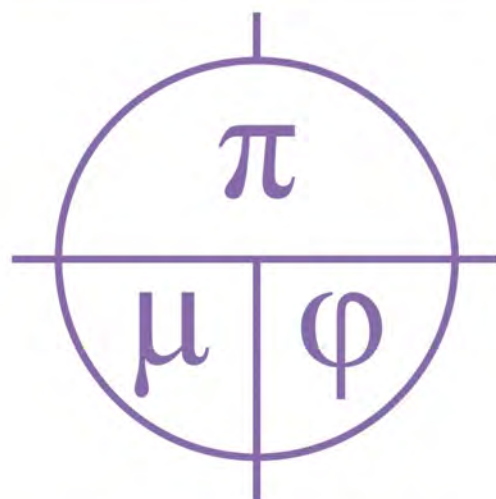


ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА & ФИЗИКА

APPLIED MATHEMATICS & PHYSICS

Том 53, № 4





Прикладная математика & Физика

2021. Том 53, № 4

Основан в 1995 г. Журнал включен в Перечень ВАК рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней кандидата и доктора наук (1.1.1 – вещественный, комплексный и функциональный анализ, 1.1.2 – дифференциальные уравнения и математическая физика, 1.3.8 – физика конденсированного состояния). До 2020 г. журнал издавался под названием «Научные ведомости Белгородского государственного университета. Математика. Физика».

УЧРЕДИТЕЛЬ:

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Белгородский государственный национальный исследовательский университет».

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:

Главный редактор: В. Б. Васильев, доктор физико-математических наук, НИУ «БелГУ»;
Заместители главного редактора: С. М. Ситник, доктор физико-математических наук, НИУ «БелГУ», Математика; А. В. Носков, доктор физико-математических наук, НИУ «БелГУ», Физика. Математическое моделирование;
Ответственный секретарь: О. В. Чернова, кандидат физико-математических наук, НИУ «БелГУ».

ЧЛЕНЫ РЕДАКЦИОННОЙ КОЛЛЕГИИ:

Ш. А. Алимов, д-р ф.-м. н., Ташкент, Узбекистан;	И. С. Ломов, д-р ф.-м. н., Москва, Россия;
Ю. А. Алхутов, д-р ф.-м. н., Владимир, Россия;	В. В. Меньших, д-р ф.-м. н., Воронеж, Россия;
А. Ашыралыев, д-р ф.-м. н., Алматы, Казахстан;	А. И. Назаров, д-р ф.-м. н., Санкт-Петербург, Россия;
С. В. Блажевич, д-р ф.-м. н., Белгород, Россия;	Е. Ю. Панов, д-р ф.-м. н., Великий Новгород, Россия;
А. Н. Беляков, д-р ф.-м. н., Белгород, Россия;	О. М. Пенкин, д-р ф.-м. н., Алматы, Казахстан;
А. Г. Брусенцев, д-р ф.-м. н., Белгород, Россия;	И. П. Половинкин, д-р ф.-м. н., Воронеж, Россия;
Ю. П. Вирченко, д-р ф.-м. н., Белгород, Россия;	Е. В. Радкевич, д-р ф.-м. н., Москва, Россия;
А. В. Глушак, д-р ф.-м. н., Белгород, Россия;	С. Е. Савотченко, д-р ф.-м. н., Белгород, Россия;
С. Б. Дабагов, д-р ф.-м. н., Москва, Россия;	А. П. Солдатов, д-р ф.-м. н., Москва, Россия;
Й. Диблик, д-р ф.-м. н., Брно, Чешская Республика;	В. Е. Федоров, д-р ф.-м. н., Челябинск, Россия;
Л. М. Кожевникова, д-р ф.-м. н., Стерлитамак, Россия;	А. А. Шибков, д-р ф.-м. н., Тамбов, Россия.
А. Н. Куликов, д-р ф.-м. н., Ярославль, Россия;	М. В. Шитикова, д-р ф.-м. н., Воронеж, Россия;
Д. М. Левин, д-р ф.-м. н., Тула, Россия;	Э. Л. Шишкина, д-р ф.-м. н., Воронеж, Россия.

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор). Выходит 4 раза в год.

Выпускающий редактор: Л. П. Котенко	Гарнитура Times. Уч. изд. л. 6,7
Корректурa: Ю. В. Ивахненко	Дата выхода 30.12.2021.
Компьютерная верстка: О. В. Чернова	Оригинал-макет подготовлен отделом
Оригинал-макет: В. Б. Васильев	объединенной редакции научных журналов НИУ «БелГУ»
E-mail: vasilyev_v@bsu.edu.ru	308015, г. Белгород, ул. Победы, 85.

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

В. Ш. Ройтенберг

О некоторых локальных бифуркациях обратимых кусочно-гладких динамических систем на плоскости 257

Г. Г. Петросян, М. С. Сорока

О существовании решения периодической краевой задачи для полулинейных дифференциальных включений дробного порядка из интервала $(3, 4)$ в банаховых пространствах 266

С. А. Алдашев

Задача Трикоми для некоторых классов многомерных смешанно гиперболо-параболических уравнений 284

В. А. Киричек

О разрешимости нелокальной задачи с интегральными условиями второго рода для гиперболического уравнения 293

Х. Алзамили, Э. Л. Шишкина

Весовое однородное распределение и его приложения 301

ФИЗИКА. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Ю. П. Вирченко, И. М. Шаполова

Распределение вероятностей критических напряжений разрыва образцов пористого материала 312



Applied Mathematics & Physics

2021. Volume 53, № 4

Founded in 1995. The journal is included into the List of Higher Attestation Commission of peer-reviewed scientific publications where the main scientific results of dissertations for obtaining scientific degrees of a candidate and doctor of science should be published (1.1.1 – material, complex and functional analysis, 1.1.2 – differential equations and mathematical physics, 1.3.8 – condensed matter physics). Until 2020, the magazine was published with the name «Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics. Physics».

FOUNDER:

Federal state autonomous educational establishment of higher education
«Belgorod National Research University».

EDITORIAL BOARD:

Chief Editor: V. B. Vasilyev, Dr.Sc., Ph.D., Belgorod National Research University;
Deputy Editor-in-Chief: S. M. Sitnik, Dr.Sc., Ph.D., Belgorod National Research University, Mathematics;
A. V. Noskov, Dr.Sc., Ph.D., Belgorod National Research University, Physics. Mathematical modeling;
Executive Secretary: O. V. Chernova, PhD, Belgorod National Research University.

EDITORIAL BOARD MEMBERS:

Sh. A. Alimov, Dr.Sc., Ph.D., Tashkent, Uzbekistan;	I. S. Lomov, Dr.Sc., Ph.D., Moscow, Russia;
Yu. A. Alkhutov, Dr.Sc., Ph.D., Vladimir, Russia;	V. V. Menshih, Dr.Sc., Ph.D., Voronezh, Russia;
A. Ashyralyev, Dr.Sc., Ph.D., Almaty, Kazakhstan;	A. I. Nazarov, Dr.Sc., Ph.D., St. Petersburg, Russia;
S. V. Blazhevich, Dr.Sc., Ph.D., Belgorod, Russia;	E. Yu. Panov, Dr.Sc., Ph.D., Velikiy Novgorod, Russia;
A. N. Belyakov, Dr.Sc., Ph.D., Belgorod, Russia;	O. M. Penkin, Dr.Sc., Ph.D., Almaty, Kazakhstan;
A. G. Brusentsev, Dr.Sc., Ph.D., Belgorod, Russia;	I. P. Polovinkin, Dr.Sc., Ph.D., Voronezh, Russia;
Yu. P. Virchenko, Dr.Sc., Ph.D., Belgorod, Russia;	E. V. Radkevich, Dr.Sc., Ph.D., Moscow, Russia;
A. V. Glushak, Dr.Sc., Ph.D., Belgorod, Russia;	S. E. Savotchenko, Dr. Sc Ph.D., Belgorod, Russia;
S. B. Dabagov, Dr.Sc., Ph.D., Moscow, Russia;	A. P. Soldatov, Dr.Sc., Ph.D., Moscow, Russia;
J. Diblik, Dr.Sc., Ph.D., Brno, Czech Republic;	V. E. Fedorov, Dr.Sc., Ph.D., Chelyabinsk, Russia;
L. M. Kozhevnikova, Dr.Sc., Ph.D., Sterlitamak, Russia;	A. A. Shibkov, Dr.Sc., Ph.D., Tambov, Russia.
A. N. Kulikov, Dr.Sc., Ph.D., Yaroslavl, Russia;	M. V. Shitikova, Dr.Sc., Ph.D., Voronezh, Russia;
D. M. Levin, Dr.Sc., Ph.D., Tula, Russia;	E. L. Shishkina, Dr. Sc., Ph.D., Voronezh, Russia.

The journal has been registered at the Federal service for supervision of communications information technology and mass media (Roskomnadzor). Publication frequency: 4 /year.

Commissioning Editor L. P. Kotenko
Proofreading Yu. V. Ivakhnenko
Computer imposition O. V. Chernova
Dummy layout by V. B. Vasilyev
E-mail: vasilyev_v@bsu.edu.ru

Typeface Times. Publisher's signature 6,7
Date of publishing 30.12.2021.
The layout is presented by Department of the united
Editorial Board of Scientific Journals Belgorod
National Research University
Address: 85 Pobeda St., Belgorod, 308015, Russia

CONTENTS

MATHEMATICS

Vladimir Roitenberg

On some local bifurcations of reversible piecewise smooth dynamical systems on the plane 257

Garik Petrosyan, Maria Soroka

On the existence of a solution of a periodic boundary value problem for semilinear differential inclusions of fractional order from the interval $(3, 4)$ in Banach spaces 266

Serik Aldashev

Tricomi problem for some classes of multidimensional mixed hyperbolic-parabolic equations 284

Vitalia Kirichek

On the solvability of a nonlocal problem with integral conditions of the second kind for hyperbolic equation 293

Hitam Alzamili, Elina Shishkina

Weighted homogeneous distribution and its applications 301

PHYSICS. MATHEMATICAL MODELING

Yuri Virchenko, Irina Shapolov

Probability distribution of critical tensions of sample break of porous material 312

МАТЕМАТИКА

УДК 517.92
MSC 34C14, 34C23

DOI 10.52575/2687-0959-2021-53-4-257-265

О НЕКОТОРЫХ ЛОКАЛЬНЫХ БИФУРКАЦИЯХ ОБРАТИМЫХ КУСОЧНО-ГЛАДКИХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ НА ПЛОСКОСТИ

В. Ш. Ройтенберг

(Статья представлена членом редакционной коллегии Ю. П. Вирченко)

Ярославский государственный технический университет,
Ярославль, 150023, Россия

E-mail: vroitenberg@mailru

Аннотация. Рассматривается двухпараметрическое семейство кусочно-гладких векторных полей, заданных на плоскости, «сшитых» из гладких векторных полей, определенных в верхней и нижней полуплоскостях. Векторные поля семейства являются обратимыми относительно инверсии, для которой линия переключения поля $y = 0$ состоит из неподвижных точек. При нулевых значениях параметров векторные поля, определенные в верхней и нижней полуплоскостях, имеют в начале координат O касание третьего порядка с осью x . Описаны бифуркации фазовых портретов в окрестности точки O при значениях параметров близких к нулю.

Ключевые слова: кусочно-гладкое векторное поле, обратимая динамическая система, бифуркация, особая точка, сепаратриса, периодическая траектория.

Для цитирования: Ройтенберг В. Ш. 2021. О некоторых локальных бифуркациях обратимых кусочно-гладких динамических систем на плоскости. Прикладная математика & Физика. 53(4): 257–265. DOI 10.52575/2687-0959-2021-53-4-257-265.

ON SOME LOCAL BIFURCATIONS OF REVERSIBLE PIECEWISE SMOOTH DYNAMICAL SYSTEMS ON THE PLANE

Vladimir Roitenberg

(Article submitted by a member of the editorial board Yu. P. Virchenko)

Yaroslavl State Technical University,
Yaroslavl, 150023, Russia

E-mail: vroitenberg@mail.ru

Received November, 21, 2021

Abstract. We consider a two-parameter family of piecewise-smooth vector fields on the plane, "sewn" from smooth vector fields defined in the upper and lower half-planes. The vector fields of the family are assumed to be reversible with respect to an inversion for which the switching line of the field $y = 0$ consists of fixed points. At zero values of the parameters, the vector fields defined in the upper and lower half-planes have a third-order tangency with the x -axis at the origin of coordinates O . Bifurcations of phase portraits in a neighborhood of point O are described for parameter values close to zero.

Key words: piecewise smooth vector field, reversible dynamical system, bifurcation, singular point, separatrix, periodic trajectory.

For citation: Roitenberg V. Sh. 2021. On some local bifurcations of reversible piecewise smooth dynamical systems on the plane. Applied Mathematics & Physics. 53(4): 257–265. (in Russian) DOI 10.52575/2687-0959-2021-53-4-257-265.

1. Введение. Динамическая система называется *обратимой*, если она инвариантна относительно инволюции и обращения времени. Обратимые динамические системы естественно возникают при описании ряда физических процессов [13]. Обратимые системы изучались с разных точек зрения, см., например, [2, 14, 15]. В статье [3] дан обзор работ по локальным бифуркациям гладких обратимых систем. Локальным бифуркациям кусочно-гладких динамических систем посвящено много работ, в частности [4, 7, 9, 10, 11, 12]. Представляет интерес и изучение бифуркаций обратимых кусочно-гладких динамических систем. В работах [5, 6] рассматривались обратимые кусочно-гладкие системы на плоскости, для которых линия разрыва векторного поля, задающего динамическую систему, совпадает с множеством неподвижных точек соответствующей инволюции. Были описаны локальные бифуркации в типичных однопараметрических семействах таких систем.

В этой работе мы рассмотрим два вида локальных бифуркаций в типичных двухпараметрических семействах обратимых кусочно-гладких векторных полей на плоскости.

2. Обратимые кусочно-гладкие динамические системы на плоскости и их траектории. Пусть M – окрестность точки $O = (0, 0)$ на координатной плоскости \mathbb{R}^2 , заданная неравенством $x^2 + y^2 < 1$, $\mathcal{D} = (M_+, M_-)$ – ее разбиение на множества M_+ и M_- , определяемые, соответственно, неравенствами $y \geq 0$ и $y \leq 0$. Пусть X^+ и X^- – векторные поля на M класса C^r ($r \geq 1$). Кусочно-гладким векторным полем $X = (X^+, X^-)$ на M с разбиением \mathcal{D} называется класс всех векторных полей X_* на M таких, что $X_*(x, y) = X^+(x, y)$, если $y > 0$, и $X_*(x, y) = X^-(x, y)$, если $y < 0$. Множество таких векторных полей обозначим $\mathfrak{X}^r(M, \mathcal{D})$. Траектории поля $X = (X^+, X^-)$ определим согласно [7] как траектории дифференциального включения $\dot{z} \in \hat{X}(z)$, где $\hat{X}(z) = \{X^+(z)\}$, если $z \in \text{int}M_+$, $\hat{X}(z) = \{X^-(z)\}$, если $z \in \text{int}M_-$, и $\hat{X}(z)$ – выпуклая оболочка векторов $X^+(z)$ и $X^-(z)$, если $z \in M_0 := M_+ \cap M_-$.

Векторное поле $X = (X^+, X^-) \in \mathfrak{X}^r(M, \mathcal{D})$, где $X^\pm(x, y) = (P^\pm(x, y), Q^\pm(x, y))$, называется обратимым (относительно инверсии $I : (x, y) \mapsto (x, -y)$) [5, 6], если

$$P^-(x, y) = -P^+(x, -y), \quad Q^-(x, y) = Q^+(x, -y). \tag{1}$$

Множество таких векторных полей будем обозначать $\mathfrak{X}_I^r(M, \mathcal{D})$. Из (1) следует, что если L – дуга траектории векторного поля $X^+|_{M_+}$, то $I(L)$ – дуга траектории векторного поля $X^+|_{M_-}$.

Точка $z_0 = (x_0, 0) \in M_0$ называется особой точкой поля $X = (X^+, X^-) \in \mathfrak{X}_I^r(M, \mathcal{D})$, если $Q^+(x_0, 0) = 0$. Особая точка является траекторией поля. Если на M_0 поле имеет конечное число особых точек, то любая его траектория L либо является траекторией одного из векторных полей $X^+|_{M_+}$ или $X^-|_{M_-}$, либо «сшивается» из дуг траекторий этих векторных полей: $L = \{z = \zeta(t) : t \in J\}$, где $\zeta : J \rightarrow M$ – непрерывная функция на промежутке J (открытом, полуоткрытом или замкнутом), причем для всех $t \in J$, кроме их конечного числа, $\zeta(t) \in M_+$ и $\dot{\zeta}(t) = X^+(\zeta(t))$ или $\zeta(t) \in M_-$ и $\dot{\zeta}(t) = X^-(\zeta(t))$ или $\zeta(t)$ – особая точка и $\dot{\zeta}(t) = 0$. При этом уравнение $z = I(\zeta(-t))$ также задает траекторию поля X .

Особая точка $z_0 = (x_0, 0)$ называется квазиседлом, если $P^+(z_0)(Q^+)'_x(z_0) > 0$, и квазицентром, если $P^+(z_0)(Q^+)'_x(z_0) < 0$ [5, 6]. Через квазиседло проходят траектории векторных полей $X^+|_{M_+}$ и $X^-|_{M_-}$, касающиеся в этой точке M_0 . Их положительные (отрицательные) полутраектории, начинающиеся в точке z_0 , будем называть выходящими (входящими) сепаратрисами квазиседла. Сепаратрисы разбивают окрестность квазиседла на четыре гиперболических сектора (рис. 1а). Квазицентр является траекторией поля X , а все остальные траектории, проходящие через точки некоторой его окрестности, являются замкнутыми (периодическими) (рис. 1б).

Особую точку z_0 назовем клювом, если $Q^+(z_0) = (Q^+)'_x(z_0) = 0$, $P^+(z_0)(Q^+)'_{xx}(z_0) \neq 0$. Пусть для определенности $P^+(z_0)(Q^+)'_{xx}(z_0) > 0$. Траектория поля $X^+|_{M_+}$ ($X^-|_{M_-}$), начинающаяся в точке z_0 , совпадает со своей положительной (отрицательной) полутраекторией и касается M_0 в этой точке. Будем называть ее выходящей (входящей) сепаратрисой клюва. Сепаратрисы разбивают окрестность клюва на два гиперболических сектора (рис. 1в). Случай $P^+(z_0)(Q^+)'_{xx}(z_0) < 0$ сводится к рассмотренному случаю переходом к векторному полю $-X$. Бифуркации клюва рассматривались в работе [6].

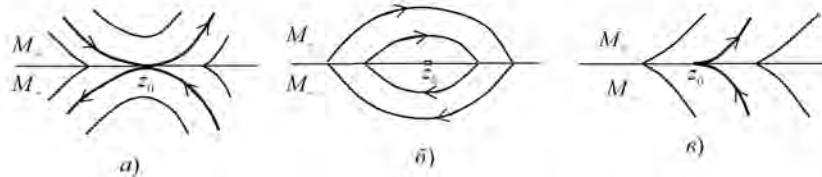


Рис. 1. Особые точки: а) квазиседло, б) квазицентр, в) клюв
Fig. 1. Singular points: а) quasisaddle, б) quasicenter, в) beak

3. Основные результаты. Рассмотрим семейство векторных полей $X_\epsilon = (X_\epsilon^+, X_\epsilon^-) \in \mathfrak{X}_I^r(M, \mathcal{D})$, зависящих от параметра ϵ , меняющегося в некоторой окрестности E' нуля двумерного пространства E . Пусть $X_\epsilon^\pm(x, y) = (P^\pm(x, y, \epsilon), Q^\pm(x, y, \epsilon))$, где P_i^\pm, Q_i^\pm ($i = 1, 2$) – C^r -функции, $r \geq 4$. Будем предполагать, что выполняются следующие условия:

Условие 1. $P^+(0) > 0$, $Q^+(0) = (Q^+)'_x(0) = (Q^+)'_{xx}(0) = 0$, $(Q^+)'_{xxx}(0) \neq 0$, $(Q^+)'_y(0) \neq 0$.

Условие 2. Ковекторы $(Q^+)'_\epsilon(0)$ и $(Q^+)'_{x\epsilon}(0)$ линейно независимы.

Из условия 1 следует, что для векторного поля X_0 поведение траектории в окрестности особой точки $O = (0, 0)$ при $(Q^+)'_{xxx}(0) > 0$ аналогично поведению траекторий в окрестности квазиседла, отличие только в большем порядке касания сепаратрис с M_0 , а при $(Q^+)'_{xxx}(0) < 0$ аналогично поведению траекторий в окрестности квазицентра.

Без ограничения общности можно считать $(Q^+)'_y(0) < 0$. Если $(Q^+)'_y(0) > 0$, то следует заменить векторные поля X_ϵ на векторные поля $-X_\epsilon$, а координату x на $-x$.

Выберем число $d_0 > 0$ и окрестности E'' нуля в E так, чтобы $P^+(x, y, \varepsilon) > 0$ при $|x| < d_0, |y| < d_0, \varepsilon \in E''$. Тогда траектории поля $X_\varepsilon^+, \varepsilon \in E''$, в области $|x| < d_0, |y| < d_0$ являются интегральными кривыми дифференциального уравнения $\frac{dy}{dx} = R(x, y, \varepsilon)$, где $R = Q^+/P^+$. Из условия 1 имеем

$$R(0) = R'_x(0) = R''_{xx}(0) = 0, \quad \text{sgn}R'''_{xxx}(0) = \text{sgn}(Q^+)'''_{xxx}(0), \tag{2}$$

$$R'_y(0) < 0. \tag{3}$$

Определим функции $f_i : E'' \rightarrow \mathbb{R}$, положив

$$f_1(\varepsilon) := -R'_x(0, 0, \varepsilon) \cdot \text{sgn}R'''_{xxx}(0), \quad f_2(\varepsilon) := R(0, 0, \varepsilon). \tag{4}$$

Так как $R'_\varepsilon(0) = Q'_\varepsilon(0)/P(0), R''_{x\varepsilon}(0) = Q''_{x\varepsilon}(0)/P(0) - P'_x(0)Q'_\varepsilon(0)/P^2(0)$, то из условия 2 и (4) следует, что и ковекторы $(f_2)'_\varepsilon(0)$ и $(f_1)'_\varepsilon(0)$ линейно независимы. Поэтому в некоторой окрестности E_0 нуля в E существуют такие C^{r-1} -координаты $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, что

$$\forall \varepsilon \in E_0 \quad f_1(\varepsilon) = \varepsilon_1, \quad f_2(\varepsilon) = \varepsilon_2. \tag{5}$$

Далее будем отождествлять точку $\varepsilon \in E_0$ с ее координатной строкой: $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ и полагать $E_0 = (-\delta_0, \delta_0)^2$ при некотором $\delta_0 > 0$.

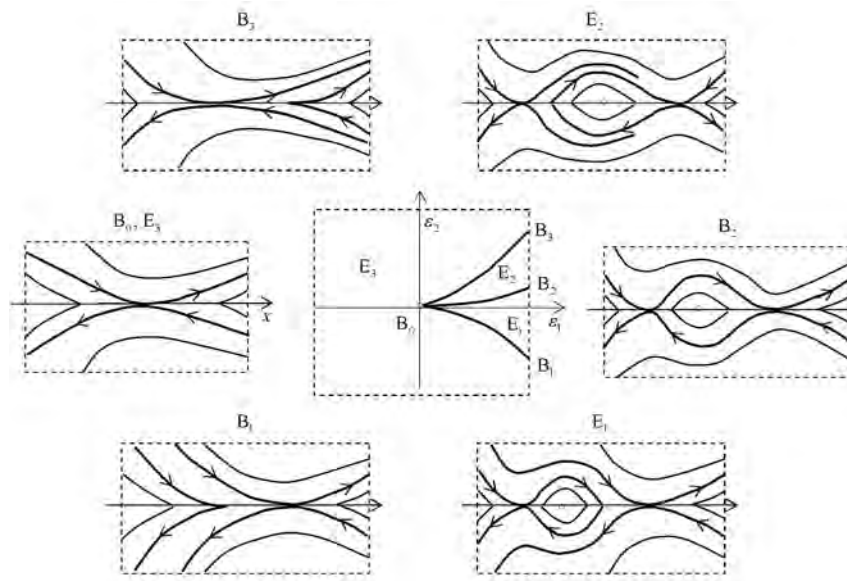


Рис. 2. Бифуркационная диаграмма в случае $(Q^+)'''_{xxx}(0) > 0$
 Fig. 2. Bifurcation diagram in the case $(Q^+)'''_{xxx}(0) > 0$

Теорема 1. Пусть для семейства векторных полей $X_\varepsilon \in \mathfrak{X}_I^r(M, \mathcal{D})$ выполняются условия 1 и 2, а $(Q^+)'''_{xxx}(0) > 0$. Тогда существуют окрестность U точки O , число $\delta \in (0, \delta_0)$ и разбиение области параметров $(-\delta, \delta)^2$ на множества $B_0 = \{(0, 0)\}, E_k, B_k, k = 1, 2, 3$, где

$$B_k = \{\varepsilon : \varepsilon_2 = b_k(\varepsilon_1)\}, b_k : (0, \delta) \rightarrow (-\delta, \delta), b_k \in C^1, b_1(+0) = b'_1(+0) = b_3(+0) = b'_3(+0) = 0, \forall \varepsilon_1 \in (0, \delta) \\ b_1(\varepsilon_1) < 0, b_3(\varepsilon_1) > 0, b_1(\varepsilon_1) < b_2(\varepsilon_1) < b_3(\varepsilon_1),$$

E_k – связная компонента $(-\delta, \delta)^2 \setminus \bigcup_{i=0}^3 B_i$, в границу которой входят B_k и B_{k+1} ($B_4 := B_1$), со следующими свойствами:

Фазовые портреты векторных полей X_ε в U при $\varepsilon \in E_k$ и $\varepsilon \in B_k$ имеют вид, изображенный на рис. 2.

Если $\varepsilon \in B_1$ или $\varepsilon \in B_3$, то X_ε имеет в U две особые точки: квазиседло и ключ. Выходящие (входящие) сепаратрисы квазиседла при возрастании (убывании) времени покидают U . При $\varepsilon \in B_1$ входящая (выходящая) сепаратриса ключа принадлежит M_+ (M_-) и при убывании (возрастании) времени покидает U . При $\varepsilon \in B_3$ входящая (выходящая) сепаратриса ключа принадлежит M_- (M_+), и при убывании возрастании (возрастании) времени покидает U . Все остальные траектории выходят из U и при возрастании, и при убывании времени.

Если $\varepsilon \in B_2 \cup E_1 \cup E_2$, то X_ε имеет в U три особых точки: квазиседла $z_\pm(\varepsilon) = (x_\pm(\varepsilon), 0)$ и квазицентр $z_0(\varepsilon) = (x_0(\varepsilon), 0)$, где $x_-(\varepsilon) < x_0(\varepsilon) < x_+(\varepsilon)$.

При $\varepsilon \in B_2$ выходящая (входящая) сепаратриса квазиседла $z_+(\varepsilon)$ совпадает с входящей (выходящей) сепаратрисой квазиседла $z_-(\varepsilon)$. Эти сепаратрисы образуют контур, являющийся периодической траекторией и ограничивающий вместе с квазицентром $z_0(\varepsilon)$ кольцевую область, состоящую из периодических траекторий. Две другие выходящие (входящие) сепаратрисы точек $z_\pm(\varepsilon)$ при возрастании (убывании) времени покидают U . Все остальные траектории выходят из U и при возрастании и при убывании времени.

При $\varepsilon \in E_1$, соотв. при $\varepsilon \in E_2$, выходящая и входящая сепаратриса квазиседла $z_-(\varepsilon)$, соотв. $z_+(\varepsilon)$, образуют контур, являющийся периодической траекторией, и ограничивающий вместе с квазицентром $z_0(\varepsilon)$ кольцевую область, состоящую из периодических траекторий. Другая выходящая (входящая) сепаратриса этой точки, а также выходящие (входящие) сепаратрисы точки $z_+(\varepsilon)$ соотв. точки $z_-(\varepsilon)$, при возрастании (убывании) времени покидают U . Все остальные траектории выходят из U и при возрастании и при убывании времени.

Если $\varepsilon \in E_3$, то X_ε имеет в U единственную особую точку – квазиседло, выходящие (входящие) сепаратрисы которого при возрастании (убывании) времени покидают U . Все остальные траектории выходят из U и при возрастании, и при убывании времени.

При любых $\varepsilon', \varepsilon'' \in E_k$ ($\varepsilon', \varepsilon'' \in B_k$) векторные поля $X_{\varepsilon'}$ и $X_{\varepsilon''}$ топологически эквивалентны в U .

Доказательство теоремы 1 приведено в разделах 4–6.

Теорема 2. Пусть семейство векторных полей $X_\varepsilon \in \mathfrak{X}_1^r(M, \mathcal{D})$ удовлетворяет условиям 1 и 2 и $(Q^+)'''_{xxx}(0) < 0$. Тогда существуют окрестность U точки O , число $\delta \in (0, \delta_0)$ и разбиение области параметров $(-\delta, \delta)^2$ на множества $B_0 = \{(0, 0)\}$, $E_k, B_k, k = 1, 2$, где

$$B_k = \{\varepsilon : \varepsilon_2 = b_k(\varepsilon_1)\}, b_k : (0, \delta) \rightarrow (-\delta, \delta), b_k \in C^1, b_k(+0) = b'_k(+0) = 0, b_1(\varepsilon_1) < 0 < b_3(\varepsilon_1),$$

E_k – связная компонента множества $(-\delta, \delta)^2 \setminus (B_0 \cup B_1 \cup B_2)$, в границу которой входят B_k и B_{k+1} ($B_3 := B_1$), со следующими свойствами:

Фазовые портреты векторных полей X_ε в U при $\varepsilon \in E_k$ и $\varepsilon \in B_k$ имеют вид, изображенный на рис. 3.

При любых $\varepsilon', \varepsilon'' \in E_k$ ($\varepsilon', \varepsilon'' \in B_k$) векторные поля $X_{\varepsilon'}$ и $X_{\varepsilon''}$ топологически эквивалентны в U .

Доказательство теоремы 2 аналогично доказательству теоремы 1 и потому опускается.

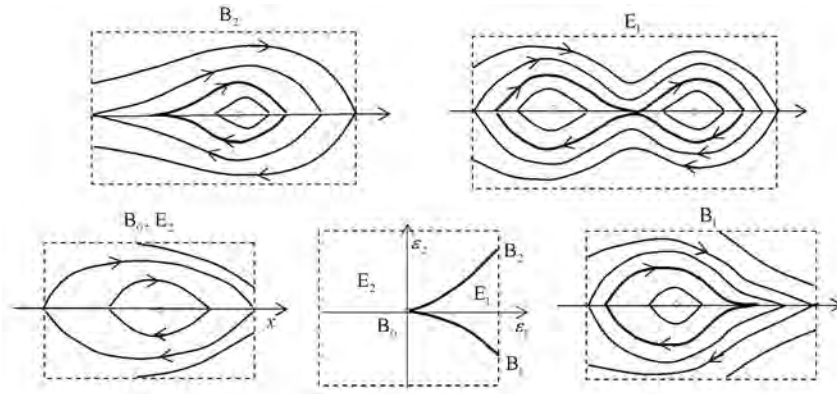


Рис.3. Бифуркационная диаграмма в случае $(Q^+)'''_{xxx}(0) < 0$

Fig. 3. Bifurcation diagram in the case $(Q^+)'''_{xxx}(0) < 0$

4. Окрестность U . Особые точки. Бифуркационные кривые B_1 и B_3 . По условию теоремы $(Q^+)'''_{xxx}(0) > 0$. Ввиду (2) и (3) можно выбрать такое число $d_1 > 0$, что $R(0, d_1, 0) < 0$. Отсюда и из (2) следует, что, взяв достаточно малые $d_2 > 0$ и $\delta_1 \in (0, \delta_0)$, будем иметь при всех $x \in [-d_2, d_2], \varepsilon \in [-\delta_1, \delta_1]^2$

$$R(x, d_1, \varepsilon) < 0, \tag{6}$$

$$R'''_{xxx}(x, 0, \varepsilon) > 0, \tag{7}$$

$$\pm R(\pm d_2, 0, \varepsilon) > 0. \tag{8}$$

Зададим окрестность U точки O неравенствами $|x| < d_2, |y| < d_1$. Ее граница ∂U является объединением дуг γ_i^\pm ($i = 1, 2, 3$), где $\gamma_1^+ = \{(x, y) : x = -d_2, 0 \leq y \leq d_1\}$, $\gamma_2^+ = \{(x, y) : -d_2 \leq x \leq d_2, y = d_1\}$, $\gamma_3^+ = \{(x, y) : x = d_2, 0 \leq y \leq d_1\}$, $\gamma_i^- = I(\gamma_i^+)$. Вследствие (6) $\forall \varepsilon \in (-\delta_1, \delta_1)^2$ траектории векторного поля X_ε^+ (X_ε^-) трансверсальны дугам γ_i^+ (γ_i^-), причем во внутренних точках γ_1^+ и γ_2^+ (γ_1^- и γ_2^-) они входят в U (выходят из \bar{U}), а в точках γ_3^+ (γ_3^-) они выходят из \bar{U} (входят в U).

Вследствие (7) и (8) функция $R(\cdot, 0, \varepsilon)$ имеет на отрезке $[-d_2, d_2]$ либо один, либо три нуля с учетом их кратности.

Пусть $Y(x, u, v, \varepsilon)$ – решение уравнения $y' = R(x, y, \varepsilon)$, которое удовлетворяет начальному условию $Y(u, u, v, \varepsilon) = v$. Обозначим N наибольшее значение $|R(x, y, \varepsilon)|$ в $\bar{U} \times [-\delta_1, \delta_1]^2$. Пусть $0 < d_* < \min\{d_2, N/2d_2\}$. Тогда при $|u| < d_*$ решение $Y(x, u, 0, \varepsilon)$ определено для всех $x \in [-d_2, d_2]$.

Вследствие (2) числа d_* и $\delta_2 \in (0, \delta_1)$ можно выбрать так, что все нули функции $R(\cdot, 0, \varepsilon), \varepsilon \in (-\delta_2, \delta_2)^2$, принадлежат интервалу $(-d_*, d_*)$.

Кратные нули функции $R(\cdot, 0, \varepsilon)$ удовлетворяют системе уравнений $R(x, 0, \varepsilon) = R'_x(x, 0, \varepsilon) = 0$. С учетом равенств (2), (4) и (5) ее можно записать в виде

$$\varepsilon_2 - \varepsilon_1 x + a(\varepsilon)x^2 + c(x, \varepsilon) = 0, \quad -\varepsilon_1 + 2a(\varepsilon)x + c'_x(x, \varepsilon) = 0, \tag{9}$$

где

$$a(\cdot) \in C^1, a(0) = 0, c(\cdot, \cdot) \in C^4, c(x, \varepsilon) = (R'''_{xxx}(0, \varepsilon)/6)x^3 + o(x^3), c'_x(x, \varepsilon) = (R'''_{xxx}(0, \varepsilon)/2)x^2 + o(x^2).$$

По теореме о неявной функции существует такое $\bar{x} \in (0, d_*)$, что для любого $x \in [-\bar{x}, \bar{x}]$ система (9) имеет относительно $\varepsilon \in (-\delta_2, \delta_2)^2$ решение $\varepsilon = \tilde{\varepsilon}(x) = (\tilde{\varepsilon}_1(x), \tilde{\varepsilon}_2(x))$, где $\tilde{\varepsilon}_k(\cdot)$ ($k = 1, 2$) – C^3 -функции, $\tilde{\varepsilon}_k(0) = 0$. Записав их в виде

$$\tilde{\varepsilon}_1(x) = \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + o(x^2), \tilde{\varepsilon}_2(x) = \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3 + o(x^3)$$

и подставив в (9), получим $\alpha_1 = \beta_1 = \beta_2 = 0, \alpha_2 = R'''_{xxx}(0)/2, \beta_3 = R'''_{xxx}(0)/3$. Таким образом, $R(\cdot, 0, \varepsilon)$ имеет кратный нуль $x \in [-\bar{x}, \bar{x}]$ при значениях параметров

$$\varepsilon_1 = \tilde{\varepsilon}_1(x) = \alpha_2 x^2 + o(x^2), \varepsilon_2 = \tilde{\varepsilon}_2(x) = \beta_3 x^3 + o(x^3), \tag{10}$$

где $\alpha_2 > 0, \beta_3 > 0$. Так как

$$R''_{xx}(x, 0, \tilde{\varepsilon}(x)) = 2a(\tilde{\varepsilon}(x)) + R'''_{xxx}(0, 0, \tilde{\varepsilon}(x))x + o(x) = R'''_{xxx}(0)x + o(x),$$

то \bar{x} можно считать выбранным так, что $\text{sgn}R''_{xx}(x, \tilde{\varepsilon}(x)) = \text{sgn}x$ при $x \in [-\bar{x}, \bar{x}]$. Следовательно, $x \in [-\bar{x}, \bar{x}], x \neq 0$ – двукратный нуль функции $R(\cdot, 0, \varepsilon)$ при $\varepsilon = \tilde{\varepsilon}(x)$. Ввиду (10) мы можем также считать \bar{x} столь малым, что 1) $\tilde{\varepsilon}_1(x)$ убывает на $[-\bar{x}, 0]$, возрастает на $[0, \bar{x}]$ и потому имеет на этих отрезках непрерывные обратные функции, соответственно $\tilde{x}_-(\varepsilon_1), \varepsilon_1 \in [0, \tilde{\varepsilon}_1(-\bar{x})]$ и $\tilde{x}_+(\varepsilon_1), \varepsilon_1 \in [0, \tilde{\varepsilon}_1(\bar{x})]$, дифференцируемые при $\varepsilon_1 \neq 0$; 2) $|\tilde{\varepsilon}_2(\pm\bar{x})| < \tilde{\varepsilon}_1(\pm\bar{x})$. Возьмем $0 < \delta < \min\{\tilde{\varepsilon}_1(-\bar{x}), \tilde{\varepsilon}_1(\bar{x})\}$ и положим $b_1(\varepsilon_1) := \tilde{\varepsilon}_2(\tilde{x}_-(\varepsilon_1)), \varepsilon_1 \in (0, \delta)$ и $b_3(\varepsilon_1) := \tilde{\varepsilon}_2(\tilde{x}_+(\varepsilon_1)), \varepsilon_1 \in (0, \delta)$. Из (10) следует, что $b_k(+0) = b'_k(+0) = 0, k = 1, 3$.

При $\varepsilon_2 = b_1(\varepsilon_1)$ $R(\cdot, 0, \varepsilon)$ кроме $\tilde{x}_-(\varepsilon_1)$ имеет еще один (простой) нуль, который обозначим $x_+(\varepsilon_1)$. При $\varepsilon_2 = b_1(\varepsilon_1)$ $R(x, 0, \varepsilon) = R''_{xx}(\tilde{x}_-(\varepsilon_1), \varepsilon)(x - \tilde{x}_-(\varepsilon_1))^2 + o((x - \tilde{x}_-(\varepsilon_1))^2)$. Поэтому $R(x_*, 0, \varepsilon) < 0$ при некотором $x_* > \tilde{x}_-(\varepsilon_1)$. Отсюда и из (8) получаем что $\tilde{x}_-(\varepsilon_1) < x_+(\varepsilon_1) < d$ и

$$R(x, 0, \varepsilon) < 0 \text{ при } x \in [-d, \tilde{x}_-(\varepsilon_1)] \cup (\tilde{x}_-(\varepsilon_1), x_+(\varepsilon_1)), R(x, 0, \varepsilon) > 0 \text{ при } x \in (x_+(\varepsilon_1), d], \tag{11}$$

$$R'_x(x_+(\varepsilon_1), 0, \varepsilon) > 0. \tag{12}$$

Аналогично, при $\varepsilon_2 = b_3(\varepsilon_1)$ функция $R(\cdot, 0, \varepsilon)$ кроме $\tilde{x}_+(\varepsilon_1)$ имеет еще один (простой) нуль $x_-(\varepsilon_1)$; при этом $-d < x_-(\varepsilon_1) < \tilde{x}_+(\varepsilon_1)$,

$$R(x, 0, \varepsilon) < 0 \text{ при } x \in [-d, x_-(\varepsilon_1)], R(x, 0, \varepsilon) > 0 \text{ при } x \in (x_-(\varepsilon_1), \tilde{x}_+(\varepsilon_1)] \cup (\tilde{x}_+(\varepsilon_1), d], \tag{13}$$

$$R'_x(x_-(\varepsilon_1), 0, \varepsilon) > 0. \tag{14}$$

Пусть $B_k := \{\varepsilon : \varepsilon_2 = b_k(\varepsilon_1)\}, k = 1, 3$.

5. Бифуркационная кривая B_2 . Обозначим $B_* := \{\varepsilon : 0 < \varepsilon_1 < \delta, b_1(\varepsilon_1) < \varepsilon_2 < b_3(\varepsilon_1)\}$. Так как при $\varepsilon_2 = 0$ точка $x = 0$ – нуль функции $R(x, 0, \varepsilon) = -\varepsilon_1 x + a(\varepsilon)x^2 + o(x^2)$ и $R'_x(0, 0, \varepsilon) = -\varepsilon_1 < 0$, то с учетом (8) получаем, что имеется еще два простых нуля. Так как простые нули непрерывно зависят от параметра, а B_* – связное множество, то $\forall \varepsilon \in B_*$ $R(\cdot, 0, \varepsilon)$ имеет на $(-d, d)$ три простых нуля

$$x_-(\varepsilon) < x_0(\varepsilon) < x_+(\varepsilon). \tag{15}$$

По теореме о неявной функции $x_-(\cdot), x_0(\cdot), x_+(\cdot) \in C^1$. Из (8) следует, что

$$\begin{aligned} R(x, 0, \varepsilon) &> 0 \text{ при } x \in (x_-(\varepsilon), x_0(\varepsilon)) \cup (x_+(\varepsilon), d_2), \\ R(x, 0, \varepsilon) &< 0 \text{ при } x \in (-d_2, x_-(\varepsilon)) \cup (x_0(\varepsilon), x_+(\varepsilon)), \end{aligned} \tag{16}$$

$R'_x(x_{\pm}(\varepsilon), 0, \varepsilon) > 0, R'_x(x_0(\varepsilon), 0, \varepsilon) < 0$, и потому точки $z_{\pm}(\varepsilon) = (x_{\pm}(\varepsilon), 0)$ – квазиседла, а точка $z_0(\varepsilon) = (x_0(\varepsilon), 0)$ – квазицентр.

Производная $Y'_{\varepsilon_2}(x, u, v, \varepsilon)$ решения $Y(x, u, v, \varepsilon)$ уравнения $y' = R(x, y, \varepsilon)$ удовлетворяет уравнению в вариациях

$$\frac{d}{dx} Y'_{\varepsilon_2} = R'_y(x, Y(x, u, v, \varepsilon), \varepsilon) Y'_{\varepsilon_2} + R'_{\varepsilon_2}(x, Y(x, u, v, \varepsilon), \varepsilon)$$

и начальному условию $Y'_{\varepsilon_2}(u, u, v, \varepsilon) = 0$. Следовательно,

$$Y'_{\varepsilon_2}(x, u, v, \varepsilon) = \int_u^x R'_{\varepsilon_2}(s, Y(s, u, v, \varepsilon), \varepsilon) \exp \int_s^x R'_y(\xi, Y(\xi, u, v, \varepsilon), \varepsilon) d\xi ds. \tag{17}$$

Функции $Y(\cdot, x_{\pm}(\varepsilon), 0, \varepsilon)$ определены во всех точках отрезка $[-d_2, d_2]$. Так как $R(0, 0, \varepsilon) = \varepsilon_2$, то $R'_{\varepsilon_2}(0, 0, \varepsilon) = 1$, и потому окрестность U и δ можно считать столь малыми, что $R'_{\varepsilon_2}(x, y, \varepsilon) \geq 1/2$ при всех $(x, y) \in U$, $\varepsilon \in [-\delta, \delta]^2$. Теперь из (15) и (17) имеем

$$Y'_{\varepsilon_2}(0, x_-(\varepsilon), 0, \varepsilon) > 0, \quad Y'_{\varepsilon_2}(0, x_+(\varepsilon), 0, \varepsilon) < 0. \quad (18)$$

Определим функцию $\Delta(\varepsilon) := Y(0, x_-(\varepsilon), 0, \varepsilon) - Y(0, x_+(\varepsilon), 0, \varepsilon)$. Ее производная

$$\Delta'_{\varepsilon_2}(\varepsilon) = Y'_u(0, x_-(\varepsilon), 0, \varepsilon)(x_-)'_{\varepsilon_2}(\varepsilon) + Y'_{\varepsilon_2}(0, x_-(\varepsilon), 0, \varepsilon) - Y'_u(0, x_+(\varepsilon), 0, \varepsilon)(x_+)'_{\varepsilon_2}(\varepsilon) - Y'_{\varepsilon_2}(0, x_+(\varepsilon), 0, \varepsilon). \quad (19)$$

По формуле для производной решения дифференциального уравнения по начальному значению аргумента [8, с. 120] $Y'_u(0, x_{\pm}(\varepsilon), 0, \varepsilon) = -Y'_v(0, x_{\pm}(\varepsilon), 0, \varepsilon)R(x_{\pm}(\varepsilon), 0, \varepsilon) = 0$. Отсюда, из (18) и (19) получаем

$$\Delta'_{\varepsilon_2}(\varepsilon) > 0. \quad (20)$$

Фиксируем $\varepsilon_1 \in (0, \delta)$. Пусть $\varepsilon = \hat{\varepsilon}(\mu) := (\varepsilon_1, b_1(\varepsilon_1) + \mu)$. При достаточно малом $\mu > 0$ $x_-(\hat{\varepsilon}(\mu)) < x_0(\hat{\varepsilon}(\mu)) < 0 < x_+(\hat{\varepsilon}(\mu))$, причем

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} x_-(\hat{\varepsilon}(\mu)) = \lim_{\mu \rightarrow 0} x_0(\hat{\varepsilon}(\mu)) = \tilde{x}_-(\varepsilon_1), \quad (21)$$

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} x_+(\hat{\varepsilon}(\mu)) = \tilde{x}_+(\varepsilon_1). \quad (22)$$

Ввиду (11)

$$Y(\tilde{x}_-(\varepsilon_1), x_+(\varepsilon_1), 0, \hat{\varepsilon}(0)) > 0. \quad (23)$$

Вследствие (21) – (23) при достаточно малых μ

$$Y(x_0(\hat{\varepsilon}(\mu)), x_+(\hat{\varepsilon}(\mu)), 0, \hat{\varepsilon}(\mu)) > Y(\tilde{x}_-(\varepsilon_1), x_+(\varepsilon_1), 0, \hat{\varepsilon}(0))/2 > 0. \quad (24)$$

Из (21) следует, что $\lim_{\mu \rightarrow 0} Y(x_0(\hat{\varepsilon}(\mu)), x_-(\hat{\varepsilon}(\mu)), 0, \hat{\varepsilon}(\mu)) = Y(\tilde{x}_-(\varepsilon_1), \tilde{x}_-(\varepsilon_1), 0, \hat{\varepsilon}(0)) = 0$. Отсюда и из (24) получаем, что про достаточно малых μ

$$Y(x_0(\hat{\varepsilon}(\mu)), x_-(\hat{\varepsilon}(\mu)), 0, \hat{\varepsilon}(\mu)) < Y(x_0(\hat{\varepsilon}(\mu)), x_+(\hat{\varepsilon}(\mu)), 0, \hat{\varepsilon}(\mu)).$$

Но тогда и $Y(0, x_-(\hat{\varepsilon}(\mu)), 0, \hat{\varepsilon}(\mu)) < Y(0, x_+(\hat{\varepsilon}(\mu)), 0, \hat{\varepsilon}(\mu))$. Тем самым,

$$\Delta(\varepsilon_1, b_1(\varepsilon_1) + \mu) < 0. \quad (25)$$

Аналогично, используя (13), доказываем, что достаточно малых $\mu > 0$

$$\Delta(\varepsilon_1, b_3(\varepsilon_1) - \mu) > 0. \quad (26)$$

Из (25), (26) и (20) получаем, что существует число $b_2(\varepsilon_1) \in (b_1(\varepsilon_1), b_3(\varepsilon_1))$ такое, что

$$\text{sgn}\Delta(\varepsilon) = \text{sgn}(\varepsilon_2 - b_2(\varepsilon_1)). \quad (27)$$

Из (27) и (20) по теореме о неявной функции следует, что $b_2(\cdot) \in C^1$. Положим $B_2 := \{\varepsilon : \varepsilon_2 = b_2(\varepsilon_1)\}$.

6. Перестройки фазовых портретов в U . Множества B_k уже были определены выше. Множества E_k определим согласно формулировке теоремы 1.

Пусть сначала $\varepsilon \in B_1$. В обозначении $\tilde{x}_-(\varepsilon_1)$ будем опускать тильду. Так как для $R(\cdot, 0, \varepsilon)$, а потому и для $Q^+(\cdot, 0, \varepsilon)$, $x_-(\varepsilon_1)$ – двукратный нуль, $\text{sgn}Q''_{xx}(x_-(\varepsilon_1), \varepsilon) = \text{sgn}R''_{xx}(x_-(\varepsilon_1), \varepsilon) = -1$, то $z_-(\varepsilon) = (x_-(\varepsilon_1), 0)$ является ключом, входящая сепаратриса которого является траекторией поля $X_{\varepsilon}|_{M_+}$. Вследствие (12) особая точка $z_+(\varepsilon) = (x_+(\varepsilon_1), 0)$ – квазиседло. Из (11) и поведения траекторий в точках ∂U следует, что входящая сепаратриса ключа пересекает ∂U в точке $N^+(\varepsilon) \in \gamma_1^+$, одна входящая (выходящая) сепаратриса квазиседла не выходит из M_+ и пересекает ∂U в точке $N_{in}^+(\varepsilon) \in \gamma_1^+(N_{ext}^+(\varepsilon) \in \gamma_{ext}^+)$. Обозначим $L^+(\varepsilon)$, $L_{in}^+(\varepsilon)$, $L_{ext}^+(\varepsilon)$ соответственно дуги траекторий векторного поля $X_{\varepsilon}|_{M_+}$ между точками $z_-(\varepsilon)$ и $N^+(\varepsilon)$, $z_+(\varepsilon)$ и $N_{in}^+(\varepsilon)$, $z_+(\varepsilon)$ и $N_{ext}^+(\varepsilon)$. Тогда $L^-(\varepsilon) = I(L^+(\varepsilon))$, $L_{ext}^-(\varepsilon) = I(L_{in}^+(\varepsilon))$ и $L_{in}^-(\varepsilon) = I(L_{ext}^+(\varepsilon))$ соответственно дуги выходящей сепаратрисы ключа, выходящей и входящей сепаратрисы квазиседла. Через каждую точку множества $U \setminus (L^+(\varepsilon) \cup L^-(\varepsilon) \cup L_{in}^+(\varepsilon) \cup L_{in}^-(\varepsilon) \cup L_{ext}^+(\varepsilon) \cup L_{ext}^-(\varepsilon))$ проходит единственная траектория поля X_{ε} , выходящая из U , как при возрастании, так и при убывании времени.

Пусть $\varepsilon', \varepsilon'' \in B_1$. Покажем, что векторные поля $X_{\varepsilon'}|_U$ и $X_{\varepsilon''}|_U$ топологически эквивалентны, то есть существует гомеоморфизм U , переводящий траектории поля $X_{\varepsilon'}|_U$ в траектории поля $X_{\varepsilon''}|_U$. Достаточно построить гомеоморфизм $h : \tilde{U}_+ \rightarrow \tilde{U}_+$, где $U_+ := U \cap M_+$, переводящий особые точки в особые точки и любую траекторию поля $X_{\varepsilon'}|_{U_+}$ в траекторию поля $X_{\varepsilon''}|_{U_+}$. Обозначим $S(\varepsilon) := L^+(\varepsilon) \cup L_{in}^+(\varepsilon) \cup L_{ext}^+(\varepsilon)$. Ясно, что существует гомеоморфизм $h_S : S(\varepsilon') \rightarrow S(\varepsilon'')$, переводящий точки $z_-(\varepsilon')$ и $z_+(\varepsilon')$ соответственно в точки

$z_-(\varepsilon')$ и $z_+(\varepsilon')$, дуги $L^+(\varepsilon')$, $L_{in}^+(\varepsilon')$, $L_{ext}^+(\varepsilon')$ соответственно в дуги $L^+(\varepsilon'')$, $L_{in}^+(\varepsilon'')$, $L_{ext}^+(\varepsilon'')$. Обозначим $Q(\varepsilon)$ связную компоненту $U_+ \setminus S(\varepsilon)$, в границу которой входят дуги $L^+(\varepsilon)$, $L_{in}^+(\varepsilon)$, дуга $l(\varepsilon) \subset \gamma_1^+$ между точками $N^+(\varepsilon)$ и $N_{in}^+(\varepsilon)$, а также дуга $y = 0$, $x_-(\varepsilon_1) \leq x \leq x_+(\varepsilon_1)$. Пусть $z = \zeta(t, x, \varepsilon)$ – уравнение траектории поля X_ε^+ , начинающейся в точке $z = (x, 0)$: $\zeta(0, x, \varepsilon) = z$. Так как имеет место (11), а поле X_ε^+ трансверсально дуге γ_1^+ , то из [1, п. 3.6] следует, что существует такая непрерывная функция $T_\varepsilon : [x_-(\varepsilon_1), x_+(\varepsilon_1)] \rightarrow (-\infty, 0)$, что $\zeta(T_\varepsilon(x), x, \varepsilon) \in l(\varepsilon)$, а $Q(\varepsilon) = \{z = \zeta(t, x, \varepsilon) : x_-(\varepsilon_1) < x < x_+(\varepsilon_1), T_\varepsilon(x) < t \leq 0\}$. Гомеоморфизм $h_S : S(\varepsilon') \rightarrow S(\varepsilon'')$ индуцирует такие гомеоморфизмы $\tau_\pm : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, $\tau_\pm(0) = 0$, что

$$\forall s \in [0, 1] \quad h_S \zeta(s T_\varepsilon(x_\pm(\varepsilon'_1)), x_\pm(\varepsilon'_1), \varepsilon') = \zeta(\tau_\pm(s) T_\varepsilon(x_\pm(\varepsilon''_1)), x_\pm(\varepsilon''_1), \varepsilon'').$$

Пусть $\varphi : [x_-(\varepsilon'_1), x_+(\varepsilon'_1)] \rightarrow [x_-(\varepsilon''_1), x_+(\varepsilon''_1)]$ – гомеоморфизм, $\varphi(x_-(\varepsilon'_1)) = x_-(\varepsilon''_1)$,

$$\tau(s, x) := \frac{x_+(\varepsilon') - x}{x_+(\varepsilon') - x_-(\varepsilon')} \tau_-(s) + \frac{x - x_-(\varepsilon')}{x_+(\varepsilon') - x_-(\varepsilon')} \tau_+(s).$$

Равенство $h_Q(\zeta(s T_\varepsilon(x), x, \varepsilon')) = \zeta(\tau(s, x) T_\varepsilon(\varphi(x)), \varphi(x), \varepsilon'')$ задает гомеоморфизм $h_Q : \overline{Q(\varepsilon')} \rightarrow \overline{Q(\varepsilon'')}$, переводящий траектории поля $X_{\varepsilon'}|_{U_+}$ в траектории поля $X_{\varepsilon''}|_{U_+}$ и совпадающий с h_S в граничных точках $\overline{Q(\varepsilon')}$. Аналогично задаются гомеоморфизмы $h_Q : \overline{Q(\varepsilon')} \rightarrow \overline{Q(\varepsilon'')}$ для остальных компонент $Q(\varepsilon')$ и $Q(\varepsilon'')$ множеств $U_+ \setminus S(\varepsilon')$ и $U_+ \setminus S(\varepsilon'')$. Тогда гомеоморфизм $h : \bar{U}_+ \rightarrow \bar{U}_+$ задается равенствами $h(z) := h_Q(z)$, для любой компоненты $Q = Q(\varepsilon')$ множества $U_+ \setminus S(\varepsilon')$, содержащей в своем замыкании точку z .

Случай $\varepsilon \in V_3$ рассматривается аналогично случаю $\varepsilon \in V_1$. Вместо (11) и (12) надо использовать (13) и (14).

Пусть $\varepsilon \in E_1$. Векторное поле X_ε имеет два квазиседла $z_\pm(\varepsilon) = (x_\pm(\varepsilon), 0)$ и квазицентр $z_0(\varepsilon) = (x_0(\varepsilon), 0)$. Из (16) и (27) имеем $Y(x, x_+(\varepsilon), 0, \varepsilon) > 0$ при всех $x \in [-d_2, d_2]$, $x \neq x_+(\varepsilon)$, а также $Y(q(\varepsilon), x_-(\varepsilon), 0, \varepsilon) = 0$, $Y(x, x_-(\varepsilon), 0, \varepsilon) > 0$ при $x \in (-d_2, q(\varepsilon))$, $x \neq x_-(\varepsilon)$ где $x_0(\varepsilon) < q(\varepsilon) < x_+(\varepsilon)$. Отсюда получаем следующие утверждения: Уравнение $y = Y(x, x_+(\varepsilon), 0, \varepsilon)$ при $x \in (-d_2, x_+(\varepsilon))$ (при $x \in [x_+(\varepsilon), d_2]$) задает входящую (выходящую) сепаратрису $L_{+,in}^+(\varepsilon)$ ($L_{+,ext}^+(\varepsilon)$) квазиседла $z_+(\varepsilon)$; $L_{+,in}^-(\varepsilon) = I(L_{+,ext}^+(\varepsilon))$ ($L_{+,ext}^-(\varepsilon) = I(L_{+,in}^+(\varepsilon))$) также входящая (выходящая) сепаратриса $z_+(\varepsilon)$. Уравнение $y = Y(x, x_-(\varepsilon), 0, \varepsilon)$ при $x \in (-d_2, x_-(\varepsilon))$ задает входящую сепаратрису $L_{-,in}^+(\varepsilon)$ квазиседла $z_-(\varepsilon)$; $L_{-,ext}^-(\varepsilon) = I(L_{-,in}^+(\varepsilon))$ – выходящая сепаратриса точки $z_-(\varepsilon)$. Уравнение $y = Y(x, x_-(\varepsilon), 0, \varepsilon)$ при $x \in [x_-(\varepsilon), q(\varepsilon)]$ задает дугу $L_{-,ext}^+(\varepsilon)$ выходящей сепаратрисы квазиседла $z_-(\varepsilon)$; $L_{-,in}^-(\varepsilon) = I(L_{-,ext}^+(\varepsilon))$ – дуга входящей сепаратрисы $z_-(\varepsilon)$. «Петля сепаратрисы» $L_{-,ext}^+(\varepsilon) \cup L_{-,in}^-(\varepsilon)$ является периодической траекторией поля X_ε . Все траектории, проходящие через точки кольцевой области $K(\varepsilon)$, ограниченной этой петлей и квазицентром $z_0(\varepsilon)$, также периодические. Через каждую точку множества

$$D(\varepsilon) := U \setminus (\overline{K(\varepsilon)} \cup L_{+,in}^+(\varepsilon) \cup L_{+,in}^-(\varepsilon) \cup L_{+,ext}^+(\varepsilon) \cup L_{+,ext}^-(\varepsilon) \cup L_{-,in}^+(\varepsilon) \cup L_{-,ext}^-(\varepsilon))$$

проходит единственная траектория поля X_ε , выходящая из U , как при возрастании, так и при убывании времени.

Случай $\varepsilon \in E_2$ отличается от случая $\varepsilon \in E_1$ только сменой ролей точек $z_-(\varepsilon)$ и $z_+(\varepsilon)$. Теперь совпадают, образуя петлю, выходящая и входящая сепаратрисы точки $z_+(\varepsilon)$.

В случае $\varepsilon \in B_2$ из (16) и (27) получаем $Y(x, x_-(\varepsilon), 0, \varepsilon) = Y(x, x_+(\varepsilon), 0, \varepsilon) > 0$ при всех $x \in [-d_2, d_2]$, $x \neq x_\pm(\varepsilon)$. Тем самым, выходящая сепаратриса $L_{-,ext}^+(\varepsilon)$ точки $z_-(\varepsilon)$, задаваемая уравнением $y = Y(x, x_-(\varepsilon), 0, \varepsilon)$, $x \in [x_-(\varepsilon), x_+(\varepsilon)]$ совпадает с входящей сепаратрисой точки $z_+(\varepsilon)$, а входящая сепаратриса $L_{-,in}^-(\varepsilon) = I(L_{-,ext}^+(\varepsilon))$ точки $z_-(\varepsilon)$ совпадает с входящей сепаратрисой точки $z_+(\varepsilon)$. Замкнутая кривая $L_{-,ext}^+(\varepsilon) \cup L_{-,in}^-(\varepsilon)$ является периодической траекторией. Все траектории, проходящие через точки кольцевой области $K(\varepsilon)$, ограниченной этой кривой и квазицентром $z_0(\varepsilon)$, также периодические. Сепаратрисы $L_{-,in}^+(\varepsilon)$, $L_{-,ext}^-(\varepsilon)$, $L_{+,ext}^+(\varepsilon)$ и $L_{+,in}^-(\varepsilon)$ определяются также как и в случае $\varepsilon \in B_1$. Через каждую точку множества $D(\varepsilon)$ проходит единственная траектория поля X_ε , выходящая из U , как при возрастании, так и при убывании времени.

При $\varepsilon = (\varepsilon_1, 0) \in E_3$ точка $x = 0$ – нуль функции $R(\cdot, 0, \varepsilon)$ и $R'_x(0, 0, \varepsilon) = -\varepsilon_1 > 0$. Ввиду (8) других нулей на $[-d_2, d_2]$ у $R(\cdot, 0, \varepsilon)$ нет. Так как E_3 – связное множество, то $\forall \varepsilon \in E_3$ $R(\cdot, 0, \varepsilon)$ имеет на $[-d_2, d_2]$ единственный нуль $x_0(\varepsilon)$, при этом $R'_x(x_0(\varepsilon), 0, \varepsilon) > 0$. Тем самым, поле X_ε имеет в U единственную особую точку – квазиседло $z_0(\varepsilon) = (x_0(\varepsilon), 0)$.

Вследствие (2) и (7) $R(\cdot, 0, 0)$ имеет на $[-d_2, d_2]$ единственный нуль $x = 0$ и $\forall x \in [-d_2, d_2]$ $\text{sgn}R(x, 0, 0) = \text{sgn}x$. Поэтому поле X_0 имеет в U единственную особую точку O , а поведение его траектории в U аналогично поведению траекторий векторных полей X_ε , $\varepsilon \in E_3$.

Топологическая эквивалентность векторных полей $X_{\varepsilon'}|_U$ и $X_{\varepsilon''}|_U$ при ε'_1 и ε''_1 , принадлежащих соответственно B_2, B_3, E_1, E_2, E_3 , доказывается аналогично тому, как это было сделано для случая $\varepsilon', \varepsilon'' \in B_1$.

На этом доказательство теоремы 1 закончено.

Список литературы

1. Андронов А. А., Леонтович Е. А., Гордон И. И., Майер А. Г. 1966. Качественная теория динамических систем второго порядка. М., Наука. 568.
2. Вирченко Ю. П., Субботин А. В. 2015. Обратимые в широком смысле динамические системы. Науч. ведомости БелГУ. Сер. Математика. Физика. 11: 89–96.
3. Лерман Л. М., Тураев Д. В. 2012. О бифуркациях потери симметрии в обратимых системах. Нелинейная динамика. 8 (2): 323–343.
4. Ройтенберг В. Ш. 2017. О бифуркациях в окрестности особой точки типа «трехкратный сшитый фокус». Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физ.-мат. науки. 2: 18–31. DOI: 10.21685/2072-3040-2017-2-2.
5. Ройтенберг В. Ш. 2020. Локальные бифуркации обратимых кусочно-гладких динамических систем на плоскости. Математика и математическое моделирование. 1: 1–15. DOI: 10.24108/mathm.0120.0000 213
6. Ройтенберг В. Ш. 2020. О некоторых бифуркациях обратимых кусочно-гладких динамических систем на плоскости. Вестник Адыгейского государственного университета. Серия: Естественно-математические и технические науки. 2: 11–17.
7. Филиппов А. Ф. 1985. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М., Наука. 224.
8. Хартман Ф. 1970. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., Мир. 720.
9. Guardia M., Seara T. M., Teixeira M. A. 2011. Generic bifurcations of low codimension of planar Filippov systems. J. Differential Equations. 250(4): 1967–2023. DOI: 10.1016/j.jde.2010.11.0163.
10. Han M., Zhang W. 2010. On Hopf bifurcation in non-smooth planar systems. J. Differential Equations. 248: 2399–2416. DOI: 10.1016/j.jde.2009.10.002
11. Hogan S. J., Homer M. E., Jeffrey M. R., Szalai R. 2016. Piecewise Smooth Dynamical Systems Theory: The Case of the Missing Boundary Equilibrium Bifurcations. J. Nonlinear Sci. 26: 1161–1173. DOI 10.1007/s00332-016-9301-1
12. Kuznetsov Yu. A. Rinaldi S., Gragnani A. 2003. One-parameter bifurcations in planar Filippov systems. Intern. J. of Bifurcation and Chaos. 13(8): 2157–2188. DOI: 10.1142/S0218127403007874
13. Lamb J. S. W., Roberts J. A. G. 1998. Time-reversal symmetry in dynamical systems: A survey. Physica D. 112 (1 – 2): 1–39. DOI: 10.1016/S0167-2789(97)00199-1
14. Sevryuk M. B. 1986. Reversible systems. Lecture Notes in Math., vol. 1211. Berlin, Springer: 319.
15. Teixeira M. A. 1997. Singularities of reversible vector fields. Physica D. 1–2: 101–118. DOI: 10.1016/ S0167-2789(96)00183-2

References

1. Andronov A. A., Leontovich E. A., Gordon I. I., Maier A. G. 1966. Kachestvennaja teorija dinamičeskikh sistem vtorogo porjadka [The qualitative theory of dynamical systems of second order]. Moscow, Nauka Publ. 568 (in Russian).
2. Virchenko Yu. P., Subbotin A. V. 2015. Reversible systems in wide sense. Belgorod State University Scientific Bulletin. Ser. Mathematics. Physics. 11: 89–96 (in Russian).
3. Lerman L. M., Turaev D. V. 2012. On symmetry breaking bifurcations in reversible systems. Russian J. Nonlinear Dynamics. 8(2): 323–343 (in Russian).
4. Roitenberg V.Sh. 2017. On bifurcations in the neighborhood of a singular point of the triple sewn focus type. University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences. 2 (42): 18-31 (in Russian). DOI: 10.21685/2072-3040-2017-2-2.
5. Roitenberg V.Sh. 2020. Local bifurcations of reversible piecewise smooth planar dynamical systems. Mathematics and mathematical modelling. 1: 1–15 (in Russian). DOI: 10.24108/mathm.0120.0000213

6. Roitenberg V.Sh. 2020. On some bifurcations of reversible piecewise smooth planar dynamical systems. Bulletin of Adyge State University. Ser. "Natural-Mathematical and Technical Sciences". 2: 11–17 (in Russian).
7. Filippov A.F. 1985. Differential'nye uravneniya s razryvnoj pravoy chast'ju [Differential equations with a discontinuous right-hand side]. Moscow, Nauka Publ. 224 (in Russian).
8. Hartman. Ph. 1970. Obyknovennye differencial'nye uravneniya [Ordinary differential equations] Moscow, Mir Publ. 720 (in Russian).
9. Guardia M., Seara T.M., Teixeira M.A. 2011. Generic bifurcations of low codimension of planar Filippov systems. J. Differential Equations. 250(4): 1967–2023. DOI: 10.1016/j.jde.2010.11.0163.
10. Han M., Zhang W. 2010. On Hopf bifurcation in non-smooth planar systems. J. Differential Equations. 248: 2399–241. DOI: 10.1016/j.jde.2009.10.002
11. Hogan S. J., Homer M. E., Jeffrey M. R., Szalai R. 2016. Piecewise Smooth Dynamical Systems Theory: The Case of the Missing Boundary Equilibrium Bifurcations. J. Nonlinear Sci. 26: 1161–1173. DOI 10.1007/s00332-016-9301-1
12. Kuznetsov Yu.A. Rinaldi S., Gragnani A. 2003. One-parameter bifurcations in planar Filippov systems. Intern. J. of Bifurcation and Chaos. 13(8): 2157–2188. DOI: 10.1142/S0218127403007874
13. Lamb J.S.W., Roberts J.A.G. 1998. Time-reversal symmetry in dynamical systems: A survey. Physica D. 112(1–2): 1–39. DOI: 10.1016/S0167-2789(97)00199-1
14. Sevryuk M. B. 1986. Reversible systems. Lecture Notes in Math., vol. 1211. Berlin, Springer: 319.
15. Teixeira M. A. 1997. Singularities of reversible vector fields. Physica D. 1–2: 101–118. DOI: 10.1016/S0167-2789(96)00183-2

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Получена 21.11.2021

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Ройтенберг Владимир Шлеймович – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры высшей математики Ярославского государственного технического университета

 <http://orcid.org/0000-0002-1293-7998>

Московский проспект, 88, Ярославль, 150023, Россия

E-mail: vroirenberg@mail.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Vladimir Roytenberg – PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Higher Mathematics, Yaroslavl State Technical University, Yaroslavl, Russia

**О СУЩЕСТВОВАНИИ РЕШЕНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ
ДЛЯ ПОЛУЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ ДРОБНОГО ПОРЯДКА
ИЗ ИНТЕРВАЛА (3, 4) В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ**

Г. Г. Петросян, М. С. Сорока

(Статья представлена членом редакционной коллегии И. П. Половинкиным)

ФГБОУ ВО Воронежский государственный педагогический университет,
Воронеж, 394043, Россия

E-mail: garikpetrosyan@yandex.ru, marya.afanasowa@yandex.ru

Аннотация. В работе исследуется периодическая краевая задача для класса полулинейных дифференциальных включений дробного порядка из интервала (3, 4) в банаховом пространстве, для которых многозначная нелинейность удовлетворяет условию регулярности, выраженному в терминах мер некомпактности. Для доказательства существования решения задачи конструируется соответствующая функция Грина. Затем вводится в рассмотрение многозначный разрешающий оператор в пространстве непрерывных функций. После чего поставленная задача сводится к задаче существования неподвижных точек разрешающего мультиоператора. Для доказательства существования неподвижных точек используется обобщенная теорема типа Б. Н. Садовского.

Ключевые слова: дифференциальное включение, дробная производная, функция Грина, уплотняющий мультиоператор, мера некомпактности, неподвижная точка.

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства просвещения России в рамках выполнения государственного задания в сфере науки (номер темы FZGF-2020-0009) и гранта Президента РФ для государственной поддержки молодых российских ученых – кандидатов наук, проект МК-338.2021.1.1.

Для цитирования: Петросян Г. Г., Сорока М. С. 2021. О существовании решения периодической краевой задачи для полулинейных дифференциальных включений дробного порядка из интервала (3,4) в банаховых пространствах. Прикладная математика & Физика. 53(4): 266–283. DOI 10.52575/2687-0959-2021-53-4-266-283.

**ON THE EXISTENCE OF A SOLUTION OF A PERIODIC BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR
SEMILINEAR DIFFERENTIAL INCLUSIONS OF FRACTIONAL ORDER FROM THE INTERVAL (3,4)
IN BANACH SPACES**

Garik Petrosyan, Maria Soroka

(Article submitted by a member of the editorial board I. P. Polovinkin)

Voronezh State Pedagogical University,
Voronezh, 394043, Russia

E-mail: garikpetrosyan@yandex.ru, marya.afanasowa@yandex.ru

Received November, 21, 2021

Abstract. In this paper we study a periodic boundary value problem for a class of semilinear differential inclusions of fractional order from the interval (3,4) in a Banach space for which the multivalued nonlinearity satisfies the regularity condition expressed in terms of measures of noncompactness. We prove the existence of a solution to the problem, we first construct the corresponding Green's function. Then we introduce into consideration a multivalued resolving operator in the space of continuous functions and reduce the problem posed to the problem of the existence of fixed points of a resolving multioperator. We prove the existence of fixed points, by using a generalized B.N. Sadovskii type theorem.

Key words: differential inclusion, fractional derivative, Green's function, condensing multioperator, measure of noncompactness, fixed point.

Acknowledgements: The work was supported by the State contract of the Russian Ministry of Education as part of the state task (contract FZGF-2020-0009) and the grant from the President of the Russian Federation for young scientists - candidates of science, project number MK-338.2021.1.1.

For citation: Petrosyan Garik, Soroka Maria. 2021. On the existence of a solution of a periodic boundary value problem for semilinear differential inclusions of fractional order from the interval (3,4) in Banach spaces. Applied Mathematics & Physics. 53(4): 266–283. (in Russian) DOI 10.52575/2687-0959-2021-53-4-266-283.

1. Введение. Дробное исчисление и теория дифференциальных уравнений и включений дробного порядка приобрели значительную популярность и важность в течение последних трех десятилетий, в

основном благодаря продемонстрированным приложениям в многочисленных, казалось бы, разнообразных и широко распространенных областях науки и инженерии (см. монографии [19], [22], статьи [1], [2], [3], [14], [17], [18]). Данный раздел математики действительно предоставляет множество полезных инструментов для различных задач, связанных со специальными функциями математической физики, а также их расширениями и обобщениями для одной или нескольких переменных (см. работы [20], [23], [24]). Помимо этого, область применения дробного анализа в современной науке включает исследования в теории потоков жидкости, реологии, динамических процессов в самоподобных и пористых структурах, диффузионного переноса, электросетей, теории управления динамическими системами, теории вязкоупругости, электрохимии оптики и многом другом (см. монографии [11], [25], статью [4]). Одной из важных задач качественного исследования, напрямую связанной с прикладной проблематикой, является задача существования периодических траекторий систем (см., например, [5], [6], [7], [12], [13]). В настоящей работе данная задача решается для класса полулинейных дифференциальных включений дробного порядка $q \in (3, 4)$ в банаховом пространстве, для которых многозначная нелинейность удовлетворяет условию регулярности, выраженному в терминах мер некомпактности.

В сепарабельном банаховом пространстве E мы исследуем периодическую краевую задачу для полулинейного дифференциального включения следующего вида:

$${}^C D^q x(t) \in \eta x(t) + F(t, x(t)), \quad t \in [0, T], \quad (1)$$

$$x(0) = x(T), \quad x'(0) = x'(T), \quad x''(0) = x''(T), \quad x'''(0) = x'''(T). \quad (2)$$

Здесь ${}^C D^q$ – дробная производная Герасимова – Капуто, число $\eta > 0$, и $F: [0, T] \times E \rightarrow E$ – многозначное отображение. Отметим, что для полулинейного случая с дробной производной порядка $q \in (3, 4)$ такого рода задачи до настоящего времени не были исследованы.

Статья организована следующим образом. Во втором разделе мы приводим необходимые понятия и факты из дробного анализа и теории уплотняющих отображений. В третьем пункте мы конструируем функцию Грина для указанной выше задачи, затем мы вводим и исследуем разрешающий интегральный оператор в пространстве непрерывных функций, неподвижные точки которого совпадают с решениями задачи. На этой основе мы доказываем основной результат существования периодического решения (теорема 4.1).

2. Предварительные сведения. 2.1. Дробный анализ. Вначале приведем известные понятия и утверждения из дробного анализа (см. [19, 22]).

Определение 2.1. Дробным интегралом порядка $q > 0$ функции $g: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ называется функция $I^q g$ следующего вида:

$$I^q g(t) = \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} g(s) ds, \quad \text{где } \Gamma - \text{гамма-функция Эйлера}$$

$$\Gamma(q) = \int_0^\infty x^{q-1} e^{-x} dx.$$

Для гамма-функции Эйлера выполняется следующее условие, необходимое нам в дальнейшем (см., например, [22]):

$$\frac{1}{\Gamma(q)} = 0, \quad \text{для } q = 0, -1, -2, \dots \quad (3)$$

Определение 2.3. Дробной производной Герасимова – Капуто порядка $q \geq 0$ функции $g \in C^n([0, T])$ называется функция ${}^C D^q g$ следующего вида:

$${}^C D^q g(t) = \frac{1}{\Gamma(n-q)} \int_0^t (t-s)^{n-q-1} g^{(n)}(s) ds, \quad n = [q] + 1.$$

Определение 2.4. Функция вида

$$E_{q,\beta}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(qn + \beta)}, \quad q > 0, \beta \in \mathbb{C}, z \in \mathbb{C},$$

называется функцией Миттаг – Леффлера.

Зачастую функцию $E_{q,1}$ обозначают через E_q . Функция Миттаг – Леффлера имеет огромное значение в теории дифференциальных уравнений дробного порядка. Рассмотрим задачу Коши для скалярного дифференциального уравнения дробного порядка

$${}^C D^q x(t) = \eta x(t) + f(t), \quad t \in [0, T], \quad 2 < q < 3, \quad (4)$$

$$x(0) = c_1, x'(0) = c_2, x''(0) = c_3, x'''(0) = c_4, \quad (5)$$

где $\eta \in \mathbb{R}$, $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ – функция, для которой существует дробный интеграл порядка q .

Решением последней задачи является непрерывная функция $x : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющая условиям (5), для которой дробная производная Герасимова – Капуто ${}^C D^q x$ также непрерывна и удовлетворяет уравнению (4). Известно (см. [19]), что единственным решением данной задачи является функция

$$x(t) = c_1 E_q(\eta t^q) + c_2 t E_{q,2}(\eta t^q) + c_3 t^2 E_{q,3}(\eta t^q) + c_4 t^3 E_{q,4}(\eta t^q) + \int_0^t (t-s)^{q-1} E_{q,q}(\eta(t-s)^q) f(s) ds.$$

Справедливы следующие соотношения и утверждение (см. [10]):

$$E_{q,\beta}(t) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} + t E_{q,\beta+q}(t), \quad (6)$$

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^n (t^{\beta-1} E_{q,\beta}(\eta t^q)) = t^{\beta-n-1} E_{q,\beta-n}(\eta t^q), \quad (7)$$

$$\int_0^z t^{\beta-1} E_{q,\beta}(\eta t^q) dt = z^\beta E_{q,\beta+1}(\eta z^q). \quad (8)$$

Лемма 2.1. (см. [16]). Для функции $f \in L^\infty([0, T]; E)$ и $q > 1, \beta \in \mathbb{R}$, имеет место равенство

$$\left(\int_0^t (t-s)^{q-1} E_{q,\beta}(\eta(t-s)^q) f(s) ds\right)'_t = \int_0^t (t-s)^{q-2} E_{q,\beta-1}(\eta(t-s)^q) f(s) ds.$$

2.2. Многочисленные отображения. Пусть \mathcal{E} – банахово пространство. Введем следующие обозначения:

- $P(\mathcal{E}) = \{A \subseteq \mathcal{E} : A \neq \emptyset\}$;
- $Pb(\mathcal{E}) = \{A \in P(\mathcal{E}) : A \text{ ограничено}\}$;
- $Pv(\mathcal{E}) = \{A \in P(\mathcal{E}) : A \text{ выпукло}\}$;
- $K(\mathcal{E}) = \{A \in Pb(\mathcal{E}) : A \text{ компактно}\}$;
- $Kv(\mathcal{E}) = Pv(\mathcal{E}) \cap K(\mathcal{E})$.

Определение 2.5. (См., например, [15, 21]). Пусть (\mathcal{A}, \geq) частично-упорядоченное множество. Функция $\beta : Pb(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{A}$ называется мерой некомпактности (МНК) в \mathcal{E} , если для каждого $\Omega \in Pb(\mathcal{E})$ выполняется:

$$\beta(\overline{\text{co}} \Omega) = \beta(\Omega),$$

где $\overline{\text{co}} \Omega$ обозначает замыкание выпуклой оболочки Ω .

Мера некомпактности β называется:

- 1) *монотонной*, если для любых $\Omega_0, \Omega_1 \in Pb(\mathcal{E})$, включение $\Omega_0 \subseteq \Omega_1$ влечет неравенство $\beta(\Omega_0) \leq \beta(\Omega_1)$;
- 2) *несингулярной*, если для любого $a \in \mathcal{E}$ и любого $\Omega \in Pb(\mathcal{E})$ выполняется равенство $\beta(\{a\} \cup \Omega) = \beta(\Omega)$.

Если \mathcal{A} конус в банаховом пространстве, то мера некомпактности β называется:

- 3) *правильной*, если равенство $\beta(\Omega) = 0$ эквивалентно относительной компактности множества $\Omega \in Pb(\mathcal{E})$;
- 4) *вещественной*, если \mathcal{A} подмножество действительных чисел \mathbb{R} с естественным порядком;
- 5) *алгебраически полуаддитивной*, если $\beta(\Omega_0 + \Omega_1) \leq \beta(\Omega_0) + \beta(\Omega_1)$, для всех $\Omega_0, \Omega_1 \in Pb(\mathcal{E})$.

Примером вещественной МНК, удовлетворяющей всем вышеперечисленным свойствам, является МНК Хаусдорфа $\chi(\Omega)$: $\chi(\Omega) = \inf\{\varepsilon > 0, \text{ для которых } \Omega \text{ имеет конечную } \varepsilon\text{-сеть в } \mathcal{E}\}$.

Отметим, что МНК Хаусдорфа удовлетворяет также свойству полуоднородности $\chi(\eta\Omega) = |\eta|\chi(\Omega)$, для всех $\eta \in \mathbb{R}$ и $\Omega \in Pb(\mathcal{E})$. Более того, если $\mathcal{L} : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ – линейный ограниченный оператор, то $\chi(\mathcal{L}(\Omega)) = \|\mathcal{L}\|\chi(\Omega)$ для любого $\Omega \in Pb(\mathcal{E})$. Норма множества $M \in Pb(\mathcal{E})$ определяется по формуле $\|M\| = \sup_{x \in M} \|x\|_{\mathcal{E}}$.

Следующие понятия и утверждения можно найти в монографиях [15, 21].

Определение 2.6. Пусть X – метрическое пространство. Мнозначное отображение (мультиотображение) $\mathcal{F} : X \rightarrow P(\mathcal{E})$ называется:

- (i) полунепрерывным сверху (п.н.с.), если $\mathcal{F}^{-1}(V) = \{x \in X : \mathcal{F}(x) \subset V\}$ – открытое подмножество X для любого открытого множества $V \subset \mathcal{E}$,
- (ii) замкнутым, если график $\Gamma_{\mathcal{F}} = \{(x, y) : y \in \mathcal{F}(x)\}$ – замкнутое подмножество $X \times \mathcal{E}$,
- (iii) компактным, если $\mathcal{F}(X)$ – относительно компактно в \mathcal{E} ,
- (iv) квазикompактным, если сужение на любое компактное подмножество $A \subset X$ компактно.

Лемма 2.2. Пусть X и Y – метрические пространства и $\mathcal{F} : X \rightarrow K(Y)$ – замкнутое квазикompактное мультиотображение, тогда \mathcal{F} – п.н.с.

Определение 2.7. Мультиотображение $\mathcal{F} : X \subseteq \mathcal{E} \rightarrow K(\mathcal{E})$ называется уплотняющим относительно МНК β (β – уплотняющим), если для любого ограниченного множества $\Omega \subseteq X$, не являющегося относительно компактным, выполнено:

$$\beta(\mathcal{F}(\Omega)) \not\subseteq \beta(\Omega).$$

Справедлива следующая теорема о неподвижной точке для уплотняющих мультиотображений (см., например, [15, 21]).

Теорема 2.1. Пусть M – выпуклое замкнутое подмножество \mathcal{E} и $\mathcal{F} : M \rightarrow Kv(M)$ – β – уплотняющее мультиотображение, где β – несингулярная мера некомпактности в \mathcal{E} . Тогда множество неподвижных точек $\mathcal{F} : \text{Fix } \mathcal{F} := \{x : x \in \mathcal{F}(x)\}$ – непустое множество.

2.3. Измеримые мультифункции. Напомним некоторые понятия (см., например, [15, 21]). Пусть E – банахово пространство.

Определение 2.8. Мультифункция $G : [0, T] \rightarrow K(E)$, для $p \geq 1$, называется:

- L^p -интегрируемой, если она допускает L^p -интегрируемое сечение по Бохнеру, т.е. существует функция $g \in L^p([0, T]; E)$ такая, что $g(t) \in G(t)$ для п. в. $t \in [0, T]$;
- L^p -интегрально ограниченной, если существует функция $\xi \in L^p([0, T])$ такая, что:

$$\|G(t)\| := \sup \{\|g\|_E : g(t) \in G(t)\} \leq \xi(t)$$

для п. в. $t \in [0, T]$.

Множество всех L^p -интегрируемых сечений мультифункции $G : [0, T] \rightarrow K(E)$ обозначается \mathcal{S}_G^p .

Определение 2.9. Последовательность функций $\{\xi_n\} \subset L^p([0, T]; E)$, $p \geq 1$, называется L^p -полукомпактной, если она L^p -интегрально ограничена, то есть

$$\|\xi_n(t)\|_E \leq v(t) \text{ для всех } n = 1, 2, \dots, \text{ и п.в. } t \in [0, T],$$

где $v \in L_+^p([0, T])$ и множество $\{\xi_n(t)\}$ относительно компактно в E для п.в. $t \in [0, T]$.

3. Основные результаты

Рассмотрим в сепарабельном банаховом пространстве E краевую задачу (4), (5):

$${}^C D^q x(t) = \eta x(t) + f(t), \quad t \in [0, T], \quad 3 < q < 4,$$

$$x(0) = c_1, \quad x'(0) = c_2, \quad x''(0) = c_3, \quad x'''(0) = c_4, \quad \text{где } f : [0, T] \rightarrow E.$$

Определение 3.1. Интегральным решением краевой задачи (4), (5) называется функция $x \in C([0, T]; E)$, удовлетворяющая равенству

$$x(t) = c_1 E_q(\eta t^q) + c_2 t E_{q,2}(\eta t^q) + c_3 t^2 E_{q,3}(\eta t^q) + c_4 t^3 E_{q,4}(\eta t^q) + \int_0^t (t-s)^{q-1} E_{q,q}(\eta(t-s)^q) f(s) ds.$$

Лемма 3.1. Пусть $f \in C([0, T]; E)$ и

$$\begin{aligned} \alpha = & \left(1 - E_q(\eta T^q)\right)^4 - 2(1 - E_q(\eta T^q))E_{q,3}(\eta T^q)E_{q,0}^2(\eta T^q) - 2(1 - E_q(\eta T^q))E_{q,2}^2(\eta T^q)E_{q,-1}(\eta T^q) - \\ & 2(1 - E_q(\eta T^q))^2 E_{q,3}(\eta T^q)E_{q,-1}(\eta T^q) - 3(1 - E_q(\eta T^q))^2 E_{q,2}(\eta T^q)E_{q,0}(\eta T^q) - E_{q,2}^3(\eta T^q)E_{q,-2}(\eta T^q) - \\ & 2E_{q,2}(\eta T^q)E_{q,3}(\eta T^q)E_{q,-1}(\eta T^q)E_{q,0}(\eta T^q) - 2E_{q,2}(\eta T^q)E_{q,3}(\eta T^q)E_{q,-2}(\eta T^q)(1 - E_q(\eta T^q)) + \\ & E_{q,2}^2(\eta T^q)E_{q,0}^2(\eta T^q) + E_{q,3}^2(\eta T^q)E_{q,-1}^2(\eta T^q) - E_{q,3}^2(\eta T^q)E_{q,0}(\eta T^q)E_{q,-2}(\eta T^q) - E_{q,4}(\eta T^q)E_{q,0}^3(\eta T^q) - \\ & E_{q,4}(\eta T^q)E_{q,-2}(\eta T^q)(1 - E_q(\eta T^q))^2 - E_{q,4}(\eta T^q)E_{q,2}(\eta T^q)E_{q,-1}^2(\eta T^q) + \\ & E_{q,4}(\eta T^q)E_{q,2}(\eta T^q)E_{q,0}(\eta T^q)E_{q,-2}(\eta T^q) - E_{q,4}(\eta T^q)E_{q,0}(\eta T^q)E_{q,-1}(\eta T^q)(1 - E_q(\eta T^q)) - \\ & (1 - E_q(\eta T^q))E_{q,4}(\eta T^q)E_{q,-1}(\eta T^q)E_{q,0}(\eta T^q) \neq 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Тогда краевая задача (4),(2):

$${}^C D^q x(t) = \eta x(t) + f(t), \quad t \in [0, T], \quad 3 < q < 4,$$

$$x(0) = x(T), \quad x'(0) = x'(T), \quad x''(0) = x''(T), \quad x'''(0) = x'''(T)$$

имеет единственное решение

$$x(t) = \int_0^T G(t, s) f(s) ds,$$

где функция Грина $G(t, s)$ имеет следующий вид

$$G(t, s) =$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha^{-1} \left(E_q(\eta t^q) \alpha_1 + t E_{q,2}(\eta t^q) T^{-1} \alpha_5 + t^2 E_{q,3}(\eta t^q) T^{-2} \alpha_8 + t^3 E_{q,4}(\eta t^q) T^{-3} \alpha_{10} \right) (T-s)^{q-1} E_{q,q}(\eta(T-s)^q) + \\ \alpha^{-1} \left(E_q(\eta t^q) T \alpha_2 + t E_{q,2}(\eta t^q) \alpha_6 + t^2 E_{q,3}(\eta t^q) T^{-1} \alpha_9 + t^3 E_{q,4}(\eta t^q) T^{-2} \alpha_8 \right) (T-s)^{q-2} E_{q,q-1}(\eta(T-s)^q) + \\ \alpha^{-1} \left(E_q(\eta t^q) T^2 \alpha_3 + t E_{q,2}(\eta t^q) T \alpha_7 + t^2 E_{q,3}(\eta t^q) \alpha_6 + t^3 E_{q,4}(\eta t^q) T^{-1} \alpha_5 \right) (T-s)^{q-3} E_{q,q-2}(\eta(T-s)^q) + \\ \alpha^{-1} \left(E_q(\eta t^q) T^3 \alpha_4 + t E_{q,2}(\eta t^q) T^2 \alpha_3 + t^2 E_{q,3}(\eta t^q) T \alpha_2 + t^3 E_{q,4}(\eta t^q) \alpha_1 \right) (T-s)^{q-4} E_{q,q-3}(\eta(T-s)^q) + \\ (t-s)^{q-1} E_{q,q}(\eta(t-s)^q), \quad 0 \leq s \leq t \leq T, \\ \\ \alpha^{-1} \left(E_q(\eta t^q) \alpha_1 + t E_{q,2}(\eta t^q) T^{-1} \alpha_5 + t^2 E_{q,3}(\eta t^q) T^{-2} \alpha_8 + t^3 E_{q,4}(\eta t^q) T^{-3} \alpha_{10} \right) (T-s)^{q-1} E_{q,q}(\eta(T-s)^q) + \\ \alpha^{-1} \left(E_q(\eta t^q) T \alpha_2 + t E_{q,2}(\eta t^q) \alpha_6 + t^2 E_{q,3}(\eta t^q) T^{-1} \alpha_9 + t^3 E_{q,4}(\eta t^q) T^{-2} \alpha_8 \right) (T-s)^{q-2} E_{q,q-1}(\eta(T-s)^q) + \\ \alpha^{-1} \left(E_q(\eta t^q) T^2 \alpha_3 + t E_{q,2}(\eta t^q) T \alpha_7 + t^2 E_{q,3}(\eta t^q) \alpha_6 + t^3 E_{q,4}(\eta t^q) T^{-1} \alpha_5 \right) (T-s)^{q-3} E_{q,q-2}(\eta(T-s)^q) + \\ \alpha^{-1} \left(E_q(\eta t^q) T^3 \alpha_4 + t E_{q,2}(\eta t^q) T^2 \alpha_3 + t^2 E_{q,3}(\eta t^q) T \alpha_2 + t^3 E_{q,4}(\eta t^q) \alpha_1 \right) (T-s)^{q-4} E_{q,q-3}(\eta(T-s)^q), \\ 0 \leq t < s < T, \end{array} \right.$$

где

$$\alpha_1 = (1 - E_q(\eta T^q))^3 - E_{q,3}(\eta T^q) E_{q,0}^2(\eta T^q) - E_{q,2}^2(\eta T^q) E_{q,-1}(\eta T^q) - \\ E_{q,3}(\eta T^q) E_{q,-1}(\eta T^q) (1 - E_q(\eta T^q)) - 2E_{q,2}(\eta T^q) E_{q,0}(\eta T^q) (1 - E_q(\eta T^q)),$$

$$\alpha_2 = E_{q,2}(\eta T^q) (1 - E_q(\eta T^q))^2 - E_{q,2}^2(\eta T^q) E_{q,0}(\eta T^q) + E_{q,3}(\eta T^q) E_{q,0}(\eta T^q) (1 - E_q(\eta T^q)) + \\ E_{q,4}(\eta T^q) E_{q,0}^2(\eta T^q) + E_{q,3}(\eta T^q) E_{q,2}(\eta T^q) E_{q,-1}(\eta T^q) + E_{q,4}(\eta T^q) E_{q,-1}(\eta T^q) (1 - E_q(\eta T^q)),$$

$$\alpha_3 = E_{q,2}(\eta T^q) E_{q,3}(\eta T^q) E_{q,0}(\eta T^q) - E_{q,3}^2(\eta T^q) E_{q,-1}(\eta T^q) + E_{q,3}(\eta T^q) (1 - E_q(\eta T^q))^2 + \\ E_{q,4}(\eta T^q) E_{q,2}(\eta T^q) E_{q,-1}(\eta T^q) + E_{q,2}^2(\eta T^q) (1 - E_q(\eta T^q)) + E_{q,4}(\eta T^q) E_{q,0}(\eta T^q) (1 - E_q(\eta T^q)),$$

$$\alpha_4 = E_{q,2}^3(\eta T^q) - E_{q,4}(\eta T^q) E_{q,2}(\eta T^q) E_{q,0}(\eta T^q) + E_{q,3}^2(\eta T^q) E_{q,0}(\eta T^q) + E_{q,4}(\eta T^q) (1 - E_q(\eta T^q))^2 + \\ 2E_{q,3}(\eta T^q) E_{q,2}(\eta T^q) (1 - E_q(\eta T^q)),$$

$$\alpha_5 = E_{q,0}(\eta T^q) (1 - E_q(\eta T^q))^2 + E_{q,2}^2(\eta T^q) E_{q,-2}(\eta T^q) + E_{q,3}(\eta T^q) E_{q,-1}(\eta T^q) E_{q,0}(\eta T^q) + \\ E_{q,3}(\eta T^q) E_{q,-2}(\eta T^q) (1 - E_q(\eta T^q)) - E_{q,0}^2(\eta T^q) E_{q,2}(\eta T^q) + E_{q,2}(\eta T^q) E_{q,-1}(\eta T^q) (1 - E_q(\eta T^q)),$$

$$\alpha_6 = (1 - E_q(\eta T^q))^3 - E_{q,2}(\eta T^q) E_{q,0}(\eta T^q) (1 - E_q(\eta T^q)) - E_{q,3}(\eta T^q) E_{q,2}(\eta T^q) E_{q,-2}(\eta T^q) - \\ E_{q,3}(\eta T^q) E_{q,-1}(\eta T^q) (1 - E_q(\eta T^q)) + E_{q,4}(\eta T^q) E_{q,-2}(\eta T^q) (1 - E_q(\eta T^q)) - E_{q,4}(\eta T^q) E_{q,-1}(\eta T^q) E_{q,0}(\eta T^q),$$

$$\alpha_7 = E_{q,2}(\eta T^q) (1 - E_q(\eta T^q))^2 + 2E_{q,3}(\eta T^q) E_{q,0}(\eta T^q) (1 - E_q(\eta T^q)) + E_{q,3}^2(\eta T^q) E_{q,-2}(\eta T^q) + \\ E_{q,4}(\eta T^q) E_{q,0}^2(\eta T^q) - E_{q,4}(\eta T^q) E_{q,2}(\eta T^q) E_{q,-2}(\eta T^q),$$

$$\alpha_8 = E_{q,0}^2(\eta T^q) (1 - E_q(\eta T^q)) - E_{q,3}(\eta T^q) E_{q,-1}^2(\eta T^q) + E_{q,2}(\eta T^q) E_{q,-2}(\eta T^q) (1 - E_q(\eta T^q)) + \\ E_{q,3}(\eta T^q) E_{q,0}(\eta T^q) E_{q,-2}(\eta T^q) + E_{q,0}(\eta T^q) E_{q,2}(\eta T^q) E_{q,-1}(\eta T^q) + E_{q,-1}(\eta T^q) (1 - E_q(\eta T^q))^2,$$

$$\alpha_9 = 2E_{q,2}(\eta T^q)E_{q,-1}(\eta T^q)(1 - E_q(\eta T^q)) + E_{q,0}(\eta T^q)(1 - E_q(\eta T^q))^2 + E_{q,2}^2(\eta T^q)E_{q,-2}(\eta T^q) + E_{q,4}(\eta T^q)E_{q,-1}^2(\eta T^q) - E_{q,4}(\eta T^q)E_{q,0}(\eta T^q)E_{q,-2}(\eta T^q),$$

$$\alpha_{10} = E_{q,0}^3(\eta T^q) + E_{q,-2}(\eta T^q)(1 - E_q(\eta T^q))^2 + E_{q,2}(\eta T^q)E_{q,-1}^2(\eta T^q) - E_{q,2}(\eta T^q)E_{q,0}(\eta T^q)E_{q,-2}(\eta T^q) + 2E_{q,0}(\eta T^q)E_{q,-1}(\eta T^q)(1 - E_q(\eta T^q)).$$

Доказательство. Решение краевой задачи (4), (5) в банаховом пространстве E имеет следующий вид

$$x(t) = c_1 E_q(\eta t^q) + c_2 t E_{q,2}(\eta t^q) + c_3 t^2 E_{q,3}(\eta t^q) + c_4 t^3 E_{q,4}(\eta t^q) + \int_0^t (t-s)^{q-1} E_{q,q}(\eta(t-s)^q) f(s) ds.$$

Применяя формулу (7) и лемму 2.1, мы можем найти

$$x'(t) = c_1 t^{-1} E_{q,0}(\eta t^q) + c_2 E_q(\eta t^q) + c_3 t E_{q,2}(\eta t^q) + c_4 t^2 E_{q,3}(\eta t^q) + \int_0^t (t-s)^{q-2} E_{q,q-1}(\eta(t-s)^q) f(s) ds,$$

$$x''(t) = c_1 t^{-2} E_{q,-1}(\eta t^q) + c_2 t^{-1} E_{q,0}(\eta t^q) + c_3 E_q(\eta t^q) + c_4 t E_{q,2}(\eta t^q) + \int_0^t (t-s)^{q-3} E_{q,q-2}(\eta(t-s)^q) f(s) ds,$$

$$x'''(t) = c_1 t^{-3} E_{q,-2}(\eta t^q) + c_2 t^{-2} E_{q,-1}(\eta t^q) + c_3 t^{-1} E_{q,0}(\eta t^q) + c_4 E_q(\eta t^q) + \int_0^t (t-s)^{q-4} E_{q,q-3}(\eta(t-s)^q) f(s) ds.$$

Заметим, что благодаря свойству $\frac{1}{\Gamma(0)} = \frac{1}{\Gamma(-1)} = \frac{1}{\Gamma(-2)} = 0$, для функций $E_{q,0}(\eta t^q)$, $E_{q,-1}(\eta t^q)$ и $E_{q,-2}(\eta t^q)$ мы имеем

$$E_{q,0}(\eta t^q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\eta t^q)^n}{\Gamma(qn)} = \frac{1}{\Gamma(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\eta t^q)^n}{\Gamma(qn)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\eta t^q)^n}{\Gamma(qn)},$$

$$E_{q,-1}(\eta t^q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\eta t^q)^n}{\Gamma(qn-1)} = \frac{1}{\Gamma(-1)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\eta t^q)^n}{\Gamma(qn-1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\eta t^q)^n}{\Gamma(qn-1)},$$

$$E_{q,-2}(\eta t^q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\eta t^q)^n}{\Gamma(qn-2)} = \frac{1}{\Gamma(-2)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\eta t^q)^n}{\Gamma(qn-2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\eta t^q)^n}{\Gamma(qn-2)},$$

следовательно,

$$t^{-1} E_{q,0}(\eta t^q) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\eta^n t^{qn-1}}{\Gamma(qn)},$$

$$t^{-2} E_{q,-1}(\eta t^q) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\eta^n t^{qn-2}}{\Gamma(qn-1)},$$

$$t^{-3} E_{q,-2}(\eta t^q) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\eta^n t^{qn-3}}{\Gamma(qn-2)}.$$

В силу последних формул, имеем $x(0) = c_1$, $x'(0) = c_2$, $x''(0) = c_3$, $x'''(0) = c_4$.

Теперь, используя условия (2), мы получаем систему

$$\begin{cases} c_1 = c_1 E_q(\eta T^q) + c_2 T E_{q,2}(\eta T^q) + c_3 T^2 E_{q,3}(\eta T^q) + c_4 T^3 E_{q,4}(\eta T^q) + \int_0^T (T-s)^{q-1} E_{q,q}(\eta(T-s)^q) f(s) ds, \\ c_2 = c_1 T^{-1} E_{q,0}(\eta T^q) + c_2 E_q(\eta T^q) + c_3 T E_{q,2}(\eta T^q) + c_4 T^2 E_{q,3}(\eta T^q) + \int_0^T (T-s)^{q-2} E_{q,q-1}(\eta(T-s)^q) f(s) ds, \\ c_3 = c_1 T^{-2} E_{q,-1}(\eta T^q) + c_2 T^{-1} E_{q,0}(\eta T^q) + c_3 E_q(\eta T^q) + c_4 T E_{q,2}(\eta T^q) + \int_0^T (T-s)^{q-3} E_{q,q-2}(\eta(T-s)^q) f(s) ds, \\ c_4 = c_1 T^{-3} E_{q,-2}(\eta T^q) + c_2 T^{-2} E_{q,-1}(\eta T^q) + c_3 T^{-1} E_{q,0}(\eta T^q) + c_4 E_q(\eta T^q) + \int_0^T (T-s)^{q-4} E_{q,q-3}(\eta(T-s)^q) f(s) ds. \end{cases}$$

Выпишем определители для решения последней системы, на основе правила Крамера

$$\Delta = \left(1 - E_q(\eta T^q)\right)^4 - 2(1 - E_q(\eta T^q))E_{q,3}(\eta T^q)E_{q,0}^2(\eta T^q) - 2(1 - E_q(\eta T^q))E_{q,2}^2(\eta T^q)E_{q,-1}(\eta T^q) - 2(1 - E_q(\eta T^q))^2 E_{q,3}(\eta T^q)E_{q,-1}(\eta T^q) - 3(1 - E_q(\eta T^q))^2 E_{q,2}(\eta T^q)E_{q,0}(\eta T^q) - E_{q,2}^3(\eta T^q)E_{q,-2}(\eta T^q) - 2E_{q,2}(\eta T^q)E_{q,3}(\eta T^q)E_{q,-1}(\eta T^q)E_{q,0}(\eta T^q) - 2E_{q,2}(\eta T^q)E_{q,3}(\eta T^q)E_{q,-2}(\eta T^q)(1 - E_q(\eta T^q)) +$$

$$\begin{aligned}
& E_{q,2}^2(\eta T^q)E_{q,0}^2(\eta T^q) + E_{q,3}^2(\eta T^q)E_{q,-1}^2(\eta T^q) - E_{q,3}^2(\eta T^q)E_{q,0}(\eta T^q)E_{q,-2}(\eta T^q) - E_{q,4}(\eta T^q)E_{q,0}^3(\eta T^q) - \\
& E_{q,4}(\eta T^q)E_{q,-2}(\eta T^q)(1 - E_q(\eta T^q))^2 - E_{q,4}(\eta T^q)E_{q,2}(\eta T^q)E_{q,-1}^2(\eta T^q) + \\
& E_{q,4}(\eta T^q)E_{q,2}(\eta T^q)E_{q,0}(\eta T^q)E_{q,-2}(\eta T^q) - E_{q,4}(\eta T^q)E_{q,0}(\eta T^q)E_{q,-1}(\eta T^q)(1 - E_q(\eta T^q)) - \\
& (1 - E_q(\eta T^q))E_{q,4}(\eta T^q)E_{q,-1}(\eta T^q)E_{q,0}(\eta T^q) = \alpha, \\
\Delta_1 = & \left((1 - E_q(\eta T^q))^3 - E_{q,3}(\eta T^q)E_{q,0}^2(\eta T^q) \right) \int_0^T (T-s)^{q-1} E_{q,q}(\eta(T-s)^q) f(s) ds - \\
& \left(E_{q,2}^2(\eta T^q)E_{q,-1}(\eta T^q) + E_{q,3}(\eta T^q)E_{q,-1}(\eta T^q)(1 - E_q(\eta T^q)) \right) \int_0^T (T-s)^{q-1} E_{q,q}(\eta(T-s)^q) f(s) ds - \\
& 2E_{q,2}(\eta T^q)E_{q,0}(\eta T^q)(1 - E_q(\eta T^q)) \int_0^T (T-s)^{q-1} E_{q,q}(\eta(T-s)^q) f(s) ds + \\
& T \left(E_{q,2}(\eta T^q)(1 - E_q(\eta T^q))^2 - E_{q,2}^2(\eta T^q)E_{q,0}(\eta T^q) \right) \int_0^T (T-s)^{q-2} E_{q,q-1}(\eta(T-s)^q) f(s) ds + \\
& T \left(E_{q,3}(\eta T^q)E_{q,0}(\eta T^q)(1 - E_q(\eta T^q)) + E_{q,4}(\eta T^q)E_{q,0}^2(\eta T^q) \right) \int_0^T (T-s)^{q-2} E_{q,q-1}(\eta(T-s)^q) f(s) ds + \\
& T \left(E_{q,3}(\eta T^q)E_{q,2}(\eta T^q)E_{q,-1}(\eta T^q) + E_{q,4}(\eta T^q)E_{q,-1}(\eta T^q)(1 - E_q(\eta T^q)) \right) \int_0^T (T-s)^{q-2} E_{q,q-1}(\eta(T-s)^q) f(s) ds + \\
& T^2 \left(E_{q,2}(\eta T^q)E_{q,3}(\eta T^q)E_{q,0}(\eta T^q) - E_{q,3}^2(\eta T^q)E_{q,-1}(\eta T^q) \right) \int_0^T (T-s)^{q-3} E_{q,q-2}(\eta(T-s)^q) f(s) ds + \\
& T^2 \left(E_{q,3}(\eta T^q)(1 - E_q(\eta T^q))^2 + E_{q,4}(\eta T^q)E_{q,2}(\eta T^q)E_{q,-1}(\eta T^q) \right) \int_0^T (T-s)^{q-3} E_{q,q-2}(\eta(T-s)^q) f(s) ds + \\
& T^2 \left(E_{q,2}^2(\eta T^q)(1 - E_q(\eta T^q)) + E_{q,4}(\eta T^q)E_{q,0}(\eta T^q)(1 - E_q(\eta T^q)) \right) \int_0^T (T-s)^{q-3} E_{q,q-2}(\eta(T-s)^q) f(s) ds + \\
& T^3 \left(E_{q,2}^3(\eta T^q) - E_{q,4}(\eta T^q)E_{q,2}(\eta T^q)E_{q,0}(\eta T^q) \right) \int_0^T (T-s)^{q-4} E_{q,q-3}(\eta(T-s)^q) f(s) ds + \\
& T^3 \left(E_{q,3}^2(\eta T^q)E_{q,0}(\eta T^q) + E_{q,4}(\eta T^q)(1 - E_q(\eta T^q))^2 \right) \int_0^T (T-s)^{q-4} E_{q,q-3}(\eta(T-s)^q) f(s) ds + \\
& 2T^3 E_{q,3}(\eta T^q)E_{q,2}(\eta T^q)(1 - E_q(\eta T^q)) \int_0^T (T-s)^{q-4} E_{q,q-3}(\eta(T-s)^q) f(s) ds = \\
& \alpha_1 \int_0^T (T-s)^{q-1} E_{q,q}(\eta(T-s)^q) f(s) ds + T\alpha_2 \int_0^T (T-s)^{q-2} E_{q,q-1}(\eta(T-s)^q) f(s) ds + \\
& T^2\alpha_3 \int_0^T (T-s)^{q-3} E_{q,q-2}(\eta(T-s)^q) f(s) ds + T^3\alpha_4 \int_0^T (T-s)^{q-4} E_{q,q-3}(\eta(T-s)^q) f(s) ds, \\
\Delta_2 = & T^{-1} \left(E_{q,0}(\eta T^q)(1 - E_q(\eta T^q))^2 + E_{q,2}^2(\eta T^q)E_{q,-2}(\eta T^q) \right) \int_0^T (T-s)^{q-1} E_{q,q}(\eta(T-s)^q) f(s) ds + \\
& T^{-1} \left(E_{q,3}(\eta T^q)E_{q,-1}(\eta T^q)E_{q,0}(\eta T^q) + E_{q,3}(\eta T^q)E_{q,-2}(\eta T^q)(1 - E_q(\eta T^q)) \right) \int_0^T (T-s)^{q-1} E_{q,q}(\eta(T-s)^q) f(s) ds + \\
& T^{-1} \left(-E_{q,0}^2(\eta T^q)E_{q,2}(\eta T^q) + E_{q,2}(\eta T^q)E_{q,-1}(\eta T^q)(1 - E_q(\eta T^q)) \right) \int_0^T (T-s)^{q-1} E_{q,q}(\eta(T-s)^q) f(s) ds + \\
& \left((1 - E_q(\eta T^q))^3 - E_{q,2}(\eta T^q)E_{q,0}(\eta T^q)(1 - E_q(\eta T^q)) \right) \int_0^T (T-s)^{q-2} E_{q,q-1}(\eta(T-s)^q) f(s) ds - \\
& \left(E_{q,3}(\eta T^q)E_{q,2}(\eta T^q)E_{q,-2}(\eta T^q) - E_{q,3}(\eta T^q)E_{q,-1}(\eta T^q)(1 - E_q(\eta T^q)) \right) \int_0^T (T-s)^{q-2} E_{q,q-1}(\eta(T-s)^q) f(s) ds + \\
& \left(E_{q,4}(\eta T^q)E_{q,-2}(\eta T^q)(1 - E_q(\eta T^q)) - E_{q,4}(\eta T^q)E_{q,-1}(\eta T^q)E_{q,0}(\eta T^q) \right) \int_0^T (T-s)^{q-2} E_{q,q-1}(\eta(T-s)^q) f(s) ds +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& TE_{q,2}(\eta T^q)(1 - E_q(\eta T^q))^2 \int_0^T (T-s)^{q-3} E_{q,q-2}(\eta(T-s)^q) f(s) ds + \\
& T \left(2E_{q,3}(\eta T^q) E_{q,0}(\eta T^q) (1 - E_q(\eta T^q)) + E_{q,3}^2(\eta T^q) E_{q,-2}(\eta T^q) \right) \int_0^T (T-s)^{q-3} E_{q,q-2}(\eta(T-s)^q) f(s) ds + \\
& T \left(E_{q,4}(\eta T^q) E_{q,0}^2(\eta T^q) - E_{q,4}(\eta T^q) E_{q,2}(\eta T^q) E_{q,-2}(\eta T^q) \right) \int_0^T (T-s)^{q-3} E_{q,q-2}(\eta(T-s)^q) f(s) ds + \\
& T^2 \left(E_{q,2}^2(\eta T^q) (1 - E_q(\eta T^q)) + E_{q,3}(\eta T^q) (1 - E_q(\eta T^q))^2 \right) \int_0^T (T-s)^{q-4} E_{q,q-3}(\eta(T-s)^q) f(s) ds + \\
& T^2 \left(-E_{q,3}^2(\eta T^q) E_{q,-1}(\eta T^q) + E_{q,3}(\eta T^q) E_{q,0}(\eta T^q) E_{q,2}(\eta T^q) \right) \int_0^T (T-s)^{q-4} E_{q,q-3}(\eta(T-s)^q) f(s) ds + \\
& T^2 \left(E_{q,4}(\eta T^q) E_{q,2}(\eta T^q) E_{q,-1}(\eta T^q) + E_{q,4}(\eta T^q) E_{q,0}(\eta T^q) (1 - E_q(\eta T^q)) \right) \int_0^T (T-s)^{q-4} E_{q,q-3}(\eta(T-s)^q) f(s) ds = \\
& T^{-1} \alpha_5 \int_0^T (T-s)^{q-1} E_{q,q}(\eta(T-s)^q) f(s) ds + \alpha_6 \int_0^T (T-s)^{q-2} E_{q,q-1}(\eta(T-s)^q) f(s) ds + \\
& T \alpha_7 \int_0^T (T-s)^{q-3} E_{q,q-2}(\eta(T-s)^q) f(s) ds + T^2 \alpha_3 \int_0^T (T-s)^{q-4} E_{q,q-3}(\eta(T-s)^q) f(s) ds, \\
& \Delta_3 = T^{-2} \left(E_{q,0}^2(\eta T^q) (1 - E_q(\eta T^q)) - E_{q,3}(\eta T^q) E_{q,-1}^2(\eta T^q) \right) \int_0^T (T-s)^{q-1} E_{q,q}(\eta(T-s)^q) f(s) ds + \\
& T^{-2} \left(E_{q,2}(\eta T^q) E_{q,-2}(\eta T^q) (1 - E_q(\eta T^q)) + E_{q,3}(\eta T^q) E_{q,0}(\eta T^q) E_{q,-2}(\eta T^q) \right) \int_0^T (T-s)^{q-1} E_{q,q}(\eta(T-s)^q) f(s) ds + \\
& T^{-2} \left(E_{q,0}(\eta T^q) E_{q,2}(\eta T^q) E_{q,-1}(\eta T^q) + E_{q,-1}(\eta T^q) (1 - E_q(\eta T^q))^2 \right) \int_0^T (T-s)^{q-1} E_{q,q}(\eta(T-s)^q) f(s) ds + \\
& T^{-1} 2E_{q,2}(\eta T^q) E_{q,-1}(\eta T^q) (1 - E_q(\eta T^q)) \int_0^T (T-s)^{q-2} E_{q,q-1}(\eta(T-s)^q) f(s) ds + \\
& T^{-1} \left(E_{q,0}(\eta T^q) (1 - E_q(\eta T^q))^2 + E_{q,2}^2(\eta T^q) E_{q,-2}(\eta T^q) \right) \int_0^T (T-s)^{q-2} E_{q,q-1}(\eta(T-s)^q) f(s) ds + \\
& T^{-1} \left(E_{q,4}(\eta T^q) E_{q,-1}^2(\eta T^q) - E_{q,4}(\eta T^q) E_{q,0}(\eta T^q) E_{q,-2}(\eta T^q) \right) \int_0^T (T-s)^{q-2} E_{q,q-1}(\eta(T-s)^q) f(s) ds + \\
& \left((1 - E_q(\eta T^q))^3 - E_{q,3}(\eta T^q) E_{q,-1}(\eta T^q) (1 - E_q(\eta T^q)) \right) \int_0^T (T-s)^{q-3} E_{q,q-2}(\eta(T-s)^q) f(s) ds - \\
& \left(E_{q,2}(\eta T^q) E_{q,0}(\eta T^q) (1 - E_q(\eta T^q)) + E_{q,2}(\eta T^q) E_{q,3}(\eta T^q) E_{q,-2}(\eta T^q) \right) \int_0^T (T-s)^{q-3} E_{q,q-2}(\eta(T-s)^q) f(s) ds - \\
& \left(E_{q,4}(\eta T^q) E_{q,-2}(\eta T^q) (1 - E_q(\eta T^q)) + E_{q,4}(\eta T^q) E_{q,0}(\eta T^q) E_{q,-1}(\eta T^q) \right) \int_0^T (T-s)^{q-3} E_{q,q-2}(\eta(T-s)^q) f(s) ds + \\
& T \left(E_{q,3}(\eta T^q) E_{q,0}(\eta T^q) (1 - E_q(\eta T^q)) + E_{q,2}(\eta T^q) (1 - E_q(\eta T^q))^2 \right) \int_0^T (T-s)^{q-4} E_{q,q-3}(\eta(T-s)^q) f(s) ds + \\
& T \left(E_{q,2}(\eta T^q) E_{q,3}(\eta T^q) E_{q,-1}(\eta T^q) - E_{q,2}^2(\eta T^q) E_{q,0}(\eta T^q) \right) \int_0^T (T-s)^{q-4} E_{q,q-3}(\eta(T-s)^q) f(s) ds + \\
& T \left(E_{q,4}(\eta T^q) E_{q,0}^2(\eta T^q) + E_{q,4}(\eta T^q) E_{q,-1}(\eta T^q) (1 - E_q(\eta T^q)) \right) \int_0^T (T-s)^{q-4} E_{q,q-3}(\eta(T-s)^q) f(s) ds = \\
& T^{-2} \alpha_8 \int_0^T (T-s)^{q-1} E_{q,q}(\eta(T-s)^q) f(s) ds + T^{-1} \alpha_9 \int_0^T (T-s)^{q-2} E_{q,q-1}(\eta(T-s)^q) f(s) ds + \\
& \alpha_6 \int_0^T (T-s)^{q-3} E_{q,q-2}(\eta(T-s)^q) f(s) ds + T \alpha_2 \int_0^T (T-s)^{q-4} E_{q,q-3}(\eta(T-s)^q) f(s) ds, \\
& \Delta_4 = T^{-3} \left(E_{q,0}^3(\eta T^q) + E_{q,-2}(\eta T^q) (1 - E_q(\eta T^q))^2 \right) \int_0^T (T-s)^{q-1} E_{q,q}(\eta(T-s)^q) f(s) ds +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& T^{-3} \left(E_{q,2}(\eta T^q) E_{q,-1}^2(\eta T^q) - E_{q,2}(\eta T^q) E_{q,0}(\eta T^q) E_{q,-2}(\eta T^q) \right) \int_0^T (T-s)^{q-1} E_{q,q}(\eta(T-s)^q) f(s) ds + \\
& T^{-3} \left(E_{q,0}(\eta T^q) E_{q,-1}(\eta T^q) (1 - E_q(\eta T^q)) + E_{q,-1}(\eta T^q) E_{q,0}(\eta T^q) (1 - E_q(\eta T^q)) \right) \int_0^T (T-s)^{q-1} E_{q,q}(\eta(T-s)^q) f(s) ds + \\
& T^{-2} \left(E_{q,0}^2(\eta T^q) (1 - E_q(\eta T^q)) + E_{q,-1}(\eta T^q) (1 - E_q(\eta T^q))^2 \right) \int_0^T (T-s)^{q-2} E_{q,q-1}(\eta(T-s)^q) f(s) ds + \\
& T^{-2} \left(E_{q,2}(\eta T^q) E_{q,-1}(\eta T^q) E_{q,0}(\eta T^q) + E_{q,2}(\eta T^q) E_{q,-2}(\eta T^q) (1 - E_q(\eta T^q)) \right) \int_0^T (T-s)^{q-2} E_{q,q-1}(\eta(T-s)^q) f(s) ds + \\
& T^{-2} \left(-E_{q,3}(\eta T^q) E_{q,-1}^2(\eta T^q) + E_{q,3}(\eta T^q) E_{q,0}(\eta T^q) E_{q,-2}(\eta T^q) \right) \int_0^T (T-s)^{q-2} E_{q,q-1}(\eta(T-s)^q) f(s) ds + \\
& T^{-1} \left(E_{q,2}(\eta T^q) E_{q,-1}(\eta T^q) (1 - E_q(\eta T^q)) + E_{q,0}(\eta T^q) (1 - E_q(\eta T^q))^2 \right) \int_0^T (T-s)^{q-3} E_{q,q-2}(\eta(T-s)^q) f(s) ds + \\
& T^{-1} \left(E_{q,2}^2(\eta T^q) E_{q,-2}(\eta T^q) - E_{q,2}(\eta T^q) E_{q,0}^2(\eta T^q) \right) \int_0^T (T-s)^{q-3} E_{q,q-2}(\eta(T-s)^q) f(s) ds + \\
& T^{-1} \left(E_{q,3}(\eta T^q) E_{q,-2}(\eta T^q) (1 - E_q(\eta T^q)) + E_{q,3}(\eta T^q) E_{q,0}(\eta T^q) E_{q,-1}(\eta T^q) \right) \int_0^T (T-s)^{q-3} E_{q,q-2}(\eta(T-s)^q) f(s) ds + \\
& \left((1 - E_q(\eta T^q))^3 - E_{q,2}(\eta T^q) E_{q,0}(\eta T^q) (1 - E_q(\eta T^q)) \right) \int_0^T (T-s)^{q-4} E_{q,q-3}(\eta(T-s)^q) f(s) ds - \\
& \left(E_{q,2}(\eta T^q) E_{q,0}(\eta T^q) (1 - E_q(\eta T^q)) + E_{q,2}^2(\eta T^q) E_{q,-1}(\eta T^q) \right) \int_0^T (T-s)^{q-4} E_{q,q-3}(\eta(T-s)^q) f(s) ds - \\
& \left(E_{q,3}(\eta T^q) E_{q,0}^2(\eta T^q) E_{q,3}(\eta T^q) E_{q,-1}(\eta T^q) (1 - E_q(\eta T^q)) \right) \int_0^T (T-s)^{q-4} E_{q,q-3}(\eta(T-s)^q) f(s) ds = \\
& T^{-3} \alpha_{10} \int_0^T (T-s)^{q-1} E_{q,q}(\eta(T-s)^q) f(s) ds + T^{-2} \alpha_8 \int_0^T (T-s)^{q-2} E_{q,q-1}(\eta(T-s)^q) f(s) ds + \\
& T^{-1} \alpha_5 \int_0^T (T-s)^{q-3} E_{q,q-2}(\eta(T-s)^q) f(s) ds + \alpha_1 \int_0^T (T-s)^{q-4} E_{q,q-3}(\eta(T-s)^q) f(s) ds.
\end{aligned}$$

Таким образом, получаем следующие значения:

$$\begin{aligned}
c_1 &= \frac{\Delta_1}{\Delta} = \alpha^{-1} \alpha_1 \int_0^T (T-s)^{q-1} E_{q,q}(\eta(T-s)^q) f(s) ds + T \alpha^{-1} \alpha_2 \int_0^T (T-s)^{q-2} E_{q,q-1}(\eta(T-s)^q) f(s) ds + \\
& T^2 \alpha^{-1} \alpha_3 \int_0^T (T-s)^{q-3} E_{q,q-2}(\eta(T-s)^q) f(s) ds + T^3 \alpha^{-1} \alpha_4 \int_0^T (T-s)^{q-4} E_{q,q-3}(\eta(T-s)^q) f(s) ds, \\
c_2 &= \frac{\Delta_2}{\Delta} = T^{-1} \alpha^{-1} \alpha_5 \int_0^T (T-s)^{q-1} E_{q,q}(\eta(T-s)^q) f(s) ds + \alpha^{-1} \alpha_6 \int_0^T (T-s)^{q-2} E_{q,q-1}(\eta(T-s)^q) f(s) ds + \\
& T \alpha^{-1} \alpha_7 \int_0^T (T-s)^{q-3} E_{q,q-2}(\eta(T-s)^q) f(s) ds + T^2 \alpha^{-1} \alpha_3 \int_0^T (T-s)^{q-4} E_{q,q-3}(\eta(T-s)^q) f(s) ds, \\
c_3 &= \frac{\Delta_3}{\Delta} = T^{-2} \alpha^{-1} \alpha_8 \int_0^T (T-s)^{q-1} E_{q,q}(\eta(T-s)^q) f(s) ds + T^{-1} \alpha^{-1} \alpha_9 \int_0^T (T-s)^{q-2} E_{q,q-1}(\eta(T-s)^q) f(s) ds + \\
& \alpha^{-1} \alpha_6 \int_0^T (T-s)^{q-3} E_{q,q-2}(\eta(T-s)^q) f(s) ds + T \alpha^{-1} \alpha_2 \int_0^T (T-s)^{q-4} E_{q,q-3}(\eta(T-s)^q) f(s) ds, \\
c_4 &= \frac{\Delta_4}{\Delta} = T^{-3} \alpha^{-1} \alpha_{10} \int_0^T (T-s)^{q-1} E_{q,q}(\eta(T-s)^q) f(s) ds + T^{-2} \alpha^{-1} \alpha_8 \int_0^T (T-s)^{q-2} E_{q,q-1}(\eta(T-s)^q) f(s) ds + \\
& T^{-1} \alpha^{-1} \alpha_5 \int_0^T (T-s)^{q-3} E_{q,q-2}(\eta(T-s)^q) f(s) ds + \alpha^{-1} \alpha_1 \int_0^T (T-s)^{q-4} E_{q,q-3}(\eta(T-s)^q) f(s) ds.
\end{aligned}$$

Подставляя найденные коэффициенты в формулу для решения, мы получаем

$$\begin{aligned}
 x(t) = & \\
 & \alpha^{-1} \left(E_q(\eta t^q) \alpha_1 + t E_{q,2}(\eta t^q) T^{-1} \alpha_5 + t^2 E_{q,3}(\eta t^q) T^{-2} \alpha_8 + t^3 E_{q,4}(\eta t^q) T^{-3} \alpha_{10} \right) \int_0^T (T-s)^{q-1} E_{q,q}(\eta(T-s)^q) f(s) ds + \\
 & \alpha^{-1} \left(E_q(\eta t^q) T \alpha_2 + t E_{q,2}(\eta t^q) \alpha_6 + t^2 E_{q,3}(\eta t^q) T^{-1} \alpha_9 + t^3 E_{q,4}(\eta t^q) T^{-2} \alpha_8 \right) \int_0^T (T-s)^{q-2} E_{q,q-1}(\eta(T-s)^q) f(s) ds + \\
 & \alpha^{-1} \left(E_q(\eta t^q) T^2 \alpha_3 + t E_{q,2}(\eta t^q) T \alpha_7 + t^2 E_{q,3}(\eta t^q) \alpha_6 + t^3 E_{q,4}(\eta t^q) T^{-1} \alpha_5 \right) \int_0^T (T-s)^{q-3} E_{q,q-2}(\eta(T-s)^q) f(s) ds + \\
 & \alpha^{-1} \left(E_q(\eta t^q) T^3 \alpha_4 + t E_{q,2}(\eta t^q) T^2 \alpha_3 + t^2 E_{q,3}(\eta t^q) T \alpha_2 + t^3 E_{q,4}(\eta t^q) \alpha_1 \right) \int_0^T (T-s)^{q-4} E_{q,q-3}(\eta(T-s)^q) f(s) ds + \\
 & \int_0^t (t-s)^{q-1} E_{q,q}(\eta(t-s)^q) f(s) ds = \int_0^T G(t,s) f(s) ds.
 \end{aligned}$$

Для того, чтобы установить аналогичный результат для функции $f \in L^\infty([0, T]; E)$, нам потребуются следующие утверждения.

Лемма 3.2. Для всякой функции $f \in L^\infty([0, T]; E)$ существует последовательность $\{f_n\} \subset C([0, T]; E)$ такая, что $f_n(t) \rightarrow f(t)$ во всех точках Лебега функции f из $[0, T]$, причем $\|f_n\|_{C([0, T]; E)} \leq \|f\|_{L^\infty([0, T]; E)}$.

Примером такой последовательности может послужить следующая, построенная на основе проектора Стеклова

$$\begin{aligned}
 f_n(t) &= \begin{cases} \frac{1}{2n} \int_{t-\frac{1}{n}}^{t+\frac{1}{n}} \hat{f}(s) ds, & t \in [0, T]; \\ 0, & t \notin [0, T], \end{cases} \\
 \hat{f}(t) &= \begin{cases} f(t), & t \in [0, T]; \\ 0, & t \notin [0, T]. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Лемма 3.3. (см. [8]) Для всякой функции $f \in L^\infty([0, T]; E)$ множество ее точек Лебега есть множество полной меры для $[0, T]$.

Таким образом, мы можем построить функцию Грина для краевой задачи (4), (2), имеющую тот же вид, что и в лемме 3.1, но уже при условии, что $f \in L^\infty([0, T]; E)$.

Будем полагать, что мультиотображение $F : [0, T] \times E \rightarrow Kv(E)$ из задачи (1)–(2) удовлетворяет следующим условиям:

(F1) для всех $x \in E$ мультифункция $F(\cdot, x) : [0, T] \rightarrow Kv(E)$ допускает измеримое сечение;

(F2) для п.в. $t \in [0, T]$ многозначное отображение $F(t, \cdot) : E \rightarrow Kv(E)$ – полунепрерывно сверху;

(F3) для каждого $r > 0$ существует функция $\omega_r \in L^{\infty}_+([0, T])$ такая, что для любого $x \in E$ с $\|x\|_E < r$, мы имеем

$$\|F(t, x)\|_E \leq \omega_r(t);$$

(F4) существует функция $\mu \in L^{\infty}_+([0, T])$ такая, что для любого ограниченного множества $\Omega \subset E$, мы имеем

$$\chi(F(t, \Omega)) \leq \mu(t) \chi(\Omega),$$

для п.в. $t \in [0, T]$, где χ – МНК Хаусдорфа в E .

Для $x \in C([0, T]; E)$ введем в рассмотрение мультифункцию:

$$\Phi_F : [0, T] \rightarrow Kv(E), \quad \Phi_F(t) = F(t, x(t)).$$

Из условий (F1)–(F3) следует (см., [15], теорема 1.3.5), что мультифункция Φ_F является L^p -интегрируемой для любого $p \geq 1$.

Для решения нашей задачи мы будем использовать суперпозиционный мультиоператор $\mathcal{P}_F^\infty : C([0, T]; E) \rightarrow L^\infty([0, T]; E)$, определенный следующим образом:

$$\mathcal{P}_F^\infty(x) = \mathcal{S}_{\Phi_F}^\infty.$$

Рассмотрим мультиоператор Γ , заданный следующим образом:

$$\Gamma x(t) = \int_0^T G(t,s) f(s) ds, \quad \text{где } f \in \mathcal{P}_F^\infty(x).$$

Из условий (F1) – (F4) следует, что для функции $x \in C([0, T]; E)$, функция $f \in L^\infty([0, T]; E)$. При этом из определения функции Грина следует, что для любого $t \in [0, T]$ и $3 < q < 4 : G(\cdot, s) \in L^p([0, T])$, $p \geq 1$, и функция Грина теряет непрерывность только в точке $s = T$, поэтому $\Gamma : C([0, T]; E) \rightarrow C([0, T]; E)$.

Если функция $x \in C([0, T]; E)$ является решением задачи (1)–(2), то она является неподвижной точкой мультиоператора Γ . Поэтому мы в дальнейшем будем доказывать существование неподвижных точек мультиоператора Γ .

Покажем, что если выполняется условие (A), функция Грина G не меняет знак на квадрате $[0, T] \times [0, T]$; тогда справедливо равенство

$$\int_0^T |G(t, s)| ds = \frac{1}{\eta}. \quad (10)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} & \int_0^T G(t, s) ds = \\ & \alpha^{-1} \left(E_q(\eta t^q) \alpha_1 + t E_{q,2}(\eta t^q) T^{-1} \alpha_5 + t^2 E_{q,3}(\eta t^q) T^{-2} \alpha_8 + t^3 E_{q,4}(\eta t^q) T^{-3} \alpha_{10} \right) \int_0^T (T-s)^{q-1} E_{q,q}(\eta(T-s)^q) ds + \\ & \alpha^{-1} \left(E_q(\eta t^q) T \alpha_2 + t E_{q,2}(\eta t^q) \alpha_6 + t^2 E_{q,3}(\eta t^q) T^{-1} \alpha_9 + t^3 E_{q,4}(\eta t^q) T^{-2} \alpha_8 \right) \int_0^T (T-s)^{q-2} E_{q,q-1}(\eta(T-s)^q) ds + \\ & \alpha^{-1} \left(E_q(\eta t^q) T^2 \alpha_3 + t E_{q,2}(\eta t^q) T \alpha_7 + t^2 E_{q,3}(\eta t^q) \alpha_6 + t^3 E_{q,4}(\eta t^q) T^{-1} \alpha_5 \right) \int_0^T (T-s)^{q-3} E_{q,q-2}(\eta(T-s)^q) ds + \\ & \alpha^{-1} \left(E_q(\eta t^q) T^3 \alpha_4 + t E_{q,2}(\eta t^q) T^2 \alpha_3 + t^2 E_{q,3}(\eta t^q) T \alpha_2 + t^3 E_{q,4}(\eta t^q) \alpha_1 \right) \int_0^T (T-s)^{q-4} E_{q,q-3}(\eta(T-s)^q) ds + \\ & \int_0^t (t-s)^{q-1} E_{q,q}(\eta(t-s)^q) ds. \end{aligned}$$

Вычислим интегралы в последнем выражении на основе формулы (8):

$$\begin{aligned} \int_0^T (T-s)^{q-1} E_{q,q}(\eta(T-s)^q) ds &= - \int_0^T (T-s)^{q-1} E_{q,q}(\eta(T-s)^q) d(T-s) = \int_0^T y^{q-1} E_{q,q}(\eta y^q) dy = \\ & T^q E_{q,q+1}(\eta T^q). \end{aligned}$$

Таким образом, мы получаем

$$\begin{aligned} \int_0^T (T-s)^{q-4} E_{q,q-3}(\eta(T-s)^q) ds &= T^{q-3} E_{q,q-2}(\eta T^q), \\ \int_0^T (T-s)^{q-3} E_{q,q-2}(\eta(T-s)^q) ds &= T^{q-2} E_{q,q-1}(\eta T^q), \\ \int_0^T (T-s)^{q-2} E_{q,q-1}(\eta(T-s)^q) ds &= T^{q-1} E_{q,q}(\eta T^q), \\ \int_0^t (t-s)^{q-1} E_{q,q}(\eta(t-s)^q) ds &= t^q E_{q,q+1}(\eta t^q). \end{aligned}$$

Заметим, что если взять $\beta = 1$ в формуле (6), то мы получим

$$\begin{aligned} E_q(\eta T^q) &= \frac{1}{\Gamma(1)} + \eta T^q E_{q,q+1}(\eta T^q) = 1 + \eta T^q E_{q,q+1}(\eta T^q), \\ E_q(\eta t^q) &= \frac{1}{\Gamma(1)} + \eta t^q E_{q,q+1}(\eta t^q) = 1 + \eta t^q E_{q,q+1}(\eta t^q). \end{aligned}$$

Воспользовавшись свойством (3), считая $\beta = 0$, $\beta = -1$ и $\beta = -2$ соответственно в (6), мы имеем

$$\begin{aligned} E_{q,0}(\eta T^q) &= \frac{1}{\Gamma(0)} + \eta T^q E_{q,q}(\eta T^q) = \eta T^q E_{q,q}(\eta T^q), \\ E_{q,-1}(\eta T^q) &= \frac{1}{\Gamma(-1)} + \eta T^q E_{q,q-1}(\eta T^q) = \eta T^q E_{q,q-1}(\eta T^q), \\ E_{q,-2}(\eta T^q) &= \frac{1}{\Gamma(-2)} + \eta T^q E_{q,q-2}(\eta T^q) = \eta T^q E_{q,q-2}(\eta T^q). \end{aligned}$$

Таким образом, мы имеем следующие равенства

$$\int_0^T (T-s)^{q-1} E_{q,q}(\eta(T-s)^q) ds = T^q \frac{1}{\eta T^q} (E_q(\eta T^q) - 1) = \frac{1}{\eta} (E_q(\eta T^q) - 1),$$

$$\int_0^T (T-s)^{q-2} E_{q,q-1}(\eta(T-s)^q) ds = \frac{1}{\eta T} E_{q,0}(\eta T^q),$$

$$\int_0^T (T-s)^{q-3} E_{q,q-2}(\eta(T-s)^q) ds = \frac{1}{\eta T^2} E_{q,-1}(\eta T^q),$$

$$\int_0^T (T-s)^{q-4} E_{q,q-3}(\eta(T-s)^q) ds = \frac{1}{\eta T^3} E_{q,-2}(\eta T^q),$$

$$\int_0^t (t-s)^{q-1} E_{q,q}(\eta(t-s)^q) ds = \frac{1}{\eta} (E_q(\eta t^q) - 1).$$

Поэтому, мы получаем

$$\int_0^T G(t,s) ds =$$

$$\alpha^{-1} \eta^{-1} \left(\alpha_1 (E_q(\eta T^q) - 1) + \alpha_2 E_{q,0}(\eta T^q) + \alpha_3 E_{q,-1}(\eta T^q) + \alpha_4 E_{q,-2}(\eta T^q) \right) E_q(\eta t^q) +$$

$$\alpha^{-1} \eta^{-1} T^{-1} \left(\alpha_5 (E_q(\eta T^q) - 1) + \alpha_6 E_{q,0}(\eta T^q) + \alpha_7 E_{q,-1}(\eta T^q) + \alpha_3 E_{q,-2}(\eta T^q) \right) t E_{q,2}(\eta t^q) +$$

$$\alpha^{-1} \eta^{-1} T^{-2} \left(\alpha_8 (E_q(\eta T^q) - 1) + \alpha_9 E_{q,0}(\eta T^q) + \alpha_6 E_{q,-1}(\eta T^q) + \alpha_2 E_{q,-2}(\eta T^q) \right) t^2 E_{q,3}(\eta t^q) +$$

$$\alpha^{-1} \eta^{-1} T^{-3} \left(\alpha_{10} (E_q(\eta T^q) - 1) + \alpha_8 E_{q,0}(\eta T^q) + \alpha_5 E_{q,-1}(\eta T^q) + \alpha_1 E_{q,-2}(\eta T^q) \right) t^3 E_{q,4}(\eta t^q) +$$

$$\frac{1}{\eta} (E_q(\eta t^q) - 1) = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + \frac{1}{\eta} (E_q(\eta t^q) - 1).$$

Вычислим отдельно значение каждого слагаемого.

$$I_1 = \alpha^{-1} \eta^{-1} \left(\alpha_1 (E_q(\eta T^q) - 1) + \alpha_2 E_{q,0}(\eta T^q) + \alpha_3 E_{q,-1}(\eta T^q) + \alpha_4 E_{q,-2}(\eta T^q) \right) E_q(\eta t^q) =$$

$$\alpha^{-1} \eta^{-1} E_q(\eta t^q) \left(- (1 - E_q(\eta T^q))^4 + (1 - E_q(\eta T^q)) E_{q,3}(\eta T^q) E_{q,0}^2(\eta T^q) \right) +$$

$$\alpha^{-1} \eta^{-1} E_q(\eta t^q) \left((1 - E_q(\eta T^q)) E_{q,2}^2(\eta T^q) E_{q,-1}(\eta T^q) + E_{q,3}(\eta T^q) E_{q,-1}(\eta T^q) (1 - E_q(\eta T^q))^2 \right) +$$

$$\alpha^{-1} \eta^{-1} E_q(\eta t^q) 2 E_{q,2}(\eta T^q) E_{q,0}(\eta T^q) (1 - E_q(\eta T^q))^2 +$$

$$\alpha^{-1} \eta^{-1} E_q(\eta t^q) \left(E_{q,0}(\eta T^q) E_{q,2}(\eta T^q) (1 - E_q(\eta T^q))^2 - E_{q,2}^2(\eta T^q) E_{q,0}^2(\eta T^q) \right) +$$

$$\alpha^{-1} \eta^{-1} E_q(\eta t^q) \left(E_{q,3}(\eta T^q) E_{q,0}^2(\eta T^q) (1 - E_q(\eta T^q)) + E_{q,4}(\eta T^q) E_{q,0}^3(\eta T^q) \right) +$$

$$\alpha^{-1} \eta^{-1} E_q(\eta t^q) E_{q,0}(\eta T^q) \left(E_{q,3}(\eta T^q) E_{q,2}(\eta T^q) E_{q,-1}(\eta T^q) + E_{q,4}(\eta T^q) E_{q,-1}(\eta T^q) (1 - E_q(\eta T^q)) \right) +$$

$$\alpha^{-1} \eta^{-1} E_q(\eta t^q) \left(E_{q,-1}(\eta T^q) E_{q,2}(\eta T^q) E_{q,3}(\eta T^q) E_{q,0}(\eta T^q) - E_{q,3}^2(\eta T^q) E_{q,-1}^2(\eta T^q) \right) +$$

$$\alpha^{-1} \eta^{-1} E_q(\eta t^q) \left(E_{q,-1}(\eta T^q) E_{q,3}(\eta T^q) (1 - E_q(\eta T^q))^2 + E_{q,4}(\eta T^q) E_{q,2}(\eta T^q) E_{q,-1}^2(\eta T^q) \right) +$$

$$\alpha^{-1} \eta^{-1} E_q(\eta t^q) \left(E_{q,-1}(\eta T^q) E_{q,2}^2(\eta T^q) (1 - E_q(\eta T^q)) + E_{q,-1}(\eta T^q) E_{q,4}(\eta T^q) E_{q,0}(\eta T^q) (1 - E_q(\eta T^q)) \right) +$$

$$\alpha^{-1} \eta^{-1} E_q(\eta t^q) \left(E_{q,-2}(\eta T^q) E_{q,2}^3(\eta T^q) - E_{q,-2}(\eta T^q) E_{q,4}(\eta T^q) E_{q,2}(\eta T^q) E_{q,0}(\eta T^q) \right) +$$

$$\alpha^{-1} \eta^{-1} E_q(\eta t^q) \left(E_{q,-2}(\eta T^q) E_{q,3}^2(\eta T^q) E_{q,0}(\eta T^q) + E_{q,-2}(\eta T^q) E_{q,4}(\eta T^q) (1 - E_q(\eta T^q))^2 \right) +$$

$$\alpha^{-1} \eta^{-1} E_q(\eta t^q) E_{q,-2}(\eta T^q) 2 E_{q,3}(\eta T^q) E_{q,2}(\eta T^q) (1 - E_q(\eta T^q)) = -\alpha^{-1} \eta^{-1} E_q(\eta t^q) \alpha = -\eta^{-1} E_q(\eta t^q);$$

$$I_2 = \alpha^{-1} \eta^{-1} T^{-1} \left(\alpha_5 (E_q(\eta T^q) - 1) + \alpha_6 E_{q,0}(\eta T^q) + \alpha_7 E_{q,-1}(\eta T^q) + \alpha_3 E_{q,-2}(\eta T^q) \right) t E_{q,2}(\eta t^q) =$$

$$\alpha^{-1} \eta^{-1} T^{-1} t E_{q,2}(\eta t^q) \left(- E_{q,0}(\eta T^q) (1 - E_q(\eta T^q))^3 - (1 - E_q(\eta T^q)) E_{q,2}^2(\eta T^q) E_{q,-2}(\eta T^q) \right) +$$

$$\alpha^{-1} \eta^{-1} T^{-1} t E_{q,2}(\eta t^q) E_{q,3}(\eta T^q) \left(- (1 - E_q(\eta T^q)) E_{q,-1}(\eta T^q) E_{q,0}(\eta T^q) - E_{q,-2}(\eta T^q) (1 - E_q(\eta T^q))^2 \right) +$$

$$\alpha^{-1} \eta^{-1} T^{-1} t E_{q,2}(\eta t^q) \left((1 - E_q(\eta T^q)) E_{q,0}^2(\eta T^q) E_{q,2}(\eta T^q) - E_{q,2}(\eta T^q) E_{q,-1}(\eta T^q) (1 - E_q(\eta T^q))^2 \right) +$$

$$\begin{aligned}
& \alpha^{-1}\eta^{-1}T^{-1}tE_{q,2}(\eta t^q)\left(E_{q,0}(\eta T^q)(1-E_q(\eta T^q))^3-E_{q,0}^2(\eta T^q)E_{q,2}(\eta T^q)(1-E_q(\eta T^q))\right)+ \\
& \alpha^{-1}\eta^{-1}T^{-1}tE_{q,2}(\eta t^q)E_{q,0}(\eta T^q)E_{q,3}(\eta T^q)\left(-E_{q,2}(\eta T^q)E_{q,-2}(\eta T^q)-E_{q,-1}(\eta T^q)(1-E_q(\eta T^q))\right)+ \\
& \alpha^{-1}\eta^{-1}T^{-1}tE_{q,2}(\eta t^q)E_{q,4}(\eta T^q)\left(E_{q,0}(\eta T^q)E_{q,-2}(\eta T^q)(1-E_q(\eta T^q))-E_{q,0}^2(\eta T^q)E_{q,-1}(\eta T^q)\right)+ \\
& \alpha^{-1}\eta^{-1}T^{-1}tE_{q,2}(\eta t^q)E_{q,-1}(\eta T^q)\left(E_{q,2}(\eta T^q)(1-E_q(\eta T^q))^2+2E_{q,3}(\eta T^q)E_{q,0}(\eta T^q)(1-E_q(\eta T^q))\right)+ \\
& \alpha^{-1}\eta^{-1}T^{-1}tE_{q,2}(\eta t^q)\left(E_{q,-1}(\eta T^q)E_{q,3}^2(\eta T^q)E_{q,-2}(\eta T^q)+E_{q,-1}(\eta T^q)E_{q,4}(\eta T^q)E_{q,0}^2(\eta T^q)\right) \\
& \alpha^{-1}\eta^{-1}T^{-1}tE_{q,2}(\eta t^q)E_{q,2}(\eta T^q)E_{q,-2}(\eta T^q)\left(-E_{q,-1}(\eta T^q)E_{q,4}(\eta T^q)+E_{q,3}(\eta T^q)E_{q,0}(\eta T^q)\right)+ \\
& \alpha^{-1}\eta^{-1}T^{-1}tE_{q,2}(\eta t^q)E_{q,-2}(\eta T^q)\left(-E_{q,3}^2(\eta T^q)E_{q,-1}(\eta T^q)+E_{q,3}(\eta T^q)(1-E_q(\eta T^q))^2\right)+ \\
& \alpha^{-1}\eta^{-1}T^{-1}tE_{q,2}(\eta t^q)E_{q,-2}(\eta T^q)\left(E_{q,4}(\eta T^q)E_{q,2}(\eta T^q)E_{q,-1}(\eta T^q)+E_{q,2}^2(\eta T^q)(1-E_q(\eta T^q))\right)+ \\
& \alpha^{-1}\eta^{-1}T^{-1}tE_{q,2}(\eta t^q)E_{q,-2}(\eta T^q)E_{q,4}(\eta T^q)E_{q,0}(\eta T^q)(1-E_q(\eta T^q))=0; \\
I_3 = & \alpha^{-1}\eta^{-1}T^{-2}\left(\alpha_8(E_q(\eta T^q)-1)+\alpha_9E_{q,0}(\eta T^q)+\alpha_6E_{q,-1}(\eta T^q)+\alpha_2E_{q,-2}(\eta T^q)\right)t^2E_{q,3}(\eta t^q)= \\
& \alpha^{-1}\eta^{-1}T^{-2}t^2E_{q,3}(\eta t^q)\left(-E_{q,0}^2(\eta T^q)(1-E_q(\eta T^q))^2+(1-E_q(\eta T^q))E_{q,3}(\eta T^q)E_{q,-1}^2(\eta T^q)\right)+ \\
& \alpha^{-1}\eta^{-1}T^{-2}t^2E_{q,3}(\eta t^q)E_{q,-2}(\eta T^q)\left(-E_{q,2}(\eta T^q)(1-E_q(\eta T^q))^2-(1-E_q(\eta T^q))E_{q,3}(\eta T^q)E_{q,0}(\eta T^q)\right)+ \\
& \alpha^{-1}\eta^{-1}T^{-2}t^2E_{q,3}(\eta t^q)\left(-(1-E_q(\eta T^q))E_{q,0}(\eta T^q)E_{q,2}(\eta T^q)E_{q,-1}(\eta T^q)-E_{q,-1}(\eta T^q)(1-E_q(\eta T^q))^3\right)+ \\
& \alpha^{-1}\eta^{-1}T^{-2}t^2E_{q,3}(\eta t^q)E_{q,0}(\eta T^q)2E_{q,2}(\eta T^q)E_{q,-1}(\eta T^q)(1-E_q(\eta T^q))+ \\
& \alpha^{-1}\eta^{-1}T^{-2}t^2E_{q,3}(\eta t^q)\left(E_{q,0}^2(\eta T^q)(1-E_q(\eta T^q))^2+E_{q,0}(\eta T^q)E_{q,2}^2(\eta T^q)E_{q,-2}(\eta T^q)\right)+ \\
& \alpha^{-1}\eta^{-1}T^{-2}t^2E_{q,3}(\eta t^q)\left(E_{q,0}(\eta T^q)E_{q,4}(\eta T^q)E_{q,-1}^2(\eta T^q)-E_{q,4}(\eta T^q)E_{q,0}^2(\eta T^q)E_{q,-2}(\eta T^q)\right)+ \\
& \alpha^{-1}\eta^{-1}T^{-2}t^2E_{q,3}(\eta t^q)\left(E_{q,-1}(\eta T^q)(1-E_q(\eta T^q))^3-E_{q,-1}(\eta T^q)E_{q,2}(\eta T^q)E_{q,0}(\eta T^q)(1-E_q(\eta T^q))\right)+ \\
& \alpha^{-1}\eta^{-1}T^{-2}t^2E_{q,3}(\eta t^q)\left(-E_{q,-1}(\eta T^q)E_{q,2}(\eta T^q)E_{q,-2}(\eta T^q)E_{q,3}(\eta T^q)-E_{q,-1}^2(\eta T^q)(1-E_q(\eta T^q))E_{q,3}(\eta T^q)\right)+ \\
& \alpha^{-1}\eta^{-1}T^{-2}t^2E_{q,3}(\eta t^q)E_{q,-1}(\eta T^q)E_{q,4}(\eta T^q)E_{q,-2}(\eta T^q)(1-E_q(\eta T^q))+ \\
& \alpha^{-1}\eta^{-1}T^{-2}t^2E_{q,3}(\eta t^q)\left(-E_{q,4}(\eta T^q)E_{q,-1}^2(\eta T^q)E_{q,0}(\eta T^q)+E_{q,-2}(\eta T^q)E_{q,2}(\eta T^q)(1-E_q(\eta T^q))^2\right)+ \\
& \alpha^{-1}\eta^{-1}T^{-2}t^2E_{q,3}(\eta t^q)E_{q,-2}(\eta T^q)\left(-E_{q,2}^2(\eta T^q)E_{q,0}(\eta T^q)+E_{q,3}(\eta T^q)E_{q,0}(\eta T^q)(1-E_q(\eta T^q))\right)+ \\
& \alpha^{-1}\eta^{-1}T^{-2}t^2E_{q,3}(\eta t^q)E_{q,-2}(\eta T^q)\left(E_{q,4}(\eta T^q)E_{q,0}^2(\eta T^q)+E_{q,3}(\eta T^q)E_{q,2}(\eta T^q)E_{q,-1}(\eta T^q)\right)+ \\
& \alpha^{-1}\eta^{-1}T^{-2}t^2E_{q,3}(\eta t^q)E_{q,-2}(\eta T^q)E_{q,4}(\eta T^q)E_{q,-1}(\eta T^q)(1-E_q(\eta T^q))=0; \\
I_4 = & \alpha^{-1}\eta^{-1}T^{-3}\left(\alpha_{10}(E_q(\eta T^q)-1)+\alpha_8E_{q,0}(\eta T^q)+\alpha_5E_{q,-1}(\eta T^q)+\alpha_1E_{q,-2}(\eta T^q)\right)t^3E_{q,4}(\eta t^q)= \\
& \alpha^{-1}\eta^{-1}T^{-3}t^3E_{q,4}(\eta t^q)\left(-(1-E_q(\eta T^q))E_{q,0}^3(\eta T^q)-E_{q,-2}(\eta T^q)(1-E_q(\eta T^q))^3\right)+ \\
& \alpha^{-1}\eta^{-1}T^{-3}t^3E_{q,4}(\eta t^q)(1-E_q(\eta T^q))\left(-E_{q,2}(\eta T^q)E_{q,-1}^2(\eta T^q)+E_{q,2}(\eta T^q)E_{q,0}(\eta T^q)E_{q,-2}(\eta T^q)\right)- \\
& \alpha^{-1}\eta^{-1}T^{-3}t^3E_{q,4}(\eta t^q)E_{q,0}(\eta T^q)E_{q,-1}(\eta T^q)\left((1-E_q(\eta T^q))^2-(1-E_q(\eta T^q))^2\right)+ \\
& \alpha^{-1}\eta^{-1}T^{-3}t^3E_{q,4}(\eta t^q)\left(E_{q,0}^3(\eta T^q)(1-E_q(\eta T^q))-E_{q,0}(\eta T^q)E_{q,3}(\eta T^q)E_{q,-1}^2(\eta T^q)\right)+ \\
& \alpha^{-1}\eta^{-1}T^{-3}t^3E_{q,4}(\eta t^q)E_{q,0}(\eta T^q)E_{q,2}(\eta T^q)E_{q,-2}(\eta T^q)(1-E_q(\eta T^q))+ \\
& \alpha^{-1}\eta^{-1}T^{-3}t^3E_{q,4}(\eta t^q)E_{q,0}^2(\eta T^q)\left(E_{q,3}(\eta T^q)E_{q,-2}(\eta T^q)+E_{q,2}(\eta T^q)E_{q,-1}(\eta T^q)\right)+
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \alpha^{-1} \eta^{-1} T^{-3} t^3 E_{q,4}(\eta t^q) \left(E_{q,0}(\eta T^q) E_{q,-1}(\eta T^q) (1 - E_q(\eta T^q))^2 + E_{q,-1}(\eta T^q) E_{q,0}(\eta T^q) (1 - E_q(\eta T^q))^2 \right) + \\
& \alpha^{-1} \eta^{-1} T^{-3} t^3 E_{q,4}(\eta t^q) \left(E_{q,-1}(\eta T^q) E_{q,2}^2(\eta T^q) E_{q,-2}(\eta T^q) + E_{q,3}(\eta T^q) E_{q,-1}^2(\eta T^q) E_{q,0}(\eta T^q) \right) + \\
& \alpha^{-1} \eta^{-1} T^{-3} t^3 E_{q,4}(\eta t^q) E_{q,-1}(\eta T^q) E_{q,3}(\eta T^q) E_{q,-2}(\eta T^q) (1 - E_q(\eta T^q)) - \\
& \alpha^{-1} \eta^{-1} T^{-3} t^3 E_{q,4}(\eta t^q) \left(E_{q,-1}(\eta T^q) E_{q,0}^2(\eta T^q) E_{q,2}(\eta T^q) + E_{q,2}(\eta T^q) E_{q,-1}^2(\eta T^q) (1 - E_q(\eta T^q)) \right) + \\
& \alpha^{-1} \eta^{-1} T^{-3} t^3 E_{q,4}(\eta t^q) \left(E_{q,-2}(\eta T^q) (1 - E_q(\eta T^q))^3 - E_{q,-2}(\eta T^q) E_{q,3}(\eta T^q) E_{q,0}^2(\eta T^q) \right) + \\
& \alpha^{-1} \eta^{-1} T^{-3} t^3 E_{q,4}(\eta t^q) E_{q,-2}(\eta T^q) \left(-E_{q,2}^2(\eta T^q) E_{q,-1}(\eta T^q) - E_{q,3}(\eta T^q) E_{q,-1}(\eta T^q) (1 - E_q(\eta T^q)) \right) - \\
& \alpha^{-1} \eta^{-1} T^{-3} t^3 E_{q,4}(\eta t^q) E_{q,-2}(\eta T^q) 2E_{q,2}(\eta T^q) E_{q,0}(\eta T^q) (1 - E_q(\eta T^q)) = 0.
\end{aligned}$$

Тогда

$$\int_0^T G(t, s) ds = -\frac{1}{\eta} E_q(\eta t^q) + \frac{1}{\eta} (E_q(\eta t^q) - 1) = -\frac{1}{\eta}.$$

Для доказательства существования неподвижных точек мультиоператора Γ введем в рассмотрение оператор $S : L^\infty([0, T]; E) \rightarrow C([0, T]; E)$ вида

$$S(f)(t) = \int_0^t (t-s)^{q-1} E_{q,q}(\eta(t-s)^q) f(s) ds.$$

Лемма 3.4. (см. [16]) Для каждого компактного множества $K \subset E$ и ограниченной последовательности $\{\xi_n\} \subset L^\infty([0, T]; E)$ такой, что $\{\xi_n(t)\} \subset K$ для п.в. $t \in [0, T]$, слабая сходимость $\xi_n \rightarrow \xi_0$ в $L^1([0, T]; E)$ влечет сходимость $S(\xi_n) \rightarrow S(\xi_0)$ в $C([0, T]; E)$.

Лемма 3.5. (см. [16]) Пусть $\Omega \subset C([0, T]; E)$ – непустое ограниченное множество и $\Omega(t)$ – относительно компактное подмножество E для каждого $t \in [0, T]$, тогда

$$M = \left\{ S(f)(t) = \int_0^t (t-s)^{q-1} E_{q,q}(\eta(t-s)^q) f(s) ds : f \in \mathcal{P}_F^\infty(x), x \in \Omega \right\}$$

является равномерно непрерывным множеством.

Для доказательства того, что мультиоператор Γ уплотняющий, рассмотрим конус

$$\mathbb{R}_+^2 = \{ \zeta = (\zeta_1, \zeta_2) : \zeta_1 \geq 0, \zeta_2 \geq 0 \}$$

с естественным частичным порядком и введем в пространстве $C([0, T]; E)$ следующую векторную меру некомпактности

$$\nu : Pb(C([0, T]; E)) \rightarrow \mathbb{R}_+^2,$$

определенную как

$$\nu(\Omega) = (\varphi(\Omega), mod_C(\Omega)),$$

где $\varphi(\Omega)$ есть модуль послышной некомпактности

$$\varphi(\Omega) = \sup_{t \in [0, T]} \chi(\{y(t) : y \in \Omega\}),$$

а вторая компонента – модуль равномерной непрерывности

$$mod_C(\Omega) = \limsup_{\delta \rightarrow 0} \max_{y \in \Omega} \max_{|t_1 - t_2| \leq \delta} \|y(t_1) - y(t_2)\|.$$

Теорема 3.1. Пусть выполняются условия (F1) – (F4), (9), (A), предположим, что дополнительно выполняется условие

$$\frac{\|\mu\|_\infty}{\eta} < 1, \quad (11)$$

где $\mu(\cdot)$ – функция из условия (F4). Тогда мультиоператор Γ является ν -уплотняющим.

Доказательство. Пусть $\Omega \subset C([0, T]; E)$ – непустое ограниченное множество такое, что

$$\nu(\Gamma(\Omega)) \geq \nu(\Omega). \quad (12)$$

Покажем, что Ω – относительно компактно.

Из (12), следует, что

$$\varphi(\Gamma(\Omega)) \geq \varphi(\Omega). \quad (13)$$

Используя свойство (F4) и (10), мы получаем

$$\begin{aligned} \chi(\Gamma(\Omega)(t)) &\leq \chi\left(\int_0^T G(t,s)f(s)ds : f \in \mathcal{P}_F^\infty(x), x \in \Omega\right) \leq \|\mu\|_\infty \int_0^T |G(t,s)| \chi(\Omega(s))ds \leq \\ &\leq \|\mu\|_\infty \varphi(\Omega) \int_0^T |G(t,s)| ds = \frac{\|\mu\|_\infty}{\eta} \varphi(\Omega). \end{aligned}$$

Из последней оценки мы имеем

$$\sup_{t \in [0, T]} \chi(\Gamma(\Omega)(t)) \leq \frac{\|\mu\|_\infty}{\eta} \varphi(\Omega),$$

или что то же самое

$$\varphi(\Gamma(\Omega)) \leq \frac{\|\mu\|_\infty}{\eta} \varphi(\Omega).$$

Условия (11) и (13) вместе с последним влекут за собой равенство $\varphi(\Omega) = 0$. Теперь покажем, что $\text{mod}_C(\Gamma(\Omega)) = 0$. Неравенство (12) влечет за собой следующее $\text{mod}_C(\Gamma(\Omega)) \geq \text{mod}_C(\Omega)$. В то же время из леммы 3.5 известно, что множество функций

$$M = \left\{ S(f)(t) = \int_0^t (t-s)^{q-1} E_{q,q}(\eta(t-s)^q) f(s) ds : f \in \mathcal{P}_F^\infty(x), x \in \Omega \right\}$$

является равномерно непрерывным, поэтому $\text{mod}_C(\Gamma(\Omega)) = 0$, следовательно и $\text{mod}_C(\Omega) = 0$, поэтому $\nu(\Omega) = (0, 0)$, что доказывает относительную компактность множества Γ .

Теорема 3.2. *Мультиоператор Γ является п.н.с.*

Доказательство. Из аналитического задания мультиоператора Γ и свойств многозначных отображений (см., например, [15]), следует, что утверждение достаточно доказать для мультиоператора $S \circ \mathcal{P}_F^\infty$.

Покажем, что мультиотображение $S \circ \mathcal{P}_F^\infty$ является квазикompактным. Возьмем непустое компактное множество $A \subset C([0, T]; E)$ и рассмотрим последовательность $\{y_n\} \subset S \circ \mathcal{P}_F^\infty(A)$, $y_n = S(f_n)$, где $f_n \in \mathcal{P}_F^\infty(x_n)$ для произвольной последовательности $\{x_n\} \subset A$. Предположим, без ограничения общности, что $x_n \rightarrow x_0 \in A$. Из условия (F4) следует, что последовательность $\{f_n(t)\} \subset E$ относительно компакна для п.в. $t \in [0, T]$, поэтому последовательность $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ является L^1 -полукомпактной. По критерию слабой относительной компактности Дистеля (см. [9]) мы можем предположить для произвольной подпоследовательности $\{f_{n_k}\}$, что $f_{n_k} \xrightarrow{L^1} f_0$. В силу свойств слабой замкнутости суперпозиционного мультиоператора (см. [15], лемма 5.1.1), мы получаем тогда, что $f_0 \in \mathcal{P}_F^\infty(x_0)$. Теперь, применяя лемму 3.4., мы для соответствующей подпоследовательности получаем, что $y_{n_k} \rightarrow y_0 = S(f_0) \in S \circ \mathcal{P}_F^\infty(x_0)$.

Аналогично рассуждая мы приходим к утверждению о том, что мультиоператор $S \circ \mathcal{P}_F^\infty$ является замкнутым. Сославшись на утверждение леммы 2.2, мы получаем желаемый результат.

Теперь мы можем перейти к доказательству главного утверждения.

Теорема 3.3. *При выполнении условий (F1), (F2), (F4), (9), (A), предположим, что условие (F3) имеет следующий вид:*

(F3') *существует функция $\omega \in L_+^\infty([0, T])$ такая, что $\|F(t, x)\|_E \leq \omega(t)(1 + \|x\|_E)$.*

Если $\frac{k}{\eta} < 1$, где $k = \max\{\|\omega\|_\infty, \|\mu\|_\infty\}$, функции ω и μ из условий (F3') и (F4) соответственно. Тогда задача (1)–(2) имеет решение.

Доказательство. Возьмем произвольную функцию $x \in C([0, T]; E)$, тогда для $f \in \mathcal{P}_F^\infty(x)$ и $t \in [0, T]$ мы имеем следующую оценку:

$$\begin{aligned} \|\Gamma x(t)\|_E &\leq \left\| \int_0^T G(t,s)f(s)ds \right\|_E \leq \int_0^T |G(t,s)| \|f(s)\|_E ds \leq \int_0^T |G(t,s)| \|\omega\|_\infty (1 + \|x\|_{C([0, T]; E)}) ds = \\ &= \|\omega\|_\infty (1 + \|x\|_{C([0, T]; E)}) \int_0^T |G(t,s)| ds = \frac{\|\omega\|_\infty (1 + \|x\|_{C([0, T]; E)})}{\eta} \leq \frac{k(1 + \|x\|_{C([0, T]; E)})}{\eta}. \end{aligned}$$

Таким образом, если мы возьмем

$$R \geq \frac{k\eta^{-1}}{1 - k\eta^{-1}},$$

тогда неравенство $\|x\|_{C([0, T]; E)} \leq R$ влечет, что $\|\Gamma x\|_{C([0, T]; E)} \leq R$. Таким образом, мультиоператор Γ преобразует замкнутый шар $B_R(0) \subset C([0, T]; E)$ в себя. Поскольку мультиоператор Γ уплотняющий, по теореме 2.1 он имеет неподвижную точку, которая есть решение задачи (1) – (2).

Список литературы

1. Афанасова М.С., Петросян Г.Г. 2019. О краевой задаче для функционально-дифференциального включения дробного порядка с общим начальным условием в банаховом пространстве. Известия вузов. Математика, 9:3–15. DOI: 10.26907/0021-3446-2019-9-3-15
2. Глушак А. В., Авад Х. К. 2013. О разрешимости абстрактного дифференциального уравнения дробного порядка с переменным оператором. СМФН. 47: 18–32.
3. Глушак А. В. 2010. Об одной обратной задаче для абстрактного дифференциального уравнения дробного порядка. Матем. заметки. 87 (5): 684–693.
4. Afanasova M., Liou Y. Ch., Obukhoskii V., Petrosyan G. 2019. On controllability for a system governed by a fractional-order semilinear functional differential inclusion in a Banach space. Journal of Nonlinear and Convex Analysis. 20: 1919–1935.
5. Bai Z., Lu H. 2005. Positive solutions for boundary-value problem of nonlinear fractional differential equation. J. Math. Anal. Appl. 311(2): 495–505. DOI:10.1016/j.jmaa.2005.02.052
6. Belmekki M., Nieto J.J., Rodriguez-Lopez R. 2009. Existence of Periodic Solution for a Nonlinear Fractional Differential Equation. Boundary Value Problems.11: 1–18. DOI:10.1155/2009/324561
7. Belmekki M., Nieto J.J., Rodriguez-Lopez R. 2014. Existence of solution to a periodic boundary value problem for a nonlinear impulsive fractional differential equation. Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations. 16: 1–27. DOI:10.14232/ejqtde.2014.1.16
8. Bogdan V.M. 2010. Generalized vectorial Lebesgue and Bochner integration theory, arXiv:1006.3881v1 [math.FA], 86.
9. Diestel J., Ruess W.M., Schachermayer W. 1993. On weak compactness in $L^1(\mu, X)$. Proc. Amer. Math. Soc. 118: 447–453. DOI:10.1090/S0002-9939-1993-1132408-X
10. Gorenflo R., Kilbas A.A., Mainardi F., Rogosin S.V. 2014. Mittag-Leffler Functions, Related Topics and Applications. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 441.
11. Hilfer R. 2000. Applications of Fractional Calculus in Physics. World Scientific, Singapore, 90.
12. Kamenskii M., Obukhovskii V., Petrosyan G., Yao J.C. 2018. Boundary value problems for semilinear differential inclusions of fractional order in a Banach space. Applicable Analysis. 9: 571–591.
13. Kamenskii M., Obukhovskii V., Petrosyan G., Yao J.C. 2019. On a Periodic Boundary Value Problem for a Fractional Order Semilinear Functional Differential Inclusions in a Banach Space. Mathematics. 7: 5–19. DOI:10.3390/math7121146
14. Kamenskii M., Obukhovskii V., Petrosyan G., Yao J.C. 2021. On the Existence of a Unique Solution for a Class of Fractional Differential Inclusions in a Hilbert Space. Mathematics. 9(2): 136–154. DOI:10.3390/math9020136
15. Kamenskii M., Obukhovskii V., Zecca P. 2001. Condensing Multivalued Maps and Semilinear Differential Inclusions in Banach Spaces. Walter de Gruyter, Berlin–New-York, 254.
16. Kamenskii M.I., Petrosyan G.G., Wen, C.-F. 2021. An Existence Result for a Periodic Boundary Value Problem of Fractional Semilinear Differential Equations in a Banach Space. Journal of Nonlinear and Variational Analysis. 5(1): 155–177.
17. Ke T.D., Loi N.V., Obukhovskii V. 2015. Decay solutions for a class of fractional differential variational inequalities. Fract. Calc. Appl. Anal. 18(3): 531–553. DOI:10.1515/fca-2015-0033
18. Ke T.D., Obukhovskii V., Wong N.C., Yao J.C. 2013. On a class of fractional order differential inclusions with infinite delays. Applicable Anal. 92(1): 115–137. DOI:10.1080/00036811.2011.601454
19. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. 2006. Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Elsevier Science B.V., North-Holland Mathematics Studies, Amsterdam, 540.
20. Mainardi F., Rionero S., Ruggeri T. 1994. On the initial value problem for the fractional diffusion-wave equation, Waves and Stability in Continuous Media. World Scientific. Singapore. 246–251.
21. Obukhovskii V., Gel'man B. 2020. Multivalued Maps and Differential Inclusions. Elements of Theory and Applications. World Scientific, Hackensack, 220.

22. Podlubny I. 1999. Fractional Differential Equations. Academic Press, San Diego, 368.
23. Shishkina E., Sitnik S. 2020. Transmutations, Singular and Fractional Differential Equations with Applications to Mathematical Physics, Mathematics in Science and Engineering. Academic Press, Elsevier, 592.
24. Shishkina E., Sitnik S., Polunin V. 2021. On sharp bounds in the T. Lyons neo-classical inequality, which is essential for the theory of stochastic differential equations. Global and Stochastic Analysis. 8 (2): 77–86.
25. Tarasov V.E. 2010. Fractional Dynamics. Applications of Fractional Calculus to Dynamics of Particles, Fields and Media. Springer, London, New York, 522.

References

1. Afanasova M., Petrosyan G. 2019. On the boundary value problem for functional differential inclusion of fractional order with general initial condition in a Banach space. Russian Mathematics. 63: 1–12. DOI: 10.3103/S1066369X19090019
2. Glushak A. V., Avad H. K. 2014. On the solvability of an abstract differential equation of fractional order with a variable operator. Journal of Mathematical Sciences. 202 (5): 637–652.
3. Glushak A. V. 2010. On an Inverse Problem for an Abstract Differential Equation of Fractional Order. Math. Notes. 87 (5): 654–662.
4. Afanasova M., Liou Y. Ch., Obukhoskii V., Petrosyan G. 2019. On controllability for a system governed by a fractional-order semilinear functional differential inclusion in a Banach space. Journal of Nonlinear and Convex Analysis. 20: 1919–1935 .
5. Bai Z., Lu H. 2005. Positive solutions for boundary-value problem of nonlinear fractional differential equation. J. Math. Anal. Appl. 311(2): 495–505. DOI:10.1016/j.jmaa.2005.02.052
6. Belmekki M., Nieto J.J., Rodriguez-Lopez R. 2009. Existence of Periodic Solution for a Nonlinear Fractional Differential Equation. Boundary Value Problems.11: 1–18. DOI:10.1155/2009/324561
7. Belmekki M., Nieto J.J., Rodriguez-Lopez R. 2014. Existence of solution to a periodic boundary value problem for a nonlinear impulsive fractional differential equation. Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations. 16: 1–27. DOI:10.14232/ejqtde.2014.1.16
8. Bogdan V.M. 2010. Generalized vectorial Lebesgue and Bochner integration theory, arXiv:1006.3881v1 [math.FA], 86.
9. Diestel J., Ruess W.M., Schachermayer W. 1993. On weak compactness in $L^1(\mu, X)$. Proc. Amer. Math. Soc. 118: 447–453. DOI:10.1090/S0002-9939-1993-1132408-X
10. Gorenflo R., Kilbas A.A., Mainardi F., Rogosin S.V. 2014. Mittag-Leffler Functions, Related Topics and Applications. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 441.
11. Hilfer R. 2000. Applications of Fractional Calculus in Physics. World Scientific, Singapore, 90.
12. Kamenskii M., Obukhovskii V., Petrosyan G., Yao J.C. 2018. Boundary value problems for semilinear differential inclusions of fractional order in a Banach space. Applicable Analysis. 9: 571–591.
13. Kamenskii M., Obukhovskii V., Petrosyan G., Yao J.C. 2019. On a Periodic Boundary Value Problem for a Fractional Order Semilinear Functional Differential Inclusions in a Banach Space. Mathematics. 7: 5–19. DOI:10.3390/math7121146
14. Kamenskii M., Obukhovskii V., Petrosyan G., Yao J.C. 2021. On the Existence of a Unique Solution for a Class of Fractional Differential Inclusions in a Hilbert Space. Mathematics. 9(2): 136–154. DOI:10.3390/math9020136
15. Kamenskii M., Obukhovskii V., Zecca P. 2001. Condensing Multivalued Maps and Semilinear Differential Inclusions in Banach Spaces. Walter de Gruyter, Berlin–New-York, 254.
16. Kamenskii M.I., Petrosyan G.G., Wen, C.-F. 2021. An Existence Result for a Periodic Boundary Value Problem of Fractional Semilinear Differential Equations in a Banach Space. Journal of Nonlinear and Variational Analysis. 5(1): 155-177.
17. Ke T.D., Loi N.V., Obukhovskii V. 2015. Decay solutions for a class of fractional differential variational inequalities. Fract. Calc. Appl. Anal. 18(3): 531–553. DOI:10.1515/fca-2015-0033

18. Ke T.D., Obukhovskii V., Wong N.C., Yao J.C. 2013. On a class of fractional order differential inclusions with infinite delays. *Applicable Anal.* 92(1): 115–137. DOI:10.1080/00036811.2011.601454
19. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. 2006. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations.* Elsevier Science B.V., North-Holland Mathematics Studies, Amsterdam, 540.
20. Mainardi F., Rionero S., Ruggeri T. 1994. On the initial value problem for the fractional diffusion-wave equation, *Waves and Stability in Continuous Media.* World Scientific. Singapore. 246–251.
21. Obukhovskii V., Gel'man B. 2020. *Multivalued Maps and Differential Inclusions. Elements of Theory and Applications.* World Scientific, Hackensack, 220.
22. Podlubny I. 1999. *Fractional Differential Equations.* Academic Press, San Diego, 368.
23. Shishkina E., Sitnik S. 2020. *Transmutations, Singular and Fractional Differential Equations with Applications to Mathematical Physics, Mathematics in Science and Engineering.* Academic Press, Elsevier, 592.
24. Shishkina E., Sitnik S., Polunin V. 2021. On sharp bounds in the T. Lyons neo-classical inequality, which is essential for the theory of stochastic differential equations. *Global and Stochastic Analysis.* 8 (2): 77–86.
25. Tarasov V.E. 2010. *Fractional Dynamics. Applications of Fractional Calculus to Dynamics of Particles, Fields and Media.* Springer, London, New York, 522.

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.
Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Получена 28.11.2021

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Петросян Гарик Гагикович – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры высшей математики Воронежского государственного педагогического университета

 <http://orcid.org/0000-0001-8154-6299>

Улица Ленина, 86, Воронеж, 394043, Россия

E-mail: garikpetrosyan@yandex.ru

Сорока Мария Сергеевна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики Воронежского государственного педагогического университета

 <http://orcid.org/0000-0001-8722-520X>

Улица Ленина, 86, Воронеж, 394043, Россия

E-mail: marya.afanasowa@yandex.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Garik Petrosyan – PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Higher Mathematics, Voronezh State Pedagogical University, Voronezh, Russia

Maria Soroka – PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Higher Mathematics, Voronezh State Pedagogical University, Voronezh, Russia

ЗАДАЧА ТРИКОМИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ МНОГОМЕРНЫХ СМЕШАННО ГИПЕРБОЛО-ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

С. А. Алдашев

(Статья представлена членом редакционной коллегии А. П. Солдатовым)

Институт математики и математического моделирования Министерства образования и науки Республики
Казахстан,
Алматы, 050010, Казахстан
E-mail: aldash51@mail.ru

Аннотация. Известно, что при математическом моделировании электромагнитных полей в пространстве характер электромагнитного процесса определяется свойствами среды. Если среда непроводящая, то получаем вырождающиеся многомерные гиперболические уравнения. Если же среда обладает большой проводимостью, то приходим к вырождающимся многомерным параболическим уравнениям. Следовательно, анализ электромагнитных полей в сложных средах (например, если проводимость среды меняется) сводится к вырождающимся многомерным гиперболо-параболическим уравнениям. Известно также, что колебания упругих мембран в пространстве по принципу Гамильтона можно моделировать вырождающимися многомерными гиперболическими уравнениями. Изучение процесса распространения тепла в среде, заполненной массой, приводит к вырождающимся многомерным параболическим уравнениям. Следовательно, исследуя математическое моделирование процесса распространения тепла в колеблющихся упругих мембранах, также приходим к вырождающимся многомерным гиперболо-параболическим уравнениям. При изучении этих приложений возникает необходимость получения явного представления решений исследуемых задач. Краевые задачи для гиперболо-параболических уравнений на плоскости хорошо изучены, а их многомерные аналоги исследованы мало. Задача Трикоми для указанных уравнений ранее исследована. Насколько известно, эта задача в пространстве не изучена. В данной работе показано, что для некоторых классов многомерных смешанно гиперболо-параболических уравнений задача Трикоми разрешима неоднозначно.

Ключевые слова: задача Трикоми, многомерное, уравнение, разрешимость, сферические функций.

Для цитирования: Алдашев С. А. 2021. Задача Трикоми для некоторых классов многомерных смешанно гиперболо-параболических уравнений & Физика. 53(4): 284–292. DOI 10.52575/2687-0959-2021-53-4-284-292.

THE TRICOMI PROBLEM FOR SOME CLASSES OF MULTIDIMENSIONAL MIXED HYPERBOLIC-PARABOLIC EQUATIONS

Serik Aldashev

(Article submitted by a member of the editorial board A. P. Soldatov)

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling of the Ministry of Education and Science of the Republic of
Kazakhstan,
Almaty, 050010, Kazakhstan
E-mail: aldash51@mail.ru
Received December, 1, 2021

Abstract. It is known that in the mathematical modeling of electromagnetic fields in space, the nature of the electromagnetic process is determined by the properties of the medium. If the medium is non-conducting, we obtain degenerate multidimensional hyperbolic equations. If the medium has a high conductivity, then we come to degenerate multidimensional parabolic equations. Consequently, the analysis of electromagnetic fields in complex media (for example, if the conductivity of the medium changes) is reduced to degenerate multidimensional hyperbolic - parabolic equations. It is also known that the oscillations of elastic membranes in space can be modeled according to the Hamilton principle by degenerate multidimensional hyperbolic equations. The study of the process of heat propagation in a medium filled with mass leads to degenerate multidimensional parabolic equations. Therefore, by studying the mathematical modeling of the heat propagation process in oscillating elastic membranes, we also arrive at degenerate multidimensional hyperbolic - parabolic equations. When studying these applications, it becomes necessary to obtain an explicit representation of the solutions to the problems under study. Boundary value problems for hyperbolic - parabolic equations on the plane are well studied, and their multidimensional analogues are little studied. The Tricomi problem for these equations was previously investigated. As far as we know, this problem has not been studied in space. In this paper, we show that for some classes of multidimensional mixed hyperbolic-parabolic equations, the Tricomi problem is ambiguously solvable.

Key words: Tricomi problem, multidimensional, equation, solvability, spherical functions.

For citation: Aldashev S. A. 2021. The Tricomi problem for some classes of multidimensional mixed Hyperbolic-parabolic equations . Applied Mathematics & Physics. 53(4): 284–292. (in Russian) DOI 10.52575/2687-0959-2021-53-4-284-292.

1. Введение. Теория краевых задач для гипербола-параболических уравнений на плоскости хорошо изучена ([1]), а их многомерные аналоги исследованы мало [6], Задача Трикоми для указанных уравнений ранее исследована в [10]. Насколько известно, эта задача в пространстве не изучена.

2. Постановка задачи и результат. Пусть D_ε – конечная область евклидова пространства E_{m+1} точек (x_1, \dots, x_m, t) , ограниченная в полупространстве $t > 0$ конусами $K_\varepsilon : |x| = t + \varepsilon$, $K_1 : |x| = 1 - t$, $0 \leq t \leq \frac{(1-\varepsilon)}{2}$, а при $t < 0$ – цилиндрической поверхностью $\Gamma = \{(x, t) : |x| = 1\}$, и плоскостью $t = t_0 = const$, где $|x|$ – длина вектора $x = (x_1, \dots, x_m)$, а $0 < \varepsilon < 1$. Обозначим через D_ε^+ и D^- части области D_ε , лежащие соответственно в полупространствах $t > 0$ и $t < 0$. Части конусов K_ε , K_1 , ограничивающих области D_ε^+ , обозначим через S^ε и S^1 соответственно. Пусть $S_\varepsilon = \{(x, t) : t = 0, \varepsilon < |x| < 1\}$.

В области D_ε рассмотрим смешанно гипербола-параболические уравнения

$$0 = \begin{cases} \Delta_x u - u_{tt} + \sum_{i=1}^m a_i(x, t)u_{x_i} + b(x, t)u_t + c(x, t)u, & t > 0, \\ \Delta_x u - u_t + \sum_{i=1}^m d_i(x, t)u_{x_i} + e(x, t)u, & t < 0, \end{cases} \quad (1)$$

где Δ_x – оператор Лапласа по переменным x_1, \dots, x_m , $m \geq 2$.

В дальнейшем нам удобно перейти от декартовых координат x_1, \dots, x_m, t к сферическим $r, \theta_1, \dots, \theta_{m-1}, t$, $r \geq 0$, $0 \leq \theta_1 < 2\pi$, $0 \leq \theta_i < \pi$, $i = 2, 3, \dots, m - 1$, $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_{m-1})$. Следуя [10] в качестве многомерного аналога задачи Трикоми рассмотрим следующую

Задача Т. Найти решения уравнения (1) в области D_ε при $t \neq 0$ из класса $C(\bar{D}_\varepsilon) \cap C^1(D_\varepsilon) \cap C^2(D_\varepsilon^+ \cup D^-)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u|_{S^\varepsilon} = \varphi(r, \theta), \quad u|_\Gamma = \psi(t, \theta). \quad (2)$$

Пусть $\{Y_{n,m}^k(\theta)\}$ – система линейно независимых сферических функций порядка n , $1 \leq k \leq k_n$, $(m - 2)!n!k_n = (n + m - 3)!(2n + m - 2)$, $W_2^l(S_\varepsilon)$, $l = 0, 1, \dots$ – пространства Соболева, а $\tilde{S} = \{(r, \theta) \in S_\varepsilon, \varepsilon < r < \frac{(1+\varepsilon)}{2}\}$. Имеет место [9]

Лемма. Пусть $f(r, \theta) \in W_2^l(S_\varepsilon)$. Если $l \geq m - 1$, то ряд

$$f(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} f_n^k(r) Y_{n,m}^k(\theta), \quad (3)$$

а также ряды, полученные из него дифференцированием порядка $p \leq l - m + 1$, сходятся абсолютно и равномерно.

Через $\tilde{a}_{in}^k(r, t)$, $a_{in}^k(r, t)$, $\tilde{b}_n^k(r, t)$, $\tilde{c}_n^k(r, t)$, $\tilde{d}_{in}^k(r, t)$, $\tilde{d}_{in}^k(r, t)$, $\tilde{e}_n^k(r, t)$, ρ_n^k , $\tilde{\varphi}_n^k(r)$, $\psi_n^k(t)$, $\tilde{\tau}_n^k(r)$, $\tilde{v}_n^k(r)$ обозначим коэффициенты разложения ряда (3), соответственно функций $a_i(r, \theta, t)\rho(\theta)$, $a_i \frac{x_i}{r} \rho$, $b(r, \theta, t)\rho$, $c(r, \theta, t)\rho$, $d_i(r, \theta, t)\rho$, $d_i \frac{x_i}{r} \rho$, $e(r, \theta, t)\rho$, $i = 1, \dots, m$, $\rho(\theta)$, $\varphi(r, \theta)$, $\psi(t, \theta)$, $\tau(t, \theta) = u(r, \theta, 0)$, $v(t, \theta) = u_t(r, \theta, 0)$, причём $\rho(\theta) \in C^\infty(H)$, H – единичная сфера в E_m . Введем множество функций $B^l(\tilde{S}_\varepsilon) = \{f(r, \theta) : f \in W_2^l(\tilde{S}_\varepsilon), \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} (\|f_n^k(r)\|_{C^2((\varepsilon, \frac{(1+\varepsilon)}{2}))}^2 + \|f_n^k(r)\|_{C([\varepsilon, \frac{(1+\varepsilon)}{2}]})}^2) \exp 2(n^2 + n(m - 2)) < \infty, l \geq m - 1\}$

Пусть $a_i(r, \theta, t)$, $b(r, \theta, t)$, $c(r, \theta, t) \in W_2^l(D_\varepsilon^+)$, $d_i(r, \theta, t)$, $e(r, \theta, t) \in W_2^l(D^-) \subset C(\bar{D}^-)$, $l \geq m + 1$, при этом $d_i(r, \theta, 0) = e(r, \theta, 0) = 0$, $0 < r < 1$, $i = 1, \dots, m$. Тогда справедлива

Теорема. Если $\varphi(r, \theta) \in B^l(\tilde{S}_\varepsilon)$, $\psi(t, \theta) \in W_2^l(\Gamma)$, $l \geq m + 1$, то задача Т разрешима неоднозначно.

Отметим, что неединственность решения задачи Т для модельного гипербола-параболического уравнения доказана в [1].

Доказательство. В сферических координатах уравнения (1) в области D_ε^+ имеет вид

$$Lu \equiv u_{rr} + \frac{m-1}{r}u_r - \frac{1}{r^2}\delta u - u_{tt} + \sum_{i=1}^m a_i(r, \theta, t)u_{x_i} + b(r, \theta, t)u_t + c(r, \theta, t)u = 0, \quad (4)$$

где $\delta \equiv - \sum_{j=1}^{m-1} \frac{1}{g_j \sin^{m-j-1} \theta_j} \frac{\partial}{\partial \theta_j} \left(\sin^{m-j-1} \theta_j \frac{\partial}{\partial \theta_j} \right)$, $g_1 = 1$, $g_j = (\sin \theta_1 \dots \sin \theta_{j-1})^2$, $j > 1$.

Известно [9], что спектр оператора δ состоит из собственных чисел $\lambda_n = n(n + m - 2)$, $n = 0, 1, \dots$ каждому из которых соответствует k_n ортонормированных собственных функций $Y_{n,m}^k(\theta)$. При $t \rightarrow -0$ на S_ε получим функциональное соотношение между $\tau(r, \theta)$ и $v(r, \theta)$ вида

$$\tau_{rr} + \frac{m-1}{r}\tau_r - \frac{1}{r^2}\delta\tau = v(r, \theta). \quad (5)$$

Искомое решение задачи Т в области D_ε^+ будем искать в виде

$$u(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \bar{u}_n^k(r, t) Y_{n,m}^k(\theta), \quad \text{где } \bar{u}_n^k(r, t) \text{ – функции, подлежащие определению.} \quad (6)$$

Подставив (6) в (4), умножив затем полученное выражение на $\rho(\theta) \neq 0$, и проинтегрировав по единичной сфере H в E_m для \bar{u}_n^k получим [1], [3]

$$\begin{aligned} & \rho_0^1 \bar{u}_{0rr}^1 - \rho_0^1 \bar{u}_{0tt}^1 + \left(\frac{m-1}{r} \rho_0^1 + \sum_{i=0}^m a_{i0}^1 \right) \bar{u}_{0r}^1 + \bar{b}_0^1 \bar{u}_{0t}^1 + \bar{c}_0^1 \bar{u}_0^1 + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \left\{ \rho_n^k \bar{u}_{nrr}^k - \rho_n^k \bar{u}_{ntt}^k + \left(\frac{m-1}{r} \rho_n^k + \sum_{i=1}^m a_{in}^k \right) \bar{u}_{nr}^k + \bar{b}_n^k \bar{u}_{nt}^k + \right. \\ & \left. + \left[\bar{c}_n^k - \lambda_n \frac{\rho_n^k}{r^2} + \sum_{i=1}^m (\bar{a}_{in-1}^k - n a_{in}^k) \right] \bar{u}_n^k \right\} = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Теперь рассмотрим бесконечную систему дифференциальных уравнений

$$\rho_0^1 \bar{u}_{0rr}^1 - \rho_0^1 \bar{u}_{0tt}^1 + \frac{m-1}{r} \rho_0^1 \bar{u}_{0r}^1 = 0, \quad (8)$$

$$\begin{aligned} & \rho_1^k \bar{u}_{1rr}^k - \rho_1^k \bar{u}_{1tt}^k + \frac{m-1}{r} \rho_1^k \bar{u}_{1r}^k - \frac{\lambda_1}{r^2} \rho_1^k \bar{u}_1^k = \\ & = -\frac{1}{k_1} \left(\sum_{i=1}^m a_{i0}^1 \bar{u}_{0r}^1 + \bar{b}_0^1 \bar{u}_{0t}^1 + \bar{c}_0^1 \bar{u}_0^1 \right), \quad n=1, \quad k = \overline{1, k_1}, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} & \rho_n^k \bar{u}_{nrr}^k - \rho_n^k \bar{u}_{ntt}^k + \frac{m-1}{r} \rho_n^k \bar{u}_{nr}^k - \frac{\lambda_n}{r^2} \rho_n^k \bar{u}_n^k = \\ & = -\frac{1}{k_n} \sum_{k=1}^{k_{n-1}} \left\{ \sum_{i=1}^m a_{in-1}^k \bar{u}_{n-1r}^k + \bar{b}_{n-1}^k \bar{u}_{n-1t}^k + [\bar{c}_{n-1}^k + \right. \\ & \left. + \sum_{i=1}^m (\bar{a}_{in-2}^k - (n-1) a_{in-1}^k) \bar{u}_{n-1}^k \right\}, \quad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (10)$$

Нетрудно убедиться, что если $\{\bar{u}_n^k\}, k = \overline{1, k_n}, n = 0, 1, \dots$ – решение системы (8)–(10), то оно является и решением уравнения (7). Заметим, что каждое уравнение системы (8)–(10) можно представить в виде

$$\bar{u}_{nrr}^k - \bar{u}_{ntt}^k + \frac{(m-1)}{r} \bar{u}_{nr}^k - \frac{\lambda_n}{r^2} \bar{u}_n^k = \bar{f}_n^k(r, t), \quad (11)$$

где $\bar{f}_n^k(r, t)$ определяются из предыдущих уравнений этой системы, при этом $\bar{f}_0^1(r, t) \equiv 0$.

Далее, учитывая ортогональность сферических функций $Y_{n,m}^k(\theta)$ [9], из (5) и из первого краевого условия (2) в силу (6) будем иметь

$$\bar{\tau}_{nrr}^k + \frac{m-1}{r} \bar{\tau}_{nr}^k - \frac{\lambda_n}{r^2} \bar{\tau}_n^k = \bar{v}_n^k(r), \quad \varepsilon < r < 1, \quad (12)$$

$$\bar{u}_n^k(r, r - \varepsilon) = \bar{\varphi}_n^k(r), \quad \varepsilon \leq r \leq \frac{(1 + \varepsilon)}{2}, \quad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (13)$$

В (11)–(13) произведя замену $\bar{u}_n^k(r, t) = r^{\frac{(1-m)}{2}} u_n^k(r, t)$ и полагая $\xi = \frac{r+t}{2}, \eta = \frac{r-t}{2}$ соответственно получим

$$L u_n^k \equiv u_{n\xi\eta}^k + \frac{\bar{\lambda}_n}{(\xi + \eta)^2} u_n^k = f_n^k(\xi, \eta), \quad (14)$$

$$\tau_{n\xi\xi}^k + \frac{\bar{\lambda}_n}{\xi^2} \tau_n^k = v_n^k(\xi), \quad \frac{\varepsilon}{2} < \xi < \frac{1}{2}, \quad (15)$$

$$u_n^k(\xi, \frac{\varepsilon}{2}) = \varphi_n^k(\xi), \quad \frac{\varepsilon}{2} \leq \xi \leq \frac{1}{2}, \quad (16)$$

$$f_n^k(\xi, \eta) = (\xi + \eta)^{\frac{(m-1)}{2}} \bar{f}_n^k(\xi + \eta, \xi - \eta), \quad \tau_n^k(\xi) = (2\xi)^{\frac{(m-1)}{2}} \bar{\tau}_n^k(2\xi), \quad v_n^k(\xi) = (2\xi)^{\frac{(m-1)}{2}} \bar{v}_n^k(2\xi),$$

$$\varphi_n^k(\xi) = \left(\xi + \frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{(m-1)}{2}} \bar{\varphi}_n^k\left(\xi + \frac{\varepsilon}{2}\right), \quad \bar{\lambda}_n = ((m-1)(3-m) - 4\lambda_n)/4, \quad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 0, 1, \dots$$

Используя общее решение уравнения (14) (см. [5]) в [2] показано, что решение задачи Коши для уравнения (14) имеет вид

$$\begin{aligned} u_n^k(\xi, \eta) &= \frac{1}{2} \tau_n^k(\eta) R(\eta, \eta; \xi, \eta) + \frac{1}{2} \tau_n^k(\xi) R(\xi, \xi; \xi, \eta) + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\frac{\xi}{2}}^{\xi} [v_n^k(\xi_1) R(\xi_1, \xi_1; \xi, \eta) - \tau_n^k(\xi_1) \frac{\partial}{\partial N} R(\xi_1, \eta_1; \xi, \eta)|_{\xi_1=\eta_1}] d\xi_1 + \\ &+ \int_{\frac{1}{2}}^{\xi} \int_{\frac{\xi}{2}}^{\eta} f_n^k(\xi_1, \eta_1) R(\xi_1, \eta_1; \xi, \eta) d\xi_1 d\eta_1, \end{aligned} \tag{17}$$

где $R(\xi_1, \eta_1; \xi, \eta) = P_{\mu} \left[\frac{(\xi_1 - \eta_1)(\xi - \eta) + 2(\xi_1 \eta_1 + \xi \eta)}{(\xi_1 + \eta_1)(\xi + \eta)} \right]$ – функция Римана уравнения $Lu_n^k = 0$ [12], а $P_{\mu}(z)$ – функция Лежандра, $\mu = n + \frac{(m-3)}{2}$, $\frac{\partial}{\partial N}|_{\xi_1=\eta_1} = \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial N^{\perp}} \frac{\partial}{\partial \eta_1} + \frac{\partial \eta_1}{\partial N^{\perp}} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \right)|_{\xi_1=\eta_1}$, N^{\perp} – нормаль к прямой $\xi = \eta$ в точке (ξ_1, η_1) , направленная в стороны полуплоскости $\eta \leq \xi$. Далее, из (2), (16) имеем

$$\tau_n^k\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) = \varphi_n^k\left(\frac{\varepsilon}{2}\right), \quad \tau_n^k\left(\frac{1}{2}\right) = \psi_n^k(0), \quad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 0, 1, \dots \tag{18}$$

Решение уравнение (15) записывается в виде [7]

$$\tau_n^k(\xi) = \frac{1}{s_2 - s_1} \int_{\frac{\xi}{2}}^{\xi} (\xi^{s_2} \xi_1^{3-s_2} - \xi^{s_1} \xi_1^{3-s_1}) v_n^k(\xi_1) d\xi_1 + c_{1n}^k \xi^{s_1} + c_{2n}^k \xi^{s_2}, \tag{19}$$

$\frac{\varepsilon}{2} < \xi < \frac{1}{2}$, $s_1 = n + \frac{(m-1)}{2}$, $s_2 = -n - \frac{(m-3)}{2}$, c_{1n}^k, c_{2n}^k – произвольные независимые постоянные. Подставляя (18) в (19) для c_{1n}^k, c_{2n}^k получим систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{s_1} c_{1n}^k + \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{s_2} c_{2n}^k = \varphi_n^k\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{s_1} c_{1n}^k + \left(\frac{1}{2}\right)^{s_2} c_{2n}^k = \psi_n^k(0) - \frac{1}{s_2 - s_1} \int_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{1}{2}} (2^{-s_2} \xi_1^{3-s_2} - 2^{-s_1} \xi_1^{3-s_1}) v_n^k(\xi_1) d\xi_1, \end{cases}$$

из которого найдем

$$\begin{aligned} c_{1n}^k &= [2^{s_1} \varphi_n^k\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) + \varepsilon^{s_2} 2^{s_1} (A_n^k - \psi_n^k(0))] / (\varepsilon^{s_1} - \varepsilon^{s_2}), \\ c_{2n}^k &= [\varepsilon^{s_1} 2^{s_2} (\psi_n^k(0) - A_n^k) - 2^{s_2} \varphi_n^k\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)] / (\varepsilon^{s_1} - \varepsilon^{s_2}), \\ \frac{1}{s_2 - s_1} \int_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{1}{2}} (2^{-s_2} \xi_1^{3-s_2} - 2^{-s_1} \xi_1^{3-s_1}) v_n^k(\xi_1) d\xi_1 &= A_n^k = const. \end{aligned} \tag{20}$$

Из (17), (19), учитывая условие (16) будем иметь

$$\begin{aligned} f_n^k(\xi) &= \int_{\frac{\xi}{2}}^{\xi} (\xi^{s_2} \xi_1^{3-s_2} - \xi^{s_1} \xi_1^{3-s_1}) v_n^k(\xi_1) d\xi_1 + \sqrt{2} (s_2 - s_1) \int_{\frac{\xi}{2}}^{\xi} v_n^k(\xi_1) P_{\mu} \left[\frac{\xi_1^2 + \xi \frac{\xi}{2}}{\xi_1(\xi + \frac{\xi}{2})} \right] d\xi_1 - \\ &- \frac{(2\xi - \varepsilon)}{2\xi + \varepsilon} \int_{\frac{\xi}{2}}^{\xi} \left\{ \int_{\frac{\xi}{2}}^{\xi} (\xi_1^{s_2-1} \xi_2^{3-s_2} - \xi_1^{s_1-1} \xi_2^{3-s_1}) P'_{\mu} \left[\frac{\xi_1^2 + \xi \frac{\xi}{2}}{\xi_1(\xi + \frac{\xi}{2})} \right] d\xi_1 \right\} v_n^k(\xi_2) d\xi_2, \end{aligned} \tag{21}$$

где

$$\begin{aligned} f_n^k(\xi) &= (s_2 - s_1) \left\{ 2\varphi_n^k(\xi) - \varphi_n^k\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) - c_{1n}^k \xi^{s_1} - c_{2n}^k \xi^{s_2} + \frac{(2\xi - \varepsilon)}{(2\xi + \varepsilon)} c_{1n}^k \int_{\frac{\xi}{2}}^{\xi} \xi_1^{s_1-1} P'_{\mu} \left[\frac{\xi_1^2 + \xi \frac{\xi}{2}}{\xi_1(\xi + \frac{\xi}{2})} \right] d\xi_1 + \right. \\ &\left. + \frac{(2\xi - \varepsilon)}{(2\xi + \varepsilon)} c_{2n}^k \int_{\frac{\xi}{2}}^{\xi} \xi_1^{s_2-1} P'_{\mu} \left[\frac{\xi_1^2 + \xi \frac{\xi}{2}}{\xi_1(\xi + \frac{\xi}{2})} \right] d\xi_1 \right\}. \end{aligned}$$

Продифференцировав уравнение (21) по ξ получим интегральное уравнение Вольтерра второго рода

$$\chi_n^k(\xi) = v_n^k(\xi) + \int_{\frac{\xi}{2}}^{\xi} G_n(\xi, \xi_1) v_n^k(\xi_1) d\xi_1, \quad \frac{\varepsilon}{2} < \xi < \frac{1}{2},$$

$$\begin{aligned} \sqrt{2}(s_2 - s_1)\chi_n^k(\xi) &= \frac{df_n^k}{d\xi}, \sqrt{2}(s_2 - s_1)G_n(\xi, \xi_1) = s_2\xi^{s_2-1}\xi_1^{3-s_2} - s_1\xi^{s_1-1}\xi_1^{3-s_1} + \\ &+ \sqrt{2}(s_2 - s_1) \frac{(\varepsilon^2 - 4\xi_1^2)}{\xi_1(2\xi + \varepsilon)^2} P'_\mu \left[\frac{\xi^2 + \xi \frac{\varepsilon}{2}}{\xi_1(\xi + \frac{\varepsilon}{2})} \right] - \frac{(2\xi - \varepsilon)}{(2\xi + \varepsilon)} (\xi^{s_2-1}\xi_1^{3-s_2} - \xi_1^{s_1-1}\xi_1^{3-s_1}) - \\ &- \int_{\xi_1}^{\xi} (\xi_2^{s_2-1}\xi_1^{3-s_2} - \xi_2^{s_1-1}\xi_1^{3-s_1}) \left[\frac{4\varepsilon}{(2\xi + \varepsilon)^2} P'_\mu \left(\frac{\xi^2 + \xi \frac{\varepsilon}{2}}{\xi_1(\xi + \frac{\varepsilon}{2})} \right) + \frac{(2\xi - \varepsilon)(\varepsilon^2 - 4\xi_1^2)}{\xi_2(2\xi + \varepsilon)^2} P''_\mu \left(\frac{\xi^2 + \xi \frac{\varepsilon}{2}}{\xi_2(\xi + \frac{\varepsilon}{2})} \right) \right] d\xi_2, \end{aligned}$$

из которого найдем

$$v_n^k(\xi) = \chi_n^k(\xi) - \int_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\xi} R_n(\xi, \xi_1; -1)\chi_n^k(\xi_1)d\xi_1, \tag{22}$$

где $R_n(\xi, \xi_1; -1)$ – резольвента ядра $G_n(\xi, \xi_1)$.

Далее из (20)–(22) имеем

$$\begin{aligned} \sqrt{2}(s_2 - s_1)^2 A_n^k &= \int_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{1}{2}} (2^{-s_2}\xi_1^{3-s_2} - 2^{s_1}\xi_1^{3-s_1}) \left[\frac{df_n^k}{d\xi_1} - \int_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\xi_1} R_n(\xi_1, \xi_2; -1) \frac{df_n^k}{d\xi_2} d\xi_2 \right] d\xi_1, \tag{23} \\ \frac{(\varepsilon^{s_1} - \varepsilon^{s_2})}{(s_2 - s_1)} \frac{df_n^k}{d\xi} &= \left\{ \varepsilon^{s_2} 2^{s_1} \left[\frac{4\varepsilon}{(2\xi + \varepsilon)^2} \int_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\xi} \xi_1^{s_1-1} P'_\mu \left(\frac{\xi^2 + \xi \frac{\varepsilon}{2}}{\xi_1(\xi + \frac{\varepsilon}{2})} \right) d\xi_1 + \left(\frac{2\xi - \varepsilon}{2\xi + \varepsilon} - s_1 \right) \xi^{s_1-1} + \right. \right. \\ &+ \left. \frac{(2\xi - \varepsilon)}{(2\xi + \varepsilon)^3} \int_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\xi} (\varepsilon^2 - 4\xi_1^2) \xi_1^{s_1-2} P''_\mu \left(\frac{\xi^2 + \xi \frac{\varepsilon}{2}}{\xi_1(\xi + \frac{\varepsilon}{2})} \right) d\xi_1 \right] - \varepsilon^{s_1} 2^{s_2} \left[\frac{4\varepsilon}{(2\xi + \varepsilon)^2} \int_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\xi} \xi_1^{s_2-1} P'_\mu \left(\frac{\xi^2 + \xi \frac{\varepsilon}{2}}{\xi_1(\xi + \frac{\varepsilon}{2})} \right) d\xi_1 + \right. \\ &+ \left. \left(\frac{2\xi - \varepsilon}{2\xi + \varepsilon} - s_2 \right) \xi^{s_2-1} + \frac{(2\xi - \varepsilon)}{(2\xi + \varepsilon)^3} \int_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\xi} (\varepsilon^2 - 4\xi_1^2) \xi_1^{s_2-2} P''_\mu \left(\frac{\xi^2 + \xi \frac{\varepsilon}{2}}{\xi_1(\xi + \frac{\varepsilon}{2})} \right) d\xi_1 \right] A_n^k + 2 \frac{d\varphi_n^k}{d\xi} + \\ &+ \left[\frac{4\varepsilon}{(2\xi + \varepsilon)^2} \int_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\xi} \xi_1^{s_1-1} P'_\mu \left(\frac{\xi^2 + \xi \frac{\varepsilon}{2}}{\xi_1(\xi + \frac{\varepsilon}{2})} \right) d\xi_1 + \left(\frac{2\xi - \varepsilon}{2\xi + \varepsilon} - s_1 \right) \xi^{s_1-1} + \right. \tag{24} \\ &+ \left. \frac{(2\xi - \varepsilon)}{(2\xi + \varepsilon)^3} \int_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\xi} (\varepsilon^2 - 4\xi_1^2) \xi_1^{s_1-2} P''_\mu \left(\frac{\xi^2 + \xi \frac{\varepsilon}{2}}{\xi_1(\xi + \frac{\varepsilon}{2})} \right) d\xi_1 \right] \left[2^{s_1} \varphi_n^k \left(\frac{\varepsilon}{2} \right) - \varepsilon^{s_2} 2^{s_1} \psi_n^k(0) \right] + \\ &+ \left[-\frac{4\varepsilon}{(2\xi + \varepsilon)^2} \int_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\xi} \xi_1^{s_2-1} P'_\mu \left(\frac{\xi^2 + \xi \frac{\varepsilon}{2}}{\xi_1(\xi + \frac{\varepsilon}{2})} \right) d\xi_1 + \left(\frac{2\xi - \varepsilon}{2\xi + \varepsilon} - s_2 \right) \xi^{s_2-1} + \right. \\ &+ \left. \frac{(2\xi - \varepsilon)}{(2\xi + \varepsilon)^3} \int_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\xi} (\varepsilon^2 - 4\xi_1^2) \xi_1^{s_2-2} P''_\mu \left(\frac{\xi^2 + \xi \frac{\varepsilon}{2}}{\xi_1(\xi + \frac{\varepsilon}{2})} \right) d\xi_1 \right] \left[\varepsilon^{s_1} 2^{s_2} \psi_n^k(0) - 2^{s_2} \varphi_n^k \left(\frac{\varepsilon}{2} \right) \right]. \end{aligned}$$

Из (23), (24) однозначно определяется A_n^k , $k = \overline{1, k_n}$, $n = 0, 1, \dots$, при этом, если $\varphi_n^k(\xi) \equiv 0$, $\psi_n^k(0) \equiv 0$, то $A_n^k = 0$. Таким образом, из (22), (19) единственным образом найдем $\tau_n^k(\xi)$, $\forall \xi \in [\frac{\varepsilon}{2}, \frac{1}{2}]$. Следовательно, сначала решив задачу (8), (13) ($n = 0$), а затем (9), (13) ($n = 1$) и т.д. найдем последовательно все $\bar{u}_n^k(r, t)$ из (22), (19), (17), $k = \overline{1, k_n}$, $n = 0, 1, \dots$.

Итак, в области D_ε^+ , показано, что

$$\int_H \rho(\theta) LudH = 0. \tag{25}$$

Пусть $f(r, \theta, t) = R(r)\rho(\theta)T(t)$, причем $R(r) \in V_0$, V_0 – плотна в $L_2((t + \varepsilon, 1 - t))$, $\rho(\theta) \in C^\infty(H)$ – плотна в $L_2(H)$, а $T(t) \in V_1$, V_1 – плотна в $L_2((0, \frac{1-\varepsilon}{2}))$. Тогда $f(r, \theta, t) \in V$, $V = V_0 \otimes H \otimes V_1$ – плотна в $L_2(D_\varepsilon^+)$ [8]. Отсюда и из (25), следует, что $\int_{D_\varepsilon^+} f(r, \theta, t) LudD_\varepsilon^+ = 0$ и $Lu = 0$, $\forall (r, \theta, t) \in D_\varepsilon^+$.

Учитывая оценки [9]

$$|k_n| \leq c, n^{m-2}, \left| \frac{\partial^p}{\partial \theta_j^p} Y_{n,m}^k(\theta) \right| \leq cn^{\frac{m}{2}-p+1}, c = const, \tag{26}$$

$j = \overline{1, m-1}$, $p = 0, 1, \dots$, а также ограничения на заданные функций $\varphi(r, \theta)$, $\psi(t, \theta)$, аналогично [2], можно показать, что ряд

$$\tau(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} r^{\frac{(1-m)}{2}} \tau_n^k(r) Y_{n,m}^k(\theta) \tag{27}$$

сходятся абсолютно и равномерно.

Следовательно, функция

$$u(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} r^{\frac{(1-m)}{2}} u_n^k(r, t) Y_{n,m}^k(\theta) \quad (28)$$

является решением задачи (4), (2), (27) в области D_{ε}^+ , где функций $u_n^k(r, t)$, $k = \overline{1, k_n}$, $n = 0, 1, \dots$, находятся по формуле (17), в которой $v_n^k(\xi)$, $\tau_n^k(\xi)$ определяются из (22), (19).

Теперь задачу T будем изучать в области D^- . Для этого сначала функцию $\tau_n^k(r)$ продолжим гладким образом на отрезок $[0, 1]$ в виде

$$g_n^k(r) = \begin{cases} \tau_n^k(r), & \varepsilon \leq r \leq 1 \\ \tilde{\tau}_0^k(r), & 0 \leq r \leq \varepsilon, \\ n^{-l} \tilde{\tau}_n^k(r), & 0 \leq r \leq \varepsilon, k = \overline{1, k_n}, n = 1, 2, \dots, \end{cases} \quad (29)$$

где $\tilde{\tau}_n^k(r) \in C([0, \varepsilon])$, причем $\tilde{\tau}_n^k(\varepsilon) = \tau_n^k(\varepsilon)$, $\tilde{\tau}_n^k(r) = r^{\alpha} \tau_n^k(r)$, $\alpha \geq \frac{(m-1)}{2}$.

В силу оценок (26) ряд $u(r, \theta, 0) = g(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} r^{\frac{(1-m)}{2}} g_n^k(r) Y_{n,m}^k(\theta)$, сходится абсолютно и равномерно, если $l > \frac{3m}{2}$.

В области D^- рассмотрим первую краевую задачу для уравнения

$$L_1 u \equiv u_{rr} + \frac{m-1}{r} u_r - \frac{1}{r^2} \delta u - u_t + \sum_{i=1}^m d_i(r, \theta, t) u_{x_i} + e(r, \theta, t) u = 0, \quad (30)$$

с условием

$$u|_{S_0} = g(r, \theta), u|_{\Gamma} = \psi(r, \theta). \quad (31)$$

Решение задачи (30), (31) будем искать в виде (6). Подставляя (6) в (30) будем иметь

$$\begin{aligned} & \rho_0^1 \bar{u}_{0rr}^1 - \rho_0^1 \bar{u}_{0t}^1 + \left(\frac{(m-1)}{r} \rho_0^1 + \sum_{i=0}^m d_{i0}^1 \right) \bar{u}_{0r}^1 + \bar{e}_0^1 \bar{u}_0^1 + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \left\{ \rho_n^k \bar{u}_{nrr}^k - \rho_n^k \bar{u}_{nt}^k + \left(\frac{(m-1)}{r} \rho_n^k + \sum_{i=1}^m d_{in}^k \right) \bar{u}_{nr}^k + \right. \\ & \left. + \left[\bar{e}_n^k - \lambda_n \frac{\rho_n^k}{r^2} + \sum_{i=1}^m (\bar{d}_{in-1}^k - n d_{in}^k) \right] \bar{u}_n^k \right\} = 0. \end{aligned} \quad (32)$$

Теперь рассмотрим бесконечную систему дифференциальных уравнений

$$\rho_0^1 \bar{u}_{0rr}^1 - \rho_0^1 \bar{u}_{0t}^1 + \frac{(m-1)}{r} \rho_0^1 \bar{u}_{0r}^1 = 0, \quad (33)$$

$$\rho_1^k \bar{u}_{1rr}^k - \rho_1^k \bar{u}_{1t}^k + \frac{(m-1)}{r} \rho_1^k \bar{u}_{1r}^k - \frac{\lambda_1}{r^2} \rho_1^k \bar{u}_1^k = -\frac{1}{k_1} \left(\sum_{i=1}^m d_{i0}^1 \bar{u}_{0r}^1 + \bar{e}_0^1 \bar{u}_0^1 \right), n = 1, k = \overline{1, k_1}, \quad (34)$$

$$\begin{aligned} & \rho_n^k \bar{u}_{nrr}^k - \rho_n^k \bar{u}_{nt}^k + \frac{(m-1)}{r} \rho_n^k \bar{u}_{nr}^k - \frac{\lambda_n}{r^2} \rho_n^k \bar{u}_n^k = \\ & = -\frac{1}{k_n} \sum_{k=1}^{k_{n-1}} \left\{ \sum_{i=1}^m d_{in-1}^k \bar{u}_{n-1r}^k + [\bar{e}_{n-1}^k + \sum_{i=1}^m (\bar{d}_{in-2}^k - (n-1) d_{in-1}^k)] \bar{u}_{n-1}^k \right\}, \end{aligned} \quad (35)$$

$$k = \overline{1, k_n}, n = 2, 3, \dots$$

Нетрудно убедиться, что если $\{\bar{u}_n^k\}$, $k = \overline{1, k_n}$, $n = 0, 1, \dots$ – решение системы (33)–(35), то оно является и решением уравнения (32).

Нетрудно заметить, что каждое уравнение системы (33)–(35) можно представить в виде

$$\bar{u}_{nrr}^k - \bar{u}_{nt}^k + \frac{(m-1)}{r} \bar{u}_{nr}^k - \frac{\lambda_n}{r^2} \bar{u}_n^k = \bar{f}_n^k(r, t), \quad (36)$$

где $\bar{f}_n^k(r, t)$ определяются из предыдущих уравнений этой системы, при этом $\bar{f}_0^1(r, t) \equiv 0$.

В (36) произведя замену переменных $\bar{u}_n^k(r, t) = r^{\frac{(1-m)}{2}} u_n^k(r, t)$ получим

$$L u_n^k \equiv u_{nrr}^k - u_{nt}^k + \frac{\bar{\lambda}_n}{r^2} u_n^k = f_n^k(r, t), k = \overline{1, k_n}, n = 0, 1, \dots, \quad (37)$$

при этом краевое условие (31) запишется в виде

$$u_n^k(r, 0) = g_n^k(r), \quad u_n^k(1, t) = \psi_n^k(t), \quad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (38)$$

$$f_n^k(r, t) = r^{\frac{(m-1)}{2}} \tilde{f}_n^k(r, t).$$

Произведя замену $v_n^k(r, t) = u_n^k(r, t) - \psi_n^k(t)$ задачу (37), (38) приведем к следующей задаче

$$Lv_n^k \equiv v_{nrr}^k - v_{nt}^k + \frac{\bar{\lambda}_n}{r^2} v_n^k = \tilde{f}_n^k(r, t), \quad (39)$$

$$v_n^k(r, 0) = \tilde{g}_n^k(r), \quad v_n^k(1, t) = 0, \quad 0 < r < 1, \quad (40)$$

$$\tilde{f}_n^k(r, t) = f_n^k(r, t) + \psi_{nt}^k - \frac{\bar{\lambda}_n}{r^2} \psi_n^k(t), \quad \tilde{g}_n^k(r) = g_n^k(r) - \psi_n^k(0).$$

Решение задачи (39), (40) ищем в виде

$$v_n^k(r, t) = v_{1n}^k + v_{2n}^k, \quad (41)$$

где $v_{1n}^k(r, t)$ – решение задачи

$$Lv_{1n}^k = \tilde{f}_n^k(r, t), \quad (42)$$

$$v_{1n}^k(r, 0) = 0, \quad v_{1n}^k(1, t) = 0, \quad (43)$$

а $v_{2n}^k(r, t)$ – решение задачи

$$Lv_{2n}^k = 0, \quad (44)$$

$$v_{2n}^k(r, 0) = \tilde{g}_n^k(r), \quad v_{2n}^k(1, t) = 0, \quad 0 < r < 1. \quad (45)$$

Решение вышеуказанных задач, аналогично [11], рассмотрим в виде

$$v_n^k(r, t) = \sum_{s=1}^{\infty} R_s(r) T_s(t), \quad (46)$$

при этом пусть

$$\tilde{f}_n^k(r) = \sum_{s=1}^{\infty} a_{s,n}^k(t) R_s(r), \quad \tilde{g}_n^k(r) = \sum_{s=1}^{\infty} b_{s,n}^k R_s(r). \quad (47)$$

Подставляя (46) в (42), (43), с учетом (47), получим

$$R_{srr} + \frac{\bar{\lambda}_n}{r^2} R_s + \mu R_s = 0, \quad 0 < r < 1, \quad (48)$$

$$R_s(1) = 0, \quad |R_s(0)| < \infty, \quad (49)$$

$$T_{st} + \mu T = -a_{s,n}^k(t), \quad (50)$$

$$T_s(0) = 0. \quad (51)$$

Ограниченное решение задачи (48), (49) имеет вид [7]

$$R_s(r) = \sqrt{r} J_\nu(\gamma_{s,n} r), \quad (52)$$

$\nu = n + \frac{(m-2)}{2}$, $J_\nu(z)$ – функция Бесселя первого рода, $\gamma_{s,n}$ – ее нули, $\mu = \gamma_{s,n}^2$.

Решение задачи (50), (51) записывается в виде

$$T_s(t) = - \int_0^t a_{s,n}^k(\xi) \exp[-\gamma_{s,n}^2(t - \xi)] d\xi. \quad (53)$$

Подставляя (52) в (47) получим

$$r^{-\frac{1}{2}} f_n^k(r, t) = \sum_{s=1}^{\infty} a_{s,n}^k(t) J_\nu(\gamma_{s,n} r), \quad 0 < r < 1, \quad (54)$$

$$r^{-\frac{1}{2}} \tilde{g}_n^k(r) = \sum_{s=1}^{\infty} b_{s,n}^k J_\nu(\gamma_{s,n} r), \quad 0 < r < 1. \quad (55)$$

Ряды (54), (55)- разложения в ряды Фурье-Бесселя ([12]), если

$$a_{s,n}^k(t) = \frac{2}{[J_{v+1}(\gamma_{s,n})]^2} \int_0^1 \sqrt{\xi} f_n^k(\xi, t) J_v(\gamma_{s,n}\xi) d\xi, \quad (56)$$

$$b_{s,n}^k = \frac{2}{[J_{v+1}(\gamma_{s,n})]^2} \int_0^1 \sqrt{\xi} \tilde{g}_n^k(\xi) J_v(\gamma_{s,n}\xi) d\xi, \quad (57)$$

где $\gamma_{s,n}, s = 1, 2, \dots$ – положительные нули функции Бесселя, расположенные в порядке возрастания их величины.

Из (52), (53) получим решение задачи (42), (43) в виде

$$v_{1n}^k(r, t) = - \sum_{s=1}^{\infty} \sqrt{r} J_v(\gamma_{s,n}r) \left\{ \int_0^t a_{s,n}^k(\xi) \exp[-\gamma_{s,n}^2(t-\xi)] d\xi \right\}, \quad (58)$$

где $a_{s,n}^k(t)$ определяется из (56).

Далее, подставляя (46) в (44), (45) будем иметь

$$T_{st} + \gamma_{s,n}^2 T = 0,$$

решением которого является

$$T_s(t) = \exp(-\gamma_{s,n}^2 t). \quad (59)$$

Из (52), (59), с учетом (47), получим

$$v_{2n}^k(r, t) = \sum_{s=1}^{\infty} \sqrt{r} b_{s,n}^k J_v(\gamma_{s,n}r) \exp(-\gamma_{s,n}^2 t), \quad (60)$$

где $b_{s,n}^k$ находится из (57).

Следовательно, сначала решив задачу (33), (38) ($n = 0$), а затем (34), (38) ($n = \overline{1, k_n}$) и т.д. найдем последовательно все $\tilde{u}_n^k(r, t)$ из (41), где $v_{1n}^k(r, t), v_{2n}^k(r, t)$ определяются из (58), (60), $k = \overline{1, k_n}, n = 0, 1, \dots$.

Итак, в области D^- имеет место

$$\int_H \rho(\theta) L_1 u dH = 0. \quad (61)$$

Пусть $f(r, \theta, t) = R(r)\rho(\theta)T(t)$, причем $R(r) \in V_0, V_0$ – плотна в $L_2((0, 1))$, $\rho(\theta) \in C^\infty(H)$ – плотна в $L_2(H)$, а $T(t) \in V_1, V_1$ – плотна в $L_2((t_0, 0))$. Тогда $f(r, \theta, t) \in V, V = V_0 \otimes H \otimes V_1$ – плотна в $L_2(D^-)$. Отсюда и из (61) следует, что $\int_{D^-} f(r, \theta, t) L_1 u dD^- = 0$ и $L_1 u = 0, \forall (r, \theta, t) \in D^-$.

Таким образом, функция (28) есть решение задачи (30), (31) в области D^- , где функций $u_n^k(r, t), k = \overline{1, k_n}, n = 0, 1, \dots$, находятся из (41), которая в силу (29) является неоднозначным.

Учитывая ограничения на заданные функций $\varphi(r, \theta), \psi(t, \theta)$, а также оценки (26), аналогично [6, 11], можно показать, что полученные неоднозначные решения вида (28) принадлежит искомого класса. Теорема доказана.

Список литературы

1. Алдашев С. А. 1994. Краевые задачи для многомерных гиперболических и смешанных уравнений. Алматы. Гылым, 170.
2. Алдашев С. А. 2015. Неединственность решения многомерной задачи Трикоми для гиперболо-параболического уравнения. Украинский математический вестник, 12 (1): 1–10.
3. Алдашев С. А. 1998. О задачах Дарбу для одного класса многомерных гиперболических уравнений. Дифференц. уравнения, 34 (1): 64–68.
4. Бейтмен Г., Эрдейи А. 1974. Высшие трансцендентные функции. М. Наука, 295.
5. Бицадзе А. В. 1959. Уравнения смешанного типа. М. Изд. АН СССР, 164.
6. Врагов В. Н. 1983. Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. Новосибирск. НГУ, 84.

7. Камке Э. 1965. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М. Наука, 703.
8. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. 1976. Элементы теории функций и функционального анализа. М. Наука, 543.
9. Михлин С. Г. 1962. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. М. Физматгиз, 254.
10. Нахушев А. М. 2006. Задачи со смещением для уравнения в частных производных. М. Наука, 287.
11. Тихонов А. Н., Самарский А. А. 1977. Уравнения математической физики. М. Наука, 659.
12. Copson E. T. 1958. On the Riemann-Green function. *J. Rath Meeh and Anal.*, 1: 324–348.

References

1. Aldashev S. A. 1994. Boundary value problems for multidimensional hyperbolic and mixed equations, *Almaty., Gylym*, 170 (in Russian).
2. Aldashev S. A. 2015. Nonuniqueness of a solution of the multidimensional Tricomi problem for a hyperbolic-parabolic equation. *Ukrainian Mathematical Bulletin*, 12 (1): 1–10 (in Russian).
3. Aldashev S. A. 1998. On Darboux problems for a class of multidimensional hyperbolic equations, 34 (1): 65–69 (in Russian).
4. Bateman H., Erdelyi A. 1974. *Vysshie transtsendentnye funktsii.*, [Higher Transcendental Functions]. М. Nauka, 295 (in Russian).
5. Bitsadze A. V. 1959. The equations of mixed type. М., Academy of Science USSR Publishing house, 164 (in Russian).
6. Vragov V. N. 1983. *Kraevye zadachi dlya neklassicheskikh uravneniy matematicheskoy fiziki.*, [Boundary value problems for non-classical equations of mathematical physics] Novosibirsk. NSU, 84 (in Russian).
7. Kamke E. 1965. Handbook on ordinary differential equations. М., Nauka, 703 (in Russian).
8. Kolmogorov, A. N., Fomin, S. V. 1976. Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis. М. Nauka, 542 (in Russian).
9. Mikhlin S. G. 1962. Multidimensional singular integrals and integral equations, М., Fizmatgiz, 254 (in Russian).
10. Nakhushev A. M. 2006. Problems with displacement for partial differential equations, М., Nauka, 287 (in Russian).
11. Tikhonov A. N., Samarskiy A. A. 1977. *Uravneniya matematicheskoy fiziki.*, [Equations of Mathematical Physics]. М. Nauka, 659 (in Russian).
12. Copson E. T. 1958. On the Riemann-Green function. *J. Rath Meeh and Anal.*, 1: 324–348 (in Russian).

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.
Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Получена 01.12.2021

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Алдашев Серик Аймурзаевич – доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник Института математики и математического моделирования Министерства образования и науки Республики Казахстан

Ул. Пушкина, 125, Алматы, 050010, Казахстан

E-mail: aldash51@mail.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Serik Aldashev – PhD in Physics and Mathematics, Professor, Chief Researcher Institute of Mathematics and Mathematical Modeling of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan

О РАЗРЕШИМОСТИ НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ ВТОРОГО РОДА ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

В. А. Киричек

(Статья представлена членом редакционной коллегии А. П. Солдатовым)

Самарский национальный исследовательский университет имени академика С. П. Королева,
Самара, 443086, Россия

E-mail: Vitalya29@gmail.com

Аннотация. В статье рассмотрена задача для гиперболического уравнения с интегральными условиями второго рода, содержащими в качестве внеинтегральных членов значения искомого решения на боковой границе. Нелокальные условия такого вида порождают значительные трудности при исследовании разрешимости задачи. Основным инструментом для доказательства этого утверждения являются априорные оценки в пространствах Соболева, получение которых стало возможным в результате применения метода, разработанного для случая одномерного гиперболического уравнения.

Ключевые слова: гиперболическое уравнение, нелокальная задача, интегральные условия, обобщенное решение, пространства Соболева.

Для цитирования: Киричек В. А. 2021. О разрешимости нелокальной задачи с интегральными условиями второго рода для гиперболического уравнения. Прикладная математика & Физика. 53(4): 293–300. DOI 10.52575/2687-0959-2021-53-4-293-300.

ON THE SOLVABILITY OF A NONLOCAL PROBLEM WITH INTEGRAL CONDITIONS OF THE SECOND KIND FOR HYPERBOLIC EQUATION

Vitaliya Kirichek

(Article submitted by a member of the editorial board A. P. Soldatov)

Samara National Research University named after academician S. P. Korolev,
Samara, 443086, Russia

E-mail: Vitalya29@gmail.com

Received December, 1, 2021

Abstract. In this paper we consider a problem for hyperbolic equation with integral conditions of the second kind containing as non-integral terms values of required solution on lateral boundary. Nonlocal conditions of this kind generate significant difficulties in the study of the solvability of the problem. The main tool for proving this statement is a priori estimates in Sobolev spaces, the obtaining of which became possible as a result of applying the method developed for the case of a one-dimensional hyperbolic equation.

Key words: hyperbolic equation, nonlocal problem, integral conditions, weak solution, Sobolev spaces.

For citation: Kirichek V.A. 2021. Solvability of a nonlocal problem with integral conditions of the second kind for hyperbolic equation. Applied Mathematics & Physics. 54(3): 293–300. (in Russian) DOI 10.52575/2687-0959-2021-53-4-293-300.

1. Введение. В статье рассматривается задача отыскания решения в ограниченной области $Q_T = (0, l) \times (0, T)$ гиперболического уравнения

$$u_{tt} - (a(x, t)u_x)_x + c(x, t)u = f(x, t), \quad (1)$$

удовлетворяющего начальным данным

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0 \quad (2)$$

и нелокальным условиям

$$\begin{aligned} u(0, t) + \int_0^l K_1(x)u(x, t)dx &= 0, \\ u(l, t) + \int_0^l K_2(x)u(x, t)dx &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Задачи с нелокальными условиями для уравнений с частными производными уже несколько десятилетий являются объектом пристального внимания математиков. Большой интерес вызывают задачи с нелокальными интегральными условиями различных видов. Это связано с их разнообразными приложениями [11]. Многие процессы, изучаемые современным естествознанием, приводят при математическом моделировании к нелокальным задачам, которые часто оказываются более точными отражениями исследуемых процессов [16]. Отметим также тесную связь нелокальных и обратных задач [3, 14, 20], в которых условие переопределения задается в интегральном виде. Нелокальные задачи для гиперболического уравнения, в том числе с интегральными условиями, изучались в работах [1, 2, 5, 6, 8, 9, 10, 13, 15, 17, 18, 19, 21].

Исследования разрешимости нелокальных задач сталкиваются с дополнительными трудностями, не свойственными самосопряженным краевым задачам ([2], [12]). Хорошо известно, что классические методы, применяемые для исследования разрешимости начально–краевых задач, неприменимы в случае нелокальных. К настоящему времени разработаны некоторые методы, позволяющие преодолеть трудности, возникающие из-за нелокальных условий. Эти методы различны, и выбор конкретного метода зависит от вида нелокальных условий. В этой статье мы рассматриваем пространственно нелокальные условия второго рода, содержащие след искомого решения на боковой границе.

Для обоснования разрешимости задачи с такими нелокальными условиями разработан метод [5], суть которого заключается в том, что вводится новая неизвестная функция специальным образом, в результате чего нелокальная задача сводится к обычной начально–краевой задаче для нагруженного уравнения относительно новой неизвестной функции, доказательство разрешимости которой получено методом продолжения по параметру.

Реализуя идею этого метода в одномерном случае, введем новую неизвестную функцию следующим образом:

$$v(x, t) = u(x, t) + \int_0^l H(x, \xi)u(\xi, t)d\xi,$$

где $H(x, \xi) = \frac{1}{l}((l-x)K_1(\xi) + xK_2(\xi))$.

В [4] доказана разрешимость поставленной задачи, однако только при выполнении весьма обременительных условий на функции $K_i(x)$. А именно, требуется, чтобы $K_i(0) = K_i(l) = 0$, $i = 1, 2$. Эти условия удалось ослабить, модифицировав метод сведения нелокальной задачи к краевой. Демонстрация предложенного метода и доказательство разрешимости нелокальной задачи и представляют основное содержание статьи.

Для обоснования разрешимости задачи с такими нелокальными условиями разработан метод [5], суть которого заключается в том, что вводится новая неизвестная функция специальным образом, в результате чего нелокальная задача сводится к обычной начально–краевой задаче для нагруженного уравнения относительно новой неизвестной функции, доказательство разрешимости которой получено методом продолжения по параметру.

Другой метод исследования разрешимости нелокальной задачи для уравнения (1) предложен в [10]. В этой статье показано, что условия (3) можно свести к динамическим нелокальным условиям, содержащим производные по пространственной переменной, что позволяет применить методы работы [9]. Однако в этом случае неизбежно возникают дополнительные требования на поведение решения на границе.

Ставя своей целью доказательство разрешимости задачи в пространстве $W_2^1(Q_T)$, дальнейшие исследования мы проводим с помощью техники, отличной от примененной как в [5], так и в [10]. Предложенная нами техника позволяет не только доказать разрешимость задачи, но и может оказаться полезной для нахождения приближенных решений.

В [4] доказана разрешимость поставленной задачи, однако только при выполнении весьма обременительных условий на функции $K_i(x)$. А именно, требуется, чтобы $K_i(0) = K_i(l) = 0$, $i = 1, 2$. Эти условия удалось ослабить, модифицировав метод сведения нелокальной задачи к краевой.

Демонстрация предложенного модифицированного метода доказательства разрешимости нелокальной задачи и представляют основное содержание статьи.

2. Разрешимость задачи в $W_2^1(Q_T)$.

Определение 1.1. Функцию $u \in W_2^1(Q_T)$ будем называть обобщенным решением задачи (1)–(3), если для всех $w \in W_2^1(Q_T)$, $w(x, T) = 0$, $w(0, t) = w(l, t) = 0$ выполняется тождество

$$\int_0^T \int_0^l (-u_t w_t + a u_x w_x + c u w) dx dt = \int_0^T \int_0^l f(x, t) w(x, t) dx dt, \quad (4)$$

$u(x, 0) = 0$ и (3) выполняются в смысле равенств в $L_2(0, T)$.

Теорема 1.1. Пусть выполняются следующие условия:

$$a, a_t, a_x, c, \in C(\bar{Q}_T),$$

$$K_i \in C^2(\bar{Q}_T), K_2(0, t) = K_1(l, t) = 0, 2l \int_0^l (K_1^2 + K_2^2) dx < 1 \forall t \in [0, T],$$

$$f, f_t \in L_2(Q_T).$$

Тогда существует единственное обобщенное решение задачи (1)–(3).

Доказательство. Доказательство состоит из нескольких этапов:

1. Сведение к краевой задаче для нагруженного уравнения.
2. Доказательство разрешимости краевой задачи для нагруженного уравнения.
3. Доказательство разрешимости задачи (1)–(3).

Приступим к доказательству теоремы.

1. Пусть $u(x, t)$ – решение задачи (1)–(3). Введем новую неизвестную функцию, положив

$$v(x, t) = u(x, t) + \int_0^x K_2(\xi)u(\xi, t)d\xi + \int_x^l K_1(\xi)u(\xi, t)d\xi. \tag{5}$$

Тогда $v(x, t)$ удовлетворяет уравнению

$$v_{tt} - (av_x)_x + cv - \int_0^x H_1(x, \xi)u(\xi, t)d\xi - \int_x^l H_2(x, \xi)u(\xi, t)d\xi + b(x)u(x, t) - \alpha u(0, t) + \beta u(l, t) = F(x, t), \tag{6}$$

где обозначено

$$H_1(x, \xi) = (K_{2\xi}a)_\xi - K_2(\xi)[c(\xi) - c(x)]; H_2(x, \xi) = (K_{1\xi}a)_\xi - K_1(\xi)[c(\xi) - c(x)],$$

$$b(x) = (K_2a)_x - (K_1a)_x + a[K_{2x} - K_{1x}],$$

$$F(x, t) = f(x, t) - \int_0^x K_2(\xi)f(\xi, t)d\xi - \int_x^l K_1(\xi)f(\xi, t)d\xi,$$

$$\alpha = K_2'(0)a(0), \quad \beta = K_1'(l)a(l).$$

Заметим, что

$$v(x, 0) = v_t(x, 0) = 0, \quad v(0, t) = 0, \quad v(l, t) = 0. \tag{7}$$

Таким образом, мы приходим к краевой задаче:

Найти в Q_T решение уравнения (6), удовлетворяющее условиям (7).

Заметим, что мы получили в результате введения новой неизвестной функции нагруженное уравнение. Вместо того чтобы выразить функцию $u(x, t)$ через $v(x, t)$ из (5), будем искать пару функций (u, v) .

Обозначим

$$W_{2,0}^1(Q_T) = \{v(x, t) : v \in W_2^1(Q_T), v(0, t) = v(l, t) = 0\},$$

$$\hat{W}_{2,0}^1(Q_T) = \{\eta(x, t) : \eta \in W_{2,0}^1(Q_T), \eta(x, T) = 0\}.$$

Определение 2. Пару функций (u, v) будем называть обобщенным решением задачи (6)–(7), если $u \in W_2^1(Q_T)$, $v \in W_{2,0}^1(Q_T)$, $v(x, 0) = 0$, для любой $\eta \in \hat{W}_{2,0}^1(Q_T)$ выполняется тождество

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^l (-v_t \eta_t + av_x \eta_x + cv \eta) dx dt &= \int_0^T \int_0^l \eta(x, t) \int_0^x H_1(x, \xi)u(\xi, t)d\xi dx dt \\ &+ \int_0^T \int_x^l \eta(x, t) \int_x^l H_2(x, \xi)u(\xi, t)d\xi dx dt \\ &+ \int_0^T \int_0^l \eta(x, t)[b(x)u(x, t) - \alpha u(0, t) + \beta u(l, t)] dx dt \\ &+ \int_0^T \int_0^l F(x, t)\eta(x, t) dx dt, \end{aligned} \tag{8}$$

а функции u, v связаны соотношением

$$v(x, t) = u(x, t) + \int_0^x K_2(\xi)u(\xi, t)d\xi + \int_x^l K_1(\xi)u(\xi, t)d\xi. \quad (9)$$

2. Покажем, что при выполнении условий теоремы существует единственное обобщенное решение задачи (6)–(7).

Будем искать приближенное решение задачи (6)–(7). Положим $u^0 = 0$ и определим (u^n, v^n) следующим образом:

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_0^l (-v_t^n \eta_t + av_x^n \eta_x + cv^n \eta) dx dt - \int_0^T \int_0^l \eta(x, t) \int_0^x H_1(x, \xi) u^{n-1}(\xi, t) d\xi dx dt \\ & - \int_0^T \int_0^l \eta(x, t) \int_x^l H_2(x, \xi) u^{n-1}(\xi, t) d\xi dx dt \\ & + \int_0^T \int_0^l \eta(x, t) [b(x)u^{n-1}(x, t) - \alpha u^{n-1}(0, t) + \beta u^{n-1}(l, t)] dx dt \\ & = \int_0^T \int_0^l F(x, t) \eta(x, t) dx dt, \end{aligned} \quad (10)$$

$$v^n(x, t) = u^n(x, t) + \int_0^x K_2(\xi)u^n(\xi, t)d\xi + \int_x^l K_1(\xi)u^n(\xi, t)d\xi. \quad (11)$$

Так как $u_0 = 0$, то для v^1 имеем

$$\int_0^T \int_0^l (-v_t^1 \eta_t + av_x^1 \eta_x + cv^1 \eta) dx dt = \int_0^T \int_0^l F \eta dx dt.$$

Это означает, что $v^1(x, t)$ представляет собой обобщенное решение первой начально–краевой задачи для уравнения

$$v_{tt} - (av_x)_x + cv = F(x, t). \quad (12)$$

Известно ([7], с. 213-215), что это решение единственно и справедливо неравенство $\|v^1\|_{W_{2,0}^1(Q_T)} \leq C\|F\|_{L_2(Q_T)}$. Кроме того, если $F_t \in L_2(Q_T)$, то $v^1 \in W_2^2(Q_T)$ ([7], с. 216-219).

Теперь мы можем найти $u^1(x, t)$ из (11), так как при выполнении условий теоремы 1 (11) имеет единственное решение. Это решение принадлежит тому же пространству, что и $v^1(x, t)$, значит, $u^1 \in W_2^1(Q_T)$.

Затем находим $v^2(x, t)$ из (11) как решение первой начально–краевой задачи для уравнения (12) с правой частью

$$F_1(x, t) = F(x, t) + \int_0^x H_1 u^1 d\xi + \int_x^l H_2 u^1 d\xi - b(x)u^1(x, t) + \alpha u^1(0, t) - \beta u^1(l, t).$$

Продолжив этот процесс, мы найдем $u^n(x, t)$ и $v^n(x, t)$. Условия теоремы гарантируют, что для каждого n $F_n, F_{nt} \in L_2(Q_T)$.

Таким образом, последовательность (u^n, v^n) построена.

Покажем, что эта последовательность сходится при $n \rightarrow \infty$ в $W_{2,0}^1$ и ее предел (u, v) является искомым обобщенным решением задачи (6)–(7). Для этого получим априорные оценки.

Обозначим $z^n = v^{n+1} - v^n$, $r^n = u^{n+1} - u^n$. Из (10) и (11) имеем

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_0^l (-z_t^n \eta_t + az_x^n \eta_x + cz^n \eta) dx dt = \int_0^T \int_0^l \eta(x, t) \int_0^x H_1(x, \xi) r^{n-1}(\xi, t) d\xi dx dt \\ & + \int_0^T \int_0^l \eta(x, t) \int_x^l H_2(x, \xi) r^{n-1}(\xi, t) d\xi dx dt \\ & - \int_0^T \int_0^l \eta(x, t) [b(x)r^{n-1}(x, t) - \alpha r^{n-1}(0, t) + \beta r^{n-1}(l, t)] dx dt, \\ & z^n(x, t) = r^n(x, t) + \int_0^x K_2(\xi)r^n(\xi, t)d\xi + \int_x^l K_1(\xi)r^n(\xi, t)d\xi. \end{aligned} \quad (13)$$

Начнем с (13). В силу условий теоремы существуют положительные числа σ_1, σ_2 такие, что $\max_{[0,l]} |K_i(x)| \leq \sigma_i$. Пусть $\sigma = \max\{\sigma_1, \sigma_2\}$ и $1 - 2l\sigma > 0$. Из (13) легко следует

$$\|r^n\|_{L_2(Q_T)} \leq \|z^n\|_{L_2(Q_T)} + \left\| \int_0^x K_2 r^n d\xi \right\|_{L_2(Q_T)} + \left\| \int_x^l K_1 r^n d\xi \right\|_{L_2(Q_T)}.$$

Тогда

$$\|r^n\|_{L_2(Q_T)} \leq \frac{1}{1 - 2\sigma l} \|z^n\|_{L_2(Q_T)}.$$

Из равенств $z_t^n = r_t^n + \int_0^x K_2 r_t^n d\xi + \int_x^l K_1 r_t^n d\xi$ и $z_x^n = r_x^n + (K_2 - K_1)r^n$ получаем

$$\begin{aligned} \|r_t^n\|_{L_2(Q_T)} &\leq \frac{1}{1 - 2\sigma l} \|z_t^n\|_{L_2(Q_T)}, \\ \|r_x^n\|_{L_2(Q_T)} &\leq \|z_x^n\| + \frac{2\sigma}{1 - 2\sigma l} \|z^n\|_{L_2(Q_T)}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\|r^n\|_{W_2^1(Q_T)}^2 \leq A \|z^n\|_{W_2^1(Q_T)}^2, \tag{14}$$

где $A = \max\left\{\frac{1+4\sigma^2}{(1-2\sigma l)^2}, 2\right\}$.

Заметим, что мы ищем z^n как решение уравнения

$$z_{tt}^n - (az_x^n)_x + cz^n = F^n(x, t)$$

с правой частью

$$\begin{aligned} F^n(x, t) &= \int_0^x H_1(x, \xi) r^{n-1}(\xi, t) d\xi + \int_x^l H_2(x, \xi) r^{n-1}(\xi, t) d\xi - b(x) r^{n-1}(x, t) \\ &\quad + \alpha r^{n-1}(0, t) - \beta r^{n-1}(l, t), \end{aligned}$$

удовлетворяющее условиям

$$z^n(0, t) = z^n(l, t) = z^n(x, 0) = z_t^n(x, 0) = 0.$$

Так как $F^n, F_t^n \in L_2(Q_T)$, то $z^n \in W_2^2(Q_T)$ и мы можем вывести следующее соотношение:

$$\begin{aligned} \int_0^l [(z_t^n(x, \tau))^2 + a(x)(z_x^n(x, \tau))^2] dx &= -2 \int_0^\tau \int_0^l cz^n z_t^n dx dt + 2 \int_0^\tau \int_0^l F^n z_t^n dx dt. \\ \int_0^l [(z_t^n(x, \tau))^2 + a(x)(z_x^n(x, \tau))^2] dx &\leq A_1 \int_0^\tau \int_0^l [(z^n)^2 + (z_t^n)^2 + (z_x^n)^2] dx dt \\ &\quad + c(\varepsilon) \int_0^\tau \int_0^l (z_t^n)^2 dx dt + \varepsilon \int_0^\tau \int_0^l (F^n(x, t))^2 dx dt. \end{aligned} \tag{15}$$

Оценим последнее слагаемое с помощью неравенства Коши – Буняковского и неравенства, связывающего значения функции на границе и во внутренних точках области [9]

$$(r^{n-1}(\xi_i, t))^2 \leq 2l \int_0^l (r_x^{n-1})^2 dx + \frac{2}{l} \int_0^l (r^{n-1})^2 dx, \quad \xi_1 = 0, \xi_2 = l.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int_0^\tau \int_0^l \left(\int_0^x H_1 r^{n-1} d\xi \right)^2 dx dt + \int_0^\tau \int_0^l \left(\int_x^l H_2 r^{n-1} d\xi \right)^2 dx dt \\ \leq l^2 (\sigma_1 + \sigma_2) \int_0^\tau \int_0^l (r^{n-1})^2 dx dt; \\ \int_0^\tau \int_0^l (br^{n-1})^2 dx dt \leq b_0^2 \int_0^\tau \int_0^l (r^{n-1})^2 dx dt; \\ \alpha^2 \int_0^\tau \int_0^l (r^{n-1}(0, t))^2 dx dt + \beta^2 \int_0^\tau \int_0^l (r^{n-1}(l, t))^2 dx dt \leq \end{aligned}$$

$$\leq 2(\alpha^2 + \beta^2) \int_0^\tau \int_0^l [l^2 (r_x^{n-1})^2 + (r^{n-1})^2] dx dt.$$

Прибавим к (15) неравенство

$$\int_0^l (z^n(x, \tau))^2 dx \leq \tau \int_0^\tau \int_0^l (z_t^n(x, t))^2 dx dt.$$

Для его вывода заметим, что имеет место представление $z^n(x, \tau) = \int_0^\tau z_t^n(x, t) dt + z^n(x, 0)$. Так как $z^n(x, 0) = 0$, то $z^n(x, \tau) = \int_0^\tau z_t^n(x, t) dt$. Возведя обе части этого равенства в квадрат и применяя неравенство Коши – Буняковского в правой его части, получим

$$(z^n(x, \tau))^2 = \left(\int_0^\tau z_t^n(x, t) dt \right)^2 \leq \left(\int_0^\tau dt \int_0^l (z_t^n)^2 dt \right) = \tau \int_0^\tau (z_t^n)^2 dt,$$

интегрируя которое по x и убеждаемся в справедливости данного неравенства .

Тогда получим

$$\begin{aligned} \int_0^l [(z^n(x, \tau))^2 + (z_t^n(x, \tau))^2 + a(x, \tau)(z_x^n(x, \tau))^2] dx &\leq A_2 \int_0^\tau \int_0^l [(z^n)^2 + (z_t^n)^2 + (z_x^n)^2] dx dt \\ + \varepsilon A_3 \int_0^\tau \int_0^l [(r^{n-1})^2 + (r_t^{n-1})^2 + (r_x^{n-1})^2] dx dt, \end{aligned}$$

где A_1, A_2, A_3 зависят только от $a_0, a_1, c_0, b_0, \sigma_1, \sigma_2$ и не зависят от n .

Применив лемму Гронуолла и проинтегрировав результат по $(0, T)$, получим

$$\|z^n\|_{W_2^1(Q_T)}^2 \leq \varepsilon B \|r^{n-1}\|_{W_2^1(Q_T)}^2, \quad (16)$$

где $B = TA_3 e^{A_2 T}$. Таким образом, из (14) и (16)

$$\|z^n\|_{w_2^1(Q_T)}^2 \leq AB\varepsilon \|z^{n-1}\|_{w_2^1(Q_T)}^2, \quad \|r^n\|_{w_2^1(Q_T)}^2 \leq AB\varepsilon \|r^{n-1}\|_{w_2^1(Q_T)}^2.$$

Выберем ε так, чтобы $0 < \varepsilon AB < 1$. Тогда последовательность $\{u^n, v^n\}$ сходится в $W_2^1(Q_T)$ к некоторой паре (причем единственной) $(u, v) \in W_2^1(Q_T)$.

Переходя при $n \rightarrow \infty$ в (10), (11), убеждаемся в том, что (u, v) является искомым решением задачи (6)–(7).

3. Разрешимость задачи (1)–(3). Если (u, v) – решение задачи (6)–(7), то в соответствии с определением обобщенного решения (8) и (9) выполняются.

Подставив $v(x, t)$, представленную формулой (9) в (8), после несложных преобразований получим (3). Очевидно, (4) также выполнено.

Следовательно, $u(x, t)$ есть решение задачи (1)–(3).

Теорема доказана полностью.

Список литературы

1. Гордезиани Д. Г., Авалишвили Г. А. 2000. Решения нелокальных задач для одномерных колебаний среды. Математическое моделирование, 12(1): 94–103.
2. Ионкин Н. И. 1977. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием. Дифференциальные уравнения, 13(2): 294–301.
3. Камынин В. Л. 2013. Обратная задача определения младшего коэффициента в параболическом уравнении при условии интегрального наблюдения. Математические заметки, 94(2): 207–217.
4. Киричек В. А. 2020. О разрешимости одной задачи с нелокальными условиями для гиперболического уравнения. Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия, 26(4): 36–43.
5. Кожанов А. И., Пулькина Л. С. 2006. О разрешимости краевых задач с нелокальным граничным условием интегрального вида для многомерных гиперболических уравнений. Дифференциальные уравнения, 42(9): 1166–1179.

6. Корзюк В. И., Козловская И. С., Наумовец С. Н. 2019. Классическое решение задачи для одномерного волнового уравнения с интегральными условиями второго рода. Дифференциальные уравнения, 55(3): 361–369.
7. Ладъженская О. А. 1973. Краевые задачи математической физики. М., Наука, 407.
8. Пулькина Л. С. 2008. Начально-краевая задача с нелокальным граничным условием для многомерного гиперболического уравнения. Дифференциальные уравнения, 44(8): 1084–1089.
9. Пулькина Л. С. 2012. Краевые задачи для гиперболического уравнения с нелокальными условиями 1 и 2-го рода. Известия вузов. Математика, 56(4): 74–83.
10. Пулькина Л. С., Савенкова А. Е. 2016. Нелокальная задача с интегральными условиями второго рода для гиперболического уравнения. Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия, 2016(1-2): 33–45.
11. Самарский А. А. 1980. О некоторых проблемах современной теории дифференциальных уравнений. Дифференциальные уравнения 16(11): 1221–1228.
12. Скубачевский А. Л., Стеблов Г. М. 1991. О спектре дифференциальных операторов с областью определения, не плотной в $L_2(0, 1)$. Доклады Академии Наук СССР, 321(6): 1158–1163.
13. Ashyralyev A., Aggez N. 2012. On the Solution of Multipoint NBVP for Hyperbolic Equation with Integral Condition. Malaysian Journal of Mathematical Sciences, 6(S): 111–121.
14. Ashyralyev A., Sharifov Y. A. 2013. Optimal control problems for impulsive systems with integral boundary conditions. Electronic journal of differential equations, 2013(80): 1–11.
15. Avalishvili G., Avalishvili M., Gordeziani D. 2011. On Integral Nonlocal Boundary Value Problems for some Partial Differential Equations. Bulletin of the Georgian National Academy of Sciences, 5(1): 31–37.
16. Bažant Z. P., Jirásek M. 2002. Nonlocal Integral Formulation of Plasticity And Damage: Survey of Progress. American Society of Civil Engineers. Journal of Engineering Mechanics, 128(11): 1119–1149.
17. Beilin S. A. 2006. On a mixed nonlocal problem for a wave equation. Electronic journal of differential equations, 2006(103): 1–10.
18. Bouziani A. 2002. On the solvability of parabolic and hyperbolic problems with a boundary integral condition. IJMMS journal, 31(4): 201–213.
19. Cannon J. R. 1963. The solution of the heat equation subject to the specification of energy. Quarterly of Applied Mathematics, 21(2): 155–160.
20. Cannon J. R., Lin Y. 1990. An Inverse Problem of Finding a Parameter in a Semi-linear Heat Equation. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 145: 470–484.
21. Pulkina L. S. 2020. Nonlocal Problems for Hyperbolic Equation from the viewpoint of strongly regular boundary conditions. Electronic journal of differential equations, 28.

References

1. Gordeziani D. G., Avalishvili G. A. 2000. Solutions of nonlocal problems for one-dimensional oscillations of the medium. Mathematical Modeling, 12(1): 94–103. (In Russian)
2. Ionkin N. I. 1977. A Solution of Certain Boundary-Value Problem of Heat Conduction with Nonclassical Boundary Condition. Differential Equations, 13(2): 294–301. (in Russian)
3. Kamynin V. L. 2013. The inverse problem of determining the lower-order coefficient in parabolic equations with integral observation, Mathematical Notes, 94(2): 207–217. (In Russian)
4. Kirichek V. A. 2020. About solvability of one problem with nonlocal conditions for hyperbolic equation. Vestnik of Samara University. Natural Science Series, 26(4): 36–43. (in Russian)
5. Kozhanov A. I., Pulkina L. S. 2006. On the Solvability of Boundary Value Problems with a Nonlocal Boundary Condition of Integral Form for Multidimensional Hyperbolic Equations. Differential Equations, 42(9): 1233–1246. (in Russian)

6. Korzyuk V. I., Kozlovskaya I. S., Naumavets S. N. 2019. Classical Solution of a Problem with Integral Conditions of the Second Kind for the One-Dimensional Wave Equation. *Differential Equations*, 55(3): 353–362. (in Russian)
7. Ladyzhenskaya O. A. 1973. *Kraevye zadachi matematicheskoi fiziki* Boundary-value problems of mathematical physics. M., Nauka, 407.
8. Pulkina L. S. 2008. Initial-boundary value problem with a nonlocal boundary condition for a multidimensional hyperbolic equation. *Differential Equation*, 44(8): 1119–1125. (In Russian)
9. Pulkina L. S. 2012. Boundary value problems for a hyperbolic equation with nonlocal conditions of the I and II kind. *Russian Mathematics*, 56(4): 62–69. (in Russian)
10. Pulkina L. S., Savenkova A. E. 2016. A problem with second kind integral conditions for hyperbolic equation. *Vestnik of Samara University. Natural science series*. 2016(1-2): 33–45.
11. Samarskii A. A. 1980. Some problems of the theory of differential equations. *Differentsial'nye Uravneniya*, 16(11): 1925–1935.
12. Skubachevskii A. L., Steblov G. M. 1991. On the spectrum of differential operators with a domain that is not dense in $L_2(0, 1)$. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 321(6): 1158–1163. (In Russian)
13. Ashyralyev A., Aggez N. 2012. On the Solution of Multipoint NBVP for Hyperbolic Equation with Integral Condition. *Malaysian Journal of Mathematical Sciences*, 6(S): 111–121.
14. Ashyralyev A., Sharifov Y. A. 2013. Optimal control problems for impulsive systems with integral boundary conditions. *Electronic journal of differential equations*, 2013(80): 1–11.
15. Avalishvili G., Avalishvili M., Gordeziani D. 2011. On Integral Nonlocal Boundary Value Problems for some Partial Differential Equations. *Bulletin of the Georgian National Academy of Sciences*, 5(1): 31–37.
16. Bažant Z. P., Jirásek M. 2002. Nonlocal Integral Formulation of Plasticity And Damage: Survey of Progress. *American Society of Civil Engineers. Journal of Engineering Mechanics*, 128(11): 1119–1149.
17. Beilin S. A. 2006. On a mixed nonlocal problem for a wave equation. *Electronic journal of differential equations*, 2006(103): 1–10.
18. Bouziani A. 2002. On the solvability of parabolic and hyperbolic problems with a boundary integral condition. *IJMMS journal*, 31(4): 201–213.
19. Cannon J. R. 1963. The solution of the heat equation subject to the specification of energy. *Quarterly of Applied Mathematics*, 21(2): 155–160.
20. Cannon J. R., Lin Y. 1990. An Inverse Problem of Finding a Parameter in a Semi-linear Heat Equation. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 145: 470–484.
21. Pulkina L. S. 2020. Nonlocal Problems for Hyperbolic Equation from the viewpoint of strongly regular boundary conditions. *Electronic journal of differential equations*, 28.

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Получена 01.12.2021

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Киричек Виталия Александровна – ассистент кафедры дифференциальных уравнений и теории управления, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С. П. Королева.

 <http://orcid.org/0000-0001-9817-863X>

Московское шоссе, 34, 443086, Самара, Россия

E-mail: Vitalya29@gmail.com

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Kirichek Vitaliya Alexandrovna – assistant of the Department of Differential Equations and Control Theory, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, 443086, Samara, Russian Federation.

ВЕСОВОЕ ОДНОРОДНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

Алзамили Х., Шишкина Э. Л.

Белгородский государственный национальный исследовательский университет,
Белгород, 308015, Россия

Воронежский Государственный Университет,
Воронеж, 394018, Россия;

Белгородский государственный национальный исследовательский университет,
Белгород, 308015, Россия

E-mail: almazili.khitam@mail.ru, ilina_dico@mail.ru

Аннотация. Целью статьи является изучение связи между продолжением весового однородного распределения и весовым фундаментальным решением эллиптического оператора с операторами Бесселя, действующими по каждому аргументу. Эта задача для невесовых распределений рассматривалась Хёрмандером и наши результаты являются обобщением его результатов. Кроме того, рассмотрена задача Дирихле и получено равенство, дающее связь граничного условия и решения этой задачи Дирихле посредством B -потенциала Рисса.

Ключевые слова: весовое однородное распределение, оператор Бесселя, задача Дирихле, B -потенциал Рисса

Для цитирования: Алзамили Х., Шишкина Э. Л. 2021. Весовое однородное распределение и его приложения. Прикладная математика & Физика. 53(4): 301–311. DOI 10.52575/2687-0959-2021-53-4-301-311.

WEIGHTED HOMOGENEOUS DISTRIBUTION AND ITS APPLICATIONS

Khitam Alzamili, Elina Shishkina

Belgorod State National Research University
Belgorod, 308015, Russia

Voronezh State University,
Voronezh, 394018, Russia;

Belgorod State National Research University,
Belgorod, 308015, Russia;

E-mail: almazili.khitam@mail.ru, ilina_dico@mail.ru

Received December, 8, 2021

Abstract. The aim of the article is to study the relationship between the continuation of the weighted homogeneous distribution and the weighted fundamental solution of an elliptic operator with Bessel operators acting with respect to each argument. This problem for not weighted distribution was considered by Hörmander and our results are a generalization of his results. In addition, the Dirichlet problem is considered and an equality is obtained that gives a connection between the boundary condition and the solution of this Dirichlet problem by means of the Riesz B -potential.

Key words: weighted homogeneous distribution, Bessel operator, Dirichlet problem, Riesz B -potential .

For citation: Alzamili Khitam, Shishkina Elina. 2021. Weighted homogeneous distribution and its applications. Applied Mathematics & Physics. 53(4): 301–311. (in Russian) DOI 10.52575/2687-0959-2021-53-4-301-311.

1. Введение и основные определения. В этом разделе приведены основные определения, включающие пространства основных функций, весовых обобщенных функций и обобщенной свертки.

Пусть \mathbb{R}^n – n -мерное евклидово пространство,

$$\mathbb{R}_+^n = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, x_1 > 0, \dots, x_n > 0\},$$

$$\overline{\mathbb{R}}_+^n = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0\},$$

$\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ – мультииндекс, состоящий из фиксированных положительных чисел $\gamma_i, i=1, \dots, n$, и $|\gamma| = \gamma_1 + \dots + \gamma_n$.

Рассмотрим открытое множество Ω в \mathbb{R}^n , симметричное относительно каждой гиперплоскости $x_i=0, i=1, \dots, n$. Пусть $\Omega_+ = \Omega \cap \mathbb{R}_+^n$ и $\overline{\Omega}_+ = \Omega \cap \overline{\mathbb{R}}_+^n$. Имеем $\Omega_+ \subseteq \mathbb{R}_+^n$ и $\overline{\Omega}_+ \subseteq \overline{\mathbb{R}}_+^n$. Мы рассмотрим множество $C^m(\Omega_+)$, состоящее из m раз дифференцируемых на Ω_+ функций. Через $C^m(\overline{\Omega}_+)$ обозначим подмножество

функций из $C^m(\Omega_+)$ таких, что все производные этих функций по x_i для любого $i = 1, \dots, n$ непрерывно продолжаются на $x_i=0$. Класс $C_{ev}^m(\overline{\Omega}_+)$ состоит из функций $f \in C^m(\overline{\Omega}_+)$, таких, что $\left. \frac{\partial^{2k+1} f}{\partial x_i^{2k+1}} \right|_{x=0} = 0$ для всех неотрицательных целых $k \leq m$ при $i = 1, \dots, n$ (см. [1] и [2], стр. 21 и далее). Пусть $C_{ev}^\infty(\overline{\Omega}_+) = \bigcap_{m=0}^\infty C_{ev}^m(\overline{\Omega}_+)$.

Положим $C_{ev}^\infty(\overline{\mathbb{R}}_+^n) = C_{ev}^\infty$.

Пусть $\mathring{C}_{ev}^\infty(\overline{\Omega}_+)$ – множество функций $f \in C_{ev}^\infty(\overline{\Omega}_+)$ с компактным носителем.

Будем использовать обозначения $\mathring{C}_{ev}^\infty(\overline{\Omega}_+) = \mathcal{D}_+(\overline{\Omega}_+)$, $\mathcal{D}_+(\overline{\mathbb{R}}_+^n) = \mathcal{D}_+$. Кроме \mathcal{D}_+ будем также использовать множество \mathcal{D}_+ функций, определенных также как и \mathcal{D}_+ , но на \mathbb{R}_+^n .

Пространство $L_p^Y(\Omega_+)$, $1 \leq p < \infty$ состоит из измеримых на $\overline{\Omega}_+$ функций, четных по каждой из своих переменных x_i , $i = 1, \dots, n$ таких, что если $f \in L_p^Y(\Omega_+)$, то

$$\int_{\Omega_+} |f(x)|^p x^Y dx < \infty, \quad x^Y = \prod_{i=1}^n x_i^{Y_i}.$$

Будем использовать обозначения $L_p^Y = L_p^Y(\mathbb{R}_+^n)$ и

$$\|f\|_{p,Y} = \left(\int_{\mathbb{R}_+^n} |f(x)|^p x^Y dx \right)^{1/p}. \quad (1)$$

Через $L_{p,loc}^Y(\Omega_+)$ будем обозначать множество функций u , определенных почти всюду на $\overline{\Omega}_+$, таких что $u\varphi \in L_p^Y(\Omega_+)$ для всех $\varphi \in \mathcal{D}_+(\overline{\Omega}_+)$. Пусть $\mathcal{D}'_+(\overline{\Omega}_+)$ – сопряженное пространство к $\mathcal{D}_+(\overline{\Omega}_+)$ пространство. Каждой функции $u \in L_{1,loc}^Y(\Omega_+)$ сопоставляется *регулярная весовая обобщенная функция* $u \in \mathcal{D}'_+(\overline{\Omega}_+)$, действующая по правилу

$$(u, \varphi)_Y = \int_{\Omega_+} u(x) \varphi(x) x^Y dx, \quad \varphi \in \mathcal{D}_+(\overline{\Omega}_+).$$

Все остальные обобщенные функции $u \in \mathcal{D}'_+(\overline{\Omega}_+)$ будем называть *сингулярными весовыми обобщенными функциями*. Будем использовать обозначение $\mathcal{D}'_+ = \mathcal{D}'_+(\overline{\mathbb{R}}_+^n)$. Аналогично определяется \mathcal{D}'_+ .

Например, сингулярной весовой обобщенной функцией является функция δ_Y :

$$(\delta_Y, \varphi)_Y = \varphi(0), \quad \varphi \in \mathcal{D}_+.$$

Для удобства будем также писать

$$(\delta_Y, \varphi)_Y = \int_{\mathbb{R}_+^n} \delta_Y(x) \varphi(x) x^Y dx = \varphi(0),$$

понимая такую запись как предел соответствующей последовательности.

Часть шара $|x| \leq r$, $|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$, принадлежащую \mathbb{R}_+^n , будем обозначать $B_r^+(n)$. Граница $B_r^+(n)$ состоит из части сферы $S_r^+(n) = \{x \in \mathbb{R}_+^n : |x|=r\}$ и из частей координатных гиперплоскостей $x_i=0$, $i=1, \dots, n$, таких что $|x| \leq r$.

Многомерный обобщенный сдвиг определяется равенством

$$({}^Y T_x^Y f)(x) = {}^Y T_x^Y f(x) = ({}^{Y_1} T_{x_1}^{Y_1} \dots {}^{Y_n} T_{x_n}^{Y_n} f)(x), \quad (2)$$

где каждый одномерный обобщенный сдвиг ${}^{Y_i} T_{x_i}^{Y_i}$ acts for $i=1, \dots, n$ имеет вид

$$({}^{Y_i} T_{x_i}^{Y_i} f)(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{Y_i+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{Y_i}{2}\right)} \times \int_0^\pi f(x_1, \dots, x_{i-1}, \sqrt{x_i^2 + \tau_i^2 - 2x_i \tau_i \cos \varphi_i}, x_{i+1}, \dots, x_n) \sin^{Y_i-1} \varphi_i d\varphi_i.$$

Обобщенный сдвиг (2) подробно изучен в [3].

Обобщенная свертка, порожденная многомерным обобщенным сдвигом ${}^Y T_x^y$, определяется формулой

$$(f * g)_Y(x) = (f * g)_Y = \int_{\mathbb{R}_+^n} f(y)({}^Y T_x^y g)(x)y^Y dy. \tag{3}$$

2. Весовые однородные распределения. В этом разделе технику однородных распределений распространим на случай, когда присутствует степенной вес x^Y , что позволит применить полученные результаты к дифференциальным уравнениям с оператором Бесселя.

Пусть функция $u \in L_{1,loc}^Y(\mathbb{R}_+^n)$ – однородная порядка a , то есть $u(tx) = t^a u(x)$ при $t > 0$. Весовое распределение u однородно порядка a в \mathbb{R}_+^n , если выполняется следующее равенство

$$(u, \varphi)_Y = t^a (u(x), \varphi_t(x))_Y, \tag{4}$$

где $\varphi_t(x) = t^{n+|Y|} \varphi(tx)$, $\varphi \in \mathcal{D}_+$. Если u – весовое распределение в $\overline{\mathbb{R}_+^n}$ и (4) верно для всех $\varphi \in \mathcal{D}_+$, то u – есть однородное распределение порядка a в $\overline{\mathbb{R}_+^n}$.

Рассмотрим определение весового однородного распределения подробнее. Если функция $u \in L_{1,loc}^Y(\mathbb{R}_+^n)$ однородна порядка a , то есть $u(tx) = t^a u(x)$ при $t > 0$, то

$$\begin{aligned} (u(y), \varphi(y))_Y &= \int_{\mathbb{R}_+^n} u(y)\varphi(y)y^Y dy = \{y = tx, t > 0\} = \\ &= t^{n+|Y|+a} \int_{\mathbb{R}_+^n} u(x)\varphi(tx)x^Y dx = t^a (u(x), \varphi_t(x))_Y, \end{aligned}$$

где $\varphi_t(x) = t^{n+|Y|} \varphi(tx)$, $\varphi \in \mathcal{D}_+$. Обратно, из соотношения $(u(y), \varphi(y))_Y = t^a (u(x), \varphi_t(x))_Y$ следует, что u – однородна. Если $a > -n - |Y|$, то u – интегрируема с весом x^Y в некоторой окрестности нуля, поскольку при переходе к сферическим координатам $x = r\omega$, $|\omega| = 1$ имеем $dx = r^{n+|Y|-1} \omega^Y dr d\omega$ и

$$\begin{aligned} \int_{U_\varepsilon(0)} |u(r\omega)|x^Y dx &= \int_0^\varepsilon r^{a+n+|Y|-1} dr \int_{S_1^+(n)} |u(\omega)|\omega^Y d\omega = \\ &= \frac{\varepsilon^{a+n+|Y|}}{a+n+|Y|} \int_{S_1^+(n)} |u(\omega)|\omega^Y d\omega < \infty. \end{aligned}$$

Теорема 2.1. *Условия однородности весового однородного распределения и порядка a*

$$(u, \varphi)_Y = t^a (u, \varphi_{n,Y,t})_Y, \quad \varphi_{n,Y,t}(x) = t^{n+|Y|} \varphi(tx), \quad \varphi \in \mathcal{D}_+ \tag{5}$$

и

$$(u, \psi)_Y = 0, \quad \psi \in \mathcal{D}_+, \quad \int_0^\infty r^{a+n+|Y|-1} \psi(rx) dr = 0 \tag{6}$$

эквивалентны. Кроме того, для весовых однородных распределений и степени a справедлива формула

$$\sum_{k=1}^n x_k \frac{\partial u}{\partial x_k} = au. \tag{7}$$

Доказательство. Дифференцируя равенство (5) по t , получим

$$\begin{aligned} at^{a-1} (u(x), t^{n+|Y|} \varphi(tx))_Y + \\ + t^a \left(u(x), (n+|Y|)t^{n+|Y|-1} \varphi(tx) + t^{n+|Y|-1} \frac{d\varphi(tx)}{dt} \right)_Y = 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Поскольку

$$\frac{d\varphi(tx)}{dt} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \varphi(tx)}{\partial x_k} \frac{d(tx_k)}{dt} = \sum_{k=1}^n x_k \frac{\partial \varphi(tx)}{\partial x_k},$$

то равенство (8) может быть записано в виде

$$at^{a-1} (u(x), t^{n+|Y|} \varphi(tx))_Y +$$

$$+t^a \left(u(x), (n + |\gamma|)t^{n+|\gamma|-1} \varphi(tx) + t^{n+|\gamma|-1} \sum_{k=1}^n x_k \frac{\partial \varphi(tx)}{\partial x_k} \right)_\gamma = 0. \quad (9)$$

Положив $t = 1$ в (9), будем иметь

$$(a + n + |\gamma|)(u, \varphi)_\gamma + (u, \lambda \varphi)_\gamma = 0, \quad (10)$$

где $\lambda = \sum_{k=1}^n x_k \frac{\partial}{\partial x_k}$.

Рассмотрим уравнение

$$(a + n + |\gamma|)\varphi(x) + \sum_{k=1}^n x_k \frac{\partial}{\partial x_k} \varphi(x) = \psi(x) \quad (11)$$

и покажем, что у него есть решение в \mathcal{D}_+ . Переходя в (11) к сферическим координатам $x = r\omega$, получим

$$\frac{\partial}{\partial r} (r^{a+n+|\gamma|} \varphi(r\omega)) = \psi(r\omega) r^{a+n+|\gamma|-1}.$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} (r^{a+n+|\gamma|} \varphi(r\omega)) &= (a + n + |\gamma|) r^{a+n+|\gamma|-1} \varphi(r\omega) + r^{a+n+|\gamma|} \frac{\partial \varphi(r\omega)}{\partial r} = \\ &= (a + n + |\gamma|) r^{a+n+|\gamma|-1} \varphi(r\omega) + r^{a+n+|\gamma|} \sum_{k=1}^n \frac{\partial \varphi(r\omega)}{\partial (r\omega_k)} \frac{\partial (r\omega_k)}{\partial r} = \\ &= (a + n + |\gamma|) r^{a+n+|\gamma|-1} \varphi(r\omega) + r^{a+n+|\gamma|-1} \sum_{k=1}^n r \omega_k \frac{\partial \varphi(r\omega)}{\partial (r\omega_k)} = \\ &= r^{a+n+|\gamma|-1} \left[(a + n + |\gamma|) \varphi(x) + \sum_{k=1}^n x_k \frac{\partial}{\partial x_k} \varphi(x) \right] = r^{a+n+|\gamma|-1} \psi(x). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\psi = (a + n + |\gamma|)\varphi + \lambda \varphi, \quad (12)$$

равенство

$$\int_0^\infty r^{a+n+|\gamma|-1} \psi(rx) dr = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial r} (r^{a+n+|\gamma|} \varphi(r\omega)) dr = r^{a+n+|\gamma|} \varphi(r\omega) \Big|_0^\infty = 0$$

верно и $\psi \in \mathcal{D}_+$. Таким образом, из (12) и (10) следует равенство (6).

Теперь докажем (7). Для $(u, \lambda \varphi)_\gamma$ получим

$$\begin{aligned} (u, \lambda \varphi)_\gamma &= \left(u(x), \sum_{k=1}^n x_k \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_k} \right)_\gamma = \sum_{k=1}^n \int_{\mathbb{R}_+^n} u(x) x_k \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_k} x^\gamma dx = \\ &= \sum_{k=1}^n \int_{\mathbb{R}_+^{n-1}} x_1^{\gamma_1} \dots x_{k-1}^{\gamma_{k-1}} x_{k+1}^{\gamma_{k+1}} \dots x_n^{\gamma_n} dx_1 \dots dx_{k-1} dx_{k+1} \dots dx_n \left[\int_0^\infty u(x) \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_k} x_k^{\gamma_k+1} dx_k \right]. \end{aligned} \quad (13)$$

Применим формулу интегрирования по частям к интегралу по x_k :

$$\begin{aligned} \int_0^\infty u(x) \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_k} x_k^{\gamma_k+1} dx_k &= \left\{ U = u(x) x_k^{\gamma_k+1}, dV = \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_k} dx_k \right\} = \\ &= u(x) \varphi(x) x_k^{\gamma_k+1} \Big|_0^\infty - \int_0^\infty \left[x_k \frac{\partial u}{\partial x_k} + (1 + \gamma_k) u(x) \right] \varphi(x) x_k^{\gamma_k} dx_k = \\ &= - \int_0^\infty x_k \frac{\partial u}{\partial x_k} \varphi(x) x_k^{\gamma_k} dx_k - (1 + \gamma_k) \int_0^\infty u(x) \varphi(x) x_k^{\gamma_k} dx_k. \end{aligned}$$

Суммируя по k от 1 до n и возвращаясь к интегралу (13), будем иметь

$$(u, \lambda \varphi)_\gamma = -(\lambda, \varphi)_\gamma - (n + |\gamma|)(u, \varphi)_\gamma. \quad (14)$$

Подставляя (14) в (10), получим

$$(a + n + |\gamma|)(u(x), \varphi(x))_\gamma - \left(\sum_{k=1}^n x_k \frac{\partial u}{\partial x_k}, \varphi(x) \right)_\gamma - (n + |\gamma|)(u(x), \varphi(x))_\gamma = 0$$

или

$$a(u(x), \varphi(x))_\gamma = \left(\sum_{k=1}^n x_k \frac{\partial u}{\partial x_k}, \varphi(x) \right)_\gamma,$$

что дает (7).

3. Продолжение весовых однородных распределений. Продолжение весового однородного распределения с \mathbb{R}_+^n до распределения на $\overline{\mathbb{R}}_+^n$ является нетривиальной задачей, но необходимой для построения фундаментальных решений. В этом разделе мы построим продолжение весового однородного распределения порядка a .

Теорема 3.1. Пусть $u \in \mathcal{D}'_+$ – весовое однородное распределение порядка a . Если $a \neq k, k \in \mathbb{Z}, k \leq -n - |\gamma|$, то распределение u имеет единственное продолжение $u^* \in \mathcal{D}'_+$ однородное порядка a . Если $a \neq 1 - n - |\gamma|$, то $(B_{\gamma_j} u)^* = B_{\gamma_j} u^*, B_{\gamma_j} = \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + \frac{\gamma_j}{x_j} \frac{\partial}{\partial x_j}$. Отображение $u \rightarrow u^*$ непрерывно.

Доказательство. Сначала докажем существование весового распределения $u^* \in \mathcal{D}'_+$ однородного порядка a , которое является продолжением $u \in \mathcal{D}'_+$.

Если u – функция и $\varphi \in \mathcal{D}_+$, то переходя к сферическим координатам $x = r\omega$, получим

$$(u, \varphi)_\gamma = \int_{\mathbb{R}_+^n} u(x)\varphi(x)x^\gamma dx = \int_0^\infty \int_{S_1^+(n)} u(\omega)\varphi(r\omega)r^{a+n+|\gamma|-1}\omega^\gamma dr d\omega.$$

На основе этого равенства введем одномерное распределение (не весовое)

$$(R_a\varphi)(x) = (t_+^{a+n+|\gamma|-1}, \varphi(tx)), \quad \varphi \in \overset{\circ}{C}_{ev}(\overline{\mathbb{R}}_+^n). \tag{15}$$

Функция $R_a\varphi$ однородна порядка $-n - |\gamma| - a$, то есть $(R_a\varphi)(bx) = b^{-n-|\gamma|-a}(R_a\varphi)(x)$. Действительно,

$$\begin{aligned} (R_a\varphi)(bx) &= (t_+^{a+n+|\gamma|-1}, \varphi(btx)) = \int_0^\infty t^{a+n+|\gamma|-1}\varphi(btx)dt = \{bt = y\} = \\ &= b^{-n-|\gamma|-a} \int_0^\infty y^{a+n+|\gamma|-1}\varphi(yx)dy = b^{-n-|\gamma|-a}(R_a\varphi)(x). \end{aligned}$$

Из [6] следует, что R_a есть непрерывное отображение из $\overset{\circ}{C}_{ev}(K)$ в $\overset{\circ}{C}_{ev}(\mathbb{R}_+^n)$ для любого компакта $K \subset \mathbb{R}_+^n$.

Выберем фиксированную функцию $\psi \in \mathcal{D}_+$, такую что

$$\int_0^\infty \psi(tx) \frac{dt}{t} = 1, \quad x \neq 0.$$

Тогда $\psi R_a\varphi \in \mathcal{D}_+$ и

$$\begin{aligned} R_a(\psi R_a\varphi)(x) &= \int_0^\infty t^{a+n+|\gamma|-1}\psi(tx)(R_a\varphi)(tx)dt = \\ &= (R_a\varphi)(x) \int_0^\infty \psi(tx) \frac{dt}{t} = (R_a\varphi)(x). \end{aligned}$$

Таким образом, $u(\psi R_a\varphi)$ всегда не зависит от ψ и $u(\psi R_a\varphi) = u(\varphi)$, если $\varphi \in \mathcal{D}_+$. Следовательно,

$$(u^*, \varphi)_\gamma = (u, \psi R_a\varphi)_\gamma, \quad \varphi \in \mathcal{D}_+$$

определяет распределение u^* в $\overline{\mathbb{R}}_+^n$, продолжающее u . Отображение $u \rightarrow u^*$ непрерывно. Поскольку

$$(R_a\varphi_t)(x) = (r_+^{a+n+|\gamma|-1}, t^{n+|\gamma|}\varphi(rtx)) = t^{-a}R_a\varphi(x), \quad \varphi_t(x) = t^{n+|\gamma|}\varphi(tx),$$

что дает однородность u^* . Наконец заметим, что $(B_{\gamma_j} u)^* - B_{\gamma_j} u^*$ однородно порядка $a-2$ и имеет носитель в нуле 0, таким образом, должно равняться нулю. Это завершает доказательство.

4. Весовое фундаментальное решение B -эллиптического уравнения Цель этого раздела – показать, как теорию весовых однородных распределений можно использовать для получения того, что мы называем весовыми фундаментальными решениями уравнений в частных производных.

Распределение $E \in \mathcal{D}'_+$ называется **весовым фундаментальным решением** дифференциального оператора $L = \sum_{i=1}^m a_i B_{\gamma_i}$ с операторами Бесселя, с постоянными (комплексными) коэффициентами, если $LE = \delta_\gamma$.

Весовое фундаментальное решение эллиптического оператора с оператором Бесселя, действующим по одной переменной, было получено И. А. Киприяновым в [2] другим методом.

Теорема 4.1. Пусть $u_1, \dots, u_n \in \mathcal{D}'_+$ функции, однородные порядка $2 - n - |\gamma|$ в \mathbb{R}_+^n , удовлетворяющие условию $\sum_{j=1}^n B_{\gamma_j} u_j = 0$. Тогда $\sum_{j=1}^n B_{\gamma_j} u_j^* = c \delta_\gamma$, где c – некоторая константа.

Доказательство. В силу теоремы 3.1, весовое распределение $\sum_{j=1}^n B_{\gamma_j} u_j^*$ однородно порядка $-n - |\gamma|$ и имеет носитель в 0, следовательно $\sum_{j=1}^n B_{\gamma_j} u_j^* = c \delta_\gamma$ для некоторой константы c .

Лемма 4.1. Пусть $x \in \mathbb{R}_+^n$, $n > 1$ и

$$E(x) = \begin{cases} \frac{1}{|S_1^+(n)|_\gamma} \ln |x|, & n + |\gamma| = 2; \\ \frac{|x|^{2-n-|\gamma|}}{(2-n-|\gamma|)|S_1^+(n)|_\gamma}, & n + |\gamma| > 2, \end{cases}$$

где

$$|S_1^+(n)|_\gamma = \int_{S_1^+(n)} x^\gamma dS = \frac{\prod_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{2^{n-1} \Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)},$$

то для $|x| > \varepsilon \forall \varepsilon > 0$ имеем

$$\Delta_\gamma E(x) = 0.$$

Доказательство. Рассмотрим сначала случай $n + |\gamma| > 2$. Получим

$$\begin{aligned} \Delta_\gamma E(x) &= \sum_{j=1}^n B_{\gamma_j} E(x) = \sum_{j=1}^n \frac{1}{x_j^{\gamma_j}} \frac{\partial}{\partial x_j} x_j^{\gamma_j} \frac{\partial}{\partial x_j} E(x) = \\ &= \frac{1}{(2-n-|\gamma|)|S_n^+|_\gamma} \sum_{j=1}^n \frac{1}{x_j^{\gamma_j}} \frac{\partial}{\partial x_j} x_j^{\gamma_j} \frac{\partial}{\partial x_j} |x|^{2-n-|\gamma|} = \\ &= \frac{1}{(2-n-|\gamma|)|S_n^+|_\gamma} \sum_{j=1}^n \frac{1}{x_j^{\gamma_j}} \frac{\partial}{\partial x_j} x_j^{\gamma_j} \frac{(2-n-|\gamma|)}{2} |x|^{-n-|\gamma|} 2x_j = \\ &= \frac{1}{|S_n^+|_\gamma} \sum_{j=1}^n \frac{1}{x_j^{\gamma_j}} \frac{\partial}{\partial x_j} |x|^{-n-|\gamma|} x_j^{1+\gamma_j} = \\ &= \frac{1}{|S_n^+|_\gamma} \sum_{j=1}^n \frac{1}{x_j^{\gamma_j}} \left[\frac{(-n-|\gamma|)}{2} |x|^{-n-|\gamma|-2} 2x_j^{2+\gamma_j} + (1+\gamma_j) |x|^{-n-|\gamma|} x_j^{\gamma_j} \right] = \\ &= \frac{1}{|S_n^+|_\gamma} \sum_{j=1}^n [(-n-|\gamma|) |x|^{-n-|\gamma|-2} x_j^2 + (1+\gamma_j) |x|^{-n-|\gamma|}] = \\ &= \frac{1}{|S_n^+|_\gamma} [(-n-|\gamma|) |x|^{-n-|\gamma|} + (n+|\gamma|) |x|^{-n-|\gamma|}] = 0. \end{aligned}$$

Теперь рассмотрим случай $n + |\gamma| = 2$:

$$\begin{aligned} \Delta_\gamma E(x) &= \sum_{j=1}^n B_{\gamma_j} E(x) = \sum_{j=1}^n \frac{1}{x_j^{\gamma_j}} \frac{\partial}{\partial x_j} x_j^{\gamma_j} \frac{\partial}{\partial x_j} E(x) = \\ &= \frac{1}{|S_n^+|_\gamma} \sum_{j=1}^n \frac{1}{x_j^{\gamma_j}} \frac{\partial}{\partial x_j} x_j^{\gamma_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \ln |x| = \frac{1}{|S_n^+|_\gamma} \sum_{j=1}^n \frac{1}{x_j^{\gamma_j}} \frac{\partial}{\partial x_j} |x|^{-2} x_j^{1+\gamma_j} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{|S_n^+|_\gamma} \sum_{j=1}^n \frac{1}{x_j^{\gamma_j}} [-2|x|^{-4} x_j^{2+\gamma_j} + (1+\gamma_j)|x|^{-2} x_j^{\gamma_j}] = \\ &= \frac{1}{|S_n^+|_\gamma} \sum_{j=1}^n [-2|x|^{-4} x_j^2 + (1+\gamma_j)|x|^{-2}] = \\ &= \frac{1}{|S_n^+|_\gamma} [-2|x|^{-2} + (n+|\gamma|)|x|^{-2}] = 0, \end{aligned}$$

так как $n + |\gamma| = 2$.

Теорема 4.2. Пусть $x \in \mathbb{R}_n^+$, $n > 1$ и

$$E(x) = \begin{cases} \frac{1}{|S_2^+|_\gamma} \ln|x|, & n + |\gamma| = 2; \\ \frac{|x|^{2-n-|\gamma|}}{(2-n-|\gamma|)|S_n^+|_\gamma}, & n + |\gamma| > 2, \end{cases}$$

тогда $B_{\gamma_j} E \in L^1_{loc,\gamma}(\mathbb{R}_+^n)$ и

$$\Delta_\gamma E = \delta_\gamma.$$

Доказательство. Докажем сначала, что $B_{\gamma_j} E \in L^1_{loc,\gamma}(\mathbb{R}_+^n)$. Для $\varphi \in \dot{C}^\infty_0(\overline{\mathbb{R}}_+^n)$ имеем

$$\begin{aligned} (B_{\gamma_j} E, \varphi)_\gamma &= \int_{\mathbb{R}_+^n} B_{\gamma_j} E(x) \varphi(x) x^\gamma dx = \int_{\mathbb{R}_+^n} \left(\frac{1}{x_j^{\gamma_j}} \frac{\partial}{\partial x_j} x_j^{\gamma_j} \frac{\partial}{\partial x_j} E(x) \right) \varphi(x) x^\gamma dx = \\ &= \int_{\mathbb{R}_+^{n-1}} x_1^{\gamma_1} \dots x_{j-1}^{\gamma_{j-1}} x_{j+1}^{\gamma_{j+1}} \dots x_n^{\gamma_n} dx_1 \dots dx_{j-1} dx_{j+1} \dots dx_n \int_0^\infty \left(\frac{\partial}{\partial x_j} x_j^{\gamma_j} \frac{\partial}{\partial x_j} E(x) \right) \varphi(x) dx_j. \end{aligned}$$

Интегрируя по частям по x_j , получим

$$\begin{aligned} \int_0^\infty (B_{\gamma_j} E(x)) \varphi(x) x_j^{\gamma_j} dx_j &= \int_0^\infty \left(\frac{1}{x_j^{\gamma_j}} \frac{\partial}{\partial x_j} x_j^{\gamma_j} \frac{\partial}{\partial x_j} E(x) \right) \varphi(x) x_j^{\gamma_j} dx_j = \\ &= \int_0^\infty \left(\frac{\partial}{\partial x_j} x_j^{\gamma_j} \frac{\partial}{\partial x_j} E(x) \right) \varphi(x) dx_j = \left\{ U = \varphi(x), dV = \frac{\partial}{\partial x_j} x_j^{\gamma_j} \frac{\partial}{\partial x_j} E(x) dx_j \right\} = \\ &= x_j^{\gamma_j} \frac{\partial}{\partial x_j} E(x) \varphi(x) \Big|_0^\infty - \int_0^\infty x_j^{\gamma_j} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} E(x) \right) \frac{\partial}{\partial x_j} \varphi(x) dx_j = \\ &= - \int_0^\infty \left(\frac{\partial}{\partial x_j} E(x) \right) x_j^{\gamma_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \varphi(x) dx_j = \\ &= \left\{ U = x_j^{\gamma_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \varphi(x), dV = \frac{\partial}{\partial x_j} E(x) dx_j \right\} = \\ &= -x_j^{\gamma_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \varphi(x) E(x) \Big|_0^\infty + \int_0^\infty \left(\frac{\partial}{\partial x_j} x_j^{\gamma_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \varphi(x) \right) E(x) dx_j = \\ &= \int_0^\infty \left(\frac{1}{x_j^{\gamma_j}} \frac{\partial}{\partial x_j} x_j^{\gamma_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \varphi(x) \right) E(x) x_j^{\gamma_j} dx_j = \int_0^\infty (B_{\gamma_j} \varphi(x)) E(x) x_j^{\gamma_j} dx_j. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} (B_{\gamma_j} E, \varphi)_\gamma &= (E, B_{\gamma_j} \varphi)_\gamma = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\{|x|>\varepsilon\}^+} (B_{\gamma_j} \varphi(x)) E(x) x^\gamma dx = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\mathbb{R}_+^n} (B_{\gamma_j} \varphi(x)) E(x) x^\gamma dx - \int_{\{|x|\leq\varepsilon\}^+} (B_{\gamma_j} \varphi(x)) E(x) x^\gamma dx \right]. \end{aligned}$$

Используя формулу (4) из [7], получим

$$(B_{Y_j} E, \varphi)_Y = \int_{\mathbb{R}_+^n} (B_{Y_j} \varphi(x)) E(x) x^Y dx - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\{|x|=\varepsilon\}^+} \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_j} E(x) \cos(\vec{\nu}, \vec{e}_j) x^Y dS,$$

где $\vec{\nu}$ – направление внешней нормали к границе $\{|x| = \varepsilon\}^+$, \vec{e}_j – направление оси Ox_j . Поскольку $\cos(\vec{\nu}, \vec{e}_j) = \frac{x_j}{|x|}$, то

$$(B_{Y_j} E, \varphi)_Y = \int_{\mathbb{R}_+^n} (B_{Y_j} \varphi(x)) E(x) x^Y dx - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\{|x|=\varepsilon\}^+} \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_j} E(x) \frac{x_j}{|x|} x^Y dS.$$

Имеем

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\{|x|=\varepsilon\}^+} \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_j} E(x) \frac{x_j}{|x|} x^Y dS = 0$$

и, следовательно,

$$(B_{Y_j} E, \varphi)_Y = \int_{\mathbb{R}_+^n} (B_{Y_j} E(x)) \varphi(x) x^Y dx,$$

то есть, весовое распределение $B_{Y_j} E$ определяемое функцией $B_{Y_j} E(x)$ локально интегрируемо с весом x^Y . Поскольку для $|x| > \varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0$ выполняется равенство

$$\Delta_Y E(x) = 0,$$

то снова используя формулу (4) из [7], будем иметь

$$\begin{aligned} (\Delta_Y E, \varphi)_Y &= (E, \Delta_Y \varphi)_Y = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\{|x|>\varepsilon\}^+} E(x) (\Delta_Y \varphi(x)) x^Y dx = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\{|x|>\varepsilon\}^+} [E(x) (\Delta_Y \varphi(x)) - (\Delta_Y E(x)) \varphi(x)] x^Y dx = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\{|x|=\varepsilon\}^+} \left(E(x) \frac{\partial \varphi(x)}{\partial \vec{\nu}} - \varphi(x) \frac{\partial E(x)}{\partial \vec{\nu}} \right) x^Y dS = \varphi(0). \end{aligned}$$

Доказательство закончено.

5. Задача Дирихле. Основным назначением весового фундаментального решения является то, что оно позволяет решать неоднородные уравнения или задачу Дирихле с неоднородным условием, в которых неоднородный член имеет компактный носитель.

В этом пункте строится весовое фундаментальное решение задачи Дирихле, т. е. решением задачи Дирихле с весовой дельта-функцией в граничном условии. Решение задачи Дирихле с произвольной функцией в граничном условии в этом случае можно записать как обобщенную свертку (3) функции с весовым фундаментальным решением задачи Дирихле, если эта обобщенная свертка существует.

Пусть $\Delta_{Y,a} = \Delta_Y + B_a$. В этом пункте рассмотрим задачу Дирихле

$$\Delta_{Y,a} u = 0, \quad u = u(x, y), \quad (16)$$

$$u(x, 0) = f(x). \quad (17)$$

Пусть $\vec{e} = (e_1, \dots, e_n)$ является ортонормированным базисом в \mathbb{R}^n , $\nabla'_{Y,a} = \left(\frac{1}{x_1^{Y_1}} \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{1}{x_n^{Y_n}} \frac{\partial}{\partial x_n}, \frac{1}{y^a} \frac{\partial}{\partial y} \right)$ – первый взвешенный оператор набла, $\nabla''_{Y,a} = \left(x_1^{Y_1} \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, x_n^{Y_n} \frac{\partial}{\partial x_n}, y^a \frac{\partial}{\partial y} \right)$ – второй взвешенный оператор набла, тогда $(\nabla'_{Y,a} \cdot \nabla''_{Y,a}) = \Delta_{Y,a}$. Если $\vec{F} = \vec{F}(x, y) = (F_1(x, y), \dots, F_{n+1}(x, y))$ – векторное поле, то $div'_{Y,a} \vec{F} = (\nabla'_{Y,a} \cdot \vec{F}) = \frac{1}{x_1^{Y_1}} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{1}{x_n^{Y_n}} \frac{\partial F_n}{\partial x_n} + \frac{1}{y^a} \frac{\partial F_{n+1}}{\partial y}$ – первая весовая дивергенция, $div''_{Y,a} \vec{F} = (\nabla''_{Y,a} \cdot \vec{F}) = x_1^{Y_1} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \dots + x_n^{Y_n} \frac{\partial F_n}{\partial x_n} + y^a \frac{\partial F_{n+1}}{\partial y}$ – вторая весовая дивергенция.

Уравнение (16) можно переписать в виде $div'_{Y,a} (\nabla''_{Y,a} u) = 0$.

Введя новую переменную $\eta = \left(\frac{y}{1-a}\right)^{1-a}$, получим

$$\frac{\partial \eta}{\partial y} = \left(\frac{y}{1-a}\right)^{-a},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{a}{y} \frac{\partial u}{\partial y} = \left(\frac{y}{1-a}\right)^{-2a} u_{\eta\eta} = \eta^{\frac{2a}{a-1}} u_{\eta\eta}$$

и уравнение (16) переписывается в виде

$$(\Delta_Y)_x u + \eta^{\frac{2a}{a-1}} u_{\eta\eta} = 0. \tag{18}$$

Интегральный оператор дробного порядка $\alpha > 0$ следующего вида

$$(\mathbf{U}_Y^\alpha \varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{Y \mathbf{T}_x^y \varphi(x)}{|y|^{n+|\gamma|-\alpha}} y^\gamma dy \tag{19}$$

называется В-потенциалом Рисса (см. [4]). В [5] построено его обращение в виде В-гиперсингулярного интеграла. При $0 < \alpha < 1$ В-гиперсингулярный интеграл имеет вид

$$C_{n,\gamma,a} \int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{f(\xi) - Y \mathbf{T}_x^\xi f(x)}{|x|^{n+|\gamma|-\alpha+1}} \xi^\gamma d\xi = (\mathbf{D}_Y^{1-a} f)(x)$$

где $C_{n,\gamma,a} = \frac{1}{C(n,\gamma) S_{n,l}(\alpha)}$, $C(N,\gamma) = \frac{\Gamma(\frac{N+\alpha}{2}) \prod_{i=1}^n \Gamma(\frac{\gamma_i+1}{2})}{2^n \Gamma(\frac{N+|\gamma|+\alpha}{2}) \pi^{n/2}}$, $S_{N,l}(\alpha) = \beta_N(\alpha) \frac{A_l(\alpha)}{\sin \frac{\alpha\pi}{2}}$,

Лемма 5.1. Пусть $x \in \mathbb{R}_+^n$, $n > 1$ и

$$P(x, y) = C_{n,\gamma,a} \frac{y^{1-a}}{(|x|^2 + y^2)^{\frac{n+|\gamma|-\alpha+1}{2}}},$$

то для $|x| > \varepsilon \forall \varepsilon > 0$ имеем

$$\Delta_{Y,a} P(x, y) = 0.$$

Доказательство. Действительно, непосредственные вычисления дают

$$\begin{aligned} \Delta_{Y,a} P(x, y) &= C_{n,\gamma,a} \Delta_{Y,a} \frac{y^{1-a}}{(|x|^2 + y^2)^{\frac{n+|\gamma|-\alpha+1}{2}}} = \\ &= C_{n,\gamma,a} \left(\sum_{i=1}^n (B_{Y_i})_{x_i} \frac{y^{1-a}}{(|x|^2 + y^2)^{\frac{n+|\gamma|-\alpha+1}{2}}} + (B_a)_y \frac{y^{1-a}}{(|x|^2 + y^2)^{\frac{n+|\gamma|-\alpha+1}{2}}} \right) = \\ &= C_{n,\gamma,a} \left(y^{1-a} (a - |\gamma| - n - 1) \sum_{i=1}^n \left((\gamma_i + 1) (|x|^2 + y^2)^{\frac{a-|\gamma|-n-3}{2}} + x_i^2 (a - n - |\gamma| - 3) (|x|^2 + y^2)^{\frac{a-|\gamma|-n-5}{2}} \right) - \right. \\ &\quad \left. - y^{1-a} (a - |\gamma| - n - 1) (|x|^2 + y^2)^{\frac{a-|\gamma|-n-5}{2}} ((a-3)|x|^2 + y^2(|\gamma| + n)) \right) = \\ &= C_{n,\gamma,a} \left(y^{1-a} (a - |\gamma| - n - 1) (|x|^2 + y^2)^{\frac{a-|\gamma|-n-5}{2}} \sum_{i=1}^n \left((\gamma_i + 1) (|x|^2 + y^2) + x_i^2 (a - n - |\gamma| - 3) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - y^{1-a} (a - |\gamma| - n - 1) (|x|^2 + y^2)^{\frac{a-|\gamma|-n-5}{2}} ((a-3)|x|^2 + y^2(|\gamma| + n)) \right) \right) = \\ &= C_{n,\gamma,a} \left(y^{1-a} (a - |\gamma| - n - 1) (|x|^2 + y^2)^{\frac{a-|\gamma|-n-5}{2}} \left((n + |\gamma|) (|x|^2 + y^2) + |x|^2 (a - n - |\gamma| - 3) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - y^{1-a} (a - |\gamma| - n - 1) (|x|^2 + y^2)^{\frac{a-|\gamma|-n-5}{2}} ((a-3)|x|^2 + y^2(|\gamma| + n)) \right) \right) = \\ &= C_{n,\gamma,a} \left(y^{1-a} (a - |\gamma| - n - 1) (|x|^2 + y^2)^{\frac{a-|\gamma|-n-5}{2}} \left((n + |\gamma|) y^2 + (a - 3) |x|^2 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - y^{1-a} (a - |\gamma| - n - 1) (|x|^2 + y^2)^{\frac{a-|\gamma|-n-5}{2}} ((a-3)|x|^2 + y^2(|\gamma| + n)) \right) \right) = 0. \end{aligned}$$

Следствие 5.1. Функция

$$P(x, z) = C_{n, \gamma, a} \frac{\eta}{(|x|^2 + (1-a)^2 \eta^{\frac{2}{1-a}})^{\frac{n+|\gamma|-a+1}{2}}}$$

является решением уравнения (18).

Теорема 5.1. Пусть $x \in \mathbb{R}_+^n$, $n > 1$ и

$$P(x, y) = C_{n, \gamma, a} \frac{y^{1-a}}{(|x|^2 + y^2)^{\frac{n+|\gamma|-a+1}{2}}},$$

тогда $B_{\gamma} P(x, y) \in L_{loc, \gamma}^1(\mathbb{R}_+^n)$ и решение задачи (16)–(17) имеет вид

$$u(x, y) = \int_{\mathbb{R}_+^n} {}^{\gamma} T_x^{\xi} P(x, y) f(\xi) \xi^{\gamma} d\xi.$$

Доказательство. Очевидно, что если $P(x, y)$ есть решение уравнения (16), то и $\int_{\mathbb{R}_+^n} {}^{\gamma} T_x^{\xi} P(x, y) f(\xi) \xi^{\gamma} d\xi$ есть решение (16). Кроме того,

$$P(x, y) = y^{-n-|\gamma|} P(x/y, 1)$$

и, следовательно,

$$\lim_{y \rightarrow 0} P(x, y) = \delta_{\gamma}.$$

Тогда

$$\lim_{y \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}_+^n} {}^{\gamma} T_x^{\xi} P(x, y) f(\xi) \xi^{\gamma} d\xi = \int_{\mathbb{R}_+^n} {}^{\gamma} T_x^{\xi} \delta_{\gamma}(x) f(\xi) \xi^{\gamma} d\xi = f(x).$$

Что и завершает доказательство.

Следствие 5.2. Решение задачи (18)–(17) имеет вид $u(x, z) = \int_{\mathbb{R}_+^n} {}^{\gamma} T_x^{\xi} P(x, z) f(\xi) \xi^{\gamma} d\xi$.

Теорема 5.2. Пусть $f \in L_p^{\gamma}(\mathbb{R}_+^n)$, $0 < a < 1$, $s = \frac{1-a}{2}$, $s < \frac{n+|\gamma|}{p}$, $\eta = \left(\frac{y}{1-a}\right)^{1-a}$

$$(-\Delta_{\gamma})^s f(x) = - \lim_{y \rightarrow +0} y^a u_y(x, y) = u_{\eta}(x, 0).$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} u_{\eta}(x, 0) &= \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{u(x, \eta) - u(x, 0)}{\eta} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{\eta} \int_{\mathbb{R}_+^n} {}^{\gamma} T_x^{\xi} P(x, \eta) (f(\xi) - f(x)) \xi^{\gamma} d\xi = \\ &= C_{n, \gamma, a} \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}_+^n} {}^{\gamma} T_x^{\xi} \left((|x|^2 + (1-a)^2 \eta^{\frac{2}{1-a}})^{\frac{a-n-|\gamma|-1}{2}} \right) (f(\xi) - f(x)) \xi^{\gamma} d\xi = \\ &= C_{n, \gamma, a} \int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{f(\xi) - {}^{\gamma} T_x^{\xi} f(x)}{|x|^{n+|\gamma|-a+1}} \xi^{\gamma} d\xi = (D_{\gamma}^{1-a} f)(x), \end{aligned}$$

где $D_{\gamma}^{1-a} = (-\Delta_{\gamma})^{\frac{1-a}{2}} - B$ -гиперсингулярный интеграл (см. [4, 5]).

Список литературы

1. Житомирский Я. И. 1955. Задача Коши для систем линейных уравнений в частных производных с дифференциальными операторами типа Бесселя. Матем. сб., 36(78)(2): 299–310.
2. Киприянов И. А. 1997. Сингулярные эллиптические краевые задачи. М., Наука-Физматлит, 204.
3. Левитан Б. М. 1951. Разложения по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье. М., УМН. 6:2(42): 102–143.
4. Ляхов Л. Н. 1991. Обращение В-потенциалов Рисса. Докл. АН СССР, 321(3): 466–469.
5. Ляхов Л. Н. 1990. Об одном классе гиперсингулярных интегралов. Докл. АН СССР, 315(2): 291–296.

6. Хермандер Л. 1986. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. 1. Теория распределений. М., Мир, 482.
7. Шишкина Э. Л. 2019. Обобщенная дивергентная теорема и второе тождество Грина для B -эллиптических и B -гиперболических операторов. Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика. 51(4): 506–513.

References

1. Zhitomirskii Ya. I. 1955. Cauchy's problem for systems of linear partial differential equations with differential operators of Bessel type. Mat. Sb. (N.S.), 36(78)(2): 299–310 (in Russian).
2. Kipriyanov I. A. 1997. Singular Elliptic Boundary Value Problems. M.: Nauka-Fizmlit, 204 (in Russian).
3. Levitan B. M. 1951. Expansion in Fourier series and integrals with Bessel functions. Uspekhi Mat. Nauk, 6:2(42): 102–143 (in Russian).
4. Lyakhov L. N. 1992. Inversion of Riesz B -potentials. Dokl. Math., 44(3): 717–720 (in Russian).
5. Lyakhov L. N. 1991. A class of hypersingular integrals. Dokl. Math., 42(3): 765–769 (in Russian).
6. Hermander L. 1986. Analysis of linear partial differential operators. 1. The theory of distributions. М., Mir, 482 (in Russian).
7. Shishkina E. L. 2019. Generalized divergent theorem and second Green identity of B -elliptic and B -hyperbolic operators. Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics. Physics. 51(4): 506–513 (in Russian).

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.
Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Получена 08.12.2021

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Алзамили Хитам – аспирант Белгородского государственного национального исследовательского университета (НИУ «БелГУ»)

 <http://orcid.org/0000-0003-1354-6478>

ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия

E-mail: alzamili.khitam@mail.ru

Шишкина Элина Леонидовна – доктор физико-математических наук, доцент, профессор Воронежского Государственного Университета и Белгородского государственного национального исследовательского университета (НИУ «БелГУ»)

 <http://orcid.org/0000-0003-4083-1207>

Университетская пл., д.1, Воронеж, 394018, Россия; ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия

E-mail: ilina_dico@mail.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Khitam Alzamili – Postgraduate student, Belgorod State National Research University (NRU "BelGU"), Belgorod, Russia

Elina Shishkina – Doctor of Sciences Phys. Math., Associate Professor, Professor of Voronezh State University and Belgorod State National Research University (NRU "BelGU"), Voronezh, Belgorod, Russia

ФИЗИКА. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 519.218.5
MSC 60G10, 60H15

DOI 10.52575/2687-0959-2021-53-4-312-316

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ КРИТИЧЕСКИХ НАПРЯЖЕНИЙ РАЗРЫВА ОБРАЗЦОВ ПОРИСТОГО МАТЕРИАЛА

Ю. П. Вирченко, И. М. Шаполова

Белгородский государственный технологический университет им. В. Г. Шухова,
г. Белгород, 308012 Россия

Белгородский государственный национальный исследовательский университет,
г. Белгород, 308015, Россия

E-mail: virch@bsu.edu.ru

Аннотация. В рамках феноменологических общефизических представлений строится статистическая модель для описания условий зарождения таких микротрещин в объемных образцах пористых твердотельных материалов, которые под действием приложенной одноосной внешней нагрузки приводят к поперечному разрыву. На основе этой модели вычислена вероятность разрыва образцов как функция концентрации, находящихся в них пор.

Ключевые слова: закон Гриффитса, концентрация, микротрещина, предел прочности, хрупкое разрушение, распределение пор, статистическая независимость.

Для цитирования: Вирченко Ю. П., Шаполова И. М. 2021. Распределение вероятностей критических напряжений разрыва образцов пористого материала. Прикладная математика & Физика 53(4): 312–316. DOI 10.52575/2687-0959-2021-53-4-312-316.

PROBABILITY DISTRIBUTION OF CRITICAL TENSIONS OF SAMPLE BREAK OF POROUS MATERIAL

Yuri Virchenko, Irina Shapolova

Belgorod State Technological University named after V. G. Shukhova,
Belgorod, 308012 Russia

Belgorod State National Research University, Belgorod, 308015 Russia

E-mail: virch@bsu.edu.ru

Received December, 9, 2021

Abstract. Porous materials are studied in frameworks of phenomenological representations of general physics. The statistical model for theoretical description of origin conditions of such microcracks in volume samples which leads to their transverse break is proposed. The break occurs due to the cracks growth when the external directed ultimate elastic power is applied which exceeds the material ultimate strength. On the basis of the model the probability of fragile destruction of the sample is calculated as the function of pores concentration.

Key words: Griffith's law, concentration, microcrack, ultimate strength, pores distribution, fragile destruction, statistical independence.

For citation: Virchenko Yu. P., Shapolova I. M. 2021. Probability distribution of critical tensions of sample break of porous material. Applied Mathematics & Physics. 53(4): 312–316. (in Russian). DOI 10.52575/2687-0959-2021-53-4-312-316.

1. Введение. В работе, в рамках феноменологических представлений, с использованием теории Гриффитса [9] роста трещин в твердом теле, предлагается статистическая модель для описания равновесного состояния хрупкого твердотельного материала, находящегося под внешней одноосной нагрузкой, растягивающей образец. Построение модели основано на представлении о том, что к разрыву образца, который происходит катастрофическим образом в течение очень короткого промежутка времени, приводит очень быстрый рост под воздействием нагрузки какой-либо из микротрещин, длина которой превосходит некоторую критическую величину. Рассматривается типичная ситуация в практике технологического использования твердотельных материалов, когда в образце имеются микротрещины с размером порядка $1 \div 10$ нм. Они возникают либо вследствие несовершенства технологии приготовления материала, либо вследствие длительного воздействия на него внешней нагрузки постоянной

и/или переменной в изменяющихся термодинамических условиях. Эти микротрещины играют роль «зародышей» из которых развивается разрыв образца при достаточно большой величине внешней нагрузки. Наличие зародышей для разрыва образца является необходимым условием, указывающим ту пространственную точку, в которой этот разрыв происходит. В идеальной твердотельной кристаллической структуре разрыв образца, с чисто теоретической точки зрения, мог бы происходить только посредством одновременного рассыпания его на отдельные атомы.

Так как распределение любого рода дефектов в твердом теле носит статистический характер, то любая математическая модель, которая предназначена для установления функциональных связей между существующими в образце упругими напряжениями и характеристиками самой среды, в частности, характеристиками ее термодинамического состояния, должна быть сформулирована на основе понятий теории вероятностей. Такого рода теоретический подход к описанию свойств реальной твердотельной структуры по отношению к внешним механическим воздействиям имеет уже большую историю (см., например, [6]-[2]). Именно такой статистический подход должен быть применен при теоретическом предсказании связи между величиной упругих напряжений, приводящих к разрушению образца материала как целого, то есть предела прочности, и характеристиками среды. В настоящей работе мы строим модель именно такого типа.

2. Физическая картина развития разрыва под нагрузкой. Мы исходим из представления о том, что разрыв образца происходит в результате роста имеющихся в твердотельной среде микротрещин, под воздействием механических напряжений, ориентированных поперек их расположения. Трещины, с которых может начать развиваться процесс разрыва, должны иметь достаточно большую величину, превосходящую некоторую критическую d_* . По своему физическому замыслу, в конструкцию нашей модели закладывается предположение о том, что в тех материалах, к которым допустимо ее применение, возникновение трещин такой достаточно большой величины связано с наличием в образце точечных дефектов в виде пор очень малого размера r . Таковыми являются образцы материалов с достаточно большой величиной хрупкости. Следовательно, основную роль в формировании величины предела прочности в нашей модели играет наличие дефектов в виде пор. Частный случай такой модели изучался ранее в [13].

Поры всегда присутствуют в образце с той или иной концентрацией ρ , которая зависит как от физической природы материала, так и от технологии приготовления образца. В нашей модели величина ρ является свободным феноменологическим параметром. Поэтому в рамках предлагаемой модели имеет смысл задача о зависимости предела прочности от величины ρ .

Так как с точки зрения технологии приготовления материала можно управлять только лишь концентрацией пор, то они распределены в образце случайным образом и обладают случайным размером с некоторым характерным средним значением. Величина концентрации ρ формируется посредством усреднения по расположениям пор. Такое усреднение осуществляется по пространственным областям Σ с макроскопическими, по отношению размеру пор, линейными размерами. Таким образом, размер d областей Σ должен быть велик по сравнению со средним размером r пор, $d \gg r$ и средним расстоянием l между ними, $d \gg l$ и, в то же время, он должен быть мал по сравнению с характерным размером неоднородностей в распределении напряжений в материале, так как именно на неоднородностях механического напряжения внутри образца формируется зародыш его разрыва.

В каждой пространственной области Σ с указанными размерами, когда размер $d \sim 10l$, неизбежно имеются флуктуации числа \tilde{n}_Σ пор достаточно заметной величины. Если флуктуация Δn_Σ в какой-либо области Σ с размером d такова, что в ней происходит слияние находящихся в ней пор под действием растягивающих напряжений, действующих на границах пор внутри области Σ нагрузки, прикладываемой к границе образца, то при таком слиянии образуется микротрещина с линейным размером $\sim d$. При этом d превосходит критическую величину d_* , о которой речь шла выше. Тогда, вследствие такого слияния пор возникает процесс быстрого роста этой трещины с длиной, превосходящей критическую, при воздействии внешней нагрузки на материал. В результате, микротрещина превращается в макротрещину. Последняя очень быстро разрастается и ее линейный размер достигает величины, сравнимой с линейным размером самого образца, то есть происходит его разрыв. Таким образом, критическому размеру микротрещины соответствует критическая величина флуктуации концентрации. Как следствие, критическая величина флуктуации концентрации пор связана с величиной внешней одноосной нагрузки. Если такая зависимость известна, то можно установить предел прочности материала – ту критическую величину внешней нагрузки, которая приводит к разрушению образца. Таким образом, в описанном выше теоретическом походе предел прочности материала связывается с критической величиной флуктуации пор в материале.

3. Статистическая модель разрушения хрупкого материала. Пусть поры случайным образом распределены по объему исследуемого образца. Размеры пор будем предполагать настолько малыми, что ими можно пренебречь по сравнению со средним расстоянием между ними, $l \gg r$. В этом случае будем моделировать случайное расположение пор по образцу Ω посредством наборов случайно распо-

ложенных геометрических точек в области пространства, занимаемой этим образцом. При этом число \tilde{n} точек в этих наборах будет случайным и, точно так же, положение в Ω каждой точки из набора также является случайным. Таким образом, расположение пор в наборе точек $\langle \tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_{\tilde{n}} \rangle \in \Omega$ представляет собой, с математической точки зрения, точечное случайное поле. Так как $l \gg r$, то будем считать положение каждой точки статистически независимым от расположений всех других точек из этого набора. Ввиду макроскопического размера образца по сравнению с l и, как следствие, малого влияния его границы на расположение пор в нем, естественно считать, что попадание каждой точки в любую малую область $\Sigma \subset \Omega$ не имеет никакого предпочтения перед любой другой областью $\Sigma' \subset \Omega$ с точно такой же формой и размерами. Иными словами, мы полагаем, что распределение каждой фиксированной случайной точки из набора $\langle x_1, x_2, \dots, x_{\tilde{n}} \rangle$, описывающего расположение пор по образцу, является *равновозможным*, то есть она имеет плотность распределения $|\Omega|^{-1}$.

Из сделанных предположений следует, что условная плотность распределения всего набора из \tilde{n} точек при условии, что число \tilde{n} неслучайно, $\tilde{n} = n$, равна $|\Omega|^{-n}$ или, с учетом физической неразличимости точек набора $(n!)^{-1}|\Omega|^{-n}$. Это означает, что расположение пор в большом образце мы моделируем *безгранично делимым пуассоновским* точечным случайным полем [11]. Вводя характеристику такого поля – объемную концентрацию $\rho = N/|\Omega|$ (т.е. их плотность), вероятность $P\{\tilde{n}_\Sigma = n\}$ попадания числа n в каждую фиксированную область Σ определяется распределением Пуассона

$$P\{\tilde{n}_\Sigma = n\} = \frac{(\rho|\Sigma|)^n}{n!} \exp(-\rho|\Sigma|). \quad (1)$$

С физической точки зрения, использование такого распределения вероятностей для случайного числа \tilde{n}_Σ тем более оправдано, если суммарный объем пор по образцу намного меньше объема $|\Omega|$ самого образца, в силу малости объема каждой поры и, как следствие, малости объемной концентрации $\rho = N/|\Omega|$ пор.

Заметим, что используемая нами модель материала со случайным образом распределенными в нем дефектами является частным случаем вероятностных моделей, используемых в математической и теоретической физике (см. [8], [15]).

Определив распределение вероятностей для расположения пор в Ω , принципиально, мы в состоянии подсчитать вероятность появления той величины критической флуктуации $\Delta\tilde{n}_\Sigma$, которая определяет возможность появления трещины требуемого размера в образце в зависимости от величины концентрации ρ . Однако, это еще не дает возможность связать эту величину с величиной упругого напряжения, вызывающего рост трещины. Для установления связи между критическим напряжением p_* и концентрацией пор ρ , приводящей к росту трещины, воспользуемся следующим законом Гриффитса.

Пусть d – критическая (флуктуационная) длина трещины, начиная с которой начинается ее развитие последней. Из теории Гриффитса роста трещины следует, что

$$d = d_0 (k/p)^{\alpha/2}, \quad (2)$$

где $\alpha > 0$ и k – т.н. постоянная Гриффитса. Такая форма зависимости d от p согласуется с представлением о том, что при $p \rightarrow \infty$ возможно развитие трещины со сколь угодно малых размеров d , а при $p = 0$ трещиной формально можно считать разломы в образце, имеющие макроскопические размеры. Что касается практического использования формулы (2), то в теории хрупкого разрушения часто используется модель с $\alpha = 4$.

Свяжем теперь критическую длину трещины d с концентрацией пор, которую будем называть критической. Для этого рассмотрим кубическую область Σ с размером d . Будем считать, что трещина под напряжением p , приложенным в направлении одного из ребер, зарождается в этой ячейке, если в ней количество пор превышает определенную величину n_* . Пусть δ – характерное расстояние между ионами материала такое, что при его превышении возникает явление *охрупчивания*. Для металлов это расстояние равно, по порядку величины, среднему расстоянию между атомами в жидком состоянии. Тогда критическую концентрацию n_* определим из требования, чтобы в области Σ все атомы находились на расстоянии, не меньшем чем δ . Таким образом,

$$n_* = (d/\delta)^3. \quad (3)$$

Таким образом, рост трещины при действии внешней одноосной нагрузки на образец Ω хрупкого материала начинается в том случае, если в области Ω существует такой кубик Σ с длиной ребра d , в котором имеется \tilde{n} пор, т.е. случайных точек пуассоновского точечного поля, которое превосходит n_* .

Определение связи (3) завершает построение статистической модели для вычисления вероятности P случайного события, что произойдет разрыв образца Ω , имеющего форму параллелепипеда при действии на его противоположные торцы растягивающей силы. Это случайное событие Γ с математической точки зрения определяется следующим образом. Свяжем с каждым кубом $\Sigma \subset \Omega$ характеризующий его радиус-вектор $\mathbf{x} \in \Omega$, который соответствует центру этого куба, то есть куб, связанный с \mathbf{x} , будем обозначать как $\Sigma(\mathbf{x})$. Тогда $\Gamma = \{\exists(\mathbf{x} \in \Omega)(|\tilde{n}_\Sigma(\mathbf{x})| > n_*)\}$.

Сделаем одно очень важное физическое замечание. Сконструированная модель может претендовать только на вычисление этой вероятностей для разрыва массивного образца, размеры которого, по порядку величины, по всем направлениям одинаковы. Она ни в коем случае не применима для теоретического анализа разрыва тонких пленок материала.

Математическая задача, связанная с построенной моделью, состоит в определении $P = P(\Gamma)$. Так как число n_* является функцией от ρ , то от этой величины внешнего приложенного механического напряжения зависит событие Γ и, следовательно, его вероятность P . Кроме того, эта вероятность зависит от ρ , так как от этого параметра зависит распределение вероятностей случайного числа $\tilde{n}_\Sigma(\mathbf{x})$. Таким образом, в результате решения вероятностной задачи, получим функцию $P \equiv P(\rho, \rho; V)$, где указана зависимость вероятности P от полного объема образца $V = |\Omega|$. При этом зависимость от объема должна быть такой, что $P(\rho, \rho; V) \rightarrow 1$ при $V \rightarrow \infty$ и $\rho = \text{const}$. Это связано с тем, что вероятность разрушения P образца должна возрастать, приближаясь к единичной вероятности при неограниченном возрастании его размеров, то есть образец должен наверняка быть разрушенным. Такое свойство функции $P(\rho, \rho; V)$ в материаловедении называется *размерным эффектом*.

Учитывая тот факт, что линейные размеры Ω очень велики по сравнению с остальными имеющимися в модели параметрами размерности длины, то при решении поставленной задачи интерес представляет не точное значение функции $P(\rho, \rho, V)$, а ее асимптотическое поведение при $V \rightarrow \infty$. Такая ситуация аналогична той, которая возникает при изучении термодинамических флуктуаций в статистической физике, когда переход к термодинамическому пределу приводит к полному исчезновению флуктуаций и, соответственно, их распределения вероятностей. Поэтому интерес представляет изучение именно асимптотических отклонений величин от *термодинамически предельных значений* (см., например, [12]). Но имеется и существенное отличие. Так как $P(\rho, \rho, V) \rightarrow 1$ при $V \rightarrow \infty$, то, в отличие от задач статистической механики, решением задачи нужно считать следующий член асимптотического разложения при $V \rightarrow \infty$.

4. Анализ статистической модели. Данная выше формулировка случайного события Γ неудобна для вычисления его вероятности, поэтому желательна эквивалентная формулировка этого случайного события в терминах какой-либо неслучайной величины, связанной с $\tilde{n}_{\Sigma(\mathbf{x})}$. Зафиксировав размеры каждого куба $\Sigma(\mathbf{x})$, заметим, что $\tilde{n}_{\Sigma(\mathbf{x})}$ представляет собой сепарабельную случайную функцию, распределение вероятностей которой индуцируется распределением вероятностей пуассоновского точечного случайного поля $\langle \tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n \rangle$, то есть все ее частные распределения вероятностей (см., например, [7]) могут быть вычислены на основе распределения вероятностей точечного поля $\langle \tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n \rangle$.

Заметим, что событие Γ формулируется эквивалентным образом в терминах случайного поля $\tilde{n}(\mathbf{x}) \equiv \tilde{n}_{\Sigma(\mathbf{x})}$, а именно, $\Gamma = \{\max\{\tilde{n}(\mathbf{x}); \mathbf{x} \in \Omega\} > n_*\}$. Таким образом, для решения задачи об определении предела прочности образца хрупкого материала, в рамках предложенной модели, нужно определить распределение вероятностей максимума случайной функции $\{\tilde{n}(\mathbf{x}); \mathbf{x} \in \Omega\}$ (см., по этому поводу также [4]). Следовательно,

$$P(\rho, \rho, V) = P\{\max\{\tilde{n}(\mathbf{x}); \mathbf{x} \in \Omega\} > n_*\}.$$

Так как значения случайной функции $\{\tilde{n}(\mathbf{x}); \mathbf{x} \in \Omega\}$ не являются, вообще говоря, статистически независимыми, то решение такой задачи не сводится к известным решениям [10] для независимых случайных величин.

5. Заключение. В результате проведенного теоретического исследования нами построена теоретическая статистическая модель, описывающая явление разрушения хрупкого материала под воздействием на него внешней одноосной нагрузки. В этой модели величина критической флуктуации концентрации пор внутри образца материала связана с величиной самой концентрации ρ и образование микротрещины критического размера есть следствие достаточно большой величины ρ . На основе закона Гриффитса роста трещины в твердотельном образце, введена связь между концентрацией пор и критическим механическим напряжением (пределом разрывной прочности) материала ρ_* . Построенная модель претендует на предсказание количественных характеристик хрупкого разрушения материала.

References

1. Batdorf S. B. 1973. A statistical theory for failure of brittle materials under combined stresses. AIAA Paper. 381: 1-5.
2. Batdorf S. B. 1975. Fracture statistics of brittle materials with intergranular cracks. Nucl. Eng. and Des. 35(3): 349-360.
3. Chechulin B. B. 1963. Scale factor and statistical nature of metal strength. Moscow, Metallurizdat, 120.
4. Epstein B. 1948. Application of the theory of extreme values in fracture problems. Amer. Stat. Assoc. J. 13(9): 403-412.

5. Fisher J. C., Hollomon J. M. 1947. A statistical theory of fracture. *Metals Technol.* 14(5): 1-16.
6. Frenkel Ya. I., Kontorova T. A. 1943. A statistical theory of the brittle strength of real crystals. *J. Phys. Moscow.* 7: 108- 120.
7. Gardiner C. W. 1985. *Handbook of Stochastic Methods for Physics, Chemistry and the Natural Sciences*, 2d ed. Berlin-Heidelberg-New York, Springer-Verlag, 436.
8. Gilbert E. N. 1962. The Poisson random medium in statistical physics. *Ann. Math. Statistics.* 33(3): 958-968.
9. Griffith A. A. 1921. The Phenomenon of Rupture and Flow in Solids. *Phil. Trans. Roy. Soc. of London.* A221: 163-198.
10. Gumbel E. 1962. *Statistics of Extremes.* New York, Columbia University Press, 540.
11. Matthes K., Kerstan J., Mecke J. 1978. *Infinitely Divisible Point Processes.* New York, Chichester, 360.
12. Minlos R. A. 2002. *Introduction into mathematical statistical physics.* Moscow, MCNMO, 112.
13. Virchenko Yu. P., Sheremet O. I. 2000. To the Statistical Theory of Brittle Destruction of Solid Media. *Dopovidi NANU.* 7: 92-95.
14. Weibull W. 1949. A statistical representation of fatigue failure in solids. *Trans. Roy. Inst. Tech. (Stocholm):* 27-43.
15. Ziman J.M. 1979. *Models of disorder. The theoretical physics of homogeneously disordered systems.* New York, Cambridge University Press, 420.

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Получена 09.12.2021

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Вирченко Юрий Петрович – доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры программного обеспечения вычислительной техники и автоматизированных систем Белгородского государственного технологического университета им. В. Г. Шухова

 <http://orcid.org/0000-0002-5413-6179>

Ул. Костюкова, 46, Белгород, 308012, Россия

E-mail: virch@bsu.edu.ru

Шаполова Ирина Михайловна – аспирант второго года обучения института инженерных и цифровых технологий Белгородского государственного национального исследовательского университета

Ул. Победы, 85, Белгород, 30801, Россия

E-mail: shapolova@bsu.edu.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Yuri Virchenko – PhD in Physics and Mathematics, Professor, Professor of the Department of Software for Computing Machinery and Automated Systems, Belgorod State Technological University named after V. G. Shukhova, Belgorod, Russia

Irina Shapolova – postgraduate student of the second year of study at the Institute of Engineering and Digital Technologies, Belgorod State National Research University, Belgorod, Russia