestions de mecànica clàssica i relativista: conferències donades el gener de 1921. Barcelona, Institut d'estudis catalans, 151.
55. Levi-Civita T. 1925. Détermination rigoureuse des ondes permanentes d'ampleur finie. Mathematische Annalen, 93 (1): 264-314.
56. Liapunoff A.M. 1903. Recherches dans la théorie de lafigures des corps célestes. Mémoires de l'Académie impériale des sciences de St. Pétersbourg. 8-me Série, 14 (7) : 1-37.
57. Liapounoff A. 1905. Sur un probléme de Tchebycheff. Mémoires de l'Académie impériale des sciences de St. Pétersbourg. 8-me Série, 17 (3) : 1-31.
58. Lichtenstein L. 1931. Vorlesungen über einige Klassen nichtlinearer Integralgleichungen und Integro-Differentialgleichungen nebst Anwendungen. Berlin, Julius Springer, 164.
59. Mawhin J. 2006. Le théorème du point fixe de Brouwer: Un siècle de métamorphoses. Sciences et Techniques en Perspective, Blanchard, 10 (1-2): 175–220.
60. Schmidt E. 1907. Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen. II. Teil. Auflösung der allgemeinen linearen Integralgleichung. Mathematische Annalen, 64:161-174.
61. Schmidt E. 1908. Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen. III. Teil. Über die Auflösung der nichtlinearen Integralgleichung und die Verzweigung ihrer Lösungen. Mathematische Annalen, 65(3): 370-399.
62. Stoker J. J. 1957. Water Waves. The Mathematical Theory with Applications. New York, Interscience Publ. Inc., 609.
63. Tazzioli R. 2017. D'Alembert's paradox, 1900–1914: Levi-Civita and his Italian and French followers. Comptes Rendus Mécanique, 345 (7): 488-497.
64. Villat H. 1911. Sur la résistance des fluides. Annales scientifiques l' École Normale Supérieure, 28 : 203-311.

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.
Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Получена 04.09.2021

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Богатов Егор Михайлович – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры высшей математики и информатики Старооскольского технологического института (филиала) Национального исследовательского технологического университета «МИСиС»

http://orcid.org/0000-0002-4897-0394

мкр. Макаренко, 42., г. Старый Оскол, 309516, Россия;

Доцент кафедры горного дела филиала Национального исследовательского технологического университета «МИСиС» в г. Губкине Белгородской области

ул. Комсомольская, 16, г. Губкин, 309180, Россия

E-mail: embogatov@inbox.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Egor M. Bogatov – PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Higher Mathematics and Informatics of the Starooskol Technological Institute (branch) of the National Research Technological University «MISiS », Stary Oskol, Russia;

Associate Professor of the Department of Mining of the branch of the National Research Technological University "MISiS"in the city of Gubkin, Belgorod Region, Gubkin, Russia

Прикладная математика & Физика, 2021, том 53, №3. С. 230–234.

УДК 517.55 DOI 10.52575/2687-0959-2021-53-3-230-234
MSC 32A05.

ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ФОРМУЛЫ ДЕКАРТА – ЭЙЛЕРА ДЛЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОЙ СТЕПЕНИ

Е. Н. Михалкин

(*Статья представлена членом редакционной коллегии С. М. Ситником*)

Сибирский федеральный университет,
Красноярск, 660041, Россия

E-mail: mikhalkin@bk.ru

Аннотация. В настоящее время развитие алгоритмических и компьютерных методов приводит к уточнению формул для решения полиноминальных уравнений. Рассматривается алгебраическое уравнение степени четыре с одним параметром. Такое уравнение принято называть триноминальным. Для него известны методы решения, известные как методы Феррари и Декарта – Эйлера. Используется подход, основанный на интегральном представлении Меллина и Белардинелли, а также использовании обратного преобразования Меллина. Доказывается формула Декарта – Эйлера для решения рассматриваемого уравнения с использованием аппарата гипергеометрических функций.

Ключевые слова: алгебраическое уравнение, гипергеометрический ряд, интеграл Меллина – Барнса.

Благодарности: Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ в рамках мероприятий по созданию и развитию региональных НОМЦ (Соглашение 075-02-2020-1534/1).

Для цитирования: Михалкин Е. Н. 2021. Гипергеометрическая интерпретация формулы Декарта – Эйлера. Прикладная математика & Физика. 53(3): 230–234. DOI 10.52575/2687-0959-2021-53-3-230-234.

HYPERGEOMETRIC INTERPRETATION OF THE DESCARTES-EULER FORMULA TO SOLVE THE FOURTH DEGREE EQUATION

Evgeniy Mikhalkin

(*Article submitted by a member of the editorial board S. M. Sitnik*)

Siberian Federal University, Krasnoyarsk, 660041, Russia
E-mail: mikhalkin@bk.ru
Received September, 4, 2020

Abstract. In modern mathematics by development of algorithmic and computer methods formulas for solving polynomial equations are considered in more details. In the paper a polynomial equation of fourth power with one parameter is considered. Such equations are called trinomial. For it such methods of solution are known as methods of Ferrari, Descartes and Euler. An approach is used based on Mellin and Belardinelli integral representations, and also usage of the inverse Mellin transform. As a main result the formula is proved for solutions obtained by Euler – Descartes method with representations of series for hypergeometric functions.

Key words: Algebraic equation. Hypergeometric series. Mellin-Barnes integral.

Acknowledgements: This work is supported by the Krasnoyarsk Mathematical Center and financed by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation in the framework of the establishment and development of regional Centers for Mathematics Research and Education (Agreement No. 075-02-2020-1534/1).

For citation: Mikhalkin E. 2021. Hypergeometric interpretation of the Descartes – Euler formula. Applied Mathematics & Physics. 53(3): 230–234. (in Russian) DOI 10.52575/2687-0959-2021-53-3-230-234.

1. Введение. В настоящее время известны несколько формул для решения алгебраического уравнения четвертой степени. В литературе наиболее известной из них является формула Феррари [3]. Менее известной из таких формул осталась формула (метод) Декарта – Эйлера.

Напомним суть метода Декарта – Эйлера [2]. Как известно, алгебраическое уравнение четвертой степени с помощью линейной замены сводится к уравнению

$$y^4 + ay^2 + by + c = 0, \tag{1}$$

т. е. к уравнению, в котором отсутствует моном при третьей степени. Далее находятся корни z_0, z_1 z_2 кубического уравнения $z^3 + \frac{a}{2}z^2 + \frac{a^2-4c}{16}z - \frac{b^2}{64} = 0$. В итоге корни уравнения (1) выражаются через z_0, z_1 z_2 по формуле $\sqrt{z_0} + \sqrt{z_1} + \sqrt{z_2}$.

Формула Декарта – Эйлера была доказана с применением алгебраических методов. В частности, Эйлер для ее доказательства использовал свойства симметрических функций.

В настоящей статье выявляется происхождение радикалов $\sqrt{z_0}$, $\sqrt{z_1}$, $\sqrt{z_2}$ в формуле Декарта – Эйлера на языке обобщенных гипергеометрических рядов для уравнения с одним параметром. Как следствие, дается альтернативное доказательство этой формулы с использованием аппарата гипергеометрических рядов.

2. Интегральные представления Меллина и Белардинелли. Любое алгебраическое уравнение степени n с помощью элементарных преобразований сводится к следующему приведенному виду

$$y^n + x_s y^{n_s} + \ldots + x_1 y^{n_1} - 1 = 0, \tag{2}$$

где $0 = n_0 < n_1 < \ldots < n_s < n_{s+1} = n$. В 1921 г. Меллином [6] было найдено интегральное представление, а также разложение в гипергеометрический ряд для решения $y(x) = y(x_1, \ldots, x_s)$ этого уравнения с условием $y(0) = 1$. Такое решение Меллин назвал *главным* решением уравнения (2), мы будем его обозначать $y_0(x)$. Все остальные решения находятся из главного по формуле

$$y_j(x) = \varepsilon^j y(x_1 \varepsilon^{jn_1}, \ldots, x_s \varepsilon^{jn_s}), \ j = 1, \ldots, n-1,$$

где $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ — первообразный корень из 1 степени n. Отметим, что главное решение соответствует значению $j = 0$.

Меллин привел формулы не только для главного решения $y_0(x)$, но и для любой его положительной степени. Так, гипергеометрический ряд для степени $\mu > 0$ следующий:

$$y_0^{\mu}(x) = \frac{\mu}{n} \sum_{k \in \mathbb{Z}^s_{\geq 0}} \frac{(-1)^{|k|}\, \Gamma\left(\frac{\mu}{n} + \frac{n_1}{n}k_1 + \ldots + \frac{n_s}{n}k_s\right)}{k_1! \ldots k_s!\, \Gamma\left(\frac{\mu}{n} - \frac{n'_1}{n}k_1 - \ldots - \frac{n'_s}{n}k_s + 1\right)} x_1^{k_1} \ldots x_s^{k_s}, \tag{3}$$

где Γ обозначает гамма-функцию Эйлера, $k = (k_1, \ldots, k_s)$, а $n'_j = n - n_j$. Ряд (3) сходится в некоторой окрестности начала координат $x = 0$.

Перейдем к отрицательной степени решения (2). В статье [5] была указана формула для отрицательной степени главного решения уравнения (2) в виде интеграла Меллина – Барнса. Эта интегральная формула имеет следующий вид:

$$\frac{1}{y_0^{\mu}(x)} = \frac{1}{(2\pi i)^s} \int\limits_{\gamma + i\mathbb{R}^s} \frac{\frac{\mu}{n}\Gamma\left(\frac{\mu}{n} - \frac{n'_1}{n}z_1 - \ldots - \frac{n'_s}{n}z_s\right)\Gamma(z_1)\ldots\Gamma(z_s)}{\Gamma\left(\frac{\mu}{n} + \frac{n_1}{n}z_1 + \ldots + \frac{n_s}{n}z_s + 1\right)} (-x)^{-z} dz, \tag{4}$$

здесь γ – точка из симплекса $\sigma = \{u \in \mathbb{R}^s_+ : n'_1 u_1 + \ldots + n'_s u_s < \mu\}$.

3. Доказательство формулы Декарта – Эйлера для триномиального уравнения с помощью гипергеометрических рядов. В этом параграфе мы докажем формулу Декарта – Эйлера для решения $z(t)$ уравнения

$$z^4 + tz - 1 = 0. \tag{5}$$

Следуя методу Декарта – Эйлера, описанному во введении, для нахождения корней уравнения (5) нужно сначала решить кубическое уравнение

$$64r^3 + 16r - t^2 = 0. \tag{6}$$

Далее показать, что корни исходного уравнения выражаются через корни r_0, r_1, r_2 уравнения (6) по формуле

$$z(t) = r_0(t)^{\frac{1}{2}} + r_1(t)^{\frac{1}{2}} + r_2(t)^{\frac{1}{2}}.$$

Напомним, что *обобщенным гипергеометрическим (неконфлуэнтным) рядом Гаусса* называется степенной ряд

$${}_nF_{n-1}\left(\begin{matrix}\alpha_1, \ldots, \alpha_n \\ \beta_1, \ldots, \beta_{n-1}\end{matrix} \middle| y\right) = \frac{\Gamma(\beta_1)\ldots\Gamma(\beta_{n-1})}{\Gamma(\alpha_1)\ldots\Gamma(\alpha_n)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+\alpha_1)\ldots\Gamma(k+\alpha_n)}{k!\Gamma(k+\beta_1)\ldots\Gamma(k+\beta_{n-1})} y^k,$$

где $\Gamma(x)$ – гамма-функция Эйлера. Областью сходимости этого ряда является единичный круг $|y| < 1$ (см. [1], с. 183).

Согласно [4], главное решение $z_0(t)$ уравнения (5) допускает представление в виде линейной комбинации обобщенных гипергеометрических рядов Гаусса:

$$z_0(t) = {}_3F_2\left(\begin{matrix}\frac{7}{12}, -\frac{1}{12}, \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2}, \frac{3}{4}\end{matrix} \middle| -\frac{3^3}{4^4}t^4\right) - \frac{t}{4}\, {}_3F_2\left(\begin{matrix}\frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{5}{6} \\ \frac{3}{4}, \frac{5}{4}\end{matrix} \middle| -\frac{3^3}{4^4}t^4\right) - \frac{t^2}{32}\, {}_3F_2\left(\begin{matrix}\frac{5}{12}, \frac{3}{4}, \frac{13}{12} \\ \frac{5}{4}, \frac{3}{2}\end{matrix} \middle| -\frac{3^3}{4^4}t^4\right), \tag{7}$$

сходящихся при $|t| < \frac{4}{3^{\frac{3}{4}}}$. Мы покажем, что сумма $r_0(t)^{\frac{1}{2}} + r_1(t)^{\frac{1}{2}} + r_2(t)^{\frac{1}{2}}$, где r_0, r_1, r_2 – корни уравнения (6), тоже представима в виде суммы (7).

Для краткости письма введем обозначения

$$ {}_3F_2\left(\begin{matrix} \frac{7}{12}, -\frac{1}{12}, \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2}, \frac{3}{4} \end{matrix} \middle| -\frac{3^3}{4^4}t^4\right) =: {}_3F_2{}^{(0)}(t),\ {}_3F_2\left(\begin{matrix} \frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{5}{6} \\ \frac{3}{4}, \frac{5}{4} \end{matrix} \middle| -\frac{3^3}{4^4}t^4\right) =: {}_3F_2{}^{(1)}(t),\ {}_3F_2\left(\begin{matrix} \frac{5}{12}, \frac{3}{4}, \frac{13}{12} \\ \frac{5}{4}, \frac{3}{2} \end{matrix} \middle| -\frac{3^3}{4^4}t^4\right) =: {}_3F_2{}^{(2)}(t). $$

Определим корни уравнения (6) как ветви с условиями: $r_0(0) = \frac{i}{2}$, $r_1(0) = 0$, $r_2(0) = -\frac{i}{2}$. В этих обозначениях степени $r_j(t)^{\frac{1}{2}}$ допускают следующее представление.

Теорема 3.1. *В круге* $|t| < \frac{4}{3^{\frac{3}{4}}}$ *степени* $r_j(t)^{\frac{1}{2}}$, $j = 0, 1, 2$ *корней уравнения (6) выражаются через обобщенные гипергеометрические ряды по формулам:*

$$ r_0(t)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{\frac{\pi i}{4}}\,{}_3F_2{}^{(0)}(t) + \frac{e^{\frac{3\pi i}{4}}}{32}t^2\,{}_3F_2{}^{(2)}(t)\right),\ r_1(t)^{\frac{1}{2}} = \frac{t}{4}\,{}_3F_2{}^{(1)}(t), $$

$$ r_2(t)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{\frac{3\pi i}{4}}\,{}_3F_2{}^{(0)}(t) + \frac{e^{\frac{\pi i}{4}}}{32}t^2\,{}_3F_2{}^{(2)}(t)\right). $$

Доказательство теоремы основано на применении формул Белардинелли [5] и Меллина [6], представляющих решение уравнения

$$ y^3 + xy - 1 = 0, \tag{8} $$

к которому сводится (6) с помощью замены $y = \frac{4r}{t^{\frac{2}{3}}}$, $x = \frac{4}{t^{\frac{4}{3}}}$.

Заметим, что если $y_0(x)$ удовлетворяет (8), то для $y_0(x)^{\frac{1}{2}}$ справедливо следующее равенство:

$$ y_0^{\frac{1}{2}} = -\frac{x}{y_0^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{y_0^{\frac{5}{2}}}. \tag{9} $$

Согласно формуле (4), отрицательная степень уравнения (8) допускает представление в виде интеграла Меллина – Барнса

$$ \frac{1}{y_0(x)^{\mu}} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma+i\mathbb{R}} \frac{\frac{\mu}{3}\Gamma(\frac{\mu}{3} - \frac{2}{3}z)\Gamma(z)}{\Gamma(\frac{\mu}{3} + 1 + \frac{1}{3}z)}(-x)^{-z}\,dz, $$

где $\gamma + i\mathbb{R}$ – вертикальная прямая, разделяющая полюса гамма-функций, стоящих в числителе подынтегральной функции. Вычисляя последний интеграл как сумму вычетов со знаком "минус" в полюсах $z = \frac{\mu}{2} + \frac{3}{2}k$ (происходящих от $\Gamma(\frac{\mu}{3} - \frac{2}{3}z)$ и расположенных справа от контура интегрирования), получим

$$ \frac{1}{y_0(x)^{\mu}} = \frac{\mu}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\frac{\Gamma(\frac{3}{2}k + \frac{\mu}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}k + \frac{\mu}{2} + 1)}(-x)^{-\frac{3}{2}k - \frac{\mu}{2}}. $$

Подставляя найденные представления для $\frac{1}{y_0(x)^{\mu}}$ в (9) при $\mu = \frac{3}{2}$, $\mu = \frac{5}{2}$ и заменив во втором ряде $k \to k-1$, получим следующее представление для $y_0^{\frac{1}{2}}$:

$$ y_0(x)^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{4}(-x)^{\frac{1}{4}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\frac{\Gamma(\frac{3}{2}k + \frac{3}{4})}{\Gamma(\frac{1}{2}k + \frac{7}{4})}(-x)^{-\frac{3}{2}k} + \frac{5}{4}(-x)^{\frac{1}{4}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}\frac{\Gamma(\frac{3}{2}k - \frac{1}{4})}{\Gamma(\frac{1}{2}k + \frac{7}{4})}(-x)^{-\frac{3}{2}k}, $$

которое, после выделения общего множителя $\frac{(-1)^k}{(k-1)!}\frac{\Gamma(\frac{3}{2}k - \frac{1}{4})}{\Gamma(\frac{1}{2}k + \frac{7}{4})}(-x)^{-\frac{3}{2}k}$ приводится к виду

$$ y_0(x)^{\frac{1}{2}} = (-x)^{\frac{1}{4}} - \frac{1}{16}(-x)^{\frac{1}{4}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\frac{\Gamma(\frac{3}{2}k - \frac{1}{4})(2k+3)}{\Gamma(\frac{1}{2}k + \frac{7}{4})}(-x)^{-\frac{3}{2}k}. $$

После применения известной формулы для гамма-функции $\frac{\Gamma(z+1)}{z} = \Gamma(z)$, запишем выражение для $y_0(x)^{\frac{1}{2}}$ в наиболее кратком виде:

$$ y_0(x)^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{4}(-x)^{\frac{1}{4}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\frac{3}{2}k - \frac{1}{4})}{k!\Gamma(\frac{k}{2} + \frac{3}{4})}\frac{1}{(-x^3)^{\frac{k}{2}}}. \tag{10} $$

Далее представим последний ряд в виде суммы обобщенных гипергеометрических рядов. Для этого применим формулу Гаусса – Лежандра к гамма-функции, стоящей в числителе, а также к $k!$:

$$\Gamma\Big(\frac{3}{2}k-\frac{1}{4}\Big)=\frac{1}{2\pi\, 3^{\frac{1}{4}-\frac{3}{2}k}}\Gamma\Big(\frac{k}{2}-\frac{1}{12}\Big)\Gamma\Big(\frac{k}{2}-\frac{1}{12}+\frac{1}{4}\Big)\Gamma\Big(\frac{k}{2}-\frac{1}{12}+\frac{7}{12}\Big),$$

$$k!=\Gamma(k+1)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}\,2^{\frac{3}{2}-k}}\Gamma\Big(\frac{k}{2}+\frac{1}{2}\Big)\Gamma\Big(\frac{k}{2}+1\Big).$$

Теперь, представив $\frac{k}{2}=l+\frac{s}{2}$, где $s=0,1$, запишем ряд (10) в виде суммы двух гипергеометрических рядов

$$-\frac{1}{4}\frac{(-x)^{\frac{1}{4}}}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}\,3^{\frac{3}{4}}\,2^{\frac{1}{2}}}\sum_{s=0}^{1}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\Gamma(l+\frac{s}{2}-\frac{1}{12})\Gamma(l+\frac{s}{2}+\frac{1}{4})\Gamma(l+\frac{s}{2}+\frac{7}{12})}{\Gamma(l+\frac{s}{2}+\frac{1}{2})\Gamma(l+\frac{s}{2}+1)+\Gamma(l+\frac{s}{2}+\frac{3}{4})}(-1)^{-l-\frac{s}{2}}\Big(\frac{27}{4x^3}\Big)^{l+\frac{s}{2}}.$$

Так как при $s=0$ имеем $\Gamma(l+\frac{s}{2}+1)=l!$, а при $s=1$ получаем $\Gamma(l+\frac{s}{2}+\frac{1}{2})=l!$, то последнее выражение несложно привести к виду

$$-\frac{1}{4}(-x)^{\frac{1}{4}}\left(-4\,{}_3F_2\left(\begin{matrix}\frac{7}{12},-\frac{1}{12},\frac{1}{4}\\ \frac{1}{2},\frac{3}{4}\end{matrix}\,\middle|\,-\frac{27}{4x^3}\right)+\frac{1}{(-1)^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}}\,{}_3F_2\left(\begin{matrix}\frac{5}{12},\frac{3}{4},\frac{13}{12}\\ \frac{5}{4},\frac{3}{2}\end{matrix}\,\middle|\,-\frac{27}{4x^3}\right)\right),$$

приняв $\arg(-1)=\pi$, запишем представление для $y_0(x)^{\frac{1}{2}}$ в окончательном виде:

$$y_0(x)^{\frac{1}{2}}=x^{\frac{1}{4}}\left(e^{\frac{\pi i}{4}}\,{}_3F_2\left(\begin{matrix}\frac{7}{12},-\frac{1}{12},\frac{1}{4}\\ \frac{1}{2},\frac{3}{4}\end{matrix}\,\middle|\,-\frac{27}{4x^3}\right)+\frac{e^{\frac{3\pi i}{4}}}{4x^{\frac{3}{2}}}\,{}_3F_2\left(\begin{matrix}\frac{5}{12},\frac{3}{4},\frac{13}{12}\\ \frac{5}{4},\frac{3}{2}\end{matrix}\,\middle|\,-\frac{27}{4x^3}\right)\right). \quad (11)$$

Теперь заметим, что другую ветвь решения уравнения (8) можем найти по формуле

$$y_{0_j}(x)^{\frac{1}{2}}=\varepsilon_j^{\frac{1}{2}}y_0(\varepsilon_j x)^{\frac{1}{2}},$$

где $\varepsilon_j=e^{\frac{2\pi i}{3}j}$. Так, при $j=1$ получим формулу для другой ветви уравнения (8):

$$y_{0_1}(x)^{\frac{1}{2}}=x^{\frac{1}{4}}\left(e^{\frac{3\pi i}{4}}\,{}_3F_2\left(\begin{matrix}\frac{7}{12},-\frac{1}{12},\frac{1}{4}\\ \frac{1}{2},\frac{3}{4}\end{matrix}\,\middle|\,-\frac{27}{4x^3}\right)+\frac{e^{\frac{\pi i}{4}}}{4x^{\frac{3}{2}}}\,{}_3F_2\left(\begin{matrix}\frac{5}{12},\frac{3}{4},\frac{13}{12}\\ \frac{5}{4},\frac{3}{2}\end{matrix}\,\middle|\,-\frac{27}{4x^3}\right)\right). \quad (12)$$

Отметим, что значения $j=2,3$ определяют выражения для $y_{0_2}(x)^{\frac{1}{2}}$ и $y_{0_3}(x)^{\frac{1}{2}}$ со свойствами: $y_{0_2}(x)^{\frac{1}{2}}=-y_0(x)^{\frac{1}{2}}$, $y_{0_3}(x)^{\frac{1}{2}}=-y_{0_1}(x)^{\frac{1}{2}}$. Другими словами, $y_0(x)^{\frac{1}{2}}$ и $y_{0_2}(x)^{\frac{1}{2}}$ представляют одну из ветвей решения уравнения (8), а $y_{0_1}(x)^{\frac{1}{2}}$ и $y_{0_3}(x)^{\frac{1}{2}}$ – другую, и отличаются лишь знаками. В дальнейшем будем обозначать указанные ветви $y_0(x)^{\frac{1}{2}}$, $y_1(x)^{\frac{1}{2}}$, соответственно, и рассматривать их как двузначные функции.

Для нахождения оставшейся ветви решения уравнения (8) (обозначим ее $y_2(x)$) воспользуемся представлением Меллина в виде ряда (3), который для рассматриваемого уравнения принимает вид

$$y_2(x)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\frac{\Gamma(\frac{1}{2}+3k)}{\Gamma(2k+\frac{3}{2})}x^{-3k-\frac{1}{2}}.$$

Далее, рассуждая как и выше, несложно представить последний ряд в виде

$$y_2(x)^{\frac{1}{2}}=x^{-\frac{1}{2}}\,{}_3F_2\left(\begin{matrix}\frac{1}{6},\frac{1}{2},\frac{5}{6}\\ \frac{3}{4},\frac{5}{4}\end{matrix}\,\middle|\,-\frac{27}{4x^3}\right). \quad (13)$$

Теперь перейдем от уравнения (8) к (6) с помощью указанных выше формул: $y=\frac{4r}{t^{\frac{2}{3}}}$, $x=\frac{4}{t^{\frac{4}{3}}}$. В результате этого, выражение (11) для $y_0(x)^{\frac{1}{2}}$ преобразуется в $r_0(t)^{\frac{1}{2}}$, которое указано в формулировке теоремы, а выражения (12) и (13) для $y_{0_1}(x)^{\frac{1}{2}}$ и $y_2(x)^{\frac{1}{2}}$ примут, соответственно, вид $r_2(t)^{\frac{1}{2}}$ и $r_1(t)^{\frac{1}{2}}$. Тем самым, Теорема 3.1. доказана.

Обозначим однозначные ветви $(r_j)^{\frac{1}{2}}$, $j=0,1,2$ следующим образом:

$$r_0(t)^{\frac{1}{2}}_{\pm}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\Big(e^{\frac{\pi i}{4}}\,{}_3F_2{}^{(0)}(t)+\frac{e^{\frac{3\pi i}{4}}}{32}t^2\,{}_3F_2{}^{(2)}(t)\Big),\ r_1(t)^{\frac{1}{2}}_{\pm}=\mp\frac{t}{4}\,{}_3F_2{}^{(1)}(t),$$

$$r_2(t)^{\frac{1}{2}}_{\pm}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\Big(e^{-\frac{\pi i}{4}}\,{}_3F_2{}^{(0)}(t)+\frac{e^{-\frac{3\pi i}{4}}}{32}t^2\,{}_3F_2{}^{(2)}(t)\Big).$$

В этом случае сумма

$$r_0(t)_+^{\frac{1}{2}} + r_1(t)_+^{\frac{1}{2}} + r_2(t)_+^{\frac{1}{2}}$$

совпадает с правой частью (7), т. е. представляет собой главное решение первоначального уравнения (5).

Если учесть, что остальные решения этого уравнения получаются из главного по формуле

$$z_j(t) = e^{\frac{\pi i}{2}j} z(e^{\frac{\pi i}{2}j} t), \;\; j = 1, 2, 3,$$

то нетрудно записать остальные решения уравнения (5):

$$z_1(t) = r_0(t)_+^{\frac{1}{2}} + r_1(t)_-^{\frac{1}{2}} + r_2(t)_-^{\frac{1}{2}}, \;\; z_2(t) = r_0(t)_-^{\frac{1}{2}} + r_1(t)_+^{\frac{1}{2}} + r_2(t)_-^{\frac{1}{2}}, \;\; z_3(t) = r_0(t)_-^{\frac{1}{2}} + r_1(t)_-^{\frac{1}{2}} + r_2(t)_+^{\frac{1}{2}}.$$

Список литературы

1. Бейтмен Г., Эрдейи А. 1973. Высшие трансцендентные функции, Том 1. М., Наука, 296.
2. Корн Г., Корн Т. 2003. Справочник по математике для научных работников и инженеров. СПб, Лань, 832.
3. Курош А.Г. 2021. Курс высшей алгебры. СПб., Лань, 432.
4. Михалкин Е. Н. 2012. Некоторые формулы для решений триномиальных и тетраномиальных алгебраических уравнений. Журнал СФУ. Сер. Матем. и физ., 5(2): 230–238.
5. Belardinelli G. 1960. Fonctions hypergéométriques de plusieurs variables et résolution analytique des équations algébrigues générales. Paris: Gauthier-Villars. Memorial des Sciences Mathématiques, 74.
6. Mellin H. J. 1921. Résolution de l'équation algébrique générale à l'aide de la fonction gamma. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., 172: 658-661.

References

1. Beytmen G., Yerdeji A. 1973. Vysshie transtsendentnye functsii [Higher transcendental functions], Vol. 1. M., Nauka, 296.
2. Korn G., Korn T. 2003. Spravochnik po matematike dl'a nauchnyh rabotnikov i inzhenerov [Mathematical handbook for scientists and engineers]. SPb., Lan', 832.
3. Kurosh A. G. 2021. Kurs vysshey algebry [Course of higher algebra]. SPb., Lan', 432.
4. Mikhalkin E. N. 2012. Nekotorye formuly dl'a resheniy trinomial'nykh i tetranomial'nykh algebraicheskikh uravneniy [Certain formulas for solutions to trinomial and tetranomial algebraic equations]. Journal Siberian Fedederal University. Math. Phys., 5(2): 230–238.
5. Belardinelli G. 1960. Fonctions hypergéométriques de plusieurs variables et résolution analytique des équations algébrigues générales. Paris: Gauthier-Villars. Memorial des Sciences Mathématiques, 74.
6. Mellin H. J. 1921. Résolution de l'équation algébrique générale à l'aide de la fonction gamma. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., 172: 658-661.

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.
Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Получена 04.09.2021

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Михалкин Евгений Николаевич – доктор физико-математических наук, доцент, профессор, Сибирский федеральный университет

http://orcid.org/0000-0002-1410-9117
пр. Свободный, 79, Красноярск, 660041, Россия
E-mail: mikhalkin@bk.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Evgeny N. Mikhalkin – Doctor of Sciences Phys. Math., Associate Professor, Professor, Siberian Federal University, Krasnoyarsk, Russia

Прикладная математика & Физика, 2021, том 53, №3. С. 235–242.

ФИЗИКА. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 528.72; 629.7 DOI 10.52575/2687-0959-2021-53-3-235-242
MSC 90-10

КОРРЕКЦИЯ РЕЗКОСТИ КОСМИЧЕСКОГО ИЗОБРАЖЕНИЯ ПО МОДЕЛИ РЕЛЬЕФА АРЕАЛА

Ушакова Н. Н., Винтаев В. Н.

(*Статья представлена членом редакционной коллегии Ю. П. Вирченко*)

Белгородский университет кооперации, экономики и права,
г. Белгород, 308023 Россия

E-mail: natush2006@yandex.ru, viktor.vn2010@yandex.ru

Аннотация. Рассмотрен алгоритм коррекции резкости и пространственного разрешения по технологии обеспечения режима сверхвысокого разрешения на цифровом космическом изображении без привлечения физически реализуемых дополнительных каналов дистанционного зондирования. Алгоритм строится на применении метода возмущений в конечных разностях в зоне Фраунгофера для рассеяния падающего светового потока на цифровой модели рельефа, восстановленной по теням на исходном изображении. Коррекция резкости превентивно сопровождается синтезированием и оптимизацией частотно-контрастной характеристики тракта зондирования, сложившегося для данного изображения. Возможное превышение пространственно-частотной полосы результата над полосами участвующих в синтезе парциальных паттернов может квалифицироваться как сверхвысокое разрешение.

Ключевые слова: сверхвысокое разрешение, цифровое космическое изображение, цифровая модель рельефа, пространственно-частотный спектр.

Благодарности: Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ) в рамках научного проекта № 19-07-00697 «Разработка основ системного анализа и моделирования коррекции резкости космических изображений сверхвысокого разрешения на базе модернизации теоретико-типовых математических и семантических подходов для прогноза и реализации максимально возможных характеристик по пространственному разрешению».

Для цитирования: Ушакова Н. Н., Винтаев В. Н. 2021. Коррекция резкости космического изображения по модели рельефа ареала. Прикладная математика & Физика 53(3): 235–242. DOI 10.52575/2687-0959-2021-53-3-235-242.

CORRECTION OF THE SHARPNESS OF THE SPACE IMAGE BASED ON THE TERRAIN MODEL OF THE AREA

Natalia Ushakova , Viktor Vintaev

(*Article submitted by a member of the editorial board Yu. P. Virchenko*)

Belgorod University of Cooperation, Economics and Law,
Belgorod, 308023 Russia
E-mail: natush2006@yandex.ru, viktor.vn2010@yandex.ru
Received September, 4, 2021

Abstract. An algorithm for correcting sharpness and spatial resolution using the technology of providing ultra-high resolution mode on a digital space image without involving physically implemented additional remote sensing channels is considered. The algorithm is based on the application of the method of perturbations in finite differences in the Fraunhofer zone for scattering the incident light flux on a digital terrain model reconstructed from the shadows in the original image. The sharpness correction is preemptively accompanied by the synthesis and optimization of the frequency-contrast characteristic of the sensing path formed for this image. The possible excess of the spatial-frequency band of the result over the bands of the partial patterns involved in the synthesis can be qualified as an ultra-high resolution.

Key words: ultra-high resolution, digital space image, digital terrain model, spatial frequency spectrum.

Acknowledgments: The research was carried out with the financial support of the Russian Foundation for Basic Research (RFBR) in the framework of scientific project N 19-07-00697 "Development of the basics of system analysis and modeling of sharpness correction of ultra-high-resolution space images based on the modernization of model-theoretical mathematical and semantic approaches for predicting and implementing the maximum possible characteristics in spatial resolution".

For citation: Ushakova N. N., Vintaev V. N. 2021. Correction of the sharpness of the space image based on the terrain model of the area. Applied Mathematics & Physics. 53(3): 235–242. (in Russian). DOI 10.52575/2687-0959-2021-53-3-235-242.

1. Введение. Улучшение резкости на сформированном космическом изображении в работе осуществляется за счет согласованного с теоремой Котельникова о дискретизации функций уменьшения апертур пикселов с соответственным увеличением их плотности на паттерне (стимулируемого операторами деконволюции изображения) с подчеркиванием высших мод пространственных спектров объектов и несущих ареалов [11],[3]. При этом превышение пространственно-частотной полосы результата над полосами участвующих в синтезе парциальных паттернов может квалифицироваться как сверхвысокое разрешение.

Эти технологии сверхвысокого разрешения при формировании космического изображения развиты на современном этапе до уровня индустриальных методов. Спутники OrbView-3, Spot-5, Pleiades-1A, Pleiades-1B [17],[10],[12], например, осуществляют методы сверхвысокого разрешения на инициализации нескольких каналов дистанционного зондирования ареала, разнесенных один относительно другого по времени и/или в пространстве.

В контексте данной работы изображения рассматриваются как элементы конечномерного линейного пространства с функцией евклидовой нормы.

Радиусы пространственно-частотных спектров (ПЧС) результатов использования модели рассеяния света на цифровой модели рельефа (ЦМР) в коррекциях резкости демонстрируют возможность их увеличения в соответствии с аналогичными коррекциями на физически реализованных дополнительных каналах зондирования с формированием увеличенного объема дискретизирующих аналоговое изображение пикселов, что при индустриальном применении в коррекции резкости сулит эффект экономии из-за отказа от запусков дополнительных космических аппаратов или от методов изометрических повторов следов орбит аппаратов на поверхности Земли.

В настоящее время в литературе не встречается прецедента описания, где упоминается аналогичное использование модели рассеяния света на ЦМР зондируемого ареала в коррекции резкости, кроме публикаций статей и докладов авторов в ИКИ РАН РФ за последние несколько лет.

2. Методика проведения коррекции цифрового космического изображения. Объектом исследования данной работы являются следующие две сущности. С одной стороны, это космическое, сформированное постфактум изображение исследуемого ареала, преобразуемое в изображение с более высоким значением резкости, поддерживающее более высокое разрешение, значение которого не проектировалось изначально для выполнения орбитальной съемки [2] или подготовленное для дальнейшей тематической обработки [16]. С другой стороны, это метод формирования изображения со сверхвысоким разрешением, который не использует подходы получения и применения сдвинутых пикселов (субпикселов) на параллельных оптических системах, реализуемых на дублирующих полетах аппаратов и других методах дополнительной съемки исследуемого ареала.

На схеме (см. рис. 1) приведена реализация технологии сверхвысокого разрешения для двух выделенных строк сдвинутых субпиксельно растров изображений, т. е. сдвинутых на половину апертуры пиксела друг относительно друга по горизонтали. Приведенная схема поддерживается однозначностью решения системы уравнений для яркостей искомых пикселов сверхвысокого разрешения по отделенным цветовым (спектральным или кросс-спектральным) каналам [3],[7].

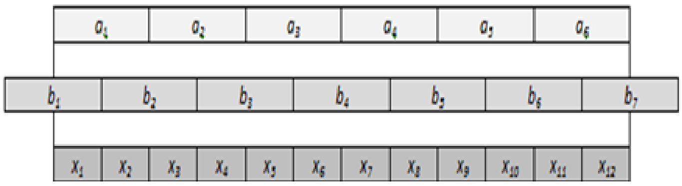

Рис. 1. Одномерный вариант реализации сверхвысокого разрешения
Fig. 1. One-dimensional implementation of ultra-high resolution

Здесь элементы $a_1 - a_6$, $b_1 - b_7$ соответствуют расположению и значениям яркостей в параллельном (или раздвоенном – условно параллельном) световом потоке при формировании двух изображений одного и того же ареала – пикселов чувствительного транспаранта (или приборов с зарядовой связью (ПЗС)), а $x_1 - x_{12}$ — это виртуальные пикселы, структурирующие в модели сверхвысокого разрешения световой поток на транспарант (или ПЗС) с удвоенной дискретизацией, значения яркости которых необходимо вычислить.

Выход b_1 и b_7 за пределы апертуры оптической системы на рисунке означает, что обеспечена их полная засветка. Таким образом, формируется полностью определенная система линейных уравнений для нахождения яркостей пикселов восстанавливаемого изображения в каждом из цветовых каналов:

$$\begin{cases} x_{2i-1} + x_{2i} = a_i \quad (i = 1, 6) \\ x_1 = b_1/2 \\ x_{2j} + x_{2j+1} = b_k \quad (j = 1, 5;\ k = 2, 6). \end{cases} \tag{1}$$

Погрешности в геометрических размерах пикселов ПЗС и погрешности размещения их центроидов в идеальной (гипотетической) матрице фотоприемного элемента суммируются с погрешностями совмещения изображений со сдвигом и с некорректно скомпенсированными погрешностями, вызванными орбитальным поведением оптической оси аппарата [6], порождая безуспешность детального учета погрешностей. Это приводит к снижению эффекта в улучшении резкости и пространственного разрешения в моделях сверхвысокого разрешения, который согласно схеме (см. рис. 1) и в решении соответствующих систем уравнений предварительно представлялся кратным двум. В работе [7], например, как и во многих других, это обстоятельство отражено в виде достижений по улучшению разрешения в 1,6-1,8 раз, а не в 2 раза, если делать выводы по идеальной схеме сверхвысокого разрешения. Кроме того, можно использовать приведенное ниже выражение [4]:

$$L = \frac{M}{2r} = \frac{hZ(y, \beta)}{2rf}, \tag{2}$$

где L — измеряемое по методу Рэлея в единицах длины возможное линейное разрешение на местности или апертура формируемого псевдопиксела на ареале; , h — соответственно, масштаб и высота наблюдения; $Z(y, \beta)$ — масштабный коэффициент при перспективном наблюдении; y — угол отклонения оптической оси от вертикали; β — текущий угол поля изображения; r — разрешающая способность носителя информации (вычисляемая по методу Фуко по верхней пространственной частоте изображения на носителе или определяемая, например, с помощью мирр и обеспечиваемая предпринимаемыми технологическими усилиями, в том числе и технологиями сверхвысокого разрешения); f — фокусное расстояние аппаратуры наблюдения космического аппарата (КА).

Формула (2) позволяет определить размеры псевдопиксела, позиционированного на зондируемой поверхности, а также размер пикселов на ПЗС. Целесообразно тем не менее учесть качество изготовления элементов оптики и недостаточную состоятельность методов компенсации орбитальных факторов, ухудшающих качество изображения при его формировании [6], т. е. учесть эффективную частотно-контрастную характеристику (ЧКХ) тракта формирования аппаратурой КА световых потоков: в связи с изложенным выше полоса «пропускания» пространственных мод у такой ЧКХ может оказаться невелика и попытки улучшения разрешения (за счет параметра r) приведут к уменьшению апертур псевдопикселов на ареале с отсутствием существенного улучшения разрешения по Рэлею и увеличения детальности на формируемом изображении зондируемого ареала.

Коррекцию резкости изображений целесообразно начинать с синтеза ЧКХ, сложившегося для данного изображения тракта зондирования с последующей ее оптимизацией под квазипрямоугольное по форме огибающей ее поверхности окно пропускания ПЧС гипотетических изображений. Стартовая ЧКХ для последующей оптимизации определяется как частное от деления ПЧС регистрируемого изображения на ПЧС этого же изображения, обработанного единичным, но со слабо возмущенным усилением верхних мод спектрального представления оператором деконволюции [13].

При этом коррекция резкости выполняется итеративными соотношениями Ван Циттерта (2), выводимыми из модернизированного фундаментального соотношения Винера – Тихонова или рекурсивным продолжением ПЧС изображений на методе аддитивной коррекции [4] до достижения требуемой или заявленной погрешности вычисления оператора деконволюции и/или до наступления начала перерождения процесса коррекции резкости в контрастирование.

Приведем получение модернизированной формулы Винера – Тихонова из спектрального представления популярной инверсной фильтрации при гипотетическом случае измерения на изображении функции рассеяния точки (ФРТ), соответствующей возможному полному ее спектральному портрету $F(\text{ФРТ}_0)$ [2], [15]. Инверсная фильтрация имеет вид:

$$F(S_{И}) = \frac{F(S_R)}{F(ФРТ_0)} = F(S_R)\big(F(\text{ФРТ}_0)\big)^{-1}, \tag{3}$$

где F — двумерное преобразование Фурье (т. е. ПЧС), $(F)^{-1}$ — деление единицы на отсчеты комплексного ПЧС; S_R — наблюдаемое и сформированное постфактум изображение, $S_{И}$ — восстанавливаемое изображение; ФРТ_0 — это ФРТ с полным спектральным портретом.

ФРТ целесообразно определять по парам «Опорный ориентир – имеющийся его эталон». Определяемая по опорным ориентирам или слепым восстановлением [8] ФРТ тракта зондирования для предъявленного изображения требует пополнения спектрального портрета до оптимизированной частотно-контрастной характеристики $ЧКХ_0(\omega_i, \omega_j)$ тракта зондирования для данного изображения S_R. $F(\text{ФРТ}_0)$ в формуле (3) заменим на $H(\omega_i, \omega_j)$, т. е. на спектр ФРТ с неполнотой заполнения диапазона пространственных частот задачи. Числитель и знаменатель в (3) домножим на $H^*(\omega_i, \omega_j)$ (* — символ комплексного сопряжения) и, добавляя аддитивно в знаменатель «умеренно» подавляющий верхние моды ПЧС изображения параметр регуляризации $\rho(\omega_i^2 + \omega_j^2)^{1/2}$, получим модернизированный для коррекции резкости фильтр Винера – Тихонова со спектром ядра оператора деконволюции H_M^{-1}:

$$F(S_И) = \frac{H^*(\omega_i, \omega_j) F(S_R)}{|H^*(\omega_i, \omega_j)|^2 + \rho(\omega_i^2 + \omega_j^2)^{1/2}} = H_M^{-1} F(S_R)\,. \tag{4}$$

С помощью частотно-зависимой добавки $\nu(\omega_i, \omega_j)$ [13], дополняющей H_M^{-1} до оптимизированной $(\text{ЧКХ})_0^{-1}(\omega_i, \omega_j)$ тракта настолько близко, насколько это можно будет сделать, не возбуждая артефактов, подобных резидентному контрастированию на восстанавливаемом изображении, дополнительно получим выражение для откорректированного под оптимальную $(\text{ЧКХ})_0(\omega_i, \omega_j)$ модифицированного фильтра Винера – Тихонова:

$$F(S_И) = F(S_R) \left(\frac{H^*(\omega_i, \omega_j)}{|H^*(\omega_i, \omega_j)|^2 + \rho(\omega_i^2 + \omega_j^2)^{1/2}} + \nu(\omega_i, \omega_j) \right) = F(S_R)\big(H_M^{-1} + \nu\big)\,. \tag{5}$$

Оптимизация ЧКХ проводится поиском оптимального решения системы неравенств, сформулированной для значений функционалов, построенных на следующих требованиях:

- минимизации тенденции спада и роста аппликат ЧКХ вплоть до приближения к высшим спектральным модам в заданных пределах;
- осуществления наиболее крутого спада ЧКХ в области высшей спектральной моды тракта;
- выдерживания непревышения значением порядка обобщенного градиентного оператора стартовой аддитивной коррекции резкости порога 0,25, при котором резидентно могут присутствовать глобальное контрастирование и даже выделение контуров.

При этом реализуется процесс минимизации нормы разности между оптимизированной $(\text{ЧКХ})_0^{-1}$ и H_M^{-1} на основе самосогласованных вычислений: итеративно на потоке значений составленного функционала вычисляемой нормы с подстановкой каждый раз определенной добавки $\nu(\omega_i, \omega_j)$ в соотношение (5) вплоть до выявления зарождения процесса контрастирования на исходном изображении.

Введем откорректированное спектральное представление $H_{\lambda M}^{-1}$ в виде соотношения

$$H_{\lambda M}^{-1} = H_M^{-1} + \lambda\nu\,, \tag{6}$$

где $0 < \lambda < 1$.

Если из выражения (6) найти $H_{\lambda M}^{-1}$ и обозначить за Y, то для $S_И$ получим итеративное представление Ван Циттерта интегрального оператора деконволюции в обобщенной и компактной форме:

$$\text{1-й шаг} - S_И^{(0)} = S_R\,; \quad \ldots\,; \quad n\text{-й шаг} - S_И^{(n)} = S_R + F^{-1}(1 - Y) ** S_И^{(n-1)}\,; \tag{7}$$

здесь символ $**$ обозначает операцию двумерной свертки.

Получаемая при этом стартовая (первичная) ЧКХ может иметь сингулярные значения (из-за наличия нулей в ПЧС знаменателя соответствующего выражения). Эти сингулярные значения учитываются в дальнейшем в виде встраиваемых на месте их расположения в ЧКХ моделей регуляризованных до уровня получения финитных спектров сингулярных на мере нуль функций [5],[14], вызывающих допускаемые погрешности реализации операторов деконволюции при коррекции. При этом необходимо в соответствии с регуляризованными моделями сингулярных выбросов в ЧКХ трактов зондирования осуществить сдвиг в высшую сторону критериев дискретизации изображений в соответствии с теоремой Котельникова, определяя тем самым частотную полосу решаемой задачи, значительно превышающую исходную пространственно-частотную полосу изображения.

Для измерения и контроля резкости и поддерживаемого разрешения в формирующей системе и на изображении используется в работе сближение двух (или нескольких) метрических импульсов (МИ) — конусовидных с постоянным вертикальным градиентом плотности яркости (или яркости) в пределах от нуля до номинала. Минимальное расстояние между вершинами варьируемых по телесным углам вершин конусов при этом при их сближении и при пересечении, создающее при варьировании углов конусов при их вершине уровень отсечения нижних объемов конусов с соответствием этого уровня принятым требованиям (как правило, это уровень среднего шума или немного выше) принято за пространственное или линейное разрешение по Рэлею. Обратная величина этого значения регламентирует значение разрешения по Фуко, т. к. является пространственной частотой.

Так как контрастирование подавляет мелкие детали на изображении при его нормализации и наносит вред коррекции резкости, то вставляя в расширенную апертуру в зону достижимости процедурами обработки изображений МИ (измеривший разрешение или резкость) «шероховатый» на гранях, можно зафиксировать переход коррекции в контрастирование при выявлении недопустимого уровня сглаживания шероховатостей на гранях МИ и выявлении степени поворота самой грани метрического импульса в сторону вертикали на недопустимое значение угла поворота. Значения возмущений яркости и размеров неоднородностей — шероховатостей импортируются из гистограммы распределения размеров шероховатостей на изображении по яркостям.

В предлагаемом алгоритме, выполняемом по схеме сверхвысокого разрешения (см. рис. 1), реализуется замена сдвинутых относительно исходного паттерна на половины апертур пиксела изображений, полученных от физически реализованных каналов зондирования, изображениями от модели рассеяния света на восстановленной ЦМР зондируемого ареала.

В оптическом диапазоне излучения вычисление рассеянной компоненты для координат местонахождения КА (как правило, зоны Фраунгофера) является задачей рассеяния на статистически неровной поверхности с представлением рассеяния методом возмущений и продолжения поля в конечных разностях (в верхнее полупространство [1]).

Для регистрируемого изображения ЦМР восстанавливается по теням на исходном сюжете. Вариация углов падения зондирующего излучения на восстановленную ЦМР ареала с малым отклонением от углов при формировании изображения позволяет получить дополнительные пикселы с оптимальной для реализации сверхвысокого разрешения апертурой и необходимым субпиксельным сдвигом относительно пикселов исходного изображения.

При этом целесообразно использовать совершенствующиеся еще с середины прошлого века [9] в цифровой сейсморазведке методы продолжения полей в конечных разностях. Эти методы отличаются от рассматриваемых задач космического дистанционного зондирования в базовой алгоритмической части тем, что рассеивающих поверхностей в сейсмической задаче много (слоистая зондируемая среда), непосредственно перед приемными датчиками необходимо вносить кинематические поправки, а в космическом зондировании рассеивающая поверхность одна, нет поправок по кинематике (кроме исключительных случаев экстремальной рефракции в атмосфере). Кроме того, в сейсморазведке результирующая искомая амплитуда поля в удаленной точке определяется интерференцией волн с учитываемой фазой каждой волны, а аналогичные задачи для космического зондирования вынужденно решаются с условием формирования результирующих изображений или сигналов в приближении случайной фазы, аналогично отличиям получения голограммы от получения фотографии.

Первичная амплитуда яркости в программе миграции волн задается из исходного изображения, накопление сигналов в точках приема (на апертуре синтезируемого изображения) происходит по закону суммирования нормализованного значения энергии волн рассеянного излучения, поставляемых от процедур регулируемого направленного приема (РНП).

Для задачи рассеяния на ЦМР ареала значения длин волн зондирующего излучения будут гораздо выше длин волн реального облучения поверхности в 380 нм – 780 нм, что снижает существенно объемы вычислительных затрат. При выборе длины волны, согласованной в модели рассеяния с ожидаемым при обработке исходного изображения новым уровнем пространственного разрешения, должно обеспечиваться выполнение по теории рассеяния для зоны Фраунгофера требование $KQ < 1$ (здесь K — волновой вектор с модельной длиной волны γ, соответствующей ожидаемому разрешению, а Q – среднеквадратичные размеры неровностей, не нарушающих приведенного условия при подстановке в неравенство их среднеквадратичного значения).

Для повышения резкости и разрешения, что эквивалентно снижению или подавлению квазипостоянного среднеквадратичного фона, целесообразно, например, осуществить продолжение ПЧС изображения в сторону расположения высших мод после его синтеза методом миграции волнового поля на длине волны втрое меньшей полученного разрешения на сформированном постфактум изображении (в соответствии со статистическим правилом трех сигм, так как формируемое поле считаем стационарным).

Например, для волнового вектора с длиной волны γ = 0,3м соотношение $KQ < 1$ выполняется для статистических неровностей со среднеквадратичным размером Q, меньшим $(20,9)^{-1}$ м, т. е. меньшим 4,7 см. Физика, поддерживающая исследования, следующая: на изображении с разрешением в 1 м стохастические детали в 4,7 см высотой по правилу трех сигм могут быть представлены как имеющие гауссоподобную форму с апертурой пятки 14,1 см, т. е. в 7 раз меньше критерия Рэлея при заданном разрешении.

В качестве материалов для апробирования предлагаемого алгоритма в работе использовались фрагменты изображений высокого разрешения: со всех трех поочередно инициируемых базовых каналов зондирования с аппарата Ресурс-ДК (территория Испании, район г. Рота) и со спутника Ikonos (Ikonos_sandiego_usa_1m) по территории США (г. Сан-Диего).

Заключение. Выполнено моделирование рассеяния с исходными углами падения светового потока на восстановленную по теням на предъявленном изображении ЦМР с формированием методом возмущений в конечных разностях с согласованием с неоднородностями на ЦМР масштабируемых выбираемых длин волн с использованием индустриально применяемого в сейсморазведке модернизированного под условия космического зондирования ареала модуля миграции поля с восстановлением в зоне Фраунгофера изображения с пикселами на апертуре изображения, взаимный субпиксельный сдвиг которых относительно пикселов исходного изображения управляется слабыми вариациями углов падения излучения на ЦМР.

Выполненное моделирование показало, что возможность реализации коррекции резкости и поддерживаемого пространственного разрешения, а также реализации технологии сверхвысокого разрешения на сформированном постфактум космическом изображении с использованием модели рассеяния светового потока на ЦМР зондируемого ареала, без привлечения физически реализуемых дополнительных каналов дистанционного зондирования высоковероятна.

Использование пикселов с модели рассеяния на ЦМР ареала для коррекции резкости исходного изображения и реализации сверхвысокого разрешения показывает, что структурные элементы и их геометрические расположения в пространственно-частотных спектрах сохраняются, а радиусы увеличиваются не менее чем в 1,6 раз, что практически соответствует реализациям коррекции на физически подключаемых каналах зондирования.

В целом информация с моделей рассеяния заселена псевдошумовыми пикселами, что требует вместе с нормализацией получаемых изображений выполнения работ по понижению уровня шума. Тем не менее использование модели рассеяния на ЦМР ареала весьма вероятно довести до индустриальных методов с эффектом экономии средств на неосуществленные запуски дополнительных космических аппаратов.

Список литературы

1. Басс Ф. Г., Фукс И. М. 1972. Рассеяние волн на статистически неровной поверхности. М., Наука, 424.

2. Бейтс Р. Мак-Доннел М. 1989. Восстановление и реконструкция изображений. М., Мир, 336.

3. Винтаев В. Н. Ушакова Н. Н. 2018. Нетривиальная коррекция космических изображений высокого разрешения. Саарбрюккен, Германия, Lambert Academic Publishing, 208.

4. Винтаев В. Н., Жиленев М. Ю., Ушакова Н. Н. 2018. Информационные технологии в дистанционном зондировании Земли-RORSE [Электронный ресурс]. Изд. ИКИ РАН.: 132–138.

5. Владимиров В. С., Жаринов В. В. 2004. Уравнения математической физики. М., Физико-математическая литература, 400.

6. Макриденко Л. А., Волков С. Н., Геча В. Я. и др. 2017. Основные источники снижения качества изображений земли, получаемых при орбитальной оптической съёмке с борта МКА. Вопросы электромеханики. Труды ВНИИЭМ. 160(5): 3–19.

7. Москвитин А. Э. 2003. Технологии и алгоритмы повышения качества изображений земной поверхности на основе комплексирования спектрозональной информации. дис. канд. техн. наук: 05.13.01, Рязанский государственный радиотехнический университет. 130.

8. Остриков В. Н. 2012. Оценка функции рассеяния точки на произвольном снимке посредством слепого восстановления. Техническое зрение в системах управления: Сборник трудов науч.-техн. конф. 15-17 марта 2011 г., г. Москва. Институт космических исследований РАН. 16–20.

9. Программный комплекс SPS-PC (Seismic Processing System). [Электронный ресурс] www.sps-pc.ru.

10. Ращупкин А. В. 2010. Технологии обработки видеоинформации, обеспечивающие качество аэрокосмических изображений. Вестник Самарского государственного аэрокосмического университета, 2: 42–48.

11. Свиридов К. Н. 2019. Реальное инструментальное разрешение на местности зарубежных космических аппаратов дистанционного зондирования Земли сверхвысокого разрешения. Информация и космос, 1: 150–159.

12. Селиванов А. С. 2004. Субпиксельная обработка как способ повышения пространственного разрешения в системах дистанционного зондирования [Электронный ресурс]. Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса: Материалы II открытой Всеросс. конф. 16-18 ноября 2004 г., Москва / ИКИ РАН:47: URL:http://www.iki.rssi.ru/earth/tes.pdf (дата обращения 21.05.2021).

13. Фридрихс К. 1969. Возмущение операторов в гильбертовом пространстве. М., Мир, 232.

14. Удод В. А. Оптимальная по разрешающей способности линейная фильтрация изображений. 2002. дис. докт. техн. наук: 05.13.01; Томский государственный университет, 338.

15. Шовенгердт Р. А. 2010. Дистанционное зондирование. Методы и модели обработки изображений. М., Техносфера, 560.

16. Oveisgharam S., Esteban-Fernandez D., Waliser R. 2020. Friedlets Evaluating the Preconditions of Two Remote Sensing SWE Retrieval Algorithms over the US [Электронный ресурс] Remote Sensing. 12(12): doi.org/10.3390/rs12122021.

17. Park S. C., Park M. K., Kang M. G. 2003. Super-resolution image reconstruction: A technical overview. IEEE Signal Processing Magazine, 20(3): 21-36.

References

1. Bass F. G., Fuks I. M. 1972. Rassejanie voln na statisticheski nerovnoj poverhnosti. M., Nauka, 424. [in Russian]

2. Bejts R., Mak-Donnel M. 1989. Vosstanovlenie i rekonstrukcija izobrazhenij. M., Mir, 336. [in Russian]

3. Vintaev V. N., Ushakova N. N. 2018. Netrivial'naja korrekcija kosmicheskih izobrazhenij vysokogo razreshenija. Saarbrjukken, German: Lambert Academic Publishing, 208. [in Russian]

4. Vintaev V. N., Zhilenev M. Ju., Ushakova N. N. 2018. Informacionnye tehnologii v distancionnom zondirovanii Zemli - RORSE [Jelektronnyj resurs]. Izd. IKI RAN: 132-138. conf.rse.geosmis.ru/files/earticles/2018/22.htm. [in Russian]

5. Vladimirov V. S., Zharinov V. V. 2004. Uravnenija matematicheskoj fiziki. M., Fiziko-matematicheskaja literatura, 400. [in Russian]

6. Makridenko L. A., Volkov S. N., Gecha V. Ja. and other. 2017. Osnovnye istochniki snizhenija kachestva izobrazhenij zemli, poluchaemyh pri orbital'noj opticheskoj s'jomke s borta MKA. Voprosy jelektromehaniki. Trudy VNIIJeM. 160(5):3–19. [in Russian]

7. Moskvitin A. Je. 2003. Tehnologii i algoritmy povyshenija kachestva izobrazhenij zemnoj poverhnosti na osnove kompleksirovanija spektrozonal'noj informacii. dis. kand. tehn. nauk: 05.13.01. Rjazanskij gosudarstvennyj radiotehnicheskij universitet, 130. [in Russian]

8. Ostrikov V. N. 2012. Ocenka funkcii rassejanija tochki na proizvol'nom snimke posredstvom slepogo vosstanovlenija. Tehnicheskoe zrenie v sistemah upravlenija: Sbornik trudov nauch.-tehn. konf. 15-17 March 2011, Moskva. Institut kosmicheskih issledovanij RAN: 16–20. [in Russian]

9. Programmnyj kompleks SPS-PC (Seismic Processing System). [Jelektronnyj resurs] www.sps-pc.ru.

10. Rashhupkin A. V. 2010. Tehnologii obrabotki videoinformacii, obespechivajushhie kachestvo ajerokosmicheskih izobrazhenij. Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo ajerokosmicheskogo universiteta. 2: 42–48. [in Russian]

11. Sviridov K. N., Volkov S. A. 2019. Real'noe instrumental'noe razreshenie na mestnosti zarubezhnyh kosmicheskih apparatov distancionnogo zondirovanija Zemli sverhvysokogo razreshenija. Informacija i kosmos. 1: 150–159.[in Russian]

12. Selivanov A. S. 2004. Subpiksel'naja obrabotka kak sposob povyshenija prostranstvennogo razreshenija v sistemah distancionnogo zondirovanija [Jelektronnyj resurs]. Sovremennye problemy distancionnogo zondirovanija Zemli iz kosmosa: Materialy II otkrytoj Vseross. konf. 16-18 nojabrja 2004 g., Moskva. IKI RAN, 47. www.iki.rssi.ru/earth/tes.pdf [in Russian]

13. Fridrihs K. 1969. Vozmushhenie operatorov v gil'bertovom prostranstve. Moskva, Mir, 232. [in Russian]

14. Udod V. A. 2002. Optimal'naja po razreshajushhej sposobnosti linejnaja fil'tracija izobrazhenij. dis. dokt. tehn. nauk: 05.13.01. Tomskij gosudarstvennyj universitet, 338. [in Russian]

15. Shovengerdt R. A. 2010.Distancionnoe zondirovanie. Metody i modeli obrabotki izobrazhenij. M., Tehnosfera, 560. [in Russian]

16. Oveisgharam S., Esteban-Fernandez D., Waliser R. 2020. Fried lets. Evaluating the Preconditions of Two Remote Sensing SWE Retrieval Algorithms over the US [Jelektronnyj resurs] Remote Sensing. 12(12). doi.org/10.3390/rs12122021.

17. Park S. C., Park M. K., Kang M. G. 2003. Super-resolution image reconstruction: A technical overview. IEEE Signal Processing Magazine. 20(3): 21–36.

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.
Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Получена 04.09.2021

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Ушакова Наталья Николаевна – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры информационных систем и технологий Белгородского университета кооперации, экономики и права

http://orcid.org/0000-0003-2858-7053
Ул. Садовая, 116а, Белгород, 308023, Россия
E-mail: natush2006@yandex.ru

Винтаев Виктор Николаевич – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры информационных систем и технологий Белгородского университета кооперации, экономики и права

http://orcid.org/0000-0002-9069-5517
Ул. Садовая, 116а, Белгород, 308023, Россия
E-mail: viktor.vn2010@yandex.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Natalia N. Ushakova – PhD in Technical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Information Systems and Technologies, Belgorod University of Cooperation, Economics and Law, Belgorod, Russia

Viktor N. Vintaev – PhD in Technical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Information Systems and Technologies, Belgorod University of Cooperation, Economics and Law, Belgorod, Russia

Прикладная математика & Физика, 2021, том 53, №3. С. 243–251.

УДК 539.23 DOI 10.52575/2687-0959-2021-53-3-243-251

ТРАНСПОРТНЫЕ СВОЙСТВА ТОНКИХ ПЛЕНОК Cd_3As_2 И ЕГО ТВЕРДЫХ РАСТВОРОВ

Неженцев А.В., Пилюк Е. А., Никуличева Т. Б., Захвалинский В. С., Япрынцев М. Н.

Статья представлена членом редакционной коллегии А. В. Носковым

Белгородский государственный национальный исследовательский университет,
г. Белгород, 308015, Россия

E-mail: pilyuk@bsu.edu.ru

Аннотация. Исследованы транспортные свойства аморфных пленок Cd_3As_2 и его твёрдых растворов $(Cd_{1-x-y}Zn_x Mn_y)_3As_2 (x+y = 0.1; y = 0, 0.02)$, полученных магнетронным распылением, в диапазоне температур 10÷300 К. Легирование Zn приводит к смене типа проводимости: от полупроводниковой к металлической. Сопротивление тонких пленок $(Cd_{0.9}Zn_{0.1})_3As_2$ и $(Cd_{0.9}Zn_{0.08}Mn_{0.02})_3As_2$ уменьшается с понижением температуры. Такое поведение связано с уменьшением подвижности электронов вследствие рассеяния на ионизированных примесях при нагревании.

Ключевые слова: дираковский полуметалл, арсенид кадмия, арсенид цинка, тонкие пленки, подвижность электронов.

Благодарности: Исследование выполнено при поддержке гранта Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских ученых – кандидатов наук, проект № МК-238.2020.2.

Для цитирования: Неженцев А. В., Пилюк Е. А., Никуличева Т. Б., Захвалинский В. С., Япрынцев М. Н. 2021. Транспортные свойства тонких пленок Cd_3As_2 и его твердых растворов. Прикладная математика & Физика. 53(3): 243–251. DOI 10.52575/2687-0959-2021-53-3-243-251.

TRANSPORT PROPERTIES OF THIN FILMS OF Cd_3As_2 AND ITS SOLID SOLUTIONS

Anton Nezhentsev, Evgeniy Pilyuk, Tatiana Nikulicheva, Vasily Zakhvalinskii, Maksim Yapryntsev

Article submitted by a member of the editorial board A. V. Noskov

Belgorod National Research University,
Belgorod, 308015, Russia
E-mail: pilyuk@bsu.edu.ru
Received September, 9, 2021

Abstract. The transport properties of amorphous films of Cd_3As_2 and its solid solutions $(Cd_{1-x-y}Zn_xMn_y)_3As_2$ $(x + y = 0.1; y = 0, 0.02)$ obtained by magnetron sputtering in the temperature range 10–300 K have been studied. Doping with Zn leads to a change in the type conductivity: from semiconductor to metallic. The resistance of $(Cd_{0.9}Zn_{0.1})_3As_2$ and $(Cd_{0.9}Zn_{0.08}Mn_{0.02})_3As_2$ thin films decreases with decreasing temperature. This behavior is associated with a decrease in the electron mobility due to scattering by ionized impurities upon heating.

Key words: Dirac semimetal, cadmium arsenide, zinc arsenide, thin films, electron mobility.

Acknowledgements: The work was supported by the grant of President of the Russian Federation for state support of young Russian scientists - candidates of sciences, project No. MK-238.2020.2.

For citation: Nezhentsev A. V., Pilyuk E. A., Nikulicheva T. B., Zakhvalinskii V. S., Yapryntsev M. N. 2021. Transport properties of thin films of Cd_3As_2 and its solid solutions. Applied Mathematics & Physics. 53(3): 243–251. (in Russian)
DOI 10.52575/2687-0959-2021-53-3-243-251.

1. Введение. Арсениды кадмия и цинка принадлежат широкому классу полупроводников и полуметаллов группы A^2B^5, достаточно известной своим огромным потенциалом в создании высокоэффективных солнечных элементов и оптоэлектронных устройств [29, 7]. Интерес к этим соединениям [3, 8, 9] вызван не так давно опубликованными теоретическими и экспериментальными исследованиями [13, 14], которые показали, что Cd_3As_2 принадлежит классу дираковских полуметаллов, особому классу топологических изоляторов, что предоставляет возможность понимать под такими системами альтернативу графена. Так, были обнаружены аномально высокая подвижность носителей заряда [17], большой коэффициент термоэдс [35], квантовый эффект Холла [35], киральная аномалия [16], аномальный эффект Нернста [18] и сильное линейное магнетосопротивление [13]. Cd_3As_2 и Zn_3As_2 кристаллизуются при разных температурах в серии тесно связанных структур, которые можно рассматривать как различные искажения антифлюоритовой структуры [5, 30]. Электрические свойства этих соединений различаются по нескольким аспектам. Zn_3As_2 – это полупроводник p-типа с низкой подвижностью носителей и прямой шириной запрещенной зоны, равной 1,0 эВ [25]. Ширина запрещенной зоны Cd_3As_2 отрицательна и составляет -0.3 ÷ -0.7 эВ [27]. Подвижность электронов в Cd_3As_2 достигает 9×10^6 см^2 В$^{-1}$ с$^{-1}$ при 5 К [17], тогда как подвижность дырок для Zn_3As_2 составляет всего 10 см^2 В$^{-1}$ с$^{-1}$ при комнатной температуре [25]. Cd_3As_2 всегда относится к n-типу из-за вакансий As, а Zn_3As_2 к p-типу, потому что дополнительные вакансии Zn служат акцепторами электронов. Поскольку оба типа носителей происходят из вакансий элементов, в $(Cd_{1-x}Zn_x)_3As_2$ происходит переход от n к p, при этом ширина запрещенной зоны линейно увеличивается с ростом концентрации Zn. Переход от дираковского полуметалла происходит при концентрации цинка около 0.4 [19].

Твердые растворы и пленки $(Cd_{1-x-y}Zn_xMn_y)_3As_2$ (CZMA) различаются по своей структуре. Результаты исследований показывают, что они могут обладать аморфной [15, 12], поликристаллической [11, 1, 10] или монокристаллической [21, 23] структурой. Наличие способности контроля ширины запрещенной зоны посредством варьирования концентрацией Zn составляет главный интерес в исследовании твердых растворов CZMA. Такое легирование поднимает инверсию зон в Cd_3As_2, что приводит к переходу от топологического ДПМ к полупроводнику [16].

Цель данной работы состоит в исследовании влияния легирования Zn и Mn тонких пленок Cd_3As_2, полученных напылением на неподогреваемую кремниевую подложку, на транспортные свойства.

2. Материалы и методика эксперимента. Тонкие пленки Cd_3As_2 и его твёрдых растворов $(Cd_{1-x-y}Zn_xMn_y)_3As_2 (x + y = 0.1; y = 0, 0.02)$ были получены при помощи вакуумного универсального поста ВН-2000 высокочастотным магнетронным напылением. В качестве мишени для использования в качестве катода был изготовлен поликристаллический диск диаметром 40 мм. Синтез твердых растворов CZMA был произведен из бинаров Cd_3As_2, Zn_3As_2 и Mn_3As_2. Соответствующие бинарные соединения были синтезированы прямым сплавлением чистых кадмия, мышьяка, цинка и марганца в вакууме. Кристаллы Cd_3As_2 и CZMA были выращены методом Бриджмена в вертикальной печи. Охлаждение вблизи температуры кристаллизации было не более 2°C/час при градиенте температуры $\Delta T \approx 1°$ C/см.

Рентгеновские исследования полученных кристаллов Cd_3As_2 и CZMA, полученные при комнатной температуре с помощью дифрактометра Rigaku SmartLab, излучение CuK_α ($\lambda = 1.5406$ A, $U = 50$ кВ, $I = 60$ мА), показали, что кристаллы Cd_3As_2 имели тетрагональную решетку (пространственная группа $I4_1cd$), которая соответствует α-фазе. Составы $(Cd_{1-x-y}Zn_xMn_y)_3As_2$ $x + y = 0.1; y = 0, 0.02$ были получены в тетрагональной α'' - фазе с пространственной группой $P4_2/nmc$.

Напыление тонких пленок Cd_3As_2 и CZMA для исследования электрофизических свойств осуществлялось через изготовленную маску на подложку из монокристаллического кремния марки КДБ-2 (100) с термически выращенным диоксидом кремния на поверхности ($T = 20°$C) при давлении аргона в процессе напыления $8 \cdot 10^{-1}$ Па. Расстояние мишень–подложка равнялось 50 мм. Мощность, подаваемая на магнетрон, составляла 10 Вт. Толщина полученных пленок составляла 40 нм. Контактные площадки получали магнетронным напылением индия.

Исследование структуры полученных образцов пленок Cd_3As_2 и его твёрдых растворов производили методом малоуглового рентгеновского рассеяния (МУРР) при $\alpha = 3°$ в диапазоне $2\theta = 10 - 80°$. Типичная дифрактограмма исследуемых пленок показана на рис. 1 и является типичной для аморфных материалов с широкими максимумами типа «гало». Таким образом, полученные пленки следует рассматривать как «рентгеноаморфный» материал.

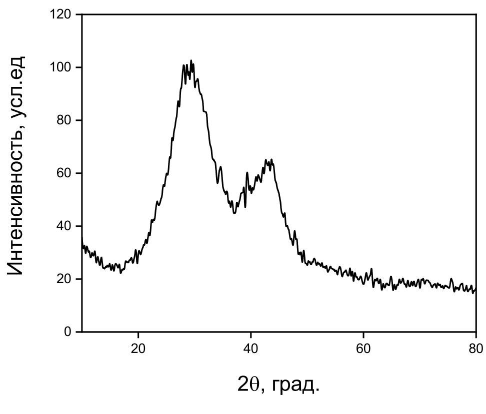

Рис. 1. Типичная дифрактограмма исследуемых пленок
Fig. 1. Typical diffraction pattern of the studied films

Химические структуры полученных пленок Cd_3As_2 и CZMA были исследованы при комнатной температуре с помощью спектрометра комбинационного рассеяния LabRam HR Evolution ($\lambda = 532$ нм, мощностью 50 мВт, спектральное разрешение 0.5 см$^{-1}$). Спектры рамановского рассеяния полученных пленок Cd_3As_2, $(Cd_{0.9}Zn_{0.1})_3As_2$, $(Cd_{0.9}Zn_{0.08}Mn_{0.02})_3As_2$ показаны на рис. 2. По результатам спектроскопии комбинационного рассеяния (КРС) в Cd_3As_2 можно видеть два ярко выраженных пика при 195 и 247 см$^{-1}$ и слабый пик при 301 см$^{-1}$. Известно, что в интервале от 100 до 400 см$^{-1}$ спектр комбинационного рассеяния при 77 К для монокристаллов α–Cd_3As_2 имеет основные пики при 192, 247 см$^{-1}$ (симметрия B_{1g} + B_{2g}) и 300 см$^{-1}$ (A_{1g}) [31]. Пик на 39 см$^{-1}$ соответствует симметрии B_2g, 60, 99 см$^{-1}$ – E_g, 122 и 140 см$^{-1}$ – A_{1g}. Частота, для которой наблюдается пик при 301 см$^{-1}$, соответствует зазору между валентной зоной и нижней зоной проводимости [32].

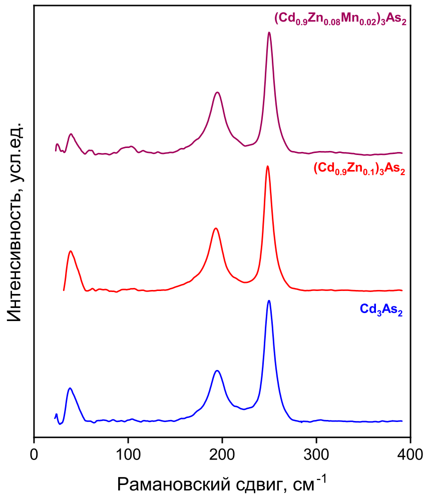

Рис. 2. Рамановский спектр пленок Cd_3As_2, $(Cd_{0.9}Zn_{0.1})_3As_2$, $(Cd_{0.9}Zn_{0.08}Mn_{0.02})_3As_2$
Fig. 2. Raman spectrum of Cd_3As_2, $(Cd_{0.9}Zn_{0.1})_3As_2$, $(Cd_{0.9}Zn_{0.08}Mn_{0.02})_3As_2$ films

Для измерения удельного сопротивления и исследования эффекта Холла тонких пленок CZMA была использована установка на базе криостата замкнутого цикла Janis CCS-350S. Диапазон температур составлял 10-300 К и магнитных полях до 1 Тл. Была использована шестизондовая схема. Индиевые контакты были изготовлены магнетронным распылением.

3. Результаты и обсуждение. Как видно из рис. 3, удельное сопротивление ρ пленки Cd_3As_2 имеет «полупроводниковый» характер и увеличивается с понижением температуры от 5.58×10^{-2} Ом·см при комнатной температуре до 6.64×10^{-2} Ом·см при 10 К. Перенос заряда в аморфной пленке Cd_3As_2 осуществляется посредством механизма прыжковой проводимости с переменной длиной прыжка моттовского типа [33]. Проводимость пленок твёрдых растворов $(Cd_{0.9}Zn_{0.1})_3As_2$, $(Cd_{0.9}Zn_{0.08}Mn_{0.02})_3As_2$ носит металлический характер, их сопротивление при изменении температуры от 10 до 30 К растет от 2.02×10^{-4} до 2.46×10^{-4} Ом·см и от 2.64×10^{-4} до 3.36×10^{-4} Ом·см, соответственно.

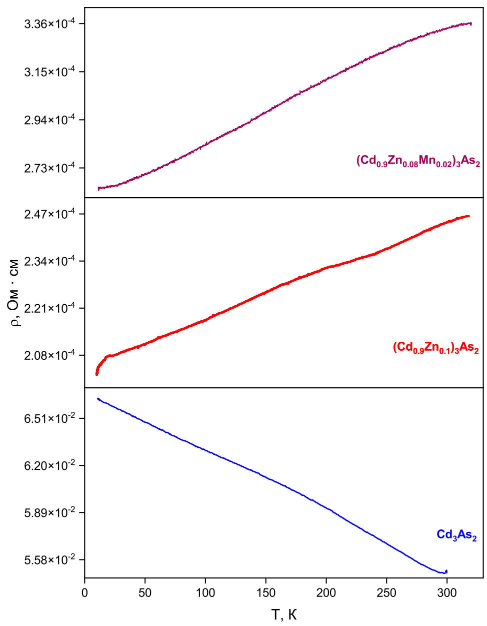

Рис. 3. Температурная зависимость удельного сопротивления пленок Cd_3As_2, $(Cd_{0.9}Zn_{0.1})_3As_2$, $(Cd_{0.9}Zn_{0.08}Mn_{0.02})_3As_2$
Fig. 3. Temperature dependence of the resistivity of Cd_3As_2, $(Cd_{0.9}Zn_{0.1})_3As_2$, $(Cd_{0.9}Zn_{0.08}Mn_{0.02})_3As_2$ films

Таблица 1. Состав, удельное сопротивление (ρ), постоянная Холла (R_H), концентрация носителей заряда (n), подвижность носителей заряда (μ).
Table 1. Composition, resistivity (ρ), Hall constant (R_H), concentration of the charge carriers (n), mobility of the charge carriers (μ).

Состав	ρ, Ом · см	R_H, $см^3 \cdot Кл^{-1}$	n, $см^{-3}$	μ, $см^2 \cdot В \cdot см^{-1}$
$(Cd_{0.9}Zn_{0.08}Mn_{0.02})_3As_2$	2.64×10^{-4}	-4.01×10^{-8}	1.55×10^{20}	37.62
$(Cd_{0.9}Zn_{0.1})_3As_2$	2.03×10^{-4}	-1.36×10^{-7}	4.59×10^{19}	666.15
Cd_3As_2	6.64×10^{-2}	-9.03×10^{-9}	6.91×10^{20}	170.51

Полученные результаты измерений позволили вычислить постоянную Холла R_H, используя которую можно определить концентрацию носителей заряда n $R_H = \dfrac{1}{ne}$.

Для Cd_3As_2 концентрация электронов составила 6.91×10^{20} $см^{-3}$ и растет во всем температурном диапазоне от 10 до 300 К, что соответствует примесной проводимости. Для пленок $(Cd_{0.9}Zn_{0.1})_3As_2$ концентрация носителей заряда уменьшается от 5.21×10^{19} $см^{-3}$ при комнатной температуре до 4.37×10^{19} $см^{-3}$ при $\sim$ 100 К и затем практически не меняется. Участок 100-300 К соответствует возникновению собственной проводимости полупроводника. В образцах пленок состава $(Cd_{0.9}Zn_{0.08}Mn_{0.02})_3As_2$ концентрация электронов почти не зависела от температуры, значение которой составило 1.55×10^{20} $см^{-3}$.

Холловская подвижность электронов μ_H определялась как: $\mu_H = \dfrac{R_H}{\rho}$.

Температурные зависимости подвижности носителей заряда тонких пленок Cd_3As_2, $(Cd_{0.9}Zn_{0.1})_3As_2$, $(Cd_{0.9}Zn_{0.08}Mn_{0.02})_3As_2$ приведены на рис. 4. Для Cd_3As_2 и $(Cd_{0.9}Zn_{0.08}Mn_{0.02})_3As_2$ во всем температурном диапазоне подвижность растет с понижением температуры, максимальные значения при 10 К равны 170 $см^2$ $В^{-1}$ $с^{-1}$ и 666 $см^2$ $В^{-1}$ $с^{-1}$, соответственно. В пленке $(Cd_{0.9}Zn_{0.1})_3As_2$ рост подвижности наблюдается от 300 К до $\sim$ 100 К, а затем незначительно падает.

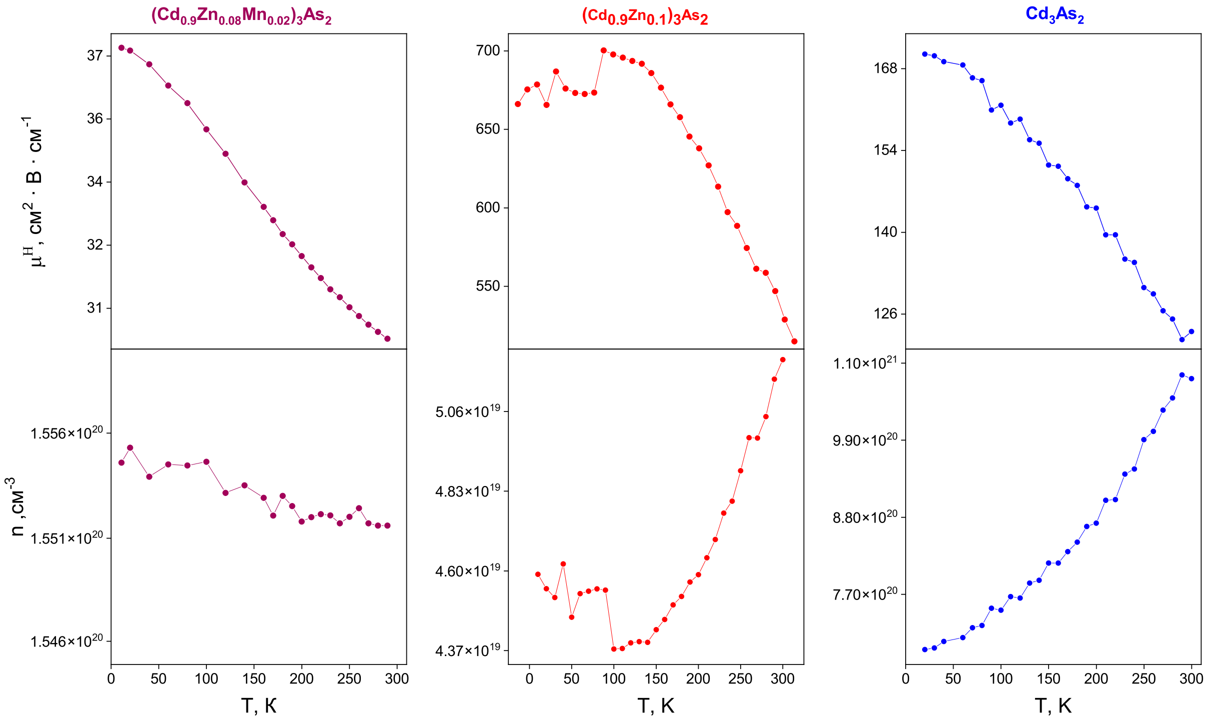

Рис. 4. Подвижность (сверху) и концентрация (снизу) носителей заряда в тонких пленках Cd_3As_2, $(Cd_{0.9}Zn_{0.1})_3As_2$, $(Cd_{0.9}Zn_{0.08}Mn_{0.02})_3As_2$
Fig. 4. Mobility (top) and concentration (bottom) of the charge carriers in Cd_3As_2, $(Cd_{0.9}Zn_{0.1})_3As_2$, $(Cd_{0.9}Zn_{0.08}Mn_{0.02})_3As_2$ thin films

Для металлов и вырожденных полупроводников зависимость $\rho(T)$ будет определяться температурной зависимостью подвижности носителей, поскольку n не зависит от T для этих твердых тел. Температурную зависимость подвижности можно оценить, рассматривая влияние температуры на ионизованные примеси и рассеяние фононов и комбинируя эти механизмы с использованием правила Маттиссена [20]. Рассеяние фононов сильно увеличивается с увеличением температуры T из-за увеличения числа фононов, что приводит к зависимости подвижности полярных фононов $\mu \sim T^{-3/2}$. Температурную зависимость подвижности электронов, обусловленную рассеянием акустических фононов, можно записать как

$$\mu_l = \frac{4e}{3\sqrt{\pi}} \frac{\tau_{0l}}{m^{*5/2}k^{1/2}} T^{-3/2},$$

где $\tau_{0l} = 9\pi\hbar^4 v^2 M / 4\sqrt{2} a^3 k C^2$, a – параметр решетки, e – заряд электрона, C – емкость, v^2 – скорость звука, M – масса ядра, k – постоянная Больцмана, m^* – эффективная масса носителя заряда.

Для рассеяния на ионизированных примесях увеличение температуры увеличивает среднюю скорость носителей и, следовательно, увеличивает подвижность носителей для заданной концентрации ионизированных примесей. После достижения температуры, при которой ионизация примесей завершена, можно показать, что подвижность носителей при рассеянии на ионизированных примесях возрастает с увеличением температуры T примерно как $\mu \sim T^{3/2}$:

$$\mu_i = \frac{8\sqrt{2}\epsilon_r^2 k^{3/2} T^{3/2}}{\pi^{3/2} Z^2 e^3 N_l m^{*1/2} ln[1 + (3\epsilon_r kT / Ze^2 N_i^{1/3})^2]},$$

где ϵ_r – относительная диэлектрическая проницаемость среды, N_i – концентрация ионов примеси.

При низких температурах подвижность в основном определяется рассеянием на ионизованных примесях, а при высоких температурах – рассеянием на фононах, приводящим к пиковой кривой. Ссылаясь на предыдущие обсуждения зависимости общей подвижности от концентрации носителей, становится ясно, что максимальная подвижность будет зависеть от уровня легирования, а положение пика смещается в сторону более высоких температур с увеличением легирования.

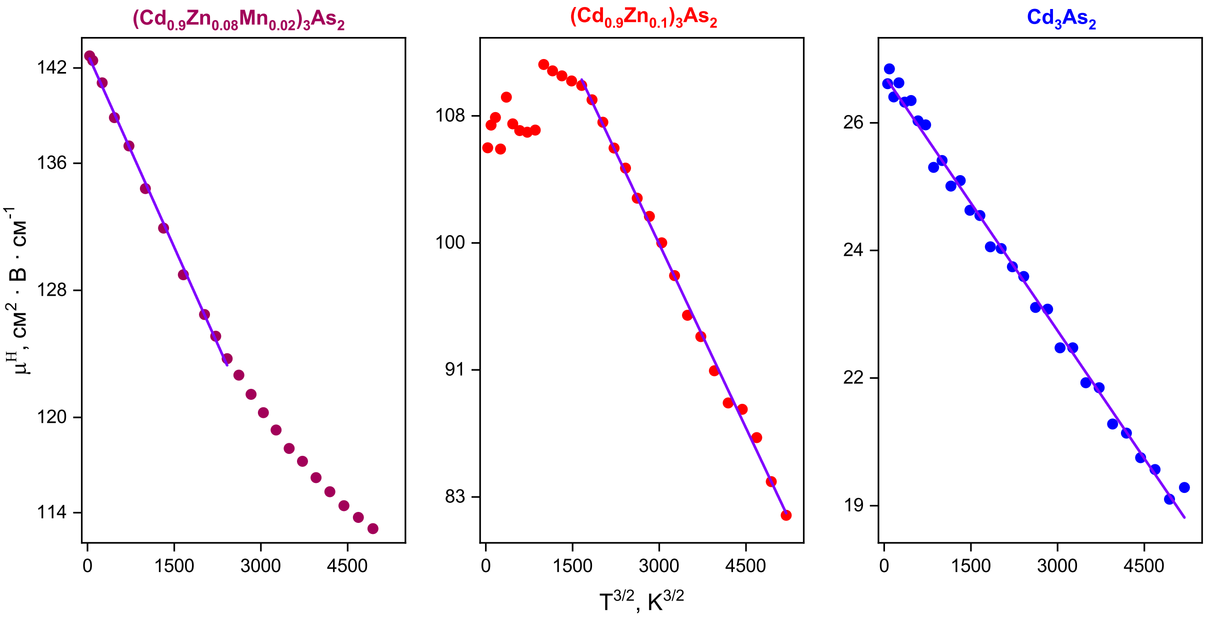

Рис. 5. Температурная зависимость μ от $T^{3/2}$ тонких пленок
Fig. 5. Dependence of μ on $T^{3/2}$ for thin films

Из построенного графика зависимости $\mu(T^{3/2})$, изображенного на рис. 5, было обнаружено, что на участке подвижность носителей заряда изменяется согласно закону $\mu \sim T^{3/2}$. Это означает, что рассеяние носителей заряда на ионах примеси ответственно за такое поведение зависимости. Электроны могут рассеиваться на ионизированных примесях из-за электростатического притяжения между электронами, движущимися в решетке, и примесью. В этом случае подвижность электронов увеличивается с ростом температуры. Такое температурное поведение холловской подвижности носителей заряда связано с увеличением кинетической энергии электронов при нагревании, что как раз сокращает время взаимодействия между электронами проводимости и ионизированными примесями [22].

Из рис. 5 видно, что значения концентрации носителей заряда в зависимости от температуры ниже $T \approx 100$ К незначительно изменяются, а затем следует стремительное увеличение n с ростом температуры, что свидетельствует о наличии собственной проводимости на этом участке, так как при увеличении температуры кинетическая энергия частиц увеличивается, разрушаются связи и возникают свободные электроны, которые перемещаются в противоположном направлении электрического поля.

4. Заключение. Таким образом, были получены тонкие пленки составов Cd_3As_2, $(Cd_{0.9}Zn_{0.1})_3As_2$, $(Cd_{0.9}Zn_{0.08}Mn_{0.02})_3As_2$ магнетронным распылением. Измерены удельное сопротивление и эффект Холла в диапазоне температур 10÷300 К. Определены концентрация и подвижность носителей заряда. Установлено, что основным механизмом рассеяния носителей заряда является рассеяние на ионизированных примесях.

Список литературы

1. Жалилов Н.С., Саныгин В.П., Квердаков А.М. 1990. Получение и свойства тонких пленок Cd_3As_2 и Zn_3P_2. Изв. АН СССР. Неорган. материалы, 26(9): 1975–1976.
2. Шалимова К. В. 2010. Физика полупроводников. СПб. Издательство "Лань". 400 с.
3. Amarnath R., Bhargavi K. S., Kubakaddi S. S. 2020. Thermoelectric transport properties in 3D Dirac semimetal Cd_3As_2. Journal of Physics Condensed Matter, 32(22): 22570412.
4. Armitage N.P., Mele E.J., Vishwanath A. 2018. Weyl and Dirac Semimetals in Three-Dimensional Solids. Rev. Mod. Phys., 90: 015001.
5. Arushanov E. K. 1992. II3V2 compounds and alloys. Progress in crystal growth and characterization of materials, 25(3): 131-201.
6. Borisenko S., Gibson Q., Evtushinsky D. et al. 2014. Experimental Realization of a Three-Dimensional Dirac Semimetal. Phys. Rev. Lett., 113(2): 027603.
7. Burgess, T. et al. 2015. Zn_3As_2 nanowires and nanoplatelets: highly efficient infrared emission and photodetection by an earth abundant material. Nano Lett., 15: 378–385.
8. Chorsi H. T. et al. 2020. Widely Tunable Optical and Thermal Properties of Dirac Semimetal Cd_3As_2. Advanced Optical Materials, 8(8): 120302 6.
9. Crassee I. et al. 2018. 3D Dirac semimetal Cd_3As_2: A review of material properties. Physical Review Materials, 2(12): 120302 15.
10. Din M., Gould R.D. 2006. Van der Pauw Resistivity Measurements on Evaporated Thin Films Of Cadmium Arsenide, Cd_3As_2. Appl. Surf. Sci., 252(15): 5508–5501.
11. Dubowski J.J., Norman P., Sewell P.B., et al. 1987. Cadmium Arsenide Films Prepared by Pulsed Laser Evaporation: Electrical Properties and lattice parameters. Thin Solid Films, 147(1): 51-54.
12. Dubowski J.J., Williams D.F. 1984. Pulsed Laser Evaporation of Cd_3As_2. Appl. Phys. Lett., 44(3): 339.
13. Feng J., Pang Y., Wu D. et al. 2015. Large Linear Magnetoresistance in Dirac Semimetal Cd_3As_2 with Fermi Surfaces Close to the Dirac Points. Phys. Rev. B., 92. 081306.
14. He L.P., Hong X.C., Dong J.K. et al. 2014. Quantum Transport Evidence for the Three-Dimensional Dirac Semimetal Phase in Cd_3As_2. Phys. Rev. Lett., 113: 246402.
15. Jarzabek B., Weszka J., Cisowski J. 2004. Distribution of Electronic States in Amorphous Cd_3As_2 Thin Films on the Basis of Optical Measurements. J. Non-Cryst. Solids. V., 333(2): 206–211.
16. Li C. Z. et al. 2015. Giant negative magnetoresistance induced by the chiral anomaly in individual Cd_3As_2 nanowires. Nature communications, 6(1): 1–7.
17. Liang T. et al. 2015. Ultrahigh mobility and giant magnetoresistance in the Dirac semimetal Cd_3As_2. Nature materials, 14(3) : 280–284.
18. Liang T. et al. 2017. Anomalous Nernst effect in the dirac semimetal Cd_3As_2. Physical review letters, 118(13): 136601 5.
19. Lu H. et al. Topological phase transition in single crystals of $(Cd_{1-x-y}Zn_xMn_y)_3As_2$. 2017. Scientific reports. 7. (1): 1-10.
20. Marius G. 2016. The Physics of Semiconductors: An Introduction Including Nanophysics and Applications.
21. Nishihaya S., Uchida M., Nakazawa Y. et al. 2018. Negative Magnetoresistance Suppressed through a Topological Phase Transition in $(Cd_{1-x-y}Zn_xMn_y)_3As_2$ Thin Films. Phys. Rev. B., 97.(24): 245103.
22. Ivanov O.N., Yaprintsev M.N. et al. 2016. Low-temperature Minimum in the Electrical Resistivity of the $Bi_{1.9}$ $Lu_{0.1}Te_3$. J. NANO- ELECTRON. PHYS., 8, 4(1): 04036.

23. Pawlikowski J.M., Sieranski K., Szatkowski J. 1975. A New Method of Obtaining Crystalline Cd_3As_2 Films on Non-Crystalline Substrates. Thin Solid Films., 30(1): 99-102.

24. Stackelberg M. V., Paulu R. 1935. Untersuchungen an den Phosphiden und Arseniden des Zinks und Cadmiums. Das Zn_3P_2 -Gitter, Zeitschrift far Physikalische Chemie, 28B(1): 427-460.

25. Turner W. J., Fischler, A. S. Reese, W. E. 1961. Physical properties of several 2–5 semiconductors. Phys. Rev., 121: 759–767.

26. Uchida M. et al. 2017. Quantum Hall states observed in thin films of Dirac semimetal Cd_3As_2. Nature communications, 8(1): 1-7.

27. Wagner, R. J., Palik, E. D. Swiggard, E. M. 1971. Interband magnetoabsorption in $Cd_xZn_{3-x}As_2$ and $Cd_3As_xP_{2-x}$. J. Phys. Chem. Solids, Suppl., 1: 471.

28. Wang Q. et al. 2017. Ultrafast broadband photodetectors based on three-dimensional Dirac semimetal Cd_3As_2. Nano letters., 17(2): 834-841

29. Wang Z., Weng H., Wu Q. et al. 2013. Three-Dimensional Dirac Semimetal and Quantum Transport in Cd_3As_2. Phys. Rev., 88: 125427.

30. Weglowski, S. Lukaszewicz, K. 1968. Phase transition of Cd_3As_2 and Zn_3As_2. Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Chim., 16: 177–182.

31. Weszka J. 1999. Model of lattice dynamics of Cd_3As_2 single crystals. Physica Status Solidi (b)., 211(2): 605-619.

32. Weszka J., Renucci M., Zwick A. 1986. Some aspects of raman scattering in Cd_3As_2 single crystals. Physica Status Solidi (b)., 133(1): 57-64.

33. Zakhvalinskii V. S. et al. 2020. Hopping Conductivity Mechanism in Cd_3As_2 Films Prepared by Magnetron Sputtering. Journal of Nano- and Electronic Physics, 12(3):03029-1-03029.

34. Zhang K., Pan H., Zhang M. et al. 2017. Controllable synthesis and magnetotransport properties of Cd_3As_2 Dirac semimetal nanostructures. RSC Adv., 7 : 17689–17696

35. Zhou T. et al. 2016. Enhanced thermoelectric properties of the Dirac semimetal Cd_3As_2. Inorganic Chemistry Frontiers, 3(12) : 1637–1643.

References

1. Zhalilov N. S., Sanygin V. P., Kverdakov A.M. 1990. Preparation and properties of thin films Cd_3As_2 and Zn_3P_2. Izv. of the USSR Academy of Sciences. Neorgan. materials, 26(9): 1975-1976.

2. Shalimova K. V. 2010. Physics of semiconductors. St. Petersburg. Publishing house "Lan". 400 p.

3. Amarnath R., Bhargavi K. S., Kubakaddi S. S. 2020. Thermoelectric transport properties in 3D Dirac semimetal Cd_3As_2. Journal of Physics Condensed Matter, 32(22): 22570412.

4. Armitage N.P., Mele E.J., Vishwanath A. 2018. Weyl and Dirac Semimetals in Three-Dimensional Solids. Rev. Mod. Phys., 90: 015001.

5. Arushanov E. K. 1992. II3V2 compounds and alloys. Progress in crystal growth and characterization of materials, 25(3): 131-201.

6. Borisenko S., Gibson Q., Evtushinsky D. et al. 2014. Experimental Realization of a Three-Dimensional Dirac Semimetal. Phys. Rev. Lett., 113(2): 027603.

7. Burgess, T. et al. 2015. Zn_3As_2 nanowires and nanoplatelets: highly efficient infrared emission and photodetection by an earth abundant material. Nano Lett., 15: 378–385.

8. Chorsi H. T. et al. 2020. Widely Tunable Optical and Thermal Properties of Dirac Semimetal Cd_3As_2. Advanced Optical Materials, 8(8): 120302 6.

9. Crassee I. et al. 2018. 3D Dirac semimetal Cd_3As_2: A review of material properties. Physical Review Materials, 2(12): 120302 15.

10. Din M., Gould R.D. 2006. Van der Pauw Resistivity Measurements on Evaporated Thin Films Of Cadmium Arsenide, Cd_3As_2. Appl. Surf. Sci., 252(15): 5508–5501.

11. Dubowski J.J., Norman P., Sewell P.B., et al. 1987. Cadmium Arsenide Films Prepared by Pulsed Laser Evaporation: Electrical Properties and lattice parameters. Thin Solid Films, 147(1): 51-54.

12. Dubowski J.J., Williams D.F. 1984. Pulsed Laser Evaporation of Cd_3As_2. Appl. Phys. Lett., 44(3): 339.

13. Feng J., Pang Y., Wu D. et al. 2015. Large Linear Magnetoresistance in Dirac Semimetal Cd_3As_2 with Fermi Surfaces Close to the Dirac Points. Phys. Rev. B., 92. 081306.

14. He L.P., Hong X.C., Dong J.K. et al. 2014. Quantum Transport Evidence for the Three-Dimensional Dirac Semimetal Phase in Cd_3As_2. Phys. Rev. Lett., 113: 246402.

15. Jarzabek B., Weszka J., Cisowski J. 2004. Distribution of Electronic States in Amorphous Cd_3As_2 Thin Films on the Basis of Optical Measurements. J. Non-Cryst. Solids. V., 333(2): 206–211.

16. Li C. Z. et al. 2015. Giant negative magnetoresistance induced by the chiral anomaly in individual Cd_3As_2 nanowires. Nature communications, 6(1): 1–7.

17. Liang T. et al. 2015. Ultrahigh mobility and giant magnetoresistance in the Dirac semimetal Cd_3As_2. Nature materials, 14(3) : 280–284.

18. Liang T. et al. 2017. Anomalous Nernst effect in the dirac semimetal Cd_3As_2. Physical review letters, 118(13): 136601 5.

19. Lu H. et al. Topological phase transition in single crystals of $(Cd_{1-x-y}Zn_xMn_y)_3As_2$. 2017. Scientific reports. 7. (1): 1-10.

20. Marius G. 2016. The Physics of Semiconductors: An Introduction Including Nanophysics and Applications.

21. Nishihaya S., Uchida M., Nakazawa Y. et al. 2018. Negative Magnetoresistance Suppressed through a Topological Phase Transition in $(Cd_{1-x-y}Zn_xMn_y)_3As_2$ Thin Films. Phys. Rev. B., 97.(24): 245103.

22. Ivanov O.N., Yaprintsev M.N. et al. 2016. Low-temperature Minimum in the Electrical Resistivity of the $Bi_{1.9}$ $Lu_{0.1}Te_3$. J. NANO- ELECTRON. PHYS., 8, 4(1): 04036.

23. Pawlikowski J.M., Sieranski K., Szatkowski J. 1975. A New Method of Obtaining Crystalline Cd_3As_2 Films on Non-Crystalline Substrates. Thin Solid Films., 30(1): 99-102.

24. Stackelberg M. V., Paulu R. 1935. Untersuchungen an den Phosphiden und Arseniden des Zinks und Cadmiums. Das Zn_3P_2 -Gitter, Zeitschrift far Physikalische Chemie, 28B(1): 427-460.

25. Turner W. J., Fischler, A. S. Reese, W. E. 1961. Physical properties of several 2–5 semiconductors. Phys. Rev., 121: 759–767.

26. Uchida M. et al. 2017. Quantum Hall states observed in thin films of Dirac semimetal Cd_3As_2. Nature communications, 8(1): 1-7.

27. Wagner, R. J., Palik, E. D. Swiggard, E. M. 1971. Interband magnetoabsorption in $Cd_xZn_{3-x}As_2$ and $Cd_3As_xP_{2-x}$. J. Phys. Chem. Solids, Suppl., 1: 471.

28. Wang Q. et al. 2017. Ultrafast broadband photodetectors based on three-dimensional Dirac semimetal Cd_3As_2. Nano letters., 17(2): 834-841

29. Wang Z., Weng H., Wu Q. et al. 2013. Three-Dimensional Dirac Semimetal and Quantum Transport in Cd_3As_2. Phys. Rev., 88: 125427.

30. Weglowski, S. Lukaszewicz, K. 1968. Phase transition of Cd_3As_2 and Zn_3As_2. Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Chim., 16: 177–182.

31. Weszka J. 1999. Model of lattice dynamics of Cd_3As_2 single crystals. Physica Status Solidi (b)., 211(2): 605-619.

32. Weszka J., Renucci M., Zwick A. 1986. Some aspects of raman scattering in Cd_3As_2 single crystals. Physica Status Solidi (b)., 133(1): 57-64.

33. Zakhvalinskii V. S. et al. 2020. Hopping Conductivity Mechanism in Cd_3As_2 Films Prepared by Magnetron Sputtering. Journal of Nano- and Electronic Physics, 12(3):03029-1-03029.

34. Zhang K., Pan H., Zhang M. et al. 2017. Controllable synthesis and magnetotransport properties of Cd_3As_2 Dirac semimetal nanostructures. RSC Adv., 7 : 17689–17696

35. Zhou T. et al. 2016. Enhanced thermoelectric properties of the Dirac semimetal Cd_3As_2. Inorganic Chemistry Frontiers, 3(12) : 1637–1643.

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.
Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Получена 09.09.2021

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Неженцев Антон Васильевич – студент четвертого года обучения кафедры теоретической и экспериментальной физики института инженерных и цифровых технологий Белгородского государственного национального исследовательского университета
ул. Победы, 85, г. Белгород, 308015, Россия
E-mail: 1318586@bsu.edu.ru

Пилюк Евгений Александрович – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры теоретической и экспериментальной физики института инженерных и цифровых технологий Белгородского государственного национального исследовательского университета
ул. Победы, 85, г. Белгород, 308015, Россия
E-mail: pilyuk@bsu.edu.ru

Никуличева Татьяна Борисовна – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры прикладной математики и компьютерного моделирования института инженерных и цифровых технологий Белгородского государственного национального исследовательского университета
ул. Победы, 85, г. Белгород, 308015, Россия
E-mail: nikulicheva@bsu.edu.ru

Захвалинский Василий Сергеевич – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры теоретической и экспериментальной физики института инженерных и цифровых технологий Белгородского государственного национального исследовательского университета
ул. Победы, 85, г. Белгород, 308015, Россия
E-mail: zakhvalinskii@bsu.edu.ru

Япрынцев Максим Николаевич – кандидат физико-математических наук, научный сотрудник Центра коллективного пользования «Технологии и Материалы НИУ «БелГУ»
ул. Победы, 85, г. Белгород, 308015, Россия
E-mail: yaprintsev@bsu.edu.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Anton V. Nezhentsev – fourth year student of the Department of Theoretical and Experimental Physics of the Institute of Engineering and Digital Technologies, Belgorod State National Research University, Belgorod, Russia

Evgeny A. Pilyuk – PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Theoretical and Experimental Physics of the Institute of Engineering and Digital Technologies, Belgorod State National Research University, Belgorod, Russia

Tatiana B. Nikulicheva – PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Applied Mathematics and Computer Modeling, Institute of Engineering and Digital Technologies, Belgorod State National Research University, Belgorod, Russia

Vasily S. Zakhvalinsky – Doctor of Sciences Phys. Math., Professor, Professor of the Department of Theoretical and Experimental Physics of the Institute of Engineering and Digital Technologies, Belgorod State National Research University, Belgorod, Russia

Maxim N. Yapryntsev – PhD in Physics and Mathematics, Researcher, Center for Shared Use « Technologies and Materials, National Research University « BelSU », Belgorod, Russia

ОБЪЯВЛЕНИЕ

Мы приглашаем всех участников конференции и их коллег присылать свои статьи по материалам тезисов и докладов на конференции для опубликования в журнале «Прикладная математика & Физика» (БелГУ). До 2020 г. журнал издавался под названием «Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика».

Главный редактор: Васильев В. Б.

Рубрики журнала:

Математика.

Физика. Математическое моделирование.

Публикация статей в журнале бесплатная!

Статьи публикуются по итогам рецензирования.

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор).

Свидетельство о регистрации СМИ: ЭЛ № ФС 77 – 77959 от 19.02.2020.

Международный стандартный серийный номер журнала (ISSN) 2687-0959.

Журнал включен в Перечень ВАК рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней кандидата и доктора наук по следующим группам научных специальностей:

01.01.00 Математика.

1.1.1 Вещественный, комплексный и функциональный анализ.

1.1.2 Дифференциальные уравнения и математическая физика.

01.04.00 Физика.

1.3.8 Физика конденсированного состояния

Сайт журнала: http://maths-physics-journal.ru/index.php/journal/about