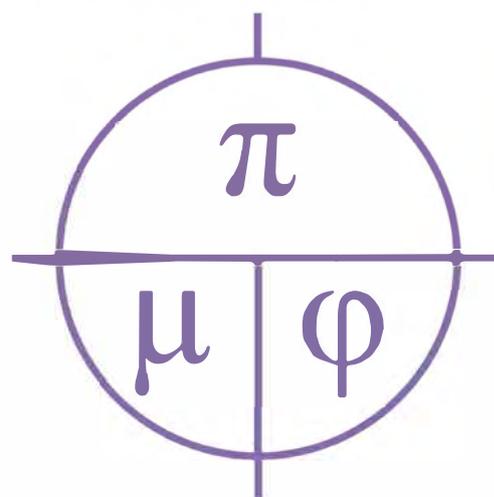


# ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА & ФИЗИКА

# APPLIED MATHEMATICS & PHYSICS



2022. Том 54, № 1





## Прикладная математика & Физика

2022. Том 54, № 1

Основан в 1995 г. Журнал включен в Перечень ВАК рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней кандидата и доктора наук (1.1.1 – вещественный, комплексный и функциональный анализ, 1.1.2 – дифференциальные уравнения и математическая физика, 1.3.8 – физика конденсированного состояния). До 2020 г. журнал издавался под названием «Научные ведомости Белгородского государственного университета. Математика. Физика».

### УЧРЕДИТЕЛЬ:

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Белгородский государственный национальный исследовательский университет».

### РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:

**Главный редактор:** В. Б. Васильев, доктор физико-математических наук, НИУ «БелГУ»;  
**Заместители главного редактора:** С. М. Ситник, доктор физико-математических наук, НИУ «БелГУ», Математика; А. В. Носков, доктор физико-математических наук, НИУ «БелГУ», Физика. Математическое моделирование;  
**Ответственный секретарь:** О. В. Чернова, кандидат физико-математических наук, НИУ «БелГУ».

### ЧЛЕНЫ РЕДАКЦИОННОЙ КОЛЛЕГИИ:

Ш. А. Алимов, д-р ф.-м. н., Ташкент, Узбекистан;	И. С. Ломов, д-р ф.-м. н., Москва, Россия;
Ю. А. Алхутов, д-р ф.-м. н., Владимир, Россия;	В. В. Меньших, д-р ф.-м. н., Воронеж, Россия;
А. Ашыралыев, д-р ф.-м. н., Алматы, Казахстан;	А. И. Назаров, д-р ф.-м. н., Санкт-Петербург, Россия;
С. В. Блажевич, д-р ф.-м. н., Белгород, Россия;	Е. Ю. Панов, д-р ф.-м. н., Великий Новгород, Россия;
А. Н. Беляков, д-р ф.-м. н., Белгород, Россия;	О. М. Пенкин, д-р ф.-м. н., Алматы, Казахстан;
А. Г. Брусенцев, д-р ф.-м. н., Белгород, Россия;	И. П. Половинкин, д-р ф.-м. н., Воронеж, Россия;
Ю. П. Вирченко, д-р ф.-м. н., Белгород, Россия;	Е. В. Радкевич, д-р ф.-м. н., Москва, Россия;
А. В. Глушак, д-р ф.-м. н., Белгород, Россия;	С. Е. Савотченко, д-р ф.-м. н., Белгород, Россия;
С. Б. Дабагов, д-р ф.-м. н., Москва, Россия;	А. П. Солдатов, д-р ф.-м. н., Москва, Россия;
Й. Диблик, д-р ф.-м. н., Брно, Чешская Республика;	В. Е. Федоров, д-р ф.-м. н., Челябинск, Россия;
Л. М. Кожевникова, д-р ф.-м. н., Стерлитамак, Россия;	А. А. Шибков, д-р ф.-м. н., Тамбов, Россия.
А. Н. Куликов, д-р ф.-м. н., Ярославль, Россия;	М. В. Шитикова, д-р ф.-м. н., Воронеж, Россия;
Д. М. Левин, д-р ф.-м. н., Тула, Россия;	Э. Л. Шишкина, д-р ф.-м. н., Воронеж, Россия.

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор). Выходит 4 раза в год.

Выпускающий редактор: Л. П. Котенко	Гарнитура Times. Уч. изд. л. 8,0
Корректурa Ю. В. Ивахненко	Дата выхода 30.03.2022.
Компьютерная верстка: О. В. Чернова	Оригинал-макет подготовлен отделом
Оригинал-макет: В. Б. Васильев	объединенной редакции научных журналов НИУ «БелГУ»
E-mail: <a href="mailto:vasilyev_v@bsu.edu.ru">vasilyev_v@bsu.edu.ru</a>	308015, г. Белгород, ул. Победы, 85.

## СОДЕРЖАНИЕ

### МАТЕМАТИКА

***В. В. Панков, С. А. Шабров***

О разрешимости одной краевой задачи в полосе для вырождающегося эллиптического уравнения высокого порядка 5

***G. Shaikhova, A. Syzdykova, G. Kudaibergenov***

Exact solutions of the Lakshmanan – Porsezian – Daniel equation 15

***П. Н. Маргарян***

Функция распределения расстояния между двумя точками и длины хорды для ограниченных гладких выпуклых областей 21

***А. М. Мейрманов***

Метод двухмасштабного разложения в задаче о колебаниях температуры в мерзлом грунте 28

***Т. В. Капицына***

Пространство  $H_p$  решений вырождающихся параболических уравнений 33

***Е. А. Максимова***

Об аналоге задачи Коши для одной системы уравнений в частных производных второго порядка 40

### ФИЗИКА. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

***Е. Г. Плахтий, В. С. Захвалинский***

Получение и свойства нанокристаллов  $ZnS_xSe_{1-x}$ , синтезированных методом самораспространяющегося высокотемпературного синтеза 52

***Хейдари Акбар, Зиармал Мавла Хан, С. Н. Кучеев***

Фотогальванический эффект в нематической ячейке, допированной метиловым красным 60

### ПЕРСОНАЛИИ

***Редколлегия журнала «Прикладная математика & Физика»***

К 50-летию профессора Владимира Евгеньевича Фёдорова 68



# Applied Mathematics & Physics

2022. Volume 54, № 1

*Founded in 1995. The journal is included into the List of Higher Attestation Commission of peer-reviewed scientific publications where the main scientific results of dissertations for obtaining scientific degrees of a candidate and doctor of science should be published (1.1.1 – material, complex and functional analysis, 1.1.2 – differential equations and mathematical physics, 1.3.8 – condensed matter physics). Until 2020, the journal was published with the name «Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics. Physics».*

## FOUNDER:

Federal state autonomous educational establishment of higher education  
«Belgorod National Research University».

## EDITORIAL BOARD:

**Chief Editor:** V. B. Vasilyev, Dr.Sc., Ph.D., Belgorod National Research University;  
**Deputy Editor-in-Chief:** S. M. Sitnik, Dr.Sc., Ph.D., Belgorod National Research University, Mathematics;  
A. V. Noskov, Dr.Sc., Ph.D., Belgorod National Research University, Physics. Mathematical modeling;  
**Executive Secretary:** O. V. Chernova, PhD, Belgorod National Research University.

## EDITORIAL BOARD MEMBERS:

Sh. A. Alimov, Dr.Sc., Ph.D., Tashkent, Uzbekistan;	I. S. Lomov, Dr.Sc., Ph.D., Moscow, Russia;
Yu. A. Alkhutov, Dr.Sc., Ph.D., Vladimir, Russia;	V. V. Menshih, Dr.Sc., Ph.D., Voronezh, Russia;
A. Ashyralyev, Dr.Sc., Ph.D., Almaty, Kazakhstan;	A. I. Nazarov, Dr.Sc., Ph.D., St. Petersburg, Russia;
S. V. Blazhevich, Dr.Sc., Ph.D., Belgorod, Russia;	E. Yu. Panov, Dr.Sc., Ph.D., Velikiy Novgorod, Russia;
A. N. Belyakov, Dr.Sc., Ph.D., Belgorod, Russia;	O. M. Penkin, Dr.Sc., Ph.D., Almaty, Kazakhstan;
A. G. Brusentsev, Dr.Sc., Ph.D., Belgorod, Russia;	I. P. Polovinkin, Dr.Sc., Ph.D., Voronezh, Russia;
Yu. P. Virchenko, Dr.Sc., Ph.D., Belgorod, Russia;	E. V. Radkevich, Dr.Sc., Ph.D., Moscow, Russia;
A. V. Glushak, Dr.Sc., Ph.D., Belgorod, Russia;	S. E. Savotchenko, Dr. Sc Ph.D., Belgorod, Russia;
S. B. Dabagov, Dr.Sc., Ph.D., Moscow, Russia;	A. P. Soldatov, Dr.Sc., Ph.D., Moscow, Russia;
J. Diblik, Dr.Sc., Ph.D., Brno, Czech Republic;	V. E. Fedorov, Dr.Sc., Ph.D., Chelyabinsk, Russia;
L. M. Kozhevnikova, Dr.Sc., Ph.D., Sterlitamak, Russia;	A. A. Shibkov, Dr.Sc., Ph.D., Tambov, Russia.
A. N. Kulikov, Dr.Sc., Ph.D., Yaroslavl, Russia;	M. V. Shitikova, Dr.Sc., Ph.D., Voronezh, Russia;
D. M. Levin, Dr.Sc., Ph.D., Tula, Russia;	E. L. Shishkina, Dr. Sc., Ph.D., Voronezh, Russia.

The journal has been registered at the Federal service for supervision of communications information technology and mass media (Roskomnadzor). Publication frequency: 4 /year.

Commissioning Editor L. P. Kotenko  
Proofreading Yu. V. Ivakhnenko  
Computer imposition O. V. Chernova  
Dummy layout by V. B. Vasilyev  
E-mail: vasilyev\_v@bsu.edu.ru

Typeface Times. Publisher's signature 8,0  
Date of publishing 30.03.2022.  
The layout is presented by Department of the united  
Editorial Board of Scientific Journals Belgorod  
National Research University  
Address: 85 Pobeda St., Belgorod, 308015, Russia

## CONTENTS

### MATHEMATICS

<b>V. Pankov, S. Shabrov</b>	
On solvability of a boundary value problem in a strip for a degenerate high-order elliptic equation	5
<b>G. Shaikhova, A. Syzdykova, G. Kudaibergenov</b>	
Exact solutions of the Lakshmanan – Porsezian – Daniel equation	15
<b>P. Margaryan</b>	
Distribution function of distance between two points and chord length for bounded smooth convex domains	21
<b>A. Meirmanov</b>	
Two-scale expansion method in the problem of temperature oscillations in frozen soil	28
<b>T. Kapitsyna</b>	
The space $H_p$ of solutions of degenerate parabolic equations	33
<b>E. Maksimova</b>	
On the analogue of the cauchy problem for a system of second order partial differential equations	40

### PHYSICS. MATHEMATICAL MODELING

<b>E. Plakhtii, V. Zakhvalinskii</b>	
Obtaining and properties of $ZnS_xSe_{1-x}$ nanocrystals synthesized by combustion synthesis	52
<b>H. Akbar, Z. Mawla Khan, S. Kucheev</b>	
Fotogalvanic effect in nematic cell doped by methil red	60

### PERSONNEL

<b>Editorial board of the journal «Applied Mathematics &amp; Physics»</b>	
To the 50th anniversary of Professor Vladimir Evgenievich Fedorov	68

## МАТЕМАТИКА

УДК 517.956.226  
MSC 35J70

DOI 10.52575/2687-0959-2022-54-1-5-14

### О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ В ПОЛОСЕ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

В. В. Панков, С. А. Шабров

(Статья представлена членом редакционной коллегии А. П. Солдатовым)

ФГБОУ ВО Воронежский государственный университет,  
Воронеж, 394018, Россия

E-mail: [pankovfam@mail.ru](mailto:pankovfam@mail.ru), [shabrov\\_s\\_a@math.vsu.ru](mailto:shabrov_s_a@math.vsu.ru)

**Аннотация.** В работе получены коэрцитивные априорные оценки решений краевой задачи типа задачи Дирихле в полосе для одного вырождающегося эллиптического уравнения высокого порядка, а также доказана теорема существования и единственности решения таких задач. Уравнение содержит весовые операторы, представляющие собой суперпозицию оператора умножения на функцию, которая обращается в нуль на границе, и оператора дифференцирования. На границе рассматриваются условия типа условий Дирихле. Оценки получены в специальных весовых пространствах типа пространств С. Л. Соболева.

**Ключевые слова:** априорная оценка, вырождающееся эллиптическое уравнение, весовые пространства С. Л. Соболева, весовые производные, теорема существования и единственности

**Для цитирования:** Панков В. В., Шабров С. А. 2022. О разрешимости одной краевой задачи в полосе для вырождающегося эллиптического уравнения высокого порядка. Прикладная математика & Физика. 54(1): 5–14.

DOI 10.52575/2687-0959-2022-54-1-5-14

---

### ON SOLVABILITY OF A BOUNDARY VALUE PROBLEM IN A STRIP FOR A DEGENERATE HIGH-ORDER ELLIPTIC EQUATION

Vladimir Pankov, Sergey Shabrov

(Article submitted by a member of the editorial board A. P. Soldatov)

Voronezh State University,  
Voronezh, 394018, Russia

E-mail: [pankovfam@mail.ru](mailto:pankovfam@mail.ru), [shabrov\\_s\\_a@math.vsu.ru](mailto:shabrov_s_a@math.vsu.ru)

Received January, 25, 2022

**Abstract.** In this paper we obtain coercive a priori estimates of solutions to the boundary value problem of the Dirichlet type in a strip for a degenerate high-order elliptic equation and prove existence and uniqueness of such solutions. The equation contains weight operators, which are a superposition of the multiplication operator on the function, which vanishes at the boundary, and the differentiation operator. We consider conditions of the Dirichlet type on the strip boundary. We obtain estimates in special weight spaces such as Sobolev spaces.

**Key words:** a priori estimate, degenerate elliptical equation, S. L. Sobolev's weight spaces, weight derivatives, existence and uniqueness theorem

**For citation:** Pankov Vladimir, Shabrov Sergey. 2022. On solvability of a boundary value problem in a strip for a degenerate high-order elliptic equation. Applied Mathematics & Physics. 54(1): 5–14. (in Russian) DOI 10.52575/2687-0959-2022-54-1-5-14

---

**1. Введение.** Краевые задачи для вырождающихся эллиптических уравнений используются при моделировании вырождающихся процессов, то есть процессов, в которых протекание процесса вблизи границы существенно отличается от его протекания внутри области. Краевые задачи для таких уравнений относятся к «неклассическим» задачам математической физики. Одна из главных трудностей, возникающих в теории вырождающихся эллиптических уравнений, связана с влиянием младших (в смысле теории регулярных эллиптических операторов) членов уравнения на постановку граничных задач и их коэрцитивную разрешимость.

Исследование вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка (при «степенном» характере вырождения) было начато в работах М. И. Вишика и В. В. Грушина [7], [8]. В работе В. П. Глушко

[9] были получены априорные оценки краевых задач для уравнений, вырождающихся на границе в уравнение первого порядка по одной из переменных. В работах А. Д. Баева [1, 2, 3] были сформулированы априорные оценки и теоремы о существовании решений краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка при произвольном сильном характере вырождения. В частности, были исследованы краевые задачи в полосе для уравнений высокого порядка, вырождающихся на границе области в уравнение четного порядка. В работах А. Д. Баева и С. С. Бунеева [4, 5] были исследованы краевые задачи в полосе для эллиптических уравнений высокого порядка, вырождающихся на границе в уравнение третьего порядка.

В настоящей работе получены априорные оценки решений краевых задач в полосе для уравнений высокого порядка, вырождающихся на границе в уравнение произвольного нечетного порядка по одной из переменных, а также доказана теорема существования и единственности решений таких задач. Работа является естественным продолжением исследований, начатых в работах [4, 5, 10, 11, 12, 13, 14].

**2. Основные обозначения, определения и результаты.** Пусть в полосе  $\mathbb{R}_d^n = \{(x, t) : x \in \mathbb{R}^{n-1}, 0 < t < d\}$  задана следующая краевая задача:

$$A(D_x, D_{\alpha,t}, \partial_t)v(x, t) = F(x, t), \tag{1}$$

где

$$\begin{aligned} A(D_x, D_{\alpha,t}, \partial_t)v &= L_{2m}(D_x, D_{\alpha,t})v + b(-1)^k \partial_t^{2k-1}v, \\ L_{2m}(D_x, D_{\alpha,t}) &= \sum_{|\tau|+j \leq 2m} a_{\tau j} D_x^\tau D_{\alpha,t}^j, a_{\tau j} \in \mathbb{C}, \operatorname{Im} \bar{b} a_{0,2m} = 0, \\ D_x^\tau &= i^{|\tau|} \partial_{x_1}^{\tau_1} \partial_{x_2}^{\tau_2} \dots \partial_{x_{n-1}}^{\tau_{n-1}}, \end{aligned}$$

$D_{\alpha,t}u(t)$  – так называемая весовая производная функции  $u(t)$ :

$$\begin{aligned} D_{\alpha,t}u(t) &= \frac{1}{i} \sqrt{\alpha(t)} \partial_t (\sqrt{\alpha(t)} u(t)), \quad \partial_t = \frac{\partial}{\partial t}, \\ D_{\alpha,t}^j u(t) &= D_{\alpha,t} (D_{\alpha,t}^{j-1} u(t)), \quad j = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

$\alpha(t)$  – специальная весовая функция, которая будет определена далее,  $\mathbb{C}$  – множество комплексных чисел.

На границе  $t = 0$  полосы  $\mathbb{R}_d^n$  задаются условия:

$$B_j(D_x)v|_{t=0} = \sum_{|\tau| \leq m_j} b_{\tau j} D_x^\tau \partial_t^j v|_{t=0} = G_j(x), \quad j = 1, \dots, k-1. \tag{2}$$

На границе  $t = d$  полосы  $\mathbb{R}_d^n$  заданы условия вида

$$v|_{t=d} = \partial_t v|_{t=d} = \dots = \partial_t^{m-1} v|_{t=d} = 0. \tag{3}$$

Априорные оценки решения задачи (1) – (3) будут установлены в специальных пространствах с весом.

**Определение 2.1.** Пространство  $H_{s,\alpha, \frac{2m}{2k-1}}(\mathbb{R}_d^n)$ ,  $s \geq 0, s \in \mathbb{Z}$  состоит из тех функций  $v(x, t) \in L_2(\mathbb{R}_d^n)$ , для которых конечна норма

$$\|v\|_{s,\alpha, \frac{2m}{2k-1}} = \left\{ \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{(2k-1)s}{2m} \rfloor} \left\| F_{\xi \rightarrow x}^{-1} F_\alpha^{-1} \left[ (1 + |\xi|^2 + |\eta|^2)^{\frac{1}{2} (s - \frac{2m}{2k-1} t)} F_\alpha F_{x \rightarrow \xi} \left[ \partial_t^i v(x, t) \right] \right] \right\|_{L_2(\mathbb{R}_d^n)}^2 \right\}^{\frac{1}{2}},$$

где  $\lfloor \frac{(2k-1)s}{2m} \rfloor$  – целая часть числа  $\frac{(2k-1)s}{2m}$ . Если  $s$  – натуральное число такое, что число  $\frac{(2k-1)s}{2m}$  является целым числом, то эта норма эквивалентна следующей норме

$$\|v\|_{s,\alpha, \frac{2m}{2k-1}} = \left\{ \sum_{|\tau|+j+\frac{2m}{2k-1}l \leq s} \left\| D_x^\tau D_{\alpha,t}^j \partial_t^l v \right\|^2 \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Обозначим через  $H_s(\mathbb{R}^{n-1})$  пространство С. Л. Соболева. Пусть выполнены следующие условия:

**Условие 1.** При всех  $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^n$  справедливо неравенство

$$\operatorname{Re}(\bar{b} L_{2m}(\xi, \eta)) \geq c(1 + |\xi|^2 + |\eta|^2)^m,$$

где постоянная  $c > 0$  не зависит от  $(\xi, \eta)$ .

**Условие 2.** Для некоторого числа  $s \geq 2m + \max_{1 \leq j \leq k-1} (m_j)$  функция  $\alpha(t)$  принадлежит  $C^{s-1}[0, d]$ , причем  $\alpha(0) = \alpha'(0) = 0, \alpha(t) > 0$  при  $t > 0$ .

**Условие 3.**  $\sum_{|\tau| \leq m_j} b_{\tau j} \xi^\tau \neq 0, j = 1, 2, \dots, k-1$  при всех  $\xi \in \mathbb{R}^{n-1}$ .

Основным результатом работы являются теоремы 2.1 и 2.2.

**Теорема 2.1.** Пусть  $s \geq \max \left\{ 2m, \max_{1 \leq j \leq k-1} \left( m_j + \frac{2m(j-1)}{2k-1} \right) + \frac{m}{2k-1} \right\}$  – целое число,  $m \geq 2k-1$  – целое число и выполнены условия 1 – 3, тогда для любого решения  $v(x, t)$  задачи (1) – (3), принадлежащего пространству  $H_{s, \alpha, \frac{2m}{2k-1}} \left( \mathbb{R}_d^n \right)$ , справедлива априорная оценка

$$|v|_{s, \alpha, \frac{2m}{2k-1}} \leq c \left( \|Av\|_{s-2m, \alpha, \frac{2m}{2k-1}} + \sum_{j=1}^{k-1} \|B_j v|_{t=0}\|_{s-m_j - \frac{2m(j-1)}{2k-1} - \frac{m}{2k-1}} \right), \quad (4)$$

где постоянная  $c > 0$  не зависит от  $v$ . Здесь  $\|\cdot\|_s$  – норма в пространстве Соболева – Слободецкого  $H_s \left( \mathbb{R}^{n-1} \right)$ .

**Теорема 2.2.** Пусть  $s \geq \max \left\{ 2m, \max_{1 \leq j \leq k} \left( m_j + \frac{2m(j-1)}{2k-1} \right) + \frac{m}{2k-1} \right\}$  – целое число,  $m \geq 2k-1$  – целое число, а также выполнены условия 1 – 3. Пусть  $F(x, t) \in H_{s-2m, \alpha, \frac{2m}{2k-1}} \left( \mathbb{R}_d^n \right), G_j(x) \in H_{s-m_j - \frac{2m(j-1)}{2k-1} - \frac{m}{2k-1}} \left( \mathbb{R}^{n-1} \right), j = 1, 2, \dots, k-1$ , тогда существует единственное решение  $v(x, t)$  задачи (1) – (3), принадлежащее пространству  $H_{s, \alpha, \frac{2m}{2k-1}} \left( \mathbb{R}_d^n \right)$ .

**3. Схема доказательства теоремы 2.1.** Для доказательства теоремы 2.1 преобразуем задачу (1) – (3), применив преобразование Фурье  $F_{x \rightarrow \xi}$  к уравнению, начальным и краевым условиям. Обозначим  $u(\xi, t) = F_{x \rightarrow \xi}[v], f(\xi, t) = F_{x \rightarrow \xi}[F], g(\xi) = F_{x \rightarrow \xi}[G]$ ,

$$L'_{2m}(\xi, D_{\alpha, t})u = \sum_{|\tau|+j \leq 2m} a_{\tau j} \xi^\tau D_{\alpha, t}^j u, B'_j(\xi)u = \sum_{|\tau| \leq m_j} b_{\tau j} \xi^\tau \partial_t^j u,$$

тогда после применения преобразования Фурье исходная задача (1) – (3) приобретает вид

$$L'_{2m}(\xi, D_{\alpha, t})u(\xi, t) + b(-1)^k \partial_t^{2k-1} u(\xi, t) = f(\xi, t), \quad (5)$$

$$B'_j(\xi)u(\xi, t)|_{t=0} = g_j(\xi), j = 1, \dots, k-1, \quad (6)$$

$$u|_{t=d} = \partial_t u|_{t=d} = \dots = \partial_t^{m-1} u|_{t=d} = 0. \quad (7)$$

Дополнительно введем еще одно пространство.

**Определение 3.1.** Будем говорить, что функция  $u(t)$  принадлежит пространству  $\tilde{H}_{s, \alpha, \frac{2m}{2k-1}}(0; d)$  ( $s \geq 0$  – целое число), если конечна следующая норма, зависящая от параметра  $\xi \in \mathbb{R}^{n-1}$ :

$$\|u\|_{s, \alpha, \frac{2m}{2k-1}, |\xi|} = \left\{ \sum_{k + \frac{2m}{2k-1} j \leq s} \left\| F_{\alpha}^{-1} \left[ (1 + |\xi|^2 + \eta^2)^{\frac{1}{2}k} F_{\alpha} \left[ \partial_t^j u \right] \right] \right\|_{L_2(0; d)}^2 \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Теорема 2.1 доказывается с помощью теоремы 3.1.

**Теорема 3.1.** Пусть  $s \geq \max \left\{ 2m, \max_{1 \leq j \leq k-1} \left( m_j + \frac{2m(j-1)}{2k-1} \right) + \frac{m}{2k-1} \right\}$  – целое число,  $m \geq 2k-1$  – целое число. Пусть  $f(\xi, t) \in \tilde{H}_{s-2m, \alpha, \frac{2m}{2k-1}}(0; d)$  при всех  $\xi$  и выполнены условия 1 – 3. Тогда для любого решения  $u(\xi, t)$  задачи (5) – (7), принадлежащего при всех  $\xi \in \mathbb{R}^{n-1}$  пространству  $\tilde{H}_{s, \alpha, \frac{2m}{2k-1}}(0; d)$ , справедлива априорная оценка

$$\|u\|_{s, \alpha, \frac{2m}{2k-1}, |\xi|}^2 \leq c \left( \|f\|_{s-2m, \alpha, \frac{2m}{2k-1}, |\xi|}^2 + \sum_{j=1}^{k-1} (1 + |\xi|^2)^{s-m_j - \frac{2m}{2k-1}j - \frac{m}{2k-1}} |g_j(\xi)|^2 \right) \quad (8)$$

с константой  $c > 0$ , не зависящей от  $u, f, g$ .

Для доказательства теоремы 3.1 потребуются несколько вспомогательных понятий и утверждений, в частности, интегральное преобразование  $F_{\alpha}$ , свойства весовых производных и несколько лемм.

Интегральное преобразование  $F_{\alpha}$  на функциях  $u(t) \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}_+)$  может быть записано в виде:

$$F_{\alpha}[u(t)](\eta) = \int_0^{+\infty} u(t) \exp \left( i\eta \int_t^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)} \right) \frac{dt}{\sqrt{\alpha(t)}}.$$

Это преобразование (его можно называть весовым преобразованием Фурье) было введено в работе [1]. В этом преобразовании  $\alpha(t)$  – некоторая функция со свойствами:

$$t \in \mathbb{R}_+, \alpha(+0) = \alpha'(+0) = 0, \alpha(t) > 0 \text{ при } t > 0, \\ \alpha(t) = \text{const при } t \geq d, d > 0.$$

Преобразование  $F_\alpha$  связано с преобразованием Фурье следующим образом:

$$F_\alpha[u(t)](\eta) = F_{\tau \rightarrow \eta}[u_\alpha(\tau)], \text{ где} \\ u_\alpha(\tau) = \sqrt{\alpha(t)}u(t)|_{t=\varphi^{-1}(\tau)}, \tau = \varphi(t) = -\int_t^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)}.$$

Соответственно, для  $F_\alpha$  можно построить обратное преобразование  $F_\alpha^{-1}$ , которое можно записать в виде:

$$F_\alpha^{-1}[w(\eta)](t) = \frac{1}{\sqrt{\alpha(t)}} F_{\eta \rightarrow \tau}^{-1}[w(\eta)] \Big|_{\tau=\varphi(t)},$$

где  $F_{\eta \rightarrow \tau}^{-1}$  – обратное преобразование Фурье.

Для преобразования  $F_\alpha$  доказан аналог равенства Парсеваля:

$$\|F_\alpha[u](\eta)\|_{L_2(\mathbb{R})} = \sqrt{2\pi}\|u\|_{L_2(\mathbb{R}_+)}.$$

Это дает возможность расширить  $F_\alpha$  до непрерывного преобразования из  $L_2(\mathbb{R})$  в  $L_2(\mathbb{R}_+)$ , а также рассмотреть преобразование  $F_\alpha$  не только на функциях из  $L_2(\mathbb{R}_+)$ , но и на некоторых классах обобщенных функций.

Преобразование  $F_\alpha$  и весовые производные обладают несколькими полезными свойствами.

*Свойство 1.*  $\forall u(t) \in L_2(0, d), w(t) \in L_2(0, d) : \int_{-\infty}^{+\infty} F_\alpha[u](\eta) \overline{F_\alpha[w](\eta)} d\eta = 2\pi(u, w)$ ,  $(u, w)$  – скалярное произведение в  $L_2(0, d)$ .

*Свойство 2.* Если  $u(t) \in C^s[0, d]$  и имеют место равенства

$$u(d) = \partial_t u(d) = \dots = \partial_t^{s-1} u(d) = 0, \quad (9)$$

то выполняются:

$$F_\alpha[D_{\alpha,t}^j u](\eta) = \eta^j F_\alpha[u](\eta), j = 0, \dots, s.$$

*Свойство 3.* Если  $u(t) \in C^s[0, d], w(t) \in C^s[0, d]$  и для них выполняются (9), то справедливо равенство:

$$(D_{\alpha,t}^j u(t), w(t)) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \eta^j F_\alpha[u](\eta) \overline{F_\alpha[w](\eta)} d\eta = \frac{1}{2\pi} (\eta^j F_\alpha[u](\eta), F_\alpha[w](\eta)).$$

Отметим, что  $C^\infty(0, d)$  плотно в  $H_{s,\alpha,\frac{2m}{2k-1}}$ .

Для весовых производных известны аналоги неравенства Эрлинга – Ниренберга. Сформулируем их в виде леммы и следствия из нее.

**Лемма 3.1.** Пусть  $u(t) \in C^\infty(0, d)$ , тогда для любого  $\varepsilon > 0, j = 0, \dots, s-1$  справедливо неравенство

$$\|D_{\alpha,t}^j u\|^2 \leq \varepsilon^{2(s-j)} \|D_{\alpha,t}^s u\|^2 + (c\varepsilon^{-2j} + \varepsilon^{2(s-j)}) \|u\|^2, \quad c = \text{const} > 0. \quad (10)$$

Здесь и в дальнейшем через  $\|\cdot\|$  обозначается норма в пространстве  $L_2(0, d)$ .

**Следствие 3.1.** Пусть  $u(t) \in \tilde{H}_{s,\alpha,\frac{2m}{2k-1}}(0, d)$ . Тогда  $\forall \varepsilon > 0, j = 0, 1, \dots, 2m-1, \xi \in \mathbb{R}^{n-1}$  справедливо неравенство

$$(1 + |\xi|^2)^{2m-j} \|D_{\alpha,t}^j u\|^2 \leq \varepsilon^{2(2m-j)} \|D_{\alpha,t}^{2m} u\|^2 + c(\varepsilon) (1 + |\xi|^2)^{2m} \|u\|^2, \quad (11)$$

$$c(\varepsilon) = c(\varepsilon^{-2j} + \varepsilon^{2(2m-j)}), c = \text{const} > 0,$$

не зависит от  $u, \xi$ . В общем случае неравенство имеет вид:

$$(1 + |\xi|^2)^{s-j} \|D_{\alpha,t}^j u\|^2 \leq \varepsilon^{2(s-j)} \|D_{\alpha,t}^s u\|^2 + c(\varepsilon) (1 + |\xi|^2)^s \|u\|^2, j = 0, 1, \dots, s-1,$$

$$c(\varepsilon) = c(\varepsilon^{-2j} + \varepsilon^{2(s-j)}), c = \text{const} > 0.$$

Следующие леммы напрямую используются в доказательстве теоремы 3.1. Доказательства каждой из этих лемм громоздки, поэтому доказательство будет приведено только для теорем 2.1 и 3.1.

**Лемма 3.2.** Пусть выполнены условия 1 и 2,  $m \geq 2k-1, k \geq 2$ , тогда для любой функции  $u(t) \in \widetilde{H}_{2m,\alpha,\frac{2m}{2k-1}}(0; d)$  справедлива оценка

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^m (1 + |\xi|^2)^{2m-j} \|D_{\alpha,t}^j u\|^2 &\leq c \left( \|A(\xi, D_{\alpha,t}, \partial_t) u(t)\|^2 + \right. \\ &\left. + (1 + |\xi|^2)^m \left( \sum_{j=0}^{k-2} (-1)^{k-j} \operatorname{Re} \partial_t^{2k-2-j} u(0) \overline{\partial_t^j u(0)} - \frac{1}{2} |\partial_t^{k-1} u(0)|^2 \right) \right) \end{aligned} \quad (12)$$

с константой  $c > 0$ , не зависящей от  $\xi, u$ .

**Лемма 3.3.** При выполнении условий леммы 3.2 для любой функции  $u(t) \in \widetilde{H}_{2m,\alpha,\frac{2m}{2k-1}}(0; d)$  справедлива оценка

$$\begin{aligned} \|D_{\alpha,t}^{2m} u\|^2 &\leq \varepsilon \left( \|D_{\alpha,t}^{2m} u\|^2 + \|\partial_t^{2k-1} u\|^2 \right) + \\ &+ c(\varepsilon) \left( \|A(\xi, D_{\alpha,t}, \partial_t) u\|^2 + (1 + |\xi|^2)^{2m} \|u\|^2 \right) \end{aligned} \quad (13)$$

при любом  $\varepsilon > 0$ .

**Лемма 3.4.** При выполнении условий леммы 3.2 для любой функции  $u(t) \in \widetilde{H}_{2m,\alpha,\frac{2m}{2k-1}}(0; d)$  справедлива оценка

$$\|\partial_t^{2k-1} u\|^2 \leq c \left( \|A(\xi, D_{\alpha,t}, \partial_t) u\|^2 + (1 + |\xi|^2)^{2m} \|u\|^2 \right). \quad (14)$$

**Лемма 3.5.** Пусть выполнены условия леммы 3.2 и  $2m$ кратно  $2k-1$ , тогда для любой функции  $u(t) \in \widetilde{H}_{2m,\alpha,\frac{2m}{2k-1}}(0; d)$ , являющейся решением задачи (5) – (7), имеет место оценка:

$$\|D_{\alpha,t}^{2m-qj} \partial_t^j u\|^2 \leq \varepsilon \sum_{l=0}^{2k-1} \|D_{\alpha,t}^{2m-ql} \partial_t^l u\|^2 + c(\varepsilon) \left( \|f\|^2 + (1 + |\xi|^2)^{2m} \|u\|^2 \right), \quad (15)$$

где  $q = \frac{2m}{2k-1}, j \in \mathbb{N}$  такое, что  $2m - qj > 0, \varepsilon > 0$  – любое число.

**Доказательство.** Умножим обе части уравнения (5) скалярно на функцию  $(-1)^j b D_{\alpha,t}^{2m-2qj} \partial_t^{2j} u$ , получим

$$\begin{aligned} \left( L'_{2m}(\xi, D_{\alpha,t}) u + b(-1)^k \partial_t^{2k-1} u, (-1)^j b D_{\alpha,t}^{2m-2qj} \partial_t^{2j} u \right) &= \left( f, (-1)^j b D_{\alpha,t}^{2m-2qj} \partial_t^{2j} u \right), \\ (-1)^j \left( L'_{2m}(\xi, D_{\alpha,t}) u, b D_{\alpha,t}^{2m-2qj} \partial_t^{2j} u \right) + \left( b(-1)^k \partial_t^{2k-1} u, (-1)^j b D_{\alpha,t}^{2m-2qj} \partial_t^{2j} u \right) &= \\ = \left( f, (-1)^j b D_{\alpha,t}^{2m-2qj} \partial_t^{2j} u \right), \\ (-1)^j \left( L'_{2m}(\xi, D_{\alpha,t}) u, b D_{\alpha,t}^{2m-2qj} \partial_t^{2j} u \right) + (-1)^{k+j} |b|^2 \left( \partial_t^{2k-1} u, D_{\alpha,t}^{2m-2qj} \partial_t^{2j} u \right) &= \\ = \left( f, (-1)^j b D_{\alpha,t}^{2m-2qj} \partial_t^{2j} u \right), \\ (-1)^j \operatorname{Re} \left( L'_{2m}(\xi, D_{\alpha,t}) u, b D_{\alpha,t}^{2m-2qj} \partial_t^{2j} u \right) + \\ + (-1)^{k+j} |b|^2 \operatorname{Re} \left( \partial_t^{2k-1} u, D_{\alpha,t}^{2m-2qj} \partial_t^{2j} u \right) &= \operatorname{Re} \left( f, (-1)^j b D_{\alpha,t}^{2m-2qj} \partial_t^{2j} u \right). \end{aligned} \quad (16)$$

С помощью неравенств Эрлинга – Ниренберга, Коши – Буняковского, теоремы «о следах», а также интегрирования по частям и коммутаторов операторов дифференцирования и весового дифференцирования, получим оценки для каждого из слагаемых в левой и правой частях (16):

$$\begin{aligned} (-1)^{k+j} |b|^2 \operatorname{Re} \left( \partial_t^{2k-1} u, D_{\alpha,t}^{2m-2qj} \partial_t^{2j} u \right) &= -|b|^2 \operatorname{Re} A_{k+j-1} + (-1)^{k+j} |b|^2 \operatorname{Re} \widetilde{B} = \\ &= (-1)^{k+j} |b|^2 \operatorname{Re} \widetilde{B} - \frac{|b|^2}{2} \left| D_{\alpha,t}^{m-qj} \partial_t^{k+j-1} u(d) \right|^2, \end{aligned}$$

$$\operatorname{Re} A_{k+j-1} = \frac{1}{2} \left| D_{\alpha,t}^{m-qj} \partial_t^{k+j-1} u(d) \right|^2,$$

$$\left| \widetilde{B} \right| = \left| \sum_{l=2}^{k+j-1} (-1)^l B_l \right| \leq \varepsilon \sum_{l=0}^{2k-1} \|D_{\alpha,t}^{2m-ql} \partial_t^l u\|^2 + c(\varepsilon) \|u\|^2,$$

$$\begin{aligned} (-1)^j \operatorname{Re} \left( L'_{2m}(\xi, D_{\alpha,t}) u, b D_{\alpha,t}^{2m-2qj} \partial_t^{2j} u \right) &= \\ = (-1)^j \operatorname{Re} a_{0,2m} \bar{b} \left( (-1)^j C_{j+1} + \sum_{l=2}^j (-1)^l \widehat{B}_l \right) + N_0 = \\ = (-1)^{2j} \operatorname{Re} a_{0,2m} \bar{b} \left\| D_{\alpha,t}^{2m-qj} \partial_t^j u \right\|^2 + \operatorname{Re} a_{0,2m} \bar{b} \sum_{l=2}^j (-1)^{l+j} \widehat{B}_l + N_0, \end{aligned}$$

$$N_0 \leq \varepsilon \left( \left\| D_{\alpha,t}^{2m-2qj} \partial_t^{2j} u \right\|^2 + \left\| D_{\alpha,t}^{2m} u \right\|^2 \right) + c(\varepsilon) (1 + |\xi|^2)^{2m} \|u\|^2,$$

$$\left| \operatorname{Re} a_{0,2m} \bar{b} \sum_{l=2}^j (-1)^{l+j} \widehat{B}_l \right| \leq \varepsilon \sum_{l=0}^{2k-1} \left\| D_{\alpha,t}^{2m-ql} \partial_t^l u \right\|^2 + c(\varepsilon) (1 + |\xi|^2)^{2m} \|u\|^2,$$

$$\operatorname{Re} \left( f, (-1)^j b D_{\alpha,t}^{2m-2qj} \partial_t^{2j} u \right) \leq \left| \left( f, (-1)^j b D_{\alpha,t}^{2m-2qj} \partial_t^{2j} u \right) \right| \leq \varepsilon \left\| D_{\alpha,t}^{2m-2qj} \partial_t^{2j} u \right\|^2 + c(\varepsilon) \|u\|^2.$$

Применим оценки:

$$\operatorname{Re} a_{0,2m} \bar{b} \left\| D_{\alpha,t}^{2m-qj} \partial_t^j u \right\|^2 + \operatorname{Re} a_{0,2m} \bar{b} \sum_{l=2}^j (-1)^{l+j} \widehat{B}_l + N_0 + (-1)^{k+j} |b|^2 \operatorname{Re} \widetilde{B} +$$

$$+ \frac{|b|^2}{2} \left| D_{\alpha,t}^{m-qj} \partial_t^{k+j-1} u(d) \right|^2 = \operatorname{Re} \left( f, (-1)^j b D_{\alpha,t}^{2m-2qj} \partial_t^{2j} u \right),$$

$$\operatorname{Re} a_{0,2m} \bar{b} \left\| D_{\alpha,t}^{2m-qj} \partial_t^j u \right\|^2 + \frac{|b|^2}{2} \left| D_{\alpha,t}^{m-qj} \partial_t^{k+j-1} u(d) \right|^2 \leq$$

$$\leq \varepsilon \sum_{l=0}^{2k-1} \left\| D_{\alpha,t}^{2m-ql} \partial_t^l u \right\|^2 + c(\varepsilon) \left( \|f\|^2 + (1 + |\xi|^2)^{2m} \|u\|^2 \right).$$

Лемма 3.5 доказана.

**Лемма 3.6.** Пусть выполнены условия леммы 3.2 и  $q = \frac{2m}{2k-1} > 1, q \notin \mathbb{Z}$ , тогда для любой функции  $u(t) \in \widetilde{H}_{2m,\alpha,q}(0; d)$ , являющейся решением задачи (5) – (7), имеет место оценка:

$$(1 + |\xi|^2)^{q_2 j} \left\| D_{\alpha,t}^{2m-q_1 j} \partial_t^j u \right\|^2 \leq$$

$$\leq \varepsilon \sum_{l=0}^{2k-1} (1 + |\xi|^2)^{q_2 j} \left\| D_{\alpha,t}^{2m-q_1 l} \partial_t^l u \right\|^2 + c(\varepsilon) \left( \|f\|^2 + (1 + |\xi|^2)^{2m} \|u\|^2 \right), \quad (17)$$

$j = 1, 2, \dots : 2m - qj > 0, \varepsilon > 0$  – любое число,  $q_1$  – целая часть  $q, q_2$  – дробная часть  $q$ .

**Доказательство леммы 3.6** очень похоже на доказательство леммы 3.5 и заключается в поэтапной оценке слагаемых выражения, полученного путем применения скалярного произведения (5) на  $(-1)^j b (1 + |\xi|^2)^{2q_2} D_{\alpha,t}^{2m-2q_1 j} \partial_t^{2j} u$ .

**Лемма 3.7.** При выполнении условий леммы 3.2 справедлива оценка

$$\|u\|_{s,\alpha,\frac{2m}{2k-1},|\xi|}^2 \leq c \left( \|f\|_{s-2m,\alpha,\frac{2m}{2k-1},|\xi|}^2 + (1 + |\xi|^2)^m \sum_{j=0}^{k-2} (-1)^{k-j} \operatorname{Re} \partial_t^{2k-2-j} u(0) \overline{\partial_t^j u(0)} \right). \quad (18)$$

**Доказательство теоремы 3.1.** В доказательстве потребуется

**Утверждение 1.** При  $x, y \in \mathbb{R}, x \geq 0, y \geq 0$  и произвольном  $\varepsilon > 0$  верно неравенство  $xy \leq \varepsilon x^2 + \frac{1}{\varepsilon} y^2$

**Доказательство утверждения 1.**  $(\sqrt{\varepsilon}x - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}y)^2 \geq 0, \varepsilon x^2 - 2xy + \frac{1}{\varepsilon}y^2 \geq 0, \varepsilon x^2 + \frac{1}{\varepsilon}y^2 \geq 2xy \geq xy$ . Утверждение 1 доказано.

Оценим  $\left| (1 + |\xi|^2)^m \sum_{j=0}^{k-2} (-1)^{k-j} \operatorname{Re} \partial_t^{2k-2-j} u(0) \overline{\partial_t^j u(0)} \right|$ . Применим утверждение 1 для оценки, получим:

$$\left| (1 + |\xi|^2)^m \sum_{j=0}^{k-2} (-1)^{k-j} \operatorname{Re} \partial_t^{2k-2-j} u(0) \overline{\partial_t^j u(0)} \right| \leq$$

$$\leq (1 + |\xi|^2)^m \sum_{j=0}^{k-2} \left| \partial_t^{2k-2-j} u(0) \right| \left| \partial_t^j u(0) \right| \leq$$

$$\leq (1 + |\xi|^2)^m \sum_{j=0}^{k-2} \left( \varepsilon \left| \partial_t^{2k-2-j} u(\xi, 0) \right|^2 + \frac{1}{\varepsilon} \left| \partial_t^j u(\xi, 0) \right|^2 \right)$$

для любого  $\varepsilon > 0$ . Выбирая в этом неравенстве  $\varepsilon = \varepsilon_1 (1 + |\xi|^2)^{-m+qj+\frac{1}{2}q}$ , где  $q = \frac{2m}{2k-1}$ , получим оценку

$$\left| (1 + |\xi|^2)^m \sum_{j=0}^{k-2} (-1)^{k-j} \operatorname{Re} \partial_t^{2k-2-j} u(0) \overline{\partial_t^j u(0)} \right| \leq$$

$$\leq \sum_{j=0}^{k-2} \left( \varepsilon_1 (1 + |\xi|^2)^{qj+\frac{q}{2}} \left| \partial_t^{2k-2-j} u(\xi, 0) \right|^2 + \frac{1}{\varepsilon_1} (1 + |\xi|^2)^{2m-qj-\frac{q}{2}} \left| \partial_t^j u(\xi, 0) \right|^2 \right), \quad (19)$$

где  $\varepsilon_1$  – любое число.

Рассмотрим  $(\partial_t^{2k-1-j} u, \partial_t^{2k-2-j} u)$ . Будем производить интегрирование по частям, пользуясь краевыми условиями (7):

$$\begin{aligned} (\partial_t^{2k-1-j} u, \partial_t^{2k-2-j} u) &= \int_0^d \partial_t^{2k-1-j} u(t) \overline{\partial_t^{2k-2-j} u(t)} dt = |\text{интегрируем по частям}| = \\ &= \partial_t^{2k-2-j} u(t) \overline{\partial_t^{2k-2-j} u(t)} \Big|_0^d - \int_0^d \partial_t^{2k-2-j} u(t) \overline{\partial_t^{2k-1-j} u(t)} dt = \left| \partial_t^{2k-2-j} u(t) \right|_0^d - \\ &= - \int_0^d \partial_t^{2k-1-j} u(t) \overline{\partial_t^{2k-2-j} u(t)} dt = - \left| \partial_t^{2k-2-j} u(0) \right|^2 - \int_0^d \partial_t^{2k-1-j} u(t) \overline{\partial_t^{2k-2-j} u(t)} dt = \\ &= - \left| \partial_t^{2k-2-j} u(0) \right|^2 - \overline{(\partial_t^{2k-1-j} u, \partial_t^{2k-2-j} u)}. \end{aligned}$$

Отсюда:

$$\left| \partial_t^{2k-2-j} u(0) \right|^2 = -2\text{Re} \left( \partial_t^{2k-1-j} u, \partial_t^{2k-2-j} u \right) = 2 \left| \text{Re} \left( \partial_t^{2k-1-j} u, \partial_t^{2k-2-j} u \right) \right|. \quad (20)$$

Подставим (20) в (19):

$$\begin{aligned} &\left| (1 + |\xi|^2)^m \sum_{j=0}^{k-2} (-1)^{k-j} \text{Re} \partial_t^{2k-2-j} u(0) \overline{\partial_t^j u(0)} \right| \leq \\ &\leq \sum_{j=0}^{k-2} \left( 2\varepsilon_1 (1 + |\xi|^2)^{qj + \frac{q}{2}} \left| \text{Re} \left( \partial_t^{2k-1-j} u, \partial_t^{2k-2-j} u \right) \right| + \frac{1}{\varepsilon_1} (1 + |\xi|^2)^{2m - qj - \frac{q}{2}} \left| \partial_t^j u(\xi, 0) \right|^2 \right) \leq \\ &\leq \sum_{j=0}^{k-2} \left( 2\varepsilon_1 (1 + |\xi|^2)^{qj + \frac{q}{2}} \left| \left( \partial_t^{2k-1-j} u, \partial_t^{2k-2-j} u \right) \right| + \frac{1}{\varepsilon_1} (1 + |\xi|^2)^{2m - qj - \frac{q}{2}} \left| \partial_t^j u(\xi, 0) \right|^2 \right). \end{aligned}$$

Применяем для оценки первого слагаемого в правой части этого неравенства утверждение 1 и неравенство Коши – Буняковского, получим оценку:

$$\begin{aligned} &\left| (1 + |\xi|^2)^m \sum_{j=0}^{k-2} (-1)^{k-j} \text{Re} \partial_t^{2k-2-j} u(0) \overline{\partial_t^j u(0)} \right| \leq \\ &\leq \sum_{j=0}^{k-2} \left( 2\varepsilon_1 (1 + |\xi|^2)^{qj + \frac{q}{2}} \left( \varepsilon_2 \left\| \partial_t^{2k-1-j} u \right\|^2 + \frac{1}{\varepsilon_2} \left\| \partial_t^{2k-2-j} u \right\|^2 \right) + \frac{1}{\varepsilon_1} (1 + |\xi|^2)^{2m - qj - \frac{q}{2}} \left| \partial_t^j u(\xi, 0) \right|^2 \right). \end{aligned}$$

Выберем в этом неравенстве  $\varepsilon_2 = \sqrt{\varepsilon_1} (1 + |\xi|^2)^{-\frac{q}{2}}$ , получим оценку

$$\begin{aligned} &\left| (1 + |\xi|^2)^m \sum_{j=0}^{k-2} (-1)^{k-j} \text{Re} \partial_t^{2k-2-j} u(0) \overline{\partial_t^j u(0)} \right| \leq \\ &\leq \sum_{j=0}^{k-2} \left( 2\varepsilon_1^{\frac{3}{2}} (1 + |\xi|^2)^{qj} \left\| \partial_t^{2k-1-j} u \right\|^2 + 2\sqrt{\varepsilon_1} (1 + |\xi|^2)^{qj + q} \left\| \partial_t^{2k-2-j} u \right\|^2 + \frac{1}{\varepsilon_1} (1 + |\xi|^2)^{2m - qj - \frac{q}{2}} \left| \partial_t^j u(\xi, 0) \right|^2 \right). \end{aligned} \quad (21)$$

Применим (21) и неравенство Эрлинга – Ниренберга в правой части неравенства (18), получим:

$$\begin{aligned} &\|u\|_{2m, \alpha, \frac{2m}{2k-1}, |\xi|}^2 \leq \\ &\leq c \left( \|Au\|^2 + \varepsilon_2 \left( \left\| \partial_t^{2k-1} u \right\|^2 + (1 + |\xi|^2)^{2m} \|u\|^2 \right) + c(\varepsilon_2) \sum_{j=0}^{k-2} (1 + |\xi|^2)^{2m - \frac{2m}{2k-1}j - \frac{m}{2k-1}} \left| \partial_t^j u(\xi, 0) \right|^2 \right). \end{aligned}$$

Выбирая достаточно малое  $\varepsilon_2 > 0$ , получим:

$$\|u\|_{2m, \alpha, \frac{2m}{2k-1}, |\xi|}^2 \leq c_1 \left( \|Au\|^2 + \sum_{j=0}^{k-2} (1 + |\xi|^2)^{2m - \frac{2m}{2k-1}j - \frac{m}{2k-1}} \left| \partial_t^j u(\xi, 0) \right|^2 \right). \quad (22)$$

Заметим теперь, что в силу условия 3

$$|u(\xi, 0)| = \left| \frac{\sum_{|\tau| \leq m_j} b_{\tau j} \xi^\tau \partial_t^{j-1} u|_{t=0}}{\sum_{|\tau| \leq m_j} b_{\tau j} \xi^\tau} \right| \leq c(1 + |\xi|)^{-m_j} |B_j(\xi) u|_{t=0} \leq c |g_j(\xi)|.$$

Применяя это неравенство в (22), получим оценку

$$\|u\|_{2m, \alpha, \frac{2m}{2k-1}, |\xi|}^2 \leq c \left( \|f\|^2 + \sum_{j=1}^{k-1} (1 + |\xi|^2)^{2m - m_j - \frac{2m}{2k-1}j - \frac{m}{2k-1}} |g_j(\xi)|^2 \right).$$

Таким образом, доказана оценка (8) при  $s = 2m$ . Справедливость оценки (8) при  $s > 2m$  доказывается методами, аналогичными методам работы [1]. Теорема 3.1 доказана.

**Доказательство теоремы 2.1.** Пусть решение  $v(x, t)$  задачи (1) – (3) принадлежит следующему пространству  $H_{s, \alpha, \frac{2m}{2k-1}}(\mathbb{R}_d^n)$ . Тогда функция  $u(\xi, t) = F_{x \rightarrow \xi}[v(x, t)]$  при почти всех  $\xi \in \mathbb{R}^n$  принадлежит пространству  $\tilde{H}_{s, \alpha, \frac{2m}{2k-1}}(0; d)$  и является решением задачи (5) – (7). Следовательно, в силу теоремы 3.1 для функции  $u(\xi, t)$  справедлива оценка (8). Интегрируя эту оценку по  $\xi \in \mathbb{R}^{n-1}$ , получим неравенство

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \|u\|_{s, \alpha, \frac{2m}{2k-1}, |\xi|}^2 d\xi \leq c \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left( \|f\|_{s-2m, \alpha, \frac{2m}{2k-1}, |\xi|}^2 + \sum_{j=1}^{k-1} (1 + |\xi|^2)^{s-mj - \frac{2m}{2k-1}j - \frac{m}{2k-1}} |g_j(\xi)|^2 \right) d\xi, \quad (23)$$

где  $f(\xi, t) = F_{x \rightarrow \xi}[F(x, t)]$ ,  $g(\xi) = F_{x \rightarrow \xi}[G(x)]$ .

Из неравенства (23) с помощью равенства Парсеваля получим справедливость априорной оценки (4) в теореме 2.1.

**4. Схема доказательства теоремы 2.2.** Утверждение теоремы 2.2 вытекает из следующей теоремы.

**Теорема 4.1.** Пусть  $s \geq \max \left\{ 2m, \max_{1 \leq j \leq k} \left( m_j + \frac{2m(j-1)}{2k-1} \right) + \frac{m}{2k-1} \right\}$  – целое число,  $m \geq 2k - 1$  – целое число. Пусть  $f(\xi, t) \in \tilde{H}_{s-2m, \alpha, \frac{2m}{2k-1}}(0; d)$  и выполнены условия 1 – 3, тогда для любых  $\xi \in \mathbb{R}^{n-1}$  существует единственное решение задачи (1) – (3), принадлежащее пространству  $\tilde{H}_{s, \alpha, \frac{2m}{2k-1}}(0; d)$ .

Доказательство этой теоремы проводится сведением задачи (1) – (3) к нелокальной задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром, применением априорной оценки (4) из теоремы 2.1 и метода продолжения по параметру.

#### Список литературы

1. Баев А. Д. 1982. Вырождающиеся эллиптические уравнения высокого порядка и связанные с ними псевдодифференциальные операторы. Доклады Академии наук. 265(5): 1044–1046.
2. Баев А. Д. 2008. Качественные методы теории краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений. Воронеж, Воронеж. гос. ун-т. 240.
3. Баев А. Д. 2008. Об общих краевых задачах в полупространстве для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка. Доклады Академии наук. 422(6): 727–728.
4. Баев А. Д., Бунеев С. С. 2012. Априорная оценка решений одной краевой задачи в полосе для вырождающегося эллиптического уравнения высокого порядка. Вестник Воронежского государственного университета. Сер. Физика. Математика. (1): 81–92.
5. Баев А. Д., Бунеев С. С. 2013. Об одном классе краевых задач в полосе для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка. Доклады Академии Наук. 448(1): 7–8.
6. Баев А. Д., Панков В. В., Харченко В. Д. 2018. Об априорной оценке решений краевой задачи в полосе для вырождающегося эллиптического уравнения высокого порядка. Вестник Воронежского государственного университета. Серия Физика. Математика. (4): 162–172.
7. Вишик М. И., Грушин В. В. 1969. Краевые задачи для эллиптических уравнений, вырождающихся на границе области. Математический сб. 80(112,4): 455–491.
8. Вишик М. И., Грушин В. В. 1970. Вырождающиеся эллиптические дифференциальные и псевдодифференциальные операторы. Успехи математических наук. 25(4): 29–56.
9. Глушко В. П. 1979. Априорные оценки решений краевых задач для одного класса вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка. ВИНТИ. 1048(79): 47.
10. Панков В. В. 2019. Априорная оценка решений одной краевой задачи в полосе для вырождающегося эллиптического уравнения. Современные методы теории функций и смежные проблемы: материалы Международной конференции Воронежская зимняя математическая школа (28 января - 2 февраля 2019 г.): 199–203.
11. Панков В. В. 2019. Об априорной оценке решений одной краевой задачи в полосе для вырождающегося эллиптического уравнения высокого порядка. Современные методы теории краевых задач: материалы международной конференции Воронежская весенняя математическая школа «Понтрягинские чтения XXX» (3-9 мая 2019 г.): 220–224.

12. Панков В. В., Баев А. Д. 2020. Об априорной оценке решений одной краевой задачи для вырождающегося эллиптического уравнения. *Современные методы теории краевых задач: материалы международной конференции Воронежская весенняя математическая школа «Понtryгинские чтения XXXI»* (3-9 мая 2020 г.): 161–165.
13. Панков В. В., Баев А. Д. 2020. О корректности одной краевой задачи в полосе для вырождающегося эллиптического уравнения. *Современные методы теории краевых задач: материалы международной конференции Воронежская весенняя математическая школа «Понtryгинские чтения XXXI»* (3-9 мая 2020 г.): 154–158.
14. Панков В. В., Баев А. Д. 2020. О существовании решения одной краевой задачи для вырождающегося эллиптического уравнения. *Современные методы теории краевых задач: материалы международной конференции Воронежская весенняя математическая школа «Понtryгинские чтения XXXI»* (3-9 мая 2020 г.): 158–161.

### References

1. Baev A. D. 1982. Vyrozhdayushhiesya ellipticheskie uravneniya vysokogo poryadka i svyazannye s nimi psevdodifferencial'nye operatory. [Degenerate high-order elliptic equations and associated pseudo-differential operators]. *Doklady Akademii nauk – Doklady Mathematics*. 265(5): 1044–1046.
2. Baev A. D. 2008. Kachestvennyye metody teorii kraevykh zadach dlya vyrozhdayushhixsya ellipticheskix uravneniy. [Qualitative methods of the theory of regional tasks for the degenerating elliptic equations]. *Voronezh*: 240.
3. Baev A. D. 2008. Ob obshhix kraevykh zadachax v poluprostranstve dlya vyrozhdayushhixsya ellipticheskix uravneniy vysokogo poryadka. [On General boundary value problems in a half-space for degenerate high-order elliptic equations]. *Doklady Akademii nauk – Doklady Mathematics*. 422 (6): 727–728.
4. Baev A. D., Buneev S. S. 2012. Apriornaya ocenka resheniy odnoy kraevoy zadachi v polose dlya vyrozhdayushhegosya ellipticheskogo uravneniya vysokogo poryadka. [A priori estimate of solutions of a boundary value problem in strip for degenerate elliptic equations of high order]. *Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*. (1): 81–92.
5. Baev A. D., Buneev S. S. 2013. Ob odnom klasse kraevykh zadach v polosedlya vyrozhdayushhixsya ellipticheskix uravneniy vysokogo poryadka. [On a class of boundary value problems in the band for degenerate high-order elliptic equations]. *Doklady Akademii nauk – Doklady Mathematics*. 448(1): 7–8.
6. Baev A. D., Pankov V. V., Harchenko V. D. 2018. Ob apriornoy ocenke resheniy kraevoy zadachi v polose dlya vyrozhdayushhegosya ellipticheskogo uravneniya vysokogo poryadka. [On an a priori estimate of the solutions of a boundary value problem in a strip for a degenerate high-order elliptic equation]. *Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*. (4): 162–172.
7. Vishik M. I., Grushin V. V. 1969. Kraevye zadachi dlya ellipticheskix uravneniy, vyrozhdayushhixsya na granice oblasti. [Boundary value problems for elliptic equations degenerating at the boundary of the domain]. *Matematicheskij sbornik – Sbornik: Mathematics*. 80(112, 4): 455–491.
8. Vishik M. I., Grushin V. V. 1970. Vyrozhdayushhiesya ellipticheskie differencial'nye i psevdodifferencial'nye operatory. [Degenerate elliptic differential and pseudo-differential operators]. *Uspexi matematicheskix nauk – Russian Mathematical Surveys*. 25(4): 29–56.
9. Glushko V. P. 1979. Apriornye ocenki resheniy kraevykh zadach dlya odnogo klassa vyrozhdayushhixsya ellipticheskix uravneniy vysokogo poryadka. [A priori estimates of solutions of boundary value problems for a class of degenerate high-order elliptic equations]. *VINITI*. 1048(79): 47.
10. Pankov V. V. 2019. Apriornaya ocenka resheniy odnoy kraevoy zadachi v polose dlya vyrozhdayushhegosya ellipticheskogo uravneniya [An a priori estimate of the solutions of a boundary value problem in a strip for a degenerate elliptic equation]. *Sovremennyye metody teorii funkciy i smezhnyye problemy: materialy Mezhdunarodnoy konferencii Voronezhskaya zimnyaya matematicheskaya shkola (28 yanvarya–2 fevralya 2019)*: 199–203.
11. Pankov V. V. 2019. Ob apriornoy ocenke resheniy kraevoy zadachi v polose dlya vyrozhdayushhegosya ellipticheskogo uravneniya vysokogo poryadka. [On an a priori estimate of the solutions of a boundary value problem in a strip for a degenerate high-order elliptic equation]. *Sovremennyye metody teorii kraevykh zadach: materialy mezhdunarodnoy konferencii Voronezhskaya vesenniyaya matematicheskaya shkola «Pontryaginskie chteniya XXX»* (3-9 maya 2019): 220–224.

12. Pankov V. V., Baev A. D. 2020. Ob apriornoyj ocenke resheniyj odnoy kraevoyj zadachi dlya vyrozhdajushhegosya ellipticheskogo uravneniya. [On an a priori estimate of the solutions of a boundary value problem for a degenerate elliptic equation]. *Sovremennye metody teorii kraevykh zadach: materialy mezhdunarodnoj konferencii Voronezhskaya vesennaya matematicheskaya shkola «Pontryaginskie chteniya XXXI»* (3-9 maya 2020): 161–165.
13. Pankov V. V., Baev A. D. 2020. O korrektnosti odnoj kraevoyj zadachi v polose dlja vyrozhdajushhegosya jellipticheskogo uravnenija. [On correctness of a boundary value problem for a degenerate elliptic equation]. *Sovremennye metody teorii kraevykh zadach: materialy mezhdunarodnoj konferencii Voronezhskaya vesennaya matematicheskaya shkola «Pontryaginskie chteniya XXXI»* (3-9 maya 2020): 154-158.
14. Pankov V. V., Baev A. D. 2020. O sushhestvovanii reshenija odnoj kraevoyj zadachi dlja vyrozhdajushhegosya jellipticheskogo uravnenija. [On existence of a solution to a boundary value problem for a degenerate elliptic equation]. *Sovremennye metody teorii kraevykh zadach: materialy mezhdunarodnoj konferencii Voronezhskaya vesennaya matematicheskaya shkola «Pontryaginskie chteniya XXXI»* (3-9 maya 2020): 158–161.

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Получена 25.01.2022

---

#### СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

**Панков Владимир Владимирович** – ассистент кафедры математического анализа математического факультета Воронежского государственного университета

 <http://orcid.org/0000-0002-9695-5148>

Университетская площадь, 1, Воронеж, 394018, Россия

E-mail: [pankovfam@mail.ru](mailto:pankovfam@mail.ru)

**Шабров Сергей Александрович** – доктор физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой математического анализа математического факультета Воронежского государственного университета

 <http://orcid.org/0000-0001-8549-5062>

Университетская площадь, 1, Воронеж, 394018, Россия

E-mail: [shabrov\\_s\\_a@math.vsu.ru](mailto:shabrov_s_a@math.vsu.ru)

#### INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

**Vladimir Pankov** – teaching assistant of the Department of Mathematical Analysis, Voronezh State University, Voronezh, Russia

**Sergey Shabrov** – PhD, Associate Professor, Head of the Division of Mathematical Analysis of the Department of Mathematics, Voronezh State University, Voronezh, Russia

УДК 517.9  
MSC 35C07, 35C08, 35Q60

DOI 10.52575/2687-0959-2022-54-1-15-20

## EXACT SOLUTIONS OF THE LAKSHMANAN – PORSEZIAN – DANIEL EQUATION

Gaukhar Shaikhova, Arailym Syzdykova, Gaziz Kudaibergenov

(Article submitted by a member of the editorial board Yu. P. Virchenko)

L. N. Gumilyov Eurasian National University,  
Nur-Sultan, 010000, Kazakhstan  
E-mail: [g.shaikhova@gmail.com](mailto:g.shaikhova@gmail.com)  
Received January, 31, 2022

**Abstract.** In this paper, the Lakshmanan – Porsezian – Daniel (LPD) equation is considered. This equation is integrable and admits Lax pair. The LPD equation is the generalization of the nonlinear Schrodinger (NLS) equation and described by Ablowitz-Kaup-Newell-Segur (AKNS) system. Using the sine-cosine method and the hyperbolic tangent method a variety of new exact solutions are obtained. These methods are effective tools for searching exact solutions of nonlinear partial differential equations in mathematical physics. The obtained solutions are found to be important for the explanation of some practical physical problems.

**Key words:** Lakshmanan – Porsezian – Daniel equation, AKNS, Lax pair, sine-cosine method, hyperbolic tangent method

**Acknowledgements:** This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP09057947).

**For citation:** Shaikhova Gaukhar, Syzdykova Arailym, Kudaibergenov Gaziz. 2022. Exact solutions of the Lakshmanan – Porsezian – Daniel equation. Applied Mathematics & Physics. 54(1): 15–20. (in English)

DOI 10.52575/2687-0959-2022-54-1-15-20

---

## ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ЛАКШМАНАНА – ПОРСЕЗИАНА – ДАНИЕЛЯ

Г. Н. Шайхова, А. М. Сыздыкова, Г. Кудайбергенов

(Статья представлена членом редакционной коллегии Ю. П. Вирченко)

Евразийский национальный университет имени Л. Н. Гумилева,  
г. Нур-Султан, 010000, Казахстан,  
E-mail: [g.shaikhova@gmail.com](mailto:g.shaikhova@gmail.com)

**Аннотация.** В данной работе рассмотрено уравнение Лакшманана – Порсезиана – Даниэля (ЛПД). Это уравнение интегрируемо и имеет пару Лакса. Уравнение ЛПД является обобщением нелинейного уравнения Шредингера и описывается системой Абловица – Каупа – Ньюэлла–Сегура (АКНС). В работе применены метод синус-косинуса и метод гиперболического тангенса, получены различные новые точные решения. Предложенные методы являются эффективными инструментами для поиска точных решений нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных математической физики. Кроме того, полученные решения важны для объяснения некоторых практических задач физики.

**Ключевые слова:** уравнение Лакшманана – Порсезиана – Даниэля, АКНС, пара Лакса, метод синус-косинуса, метод гиперболического тангенса

**Благодарности:** Работа выполнена при финансовой поддержке Комитета науки Министерства образования и науки Республики Казахстан (номер гранта AP09057947).

**Для цитирования:** Шайхова Г. Н., Сыздыкова А. М., Кудайбергенов Г. 2022. Точные решения уравнения Лакшманана – Порсезиана – Даниэля. Прикладная математика & Физика. 54(1): 15–20. (in Russian)

DOI 10.52575/2687-0959-2022-54-1-15-20

---

**1. Introduction.** Nonlinear partial differential equations are broadly used to model nonlinear processes in many areas of mathematical biology, physics, chemistry [18, 1]. As a result of interest in those problems, different analytical solution methods as Hirota’s bilinear method [6, 7], Darboux transformation method [10, 21], sine-cosine method [19, 17], hyperbolic tangent method [11, 12] and so on were developed.

Studying the nonlinear excitations of the spin chains with competing bilinear and biquadratic interactions attracts is the main activity in mathematics and physics. For this reason, Lakshmanan, Porsezian, and Daniel had been studied the integrable properties of a classical one-dimensional isotropic biquadratic Heisenberg spin chain

(HSC) in its continuum limit by using a geometric method in Refs. [8, 15]. Researchers suggested the integrable Lakshmanan – Porsezian – Daniel (LPD) equation which has the higher-order terms (dispersions and nonlinear effects).

The LPD equation is given by [8, 15],

$$iq_t + q_{xx} + 2|q|^2q + \gamma[q_{xxxx} + 8|q|^2q_{xx} + 2q^2q_{xx}^* + 4q|q_x|^2 + 6q^*q_x^2 + 6|q|^4q] = 0, \quad (1)$$

where  $q(x, t)$  is a complex valued function of the spatial coordinate  $x$  and the time  $t$ ,  $\gamma$  is real constant, the subscripts denote the partial derivatives with respect to the variables  $x, t$ . The LPD equation is NLS type equation with higher-order nonlinear terms, such as fourth-order dispersion, second-order dispersion, cubic and quintic nonlinearities. It also describes the effect of higher-order molecular excitations that introduce quadruple–quadruple coefficients and is a candidate of integrable. Moreover, the LPD equation demonstrates many integrability properties like Painleve analysis, Lax pair representation, soliton solutions, and so on. More clearly the LPD equation describes the nonlinear effect in Refs. [8, 15, 5].

In the case  $\gamma = 0$ , (1) reduces into nonlinear Schrodinger equation

$$iq_t + q_{xx} + 2|q|^2q = 0. \quad (2)$$

Linear eigenvalue problem for (1), which is obtained through the Ablowitz – Kaup – Newell–Segur (AKNS) system [2, 13, 14], is written as

$$\Psi_x = A\Psi, \quad (3)$$

$$\Psi_t = B\Psi, \quad (4)$$

with eigenfunctions as  $\Psi = (\Psi_1, \Psi_2)^T$ , and

$$A = -i\lambda\sigma_3 + M, \quad (5)$$

$$B = [3i\gamma|q|^4 + i|q|^2 + i\gamma(q^*q_{xx} + qq^*_{xx} - |q_x|^2) + 8i\gamma\lambda^4 + 2\lambda\gamma(qq_x^* - q_xq^*) - 2i\lambda^2(2\gamma|q|^2 + 1)]\sigma_3 - 8\gamma\lambda^3M - 4i\gamma\lambda^2\sigma_3M_x + 6i\gamma M^2M_x\sigma_3 + i\sigma_3M_x + i\gamma\sigma_3M_{xxx} + 2\lambda(M + \gamma M_{xx} - 2\gamma M^3), \quad (6)$$

where

$$M = \begin{pmatrix} 0 & q \\ -q^* & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$\lambda$  is a parameter, so that

$$A_t - B_x + AB - BA = 0, \quad (7)$$

is equivalent to (1). Matrices  $A, B$  are Lax pair of (1). The compatibility condition (7) can be understood also as the zero curvature condition.

Optical solitons for the local (classical) LPD equation are found by modified simple equation method in [3], by the trial equation method [4], and by Riccati equation approach [16]. Dynamical behavior of solution in integrable nonlocal LPD equation is studied via Darboux transformation in Ref. [9]. Very recently inverse scattering transform has been applied in Ref. [20] where generalized nonlocal Lakshmanan – Porsezian – Daniel (LPD) equation is introduced, and its integrability as an infinite dimensional Hamilton dynamic system is established.

In this paper, we construct some new exact solutions for (1) by analytical methods. We study the LPD equation (1) by the sine-cosine method and the hyperbolic tangent method. Such methods have been widely applied for a wide variety of nonlinear partial differential equations to obtain different kind of solutions.

**2. Sine–cosine Method.** Due to in (1)  $q(x, t)$  is complex function we apply the next transformation

$$q(x, t) = e^{i\alpha t}u(x), \quad (8)$$

to convert the LPD equation (1) into ordinary differential equation (ODE). After substitution (8) into (1) and making some algebraic manipulation we obtain ODE

$$-\alpha u + u'' + 2u^3 + \gamma[u'''' + 10u^2u'' + 10u(u')^2 + 6u^5] = 0, \quad (9)$$

where  $\alpha, \gamma$  are real constants and a prime mark denotes a derivative by independent variable  $x$ . In the next subsection, (9) can be solved by applying the sine-cosine method in variable  $x$ .

**2.1 The Sine Solution.** According to method the sine solution of the (9) can be found by transformation

$$u(x) = \lambda \sin^\beta(\mu x), \quad (10)$$

where parameters  $\lambda$ ,  $\mu$  and  $\beta$  will be determined, and  $\mu$  is wave number. We use (10) and its derivatives

$$u'(x) = \lambda\beta\mu \sin^{\beta-1}(\mu x) \cos(\mu x), \quad (11)$$

$$u''(x) = -\mu^2\beta^2\lambda \sin^\beta(\mu x) + \mu^2\lambda\beta(\beta-1) \sin^{\beta-2}(\mu x), \quad (12)$$

$$u'''(x) = \mu^4\beta^4\lambda \sin^\beta(\mu x) - 2\mu^4\lambda\beta(\beta-1)(\beta^2-2\beta+2) \sin^{\beta-2}(\mu x) + \mu^4\lambda\beta(\beta-1)(\beta-2)(\beta-3) \sin^{\beta-4}(\mu x). \quad (13)$$

After substitution of Eqs. (10)-(13) into (9) we obtain

$$\begin{aligned} & -\alpha\lambda \sin^\beta(\mu x) - \mu^2\beta^2\lambda \sin^\beta(\mu x) + \mu^2\lambda\beta(\beta-1) \sin^{\beta-2}(\mu x) + \\ & + 2\lambda^3 \sin^{3\beta}(\mu x) + \gamma\mu^4\beta^4\lambda \sin^\beta(\mu x) - 2\gamma\mu^4\lambda\beta(\beta-1)(\beta^2-2\beta+2) \sin^{\beta-2}(\mu x) + \\ & + \gamma\mu^4\lambda\beta(\beta-1)(\beta-2)(\beta-3) \sin^{\beta-4}(\mu x) - 20\lambda^3\gamma\mu^2\beta^2 \sin^{3\beta}(\mu x) + \\ & + 10\mu^2\lambda^3\gamma\beta(\beta-1) \sin^{3\beta-2}(\mu x) + 10\lambda^3\gamma\mu^2\beta^2 \sin^{3\beta-2}(\mu x) + 6\lambda^5\gamma \sin^{5\beta}(\mu x) = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Using the balance method, by equating the exponents of  $\sin^k$  from (14) we find  $\beta$ :

$$\beta - 4 = 5\beta \quad \Rightarrow \quad \beta = -1. \quad (15)$$

Substitute (15) in (14) we obtain

$$\begin{aligned} & -\alpha\lambda \sin^{-1}(\mu x) - \mu^2\lambda \sin^{-1}(\mu x) + 2\mu^2\lambda \sin^{-3}(\mu x) + 2\lambda^3 \sin^{-3}(\mu x) + \\ & + \gamma\mu^4\lambda \sin^{-1}(\mu x) - 20\gamma\mu^4\lambda \sin^{-3}(\mu x) + 24\gamma\mu^4\lambda \sin^{-5}(\mu x) - 20\lambda^3\gamma\mu^2 \sin^{-3}(\mu x) + \\ & + 20\mu^2\lambda^3\gamma \sin^{-5}(\mu x) + 10\lambda^3\gamma\mu^2 \sin^{-5}(\mu x) + 6\lambda^5\gamma \sin^{-5}(\mu x) = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

From (16) we have the next system

$$\sin^{-1}(\mu x) : -\alpha\lambda - \mu^2\lambda + \gamma\mu^4\lambda = 0, \quad (17)$$

$$\sin^{-3}(\mu x) : 2\mu^2\lambda + 2\lambda^3 - 20\gamma\mu^4\lambda - 20\lambda^3\gamma\mu^2 = 0, \quad (18)$$

$$\sin^{-5}(\mu x) : 24\gamma\mu^4\lambda + 20\mu^2\lambda^3\gamma + 10\lambda^3\gamma\mu^2 + 6\lambda^5\gamma = 0. \quad (19)$$

Solving the last system yields

$$\alpha = -\frac{9}{100\gamma}, \quad \mu = \pm\sqrt{\frac{1}{10\gamma}}, \quad \lambda = \pm\sqrt{-\frac{1}{10\gamma}}. \quad (20)$$

Substituting (20) into (10) and then obtained expression into (8) we obtain the solitary wave solution and the periodic solution

$$q_1(x, t) = \pm\sqrt{-\frac{1}{10\gamma}} \operatorname{csch}\left(\sqrt{\frac{1}{10\gamma}}x\right) e^{-\frac{9i}{100\gamma}t}, \quad \gamma < 0, \quad (21)$$

$$q_1(x, t) = \pm\sqrt{-\frac{1}{10\gamma}} \operatorname{csc}\left(\sqrt{\frac{1}{10\gamma}}x\right) e^{-\frac{9i}{100\gamma}t}, \quad \gamma > 0.$$

**2.2 The Cosine Solution.** According to method the cosine solution of the (9) can be found by transformation

$$u(x) = \lambda \cos^\beta(\mu x), \quad (22)$$

where parameters  $\lambda$ ,  $\mu$  and  $\beta$  will be determined, and  $\mu$  is wave number. We use (22) and its derivatives

$$u'(x) = -\lambda\beta\mu \cos^{\beta-1}(\mu x) \sin(\mu x), \quad (23)$$

$$u''(x) = -\mu^2\beta^2\lambda \cos^\beta(\mu x) + \mu^2\lambda\beta(\beta-1) \cos^{\beta-2}(\mu x), \quad (24)$$

$$u'''(x) = \mu^4\beta^4\lambda \cos^\beta(\mu x) - 2\mu^4\lambda\beta(\beta-1)(\beta^2-2\beta+2) \cos^{\beta-2}(\mu x) + \mu^4\lambda\beta(\beta-1)(\beta-2)(\beta-3) \cos^{\beta-4}(\mu x). \quad (25)$$

Substituting Eqs. (22)-(25) into (9) we obtain

$$\begin{aligned} & -\alpha\lambda \cos^\beta(\mu x) - \mu^2 \beta^2 \lambda \cos^\beta(\mu x) + \mu^2 \lambda \beta(\beta - 1) \cos^{\beta-2}(\mu x) + \\ & + 2\lambda^3 \cos^{3\beta}(\mu x) + \gamma \mu^4 \beta^4 \lambda \cos^\beta(\mu x) - 2\gamma \mu^4 \lambda \beta(\beta - 1)(\beta^2 - 2\beta + 2) \cos^{\beta-2}(\mu x) + \\ & + \gamma \mu^4 \lambda \beta(\beta - 1)(\beta - 2)(\beta - 3) \cos^{\beta-4}(\mu x) - 20\lambda^3 \gamma \mu^2 \beta^2 \cos^{3\beta}(\mu x) + \\ & + 10\mu^2 \lambda^3 \gamma \beta(\beta - 1) \cos^{3\beta-2}(\mu x) + 10\lambda^3 \gamma \mu^2 \beta^2 \cos^{3\beta-2}(\mu x) + 6\lambda^5 \gamma \cos^{5\beta}(\mu x) = 0. \end{aligned} \quad (26)$$

From (26) by using the balance method we find  $\beta$ :

$$\beta - 4 = 5\beta \quad \Rightarrow \quad \beta = -1. \quad (27)$$

After substitution (27) in (26) we obtain

$$\begin{aligned} & -\alpha\lambda \cos^{-1}(\mu x) - \mu^2 \lambda \cos^{-1}(\mu x) + 2\mu^2 \lambda \cos^{-3}(\mu x) + 2\lambda^3 \cos^{-3}(\mu x) + \\ & + \gamma \mu^4 \lambda \cos^{-1}(\mu x) - 20\gamma \mu^4 \lambda \cos^{-3}(\mu x) + 24\gamma \mu^4 \lambda \cos^{-5}(\mu x) - 20\lambda^3 \gamma \mu^2 \cos^{-3}(\mu x) + \\ & + 20\mu^2 \lambda^3 \gamma \cos^{-5}(\mu x) + 10\lambda^3 \gamma \mu^2 \cos^{-5}(\mu x) + 6\lambda^5 \gamma \cos^{-5}(\mu x) = 0. \end{aligned} \quad (28)$$

From (28) we have the next system of equations

$$\cos^{-1}(\mu x) : -\alpha\lambda - \mu^2 \lambda + \gamma \mu^4 \lambda = 0, \quad (29)$$

$$\cos^{-3}(\mu x) : 2\mu^2 \lambda + 2\lambda^3 - 20\gamma \mu^4 \lambda - 20\lambda^3 \gamma \mu^2 = 0, \quad (30)$$

$$\cos^{-5}(\mu x) : 24\gamma \mu^4 \lambda + 20\mu^2 \lambda^3 \gamma + 10\lambda^3 \gamma \mu^2 + 6\lambda^5 \gamma = 0. \quad (31)$$

Solving the last system yields

$$\alpha = -\frac{9}{100\gamma}, \quad \mu = \pm \sqrt{\frac{1}{10\gamma}}, \quad \lambda = \pm \sqrt{-\frac{1}{10\gamma}}. \quad (32)$$

Substituting (32) into (22) and then obtained expression into (8) we obtain the solitary wave solution and the periodic solution

$$q_2(x, t) = \pm \sqrt{-\frac{1}{10\gamma}} \operatorname{sech}\left(\sqrt{\frac{1}{10\gamma}} x\right) e^{-\frac{9i}{100\gamma} t}, \quad \gamma < 0, \quad (33)$$

$$q_2(x, t) = \pm \sqrt{-\frac{1}{10\gamma}} \operatorname{sec}\left(\sqrt{\frac{1}{10\gamma}} x\right) e^{-\frac{9i}{100\gamma} t}, \quad \gamma > 0.$$

**3. The Hyperbolic Tangent Method.** In this section, we use the hyperbolic tangent method as presented by Malfliet [11, 12] to ODE (9)

$$-\alpha u + u'' + 2u^3 + \gamma[u'''' + 10u^2 u'' + 10u(u')^2 + 6u^5] = 0. \quad (34)$$

According to method, we apply the following series expansion,

$$u(x) = S(Y) = \sum_{k=0}^M a_k Y^k, \quad (35)$$

where  $Y = \tanh(\mu x)$  and  $M$  is a positive integer, in most cases, that will be determined. To determine the parameter  $M$ , we usually balance the linear terms of highest-order derivative in the resulting equation with the highest-order nonlinear terms. For our (34), balancing the nonlinear term  $u^5$ , which has the exponent  $5M$ , with the highest order derivative  $u''''$ , which has the exponent  $M + 4$ , yields  $5M = M + 4$  that gives  $M = 1$ . Then, the hyperbolic tangent method allows us to use the substitution

$$u(x) = a_0 + a_1 Y, \quad (36)$$

where

$$Y = \tanh(\mu x),$$

and derivatives by method are

$$\frac{du}{dx} = \mu(1 - Y^2) \frac{du}{dY}, \quad (37)$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} = -2\mu^2 Y(1 - Y^2) \frac{du}{dY} + \mu^2(1 - Y^2)^2 \frac{d^2u}{dY^2}, \quad (38)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^4u}{dx^4} = & -8\mu^4 Y(1 - Y^2)(3Y^2 - 1) \frac{du}{dY} + 4\mu^4(1 - Y^2)^2(9Y^2 - 2) \frac{d^2u}{dY^2} - \\ & -12\mu^4 Y(1 - Y^2)^3 \frac{d^3u}{dY^3} + \mu^4(1 - Y^2)^4 \frac{d^4u}{dY^4}, \end{aligned} \quad (39)$$

and so on. After substitution Eqs. (36)-(39) into (34), collecting the coefficients of  $Y^n$ , and solving the resulting system with the aid of Maple, we find the following result:

$$a_0 = 0, \quad a_1 = \pm \sqrt{-\frac{1}{5\gamma}}, \quad \mu = \pm \frac{\sqrt{5}}{10\sqrt{\gamma}}, \quad \alpha = -\frac{4}{25\gamma}. \quad (40)$$

By substituting Eqs. (40) into (36), and then the obtained expression into (8), we can obtain the periodic solution and the solitary wave solution for the LPD equation (1) in the following forms

$$q_3(x, t) = \pm e^{-\frac{4i}{25\gamma}t} \sqrt{-\frac{1}{5\gamma}} \tan\left(\frac{\sqrt{5}}{10\sqrt{\gamma}}x\right), \quad \gamma < 0, \quad (41)$$

$$q_3(x, t) = \pm e^{-\frac{4i}{25\gamma}t} \sqrt{-\frac{1}{5\gamma}} \tanh\left(\frac{\sqrt{5}}{10\sqrt{\gamma}}x\right), \quad \gamma > 0. \quad (42)$$

**4. Conclusion.** In this work, the Lakshmanan – Porsezian – Daniel equation was studied by the sine-cosine method and the hyperbolic tangent method. We obtained the periodic solutions and the solitary wave solutions. These methods can also be performed to other nonlinear partial differential equations in mathematical physics.

### References

1. Ablowitz M. J., Segur H. 1981. Solitons and Inverse Scattering Transform. Philadelphia, PA: SIAM.
2. Ablowitz M. J., Kaup D. J., Newell A. C., Segur H. 1974. The inverse scattering transform-Fourier analysis for nonlinear problems. Studies in Applied Mathematics, 53: 249-315.
3. Biswas A., Yildirim Y., Yasar E., Zhou O., Moshokoac S., Belic M. 2018. Optical solitons for Lakshmanan – Porsezian – Daniel model by modified simple equation method. Optik, 160: 24–32.
4. Biswas A., Yildirim Y., Yasar E., Alqahtani R. 2018. Optical solitons for Lakshmanan – Porsezian – Daniel model with dual-dispersion by trial equation method. Optik, 168: 432–439.
5. Daniel M., Porsezian K., Lakshmanan M. 1993. On the integrable models of the higher order water wave equation. Physics Letters A, 174(3): 237–240.
6. Hirota R. 2004. The Direct Method in Soliton Theory. Cambridge University Press, Cambridge.
7. Kutum B. B., Yesmakhanova K. R., Shaikhova G. N. 2019. The differential-q-difference 2D Toda equation: bilinear form and soliton solutions. Journal of Physics: Conference Series, 1391(012122): 1–6.
8. Lakshmanan M., Porsezian K., Daniel M. 1988. Effect of discreteness on the continuum limit of the Heisenberg spin chain. Physics Letters A, 133(9): 483–488.
9. Liu W., Qiu D., Wu Zh., He J. 2016. Dynamical Behavior of Solution in Integrable Nonlocal Lakshmanan – Porsezian – Daniel Equation. Communications in Theoretical Physics, 65: 671–676.
10. Matveev V. 1979. Darboux transformation and explicit solutions of the Kadomtcev-Petviashvili equation, depending on functional parameters. Lett. Math. Phys., 3(3): 213–216.
11. Malfliet W. 1992. Solitary wave solutions of nonlinear wave equations. American Journal of Physics, 60(7): 650–654.

12. Malfliet W. 1996. The tanh method: I. Exact solutions of nonlinear evolution and wave equations. *Physica Scripta*, 54: 563–568.
13. Matveev V. B, Smirnov A. O. 2018. AKNS and NLS hierarchies, MRW solutions,  $P_n$  breathers, and beyond. *Journal of Mathematical Physics*, 59: 091419.
14. Matveev V. B, Smirnov A. O. 2015. Some comments on continuous symmetries of AKNS hierarchy equations and their solutions, arXiv:1509.01134: 1-10.
15. Porsezian K., Daniel M., Lakshmanan M. 1992. On the integrability aspects of the one-dimensional classical continuum isotropic Heisenberg spin chain. *Journal of Mathematical Physics*, 33: 1807–1816.
16. Qarnia A., Ebaid A., Alshaeryc A., Bakodah H. O., Biswas A., Khand S., Ekicig M., Zhouh O., Moshokoaf S. P., Beli M. 2019. Optical solitons for Lakshmanan – Porsezian – Daniel model by Riccati equation approach. *Optik*, 182: 922–929.
17. Shaikhova G. N., Kutum B. B., Altaybaeva A. B., Rakhimzhanov B. K. 2019. Exact solutions for the (3+1)-dimensional Kudryashov-Sinelshchikov equation. *Journal of Physics: Conference Series*, 1416: 012030(1-7).
18. Wazwaz A. 2009. *Partial differential equations and solitary waves theory*. Springer: 479–502.
19. Wazwaz A. M. 2004. The sine-cosine method for obtaining solutions with compact and noncompact structures. *Applied Mathematics and Computation*, 159(2): 559–576.
20. Wei-Kang Xun, Shou-Fu Tian, Tian-Tian Zhang. 2020. Inverse scattering transform for the integrable nonlocal Lakshmanan – Porsezian – Daniel equation. *Discrete & Continuous Dynamical Systems - B*.
21. Yesmakhanova K. R., Shaikhova G. N., Bekova G. Myrzakulov R. 2017. Darboux transformation and soliton solution for the (2+1)-dimensional complex modified Korteweg-de Vries equations. *Journal of Physics: Conference Series*, 936(012045): 1–7.

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Получена 25.01.2022

#### INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

**Gaukhar Shaikhova** – PhD, associate professor, Department of General and Theoretical Physics, L. N. Gumilyov Eurasian National University

 <http://orcid.org/0000-0002-0819-5338>

K. Munaitpasova street, 22, Nur-Sultan, 010000, Kazakhstan

E-mail: [g.shaikhova@gmail.com](mailto:g.shaikhova@gmail.com)

**Araylym Syzdykova** – Researcher at L. N. Gumilyov Eurasian National University

 <http://orcid.org/0000-0002-8999-6566>

K. Munaitpasova street, 22, Nur-Sultan, 010000, Kazakhstan

E-mail: [syzdykova\\_am@mail.ru](mailto:syzdykova_am@mail.ru)

**Gaziz Kudaibergenov** – undergraduate student, Department of General and Theoretical Physics, L. N. Gumilyov Eurasian National University

K. Munaitpasova street, 22, Nur-Sultan, 010000, Kazakhstan

E-mail: [gaziz.kudaibergenov.01@bk.ru](mailto:gaziz.kudaibergenov.01@bk.ru)

#### СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

**Шайхова Гаухар Нурлыбековна** – PhD, доцент кафедры Общей и теоретической физики Евразийского национального университета имени Л. Н. Гумилева, Нур-Султан, республика Казахстан

**Сыздыкова Арайлым Мерекеновна** – научный сотрудник Евразийского национального университета имени Л. Н. Гумилева, Нур-Султан, республика Казахстан

**Газиз Кудайбергенев** – бакалавр кафедры Общей и теоретической физики Евразийского национального университета имени Л. Н. Гумилева, Нур-Султан, республика Казахстан

УДК 519.213.1  
MSC 11K38

DOI 10.52575/2687-0959-2022-54-1-21-27

## ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РАССТОЯНИЯ МЕЖДУ ДВУМЯ ТОЧКАМИ И ДЛИНА ХОРДЫ ДЛЯ ОГРАНИЧЕННЫХ ГЛАДКИХ ВЫПУКЛЫХ ОБЛАСТЕЙ

П. Н. Маргарян

(Статья представлена членом редакционной коллегии О. В. Черновой)

Ереванский государственный университет,  
Ереван, 0025, республика Армения

E-mail: [pargev.margaryan@ysumail.am](mailto:pargev.margaryan@ysumail.am)

**Аннотация.** В работе рассматриваются функции распределения расстояния между двумя независимыми и равномерно распределенными случайными точками, а также длины хорды в ограниченном выпуклом домене  $D$ . Используя ряд известных фактов, выводится явный вид функций распределения длины хорды и плотности для ограниченных выпуклых доменов с гладкой границей, а также явный вид функции плотности расстояния между двумя точками.

**Ключевые слова:** длина хорды, ограниченная выпуклая область, распределения, расстояние между двумя точками, функции плотности, явный вид функции плотности расстояния

**Для цитирования:** Маргарян П. Н. 2020. Функция распределения расстояния между двумя точками и длина хорды для ограниченных гладких выпуклых областей. Прикладная математика & Физика. 54(1): 21–27.

DOI 10.52575/2687-0959-2022-54-1-21-27

---

## DISTRIBUTION FUNCTION OF DISTANCE BETWEEN TWO POINTS AND CHORD LENGTH FOR BOUNDED SMOOTH CONVEX DOMAINS

P. N. Margaryan

(Article submitted by a member of the editorial board O. V. Chernova)

Yerevan State University,  
Yerevan, 0025, Republic of Armenia  
E-mail: [pargev.margaryan@ysumail.am](mailto:pargev.margaryan@ysumail.am)  
Received February, 10, 2022

**Abstract.** In the paper we consider the distribution functions of two independent and uniformly distributed random points, as well as the chord length in a bounded convex domain  $D$ . Using a number of known facts, we derive the explicit form of the distribution functions of the chord length and density for bounded convex bodies with a smooth boundary, as well as the explicit form of the density function of the distance between two points.

**Key words:** chord length, bounded convex domain, distribution, distance between two points, density functions, explicit form, of the distance density function

**For citation:** Margaryan P. N. 2020. Distribution function of distance between two points and chord length for bounded smooth convex domains. Applied Mathematics & Physics. 54(1): 21–27. (in Russian) DOI 10.52575/2687-0959-2022-54-1-21-27

---

**Введение.** Актуальность темы заключается в том, что именно посредством функции распределения длины хорды происходит опознание одной из интересных задач стохастической геометрии: опознание ограниченных выпуклых тел, пересекающих через случайные  $k$  – плоскости ( $k$ -flats). В работе обсужден случай  $k = 1, n = 2$ . В зависимости от направления изучение выпуклых тел по функции распределения длины хорды эквивалентно изучению его ковариограмм. Все это является задачами геометрической томографии, так как в зависимости от направления функция распределения длины хорды – это вероятность того, что пересечение  $X$ -прямо в фиксированном направлении с телом  $D$  меньше или равно  $y$ .

Цель работы – обсудить распределение длины хорды и расстояния между двумя точками в  $\mathbb{R}^2$ , получить их явный вид для частного случая.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

- проанализировать и оценить имеющиеся научно-исследовательские материалы;
- обсудить и выявить некоторые вопросы, связанные с функциями плотности и распределения расстояния между двумя точками и длины хорды;

- получить явный вид функции плотности расстояния между двумя точками ограниченных выпуклых областей с гладкой границей;
- получить явный вид функции плотности и распределения длины хорды ограниченных выпуклых областей с гладкой границей;
- получить функции плотности и распределения длины хорды для случая круга.

**Материалы и методы исследования.** Проанализированы и обработаны соответствующие научные источники. Когда рассматривается такой случай, при котором направление известно (зафиксировано), то это называется распределением длины хорды, зависящим от направления. А если рассматривается случай, когда направление не зафиксировано, то это называется распределением длины хорды независимо от направления. Последнее и послужило предметом обсуждения данной работы. В работе применены методы теории вероятностей интегральной и стохастической геометрии.

**1. Функция распределения расстояния между двумя точками.** Функция распределения расстояния  $r$  между двумя независимыми и равномерно распределенными случайными точками в ограниченной выпуклой области  $\mathbf{D}$  формулируется следующим образом:

$$T(x) = \mathbf{P}(r \leq x) = \frac{1}{\|\mathbf{D}\|^2} \mu(P_1, P_2 \in \mathbf{D} : r \leq x) = \frac{1}{\|\mathbf{D}\|^2} \iint_{r \leq x} dP_1 dP_2,$$

где  $\mu$  – мера Лебега,  $d$  – диаметр тела  $\mathbf{D} : d = \text{diam}(\mathbf{D}) = \max\{\rho(x, y) : x, y \in \mathbf{D}\}$ , где  $\rho(x, y)$  расстояние между точками  $x$  и  $y$ ,  $r = \rho(P_1, P_2)$ , а  $\|\mathbf{D}\|$  площадь области.

В работе [3] дан следующий результат:

$$T(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \frac{\pi x^2}{\|\mathbf{D}\|} + \left[ \frac{8\|\mathbf{D}\|}{|\partial\mathbf{D}|^2} - \frac{2x^2}{\|\mathbf{D}\|} \right] \arcsin\left(\frac{x|\partial\mathbf{D}|}{4\|\mathbf{D}\|}\right) & 0 < x \leq d \\ 1 & x \geq d \end{cases} \quad (1)$$

где  $|\partial\mathbf{D}|$  периметр области. Предполагается, что граница области свободна от угловых точек и отрезков. Таким образом, для ограниченных выпуклых областей с гладкой границей функция распределения расстояния между двумя точками дается отмеченной выше (1) формулой. Обозначим функцию плотности расстояния между двумя точками  $t(x)$ . Для  $t(x)$  получим удобный вид.

**Утверждение 1.** Для ограниченных выпуклых областей с гладкой границей функция плотности расстояния между двумя точками имеет следующий вид:

$$t(x) = \begin{cases} 0 & x \notin (0, d) \\ \frac{2}{\|\mathbf{D}\|} \left\{ \pi x - 2x \arcsin\left[\frac{x|\partial\mathbf{D}|}{4\|\mathbf{D}\|}\right] - \frac{x^2|\partial\mathbf{D}|}{2\|\mathbf{D}\|} \left[ 1 - \left(\frac{x|\partial\mathbf{D}|}{4\|\mathbf{D}\|}\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right\} & 0 < x \leq d \end{cases} \quad (2)$$

**Доказательство.** Из (1) формулой получим:

$$\begin{aligned} t(x) &= \frac{d}{dx} [T(x)] = \frac{2\pi x}{\|\mathbf{D}\|} - \frac{4x}{\|\mathbf{D}\|} \arcsin\left[\frac{x|\partial\mathbf{D}|}{4\|\mathbf{D}\|}\right] + \frac{|\partial\mathbf{D}|}{4\|\mathbf{D}\|} \left[ \frac{8\|\mathbf{D}\|}{|\partial\mathbf{D}|^2} - \frac{2x^2}{\|\mathbf{D}\|} \right] \left[ 1 - \left(\frac{x|\partial\mathbf{D}|}{4\|\mathbf{D}\|}\right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \\ &\quad - \left[ \frac{3x^2|\partial\mathbf{D}|}{16\|\mathbf{D}\|^3} + \frac{1}{2|\partial\mathbf{D}|\|\mathbf{D}\|} \right] [16\|\mathbf{D}\|^2 - x^2|\partial\mathbf{D}|^2]^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + x|\partial\mathbf{D}|^2 \left[ \frac{x^3|\partial\mathbf{D}|}{16\|\mathbf{D}\|^3} + \frac{x}{2|\partial\mathbf{D}|\|\mathbf{D}\|} \right] [16\|\mathbf{D}\|^2 - x^2|\partial\mathbf{D}|^2]^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{2}{\|\mathbf{D}\|} \left\{ \pi x - 2x \arcsin\left[\frac{x|\partial\mathbf{D}|}{4\|\mathbf{D}\|}\right] + \frac{|\partial\mathbf{D}|}{4\|\mathbf{D}\|} \left[ \frac{4\|\mathbf{D}\|^2}{|\partial\mathbf{D}|^2} - x^2 \right] \left[ 1 - \left(\frac{x|\partial\mathbf{D}|}{4\|\mathbf{D}\|}\right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \right. \\ &\quad \left. - \left[ \frac{3x^2|\partial\mathbf{D}|}{32\|\mathbf{D}\|^2} + \frac{1}{4|\partial\mathbf{D}|} \right] [16\|\mathbf{D}\|^2 - x^2|\partial\mathbf{D}|^2]^{\frac{1}{2}} \right. \\ &\quad \left. + x|\partial\mathbf{D}|^2 \left[ \frac{x^3|\partial\mathbf{D}|}{32\|\mathbf{D}\|^2} + \frac{x}{4|\partial\mathbf{D}|} \right] [16\|\mathbf{D}\|^2 - x^2|\partial\mathbf{D}|^2]^{-\frac{1}{2}} \right\} =: \frac{2}{\|\mathbf{D}\|} \left\{ Q_1 + Q_2 \right\}, \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$Q_1 = \pi x - 2x \arcsin\left[\frac{x|\partial\mathbf{D}|}{4\|\mathbf{D}\|}\right],$$

$$Q_2 = \frac{|\partial \mathbf{D}|}{4\|\mathbf{D}\|} \left[ \frac{4\|\mathbf{D}\|^2}{|\partial \mathbf{D}|^2} - x^2 \right] \left[ 1 - \left( \frac{x|\partial \mathbf{D}|}{4\|\mathbf{D}\|} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} - \left[ \frac{3x^2 |\partial \mathbf{D}|}{32\|\mathbf{D}\|^2} + \frac{1}{4|\partial \mathbf{D}|} \right] [16\|\mathbf{D}\|^2 - x^2 |\partial \mathbf{D}|^2]^{\frac{1}{2}} + \\ + x |\partial \mathbf{D}|^2 \left[ \frac{x^3 |\partial \mathbf{D}|}{32\|\mathbf{D}\|^2} + \frac{x}{4|\partial \mathbf{D}|} \right] [16\|\mathbf{D}\|^2 - x^2 |\partial \mathbf{D}|^2]^{-\frac{1}{2}}.$$

Изучим  $Q_2$ :

$$Q_2 = \left[ 1 - \left( \frac{x|\partial \mathbf{D}|}{4\|\mathbf{D}\|} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{|\partial \mathbf{D}|}{4\|\mathbf{D}\|} \left[ \frac{4\|\mathbf{D}\|^2}{|\partial \mathbf{D}|^2} - x^2 \right] \left[ 1 - \left( \frac{x|\partial \mathbf{D}|}{4\|\mathbf{D}\|} \right)^2 \right]^{-1} - 4\|\mathbf{D}\| \left[ \frac{3x^2 |\partial \mathbf{D}|^2 + 8\|\mathbf{D}\|^2}{32\|\mathbf{D}\|^2 |\partial \mathbf{D}|} \right] + \right. \\ \left. + \left[ \frac{x^3 |\partial \mathbf{D}|^2 + 8\|\mathbf{D}\|^2 x}{32\|\mathbf{D}\|^2 |\partial \mathbf{D}|} \right] \cdot (x |\partial \mathbf{D}|^2) (4\|\mathbf{D}\|) [16\|\mathbf{D}\|^2 - x^2 |\partial \mathbf{D}|^2]^{-1} \right\} =: \left[ 1 - \left( \frac{x|\partial \mathbf{D}|}{4\|\mathbf{D}\|} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \{Q_3 - Q_4\}, \quad (4)$$

где

$$Q_3 = \frac{|\partial \mathbf{D}|}{4\|\mathbf{D}\|} \left[ \frac{4\|\mathbf{D}\|^2}{|\partial \mathbf{D}|^2} - x^2 \right] \left[ 1 - \left( \frac{x|\partial \mathbf{D}|}{4\|\mathbf{D}\|} \right)^2 \right]^{-1} + \left[ \frac{x^3 |\partial \mathbf{D}|^2 + 8\|\mathbf{D}\|^2 x}{32\|\mathbf{D}\|^2 |\partial \mathbf{D}|} \right] \cdot (x |\partial \mathbf{D}|^2) (4\|\mathbf{D}\|) [16\|\mathbf{D}\|^2 - x^2 |\partial \mathbf{D}|^2]^{-1}, \\ Q_4 = 4\|\mathbf{D}\| \left[ \frac{3x^2 |\partial \mathbf{D}|^2 + 8\|\mathbf{D}\|^2}{32\|\mathbf{D}\|^2 |\partial \mathbf{D}|} \right].$$

Изучим  $Q_3$ :

$$Q_3 = \frac{4\|\mathbf{D}\|}{|\partial \mathbf{D}|} \left[ \frac{4\|\mathbf{D}\|^2 - x^2 |\partial \mathbf{D}|^2}{(4\|\mathbf{D}\|)^2 - (x|\partial \mathbf{D}|)^2} \right] + \left[ \frac{x^2 |\partial \mathbf{D}|^2 + 8\|\mathbf{D}\|^2}{(4\|\mathbf{D}\|)^2 - (x|\partial \mathbf{D}|)^2} \right] \cdot \frac{4\|\mathbf{D}\| x^2 |\partial \mathbf{D}|^2}{32\|\mathbf{D}\|^2 |\partial \mathbf{D}|} \\ = \frac{4\|\mathbf{D}\|}{|\partial \mathbf{D}|} \left\{ \left[ \frac{4\|\mathbf{D}\|^2 - x^2 |\partial \mathbf{D}|^2}{(4\|\mathbf{D}\|)^2 - (x|\partial \mathbf{D}|)^2} \right] + \left[ \frac{x^2 |\partial \mathbf{D}|^2 + 8\|\mathbf{D}\|^2}{\|\mathbf{D}\|^2 - (x|\partial \mathbf{D}|)^2} \right] \cdot \frac{x^2 |\partial \mathbf{D}|^2}{32\|\mathbf{D}\|^2} \right\} \\ = \frac{4\|\mathbf{D}\|}{|\partial \mathbf{D}|} \left\{ \frac{1}{2} \cdot \left[ \frac{8\|\mathbf{D}\|^2 - 2x^2 |\partial \mathbf{D}|^2}{\|\mathbf{D}\|^2 - (x|\partial \mathbf{D}|)^2} \right] + \left[ \frac{x^2 |\partial \mathbf{D}|^2 + 8\|\mathbf{D}\|^2}{\|\mathbf{D}\|^2 - (x|\partial \mathbf{D}|)^2} \right] \cdot \frac{x^2 |\partial \mathbf{D}|^2}{32\|\mathbf{D}\|^2} \right\} \\ = \frac{4\|\mathbf{D}\|}{|\partial \mathbf{D}|} \left\{ \frac{\|\mathbf{D}\|^2 - (x|\partial \mathbf{D}|)^2 - (x^2 |\partial \mathbf{D}|^2 + 8\|\mathbf{D}\|^2)}{2[\|\mathbf{D}\|^2 - (x|\partial \mathbf{D}|)^2]} + \left[ \frac{x^2 |\partial \mathbf{D}|^2 + 8\|\mathbf{D}\|^2}{\|\mathbf{D}\|^2 - (x|\partial \mathbf{D}|)^2} \right] \cdot \frac{x^2 |\partial \mathbf{D}|^2}{32\|\mathbf{D}\|^2} \right\} \\ = \frac{4\|\mathbf{D}\|}{|\partial \mathbf{D}|} \left\{ \frac{1}{2} + \left[ \frac{x^2 |\partial \mathbf{D}|^2 + 8\|\mathbf{D}\|^2}{(4\|\mathbf{D}\|)^2 - (x|\partial \mathbf{D}|)^2} \right] \cdot \left[ \frac{x^2 |\partial \mathbf{D}|^2}{32\|\mathbf{D}\|^2} - \frac{1}{2} \right] \right\} \\ = \frac{4\|\mathbf{D}\|}{|\partial \mathbf{D}|} \left\{ \frac{1}{2} + \left[ \frac{x^2 |\partial \mathbf{D}|^2 + 8\|\mathbf{D}\|^2}{(4\|\mathbf{D}\|)^2 - (x|\partial \mathbf{D}|)^2} \right] \cdot \left[ \frac{x^2 |\partial \mathbf{D}|^2 - (4\|\mathbf{D}\|)^2}{32\|\mathbf{D}\|^2} \right] \right\} \\ = \frac{4\|\mathbf{D}\|}{|\partial \mathbf{D}|} \left\{ \frac{1}{2} - \frac{x^2 |\partial \mathbf{D}|^2 + 8\|\mathbf{D}\|^2}{32\|\mathbf{D}\|^2} \right\} = 4\|\mathbf{D}\| \left\{ \frac{1}{2|\partial \mathbf{D}|} - \frac{x^2 |\partial \mathbf{D}|^2 + 8\|\mathbf{D}\|^2}{32\|\mathbf{D}\|^2 |\partial \mathbf{D}|} \right\}.$$

Отсюда получим:

$$Q_3 - Q_4 = 4\|\mathbf{D}\| \left\{ \frac{1}{2|\partial \mathbf{D}|} - \frac{x^2 |\partial \mathbf{D}|^2 + 8\|\mathbf{D}\|^2}{32\|\mathbf{D}\|^2 |\partial \mathbf{D}|} \right\} - 4\|\mathbf{D}\| \left[ \frac{3x^2 |\partial \mathbf{D}|^2 + 8\|\mathbf{D}\|^2}{32\|\mathbf{D}\|^2 |\partial \mathbf{D}|} \right] \\ = 4\|\mathbf{D}\| \left\{ \frac{1}{2|\partial \mathbf{D}|} - \frac{x^2 |\partial \mathbf{D}|^2 + 8\|\mathbf{D}\|^2 + 3x^2 |\partial \mathbf{D}|^2 + 8\|\mathbf{D}\|^2}{32\|\mathbf{D}\|^2 |\partial \mathbf{D}|} \right\} \\ = 4\|\mathbf{D}\| \left\{ \frac{1}{2|\partial \mathbf{D}|} - \frac{x^2 |\partial \mathbf{D}|^2 + 4\|\mathbf{D}\|^2}{8\|\mathbf{D}\|^2 |\partial \mathbf{D}|} \right\} = 4\|\mathbf{D}\| \left\{ \frac{4\|\mathbf{D}\|^2 - x^2 |\partial \mathbf{D}|^2 - 4\|\mathbf{D}\|^2}{8\|\mathbf{D}\|^2 |\partial \mathbf{D}|} \right\} = -\frac{x^2 |\partial \mathbf{D}|}{2\|\mathbf{D}\|}.$$

Следовательно, из (4) получим:

$$Q_2 = \left[ 1 - \left( \frac{x|\partial \mathbf{D}|}{4\|\mathbf{D}\|} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \cdot \left\{ Q_3 - Q_4 \right\} = -\frac{x^2 |\partial \mathbf{D}|}{2\|\mathbf{D}\|} \left[ 1 - \left( \frac{x|\partial \mathbf{D}|}{4\|\mathbf{D}\|} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (5)$$

Из выражений (3) и (5) получим (2):

$$t(x) = \frac{2}{\|\mathbf{D}\|} \left\{ Q_1 + Q_2 \right\} = \frac{2}{\|\mathbf{D}\|} \left\{ \pi x - 2x \arcsin \left[ \frac{x|\partial\mathbf{D}|}{4\|\mathbf{D}\|} \right] - \frac{x^2|\partial\mathbf{D}|}{2\|\mathbf{D}\|} \left[ 1 - \left( \frac{x|\partial\mathbf{D}|}{4\|\mathbf{D}\|} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right\}.$$

■

**2. Функция распределения длины хорды.** Пространство ориентированных прямых в евклидовой плоскости обозначим буквой  $\mathbf{G}$ . Любая прямая  $g \in \mathbf{G}$  однозначно определяется параметрами  $p$  и  $\varphi$ , где  $p$  – длина вертикали, проведенная к прямой от начала координат, а  $\varphi$  – угол, составленный вертикалью, проведенной к прямой от начала координат, с положительным направлением оси  $X$ . Таким образом,  $(p, \varphi)$  являются координатами прямой  $g \in \mathbf{G}$ .

В пространстве  $\mathbf{G}$  примем в качестве размера локальный конечный размер  $\mu(\cdot)$ , инвариантный по отношению к группе евклидовых движений (вращение и параллельное перемещение). Известно [8], что инвариантный размер прямых имеет следующий вид:  $\mu(dg) = dg = dpd\varphi$ . Для любой ограниченной выпуклой области  $\mathbf{D}$  множество прямых, пересекающих  $\mathbf{D}$ , обозначим  $[\mathbf{D}] = \{g \in \mathbf{G} : g \cap \mathbf{D} \neq \emptyset\}$ .

Доказано в [2], что:  $\mu([\mathbf{D}]) = |\partial\mathbf{D}|$ . Обозначим  $A_{\mathbf{D}}^y$  множество тех прямых, пересекающих  $\mathbf{D}$ , где длина хорды  $|\chi(g)|$  меньше и равна  $y$ , где  $\chi(g) = g \cap \mathbf{D}$ :  $A_{\mathbf{D}}^y = \{g \in [\mathbf{D}] : |\chi(g)| \leq y\}$ ,  $y \in \mathbf{R}$ . Доказано [10], что  $|\chi(g)|$  измерима функция на  $[\mathbf{D}]$ .

Функция распределения длины хорды  $|\chi(g)|$  области  $\mathbf{D}$  формулируется как:

$$F(y) = \frac{1}{|\partial\mathbf{D}|} \mu(A_{\mathbf{D}}^y) = \frac{1}{|\partial\mathbf{D}|} \iint_{A_{\mathbf{D}}^y} d\varphi dp. \quad (6)$$

Поэтому для получения функции распределения длины хорды для ограниченной выпуклой области  $\mathbf{D}$  необходимо вычислить интеграл, написанный в правой части выражения (6). Для распределения функций длины хорды известны уравнения, данные в явном виде, например, для круга [9], прямоугольника [4] и правильного многоугольника [5].

Доказано в [10], что функция  $F(y)$  – непрерывная функция от  $y$ . Обычно предполагается, что  $F$  абсолютно непрерывна с плотностью  $f$ , несмотря на то, что доказательства абсолютной непрерывности  $F$  нет.

**3. Распределение длины хорды для ограниченных выпуклых областей.** В работе [1] дано уравнение для расчета функции плотности  $t(x)$  расстояния между двумя независимыми и равномерно распределенными случайными точками в ограниченной выпуклой области  $\mathbf{D}$  с помощью функции распределения длины хорды.

$$t(x) = \begin{cases} 0 & x \notin (0, d) \\ \frac{1}{\|\mathbf{D}\|^2} \left[ 2\|\mathbf{D}\|\pi x - 2|\partial\mathbf{D}|x^2 + 2|\partial\mathbf{D}|x \int_0^x F(u) du \right] & 0 < x \leq d, \end{cases} \quad (7)$$

где  $F(\cdot)$  – функция распределения длины хорды для области  $\mathbf{D}$ .

Используя уравнение (7), можем получить уравнение для расчета функции распределения длины хорды в ограниченной выпуклой области  $\mathbf{D}$  с помощью функции плотности расстояния между двумя точками.

$$\begin{aligned} \frac{t(x)}{x} &= \frac{1}{\|\mathbf{D}\|^2} \left[ 2\|\mathbf{D}\|\pi - 2|\partial\mathbf{D}|x + 2|\partial\mathbf{D}| \int_0^x F(u) du \right], \\ \frac{d}{dx} \left[ \frac{t(x)}{x} \right] &= \frac{1}{\|\mathbf{D}\|^2} [-2|\partial\mathbf{D}| + 2|\partial\mathbf{D}|F(x)], \\ 2|\partial\mathbf{D}|F(x) - 2|\partial\mathbf{D}| &= \|\mathbf{D}\|^2 \frac{d}{dx} \left[ \frac{t(x)}{x} \right], \\ 2|\partial\mathbf{D}|F(x) &= 2|\partial\mathbf{D}|\|\mathbf{D}\|^2 \frac{d}{dx} \left[ \frac{t(x)}{x} \right], \\ F(x) &= 1 + \frac{\|\mathbf{D}\|^2}{2|\partial\mathbf{D}|} \frac{d}{dx} \left[ \frac{t(x)}{x} \right], \quad 0 < x \leq d. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 + \frac{\|\mathbf{D}\|^2}{2|\partial\mathbf{D}|} \frac{d}{dx} \left[ \frac{t(x)}{x} \right] & 0 < x \leq d \\ 1 & x \geq d. \end{cases} \quad (8)$$

В уравнении (8), используя функцию плотности расстояния между двумя точками для ограниченных выпуклых областей с гладкой границей, можем получить функцию распределения длины хорды для ограниченных выпуклых областей.

**Утверждение 2.** Для ограниченных выпуклых областей с гладкой границей функции плотности и распределения длины хорды имеют следующий вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ 1 - \left[ 1 - \left( \frac{x|\partial D|}{4\|D\|} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}, & 0 < x \leq d; \\ 1, & x \geq d; \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin (0, d); \\ \frac{x|\partial D|^2}{16\|D\|^2} \left[ 1 - \frac{x^2|\partial D|^2}{16\|D\|^2} \right]^{-\frac{1}{2}}, & 0 < x \leq d. \end{cases}$$

**Доказательство.** Чтобы получить функцию распределения длины хорды для ограниченных выпуклых областей, нужно в выражение (8) вставить выражение (2):

$$\begin{aligned} \frac{t(x)}{x} &= \frac{2}{\|D\|} \left\{ \pi - 2 \arcsin \left[ \frac{x|\partial D|}{4\|D\|} \right] - \frac{x|\partial D|}{2\|D\|} \left[ 1 - \left( \frac{x|\partial D|}{4\|D\|} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right\}, \quad (0 < x \leq d), \\ \frac{d}{dx} \left[ \frac{t(x)}{x} \right] &= \frac{2}{\|D\|} \left\{ -2 \left[ 1 - \left( \frac{x|\partial D|}{4\|D\|} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{|\partial D|}{4\|D\|} - \frac{|\partial D|}{2\|D\|} \left[ 1 - \left( \frac{x|\partial D|}{4\|D\|} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{x|\partial D|}{2\|D\|} \cdot \frac{1}{2} \left[ 1 - \left( \frac{x|\partial D|}{4\|D\|} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{2x|\partial D|^2}{(4\|D\|)^2} \right\}, \\ \frac{\|D\|^2}{2|\partial D|} \cdot \frac{d}{dx} \left[ \frac{t(x)}{x} \right] &= \frac{\|D\|}{|\partial D|} \left[ 1 - \left( \frac{x|\partial D|}{4\|D\|} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \cdot \left\{ -\frac{|\partial D|}{2\|D\|} \left[ 1 - \left( \frac{x|\partial D|}{4\|D\|} \right)^2 \right]^{-1} \right. \\ &\quad \left. - \frac{|\partial D|}{2\|D\|} + \frac{x|\partial D|}{2\|D\|} \cdot \frac{x|\partial D|^2}{(4\|D\|)^2} \left[ 1 - \left( \frac{x|\partial D|}{4\|D\|} \right)^2 \right]^{-1} \right\} \\ &= \frac{\|D\|}{|\partial D|} \left[ 1 - \left( \frac{x|\partial D|}{4\|D\|} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \cdot \left\{ \frac{x|\partial D|}{2\|D\|} \cdot \frac{x|\partial D|^2}{(4\|D\|)^2 - (x|\partial D|)^2} - \frac{|\partial D|(4\|D\|)^2}{2\|D\| [(4\|D\|)^2 - (x|\partial D|)^2]} - \frac{|\partial D|}{2\|D\|} \right\} \\ &= \left[ 1 - \left( \frac{x|\partial D|}{4\|D\|} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \cdot \left\{ \frac{x^2|\partial D|^2}{2[(4\|D\|)^2 - (x|\partial D|)^2]} - \frac{(4\|D\|)^2}{2[(4\|D\|)^2 - (x|\partial D|)^2]} - \frac{1}{2} \right\} \\ &= \left[ 1 - \left( \frac{x|\partial D|}{4\|D\|} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \cdot \left\{ \frac{x^2|\partial D|^2 - (4\|D\|)^2}{2[(4\|D\|)^2 - (x|\partial D|)^2]} - \frac{1}{2} \right\} \\ &= \left[ 1 - \left( \frac{x|\partial D|}{4\|D\|} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \cdot \left\{ -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right\}. \end{aligned}$$

Вставив полученное выражение в выражение (8), получим:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 - \left[ 1 - \left( \frac{x|\partial D|}{4\|D\|} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} & 0 < x \leq d \\ 1 & x \geq d. \end{cases}$$

Отсюда получим, что:

$$f(x) = \frac{d}{dx} [F(x)] = \begin{cases} 0 & x \notin (0, d) \\ \frac{x|\partial D|^2}{16\|D\|^2} \left[ 1 - \frac{x^2|\partial D|^2}{16\|D\|^2} \right]^{-\frac{1}{2}} & 0 < x \leq d. \end{cases}$$

В частном случае для круга с диаметром  $d$  получим функции плотности и распределения расстояния между двумя точками и длины хорды. ■

**4. Частный случай.** В функциях распределения расстояния между двумя точками в явном виде даны функции плотности и распределения расстояния между двумя точками для ограниченных выпуклых областей (см. уравнение (1) и уравнение (2)).

$$T(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \frac{\pi x^2}{\|\mathbf{D}\|} + \left[ \frac{8\|\mathbf{D}\|}{|\partial\mathbf{D}|^2} - \frac{2x^2}{\|\mathbf{D}\|} \right] \arcsin\left(\frac{x|\partial\mathbf{D}|}{4\|\mathbf{D}\|}\right) & 0 < x \leq d \\ 1 - \left[ \frac{x^3|\partial\mathbf{D}|}{16\|\mathbf{D}\|^3} + \frac{x}{2|\partial\mathbf{D}|\|\mathbf{D}\|} \right] [16\|\mathbf{D}\|^2 - x^2|\partial\mathbf{D}|^2]^{\frac{1}{2}} & 0 < x \leq d \\ 1 & x \geq d. \end{cases}$$

$$t(x) = \begin{cases} 0 & x \notin (0, d] \\ \frac{2}{\|\mathbf{D}\|} \left\{ \pi x - 2x \arcsin\left[\frac{x|\partial\mathbf{D}|}{4\|\mathbf{D}\|}\right] - \frac{x^2|\partial\mathbf{D}|}{2\|\mathbf{D}\|} \left[ 1 - \left(\frac{x|\partial\mathbf{D}|}{4\|\mathbf{D}\|}\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right\} & 0 < x \leq d. \end{cases}$$

Очевидно, что для случая с кругом  $\|\mathbf{D}\| = \frac{\pi d^2}{4}$ ,  $|\partial\mathbf{D}| = \pi d$ .

Таким образом, согласно (1) для круга функция распределения расстояния между двумя точками будет иметь следующий вид:

$$T(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \frac{4x^2}{d^2} + \left[ \frac{2}{\pi} - \frac{8x^2}{\pi d^2} \right] \arcsin\left(\frac{x}{d}\right) - \left[ \frac{4x^3}{\pi^2 d^3} + \frac{2x}{\pi^2 d^2} \right] [\pi^2 d^4 - \pi^2 d^2]^{\frac{1}{2}} & 0 < x \leq d \\ 1 & x \geq d, \end{cases}$$

$$T(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \frac{4x^2}{d^2} + \left[ \frac{2}{\pi} - \frac{8x^2}{\pi d^2} \right] \arcsin\left(\frac{x}{d}\right) - \left[ \frac{4x^3}{\pi d^3} + \frac{2x}{\pi d^2} \right] [d^2 - 1]^{\frac{1}{2}} & 0 < x \leq d \\ 1 & x \geq d. \end{cases}$$

Согласно (2) для круга функция плотности расстояния между двумя точками будет иметь следующий вид:

$$t(x) = \begin{cases} 0 & x \notin (0, d] \\ \frac{8}{\pi d^2} \left\{ \pi x - 2x \arcsin\left(\frac{x}{d}\right) - \frac{2x^2}{d} \left[ 1 - \left(\frac{x}{d}\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right\} & 0 < x \leq d. \end{cases}$$

Используя уравнение связи между двумя распределениями и уравнение функции распределения расстояния между двумя точками для ограниченных выпуклых областей с гладкой границей, в явном виде получили функции плотности и распределения длины хорды для ограниченных выпуклых областей с гладкой границей. Таким образом, согласно распределению длины хорды для ограниченных выпуклых областей (см. утверждение 2), имеем:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 - \left[ 1 - \left(\frac{x|\partial\mathbf{D}|}{4\|\mathbf{D}\|}\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} & 0 < x \leq d \\ 1 & x \geq d, \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \notin (0, d] \\ \frac{x|\partial\mathbf{D}|^2}{16\|\mathbf{D}\|^2} \left[ 1 - \frac{x^2|\partial\mathbf{D}|^2}{16\|\mathbf{D}\|^2} \right]^{-\frac{1}{2}} & 0 < x \leq d, \end{cases}$$

откуда для случая круга получим:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 - \left[ 1 - \left(\frac{x}{d}\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} & 0 < x \leq d \\ 1 & x \geq d, \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \notin (0, d] \\ \frac{x}{d^2} \left[ 1 - \left(\frac{x}{d}\right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} & 0 < x \leq d, \end{cases}$$

где  $F(x)$  – функция распределения длины хорды для круга, а  $f(x)$  – функция плотности длины хорды для круга.

В работе [9] дана функция распределения длины хорды для круга, которая совпадает с полученной в данной работе функцией распределения длины хорды для круга.

**Заключение.** Таким образом, обобщая работу, приходим к следующему заключению:

- получили явный вид функции плотности расстояния между двумя точками для ограниченных выпуклых областей с гладкой границей;
- получили явный вид функций плотности и распределения длины хорды для ограниченных выпуклых областей с гладкой границей.

### References

1. Aharonyan N. G. 2015. The distribution of the distance between two random points in a convex set. Russian journal of mathematical research, 1(1): 4-8.
2. Ambartzumian R. V. 1990. Factorization Calculus and Geometric Probability (Encyclopedia Math. Appl. 33). Cambridge University Press, 286.
3. Geciauskas E. 1977. The distribution function of the distance between two points in a convex domain. Adv. Appl. Prob., 9: 472-478.
4. Gille W.. 1988. The chord length distribution of parallelepipeds with their limiting cases. Exp. Techn. Phys., 36: 197–208.
5. Harutyunyan H. S., Ohanyan V. K. 2009. Chord length distribution function for regular polygon. Exp. Techn. Phys., 42(2): 358–366.
6. Harutyunyan H. S., Ohanyan V. K. 2011. Chord length distribution function for convex polygons. SUTRA international journal mathematical science education, 4(2): 1-15.
7. Harutyunyan H. S., Ohanyan V. K. 2014. Orientation-dependent section distributions for convex bodies. Journal of contemporary mathematical analysis, 49(3): 139-156.
8. Santalo L .A.. 2004. Integral Geometry and Geometric Probability . Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Addison-Wesley, MA, 486.
9. Stoyan D., Stoyan H. 1994. Fractals random shapes and point fields. John Wiley & Sons, Chichester, New York.
10. Sulanke R. 1961. Die Verteilung der Sehnenlängen an Ebenen und räumlichen Figuren. Math. Nachr, 22: 51–74.

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Получена 10.02.2022

### СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

**Маргарян Паргев Нверович** – студент четвертого курса кафедры Теории вероятностей и математической статистики математико-механического факультета Ереванского государственного университета

 <http://orcid.org/0000-0002-5579-9847>

ул. Алека Манукяна, 1, Ереван, 0025, республика Армения

E-mail: [pargev.margaryan@ysumail.am](mailto:pargev.margaryan@ysumail.am)

### INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

**Pargev Margaryan** – fourth-year student of the Department of Probability Theory and Mathematical Statistics, Faculty of Mathematics and Mechanics, Yerevan State University, Yerevan, Republic of Armenia

**МЕТОД ДВУХМАСШТАБНОГО РАЗЛОЖЕНИЯ  
В ЗАДАЧЕ О КОЛЕБАНИЯХ ТЕМПЕРАТУРЫ В МЕРЗЛОМ ГРУНТЕ**

**А. М. Мейрманов**

*(Статья представлена членом редакционной коллегии А. В. Носковым)*

Национальный Исследовательский Московский Государственный Университет,  
Москва, 129337, Россия

E-mail: [meirmanovam@mgsu.ru](mailto:meirmanovam@mgsu.ru)

**Аннотация.** В работе исследуется задача о динамике мерзлого грунта при изменении внешней температуры на границе рассматриваемой физической области. Согласно общепринятой схеме, независимо предложенной Р. Барриджем и Дж. Келлером и Э. Санчес-Паленсией в 1980 году, в первую очередь формулируется микроскопическая математическая модель, описывающая физический процесс на микроскопическом уровне уравнениями классической механики Ньютона сплошных сред. Естественным малым параметром здесь является средний безразмерный диаметр пор твердого скелета грунта. В этой модели изменение температуры среды регулируется задачей Стефана, а динамика жидкости в порах абсолютно твердого скелета грунта подчинена уравнениям Стокса для вязкой несжимаемой жидкости. Вторым и основным моментом метода является вывод макроскопических уравнений физического процесса, получающихся предельным переходом при стремлении малого параметра к нулю (усреднении). Целью настоящей работы является вывод макроскопических уравнений (усреднение), описывающих динамику мерзлого грунта, с помощью метода двухмасштабного разложения.

**Ключевые слова:** задача Стефана, уравнения Стокса вязкой сжимаемой жидкости, усреднение

**Для цитирования:** Мейрманов А. М. 2022. Метод двухмасштабного разложения в задаче о колебаниях температуры в мерзлом грунте. Прикладная математика & Физика. 54(1): 28–32. DOI 10.52575/2687-0959-2022-54-1-28-32

**TWO-SCALE EXPANSION METHOD  
IN THE PROBLEM OF TEMPERATURE OSCILLATIONS IN FROZEN SOIL**

**Anvarbek Meirmanov**

*Article submitted by a member of the editorial board A. V. Noskov*

Moscow State University of Civil Engineering,  
Moscow 129337, Russia

E-mail: [meirmanovam@mgsu.ru](mailto:meirmanovam@mgsu.ru)

Received February, 16, 2022

**Abstract.** The paper investigates the problem of the dynamics of frozen soil with a change in the external temperature at the boundary of the physical domain under consideration. According to the generally accepted scheme, independently proposed by R. Barridge and J. Keller and E. Sanchez-Palencia in 1980, we first formulate a microscopic mathematical model, that describes the physical process at the microscopic level by the equations of classical Newtonian mechanics of continuous media. A natural small parameter here is the average dimensionless diameter of the pores of the solid skeleton. In this model the change in the temperature of the medium is controlled by the Stefan problem, and the dynamics of fluid in the pores of an absolutely rigid skeleton obeys the Stokes equations for a viscous incompressible fluid. The second and main point of the method is the derivation of the macroscopic equations of the physical process, which are obtained by passing to the limit as a small parameter tends to zero (homogenization). The purpose of this work is to derive macroscopic (homogenized) equations describing the dynamics of frozen soil using the two-scale expansion method.

**Key words:** The Stefan problem, Stokes equations for a viscous compressible fluid, homogenization

**For citation:** Anvarbek Meirmanov. 2022. Two-scale expansion method in the problem of temperature oscillations in frozen soil. Applied Mathematics & Physics. 54(1): 28–32. (in Russian) DOI 10.52575/2687-0959-2022-54-1-28-32

---

**1. Введение.** Настоящее исследование посвящено приложению метода двухмасштабного разложения в задаче о фазовых переходах в мерзлом грунте при изменении температуры воздуха на поверхности Земли.

В настоящее время для описания динамики мерзлого грунта существует большой спектр математических моделей, опосредовано описывающих рассматриваемый физический процесс на макроскопическом уровне (см. [3], [2] и цитируемую там литературу). В отличие от микроскопических моделей,

в макроскопических моделях характерными размерами являются метры или десятки метров. В силу этого указанные модели не различают микроструктуру сплошной среды, поскольку в такой модели в каждой точке сплошной среды присутствует как горная порода (твердый скелет), так и жидкость в порах этого скелета. Все такие модели строятся по одному принципу. Динамика жидкости, как правило, управляется системой уравнений фильтрации Дарси или какой-либо ее модификацией, а теплоперенос в грунте описывается модификациями уравнения теплопроводности. Главным в этих постулатах является вид коэффициентов уравнений. Как раз здесь и наблюдается большое разнообразие, зависящее от вкусов и пристрастий авторов моделей. Оно вполне объяснимо, поскольку основной механизм физического процесса сосредоточен на неизвестной (свободной) границе между жидкой и твердой фазами флюида в порах и никак не прописан в предлагаемых макроскопических моделях. Именно там происходит изменение геометрии порового пространства, и именно там возникает поток тепла внутрь несущей жидкости. Все эти принципиально важные изменения происходят на микроскопическом уровне, соответствующему среднему размеру пор или трещин в горных породах, в то время как любая из предлагаемых макроскопических моделей оперирует с совсем другими (на порядки большими) масштабами и поэтому не различает ни свободную границу, ни особенностей взаимодействия жидкой и твердой фаз порового флюида, что и объясняет большое разнообразие макроскопических математических моделей. У авторов таких моделей просто нет ни точного метода описания физических процессов на микроскопическом уровне на базе фундаментальных законов механики сплошных сред и химии, ни возможности учесть эту микроструктуру в макроскопических моделях. Поэтому им приходится ограничиваться некими умозрительными соображениями.

При всем этом возникает естественный вопрос, если есть несколько макроскопических моделей, описывающих один и тот же физический процесс, какая из них наиболее адекватно отображает это процесс? Где здесь критерий истинности? Говорить об эксперименте не имеет никакого смысла, поскольку в каждой такой модели достаточно свободных параметров, никак не привязанных ни к геометрии пласта (как, например, пористость), ни к физическим характеристикам процесса (как, например, вязкости и плотности фильтрующихся жидкостей) и вариацией этих параметров можно добиться совпадения с любым экспериментом.

R. Burridge и J. V. Keller [4] были первыми, кто на примере процессов акустики и фильтрации жидкости в горных породах с периодической структурой объяснили, что адекватное описание физических процессов на макроскопическом уровне возможно если только:

- (а) рассматриваемый физический процесс на микроскопическом уровне описывается с помощью классических уравнений механики сплошных сред (**Точная модель**),
- (б) выделен набор малых безразмерных параметров,
- (в) макроскопические математические модели есть строгие асимптотические пределы (усреднения) точных математических моделей на микроскопическом уровне при стремлении выделенных малых параметров к нулю.

В настоящей работе мы будем следовать этой схеме, используя метод двухмасштабного разложения и теорему Нгуетсенга [7] и получим макроскопическую математическую модель, описывающую колебания температуры в мерзлом грунте.

**2. Постановка задачи.** Для простоты изложения предположим, что грунт является абсолютно твердым телом (скорости скелета грунта тождественно равны нулю) и в уравнении притока тепла отсутствует конвективное слагаемое. Последнее предположение основано на известном факте о средней скорости фильтрации поровой жидкости [1]. Твердый скелет  $\Omega_s^\varepsilon$  и подобласть  $\Omega_{f,s}^\varepsilon(t)$  порового пространства  $\Omega_f^\varepsilon$ , занятая твердой фазой флюида, считаются абсолютно твердыми телами. То есть перемещения и скорости в  $\Omega_s^\varepsilon$  и в  $\Omega_{f,s}^\varepsilon(t)$  равны нулю. Мы специально используем термин «флюид», поскольку выражение «жидкая фаза жидкости» звучит как «масло масляное».

В этом случае математическая модель на микроскопическом уровне состоит из уравнений Стокса

$$\nabla \cdot \mathbb{P}^\varepsilon = 0, \quad \mathbb{P}^\varepsilon = \alpha_\mu^\varepsilon \mathbb{D}(x, v^\varepsilon) - p^\varepsilon \mathbb{I}, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot v^\varepsilon = 0 \quad (2)$$

для скорости  $v^\varepsilon$  и давления  $p^\varepsilon$  жидкой фазы вязкого несжимаемого флюида в подобласти  $\Omega_{f,f}^\varepsilon(t)$  порового пространства  $\Omega_f^\varepsilon$ , занятой жидкой фазой флюида.

В области  $\Omega = \Omega_f^\varepsilon \cup S^\varepsilon \cup \Omega_s^\varepsilon$ ,  $S^\varepsilon = \Omega_f^\varepsilon \cap \Omega_s^\varepsilon$  энтальпия  $H^\varepsilon$  и температура  $\vartheta^\varepsilon$  сплошной среды связаны уравнением притока тепла

$$\frac{\partial H^\varepsilon}{\partial t} = \nabla \cdot (\nabla \vartheta^\varepsilon - v^\varepsilon \vartheta^\varepsilon). \quad (3)$$

На границе  $S = \partial\Omega$

$$\vartheta^\varepsilon = \vartheta_0(x), \quad \mathbb{P}^\varepsilon \cdot \mathbf{n} = -p_0(x) \mathbf{n}. \quad (4)$$

Будем считать, что область  $\Omega_{f,s}^\varepsilon(0)$  непуста и свободная (неизвестная) граница  $\Gamma^\varepsilon(t)$ ,  $\Gamma^\varepsilon(t) = \Omega_{f,s}^\varepsilon(t) \cap \Omega_{f,f}^\varepsilon(t)$ , разделяющая жидкую и твердую компоненты  $\Omega_{f,s}^\varepsilon(t)$  и  $\Omega_{f,f}^\varepsilon(t)$ , в начальный момент времени не имеет общих точек с границей  $S^\varepsilon$ . В этом случае область  $Q_s^\varepsilon(t) = \overline{\Omega}_f^\varepsilon \cup S^\varepsilon \cup \Omega_{f,s}^\varepsilon(t)$  неподвижна и в ней перемещения и скорости  $\mathbf{v}^\varepsilon$  сплошной среды равны нулю. Поэтому на свободной границе  $\Gamma^\varepsilon(t)$  выполнено краевое условие

$$\mathbf{v}^\varepsilon = 0. \quad (5)$$

Температура  $\vartheta^\varepsilon$  непрерывна на свободной границе и совпадает с температурой фазового перехода флюида  $\vartheta^*$

$$\vartheta^\varepsilon(\mathbf{x}_0 + 0, t) = \vartheta^\varepsilon(\mathbf{x}_0 - 0, t). \quad (6)$$

Кроме того, на свободной границе выполнено условие Стефана [5]

$$\frac{\partial \vartheta^\varepsilon}{\partial N}(\mathbf{x}_0 - 0, t) - \frac{\partial \vartheta^\varepsilon}{\partial N}(\mathbf{x}_0 + 0, t) = D_N, \quad (7)$$

позволяющее определить положение свободной границы.

Задача (1) – (7) замыкается уравнением состояния

$$\vartheta^\varepsilon = \Phi(H^\varepsilon), \quad (8)$$

и начальными условиями

$$\vartheta^\varepsilon(\mathbf{x}, t) = \vartheta_0(\mathbf{x}), \quad \Gamma^\varepsilon(0) = \Gamma_0. \quad (9)$$

В (1) – (9)  $\mathbb{D}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla^* \mathbf{u})$  – симметрическая производная вектор-функции  $\mathbf{u}$ ;

$\Phi(s) = s$  при  $s \leq 0$ ,  $\Phi(s) = 0$  при  $0 \leq s \leq \vartheta_*$ ,  $\Phi(s) = s - \vartheta_*$  при  $s \geq \vartheta_*$ ;

$\mathbb{I}$  – единичный тензор (единичная матрица);

$\mathbf{n}$  – единичный вектор внешней по отношению к области  $\Omega$  нормали;

$\mathbf{N}$  – единичный вектор внешней по отношению к области  $\Omega_f$  нормали;

$$u(\mathbf{x}_0 + 0, t) = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} u(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Omega_{f,f}^\varepsilon(t), \quad \mathbf{x}_0 \in \Gamma^\varepsilon(t),$$

$$u(\mathbf{x}_0 - 0, t) = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} u(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Omega_{f,s}^\varepsilon(t), \quad \mathbf{x}_0 \in \Gamma^\varepsilon(t);$$

$\alpha_\mu^\varepsilon = \frac{2\mu}{Lg t_* \rho_f}$ ,  $L$  – характерный размер рассматриваемой области,  $t_*$  – характерное время длительности физического процесса.

### 3. Эквивалентная запись математической модели (1) – (9) в виде интегральных тождеств.

Для записи задачи (1) – (9) в виде интегральных тождеств, эквивалентных исходной задаче, введем характеристическую функцию  $\chi^\varepsilon(\mathbf{x}, t) = \chi(\mathbf{x}, t, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon})$  области  $\Omega_{f,f}^\varepsilon(t)$ , определяемую равенствами  $\Omega_{f,f}^\varepsilon(t) = \{\mathbf{x} \in \Omega : \chi^\varepsilon(\mathbf{x}, t) = 1\}$ .

Здесь функция  $\chi(\mathbf{x}, t, \mathbf{y})$  – 1-периодическая по переменной  $\mathbf{y}$ .

В этом случае интегральные тождества

$$\int \int_{\Omega_T} \chi^\varepsilon (\alpha_\mu^\varepsilon \mathbb{D}(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{v}}^\varepsilon) - \tilde{\mathbf{p}}^\varepsilon \mathbb{I}) : \mathbb{D}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varphi}) \, dx dt = - \int \int_{\Omega_T} \nabla p_0 \cdot \boldsymbol{\varphi} \, dx dt, \quad (10)$$

$$\int \int_{\Omega_T} \chi^\varepsilon \mathbf{v}^\varepsilon \cdot \nabla \psi \, dx dt = 0 \quad (11)$$

и

$$\int_\Omega H^\varepsilon(\mathbf{x}, t_0) \xi(\mathbf{x}, t_0) dx - \int_\Omega H^\varepsilon(\mathbf{x}, 0) \xi(\mathbf{x}, 0) dx + \int_0^{t_0} \int_\Omega (-H^\varepsilon \frac{\partial \xi}{\partial \tau} + \nabla \xi \cdot (\nabla \vartheta^\varepsilon - \mathbf{v}^\varepsilon \vartheta^\varepsilon)) dx d\tau = 0, \quad (12)$$

справедливые для произвольных функций  $\boldsymbol{\varphi}$ ,  $\psi$  и  $\xi$ , будут эквивалентны исходным дифференциальным уравнениям (1) – (3).

**4. Вывод макроскопической модели.** Для вывода макроскопической модели, описывающей на макроскопическом уровне динамику фазовых переходов в мерзлом грунте, воспользуемся методом двухмасштабного разложения. Этот метод основан на предварительной оценке возможной гладкости решений микроскопической математической модели и предыдущих результатов о гладкости решений данной математической модели, от возможности записать исходную дифференциальную задачу эквивалентной форме интегральных тождеств и на точных результатах о предельных переходах в функционалах, зависящих от малого параметра задачи [7].

В первую очередь рассмотрим двухмасштабное разложение динамических характеристик  $v^\varepsilon$  и  $p^\varepsilon$ . Для этих величин двухмасштабное разложение зависит от предельных значений безразмерного коэффициента  $\alpha_\mu^\varepsilon$  [6]:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \alpha_\mu^\varepsilon = \mu_0, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\alpha_\mu^\varepsilon}{\varepsilon^2} = \mu_1. \quad (13)$$

Напомним [6], что в случае  $\mu_0 = 0$  и  $0 < \mu_1 < \infty$  жидкость называется слабвязкой и в случае  $0 < \mu_1 < \infty$  жидкость называется вязкой [6]. Отметим, что макроскопической математической моделью движения вязкой жидкости в абсолютно твердом скелете грунта является покой [6]. Таким образом, в наших предположениях единственной нетривиальной макроскопической математической моделью является модель движения слабвязкой жидкости с  $\mu_0 = 0$  и  $0 < \mu_1 < \infty$ .

Для этой модели единственно возможным двухмасштабным разложением будет разложение

$$v^\varepsilon = \chi^\varepsilon(x, t) V(x, t, \frac{x}{\varepsilon}) + o(\varepsilon), \quad \mathbb{D}(x, v^\varepsilon) = \mathbb{D}(y, V) + o(\varepsilon), \quad p^\varepsilon = p(x, t) \chi^\varepsilon(x, t) + o(\varepsilon). \quad (14)$$

Для решений  $H^\varepsilon$  и  $\vartheta^\varepsilon$  задачи Стефана имеем

$$H^\varepsilon = H(x, t, \frac{x}{\varepsilon}) + o(\varepsilon), \quad \vartheta^\varepsilon = \vartheta(x, t) + o(\varepsilon), \quad \nabla \vartheta^\varepsilon = \nabla \vartheta(x, t) + \nabla_y \Theta(x, t, \frac{x}{\varepsilon}) + o(\varepsilon). \quad (15)$$

Функции  $V(x, t, y)$ ,  $H(x, t, y)$  и  $\Theta(x, t, y)$  должны быть 1 – периодическими по переменной  $y$  функциями.

Вот теперь мы сможем определить характеристическую функцию  $\chi^\varepsilon$  жидкой части порового пространства как

$$\chi(x, t, y) = \max\{\min\{H(x, t, y), 1\}, 0\}. \quad (16)$$

Подставляя выражения (14) и (15) в интегральные тождества (10) – (12), переходя к пределу при  $\varepsilon \rightarrow 0$  и реинтегрируя предельные интегральные тождества, получим с помощью теоремы Нгуэссенга [7] следующую систему дифференциальных уравнений макроскопической математической модели процесса замораживания или размораживания грунта для слабвязкого флюида в порах абсолютно твердого скелета

$$v = -\frac{k}{\mu_1} \nabla(p - p_0), \quad (17)$$

$$\nabla \cdot v = 0, \quad (18)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \nabla \cdot (\nabla \vartheta - v \vartheta). \quad (19)$$

Эти же интегральные уравнения, краевые и начальные условия (4) и (9) доставляют нам краевые и начальные условия макроскопической математической модели:

$$\vartheta(x, t) = \vartheta_0(x), \quad p(x, t) = p_0(x), \quad x \in S, \quad t > 0, \quad \vartheta(x, 0) = \vartheta_0(x). \quad (20)$$

Температура  $\vartheta$  и энтальпия  $H$  связаны уравнением состояния

$$\vartheta = \Phi(H), \quad (21)$$

которое следует из уравнения состояния (8) после предельного перехода при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

### Список литературы

1. Барренблатт Г. П., Ентов В. М., Рыжик В. М. 1972. Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа. М., Недра, 288.
2. Васильев В. И., Максимов А. М., Петров Е. Е., Цыпкин Г. Г. 1996. Тепломассоперенос в промерзающих и протаивающих грунтах. М, Наука, 224.
3. Тер-Мартirosян З. Г., Горбачев П. А. 2012. Промерзание грунта с учетом переменной температуры на поверхности и фазовых переходов в интервале температур. Весник МГСУ, 1: 32–36.
4. Burrige R., Keller J. 1981. Poroelasticity equations derived from microstructure. J. Acoust. Soc. Am., 70(4): 1140–1146.
5. Meirmanov A. 1992. The Stefan Problem. Berlin-New York: Walter de Gruyter, 311.
6. Meirmanov A. 2014. Mathematical models for poroelastic flows. Amsterdam-Paris-Beijing: Atlantis Press, 449.

7. Nguetseng G. 1989. A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization. SIAM J. Math. Anal., 20(3): 608–623.

### References

1. Barrenblatt G. P., Entov V. M., Ryzhik V. M. 1972. Teoria neststtsionarnoi philtratsii zhidkosti i gaza. M., Nedra, 288.
2. Vasiliev V. I., Maksimov A. M., Petrov E. E., Tsypkin G. G. 1996. Heat and mass transfer in freezing and thawing soils. M., Nauka, 224.
3. Ter-Martirosian Z. G., Gorbacnev P. A. 2012. Soil freezing taking into account variable temperature on the surface and phase transitions in the temperature range. Bulletin of MGSU. 1: 32–36.
4. Burridge R., Keller J. 1981. Poroelasticity equations derived from microstructure. J. Acoust. Soc. Am. 70(4): 1140–1146.
5. Meirmanov A. 1992. The Stefan Problem. Berlin-New York: Walter de Gruyter, 311.
6. Meirmanov A. 2014. Mathematical models for poroelastic flows. Amsterdam-Paris-Beijing: Atlantis Press, 449.
7. Nguetseng G. 1989. A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization. SIAM J. Math. Anal., 20(3): 608–623.

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Получена 16.02.2022

---

### СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

**Мейрманов Анварбек Мукатович** – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры прикладной математики Национального исследовательского университета «Московский государственный строительный университет»

 <http://orcid.org/0000-0002-8543-3897>

Ярославское шоссе 26, Москва, 12933, Россия

E-mail: [meirmanovam@mgsu.ru](mailto:meirmanovam@mgsu.ru)

### INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

**Anvarbek Meirmanov** – PhD, Professor, Professor of the Department of Applied Mathematics, National Research University «Moscow State University of Civil Engineering», Moscow, Russia

УДК 517.946  
MSC 35K65

DOI 10.52575/2687-0959-2022-54-1-33-39

## ПРОСТРАНСТВО $H_p$ РЕШЕНИЙ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Т. В. Капицына

(Статья представлена членом редакционной коллегии А. П. Солдатовым)

Национальный исследовательский университет «Московский энергетический институт»,  
Москва, 111250, Россия

E-mail: [KapitsynaTV@mpei.ru](mailto:KapitsynaTV@mpei.ru)

**Аннотация.** В цилиндре  $Q$ , основание которого ограничено ляпуновской поверхностью, рассматривается параболическое уравнение второго порядка, вырождающееся по касательным направлениям к границе основания. Для решений этого уравнения по аналогии с эллиптическим случаем вводится класс  $H_p$ . Установлен критерий принадлежности функций этому классу. Приводятся условия однозначной разрешимости задачи с граничными и начальными условиями, понимаемыми в смысле  $L_p$ .

**Ключевые слова:** вырождающиеся параболические уравнения, второй порядок, граничные значения в смысле  $L_2$ , ляпуновская граница, начальные и краевые условия

**Для цитирования:** Капицына Т. В. 2022. Пространство  $H_p$  решений вырождающихся параболических уравнений. Прикладная математика & Физика. 54(1): 33–39. DOI 10.52575/2687-0959-2022-54-1-33-39

## THE SPACE $H_p$ OF SOLUTIONS OF DEGENERATE PARABOLIC EQUATIONS

Tatyana Kapitsyna

(Article submitted by a member of the editorial board A. P. Soldatov)

National Research University «Moscow Power Engineering Institute»,  
Moscow, 111250, Russia

E-mail: [KapitsynaTV@mpei.ru](mailto:KapitsynaTV@mpei.ru)

Received February, 26, 2021

**Abstract.** Considered a second-order parabolic equation in the cylinder  $Q$  whose base is bounded by the Lyapunov surface. It is assumed that this equation is degenerated with respect to tangential directions to  $\partial\Omega$ . The class  $H_p$  is introduced for solutions of the equation analogously to elliptic case. The criterion of belonging of functions to this class is established. The conditions of unique solvability of the problem with boundary and initial conditions, understood in the sense of  $L_p$ , are given.

**Key words:** degenerate parabolic equations, second order, boundary values in the sense of  $L_2$ , Lyapunov boundary, initial and boundary conditions

**For citation:** Kapitsyna T. V. 2022. The space  $H_p$  of solutions of degenerate parabolic equations. Applied Mathematics & Physics. 54(1): 33–39. (in Russian) DOI 10.52575/2687-0959-2022-54-1-33-39

Пусть  $\Omega$  — ограниченная область  $\mathbb{R}^n$ , граница которой принадлежит классу  $C^{1+\lambda}$ ,  $0 < \lambda < 1$ . Рассмотрим в цилиндре  $Q = \Omega \times (0, T)$  параболическое уравнение второго порядка

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}u_{x_j})_{x_i} + \sum_{i=1}^n a_i u_{x_i} + a_0 u = f \quad (1)$$

с вещественными коэффициентами  $a_{ij}, a_i \in C^1(\bar{Q})$  и  $a_0 \in C(\bar{Q})$ . Условие параболичности заключается в том, что квадратичная форма

$$\langle a(x, t)\xi, \xi \rangle = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t)\xi_i \xi_j$$

положительно определена во всех точках цилиндра, т. е.

$$\langle a(x, t)\xi, \xi \rangle \geq \gamma(x, t)$$

с некоторой положительной непрерывной функцией  $\gamma(x, t)$ . Эта квадратичная форма может вырождаться, т. е.  $\gamma(x, t) \rightarrow 0$  при  $(x, t) \rightarrow \partial\Omega \times (0, T)$ . Однако, будем предполагать, что существует такая постоянная  $\gamma_0 > 0$ , что

$$\langle a(x, t)v(x), v(x) \rangle \geq \gamma_0,$$

где  $v(x)$  означает единичную внешнюю нормаль к границе  $\partial\Omega$  области  $\Omega$ . Таким образом, на боковой поверхности цилиндра допускается вырождение трикомовского типа.

Как известно [2], под обобщенным решением уравнения (1) понимается функция  $u \in W_{p,loc}^{1,0}(Q)$ , удовлетворяющая интегральному тождеству

$$\int_Q \left[ -u\eta_t + \langle a\nabla u, \nabla \eta \rangle + \left( \sum_{i=1}^n a_i u_{x_i} \right) \eta + a_0 \eta \right] dx dt = \int_Q f \eta dx dt. \quad (2)$$

В дальнейшем удобнее вместо расстояния  $r(x)$  от точки  $x \in \Omega$  до границы  $\partial\Omega$  пользоваться специальной функцией  $\rho(x)$ , которая определяется как решение задачи Дирихле

$$\Delta \rho = -1, \quad \rho|_{\partial\Omega} = 0.$$

в области. Хорошо известно [3], что эта функция принадлежит классу  $C^{1+\lambda}(\bar{\Omega})$  и эквивалентна расстоянию  $r(x)$ , т. е. существует такая постоянная  $\gamma_1 > 0$ , что для всех  $x \in \Omega$  выполняются неравенства

$$\gamma_1^{-1} r(x) \leq \rho(x) \leq \gamma_1 r(x).$$

При этом для ее вторых производных справедлива оценка

$$|\rho_{x_i x_j}| \leq \frac{C(\lambda')}{[r(x)]^{1-\lambda'}}, \quad 0 < \lambda' < \lambda,$$

с некоторой постоянной  $C = C(\lambda')$ . Кроме того, в силу леммы Жиро [4]

$$\left. \frac{\partial \rho}{\partial v} \right|_{\partial\Omega} < 0. \quad (3)$$

В дальнейшем удобно предполагать, что функция  $\rho$  продолжена нечетным образом за границу области  $\partial\Omega$  на все пространство  $\mathbb{R}^n$  с сохранением класса  $C^1$ .

Для достаточно малых  $\delta > 0$  рассмотрим семейство подобластей  $\Omega_\delta = \{x \in \Omega, \rho(x) > \delta\}$ , которые в силу эквивалентности  $\rho(x) \sim r(x)$  сходятся к  $\Omega$  при  $\delta \rightarrow 0$ . При этом граница  $\partial\Omega_\delta$  совпадает с поверхностью уровня  $\rho = \delta$ . Зафиксируем точку  $x^0 \in \partial\Omega$  с нормалью  $v^0 = v(x^0)$  и рассмотрим в окрестности этой точки замкнутой области  $\bar{\Omega}$  локальную систему координат  $y = (y_1, \dots, y_n) = (y', y_n)$  с началом в точке  $x^0$ , в которой ось  $y_n$  направлена вдоль нормали  $v^0$ . Функцию  $(\rho(x) - \delta)$  в этих локальных координатах обозначим  $R(\delta, y', y_n)$ . Поскольку

$$\left. \frac{\partial}{\partial v^0} [\rho(x) - \delta] \right|_{x^0} = \left. \frac{\partial R}{\partial y_n} \right|_{(\delta, 0, 0)},$$

на основании (3) не ограничивая общности можно считать, что

$$\frac{\partial R}{\partial y_n} < 0$$

всюду в рассматриваемой окрестности точки  $x^0$ .

Поэтому по теореме о неявной функции существуют такие положительные числа  $\delta_0, r_0, s_0$  и функция  $\varphi(\delta, y') \in C^{1+\lambda}([0, \delta_0] \times \{|y'| \leq r_0\})$ , по модулю не превосходящая  $s_0$ , что

$$B(x^0) = \bar{\Omega} \cap (\{|y'| \leq r_0\} \times \{|y_n| \leq s_0\})$$

является замкнутой областью, в которой при  $0 \leq \delta \leq \delta_0$  уравнение  $R(\delta, y', y_n) = 0$  запишется в форме  $y_n = \varphi(\delta, y')$ . Уменьшая при необходимости параметры  $r_0$  и  $\delta_0$ , можем таким образом считать, что при  $0 \leq \delta \leq \delta_0$  пересечение  $B(x^0) \cap \partial\Omega_\delta$  представляет собой поверхность  $\Gamma_\delta(x^0)$ , которая описывается уравнением  $y_n = \varphi(\delta, y'), |y'| \leq r_0$ . При  $\delta = 0$  символ нуль в обозначениях опускаем:  $\Omega_0 = \Omega$  и  $\Gamma_0(\delta) = \Gamma(\delta)$ .

В локальной системе координат отображение  $(y', \varphi(0, y')) \rightarrow (y', \varphi(\delta, y'))$  осуществляет диффеоморфизм  $\Gamma(x^0) \rightarrow \Gamma_\delta(x^0)$  класса  $C^{1+\lambda}$ . В исходной системе координат его обозначим  $x \rightarrow x_\delta$ , геометрически это отображение представляет собой проектирование вдоль направления  $v^0$  поверхности  $\Gamma(x^0)$  на  $\Gamma_\delta(x^0)$ .

Обратимся к уравнению (1) и опишем условия, накладываемые на его правую часть  $f$ . С этой целью введем пространство  $L_{p,1}$ , полученное замыканием класса  $C^\infty(\bar{Q})$  по норме

$$|f| = |f|_{L_2(\Omega_{\delta_0} \times [\delta_0, T])} + \int_0^{\delta_0} t |f|_{L_p(\partial\Omega_t \times [t, T])} dt + \int_0^{\delta_0} \left[ \int_Q |f[x, t]|^p r(x) dx \right]^{1/2} dt,$$

где предполагается  $\delta_0 < T$ . Введем еще пространство  $L_p(Q, \rho)$ , полученное замыканием класса  $C^\infty(\bar{Q})$  по норме

$$|f| = \left( \int_Q |f(x)|^2 \rho(x) dx \right)^{1/2}.$$

Функцию  $f$  в правой части уравнения (1) и тождества (2) будем предполагать принадлежащей пространству  $L_{p,1}$ .

Обозначим  $H_p(Q)$  класс всех функций  $u \in W_{p,loc}^{1,0}(Q)$ , для которых величины

$$M_\delta(u) = \int_\delta^{T'} \int_{\partial\Omega_\delta} |u|^p dx dt + \int_{\Omega_\delta} |u(x, \delta)| \rho(x) dx, \quad 0 < \delta \leq \delta_0 \tag{4}$$

равномерно ограничены при любом фиксированном  $T' \in (\delta_0, T)$ .

Введенное понятие класса  $H_p$  применительно к эллиптическим уравнением обобщает классическое определение для аналитических и гармонических функций. В работах В. П. Михайлова и А. К. Гущина ([4] при  $p = 2$ ) и [1] в общем случае  $p > 1$ ) для областей класса  $C^2$  было получено необходимое и достаточное условие принадлежности функции  $u$  классу  $H^p$ . Оно заключается в конечности интеграла

$$\int_\Omega \rho(x) |u|^{p-2} |\nabla u|^2 dx. \tag{5}$$

Позднее этот факт был распространен И. М. Петрушко [5, 6] на случай областей с ляпуновской границей. Применительно к параболическим уравнениям в работе [7] это условие сводится к конечности интеграла

$$\int_0^{T'} \int_\Omega \rho(x) (|u|^{p-2} |\nabla u|^2)(x, t) dx dt$$

для любого  $T' < T$ . Некоторые специальные случаи вырождающихся эллиптических и параболических уравнений также охвачены в работах И. М. Петрушко [8] и И. М. Петрушко, Т. В. Капицыной [9].

В данной работе указанные результаты распространим на более общий случай вырождающегося уравнения (1). Отметим, прежде всего, что в силу параболичности уравнения (1) в цилиндре  $Q$  имеет место следующее предложение.

**Лемма 1.** Пусть  $u(x, t) \in W_{p,loc}^{1,0}(Q)$  является обобщенным решением уравнения (1) с правой частью  $f \in L_{p,loc}(Q)$ . Тогда для любых  $0 \leq \delta \leq \delta_0 < T' < T$  справедливо равенство

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Omega_\delta} |u(x, T')|^p (\rho(x) - \delta) dx - \frac{1}{p} \int_{\Omega_\delta} |u(x, \delta)|^p (\rho(x) - \delta) dx + \\ & + (p-1) \int_\delta^{T'} \int_{\Omega_\delta} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i} u_{x_j} |u|^{p-2} (\rho(x) - \delta) dx dt - \delta |u|^p \sum_{i=1}^n a_i (a_i (\rho - \delta))_{x_i} dx dt - \\ & - \frac{1}{p} \int_\delta^{T'} \int_{\partial\Omega_\delta} \sum_{i,j=1}^n \left( a_{ij} \frac{\rho_{x_i} \rho_{x_j}}{|\nabla \rho|} \right) |u|^p ds dt - \frac{1}{p} \int_\delta^{T'} \int_{\Omega_\delta} \sum_{i,j=1}^n (a_{ij} \rho_{x_i})_{x_j} |u|^p dx dt + \\ & + \int_\delta^{T'} \int_{\Omega_\delta} a |u|^p (\rho - \delta) dx dt = \int_{\theta(\delta)}^{T'} \int_{\Omega_\delta} f u |u|^{p-1} \operatorname{sgn} u (\rho - \delta) dx dt. \tag{6} \end{aligned}$$

Доказательство этой леммы с некоторыми незначительными изменениями осуществляется аналогично лемме 1 из [7] и потому опускается.

**Теорема 1.** Пусть функция  $u(x, t) \in W_{p,loc}^{1,0}(Q)$  является обобщенным решением уравнения (1) с правой частью  $f \in L_{p,1}(Q)$ . Тогда  $u$  принадлежит классу  $H_p$  тогда и только тогда, когда

$$\int_{\Omega} |u(x, T')|^p \rho(x) dx + \int_{\delta}^{T'} \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i} u_{x_j} |u|^{p-2} r(x) dx dt < \infty.$$

**Доказательство.** Обозначим через

$$M_{\delta}(u) = \max_{0 \leq \mu \leq \delta_0} \left[ \int_{\delta}^{T'} \int_{\partial \Omega_{\mu}} |u|^p ds dt + \int_{\Omega_{\mu}} |u(x, \mu)|^p (\rho - \mu) dx \right] \quad (7)$$

$$N_{\delta}(u) = \int_{\delta}^{T'} \int_{\Omega_{\delta}} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i} u_{x_j} |u|^{p-2} (\rho - \delta) dx dt + \int_{\Omega_{\delta}} |u(x, T')|^p (\rho - \delta) dx. \quad (8)$$

Утверждается, что для любого  $\delta \in (0, \delta_0]$  и для любого  $T' \in (T/2, T)$  справедливы оценки

$$\max_{0 \leq \mu \leq \delta_0} M_{\delta}(u) + \int_{\delta}^{T'} \int_{\Omega_{\delta}} |u|^p (\rho - \delta) dx dt \leq C_2 \left\{ \|f\|_{L_{1,loc}(Q)}^p + \int_{\delta}^{T'} \int_{\Omega_{\delta}} \frac{|u|^p}{(\rho - \delta)^{1-\lambda'}} dx dt + N_{\delta}(u) \right\}; \quad (9)$$

$$N_{\delta}(u) + \int_{\delta}^{T'} \int_{\Omega_{\delta}} |u|^p (\rho - \delta) dx dt \leq C_3 \left\{ \|f\|_{L_{1,loc}(Q)}^p + \int_{\delta}^{T'} \int_{\Omega_{\delta}} \frac{|u|^p}{(\rho - \delta)^{1-\lambda'}} dx dt + M_{\delta}(u) \right\} + \\ + \|f\|_{L_{1,loc}(Q)}^p \left[ N_{\delta}^{(p-1)/p}(u) + \left( \int_{\delta}^{T'} \int_{\Omega_{\delta}} |u|^p (\rho - \delta) dx dt \right)^{(p-1)/p} \right]. \quad (10)$$

В самом деле, введем обозначение

$$M_{\delta}^+(u) = \max_{0 \leq \mu \leq \delta_0} M_{\mu}(u).$$

Так как

$$\int_{\delta}^{T'} \int_{\Omega_{\delta}} |f| |u|^p (\rho - \delta) dx dt \leq \left[ (M_{\delta}(u))^{(p-1)/p} + \|u\|^{(p-1)/p} L_p(\Omega_{\delta_0} \times (\delta_0, T')) \right] \|f\|_{L_{p,1}(Q)}, \quad (11)$$

то из (9) имеем

$$M_{\delta}^+(u) \leq C_1 \left\{ (M_{\delta}(u))^{(p-1)/p} + \|u\|^{(p-1)/p} L_p(\Omega_{\delta_0} \times (\delta_0, T')) \right\} \|f\|_{L_{p,1}(Q)} + \\ + N_{\delta}(u) + \int_{\delta}^{T'} \int_{\Omega_{\delta}} \frac{|u|^p}{(\rho - \delta)^{1-\lambda'}} dx dt \}.$$

Следовательно,

$$M_{\delta}^+(u) \leq C_4 \left\{ \|f\|_{L_{p,1}(Q)}^p + N_{\delta}(u) + \int_{\delta}^{T'} \int_{\Omega_{\delta}} \frac{|u|^p}{(\rho - \delta)^{1-\lambda'}} dx dt \right\}, \quad (12)$$

что и требовалось доказать.

Покажем далее, что для любого  $\varepsilon > 0$  найдется такое  $\delta_2$ , зависящее от  $\varepsilon$ , что

$$\int_{\delta}^{T'} \int_{\Omega_{\delta}/\Omega_{\delta_2}} \frac{|u|^p}{\rho^{1-\lambda'}(x)} dx dt \leq \varepsilon \left[ \|f\|_{L_{p,1}(Q)}^p + N_{\delta}(u) + \int_{\delta}^{T'} \int_{\Omega_{\delta_2}} \frac{u^p}{\rho^{1-\lambda'}(x)} dx dt \right]. \quad (13)$$

Действительно, воспользуемся неравенством

$$\int_{\delta}^{T'} \int_{\Omega_{\delta}/\Omega_{\delta_2}} \frac{|u|^p}{\rho^{1-\lambda'}} dxdt \leq C_0 \left[ \int_{\Omega_{\delta}}^{\delta_0} \frac{d\mu}{\mu^{1-\lambda'}} \int_{\delta}^{T'} \int_{\partial\Omega_{\mu}} |u|^p dsdt + \int_{\delta}^{\delta_0} \frac{d\mu}{\mu^{1-\lambda'}} |u(x, \mu)|^p dx \right] \leq \leq \frac{C_0 \delta_2^{\lambda'}}{\lambda'} \sup_{\delta < \mu < \delta_2} M(\mu) \leq C_0 \delta_2^{\lambda'} \left( \|f\|_{L_{p,1}(Q)}^p + N_{\delta}(u) + \int_{\delta}^{T'} \int_{\Omega_{\delta_2}} \frac{|u|^p}{\rho^{1-\lambda'}} dxdt \right).$$

Выбирая  $\delta_2 = \varepsilon$  (и уменьшая ее, если нужно, чтобы  $\delta_2 < \delta_0$ ), в результате получим оценку (13). Очевидно, достаточность теоремы сводится к следующей оценке

$$M_{\delta}(u) + \int_{\delta}^{T'} \int_{\Omega_{\delta}} |u|^p (\rho - \delta) dxdt \leq C_8 \left( \|f\|_{L_{p,1}(Q)}^p + N_{\delta}(u) \right). \tag{14}$$

Для ее доказательства рассмотрим функцию  $v(x, t) = u(x, t)e^{\lambda t}$ ,  $\lambda > 0$ . Функция  $v(x, t)$  является обобщенным из  $W_{p,loc}^{1,0}(Q)$  решением уравнения

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}v_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^n a_i v_{x_i} + (a - \lambda)v = fe^{\lambda t} = f_1,$$

и, следовательно, для него справедливо равенство (см. лемму 1)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{p} \int_{\delta}^{T'} \int_{\Omega_{\delta}} \sum_{i,j=1}^n \left( a_{ij} \frac{\rho_{x_i} \rho_{x_j}}{|\nabla \rho|} \right) |v|^p dsdt + \frac{1}{p} \int_{\Omega_{\delta}} |v(x, \delta)|^p (\rho - \delta) dxdt + \lambda \int_{\delta}^{T'} \int_{\Omega_{\delta}} |v|^p (\rho - \delta) dxdt = \\ & = (p - 1) \int_{\delta}^{T'} \int_{\Omega_{\delta}} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} v_{x_i} v_{x_j} |v|^{p-2} (\rho(x) - \delta) dxdt + \frac{1}{p} \int_{\Omega_{\delta}} |v(x, T')|^p (\rho - \delta) dx + \\ & + \int_{\delta}^{T'} \int_{\Omega_{\delta}} \sum_{i=1}^n a_i v_{x_i} v_{x_j} |v|^{p-1} (\rho - \delta) dxdt + \int_{\delta}^{T'} \int_{\Omega_{\delta}} a |v|^p (\rho - \delta) dxdt - \\ & - \frac{1}{p} \int_{\delta}^{T'} \int_{\Omega_{\delta}} \sum_{i,j=1}^n (a_{ij} \rho_{x_i})_{x_j} |v|^p dxdt + \int_{\delta}^{T'} \int_{\Omega_{\delta}} f |v|^{p-1} \operatorname{sgn} v (\rho - \delta) dxdt. \end{aligned} \tag{15}$$

Из (14) легко следует неравенство

$$\frac{1}{p} M_{\mu}(v) + \lambda \int_{\delta}^{T'} \int_{\Omega_{\delta}} |v|^p (\rho - \delta) dxdt \leq C_9 \left( \|f\|_{L_{p,1}(Q)}^p + N_{\delta}(v) + \int_{\delta}^{T'} \int_{\Omega_{\delta_2}} \frac{|v|^p}{\rho^{1-\lambda'}} dxdt \right), \tag{16}$$

из которого, с учетом (11) – (13), вытекает

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} M_{\mu}(v) + \lambda \int_{\delta}^{T'} \int_{\Omega_{\delta}} |v|^p (\rho - \delta) dxdt & \leq C_9 \left( \|f\|_{L_{p,1}(Q)}^p + N_{\delta}(v) + \int_{\delta}^{T'} \int_{\Omega_{\delta_2}} \frac{|v|^p}{\rho^{1-\lambda'}} dxdt \right) \leq \\ & \leq C_{10} \left( \|f\|_{L_{p,1}(Q)}^p + N_{\delta}(v) + C_{11} \int_{\delta}^{T'} \int_{\Omega_{\delta_2}} |v|^p (\rho - \delta) dxdt \right). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\frac{1}{p} M_{\mu}(v) + (\lambda - C_{12}) \int_{\delta}^{T'} \int_{\Omega_{\delta}} |v|^p (\rho - \delta) dxdt \leq C_{13} (\|f\|_{L_{p,1}(Q)}^p + N_{\delta}(v)).$$

Выбирая  $\lambda$  настолько малым, чтобы  $\lambda - C_{12} > 1/2$  и, учитывая, что  $u(x, t) = v(x, t)e^{-\lambda t}$ , получаем (14).

Что касается необходимости условия теоремы, то она легко получается из оценки

$$N_\delta(u) + \int_\delta^{T'} \int_{\Omega_\delta} |u|^p (\rho - \delta) dx dt \leq C(\|f\|_{L_{p,1}(Q)}^p + \|u\|_{L_p(\partial\Omega_\delta \times (\delta, T'))}^p + \|u(x, \delta)\|_{L_p(Q)}^p).$$

Заметим, что ограниченность первого слагаемого в правой части (4) можем выразить в следующей эквивалентной форме: для любой точки  $x^0 \in \partial\Omega$  интегралы

$$\int_\delta^{T'} \int_{\Gamma(x^0)} |u(x_\delta, t)|^p dx dt$$

равномерно ограничены. Последнее обстоятельство позволяет ввести понятие обобщенных граничных значений.

По определению для заданной функции  $\varphi \in L_p(\partial\Omega) \times [0, T]$  функция  $u \in W_{p,loc}^{1,0}(Q)$  принимает обобщенное граничное значение  $\varphi$  (в смысле  $L_p$ ) на боковой границе цилиндра  $Q$ , если для любой точки  $x^0 \in \partial\Omega$  и для любого  $T' < T$  имеет место предел

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_\delta^{T'} \left[ \int_{\Gamma(x^0)} |u(x_\delta, t) - \varphi(x, t)|^p dx \right] dt = 0.$$

Этот факт записываем в форме

$$u|_{\partial\Omega \times [0, T]} = \varphi. \quad (17)$$

Аналогично вводится и принятие начального условия

$$u|_{t=0} = u_0 \quad (18)$$

в смысле  $L_p$  с весом  $\rho$ . По отношению к заданной функции  $u_0(x) \in L_p(\Omega, \rho)$  оно определяется условием

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int |u(x, \delta) - u_0(x)|^p dx = 0.$$

Пользуясь теоремой 1, аналогично [7] можно установить однозначную обобщенную разрешимость рассматриваемой задачи.

**Теорема 2.** При любых  $\varphi \in L_p(\partial Q \times (0, T))$ ,  $u_0(x) \in L_p(Q, r)$  и любой  $f(x, t) \in L_{p,1}(Q) \cap L_{p,loc}(Q)$  первая смешанная задача (1), (17), (18) имеет обобщенное из  $W_{p,loc}^{1,0}(Q)$  решение. Это решение единственно и для него справедлива оценка

$$\begin{aligned} \max_{\delta \in (0, \delta_0]} [\|u\|_{L_p(\partial\Omega_\delta \times (\delta, T'))}^p + \|u(x, \delta)\|_{L_p(Q, r)}^p] + \int_\delta^{T'} \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i} u_{x_j} |u|^{p-r} r(x) dx dt + \\ + \int_0^{T'} \int_\Omega |u(x, t)|^p r(x) dx dt \leq C[\|f\|_{L_{p,1}(Q)}^p + \|\varphi\|_{L_p(\partial\Omega_\delta \times (0, T))}^p + \|u_0\|_{L_p(Q, r)}^p]. \end{aligned}$$

### Список литературы

1. Гушин А. К., Михайлов В. П. 1979. О граничных значениях в  $L_p$ ,  $p > 1$ , решений эллиптических уравнений. Математический сборник, 108(150): 3–21.
2. Ладженская О. А., Солонников В. А., Уралцева П. И. 1967. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М., Наука, 736.
3. Миранда К. 1957. Уравнения с частными производными из эллиптического типа. М., Изд-во иностранной литературы, 255.
4. Михайлов В. П. 1976. О граничных значениях решений эллиптических уравнений в областях с гладкой границей. Математический сборник, 101(2): 163–188.

5. Петрушко И. М. 1982. О граничных значениях решений эллиптических уравнений в областях с ляпуновской границей. Математический сборник, 119(161): 48–77.
6. Петрушко И. М. 1983. О граничных значениях в  $L_p$ ,  $p > 1$ , решений эллиптических уравнений в областях с ляпуновской границей. Математический сборник, 120(162): 569–588.
7. Петрушко И. М. 1984. О граничных и начальных условиях в  $L_p$ ,  $p > 1$ , решений параболических уравнений. Математический сборник, 125(4), 489–521.
8. Петрушко И. М. 1999. О существовании граничных значений решений вырождающихся эллиптических уравнений. Математический сборник, 190(7): 41–72.
9. Петрушко И. М., Капицына Т. В. 2005. О первой смешанной задаче для вырождающихся параболических уравнений. Сборник «Неклассические уравнения математической физики», Новосибирск: 207–218.

### References

1. Gushchin A. K., Mikhaylov V. P. 1979. O granichnykh znacheniyakh v  $L_p$ ,  $p > 1$ , resheniy ellipticheskikh uravneniy [On the boundary values in  $L_p$ ,  $p > 1$ , solutions of elliptic equations]. Matematicheskiy sbornik, 108(150): 3–21.
2. Ladyzhenskaya O. A., Solonnikov V. A., Ural'tseva P. I. 1967. Lineynyye i kvazilineynyye uravneniya parabolicheskogo tipa [Linear and quasi-linear equations of parabolic type]. M., Nauka, 736.
3. Miranda K. 1957. Uravneniya s chastnymi proizvodnymi iz ellipticheskogo tipa [Partial differential equations of elliptic type]. M., Izd-vo inostrannoy literatury, 255.
4. Mikhaylov V. P. 1976. O granichnykh znacheniyakh resheniy ellipticheskikh uravneniy v oblastiakh s gladkoy granitsey [On the boundary values of solutions of elliptic equations in regions with a smooth boundary]. Matematicheskiy sbornik, 101(2): 163–188.
5. Petrushko I. M. 1982. O granichnykh znacheniyakh resheniy ellipticheskikh uravneniy v oblastiakh s lyapunovskoy granitsey [On the boundary values of solutions of elliptic equations in areas with a Lyapunov boundary]. Matematicheskiy sbornik, 119(161): 48–77.
6. Petrushko I. M. 1983. O granichnykh znacheniyakh v  $L_p$ ,  $p > 1$ , resheniy ellipticheskikh uravneniy v oblastiakh s lyapunovskoy granitsey [On the boundary values in  $L_p$ ,  $p > 1$ , of solutions of elliptic equations in domains with a Lyapunov boundary]. Matematicheskiy sbornik, 120(162): 569–588.
7. Petrushko I. M. 1984. O granichnykh i nachal'nykh usloviyakh v  $L_p$ ,  $p > 1$ , resheniy parabolicheskikh uravneniy [On boundary and initial conditions in  $L_p$ ,  $p > 1$ , solutions of parabolic equations]. Matematicheskiy sbornik, 125(4), 489–521.
8. Petrushko I. M. 1999. O sushchestvovanii granichnykh znacheniy resheniy vyrozhdnykh ellipticheskikh uravneniy [On the existence of boundary values of solutions of degenerate elliptic equations]. Matematicheskiy sbornik, 190(7): 41–72.
9. Petrushko I. M., Kapitsyna T. V. 2005. O pervoy smeshannoy zadache dlya vyrozhdnykh parabolicheskikh uravneniy [On the first mixed problem for degenerate parabolic equations]. Sbornik «Neklassicheskiye uravneniya matematicheskoy fiziki», Novosibirsk: 207–218.

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Получена 26.02.2022

### СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

**Капицына Татьяна Владимировна** — старший преподаватель Национального исследовательского университета «Московский энергетический институт»

 <http://orcid.org/0000-0002-7040-7370>

ул. Красноказарменная, 14, Москва, 111250, Россия

E-mail: [KapitsynaTV@mpei.ru](mailto:KapitsynaTV@mpei.ru)

### INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

**Tatyana Kapitsyna** — senior lecturer, National Research University «Moscow Power Engineering Institute», Moscow, Russia

УДК 517.95  
MSC 35L52

DOI 10.52575/2687-0959-2022-54-1-40-51

## ОБ АНАЛОГЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОДНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Е. А. Максимова

(Статья представлена членом редакционной коллегии С. М. Ситником)

Ордена Трудового Красного Знамени федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский технический университет связи и информатики», Москва, 111024, Россия

E-mail: [ekamaks@bk.ru](mailto:ekamaks@bk.ru)

**Аннотация.** Рассмотрена система  $n$  уравнений Эйлера – Пуассона – Дарбу в матричной записи, матрица-коэффициент которой имеет одно собственное значение кратности  $n$  или пару комплексно-сопряженных собственных значений кратности  $n/2$  с действительной частью из интервала  $(1/2, 1)$ . Вследствие сингулярности на нехарактеристической линии Задача Коши в классической постановке для этой системы является некорректной. Сформулирован аналог задачи Коши с весом, компенсирующим эту особенность. Путем замены переменных матричный коэффициент системы приведен к нормальной жордановой форме, представляющей собой одну жорданову клетку для случая действительных собственных значений и вещественный аналог жордановой клетки порядка  $n$  для случая комплексно-сопряженных собственных значений. Методом Римана с использованием аппарата функций от матрицы получены решения поставленной задачи и сформулированы теоремы корректности.

**Ключевые слова:** метод Римана, задача Коши, дифференциальные уравнения в частных производных, система уравнений Эйлера – Пуассона – Дарбу

**Для цитирования:** Максимова Е. А. 2022. Об аналоге задачи Коши для одной системы уравнений в частных производных второго порядка. Прикладная математика & Физика. 54(1): 40–51.

DOI 10.52575/2687-0959-2022-54-1-40-51

---

## ON THE ANALOGUE OF THE CAUCHY PROBLEM FOR A SYSTEM OF SECOND ORDER PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

Ekaterina Maksimova

(Article submitted by a member of the editorial board Sitnik S. M.)

Moscow technical university Of communications and informatics, Moscow, 111024, Russia

E-mail: [ekamaks@bk.ru](mailto:ekamaks@bk.ru)

Received March, 3, 2022

**Abstract.** We consider the system of  $n$  Euler – Poisson – Darboux Equations in matrix notation and study the case when matrix coefficient has one eigenvalue lying in  $(1/2, 1)$ . The singularity of equation makes the classical formulation of the Cauchy problem ill-posed. We formulate well-posed analogue of Cauchy problem. The singular behavior can be compensated by adding weight to both of conditions. We perform the change of variables to reduce the coefficient matrix to Jordan normal form. The coefficient is one Jordan block of order  $n$  for the case of real eigenvalues and a real analogue of the Jordan block of order  $n/2$  for the case of complex conjugate eigenvalues. We construct the solutions using the Riemann method and properties of matrix functions and formulate the well-posedness theorems.

**Key words:** Riemann method, Cauchy Problem, Euler – Poisson – Darboux Equation, system of partial differential equations

**For citation:** Maksimova Ekaterina. 2022. On the analogue of the cauchy problem for a system of second order partial differential equations. Applied Mathematics & Physics. 54(1): 40–51. (in Russian) DOI 10.52575/2687-0959-2022-54-1-40-51

---

### 1. Введение. Дифференциальное уравнение в частных производных

$$u_{xy} - \frac{a}{x-y}u_x + \frac{b}{x-y}u_y = 0$$

впервые появилось в публикации Эйлера [20] и позднее было исследовано Риманом [23], Пуассоном [22] и Дарбу [21]. Позднее многие авторы [12], [18], [7], [8] уделяли больше внимания рассматриваемому уравнению и к настоящему времени для уравнения Эйлера – Пуассона – Дарбу и его аналогов были

сформулированы и решены различные краевые задачи и исследованы вопросы их корректности. Задача Коши для этого уравнения наиболее полно исследована в монографии Р. С. Хайруллина [17], где получены общие решения для всех возможных вещественных значений параметров  $a, b$  и построены решения задачи Коши.

Краевые задачи для уравнения Эйлера – Пуассона – Дарбу с матричными коэффициентами были рассмотрены А. А. Андреевым [2], [1], который построил решения различных краевых задач для системы двух уравнений и другими авторами [19],[14].

**2. Постановка задачи.** Рассмотрим систему  $n$  дифференциальных уравнений в частных производных в матричной записи:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{2G}{y} \frac{\partial U}{\partial y} = 0, \tag{1}$$

где  $U = (u_1, \dots, u_n)^T, G \in R^{n \times n}$ .

В работе [2] построена матрица Римана и с ее помощью получено решение задачи Коши для системы (1) в случае, когда  $G - 2 \times 2$  матрица и её спектр принадлежит интервалу  $(-1/2, 1/2)$ . В [11], [10] получены решения задачи Коши для случаев, когда собственные значения матрицы  $G \in R^{n \times n}$  - комплексно-сопряженные с действительной частью из интервалов  $(0, 1/2)$  и  $(-1/2, 0)$  соответственно и для случая, когда матрица  $G$  является нильпотентной.

Цель данной работы – найти решение задачи Коши для системы (1) для случая, когда матрица  $G$  имеет одно собственное значение  $\lambda$  кратности  $n$  и

$$\lambda \in R, \lambda \in \left(\frac{1}{2}, 1\right), \tag{2}$$

или пару комплексно-сопряженных собственных значений  $\lambda, \bar{\lambda}$  кратности  $n/2$

$$\lambda = \alpha + i\beta, \bar{\lambda} = \alpha - i\beta, \alpha \in \left(\frac{1}{2}, 1\right). \tag{3}$$

Хорошо известно, что задача Коши в классической постановке для собственных значений из рассматриваемого интервала является некорректной [5].

Аналогично подходу, предложенному С. А. Терсеновым [15] для уравнений, для системы (1) эта особенность может быть скомпенсирована добавлением веса как к первому, так и ко второму начальному условию. Таким образом, задача может быть сформулирована в следующем виде.

**Задача Коши.** Найти вектор-функцию  $U(x, y)$ , удовлетворяющую следующим условиям:

1.  $U(x, y) \in C(\bar{D}) \cap C^2(D), D = \{(x, y) | 0 < -y < x < y + 1\}$
2.  $U(x, y)$  удовлетворяет системе (1)
3. выполняются начальные условия

$$(-y)^{2G-E} U(x, 0) = \tau(x), x \in \bar{I} \tag{4}$$

$$\lim_{y \rightarrow -0} (-y) \frac{\partial U}{\partial y} + (2G - E)U = \nu(x), x \in I = ]0, 1[ \tag{5}$$

где  $\tau(x) = (\tau_1(x), \dots, \tau_n(x))^T, \nu(x) = (\nu_1(x), \dots, \nu_n(x))^T, K(y) = (-y)^{2G} -$  функциональная матрица, полностью определяемая спектром матрицы  $G$ .

**3. Метод Римана.** В характеристических координатах

$$\begin{cases} \xi = x + y \\ \eta = x - y \end{cases}$$

область  $D$  переходит в область  $H : \{(\xi, \eta) | 0 < \xi < \eta < 1\}$ , матричное уравнение (1) редуцируется к системе уравнений Эйлер – Пуассона – Дарбу специального вида

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{G}{\eta - \xi} \frac{\partial U}{\partial \xi} - \frac{G}{\eta - \xi} \frac{\partial U}{\partial \eta} = 0,$$

а краевые условия примут следующий вид

$$\lim_{\eta \rightarrow \xi + 0} \left(\frac{\eta - \xi}{2}\right)^{2G-E} U(\xi, \xi) = \tau(\xi), \xi \in \bar{I},$$

$$\lim_{\eta \rightarrow \xi+0} \frac{\eta - \xi}{2} \left( \frac{\partial U}{\partial \xi} - \frac{\partial U}{\partial \eta} \right) + (2G - E)U = v(\xi), \xi \in I.$$

**4. Решение Задачи Коши для случая действительных собственных значений  $\lambda \in (1/2, 0)$ .** Известно [16], что выполнение условия

$$\text{rank}(G - \lambda E)^{n-1} - 2\text{rank}(G - \lambda E)^n + \text{rank}(G - \lambda E)^{n+1} = 1$$

означает, что существует матрица перехода к жорданову базису  $Q$  такая, что

$$Q^{-1}GQ = J(\lambda),$$

где  $J(\lambda)$  – жорданова клетка порядка  $n$ , соответствующая действительному собственному значению  $\lambda$ ,

$$J(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Тогда система уравнений редуцируется к

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{J}{\eta - \xi} \left( \frac{\partial W}{\partial \xi} - \frac{\partial W}{\partial \eta} \right) = 0, \quad (6)$$

где  $W = Q^{-1}U$ .

Задача Коши для системы (6):

$$\lim_{\eta \rightarrow \xi+0} \left( \frac{\eta - \xi}{2} \right)^{2G-E} W(\xi, \xi) = \tau(\xi), \xi \in \bar{I}, \quad (7)$$

$$\lim_{\eta \rightarrow \xi+0} \frac{\eta - \xi}{2} \left( \frac{\partial W}{\partial \xi} - \frac{\partial W}{\partial \eta} \right) + (2G - E)W = v(\xi), \xi \in I. \quad (8)$$

Матрица Римана для системы (6) имеет вид

$$R(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0) = f(J) = V^J {}_2F_1 \left( \begin{matrix} J, J \\ 1 \end{matrix}; \sigma \right),$$

где  $\sigma = -\frac{(\xi - \xi_0)(\eta - \eta_0)}{(\xi - \eta_0)(\xi_0 - \eta)}$ ,  $V = \frac{(\eta - \xi)^2}{(\eta - \xi_0)(\eta_0 - \xi)}$ ,  ${}_2F_1 \left( \begin{matrix} J, J \\ 1 \end{matrix}; \sigma \right)$  – гипергеометрическая функция Гаусса.

Если  $W(\xi, \eta)$  является решением (6), а  $R(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0)$  – матрица Римана этой системы, то, используя свойства матрицы Римана и векторный аналог тождества Грина [6], получаем

$$W(\xi_0, \eta_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \frac{1}{2}(RU) \right) \Big|_{\substack{\xi = \eta_0 - \varepsilon \\ \eta = \eta_0}} + \frac{1}{2}(RU) \Big|_{\substack{\xi = \xi_0 \\ \eta = \xi_0 + \varepsilon}} + \frac{1}{2} \int_{\xi_0}^{\eta_0 - \varepsilon} R \left( \frac{\partial U}{\partial \eta} - \frac{\partial U}{\partial \xi} \right) \Big|_{\eta = \xi + \varepsilon} d\xi - \frac{1}{2} \int_{\xi_0}^{\eta_0 - \varepsilon} \left( \frac{\partial R}{\partial \eta} - \frac{\partial R}{\partial \xi} + \frac{4RJ}{\xi - \eta} \right) U \Big|_{\eta = \xi + \varepsilon} d\xi.$$

Очевидно,  $W(\xi_0, \eta_0)$  можно записать в виде:

$$W(\xi_0, \eta_0) = \sum_{k=1}^n I(J, w_k) e_k, \text{ где } e_k = (e_{k1}, e_{k2}, \dots, e_{kn}), e_{ki} = 0, i \neq k, e_{kk} = 1, \quad (9)$$

$w_k$  – компоненты вектора  $W$ ,

$$I(J, w_k) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \frac{1}{2}(f(J)w_k) \right) \Big|_{\substack{\xi = \eta_0 - \varepsilon \\ \eta = \eta_0}} + \frac{1}{2}(f(J)w_k) \Big|_{\substack{\xi = \xi_0 \\ \eta = \xi_0 + \varepsilon}} + \frac{1}{2} \int_{\xi_0}^{\eta_0 - \varepsilon} f(J) \times \left( \frac{\partial w_k}{\partial \eta} - \frac{\partial w_k}{\partial \xi} \right) \Big|_{\eta = \xi + \varepsilon} d\xi - \frac{1}{2} \int_{\xi_0}^{\eta_0 - \varepsilon} \left( \frac{\partial f(J)}{\partial \eta} - \frac{\partial f(J)}{\partial \xi} + \frac{4f(J)J}{\xi - \eta} \right) w_k \Big|_{\eta = \xi + \varepsilon} d\xi.$$

Известно [9], что если  $J$  – жорданова клетка, то функция от матрицы  $I(J, w_k)$  может записана в виде

$$I(J, w_k) = \begin{pmatrix} I(\lambda, w_k) & \frac{I'_\lambda(\lambda, w_k)}{1!} & \dots & \frac{I_\lambda^{(n-1)}(\lambda, w_k)}{(n-1)!} \\ 0 & I(\lambda, w_k) & \dots & \frac{I_\lambda^{(n-2)}(\lambda, w_k)}{(n-2)!} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & I(\lambda, w_k) \end{pmatrix}, \quad (10)$$

где

$$I(\lambda, w) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \frac{1}{2} f(\lambda) w \right) \Big|_{\substack{\xi = \eta_0 - \varepsilon \\ \eta = \eta_0}} + \frac{1}{2} f(\lambda) w \Big|_{\substack{\xi = \xi_0 \\ \eta = \xi_0 + \varepsilon}} + \frac{1}{2} \int_{\xi_0}^{\eta_0 - \varepsilon} f(\lambda) \times \\ \times \left( \frac{\partial w}{\partial \eta} - \frac{\partial w}{\partial \xi} \right) \Big|_{\eta = \xi + \varepsilon} d\xi - \frac{1}{2} \int_{\xi_0}^{\eta_0 - \varepsilon} \left( \frac{\partial f(\lambda)}{\partial \eta} - \frac{\partial f(\lambda)}{\partial \xi} + \frac{4f(\lambda)\lambda}{\xi - \eta} \right) w \Big|_{\eta = \xi + \varepsilon} d\xi = I_1 + I_2 + I_3 + I_4. \quad (11)$$

Подставляя (10) в (9), получаем

$$W(\xi_0, \eta_0) = \begin{pmatrix} I(\lambda, w_1) + \frac{I'_\lambda(\lambda, w_2)}{1!} + \frac{I''_{\lambda\lambda}(\lambda, w_3)}{2!} + \dots + \frac{I_\lambda^{(n-1)}(\lambda, w_n)}{(n-1)!} \\ I(\lambda, w_2) + \frac{I'_\lambda(\lambda, w_3)}{1!} + \dots + \frac{I_\lambda^{(n-2)}(\lambda, w_n)}{(n-2)!} \\ \dots \\ I(\lambda, w_n) \end{pmatrix} = \\ = EI(\lambda, W) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{H^k}{k!} \frac{\partial^k I(\lambda, W)}{\partial \lambda^k}, \quad (12)$$

где  $H$  –  $n \times n$  матрица вида

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Выполняя в выражении (12) замену  $W = Q^{-1}U$ , получим

$$U(\xi_0, \eta_0) = EI(\lambda, U) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{QH^kQ^{-1}}{k!} \frac{\partial^k I(\lambda, U)}{\partial \lambda^k} = EI(\lambda, U) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(G - \lambda E)^k}{k!} \frac{\partial^k I(\lambda, U)}{\partial \lambda^k}.$$

Вычислим интеграл (11).

$$I_1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 2^{2\lambda-1} \tau(\eta_0) \varepsilon^{1-\lambda} {}_2F_1 \left( \begin{matrix} \lambda, \lambda \\ 1 \end{matrix}; 0 \right) = 0,$$

$$I_2 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 2^{2\lambda-1} \tau(\xi_0) \varepsilon^{1-\lambda} {}_2F_1 \left( \begin{matrix} \lambda, \lambda \\ 1 \end{matrix}; 0 \right) = 0.$$

Для вычисления  $I_3$  применим хорошо известную формулу автотрансформации

$$I_3 = \frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\xi_0}^{\eta_0 - \varepsilon} f(\lambda) (w_\eta - w_\xi) \Big|_{\eta = \xi + \varepsilon} d\xi = \frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\xi_0}^{\eta_0 - \varepsilon} \left( \frac{(\eta - \xi)^2}{(\eta_0 - \xi_0)} \right) {}_2F_1 \left( \begin{matrix} \lambda, \lambda \\ 1 \end{matrix}; \sigma \right) (w_\eta - w_\xi) \Big|_{\eta = \xi + \varepsilon} d\xi = \\ = \frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\xi_0}^{\eta_0 - \varepsilon} \frac{(\eta_0 - \xi_0)^{1-2\lambda}}{(\eta_0 - \xi)^{1-\lambda} (\eta - \xi_0)^{1-\lambda}} \frac{\Gamma(2\lambda - 1)}{\Gamma^2(\lambda)} \frac{\eta - \xi}{2} (w_\eta - w_\xi) \Big|_{\eta = \xi + \varepsilon} d\xi.$$

Для вычисления  $I_4$  используем формулу аналитического продолжения гипергеометрической функции и формулы дифференцирования [4]

$${}_2F_1 \left( \begin{matrix} \lambda, \lambda \\ 1 \end{matrix}; \sigma \right) = \frac{\Gamma(1 - 2\lambda)}{\Gamma^2(1 - \lambda)} {}_2F_1 \left( \begin{matrix} \lambda, \lambda \\ 2\lambda \end{matrix}; \sigma \right) + \frac{\Gamma(2\lambda - 1)}{\Gamma^2(\lambda)} {}_2F_1 \left( \begin{matrix} 1 - \lambda, 1 - \lambda \\ 2 - 2\lambda \end{matrix}; \sigma \right),$$

$$I_4 = \frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\xi_0}^{\eta_0 - \varepsilon} \left( R_\xi - R_\eta + \frac{4\lambda w}{\eta - \xi} d\xi \right) = \frac{\Gamma(2\lambda - 1)}{\Gamma(\lambda)\Gamma(\lambda)} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\xi_0}^{\eta_0 - \varepsilon} (2\lambda - 1) \frac{(\eta_0 - \xi_0)^{1-2\lambda} w}{(\eta_0 - \xi)^{1-\lambda} (\eta - \xi_0)^{1-\lambda}} d\xi +$$

$$+ \frac{\Gamma(2-2\lambda)}{\Gamma(1-\lambda)\Gamma(1-\lambda)} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\xi_0}^{\eta_0 - \varepsilon} \frac{(\eta - \xi)^{2\lambda-1} w}{(\eta_0 - \xi)^\lambda (\eta - \xi_0)^\lambda} d\xi = I_{41} + I_{42}.$$

Переходя к пределу при  $\varepsilon \rightarrow 0$  и подставляя начальные условия в выражения для  $I_{42}$  и  $I_3 + I_{41}$ , получим

$$I(\lambda, U) = K_1(1-\lambda)2^{2\lambda-1} \int_{\xi_0}^{\eta_0} \frac{\tau(t)dt}{[\varphi(t)]^\lambda} + K_2(1-\lambda)(\eta_0 - \xi_0)^{1-2\lambda} \int_{\xi_0}^{\eta_0} \frac{v(t)dt}{[\varphi(t)]^{1-\lambda}}, \quad (14)$$

где

$$K_1(\lambda) = \frac{\Gamma(2\lambda)}{\Gamma^2(\lambda)}, K_2(\lambda) = \frac{\Gamma(1-2\lambda)}{\Gamma^2(1-\lambda)}, \varphi(t) = (\eta_0 - t)(t - \xi_0).$$

Из (14) следует бесконечная дифференцируемость функции  $I(\lambda, w_k)$  по параметру  $\lambda$ . Производные  $I(\lambda, w_k)$  будут иметь вид

$$I^{(k)}(\lambda, U) = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \left( K_2^{(j)}(1-\lambda)(\eta_0 - \xi_0)^{1-2\lambda} \int_{\xi_0}^{\eta_0} v(t)[\varphi(t)]^{\lambda-1} \times \left( \ln \frac{\varphi(t)}{(\eta_0 - \xi_0)^2} \right)^{k-j} dt + \right. \\ \left. + K_1^{(j)}(1-\lambda)2^{2\lambda-1} \int_{\xi_0}^{\eta_0} \tau(t)[\varphi(\xi)]^{-\lambda} \left( \ln \frac{4}{\varphi(t)} \right)^{k-j} dt \right) = I^{(0)}(\lambda, U),$$

где  $K_1^{(j)}(\lambda), K_2^{(j)}(\lambda)$  выражаются через полигамма-функцию  $\Psi^{(k)}(z)$  [4]

$$K_1'(\lambda) = \frac{\Gamma(2\lambda)}{\Gamma^2(\lambda)} (-\Psi(\lambda) + \Psi(2\lambda)),$$

$$K_1''(\lambda) = \frac{\Gamma(2\lambda)}{\Gamma^2(\lambda)} ((-\Psi(\lambda) + \Psi(2\lambda))^2 + (-\Psi'(\lambda) + 2\Psi'(2\lambda))),$$

...

$$K_2'(\lambda) = 2 \frac{\Gamma(1-2\lambda)}{\Gamma^2(1-\lambda)} (\Psi(1-\lambda) - \Psi(1-2\lambda)),$$

$$K_2''(\lambda) = 2 \frac{\Gamma(1-2\lambda)}{\Gamma^2(1-\lambda)} ((\Psi(1-\lambda) - \Psi(1-2\lambda))^2 + (\Psi'(1-\lambda) + 2\Psi'(1-2\lambda))),$$

...

Возвращаясь к переменным  $(x, y)$ , получим решение задачи Коши (4),(5) для уравнения (1)

$$U(x, y) = EL(\lambda, U) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(G - \lambda E)^k}{k!} \frac{\partial^k L(\lambda, U)}{\partial \lambda^k}, \quad (15)$$

$$L^{(k)}(\lambda, U) = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \left( K_2^{(j)}(1-\lambda)(-2y)^{1-2\lambda} \int_{x+y}^{x-y} v(t)[\psi(t)]^{\lambda-1} \times \left( \ln \frac{\psi(t)}{(-2y)^2} \right)^{k-j} dt + \right. \\ \left. + K_1^{(j)}(\lambda)2^{2\lambda-1} \int_{x+y}^{x-y} \tau(t)[\psi(\xi)]^{-\lambda} \left( \ln \frac{4}{\psi(t)} \right)^{k-j} dt \right), \quad (16)$$

где  $\psi(t) = (x - y - t)(t - x - y)$ .

**5. Решение Задачи Коши для случая комплексно-сопряженных собственных значений  $Re(\lambda) \in (1/2, 1)$ .**

Из свойств функции от матрицы следует, что вектор-функция  $U(x, y)$  есть вещественная функция даже в том случае, когда характеристические числа матрицы  $G$  комплексно-сопряженные. Выполнение условий (3) и

$$rank(G - \lambda E)^{n/2-1} - 2rank(G - \lambda E)^{n/2} + rank(G - \lambda E)^{n/2+1} = 1$$

означает, что существует матрица перехода к жорданову базису  $Q$  такая, что

$$Q^{-1}GQ = J = P_n(\alpha, \beta),$$



$$T^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & i & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & i \\ 1 & -i & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -i & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -i \end{pmatrix}.$$

Вычисляя произведение  $Tf(J)T^{-1}$ , получим формулу (17). По лемме 1, функция от матрицы  $P_n(\alpha, \beta)$  представима в виде:

$$f(P_n(\alpha, \beta)) = \begin{pmatrix} F & F_1 & \dots & F_{n/2-1} \\ 0 & F & \dots & F_{n/2-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & F \end{pmatrix}, \text{ где}$$

$$F = \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(f(\lambda)) & \operatorname{Im}(f(\lambda)) \\ -\operatorname{Im}(f(\lambda)) & \operatorname{Re}(f(\lambda)) \end{pmatrix}, \quad F_k = \begin{pmatrix} \frac{\operatorname{Re}(f^{(k)}(\lambda))}{k!} & \frac{\operatorname{Im}(f^{(k)}(\lambda))}{k!} \\ -\frac{\operatorname{Im}(f^{(k)}(\lambda))}{k!} & \frac{\operatorname{Re}(f^{(k)}(\lambda))}{k!} \end{pmatrix}.$$

Рассуждая аналогично случаю  $\lambda \in R$ , получим

$$W(\xi_0, \eta_0) = E \operatorname{Re}(I(\lambda, W)) + B_1 \operatorname{Im}(I(\lambda, W)) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n/2-1} \left( \frac{H^k}{k!} \operatorname{Re} \left( \frac{\partial^k I(\lambda, W)}{\partial \lambda^k} \right) + \frac{B_{k+1}}{k!} \operatorname{Im} \left( \frac{\partial^k I(\lambda, W)}{\partial \lambda^k} \right) \right),$$

где  $H$  –  $n \times n$  матрица вида (13),  $B_k$  –  $n \times n$  матрицы

$$B_1 = \begin{pmatrix} N & 0 & \dots & 0 \\ 0 & N & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & N \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 0 & N & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & N & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & N \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \dots,$$

$$B_{n/2} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & N \\ 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ где } N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$U(\xi_0, \eta_0) = E \operatorname{Re}(I(\lambda, U)) + Q B_1 Q^{-1} \operatorname{Im}(I(\lambda, U)) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n/2-1} \left( \frac{Q H^k Q^{-1}}{k!} \operatorname{Re} \left( \frac{\partial^k I(\lambda, U)}{\partial \lambda^k} \right) + \frac{Q B_{k+1} Q^{-1}}{k!} \operatorname{Im} \left( \frac{\partial^k I(\lambda, U)}{\partial \lambda^k} \right) \right).$$

Вычисляя значение выражений для  $\operatorname{Re}(I(\lambda, U))$ ,  $\operatorname{Im}(I(\lambda, U))$ , переходя к пределу, подставляя начальные условия, и возвращаясь к переменным  $(x, y)$  получаем решение задачи (1)

$$U(x, y) = E \operatorname{Re}(L(\lambda, U)) + Q B_1 Q^{-1} \operatorname{Im}(L(\lambda, U)) +$$

$$\sum_{k=1}^{n/2-1} \left( \frac{Q H^k Q^{-1}}{k!} \operatorname{Re} \left( \frac{\partial^k L(\lambda, U)}{\partial \lambda^k} \right) + \frac{Q B_{k+1} Q^{-1}}{k!} \operatorname{Im} \left( \frac{\partial^k L(\lambda, U)}{\partial \lambda^k} \right) \right). \quad (18)$$

$$\operatorname{Re}(L(\lambda, U)) = (\operatorname{Re}(M_2(1-\lambda)) \cos(2\beta \ln(-2y)) + \operatorname{Im}(M_2(1-\lambda)) \sin(2\beta \ln(-2y))) \times$$

$$\times (-2y)^{1-2\alpha} \int_{x+y}^{x-y} v(\xi) \psi^{\alpha-1}(\xi) \cos(\beta \ln \psi(\xi)) d\xi +$$

$$+ (\operatorname{Re}(M_2(1-\lambda)) \sin(2\beta \ln(-2y)) - \operatorname{Im}(M_2(1-\lambda)) \cos(2\beta \ln(-2y))) \times$$

$$\times (-2y)^{1-2\alpha} \int_{x+y}^{x-y} v(\xi) \psi^{\alpha-1}(\xi) \sin(\beta \ln \psi(\xi)) d\xi -$$

$$- 2^{2\alpha-1} (\operatorname{Re}(M_1(1-\lambda)) \cos(\beta \ln 4) - \operatorname{Im}(M_1(1-\lambda)) \sin(\beta \ln 4)) \times$$

$$\begin{aligned} & \times \int_{x+y}^{x-y} \tau(\xi) \psi^{-\alpha}(\xi) \cos(\beta \ln \psi(\xi)) d\xi - \\ & - 2^{2\alpha-1} (\operatorname{Re}(M_1(1-\lambda)) \sin(\beta \ln 4) + \operatorname{Im}(M_1(1-\lambda)) \cos(\beta \ln 4)) \times \\ & \times \int_{x+y}^{x-y} \tau(\xi) \psi^{-\alpha}(\xi) \sin(\beta \ln \psi(\xi)) d\xi \end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(L(\lambda, U)) = & \operatorname{Im}(M_2(1-\lambda)) \cos(2\beta \ln(-2y)) - \operatorname{Re}(M_2(1-\lambda)) \sin(2\beta \ln(-2y)) \times \\ & \times (-2y)^{1-2\alpha} \int_{x+y}^{x-y} \nu(\xi) \psi^{\alpha-1}(\xi) \cos(\beta \ln \psi(\xi)) d\xi + \\ & + (\operatorname{Re}(M_2(1-\lambda)) \cos(2\beta \ln(-2y)) + \operatorname{Im}(M_2(1-\lambda)) \sin(2\beta \ln(-2y))) \times \\ & \times (-2y)^{1-2\alpha} \int_{x+y}^{x-y} \nu(\xi) \psi^{\alpha-1}(\xi) \sin(\beta \ln \psi(\xi)) d\xi - \\ & - 2^{2\alpha-1} (\operatorname{Re}(M_1(1-\lambda)) \sin(\beta \ln 4) + \operatorname{Im}(M_1(1-\lambda)) \cos(\beta \ln 4)) \times \\ & \times \int_{x+y}^{x-y} \tau(\xi) \psi^{-\alpha}(\xi) \cos(\beta \ln \psi(\xi)) d\xi - \\ & - 2^{2\alpha-1} (\operatorname{Re}(M_1(1-\lambda)) \cos(\beta \ln 4) - \operatorname{Im}(M_1(1-\lambda)) \sin(\beta \ln 4)) \times \\ & \times \int_{x+y}^{x-y} \tau(\xi) \psi^{-\alpha}(\xi) \sin(\beta \ln \psi(\xi)) d\xi, \end{aligned} \tag{20}$$

где

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(M_1(\lambda)) &= (2\alpha - 1)\operatorname{Re}(M_2(1-\lambda)) - 2\beta\operatorname{Im}(M_2(1-\lambda)), \\ \operatorname{Im}(M_1(\lambda)) &= (2\alpha - 1)\operatorname{Im}(M_2(1-\lambda)) + 2\beta\operatorname{Re}(M_2(1-\lambda)), \\ \operatorname{Re}(M_2(\lambda)) &= \frac{\sin(\pi\alpha) \operatorname{ch}(\pi\beta)}{\pi} \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{-2\alpha} \cos\left(\beta \ln \frac{t}{(1-t)^2}\right) dt - \\ & - \frac{\cos(\pi\alpha) \operatorname{sh}(\pi\beta)}{\pi} \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{-2\alpha} \sin\left(\beta \ln \frac{t}{(1-t)^2}\right) dt, \\ \operatorname{Im}(M_2(\lambda)) &= \frac{\sin(\pi\alpha) \operatorname{ch}(\pi\beta)}{\pi} \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{-2\alpha} \sin\left(\beta \ln \frac{t}{(1-t)^2}\right) dt - \\ & - \frac{\cos(\pi\alpha) \operatorname{sh}(\pi\beta)}{\pi} \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{-2\alpha} \cos\left(\beta \ln \frac{t}{(1-t)^2}\right) dt, \\ \operatorname{Re}\left(\frac{\partial^k L(\lambda, U)}{\partial \lambda^k}\right) &= \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \left[ (\operatorname{Re}(M_2^{(j)}(1-\lambda)) \cos(2\beta \ln(-2y))) + \right. \\ & \left. + \operatorname{Im}(M_2^{(j)}(1-\lambda)) \sin(2\beta \ln(-2y)) \right] \times \\ & \times (-2y)^{1-2\alpha} \int_{x+y}^{x-y} \nu(\xi) \psi^{\alpha-1}(\xi) \cos(\beta \ln \psi(\xi)) \left(\ln \frac{\psi(\xi)}{(-2y)^2}\right)^{k-j} d\xi + \\ & + (\operatorname{Re}(M_2^{(j)}(1-\lambda)) \sin(2\beta \ln(-2y)) - \operatorname{Im}(M_2^{(j)}(1-\lambda)) \cos(2\beta \ln(-2y))) \times \\ & \times (-2y)^{1-2\alpha} \int_{x+y}^{x-y} \nu(\xi) \psi^{\alpha-1}(\xi) \sin(\beta \ln \psi(\xi)) \left(\ln \frac{\psi(\xi)}{(-2y)^2}\right)^{k-j} d\xi - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2^{2\alpha-1}(\operatorname{Re}(M_1^{(j)}(1-\lambda)) \cos(\beta \ln 4) - \operatorname{Im}(M_1^{(j)}(1-\lambda)) \sin(\beta \ln 4)) \times \\
& \quad \times \int_{x+y}^{x-y} \tau(\xi) \psi^{-\alpha}(\xi) \cos(\beta \ln \psi(\xi)) \left( \ln \frac{4}{\psi(\xi)} \right)^{k-j} d\xi - \\
& -2^{2\alpha-1}(\operatorname{Re}(M_1^{(j)}(1-\lambda)) \sin(\beta \ln 4) + \operatorname{Im}(M_1^{(j)}(1-\lambda)) \cos(\beta \ln 4)) \times \\
& \quad \times \int_{x+y}^{x-y} \tau(\xi) \psi^{-\alpha}(\xi) \sin(\beta \ln \psi(\xi)) \left( \ln \frac{4}{\psi(\xi)} \right)^{k-j} d\xi \Big], \\
& \operatorname{Im} \left( \frac{\partial^k L(\lambda, U)}{\partial \lambda^k} \right) = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \left[ \operatorname{Im}(M_2^{(j)}(1-\lambda)) \cos(2\beta \ln(-2y)) - \right. \\
& \quad \left. - \operatorname{Re}(M_2^{(j)}(1-\lambda)) \sin(2\beta \ln(-2y)) \right) \times \\
& \quad \times (-2y)^{1-2\alpha} \int_{x+y}^{x-y} v(\xi) \psi^{\alpha-1}(\xi) \cos(\beta \ln \psi(\xi)) \left( \ln \frac{\psi(\xi)}{(-2y)^2} \right)^{k-j} d\xi + \\
& + (\operatorname{Re}(M_2^{(j)}(1-\lambda)) \cos(2\beta \ln(-2y)) + \operatorname{Im}(M_2^{(j)}(1-\lambda)) \sin(2\beta \ln(-2y))) \times \\
& \quad \times (-2y)^{1-2\alpha} \int_{x+y}^{x-y} v(\xi) \psi^{\alpha-1}(\xi) \sin(\beta \ln \psi(\xi)) \left( \ln \frac{\psi(\xi)}{(-2y)^2} \right)^{k-j} d\xi + \\
& -2^{2\alpha-1}(\operatorname{Re}(M_1^{(j)}(1-\lambda)) \sin(\beta \ln 4) + \operatorname{Im}(M_1^{(j)}(1-\lambda)) \cos(\beta \ln 4)) \times \\
& \quad \times \int_{x+y}^{x-y} \tau(\xi) \psi^{-\alpha}(\xi) \cos(\beta \ln \psi(\xi)) \left( \ln \frac{4}{\psi(\xi)} \right)^{k-j} d\xi - \\
& -2^{2\alpha-1}(\operatorname{Re}(M_1^{(j)}(1-\lambda)) \cos(\beta \ln 4) - \operatorname{Im}(M_1^{(j)}(1-\lambda)) \sin(\beta \ln 4)) \times \\
& \quad \times \int_{x+y}^{x-y} \tau(\xi) \psi^{-\alpha}(\xi) \sin(\beta \ln \psi(\xi)) \left( \ln \frac{4}{\psi(\xi)} \right)^{k-j} d\xi \\
& \operatorname{Re}(M_1^{(k)}(\lambda)) = (-1)^{k-1} ((1-2\alpha) \operatorname{Re} M_2^{(k)}(1-\lambda) + 2\beta \operatorname{Im}(M_2^{(k)}(1-\lambda)) + \\
& \quad + 2k \operatorname{Re}(M_2^{(k-1)}(1-\lambda))), \\
& \operatorname{Im}(M_1^{(k)}(\lambda)) = (-1)^{k-1} ((1-2\alpha) \operatorname{Im} M_2^{(k)}(1-\lambda) - 2\beta \operatorname{Re}(M_2^{(k)}(1-\lambda)) + \\
& \quad + 2k \operatorname{Im}(M_2^{(k-1)}(1-\lambda))), \\
& \operatorname{Re}(M_2^{(k)}(\lambda)) = \sum_{j=0}^k \binom{n}{k} \pi^{k-1} \left( \sin \left( \pi \left( \alpha + \frac{k}{2} \right) \right) \operatorname{ch}(\pi \beta) \times \right. \\
& \quad \times \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{-2\alpha} \cos \left( \beta \ln \frac{t}{(1-t)^2} \right) \left( \ln \frac{t}{(1-t)^2} \right)^{k-j} - \\
& \quad \left. - \cos \left( \pi \left( \alpha + \frac{k}{2} \right) \right) \operatorname{sh}(\pi \beta) \times \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{-2\alpha} \sin \left( \beta \ln \frac{t}{(1-t)^2} \right) \left( \ln \frac{t}{(1-t)^2} \right)^{k-j} \right), \\
& \operatorname{Im}(M_2^{(k)}(\lambda)) = \sum_{j=0}^k \binom{n}{k} \pi^{k-1} \left( \sin \left( \pi \left( \alpha + \frac{k}{2} \right) \right) \operatorname{ch}(\pi \beta) \times \right. \\
& \quad \times \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{-2\alpha} \sin \left( \beta \ln \frac{t}{(1-t)^2} \right) \left( \ln \frac{t}{(1-t)^2} \right)^{k-j} +
\end{aligned}$$

$$+ \cos \left( \pi \left( \alpha + \frac{k}{2} \right) \right) \operatorname{sh}(\pi\beta) \times \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{-2\alpha} \cos \left( \beta \ln \frac{t}{(1-t)^2} \right) \left( \ln \frac{t}{(1-t)^2} \right)^{k-j} dt.$$

Убедиться в том, что полученные решения удовлетворяют уравнению и начальным данным можно непосредственной проверкой. Из самого способа получения решений и их вида следует единственность решения поставленных задач. Таким образом, справедливы следующие теоремы.

#### 6. Основные результаты.

**Теорема 1.** Если  $\tau(x) \in C^2[0, 1]$ , и  $v(x) \in C^2(0, 1)$ , классическое решение задачи Коши (4), (5) для уравнения (1) в области  $D = \{(x, y) | 0 < -y < x < y + 1\}$  при  $1/2 < \lambda < 1$  имеет вид (15), (16)

**Теорема 2.** Если  $\tau(x) \in C^2[0, 1]$ , и  $v(x) \in C^2(0, 1)$ , классическое решение задачи Коши (4), (5) для уравнения (1) в области  $D = \{(x, y) | 0 < -y < x < y + 1\}$  при комплексно-сопряженных собственных значениях  $\lambda$ ,  $1/2 < \operatorname{Re}(\lambda) < 1$  определяется формулами (18), (19), (20)

**Замечание 1.** Используя представленный в статье подход и результаты, можно получить решения для случая, когда матрица-коэффициент имеет  $k$  собственных значений различной кратности  $1/2 < \operatorname{Re}(\lambda_k) < 1$ . В этом случае каноническая форма матрицы  $G$  будет состоять из  $k$  жордановых клеток, исходная система редуцируется к  $k$  независимым системам, а решение может быть представлено в виде прямой суммы решений вспомогательных систем [13], как это было сделано в работе [3].

**Замечание 2.** Переходя к пределу при  $\beta \rightarrow 0$  в выражениях (17), (18), получим решение задачи для случая действительных собственных значений (15), (16).

#### Список литературы

1. Андреев А. А. 1983. Задачи Коши – Гурса и Дарбу для системы уравнений Эйлера – Пуассона – Дарбу (ЭПД). Межвузовский сборник научных трудов дифференциальные уравнения с частными производными: 53–57.
2. Андреев А. А. 1980. Об одном классе систем дифференциальных уравнений гиперболического типа. Дифференциальные уравнения: сб. науч. тр. пед. ин-тов РСФСР. Рязан. гос. пед. ин-т.: 9–14.
3. Андреев А. А., Максимова Е. А. 2015. Краевые задачи для матричного уравнения Эйлера – Пуассона – Дарбу с данными на характеристике. Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, (19)4: 603–612.
4. Бейтмен Г., Эрдейи А. 1973. Высшие трансцендентные функции. Т.1. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. М.: Наука, 296.
5. Бицадзе А. В. 1970. К теории одного класса уравнений смешанного типа. Некоторые проблемы математики и механики: 112–119.
6. Бицадзе А. В. 1959. Уравнения смешанного типа. М.: Издательство Академии наук СССР, 164.
7. Глушак А. В. 2016. Нелокальная задача для абстрактного уравнения Эйлера – Пуассона – Дарбу. Изв. Вузов. Матем., 6: 27–35.
8. Катрахов В. В., Ситник С. М. 2018. Метод операторов преобразования и краевые задачи для сингулярных эллиптических уравнений. Сингулярные дифференциальные уравнения, СМФН, М.: Российский университет дружбы народов, (64)2: 211–426.
9. Ланкастер П. 1982. Теория матриц. М.: Наука, 272.
10. Максимова Е. А. 2012. О задаче Коши для системы уравнений Эйлера – Пуассона – Дарбу с нильпотентным матричным коэффициентом. Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 3(28): 184–187.
11. Максимова Е. А. 2012. О задаче Коши для  $n$ -мерной системы уравнений Эйлера–Пуассона–Дарбу на плоскости. Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 1(26): 21–30.
12. Маричев О. И., Килбас А. А., Репин О. А. 2008. Краевые задачи для уравнений с частными производными с разрывными коэффициентами. Самара: Самарск. гос. экономический ун-т, 276.
13. Маркус М. and Минк Х. 1972. Обзор по теории матриц и матричных неравенств. М.: Наука, 232.
14. Спицын В. Л. 1999. О методе Римана – Адамара для одной системы гиперболического типа второго порядка. Вест. Сам. Гос. Тех. Ун-та. Сер. Физ.-мат. Науки, 7: 19-26.

15. Терсенов С. А. 1973. Введение в теорию уравнений, вырождающихся на границе: Учеб. пособие для вузов. Новосибирск: Изд-во Новосибирск. ун-та, 144.
16. Тыртышников Е. Е. 2007. Матричный анализ и линейная алгебра. М.: Физматлит, 480.
17. Хайруллин Р. С. 2014. Задача Коши для уравнения Эйлера – Пуассона – Дарбу. Казань: Казанский университет, 276.
18. Хайруллин Р. С. 1996. Задача Трикоми для одного уравнения с сингулярными коэффициентами. Известия Вузов. Математика, 3(40), 68–76.
19. Elianu I. 1953. Cercetari asupra sistemelor de ecuatii li neare cu derivate partiale de tip Laplace. Studii Si Cercetari Matematice, IV, 155-196.
20. Euler L. 1768. Institutiones calculi integralis, Opera Omnia. Ser. 1. T. 13. Leipzig, Berlin.
21. Darboux G. 1889. Leçons sur la theorie des surfaces, Part 2, Paris: Gauthier – Villers et Fils, 580.
22. Poisson S. D. 1823. Memoire sur l'integration des equations lineaires aux differences partielles, J. de L'Ecole Polytechnique, Ser. 1:215–248
23. Riemann B. 1860. Ueber die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite. Abhandlungen der Königkuichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 8: 43–65.

### References

1. Andreev A. A. 1983. Zadachi Koshi–Gursa i Darbu dlya sistemy uravnenij Ejlera – Puassona – Darbu (EPD) [Cauchy-Goursat and Darboux problems for the Euler-Poisson-Darboux system of equations (EPD)]. Mezhevuzovskij Sbornik Nauchnyh Trudov Differencial'nye Uravneniya S Chastnymi Proizvodnymi: 53–57.
2. Andreev A. A. 1980. Ob odnom klasse sistem differencial'nyh uravnenij giperbolicheskogo tipa [On one class of system of partial differential equations]. Differencial'nye uravneniya: sb. nauch. tr. ped. in-tov RSFSR. Ryazan. Gos. Ped. In-t. Publ.: 9–14.
3. Andreev A. A., Maksimova E. A. 2015. Boundary value problems for matrix Euler–Poisson–Darboux equation with data on a characteristic. Vestn. Sam. gos. tekhn. un-ta. Ser. Fiz.-mat. nauki (19)4: 603–612. (In Russian)
4. Erdelyi A., Magnus W., Oberhettinger F., Tricomi F. G. 1953. Higher transcendental functions. Vol. I / ed. H. Bateman. New York – Toronto – London: McGraw-Hill Book Co, Inc., 302.
5. Bicadze A. V. 1970. K teorii odnogo klassa uravnenij smeshannogo tipa [On the theory of a class of equations of mixed type]. Nekotorye problemy matematiki i mekhaniki: 112–119.
6. Bitsadze A. V. 1964. Equations of the Mixed Type. New York: Pergamon Press, 160.
7. Glushak A. V. 2016. Abstract Euler–Poisson–Darboux equation with nonlocal condition. Izv. Vuzov. Matem., 6: 27–35. (In Russian)
8. Katrakhov V. V., Sitnik S. M. 2018. The transmutation method and boundary-value problems for singular elliptic equations, In: Singular differential equations, CMFD, Moscow, Peoples' Friendship University of Russia (64)2: 211–426. (In Russian)
9. Lancaster P. Theory of Matrices. 1969. New York: Academic Press, 316.
10. Maksimova E. A. 2012. On cauchy problem for euler–poisson–darboux system with nilpotent matrix coefficient. Vestn. Sam. gos. tekhn. un-ta. Ser. Fiz.-mat. nauki, 3(28): 184–187. (In Russian)
11. Maksimova E. A. 2012. On cauchy problem for system of n Euler–Poisson–Darboux equations in the plane. Vestn. Sam. gos. tekhn. un-ta. Ser. Fiz.-mat. nauki, 1(26): 21–30. (In Russian)
12. Marichev O. I., Kilbas A. A., Repin O. A. 2008. Kraevye zadachi dlya uravnenij s chastnymi proizvodnymi s razryvnymi koefficientami [Boundary Value Problems for Partial Differential Equations with Discontinuous Coefficients]. Samara: Samarsk. gos. ekonomicheskij un-t, 276.
13. Markus M. and Mink H. 1972. Obzor po teorii matric i matrichnyh neravenstv [Review on matrix theory and matrix inequalities]. Moscow: Nauka Publ., 232.

14. Spicyn V. L. 1999. O metode Rimana – Adamara dlya odnoj sistemy giperbolicheskogo tipa vtorogo poryadka [On the Riemann – Hadamard method for a second-order system of hyperbolic type]. Vest. Sam. Gos. Tekh. Un-ta. Ser. Fiz.-mat. Nauki., 7: 19–26.
15. Tersenov S. A. 1973. Vvedenie v teoriyu uravnenij, vyzhdayushchih na granice [Introduction to the theory of equations that degenerate at the boundary]: Ucheb. posobie dlya vuzov . Novosibirsk: Izd-vo Novosibirsk. un-ta Publ., 144.
16. Tyrtysnikov E. E. 2007. Matrichnyj analiz i linejnaya algebra [ Matrix analysis and linear algebra]. Moscow: Fizmatlit Publ., 480.
17. Hajrullin R. S. 2014. Zadacha Koshi dlya uravneniya Ejlera – Puassona – Darbu [Cauchy problem for the Euler – Poisson – Darboux equation] – Kazan' : Kazanskij universitet Publ., 276.
18. Hajrullin R. S. 1996. Zadacha Triкоми dlya odnogo uravneniya s singulyarnymi koeficientami [Tricomi problem for one equation with singular coefficients]. Izvestiya Vuzov. Matematika Publ., 3(40), 68–76.
19. Elianu I. 1953. Cercetari asupra sistemelor de ecuatii li neare cu derivate partiale de tip Laplace. Studii Si Cercetari Matematice, IV, 155–196.
20. Euler L. 1768. Institutiones calculi integralis, Opera Omnia. Ser. 1. T. 13. Leipzig, Berlin.
21. Darboux G. 1889. Leçons sur la theorie des surfaces, Part 2, Paris: Gauthier–Villers et Fils 580.
22. Poisson S.D. 1823. Memoire sur l'integration des equations lineaires aux differences partielles, J. de L'Ecole Polytechnique, Ser. 1: 215–248.
23. Riemann B. 1860. Ueber die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite. Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 8: 43–65.

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Получена 03.03.2022

---

#### СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

**Максимова Екатерина Алексеевна** – специалист сектора олимпиад школьников, Ордена Трудового Красного Знамени федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский технический университет связи и информатики»

 <http://orcid.org/0000-0002-8839-9620>

ул. Авиамоторная, 8а, Москва, Россия

E-mail: [ekamaks@bk.ru](mailto:ekamaks@bk.ru)

#### INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

**Ekaterina Maksimova** – Moscow Technical University of Communication and Informatics, Moscow, Russia

## ФИЗИКА. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 536.46

DOI 10.52575/2687-0959-2022-54-1-52-59

### ПОЛУЧЕНИЕ И СВОЙСТВА НАНОКРИСТАЛЛОВ $ZnS_xSe_{1-x}$ , СИНТЕЗИРОВАННЫХ МЕТОДОМ САМОРАСПРОСТРАНЯЮЩЕГОСЯ ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНОГО СИНТЕЗА

Е. Г. Плахтий, В. С. Захвалинский

(Статья представлена членом редакционной коллегии С. В. Блажевичем)

Белгородский государственный национальный исследовательский университет, г. Белгород, 308015, Россия

E-mail: [plakhtii.ev@gmail.com](mailto:plakhtii.ev@gmail.com)

**Аннотация.** Методом самораспространяющегося высокотемпературного синтеза получены нанокристаллы твердых растворов  $ZnS_xSe_{1-x}$ . Полученная шихта представляет собой объединение нанокристаллов и поликристаллов. Поликристаллы образуются из-за высокой температуры реакции и невозможности мгновенного отведения тепла. Присутствует нелинейная зависимость заложенной шихты до синтеза и полученного после синтеза порошка. Рассчитаны размеры нанокристаллов  $ZnS_xSe_{1-x}$  методом Дебая – Шеррера. Максимальные размеры составили для сульфида и селенида цинка  $80 \pm 5$  нм и для всех остальных составов  $60 \pm 5$  нм. Полученные нами степени микронапряжения и плотности дислокаций в нанокристаллах  $ZnS_xSe_{1-x}$  характерны для однородных составов с высоким совершенством кристаллической структуры. Нанокристаллы для всех параметров  $x$  характеризуются присутствием гексагональной и кубической фазы. При уменьшении параметра  $x$  в нанокристаллах твердых растворов  $ZnS_xSe_{1-x}$  доля кубической фазы возрастает. Локальное окружение примесных ионов  $Mn^{2+}$  зависит от состава твердого раствора. В  $ZnS_xSe_{1-x}$  состава  $0.4 \leq x \leq 1$  ионы  $Mn^{2+}$  окружены ионами серы с константой сверхтонкой структуры  $A = 6.88 \div 6.91$  мТл, а в составах с  $x \leq 0.2$  ионы  $Mn^{2+}$  находятся в окружении ионов селена с константой сверхтонкой структуры  $A = 6.55$  мТл. В неосвещенных нанокристаллах  $ZnS_xSe_{1-x}$  составов  $0.8 \leq x \leq 1$  присутствует одиночная линия электронного парамагнитного резонанса (ЭПР) ионов  $Cr^{3+}$  с фактором  $g = 1.9998$ .

**Ключевые слова:** нанокристаллы  $ZnS_xSe_{1-x}$ , самораспространяющийся высокотемпературный синтез, рентгенодифракционный анализ, кристаллическая структура, спектры ЭПР

**Для цитирования:** Плахтий Е. Г., Захвалинский В. С. 2022. Получение и свойства нанокристаллов  $ZnS_xSe_{1-x}$ , синтезированных методом самораспространяющегося высокотемпературного синтеза. Прикладная математика & Физика. 54(1): 52–59. DOI 10.52575/2687-0959-2022-54-1-52-59

### OBTAINING AND PROPERTIES OF $ZnS_xSe_{1-x}$ NANOCRYSTALS SYNTHETIZED BY COMBUSTION SYNTHESIS

Evgenii Plakhtii, Vasily Zakhvalinskii

(Article submitted by a member of the editorial board S. V. Blazhevich)

Belgorod National Research University, Belgorod, 308015, Russia)

E-mail: [plakhtii.ev@gmail.com](mailto:plakhtii.ev@gmail.com)

Received February, 04, 2021

**Abstract.** We obtained nanocrystals of  $ZnS_xSe_{1-x}$  solid solutions by the combustion synthesis. The obtained charge is a combination of nanocrystals and polycrystals. The high reaction temperature and the impossibility of instantaneous heat removal form polycrystals. There is a nonlinear dependence of the incorporated charge before synthesis and the powder obtained after synthesis. The sizes of  $ZnS_xSe_{1-x}$  nanocrystals are calculated by the Debye-Scherrer method. The maximum dimensions were  $80 \pm 5$  nm for zinc sulfide and selenide and  $60 \pm 5$  nm for all other compositions. The obtained degrees of microstress and dislocation density in  $ZnS_xSe_{1-x}$  nanocrystals are typical for homogeneous compositions with a high perfection of the crystal structure. Nanocrystals for all parameters  $x$  are characterized by the presence of a hexagonal and cubic phase. The fraction of the cubic phase increases with a decrease in the parameter  $x$  in nanocrystals of  $ZnS_xSe_{1-x}$  solid solutions. The local environment of  $Mn^{2+}$  impurity ions depends on the composition of the solid solution. Sulfur ions with a hyperfine structure constant  $A = 6.88 \div 6.91$  mT surround  $Mn^{2+}$  ions in  $ZnS_xSe_{1-x}$  of composition  $0.4 \leq x \leq 1$ , and selenium ions with a hyperfine structure constant  $A = 6.55$  mT surround  $Mn^{2+}$  ions in compositions with  $x \leq 0.2$ . There is a single line of electron paramagnetic resonance (EPR) of  $Cr^{3+}$  ions with a factor  $g = 1.9998$  in unilluminated  $ZnS_xSe_{1-x}$  nanocrystals with compositions  $0.8 \leq x \leq 1$ .

**Key words:**  $ZnS_xSe_{1-x}$  nanocrystals, combustion synthesis, X-ray diffraction analysis, crystal structure, EPR spectra

**For citation:** Plakhtii Evgenii, Zakhvalinskii Vasily. 2022. Obtaining and properties of  $ZnS_xSe_{1-x}$  nanocrystals synthesized by combustion synthesis. *Applied Mathematics & Physics*. 54(1): 52–59. (in Russian)  
DOI 10.52575/2687-0959-2022-54-1-52-59

**1. Введение.** Твердые растворы (ТР)  $ZnS_xSe_{1-x}$  широко используются в твердотельной электронике, оптоэлектронике, акустоэлектронике, технике [7, 19, 23]. Эти соединения имеют ширину запрещенной зоны 2,6 – 3,91 эВ и являются перспективным материалом для оптоэлектронных приборов. Все химические элементы, их составляющие, нетоксичны и в изобилии имеются в земной коре. В последнее время применение данных твердых растворов в основном происходит в виде нанокристаллов (НК) [3, 5, 9]. Многие группы исследователей получают НК  $ZnS_xSe_{1-x}$  с помощью широкого спектра методов из газовой фазы (gas-based techniques): химического осаждения из паровой фазы (CVD), физического осаждения из паровой фазы (PVD), ионной имплантации (ion implantation), распыления (sputtering), лазерной абляции (laser ablation) и пиролиза аэрозоля (spray pyrolysis) [1, 2, 10, 16]. В этих технологиях возможность управления размером НК обеспечивают, регулируя параметры синтеза: температуру, давление, удельную мощность, расход газа и т. д. Также используются методы роста НК из растворов (solution-based techniques): восстановления (reduction), термического разложения (thermal decomposition), гидротермального процесса (hydrothermal process), печати (printing), а также используются основанные на гидролизе и алкоголизе (hydrolysis and alcoholysis) [8, 21, 24, 28]. Эти методы получения растворов представляют большой исследовательский интерес, так как они эффективны в синтезе НК с хорошим контролем размера, у них есть преимущества низкой температуры синтеза, технологической гибкости. Однако получение НК всеми перечисленными выше методами имеют некоторые недостатки, например, большую себестоимость и достаточно высокую сложность синтеза. Метод самораспространяющегося высокотемпературного синтеза (СВС) является одним из самых перспективных методов получения НК для соединений типа  $A_2B_6$  и обладает рядом преимуществ. Этот метод характеризуется высокой скоростью получения НК, возможностью получения НК в больших объемах, низкой себестоимостью и энергопотреблением на единицу продукции, простотой используемого оборудования и его экологической безопасностью [15, 22]. Метод СВС позволяет получить порошкообразные НК  $ZnS_xSe_{1-x}$  путем легко реализуемой высокотемпературной реакции смеси мелкодисперсных порошков Zn, S и Se, производить легирование НК непосредственно в процессе синтеза путем добавления соответствующих примесей в шихту. На сегодняшний день группами исследователей получены методом СВС и изучены некоторые физические и оптические свойства нанокристаллов ZnS с размерами 80 – 1000 нм [4, 14, 20], а также получены кристаллы ZnSe размерами 1 – 100 мкм и частично исследованы физические и оптические свойства [18, 27]. Ранее нами были рассмотрены НК  $ZnS_xSe_{1-x}$  легированные марганцем [12, 13]. Однако получению чистых НК  $ZnS_xSe_{1-x}$  методом СВС и некоторых присущих им особенностей до сих пор не было уделено достаточно внимания. В данной статье рассматривается получение НК  $ZnS_xSe_{1-x}$  с шагом параметра состава  $x = 0.2$  меньших размеров, с воспроизведенными и контролируемыми свойствами и низкой себестоимостью, преодолевающей ограничение дальнейшего расширения практического применения ТР НК  $ZnS_xSe_{1-x}$ .

**2. Методика эксперимента.** Синтез НК твердых растворов  $ZnS_xSe_{1-x}$  с шагом состава  $x = 0.2$  производился в кварцевой ампуле, помещенной в герметичный стальной реактор. В ампулу загружали механически смешанные порошки Zn, S и Se, взятые в соответствующих пропорциях. Предварительное перемешивание шихты проводилось с добавлением этилового спирта для улучшения процесса перемешивания. Соотношение S и Se в шихте при этом характеризуется параметром  $x_p$ . После сушки смеси инициация реакции синтеза проводилась тепловым импульсом, который обеспечивала нихромовая спираль, расположенная в верхней части реактора.

Синтез проводился при атмосферном давлении в воздушной среде. В полученных НК  $ZnS_xSe_{1-x}$  соотношение между S и Se определялось параметром  $x$ . Рентгенодифракционный анализ (РДА) полученных НК был проведен на дифрактометре ДРОН-2 с использованием излучения  $Co K\alpha$ . Спектры ЭПР исследовались на радиоспектрометре RadiopanSE/X – 2543. Изображение частиц НК было получено с помощью растрового электронного микроскопа РЕММА – 102 – 02.

**3. Результаты эксперимента и их обсуждение.** НК  $ZnS_xSe_{1-x}$ , полученные методом СВС, представляют собой порошок. Электронные микрофотографии данного порошка представлены на рис. 1. Как видно из представленных электронных микрофотографий, в данном порошке присутствуют крупные поликристаллы, поликристаллы со средними размерами 1 – 5 мкм и мелкие НК, которые можно увидеть при разрешении 5 мкм как легкую взвесь. Появление разных фракций происходит из-за особенностей реакции СВС – высоких температур синтеза  $\sim 1800 - 2200$  К [17]. В связи с невозможностью мгновенного отвода избыточного тепла, образованные в результате синтеза НК соединяются в поликристаллы разных фракций со смешанной кристаллической структурой, которые при механическом давлении легко распадаются на НК.

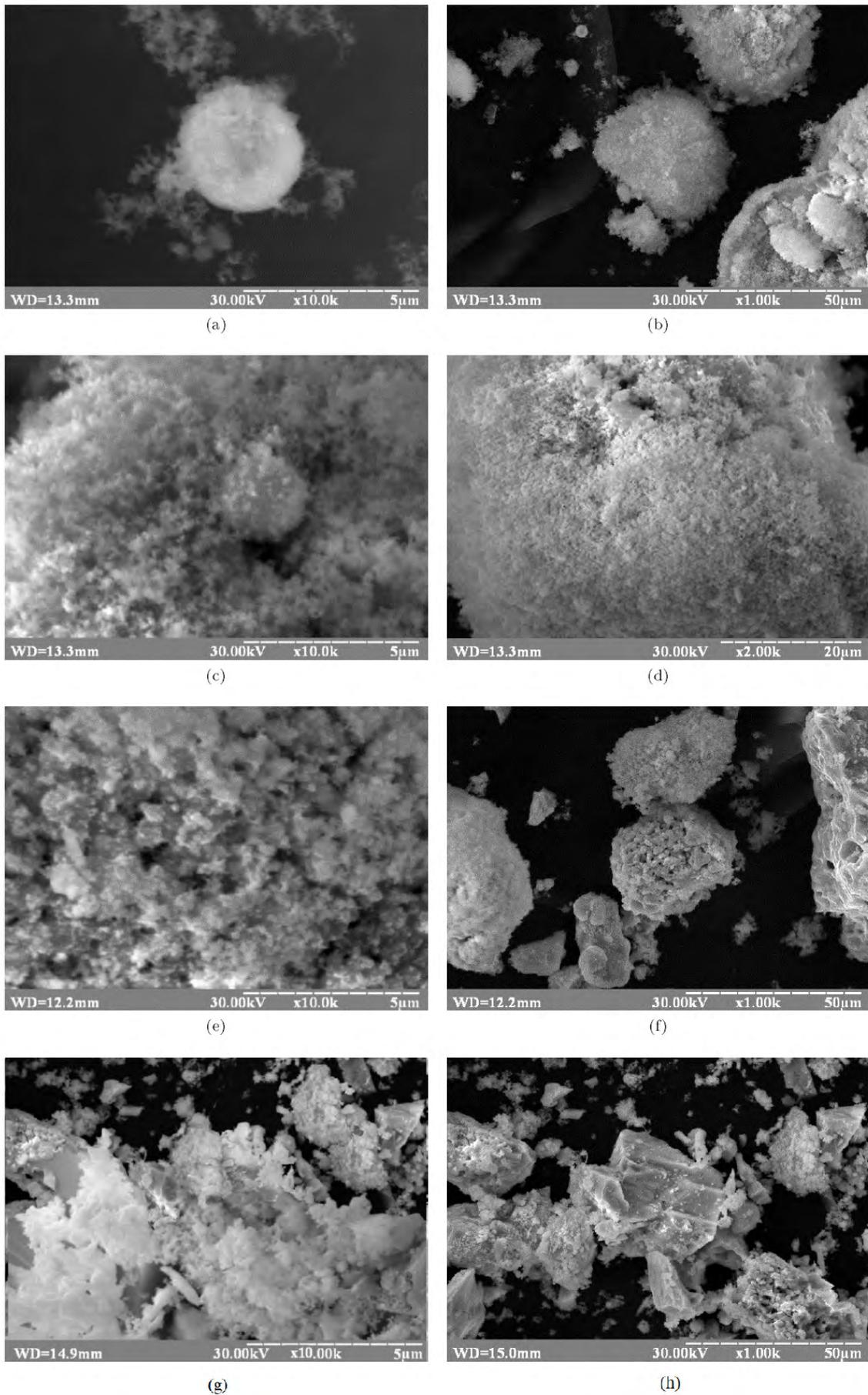


Рис. 1. Электронные микрофотографии  $Zn$ (a, b),  $ZnS_{0.4}Se_{0.6}$ (c, d),  $ZnS_{0.2}Se_{0.8}$ (e, f),  $ZnSe$ (g, h)  
 Fig. 1. Electron micrographs of  $ZnS$ (a, b),  $ZnS_{0.4}Se_{0.6}$ (c, d),  $ZnS_{0.2}Se_{0.8}$ (e, f),  $ZnSe$ (g, h) NC

Для расчета размеров НК была использована формула Дебая – Шеррера:

$$d = \frac{K\lambda}{\beta \cos(\theta)}, \quad (1)$$

где  $d$  – средний размер кристаллов,  $K$  – безразмерный коэффициент формы частиц (постоянная Шеррера, для сферических частиц принимается равной 0,9),  $\lambda$  – длина волны рентгеновского излучения,  $\beta$  – ширина рефлекса в районе полувысоты (в радианах),  $\theta$  – угол дифракции. Размеры НК  $ZnS_xSe_{1-x}$ , полученные из данных РДА приведенных на рис. 2 для составов  $x = 0$ ,  $x = 1$ , находятся в пределах  $80 \pm 5$  нм, а для всех остальных составов  $60 \pm 5$  нм. Как видим по ширине рефлексов, минимальные размеры НК  $ZnS_xSe_{1-x}$  характерны для параметра  $x = 0.4$ , а максимальные – для состава  $x = 0$ . На рис. 2b представлена расширенная область рентгенограмм от 28 до 38, где проявляется плавное движение рефлексов при изменении параметра состава  $x$ , что подтверждает получение ТР НК  $ZnS_xSe_{1-x}$ .

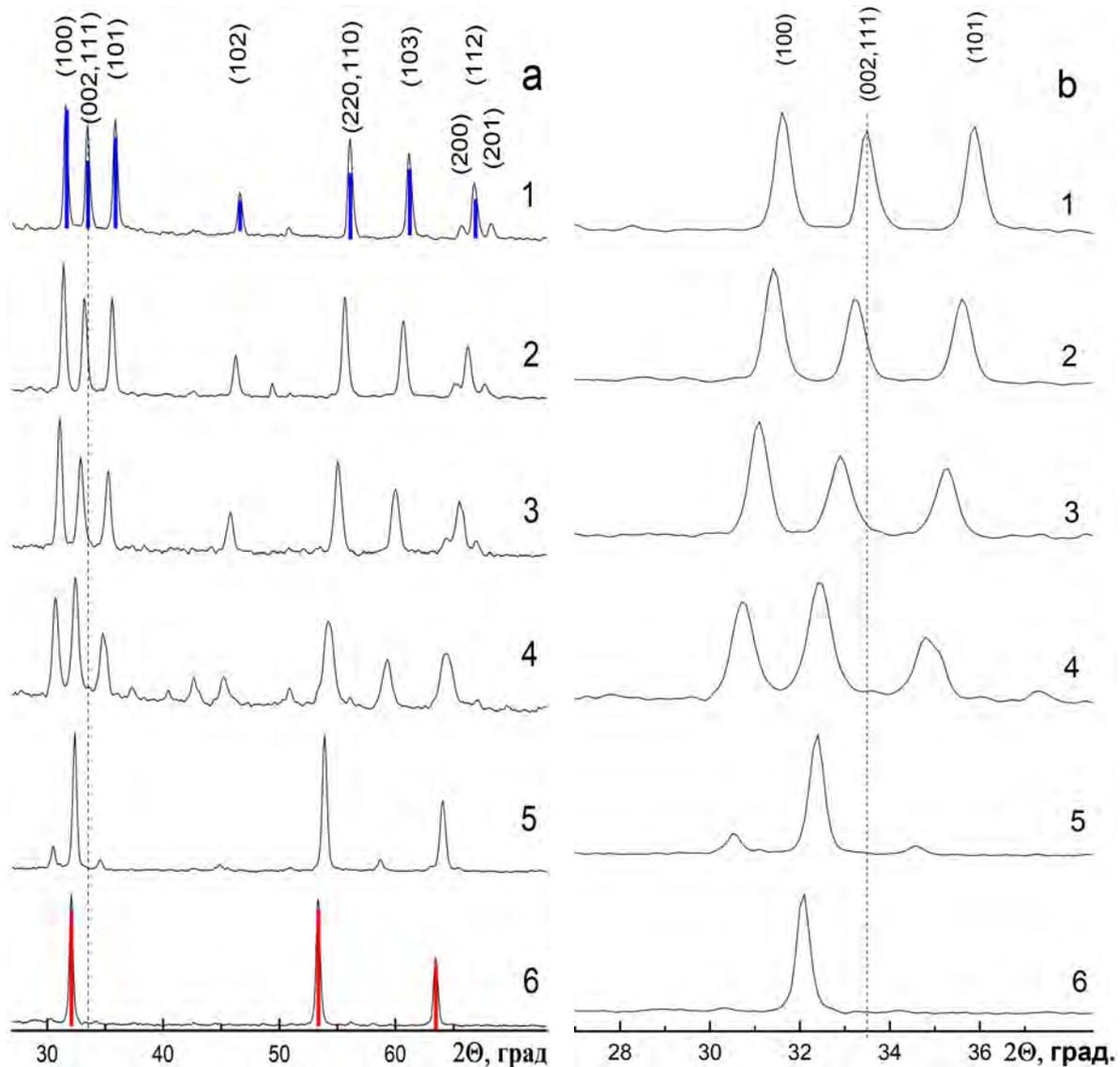


Рис. 2. Спектр РДА (а) и часть спектра РДА (б) НК  $ZnS_xSe_{1-x}$ : 1 –  $x = 1$ ; 2 –  $x = 0.8$ ; 3 –  $x = 0.6$ ; 4 –  $x = 0.4$ ; 5 –  $x = 0.2$ ; 6 –  $x = 0$ . Эталонная штрих-диаграмма для вюрцита ( $x = 1$ , синий цвет) и сфалерита ( $x = 0$ , красный цвет)

Fig. 2. XRD spectrum (a) and part of XRD spectrum (b)  $ZnS_xSe_{1-x}$  NC: 1 –  $x = 1$ ; 2 –  $x = 0.8$ ; 3 –  $x = 0.6$ ; 4 –  $x = 0.4$ ; 5 –  $x = 0.2$ ; 6 –  $x = 0$ . Reference line diagram for wurtzite ( $x = 1$ , blue) and sphalerite ( $x = 0$ , red)

Для определения доли гексагональной и кубической фаз были использованы соотношения интенсивностей рефлексов плоскостей (100), (101), (002) отвечающих за гексагональную фазу и интенсивностей рефлексов плоскости (111), отвечающих за кубическую. Из рис. 2 видно, что в НК ZnS доля гексагональной фазы, составляет  $\sim (65 \pm 5) \%$ , кубической фазы  $\sim (35 \pm 5) \%$ , в НК  $ZnS_{0.8}Se_{0.2}$  –  $(70 \pm 5) \%$  и  $(30 \pm 5) \%$ , в НК  $ZnS_{0.6}Se_{0.4}$  –  $(70 \pm 5) \%$  и  $(30 \pm 5) \%$ , в НК  $ZnS_{0.4}Se_{0.6}$  –  $(55 \pm 5) \%$  и  $(45 \pm 5) \%$ , в НК  $ZnS_{0.2}Se_{0.8}$  –  $(15 \pm 5) \%$  и  $(85 \pm 5) \%$ , а в НК ZnSe –  $(5 \pm 5) \%$  и  $(95 \pm 5) \%$ , соответственно. Доля кубической фазы с уменьшением параметра  $x$  в НК  $ZnS_xSe_{1-x}$  возрастает. По данным РДА, с точностью до 2%, в полученных ТР не

наблюдается присутствие других кристаллических фаз. Реакция СВС инициировалась мощным тепловым импульсом, который обеспечивал ток  $\sim 40$  А, в работе [6] данный тепловой импульс обеспечивал ток  $\sim 27$  А. В работе [6] наблюдаются дополнительные фазы, в нашей работе данные фазы отсутствуют, можно сделать вывод, что величина первоначального температурного импульса, инициирующего СВС реакцию, влияет на размеры и на фазовый состав НК, что сходно с результатами, представленными другими авторами [25].

Параметры кристаллической решетки НК TP  $ZnS_xSe_{1-x}$  в кубической фазе находились в пределах от  $a = 5.377$  Å (для  $x = 1$ ) до  $a = 5.630$  Å (для  $x = 0$ ) (Таблица 1). Данные значения хорошо коррелируют с параметрами кристаллической решетки монокристаллов TP  $ZnS_xSe_{1-x}$  [26], которые находятся в пределах  $a = 5,4093$  Å (для  $x = 1$ ) до  $a = 5,6687$  Å (для  $x = 0$ ). Полученные нами параметры кристаллической решетки меньше, чем в монокристаллах, это свидетельствует о деформационных напряжениях, присущих для НК. Степени микронапряжений кристаллической решетки НК  $ZnS_xSe_{1-x}$  ( $\Delta d/d$ ) лежали в пределах от  $4.1 \cdot 10^{-4}$  до  $16 \cdot 10^{-4}$ . Минимальная степень микронапряжений была характерна для составов с  $x = 0.8$ , а максимальная – с  $x = 0.4$ . Плотности дислокаций лежали в пределах от  $2.5 \cdot 10^{10}$  до  $20 \cdot 10^{10}$ . Минимальная плотность дислокаций была характерна для составов с  $x = 1$  и  $x = 0$ , а максимальная – для составов с  $x = 0.2$  и  $x = 0.4$ . Полученные нами степени микронапряжения и плотности дислокаций характерны для достаточно однородных составов с высоким совершенством кристаллической структуры [11], что позволяет получить широкое применение синтезированных нами НК в различных сферах практической деятельности. Как видно из таблицы 1, присутствует нелинейная зависимость заложенного состава до реакции и полученных после синтеза порошков.

Таблица 1. Данные РДА НК  $ZnS_xSe_{1-x}$   
Table 1. Data X-Ray NC  $ZnS_xSe_{1-x}$

№	Состав до реакции СВС, $S_x$ %	Состав после СВС, параметр решетки, Å	Состав после СВС, РДА, $S_x$ %	L1, размер кристаллов по линии 32 <sup>0</sup> , Å	L2, размер кристаллов по линии 64 <sup>0</sup> , Å	L, максимальный размер кристаллов, Å	M, степень микронапряжений %, $\cdot 10^{-4}$	D, плотность дислокаций см <sup>-2</sup> , $\cdot 10^{10}$
1	100	5.385	100	722	433	825	9,6	5,91
2	80	5.396	95.3	558	488	645	13,2	8,3
3	60	5.410	89.8	531	298	591	17,7	14,2
4	40	5.436	79.3	448	313	510	18,3	20,4
5	20	5.559	29.4	600	482	652	7,45	8,85
6	0	5.632	0	725	494	822	0,55	5,85

Спектры ЭПР НК TP  $ZnS_xSe_{1-x}$  приведены на рис. 3. Заметим, что во всех составах наблюдается сверхтонкая структура, состоящая из шести эквидистантных линий, характерных для парамагнитных центров  $Mn^{2+}$ . Для синтеза НК  $ZnS_xSe_{1-x}$  использовались химически чистые исходные материалы. В паспорте материалов присутствует марганец в количестве  $10^{-2}$  вес. %. Лучше всего ионы  $Mn^{2+}$  встраиваются в кристаллическую решетку сульфида и селенида цинка, что можно увидеть по наиболее интенсивному сигналу. В смешанных твердых растворах интенсивность сигнала ЭПР, присущего ионам  $Mn^{2+}$ , слабее на порядок, что можно связать с неравновесностью структуры НК TP  $ZnS_xSe_{1-x}$ . В составах с  $0.4 \leq x \leq 1$  наблюдается sdвоенность линий, что свидетельствует о наложении друг на друга двух спектров ЭПР ионов  $Mn^{2+}$ , находящихся в разном локальном окружении.

Гексагональному локальному окружению, скорее всего, принадлежит спектр ионов  $Mn^{2+}$  с константой сверхтонкой структуры  $A = 7.16$  мТл. Кубическому локальному окружению, скорее всего, принадлежит спектр ионов  $Mn^{2+}$  с константой сверхтонкой структуры  $A = 6.90$  мТл. Константы сверхтонкой структуры ионов  $Mn^{2+}$ , которые мы получили, хорошо коррелируют с константами сверхтонкой структуры ионов  $Mn^{2+}$  для объемных кристаллов и НК  $ZnS_xSe_{1-x}:Mn$  [12]. В составах близких к  $ZnSe$  наблюдалась одна шестерка эквидистантных линий, характерных для парамагнитных центров  $Mn^{2+}$ . По данным ЭПР, именно в этих составах скачком меняется локальное окружение ионов  $Mn^{2+}$  – они окружены ионами селена. Константа сверхтонкого расщепления скачком при этом уменьшается до величины  $A = 6.55$  мТл, что коррелирует с полученными нами данными для  $ZnS_xSe_{1-x}:Mn$ . Это позволяет сделать заключение, что ионы  $Mn^{2+}$ , находящиеся в разном локальном окружении, проявляют себя по-разному в спектрах

ЭПР НК  $ZnS_xSe_{1-x}$ . Соответственно, спектры ЭПР также позволяют охарактеризовать наличие или отсутствие фаз в НК  $ZnS_xSe_{1-x}$ . Наличие смешанной кристаллической структуры НК  $ZnS_xSe_{1-x}$  в составах с  $0.4 \leq x \leq 1$  и наличие, в основном, кубической фазы в составах с  $0 \leq x \leq 0.2$ , установленное нами по спектрам РДА, полностью соответствует данным ЭПР. Также наблюдается одиночная линия ЭПР с  $g = 1.9998$ , связанная с ионами  $Cr^+$ . Такая же линия ЭПР была замечена и в НК  $ZnS_xSe_{1-x}:Mn$  [12]. Это может свидетельствовать о том, что Cr присутствует в исходной шихте в виде неконтролируемой примеси.

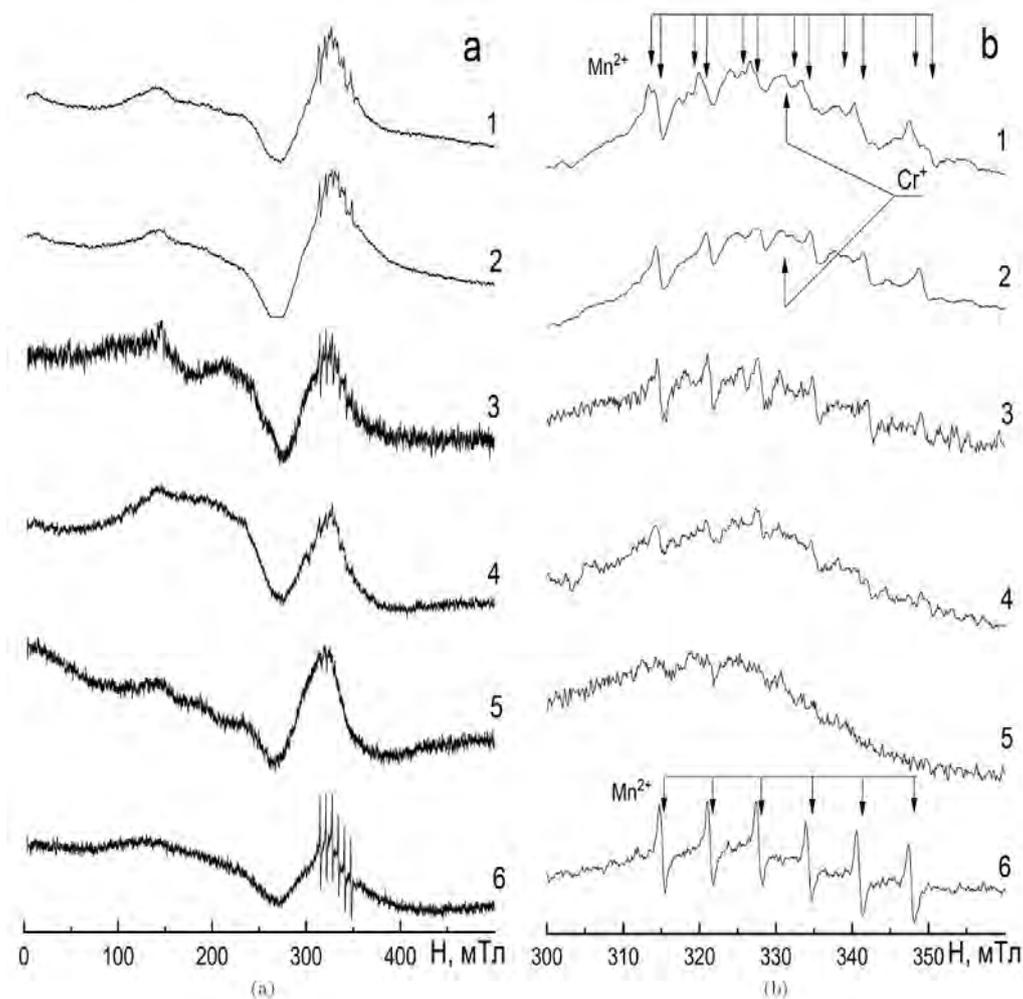


Рис. 3. Спектр (a) и часть спектра (b) ЭПР НК  $ZnS_xSe_{1-x}$  в зависимости от параметра  $x$ : 1 -  $x = 1$ ; 2 -  $x = 0.8$ ; 3 -  $x = 0.6$ ; 4 -  $x = 0.4$ ; 5 -  $x = 0.2$ ; 6 -  $x = 0$

Fig. 3. Spectrum (a) and part of the spectrum (b) EPR of NC  $ZnS_xSe_{1-x}$  depending on the parameter  $x$ : 1 -  $x = 1$ ; 2 -  $x = 0.8$ ; 3 -  $x = 0.6$ ; 4 -  $x = 0.4$ ; 5 -  $x = 0.2$ ; 6 -  $x = 0$

В спектрах ЭПР НК  $ZnS_xSe_{1-x}$ , приведенных на рис. 3 а, в составах с  $0.2 \leq x \leq 0.6$  присутствуют широкие линии поглощения с центром в районе 150 мТл, они же сильно ослабленные наблюдаются для составов с  $0.8 \leq x \leq 1$ . Данную широкую линию поглощения можно связать с неоднородностью структуры, полученной в процессе СВС.

**4. Заключение.** Синтезированы НК твердых растворов  $ZnS_xSe_{1-x}$  методом СВС с шагом параметра  $x = 0.2$ . Присутствует нелинейная зависимость заложенной шихты до синтеза и полученного после синтеза порошка. Полученные нами степени микронапряжения и плотности дислокаций характерны для однородных составов с высоким совершенством кристаллической структуры. НК для всех параметров состава  $x$  характерно присутствие гексагональной и кубической фазы. При уменьшении параметра  $x$  в НК ТР  $ZnS_xSe_{1-x}$  доля кубической фазы возрастает. В спектрах ЭПР во всех составах наблюдается сверхтонкая структура, характерная для парамагнитных центров  $Mn^{2+}$ . В составах с  $0.4 \leq x \leq 1$  наблюдается sdвоенность линий ЭПР, которая обусловлена разным локальным окружением ионов  $Mn^{2+}$ . По изменению констант сверхтонкой структуры ЭПР от величины  $A = 6.88 \div 6.91$  мТл до величины  $A = 6.55$  мТл можно сделать заключение, что в составах с  $0.4 \leq x \leq 1$  ионы  $Mn^{2+}$  окружены ионами серы, а в составах с  $x \leq 0.2$  ионы  $Mn^{2+}$  находятся в окружении ионов селена. В неосвещенных НК  $ZnS_xSe_{1-x}$  в составах с  $0.8 \leq x \leq 1$  присутствует одиночная линия ЭПР ионов  $Cr^+$ .

## References

1. Ahmed N., Darwish S., Alahmari A.M. 2016. Laser ablation and laser-hybrid ablation processes: a review. *Materials and Manufacturing Processes*, 31(9): 1121-1142.
2. Ardekani S.R., Aghdam A. S. R., Nazari M., Bayat A., Yazdani E., Saievar-Iranizad E. 2019. A comprehensive review on ultrasonic spray pyrolysis technique: Mechanism, main parameters and applications in condensed matter. *Journal of Analytical and Applied Pyrolysis*, 141: 104631.
3. Aviles M. A., Gotor F. J. 2021. Tuning the excitation wavelength of luminescent  $Mn^{2+}$ -doped  $ZnS_xSe_{1-x}$  obtained by mechanically induced self-sustaining reaction. *Optical Materials*, 117: 111121.
4. Bacherikov Yu. Yu., Baran N. P., Vorona I. P., Gilchuk A. V., Zhuk A. G., Polishchuk Y. O., Korsunskaya N. E. 2017. Structural and optical properties of ZnS: Mn micro-powders, synthesized from the charge with a different Zn/S ratio. *Journal of Materials Science: Materials in Electronics*, 28 (12): 8569-8578.
5. Brahim T., Bouazra A., Said M. 2021. Temperature, hydrostatic pressure and composition  $x$  effects on intersubband energy levels in ZnSe / $ZnS_xSe_{1-x}$  core-shell quantum dot. *Optik*, 225: 165860.
6. Bulaniy M. F., Kovalenko A. V., Morozov A. S., Khmelenko O. V. 2017. Obtaining of nanocrystals ZnS: Mn by means of self-propagating high-temperature synthesis. *Journal of Nano-and Electronic Physics*, 9 (2): 2007-1.
7. Chen D., Wang A., Buntine M. A., Jia G. 2019. Recent Advances in Zinc - Containing Colloidal Semiconductor Nanocrystals for Optoelectronic and Energy Conversion Applications. *Chem Electro Chem*, 6(3): 4709-4724.
8. Chiu H.-C., Yeh C.-S. 2007. Hydrothermal synthesis of  $SnO_2$  nanoparticles and their gas-sensing of alcohol. *The Journal of Physical Chemistry C*, 111 (20): 7256-7259.
9. Chukavin A. I., Valeev R. G., Beltiukov A. N. 2019. Observation of excitons at room temperature in  $ZnS_xSe_{1-x}$  nanostructures embedded in a porous  $Al_2O_3$  template. *Materials Chemistry and Physics*, 235: 121748
10. Fang X., Zhai T., Gautam U.K., Li L., Wu L., Bando Y., Golberg D. 2011. ZnS nanostructures: from synthesis to applications. *Progress in Materials Science*, 56(2): 175-287.
11. Ivashchenko M. M., Buryk, I. P., Opanasyuk, A. S., Nam, D., Cheong, H., Vaziev, J. G., Bibyk, V. V. 2015. Influence of deposition conditions on morphological, structural, optical and electro-physical properties of ZnSe films obtained by close-spaced vacuum sublimation. *Materials Science in Semiconductor Processing*, 36(13-19).
12. Kovalenko A. V., Plakhtii Y. G., Khmelenko O. V. 2018. The peculiarities of the properties of  $ZnS_xSe_{1-x}$  nanocrystals obtained by self-propagating high-temperature synthesis. *Functional materials*, 4: 665 - 669.
13. Kovalenko A. V., Plakhtii Y. G., Khmelenko O. V. 2019. Research of photoluminescence spectra of  $ZnS_xSe_{1-x}$ : Mn nanocrystals obtained by method of self-propagation high-temperature synthesis. *Journal of nano-and electronic physics*, 11(4): 04031-1-04031-5.
14. Kozitskii S. V., Pisarskii V. P., Ulanova O. O. 1998. Structure and phase composition of zinc sulfide produced by self-propagating high-temperature synthesis. *Combustion, Explosion and Shock Waves*, 34(1): 34-39.
15. Levashov E. A., Mukasyan A. S., Rogachev A. S., Shtansky D. V. 2017. Self-propagating high-temperature synthesis of advanced materials and coatings. *International Materials Reviews*, 62(4): 203-239.
16. Lee G. J., Wu J. J. 2017. Recent developments in ZnS photocatalysts from synthesis to photocatalytic applications – A review. *Powder technology*, 318: 8-22.
17. Liu G., Chen K., Li J. 2018. Combustion synthesis: An effective tool for preparing inorganic materials. *Scripta Materialia*, 157: 167-173.
18. Liu G., Yuan X., Li J., Chen K., Li Y., Li L. 2016. Combustion synthesis of ZnSe with strong red emission. *Materials & Design*, 97: 33-44.
19. Lu J., Liu H., Sun C., Zheng M., Nripan M., Chen G. S., Subodh G. M., Zhang X., Sow C.H. 2012. Optical and electrical applications of  $ZnS_xSe_{1-x}$  nanowires-network with uniform and controllable stoichiometry. *Nanoscale*, 4(3): 976-981.

20. Markov A. A., Filimonov I. A., Poletaev A. V., Vadchenko S. G., Martirosyan K. S. 2013. Generation of charge carriers during combustion synthesis of sulfides. *International Journal of Self-Propagating High-Temperature Synthesis*, 22(2) : 69-76.
21. Rakshit T., Mandal S., Mishra P., Dhar A., Manna I., Ray S. K. 2012. Optical and bio-sensing characteristics of ZnO nanotubes grown by hydrothermal method. *Journal of nanoscience and nanotechnology*, 12: 308–315.
22. Rogachev A. S., Mukasyan A. S. 2015. *Combustion for material synthesis: CRC Press Taylor & Francis Group* : 398.
23. Sadekar H. K., Ghule A. V., Sharma R. 2011. Bandgap engineering by substitution of S by Se in nanostructured  $ZnS_xSe_{1-x}$  thin films grown by soft chemical route for nontoxic optoelectronic device applications. *Journal of Alloys and Compounds*, 509(18): 5525-5531.
24. Sirringhaus H., Tessler N., Friend R.H. 1998. Integrated optoelectronic devices based on conjugated polymers. *Science*, 280(5370): 1741–1744.
25. Sytschev A. E., Merzhanov A. G. 2004. Self-propagating high-temperature synthesis of nanomaterials. *Russian chemical reviews*, 73(2) : 147-159.
26. Taguchi T., Kawakami Y., Yamada Y. 1993. Interface properties and the effect of strain of ZnSe/ZnS strained-layer superlattices. *Physica B: Condensed Matter*, 191(1-2): 23-44.
27. Tian Z., Chen Z., Yuan X., Cui W., Zhang J., Sun S., Liu G. 2019. Preparation of ZnSe powder by vapor reaction during combustion synthesis. *Ceramics International*, 45 (14): 18135-18139.
28. Varkey A. J., Fort A. F.. 1993. Some optical properties of silver peroxide (AgO) and silver oxide (Ag<sub>2</sub>O) films produced by chemical-bath deposition. *Solar Energy Materials and Solar Cells*, 29(3): 253-259.

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Получена 04.02.2022

---

#### СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

**Плахтий Евгений Георгиевич** – соискатель кафедры теоретической и экспериментальной физики института инженерных и цифровых технологий Белгородского государственного национального исследовательского университета

 <http://orcid.org/0000-0003-3805-5026>

ул. Победы, 85, г. Белгород, 308015, Россия

E-mail: [plakhtii.ev@gmail.com](mailto:plakhtii.ev@gmail.com)

**Захвалинский Василий Сергеевич** – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры теоретической и экспериментальной физики института инженерных и цифровых технологий Белгородского государственного национального исследовательского университета

 <http://orcid.org/0000-0001-7055-8243>

ул. Победы, 85, г. Белгород, 308015, Россия

E-mail: [zakhvalinskii@bsu.edu.ru](mailto:zakhvalinskii@bsu.edu.ru)

#### INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

**Evgenii Plakhtii** – aspirant of the Department of Theoretical and Experimental Physics of the Institute of Engineering and Digital Technologies, Belgorod State National Research University, Belgorod, Russia

**Vasily Zakhvalinsky** – PhD, Professor, Professor of the Department of Theoretical and Experimental Physics of the Institute of Engineering and Digital Technologies, Belgorod State National Research University, Belgorod, Russia

## ФОТОГАЛЬВАНИЧЕСКИЙ ЭФФЕКТ В НЕМАТИЧЕСКОЙ ЯЧЕЙКЕ, ДОПИРОВАННОЙ МЕТИЛОВЫМ КРАСНЫМ

Хейдари Акбар, Зиармал Мавла Хан, С. И. Кучеев

(Статья представлена членом редакционной коллегии А. В. Носковым)

Белгородский национальный исследовательский университет,  
г. Белгород, ул. Победы, 85, 308015, Россия

E-mail: [kucheev@bsu.edu.ru](mailto:kucheev@bsu.edu.ru)

**Аннотация.** Экспериментально исследован фотогальванический эффект в симметричной, без ориентирующих покрытий, нематической ячейке с азокрасителем метиловым красным. Показано, что без внешнего электрического поля, под действием света ячейка генерирует электрический ток ( $\sim 10^{-8} A/cm^2$ ), зависящий от спектра облучения, на два порядка больше тока нематической ячейки без красителя при тех же условиях облучения. Полярность фототока зависит от направления освещения ячейки. Анализ температурной зависимости фототока указывает на возможный активационный механизм переноса носителей заряда с энергией активации 0,7 – 2 эВ для разных толщин нематической ячейки. Предполагается, что имеют место, как минимум, два зарядовых процесса с характерными временами, различающимися на несколько порядков. Первый связывается с фотоэффектом в прозрачных электродах  $In_2O_3$ , тогда как, второй обусловлен пространственным разделением зарядов и носит диффузионный характер. Установлено влияние фазового перехода на фототок, как в ячейке с чистым нематиком, так и в нематических ячейках с метиловым красным, что обусловлено возникновением сильно рассеивающего переходного состояния жидкого кристалла.

**Ключевые слова:** азокраситель, метиловый красный, жидкий кристалл, фоторефрактивный эффект

**Для цитирования:** Хейдари Акбар, Зиармал Мавла Хан, Кучеев С. И. 2022. Фотогальванический эффект в нематической ячейке, допированной метиловым красным. Прикладная математика & Физика. 54(1): 60–67.

DOI 10.52575/2687-0959-2022-54-1-60-67

---

---

## FOTOGALVANIC EFFECT IN NEMATIC CELL DOPED BY METHIL RED

Haidari Akbar, Ziarmal Mawla Khan, Sergei Kucheev

(Article submitted by a member of the editorial board A. V. Noskov)

Belgorod National Research University,  
85 Pobedy St, Belgorod, 308015, Russia

E-mail: [kucheev@bsu.edu.ru](mailto:kucheev@bsu.edu.ru)

Received March, 02, 2022

**Abstract.** The photovoltaic effect in a symmetrical, without orienting coatings, nematic cell with an azo-dye methyl red has been experimentally studied. It is shown that without an external electric field, under the action of light, the cell generates an electric current ( $\sim 10^{-8} A/cm^2$ ), depending on the irradiation spectrum, two orders of magnitude greater than the current of a nematic cell without dye under the same irradiation conditions. The polarity of the photocurrent depends on the direction of illumination of the cell. An analysis of the temperature dependence of the photocurrent indicates a possible activation mechanism for the transfer of charge carriers with an activation energy of 0.7–2 eV for different thicknesses of the nematic cell. It is assumed that there are at least two charge processes with characteristic times that differ by several orders of magnitude. The first is associated with the photoelectric effect in transparent  $In_2O_3$  electrodes, while the second is due to the spatial separation of charges and is of a diffusion nature. The influence of the phase transition on the photocurrent, both in a cell with a pure nematic and in nematic cells with methyl red, is established, which is due to the appearance of a strongly scattering transition state of the liquid crystal.

**Key words:** azo-dye, methyl red, liquid crystal, photorefractive effect

**For citation:** Haidari Akbar, Ziarmal Mawla Khan, Kucheev C. I. 2022. Fotogalvanic effect in nematic cell doped by methyl red. Applied Mathematics & Physics. 54(1): 60–67. (in Russian) DOI 10.52575/2687-0959-2022-54-1-60-67

---

**1. Введение.** Генерация носителей заряда в средах под действием света является распространенным физическим явлением. При соответствующем пространственном разделении этих зарядов может решаться широкий спектр прикладных задач, таких как, например, сохранение энергии в виде органических веществ при фотосинтезе или получение электрической энергии в солнечных элементах, и другие

[14]. В жидких кристаллах (жк) фотогенерация носителей заряда интересна с точки зрения осуществления фоторефрактивного эффекта [4], потенциально пригодного для приборов изменения параметров фронта световой волны [9]. Особый интерес представляют жидкие кристаллы, допированные красителями, в которых благодаря значительной анизотропии показателя преломления присущей жк [1], а также возможности селективным образом воздействовать световой волной на молекулы красителя (пигмента) [12], включая конформационное изменение молекул или светоиндуцированную адсорбцию красителя на поверхности [16], достижима эффективная модуляция света. Одним из сопутствующих эффектов протекания зарядовых процессов может служить фотогальванический эффект. Согласно имеющейся литературе, изучение последнего в основном концентрируется в свете выяснения и установления механизмов фоторефрактивного эффекта. Как самостоятельный и независимый эффект, происходящий в конкретных жидкокристаллических средах, исследован недостаточно. Такому состоянию дел, по мнению авторов, есть некоторые причины. Как известно, для эффективной записи голограмм прикладываются электрические поля [10, 11, 6]. Как считается, эти поля растягивают фотогенерированные заряды, и тем самым способствуют переориентации молекул жидкого кристалла. Очевидно, что воздействие полей, как постоянных, так и переменных [8], на жидкокристаллическую среду может маскировать детали фотогальванического эффекта. Другим экспериментальным фактом, не улучшающим ситуацию с выяснением механизмов фотогальванического эффекта, является использование ориентирующих покрытий, например, полиимидов [2], причем часто с разными свойствами на поверхностях обоих электродов в одной и той же ячейке. Последние являются твердотельными средами, часто с полупроводниковыми свойствами, что естественным образом приводит к эффективной генерации собственных носителей заряда под действием света [3]. Поэтому целью предлагаемой работы было экспериментально изучить «чистый» фотогальванический эффект в нематической ячейке с азокрасителем в условиях отсутствия внешнего электрического поля и без использования каких-либо ориентирующих пленок.

**2. Эксперимент.** Эксперименты проводились на установке, схематический вид которой представлен на рис. 1 а. Для генерации фототока в жк ячейках использовался источник света с постоянной интенсивностью излучения. Спектр излучения этого источника света, а также спектры поглощения светофильтров, использованных в данной работе, представлены на рис. 1 б. Жидкокристаллические ячейки выполнялись симметричными из стеклянных подложек, на которых были нанесены электропроводящие прозрачные пленки  $In_2O_3$  (ITO). Толщина жк слоя в ячейках задавалась фторопластовыми прокладками и лежала в пределах 5–100 мкм. С целью контроля полярности фототока собирающий электрод (1) ячеек устанавливался в направлении к источнику света, рис. 1 а. Площадь освещаемого источником света участка жк ячейки была около  $2\text{ см}^2$ .

В работе исследовались фототоки в ячейках, заправленные нематиком 5СВ, который допировался красителем метиловым красным (MR). Заправка ячеек осуществлялась в нематической фазе. Полоса поглощения MR, в среднем, приходится на длины волн света около 480–500 нм [17], что отмечено на рис. 1 б. На данном этапе исследований была использована только одна концентрация красителя MR в нематике, а именно, около 1% по весу. При температурных измерениях фототока в ячейках скорость изменения температуры поддерживалась около  $\sim 0,2$  град/мин. Исходная ориентация молекул жк на поверхностях электродов специально не задавалась. Вследствие этого, в ячейках формировалась неоднородная ориентация нематика, рис. 1 с, где местами могут просматриваться участки гомеотропной ориентации, а также участки с некоторым преимущественным направлением ориентации директора в плоскости ячейки. Подобный тип ориентации нематика, для толщин жк слоя, указанных выше, наблюдался практически во всех ячейках, что контролировалось поляризационным микроскопом.

Рассмотрим фотоэлектрическую реакцию жк ячейки с красителем на включение и выключение источника света. На рис. 1 d представлена типичная осциллограмма фотоэлектрического ответа жк ячейки с красителем на включение и выключение источника света независимо от выбора светофильтра из указанного выше набора. На осциллограммах наблюдаются три характерных участка. Первый соответствует моменту включения источника света, при котором наблюдается пик фототока (С1) с положительной полярностью. Этот пик можно связать с током заряда жк ячейки (конденсаторный ток) при «подключении» некоторого внутреннего «фото-источника» напряжения. Время нарастания сигнала порядка 10–20 мс. Это время измерялось также с использованием импульсного источника света (галогенная лампа). Из анализа фронтов нарастания фототоков и интенсивности света источников вытекает, что это время скорей является ограничением снизу (электрическими цепями включения источника света и регистрации фототока) реального характеристического времени физического процесса генерации зарядов, которое, по всей видимости, значительно меньше.

На втором участке полярность фототока меняется на противоположную, и его величина выходит на постоянное значение с некоторой амплитудой I, рис. 1 d. Другими словами, на этом участке «источник» фототока подключен «минусом» к собирающему измерительному электроду 1 жк ячейки, рис. 1 а. Характерное время нарастания величины сигнала около 10 секунд, что, как видно, на три порядка больше характерного времени нарастания первого пика (рис. 1 с).

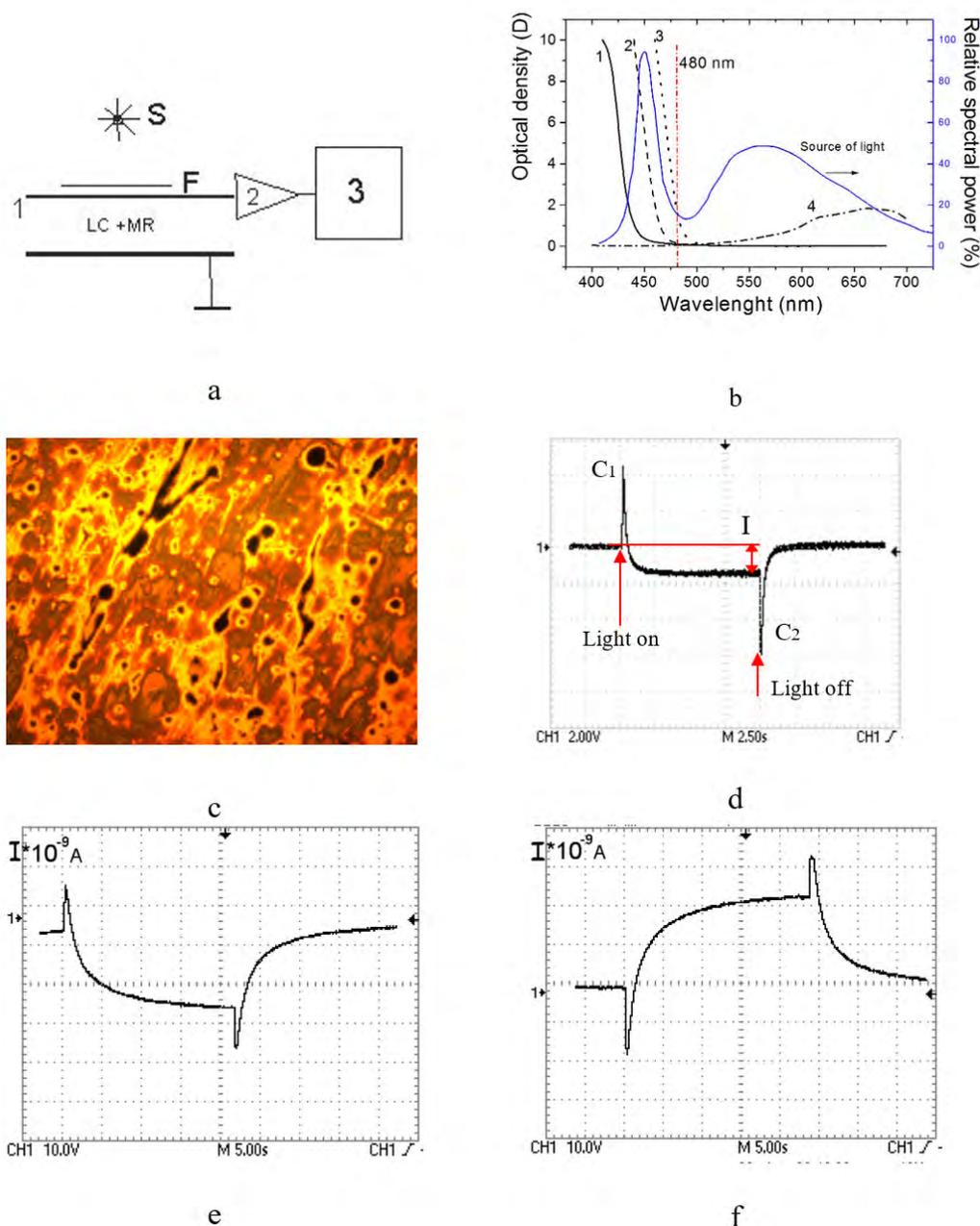


Рис. 1. Общие условия эксперимента. а – схематический вид экспериментальной установки, 1 – собирающий электрод жк ячейки (второй электрод жк ячейки заземлён), F – светофильтр, S – источник света, 2 – усилитель, 3 – осциллограф, б – спектры пропускания светофильтров (1 – ЖС12, 2 – ЖС16, 3 – ЖС17, 4 – СЖС20) и излучения источника света; в – вид участка ячейки с нематиком 5СВ допированным азокрасителем метиловым красным в поляризационном микроскопе, толщина жк слоя 20 мкм; д – Типичная осциллограмма временной развёртки фотоответа нематической ячейки допированной MR на возбуждение светом, I – стационарный ток. Скорость развёртки 0,5с/дел. е, ф – Зеркальный «переворот» осциллограммы фототока ячейки при изменении направления её освещения. Скорость развёртки 1 с/дел

Fig. 1. Common conditions of the experiment. а – Schematic view of the experimental setup. 1 – collecting electrode of the LCD cell (the second electrode of the LCD cell is grounded). F – light filter. S – source of light. 2 – amplifier. 3 – oscilloscope. б – Transmission spectra of light filters (1 – ZhS12, 2 – ZhS16, 3 – ZhS17, 4 – SZhS20) and radiation of the light source. в – View of the cell area with nematic 5CB doped with azo-dye methyl red in a polarizing microscope. The thickness of the LCD layer is 20 microns. д – A typical oscillogramme of the time base of the photoresponse of a nematic cell doped with MR to light excitation. I – stationary current. Sweep rate 0.5 s/div. е, ф – Mirror «reversal» of the cell photocurrent oscillogram when the direction of its illumination changes. Sweep rate 1 s/div

Принимая во внимание столь значительную разницу в характерных временах изменения фототока на первом и втором участках, и разную полярность этих фототоков, можно предположить, что в фотогальваническом эффекте имеют место, как минимум, два физических процесса генерации носителей заряда и их переноса.

При выключении источника освещения (третий участок) наблюдается пикообразное увеличение тока (рис. 2 с), что можно интерпретировать конденсаторным током разряда жк ячейки, причем именно того же самого «конденсатора», который заряжался при первом пике фототока  $C1$ . Далее ток релаксирует к нулю, рис. 1 d, с таким же характерным временем, как это имело место на втором участке в период действия излучения.

Если изменить направление освещения жк ячейки, и свет направить через заземленный электрод, то в этом случае осциллограммы фототока будут зеркально переворачиваться, рис. 1 e, f. Это согласуется с тем, что интенсивность фотоэффекта на разных электродах различна и концентрация ионов, генерированных светом, падает в направлении от более освещенного электрода.

Сравним фототоки ячеек с чистым нематиком и содержащим краситель при освещении их через один и тот же набор светофильтров. Постоянный ток  $I$  жк ячейки с MR демонстрирует зависимость от спектра световых волн, прошедших через соответствующий светофильтр, рис. 2 а. Видно, что амплитуда  $I$  заметно уменьшается с увеличением длин волн света при применении светофильтров в последовательности  $1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 3$ . Фототок жк ячейки без красителя демонстрирует аналогичное уменьшение для той же последовательности светофильтров, рис. 2 б, при этом величина фототока более чем на два порядка меньше фототоков в ячейке с красителем. Характерные времена нарастания и релаксации фототоков, как для нематика с MR, так и чистого нематика лежат практически в одном диапазоне.

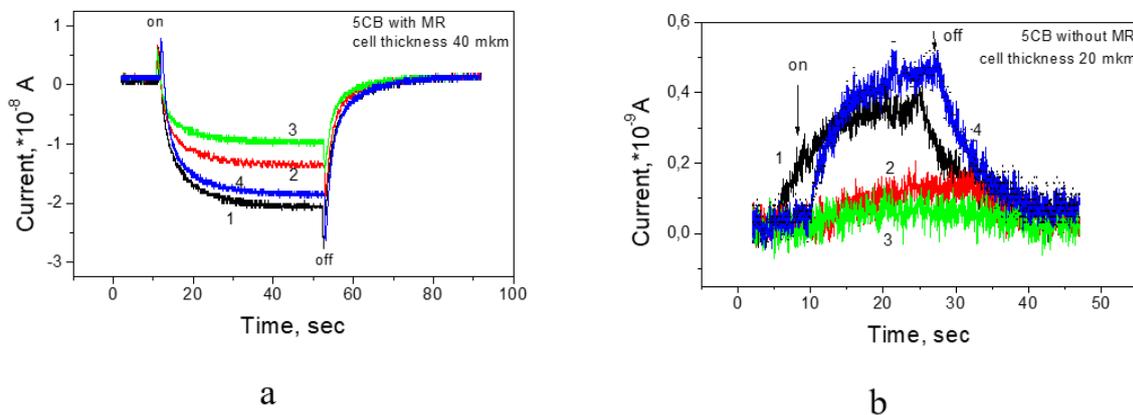


Рис. 2. Фототоки жк ячеек для разных участков видимого диапазона спектра. а – осциллограммы фототоков жк ячейки с красителем для разных светофильтров (1, 2, 3, 4 рис. 1 б), б – фототоки в жк ячейке без красителя для тех же светофильтров (1, 2, 3, 4)

Fig. 2. Photocurrents of LC cells for different parts of the visible range of the spectrum. a – oscillograms of photocurrents of an LC cell with a dye for different light filters (1, 2, 3, 4 Fig. 1 b), b – photocurrents in the LC cell without dye for the same light filters (1, 2, 3, 4)

Отметим, что для жк ячейки без красителя: (1) полярность фототоков для данных светофильтров имеет положительный знак, и (2) амплитуды конденсаторных токов при включении и выключении источника света наблюдаются на уровне шумов при комнатной температуре, и слегка увеличиваются при температурах близких к температуре фазового перехода, рис. 5 е.

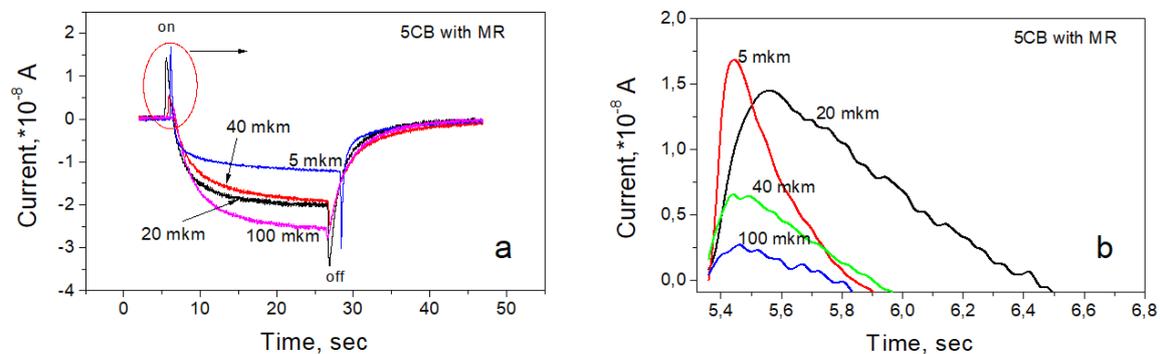


Рис. 3. Влияние толщины жк слоя на фототок. а – фототоки жк ячейки с красителем с разной толщиной слоя жк. б – осциллограммы первого пика фототоков ( $C1$ ) для ячеек разной толщины. Комнатная температура. Светофильтр 2

Fig. 3. Influence of the thickness of the LC layer on the photocurrent. a – photocurrents of an LC cell with a dye with different thicknesses of the LC layer, b – oscillograms of the first peak of photocurrents ( $C1$ ) for cells of different thicknesses. Room temperature. Lightfilter 2

На рис. 3 представлены осциллограммы фототоков в жк ячейках с MR с разной толщиной слоя жк. Из приведенных иллюстраций вытекают два вывода. Первый касается величины пиков фототоков. С уменьшением толщины ячейки величина пиков C1 и C2 увеличивается, рис. 3 б. Это косвенно согласуется с предположением, что эти пики соответствуют токам заряда и разряда конденсатора, в роли которого выступает жк ячейка, при подключении или отключении «фотогальванического источника», поскольку с уменьшением толщины жк ячейки емкость её растет [14, 15]. Второй вывод касается влияния толщины жк слоя на величину стационарного тока I. Хорошо видно, что с ростом толщины жк слоя проявляется тенденция увеличения стационарного тока.

Поглощение чистого 5CB, при котором возможна генерация носителей заряда, лежит в ультрафиолетовой области спектра [7]. Из-за поглощения светофильтрами, а также, практически отсутствием ультрафиолетовой составляющей в спектре излучения источника света, появлением носителей из-за непосредственной ионизации молекул 5CB, а также молекул метилового красного, можно пренебречь.

Принимая во внимание характерное время нарастания величины фототока первого конденсаторного пика C1, которое практически не зависит от толщины жк слоя, рис. 3 б, можно предположить, что фототок на данном участке (первый конденсаторный пик) фотогальванического эффекта можно связать с фотоэффектом в ИТО электродах [13, 5]. В этом случае при переносе электронов в плотный слой двойного электрического слоя (ДЭС) жидкого кристалла электронейтральность ДЭС нарушается, причем в сторону отрицательного значения, при этом сам электрод ИТО приобретает положительную полярность. В результате такого процесса возникает ЭДС. Фотоэффект имеет место на обоих электродах ИТО. Однако в данной геометрии эксперимента, рис. 1 б, из-за поглощения света в слое жидкого кристалла, как для чистого, так и содержащего MR, ЭДС заземленного электрода будет всегда меньше ЭДС собирающего электрода. Поэтому результирующая ЭДС, которая заряжает жк ячейку, как конденсатор, будет иметь положительную полярность, что регистрируется на осциллограммах на начальном этапе развития фотогальванического эффекта (первый участок), рис. 3 б.

Второй процесс в фотогальваническом эффекте связан с разделением зарядов в объеме и развивается одновременно с первым. На диффузионный механизм этого процесса косвенно указывают характерные времена установления стационарного тока I. Мы предполагаем, что ионы обоих знаков образуются по всему объёму жк слоя вследствие диссоциации некоторых примесных молекул АВ по механизму  $MR^* + AB \rightarrow MR + A^+ + B^-$ , где  $MR^*$  – фотовозбужденные молекулы метилового красного,  $A^+$  и  $B^-$  – ионы. Распределение концентрации ионов соответствует поглощению света.

На рис. 4 представлены температурные зависимости стационарного фототока в ячейке с красителем. Видно, что в приведенных на графике осях имеет место хорошая линейная аппроксимация экспериментальных данных. Это может говорить об активационном механизме переноса зарядов в режиме стационарного фототока I в жк ячейках с MR. Энергия активации лежит в пределах 0,7 – 2 эВ при уменьшении толщины слоя жк от 100 мкм до 5 мкм. Увеличение энергии активации можно связать с увеличением параметра порядка жидкокристаллической среды, навязанное поверхностью.

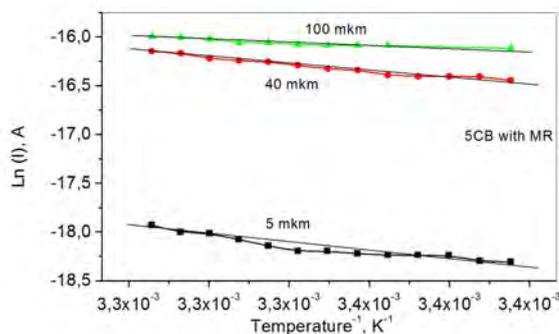


Рис. 4. Зависимость логарифма фототока I в нематических ячейках с MR от обратной величины температуры. Светофильтр 2

Fig. 4. Dependence of the logarithm of the photocurrent I in nematic cells with MR on the reciprocal of the temperature. Lightfilter 2

Влияние изменения упорядоченности жк среды на процессы фотогенерации зарядов, как в ячейке с чистым нематиком, так и в жк ячейке с красителем, явным образом обнаруживается при фазовом переходе жк – изотропная жидкости. На рис. 5 представлены осциллограммы стационарного фототока в момент фазового перехода. Видно, что для нематика с красителем и без красителя при фазовом переходе (нагрев, рис. 5 а, б, д) имеет место увеличение тока, тогда как при охлаждении рис. 5 с, е, имеет место уменьшение тока. Особенности поведения фототоков мы связываем с зарождением в момент

фазового перехода большого количества микрокапель другой фазы, рис. 5 f. Такая среда с микрокаплями дополнительно рассеивает свет, что влияет на оба процесса генерации и переноса зарядов, а именно, на фотоэффект в электродах и пространственное разделение зарядов, при этом не исключены эффекты захвата и высвобождения зарядов в ловушках, в качестве которых могут выступать дефекты ориентации директора на границе жк/изотропная жидкость на суммарной поверхности микрокапель.

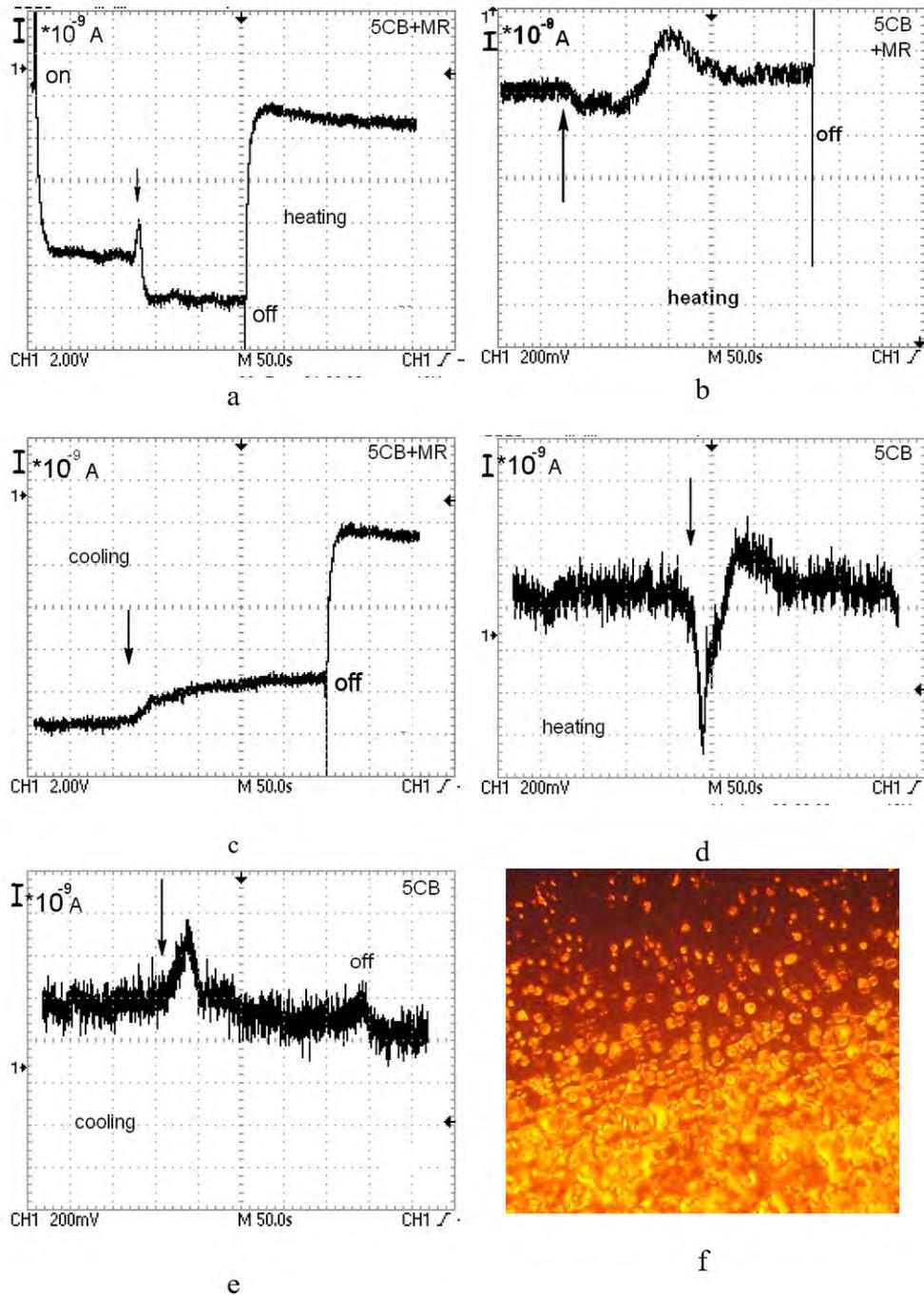


Рис 5. Временные развёртки фототоков в нематической ячейке при фазовом переходе (отмечен стрелкой). Светофильтр 2. Скорость развёртки 10 сек/дел. а, b, d – нагрев; c, e – охлаждение; e – микрокапли в нематике с MR при фазовом переходе

Fig. 5. Time sweeps of photocurrents in a nematic cell during a phase transition (marked with an arrow). Light filter 2. Sweep rate 10 sec/div. a, b, d – heating; c, e – cooling; e – microdroplets in a nematic with MR at a phase transition

**3. Заключение.** В работе экспериментально показано, что симметричная ячейка с прозрачными электродами  $In_2O_3$ , заправленная нематиком 5CB допированным азокрасителем метиловым красным при облучении светом генерирует ток с плотностью около  $10^{-8}$  A/cm<sup>2</sup>, проявляя тенденцию к увеличению при увеличении толщины жк слоя. Полярность фототока зависит от направления освещения

ячейки. Температурная зависимость фототока указывает на возможный активационный механизм переноса носителей заряда с энергией активации 0,7 – 2 эВ для разных толщин нематической ячейки. Предполагается, что имеют место, как минимум, два зарядовых процесса. Первый связывается с фотоэффектом в прозрачных электродах  $In_2O_3$ , тогда как второй обусловлен пространственным разделением зарядов и носит диффузионный характер.

### References

1. Blinov L. M., Chigrinov V. G. 1993. *Electrooptic Effects in Liquid Crystal Materials*. New York. Springer, 464.
2. Boichuk V., Kucheev S., Parka J. et al. 2001. Surface-mediated light-controlled Friedericksz transition in a nematic liquid crystal cell. *J. Appl. Phys.*, 90: 5963–5967.
3. Budagovsky I. A., Zolot'ko A. S., Lobanov A. N., Smayev M. P., Tskhovrebov A. M., Averyushkin A. S., Barnik M. I. 2010. Study of the photocurrent in liquid crystal cells exhibiting the photorefractive effect. *Bull. Lebedev Phys. Inst.*, 37: 49–55.
4. Gunter P., Huignard Jean-P. 2007. *Photorefractive Materials and Their Applications*. New York. Springer, 626.
5. Habibpournoghadam A. 2020. Photorefractive effect in NLC cells caused by anomalous electrical properties of ITO electrodes. *Crystals*, 10: 900(17pp).
6. Klysubun P., Idebetoum G. 2002. On the possible correlation between dark conductivity, photoconductivity, and photorefractivity in dye-doped nematic liquid crystals. *Journal of applied physics*, 92(5): 2528–2533.
7. Legge C. H., Mitchell G. R. 1992. Photo-induced phase transitions in azobenzene-doped liquid crystals. *J. Phys. D: Appl. Phys.*, 25: 492–499.
8. Lucchetti L., Gentili M., Simoni F. 2006. Colossal optical nonlinearity induced by a low frequency external electric field in dye-doped liquid crystals. *OPTICS EXPRESS*, 14(6): 2236–2241.
9. Lucchetti L., Di Fabrizio M., Francescangeli O., Simoni F. 2004. Colossal optical nonlinearity in dye doped liquid crystals. *Optics Communications*, 233: 417–424.
10. Lucchetti L., Simoni F. 2014. Role of space charges on light-induced effects in nematic liquid crystals doped by methyl red. *PHYSICAL REVIEW E*, 89: 032507(5pp).
11. Matczyszyn K., Bartkiewicz S., Sahraoui B. 2002. A new holographic system: liquid crystal doped with photochromic molecules. *Optical Materials*, 20: 5–61.
12. Ptak A., Der A., Toth-Boconadi R., Naser N. S., Frackowiak D. 1997. Photocurrent kinetics (in the microsecond time range) of chlorophyll la, chlorophyll lb and stilbazolium merocyanine solutions in a nematic liquid crystal located in an electrochemical cell. *Journal of Photochemistry and Photobiology A: Chemistry*, 104: 133–139.
13. Puetz J., Aegerter M.A., Guzman G. 2004. Chemical nanotechnology for transparent conducting coatings on thin glass and plastic foil substrates. *Proceeding 13-th Advanced Display Technologies-2004, Raubichi, Belarus*, 36–45.
14. O'Regan B., Gratzel M. 1991. A low-cost, high-efficiency solar cell based on dye-sensitized colloidal  $TiO_2$  films. *Nature*, 353: 737–739.
15. Suwada A., Tarumi K., Naemura S. 1999. Effects of double electric layer and space charge polarization by plural kinds of ions on complex dielectric constant of liquid crystal materials. *Jpn. J. Appl. Phys.*, 38: 1418–1422.
16. Wu S. T., Chen Y. S., Guo J. H., Fuh A. Yi. G. 2006. Fabrication of twisted nematic gratings using polarization hologram based on azo-dye doped liquid crystals. *Japanese Journal of Applied Physics*, 45(12): 9146–9151.
17. Wu P. C., Hou C. T., Hsiao Y. C., Lee W. 2014. Influence of methyl red as a dopant on the electrical properties and device performance of liquid crystals. *OPTICS EXPRESS*, 22(25):31347–31355.

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Получена 02.03.2022

**СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ**

**Хейдари Акбар** – магистрант Белгородского государственного национального исследовательского университета

ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия

E-mail: [1342727@bsu.edu.ru](mailto:1342727@bsu.edu.ru)

**Зиармал Мавла Хан** – магистрант Белгородского государственного национального исследовательского университета

ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия

E-mail: [1438345@bsu.edu.ru](mailto:1438345@bsu.edu.ru)

**Кучеев Сергей Иванович** – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры теоретической и экспериментальной физики Белгородского государственного национального исследовательского университета

 <http://orcid.org/0000-0002-1623-2063>

ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия

E-mail: [kucheev@bsu.edu.ru](mailto:kucheev@bsu.edu.ru)

**INFORMATION ABOUT THE AUTHORS**

**Haidari Akbar** – undergraduate Belgorod National Research University, Belgorod, Russia

**Ziarmal Mawla Khan** – undergraduate Belgorod National Research University, Belgorod, Russia

**Kucheev Sergey** – PhD, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Theoretical and Experimental Physics Belgorod National Research University position, Belgorod National Research University, Belgorod, Russia

## ПЕРСОНАЛИИ

### К 50-летию профессора Владимира Евгеньевича Фёдорова,

профессора Челябинского государственного университета

В этом году 1 марта исполнилось 50 лет доктору физико-математических наук, профессору кафедры математического анализа, проректору по учебной работе Челябинского государственного университета (ЧелГУ), члену редколлегии журнала «Прикладная математика & Физика» Владимиру Евгеньевичу Фёдорову.

Владимир Евгеньевич Фёдоров родился в 1972 году в Челябинске. В 1994 году окончил Челябинский государственный университет по специальности «Математика». Математическими исследованиями в области теории полугрупп операторов и дифференциальных уравнений в банаховых пространствах он начал заниматься ещё будучи студентом, а затем продолжил их в аспирантуре под руководством профессора Г. А. Свиридюка. В 1996 году Владимир Евгеньевич защитил кандидатскую диссертацию в Уральском госуниверситете им. А. М. Горького и был отчислен из аспирантуры ЧелГУ после второго курса «в связи с досрочной защитой диссертации».

С 1996 г. Владимир Евгеньевич работал на кафедре математического анализа ассистентом, затем старшим преподавателем, доцентом и продолжал исследование уравнений соболевского типа и их разрешающих полугрупп операторов, особенностью которых является наличие нетривиального ядра, другими словами, единицей полугруппы является не тождественный оператор, а нетривиальный проектор. Поэтому такие полугруппы операторов называются вырожденными. В. Е. Фёдоровым получены критерии существования вырожденных полугрупп операторов различных классов гладкости в локально выпуклых пространствах. Результаты этих исследований и их приложений к изучению разрешимости начально-краевых задач для уравнений и систем уравнений, не разрешимых относительно производной по времени, составили предмет его докторской диссертации, успешно защищённой в 2005 г. в Институте математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН. В 2007 году ему присвоено ученое звание профессора. Развитию и приложениям теории вырожденных полугрупп операторов посвящены и последующие работы В. Е. Фёдорова, а также работы его учеников. В 2011 году В. Е. Фёдоров награжден призом для молодых ученых (до 40 лет) известного международного математического общества ISAAC (ISAAC Award for Young Scientists). В последние несколько лет научные интересы В. Е. Фёдорова и его научной школы связаны с уравнениями в банаховых пространствах с различными дробными производными, как разрешенными относительно старшей из производных, так и вырожденными (соболевского типа). Под руководством Владимира Евгеньевича диссертацию на соискание степени кандидата физико-математических наук защитили 12 человек. В 2022 году В. Е. Фёдоровым получен грант Президента РФ для государственной поддержки ведущих научных школ.

С 2005 г. В. Е. Фёдоров работает профессором кафедры математического анализа Челябинского государственного университета, с 2006 г. – заведующим кафедрой математического анализа, в 2008–2011 гг. – деканом математического факультета, с 2019 г. по настоящее время – проректором по учебной работе и профессором кафедры математического анализа.

В. Е. Фёдоров является автором более 200 научных работ, опубликованных в периодических специализированных научных изданиях, из них индексируемых в базах данных Web of Science – около 70, Scopus – 91 и свыше 100 публикаций из перечня ВАК. Многократно выигрывал в конкурсах грантов РФФИ, Министерства образования и науки, Правительства Челябинской области. Последние несколько успешных проектов по грантам РФФИ:

- «Прямые и обратные задачи, задачи оптимального управления для новых классов дробных дифференциальных уравнений», 2021–2022;
- «Качественный анализ и точные решения систем уравнений динамики многофазных сред», 2021;
- «Приближенная управляемость распределенных систем дробного порядка», 2019–2020;
- «Исследование эволюционных уравнений дробного порядка, линейная часть которых порождает аналитическое в секторе разрешающее семейство операторов», 2019–2021;
- «Исследование нелинейных моделей ценообразования опционов на рынке с недостаточной ликвидностью и транзакционными издержками», 2019–2021;
- «Исследование линейных уравнений в банаховых пространствах, не разрешенных относительно дробной производной Римана – Лиувилля», 2016;
- «Исследование разрешимости неоднородных вырожденных эволюционных уравнений дробного порядка», 2015.

Регулярно принимает участие в научно-практических конференциях, выступает с пленарными докладами, входит в Программные и Организационные комитеты конференций.

В настоящее время является заместителем главного редактора «Челябинского физико-математического журнала», входит в состав редколлегии журналов «Прикладная математика & Физика», «International Journal of Mathematical Modelling and Numerical Optimization» (Великобритания), «Progress in Fractional Differentiation and Applications» (Турция), «International Journal of Computing and Optimization» (Болгария).

Научная, педагогическая и административная деятельность не осталась незамеченной: Владимир Евгеньевич неоднократно поощрен руководством университета, Челябинской области, Министерства образования и науки Российской Федерации. С 2017 года является Почетным профессором Челябинского государственного университета, с 2019 года – Почетным профессором Шадринского государственного педагогического университета, с 2021 года – Почетным работником сферы образования РФ.

***Редколлегия журнала «Прикладная математика & Физика»  
сердечно поздравляет Владимира Евгеньевича Фёдорова  
с юбилеем и желает ему здоровья, долголетия,  
новых успехов и научных результатов.***

### **Основные публикации В. Е. Фёдорова**

#### Монографии

1. Sviridyuk G. A., Fedorov V. E. 2003. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators. Utrecht; Boston: VSP.
2. Плеханова М. В., Фёдоров В. Е. 2013. Оптимальное управление вырожденными распределенными системами. Челябинск: Издат. центр ЮУрГУ, 174.

#### 2022

1. Fedorov V. E., Du W.-S., Turov M. M. 2022. On the unique solvability of incomplete Cauchy type problems for a class of multi-term equations with the Riemann–Liouville derivatives. *Symmetry*, 14(1)75: 1–16.
2. Fedorov V. E. 2022. On generation of family of resolving operators for a distributed order equation analytic in sector. *Journal of Mathematica Sciences*. 260(1): 75–86.
3. Fedorov V. E., Nagumanova A. V. 2022. Inverse linear problems for a certain class of degenerate fractional evolution equations. *Journal of Mathematica Sciences*, 260(3.): 371–386.
4. Fedorov V. E., Du W.-S., Kostic M., Abdrakhmanova A. A. 2022. Analytic resolving families for equations with distributed Riemann – Liouville derivatives. *Mathematics*, 10(5): 681.
5. Fedorov V. E., Turov M. M., Kien B. T. 2022. A Class of quasilinear equations with Riemann–Liouville derivatives and bounded operators. *Axioms*, 11(3): 96.

#### 2021

1. Fedorov V. E., Dyshaev M. M. 2021. Group classification for a class of non-linear models of the RAPM type. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 92: 10.
2. Fedorov V. E., Filin N. V. 2021. On strongly continuous resolving families of operators for fractional distributed order equations. *Fractal and Fractional*, 5(20): 14.
3. Ядрихинский Х. В., Фёдоров В. Е. 2021. Инвариантные решения модели Геана – Пу ценообразования опционов и хеджирования. *Челяб. физ.-мат. журн.*, 6(1): 43–52.
4. Fedorov V. E., Gordievskikh D. M., Filin N. V. 2021. On approximate controllability of a class of degenerate fractional order distributed systems. *Journal of Physics: Conference Series*. 1847(012017).
5. Fedorov V. E., Nagumanova A. V., Kostic M. 2021. A class of inverse problems for fractional order degenerate evolution equations. *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*, 29(2): 173–184.
6. Фёдоров В. Е., Филин Н. В. 2021. Линейные уравнения с дискретно распределенной дробной производной в банаховых пространствах. *Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН*, 27(2): 264–280.

7. Fedorov V. E., Avilovich A. S. 2021. Semilinear fractional-order evolution equations of Sobolev type in the sectorial case. *Complex Variables and Elliptic Equations*, 66(6-7): 1108–1121.
8. Fedorov V. E., Plekhanova M. V., Izhberdeeva E. M. 2021. Initial value problems of linear equations with the Dzhrbashyan – Nersesyan derivative in Banach spaces. *Symmetry*, 13: 1058.
9. Kostic M., Pilipovic S., Velinov D., Fedorov V. E. 2021.  $c$ -Almost periodic type distributions. *Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal*, 6(2): 190–207.
10. Дышаев М. М., Федоров В. Е. 2021. Учет недостаточной ликвидности и транзакционных издержек при дельта-хеджировании. *Приклад. математика & Физика*, 53(2): 132–143.
11. Федоров В. Е., Туров М. М. 2021. Дефект задачи типа Коши для линейных уравнений с несколькими производными Римана – Лиувилля. *Сиб. мат. журн.*, 62(5): 1143–1162.
12. Fedorov V. E., Turov M. M. 2021. The defect of a Cauchy type problem for linear equations with several Riemann – Liouville derivatives. *Siberian Mathematical Journal*, 62(5): 925–942.
13. Федоров В. Е., Бойко К. В., Фуонг Т. Д. 2021. Начальные задачи для некоторых классов линейных эволюционных уравнений с несколькими дробными производными. *Мат. заметки СВФУ* 28(3) 85–104.
14. Kostic M., Pilipovic S., Velinov D., Fedorov V. E. 2021.  $c$ -Almost periodic type distributions. *Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal*, 6(2): 190–207.
15. Волкова А. Р., Ижбердеева Е. М., Федоров В. Е. 2021. Начальные задачи для уравнений с композицией дробных производных. *Челяб. физ.-мат. журн.*, 6(3): 269–277.  
Volkova A. R., Izhberdeeva E. M., Fedorov V. E. 2021. Initial value problems for equations with a composition of fractional derivatives. *Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal*, 6(3): 269–277.
16. Chaochi B., Fedorov V. E., Kostic M. 2021. Monotonicity of certain classes of functions related with Cusa – Huygens inequality. *Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal*, 6(3): 331–337.
17. Kostic M., Du W.-S., Fedorov V. E. 2021. Doss  $p$ -almost periodic type functions in  $R^n$ . *Mathematics*, 9(21): 2825.
18. Yadrikhinskiy Kh. V., Fedorov V. E., Dyshaev M. M. 2021. Group Analysis of the Gueant and Pu Model of Option Pricing and Hedging. In book: *Symmetries and Applications of Differential Equations*. Eds. A.C.J. Luo, R.K. Gazizov. Singapore: Springer, XVII+279 p. P.173-203.
19. Turov M. M., Fedorov V. E., Kien B. T. 2021. Linear inverse problems for multi-term equations with Riemann – Liouville derivative. *Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика*, 38: 36–53.
20. Чаучи Б., Федоров В. Е., Костич М. 2021. О мультипликативных возмущениях абстрактных вырожденных уравнений с дробными производными. *Дифференц. уравнения*, 57(12): 1644–1653.
21. Dyshaev M. M., Izergin D. B., Fedorov V. E. 2021. Approximation and comparison of the empirical liquidity cost function for various futures contracts. *Мат. заметки СВФУ*, 28(4): 101–113.

## 2020

1. Fedorov V. E., Ivanova N. D. 2020. Inverse problems for a class of linear Sobolev type equations with overdetermination on the kernel of operator at the derivative. *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*, 28(1): 53–61.
2. Дышаев М. М., Федоров В. Е. 2020. The optimal rehedging interval for the options portfolio within the RAPM, taking into account transaction costs and liquidity costs. *Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика*, 31: 3–17.
3. Авилевич А. С., Гордиевских Д. М., Федоров В. Е. 2020. Вопросы однозначной разрешимости и приближенной управляемости для линейных уравнений дробного порядка с гельдеровской правой частью. *Челяб. физ.-мат. журн.*, 5(1): 5–21.  
Avilovich A. S., Gordievskikh D. M., Fedorov V. E. 2020. Issues of unique solvability and approximate controllability for linear fractional order equations with a Holderian right-hand side. *Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal*, 5(1): 5–21.

4. Fedorov V. E., Abdrakhmanova A. A. 2020. Distributed order equations in Banach spaces with sectorial operators. *Transmutation Operators and Applications*. Cham, Springer Nature Switzerland AD, 686: 509–538.
5. Федоров В. Е. 2020. О порождении аналитического в секторе разрешающего семейства операторов дифференциального уравнения распределенного порядка. *Записки науч. семинаров ПОМИ*, 489: 113–129.
6. Fedorov V. E., Abdrakhmanova A. A. 2020. A class of initial value problems for distributed order equations with a bounded operator. *Stability, Control and Differential Games*, eds. A. Tarasyev, V.I. Maksimov, T. Filippova. Springer, xi+389 p: 251–262.
7. Федоров В. Е., Нагуманова А. В. 2020. Линейные обратные задачи для вырожденного эволюционного уравнения с производной Герасимова – Капуто в секториальном случае. *Мат. заметки. Сев.-Восточ. федер. ун-та.*, 27(2): 54–76.
8. Fedorov V. E. 2020. Generators of analytic resolving families for distributed order equations and perturbations. *Mathematics*, 8(1306): 15.
9. Федоров В. Е., Фуонг Т. Д., Киен Б. Т., Бойко К. В., Ижбердеева Е. М. 2020. Один класс полулинейных уравнений распределенного порядка в банаховых пространствах. *Челяб. физ.-мат. журн.*, 5(3): 343–351.
10. Fedorov V. E., Romanova E. A. 2020. Inhomogeneous fractional evolutionary equation in the sectorial case. *Journal of Mathematical Sciences*, 250(5): 819–829.
11. Debbouche A., Fedorov V. E. 2020. A class of fractional degenerate evolution equations with delay. *Mathematics*, 8(1700): 9.
12. Kostic M., Fedorov V. E. 2020. Asymptotically (w,c)-almost periodic type solutions of abstract degenerate non-scalar Volterra equations. *Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal*, 5(4)1: 415–427.
13. Fedorov V. E., Nagumanova A. V., Avilovich A. S. 2021. A class of inverse problems for evolution equations with the Riemann-Liouville derivative in the sectorial case. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 44(15): 11961–11969.
14. Федоров В. Е., Костич М. 2021. Задача идентификации для сильно вырожденных эволюционных уравнений с производной Герасимова – Капуто. *Дифференц. уравнения*, 57(1): 100–113.
15. Fedorov V. E., Kostic M. 2020. Identification problem for strongly degenerate evolution equations with the Gerasimov – Caputo derivative. *Differential Equations*, 56(12): 1613–1627.
16. Федоров В. Е., Абдрахманова А. А. 2020. Начальная задача для уравнений распределенного порядка с ограниченным оператором. *Итоги науки и техн. Сер. Современ. математика и ее приложения. Темат. обзоры*, 188: 14–22.

## 2019

1. Fedorov V. E., Romanova E. A. 2019. On analytical in a sector resolving families of operators for strongly degenerate evolution equations of higher and fractional orders. *Journal of Mathematical Sciences*, 236(6): 663–678.
2. Федоров В. Е., Авилевич А. С. 2019. Задача типа Коши для вырожденного уравнения с производной Римана–Лиувилля в секториальном случае. *Сиб. мат. журн.*, 60(2): 461–477.
3. Fedorov V. E., Avilovich A. S. 2019. A Cauchy type problem for a degenerate equation with the Riemann – Liouville derivative in the sectorial case. *Siberian Mathematical Journal*, 60(2): 359–372.
4. Fedorov V. E., Nazhimov R. R. 2019. Inverse problems for a class of degenerate evolution equations with Riemann – Liouville derivative. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 22(2): 271–286.
5. Федоров В. Е., Нагуманова А. В. 2019. Обратная задача для эволюционного уравнения с дробной производной Герасимова – Капуто в секториальном случае. *Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер.: Математика*, 28: 123–137.
6. Федоров В. Е., Гордиевских Д. М., Балеану Д., Таш К. 2019. Критерий приближенной управляемости одного класса вырожденных распределенных систем с производной Римана – Лиувилля. *Мат заметки СВФУ*, 26(2): 41–59.

7. Dyshaev M. M., Fedorov V. E. 2019. Comparing of some sensitivities (Greeks) for nonlinear models of option pricing with market illiquidity. *Мат заметки СВФУ.*, 26( 2): 94–108.
8. Fedorov V. E. 2019. Nonlinear self-adjointness and conservation laws for some equation systems of two-phase media . *Journal of Physics: Conference Series*, 1268( 012068): 6.
9. Baleanu D., Fedorov V. E., Gordievskikh D. M., Tas K. 2019. Approximate controllability of infinite-dimensional degenerate fractional order systems in the sectorial case . *Mathematics*, 7(735): 15.
10. Fedorov V. E., Avilovich A. S., Borel L. V. 2019. Initial Problems for Semilinear Degenerate Evolution Equations of Fractional Order in the Sectorial Case. *Nonlinear Analysis and Boundary Value Problems. NABVP 2018, Santiago de Compostela, Spain, September 4–7. Ed. by I.Area, A.Cabada, J.A.Cid etc. Springer Proceedings in Mathematics and Statistics, vol.292. Cham: Springer Nature Switzerland AG, xii+298 p.: 41–62.*
11. Дышаев М. М., Федоров В. Е. 2019. Сравнение временного распада для опционной стратегии «стрэддл» в случае недостаточной ликвидности или наличия транзакционных издержек . *Науч. ведомости Белгород. гос. ун-та. Сер.: Математика. Физика*, 51(3): 451–459.
12. Федоров В. Е., Нагуманова А. В. 2019. Линейные обратные задачи для одного класса вырожденных эволюционных уравнений дробного порядка. *Итоги науки и техн. Сер. Современ. математика и ее приложения. Темат. обзоры*, 167: 97–111.
13. Fedorov V. E., Kostic M. 2019. A note on (asymptotically) Weyl-almost periodic properties of convolution product. *Челяб. физ.-мат. журн.*, 4(2): 195–206.
14. Федоров В. Е., Гордиевских Д. М. 2019. Задача Коши для полулинейного уравнения распределенного порядка. *Челяб. физ.-мат. журн.*, 4(4): 439–444.

#### 2018

1. Fedorov V. E., Romanova E. A., Debbouche A. 2018. Analytic in a sector resolving families of operators for degenerate evolution fractional equations . *Journal of Mathematical Sciences*, 228(4): 380–394.
2. Fedorov V. E., Dyshaev M. M. 2018. Invariant solutions for nonlinear models in illiquid markets. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 41(18): 8963–8972. DOI: 10.1002/mma.4772.
3. Федоров В.Е., Плеханова М.В., Нажимов Р.Р. Линейные вырожденные эволюционные уравнения с дробной производной Римана – Лиувилля . *Сиб. мат. журн.* 2018. Т.59, № 1. С.171–184.
4. Fedorov V. E., Plekhanova M. V. 2018. Nonlinear self-adjointness method for the Baer – Nunziato equations system . *AIP Conference Proceedings*, 1939: 020013. doi: 10.1063/1.5027325.
5. Гордиевских Д. М., Федоров В. Е., Туров М. М. 2018. Бесконечномерная и конечномерная  $e$ -управляемость одного класса вырожденных эволюционных уравнений дробного порядка. *Челяб. физ.-мат. журн.*, 3(1): 5–26.
6. Костиц М., Федоров В. Е. 2018. Разделенные гиперциклические и разделенные топологически перемешивающие свойства вырожденных дробных дифференциальных уравнений. *Изв. вузов. Математика*, 7: 36–53.
7. Kostic M., Fedorov V. E. 2018. Disjoint hypercyclic and disjoint topologically mixing properties of degenerate fractional differential equations. *Russian Mathematics*, 62(7): 31–46.
8. Федоров В. Е., Романова Е. А. 2018. Неоднородное эволюционное уравнение дробного порядка в секториальном случае. *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 149: 103–112.
9. Стрелецкая Е. М., Федоров В. Е., Дебуш А. 2018. Задача Коши для уравнения распределенного порядка в банаховом пространстве. *Мат. заметки СВФУ*, 25(1): 63–72.
10. Fedorov V. E., Streletskaya E. M. 2018. Initial-value problems for linear distributed-order differential equations in Banach spaces. *Electron. J. Differential Equations*, 2018(176): 1–17.
11. Fedorov V. E., Kostic M. 2018. On a class of abstract degenerate multi-term fractional differential equations in locally convex spaces. *Eurasian Mathematical Journal*, 9(3): 33–57.

12. Fedorov V. E., Gordievskikh D. M. 2018. Approximate controllability of strongly degenerate fractional order system of distributed control. IFAC-PapersOnLine. 17th IFAC Workshop on Control Applications of Optimization CAO 2018, Yekaterinburg, Russia, 15-19 October 2018, 51(32): 675–680.
13. Дышаев М. М., Федоров В. Е., Авилович А. С., Плетнев Д. А. 2018. Моделирование эффектов обратной связи при ценообразовании маржируемых опционов на Московской бирже. Челябин. физ.-мат. журн., 3(4): 379–394.
14. Бирюкова Е. А., Плетнев Д. А., Федоров В. Е., Бирюков Е. С. 2018. Модели экономического роста для российской экономики. Вестн. Челяб. гос. ун-та., 12(422): 19–32.

#### 2017

1. Дышаев М. М., Федоров В. Е. 2017. Симметрии и точные решения одного нелинейного уравнения ценообразования опционов. Уфим. мат. журн., 9(1): 29–41.
2. Фёдоров В. Е., Романова Е. А. 2017. Об аналитических в секторе разрешающих семействах операторов сильно вырожденных эволюционных уравнений высокого и дробного порядков. Итоги науки и техники. Сер. Современ. математика и ее приложения. Темат. обзоры, 137: 82–96.
3. Fedorov V. E., Ivanova N. D. 2017. Identification problem for degenerate evolution equations of fractional order. Fractional Calculus and Applied Analysis. 20(3): 706–721.
4. Безбогова Е. А., Федоров В. Е., Авилович А. С. 2017. Симметричный анализ нелинейного псевдопараболического уравнения. Челябин. физ.-мат. журн., 2(2): 152–168.
5. Fedorov V. E., Ivanova N. D. 2017. Inverse problem for Oskolkov's system of equations. Mathematical Methods in the Applied Sciences. 40(17): 6123–6126.
6. Fedorov V. E., Gordievskikh D. M., Baybulatova G. D. 2017. Controllability of a class of weakly degenerate fractional order evolution equations. AIP Conference Proceedings. 1907: 020009. doi: 10.1063/1.5012820
7. Федоров В. Е. 2017. Однородное решение модели Баера – Нанзиато. Челябин. физ.-мат. журн., 2(3): 323–328.

#### 2016

1. Fedorov V. E., Filin N. V. 2016. Invariant and partially invariant submodels of the equations system describing a dynamics of two gases mixture. Materials Science Forum, 845: 174–177.
2. Fedorov V. E., Ivanova N. D. 2016. Identification problem for a degenerate evolution equation with overdetermination on the solution semigroup kernel. Discrete and Continuous Dynamical Systems. Series S., 9(3): 687–696.
3. Федоров В. Е., Борель Л. В. 2016. Исследование вырожденных эволюционных уравнений с памятью методами теории полугрупп операторов. Сиб. мат. журн., 57(4): 899–912.
4. Fedorov V. E., Nazhimov R. R., Gordievskikh D. M. 2016. Initial value problem for a class of fractional order inhomogeneous equations in Banach spaces. AIP Conference Proceedings, 1759: 020008. doi: 10.1063/1.4959622
5. Федоров В. Е., Романова Е. А., Дебуш А. 2016. Аналитические в секторе разрешающие семейства операторов вырожденных эволюционных уравнений дробного порядка. Сиб. журн. чистой и приклад. математики, 16(2): 93–107.
6. Дышаев М. М., Федоров В. Е. 2016. Анализ и точные решения одной нелинейной модели теории финансовых рынков. Мат. заметки СВФУб 23(1)(89): 28–45.
7. Костич М., Федоров В. Е. 2016. Вырожденные дробные дифференциальные уравнения в локально выпуклых пространствах с сигма-регулярной парой операторов. Уфимский мат. журнал, 8(4): 100–113.
8. Fedorov V. E., Dyshaev M. M. 2016. Group classification for a general nonlinear model of option pricing. Ural Mathematical Journal, 2(2): 37–44.
9. Фёдоров В. Е., Филин Н. В. 2016. Групповой анализ одного квазилинейного уравнения. Челябин. физ.-мат. журн., 1(1): 93–103.

10. Борель Л. В., Фёдоров В. Е. 2016. Об однозначной разрешимости системы гравитационно-гироскопических волн в приближении Буссинеска. Челябинск. физ.-мат. журн., 1(2): 16–23.
11. Фёдоров В. Е. 2016. Групповая классификация квазистационарной системы уравнений фазового поля. Челябинск. физ.-мат. журн., 1(3): 63–76.
12. Романова Е. А., Федоров В. Е. 2016. Разрешающие операторы линейного вырожденного эволюционного уравнения с производной Капуто. Секториальный случай. Мат. заметки СВФУ, 23(4)(92): 58–72.

#### 2015

1. Федоров В. Е., Гордиевских Д. М. 2015. Разрешающие операторы вырожденных эволюционных уравнений с дробной производной по времени. Изв. вузов. Математика, 1: 71–83.
2. Гордиевских Д. М., Федоров В. Е. 2015. Решения начально-краевых задач для некоторых вырожденных систем уравнений дробного порядка по времени. Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер.: Математика, 12: 12–22.
3. Иванова Н. Д., Фёдоров В. Е. 2015. Нелокальная по времени краевая задача для линеаризованной системы уравнений фазового поля. Вестник Южно-Уральск. гос. ун-та. Сер. Математика. Механика. Физика, 7(3): 10–15.
4. Fedorov V. E., Davydov P. N. 2015. On a class of generalized hydrodynamic type systems of equations. J. of Applied Nonlinear Dynamics, 4(3): 223–228.
5. Федоров В. Е., Стахеева О. А. 2015. О локальном существовании решений уравнений с памятью, не разрешимых относительно производной по времени. Мат. заметки, 98(3): 414–426.
6. Федоров В. Е., Гордиевских Д. М., Плеханова М. В. 2015. Уравнения в банаховых пространствах с вырожденным оператором под знаком дробной производной. Дифференц. уравнения, 51(10): 1367–1375.
7. Иванова Н. Д., Федоров В. Е. 2015. Нелокальная на полуоси задача для вырожденных эволюционных уравнений. Мат. заметки СВФУ, 22(1)(85): 35–43.

#### 2014

1. Федоров В. Е., Омельченко Е. А. 2014. Линейные уравнения соболевского типа с интегральным оператором запаздывания. Изв. вузов. Математика, 1: 71–81.
2. Давыдов П. Н., Фёдоров В. Е. 2014. Сильно вырожденная система уравнений Осколкова. Научные ведомости Белгородского гос. ун-та. Сер.: Математика. Физика, 5(176)34: 5–11.
3. Плеханова М. В., Фёдоров В. Е. 2014. Об управляемости вырожденных распределенных систем. Уфимский мат. журн., 6(2): 78–98.
4. Федоров В. Е., Борель Л. В. 2014. Разрешимость нагруженных линейных эволюционных уравнений с вырожденным оператором при производной. Алгебра и анализ, 26(3): 190–206.
5. Фёдоров В. Е., Иванова Н. Д., Фёдорова Ю. Ю. 2014. Нелокальная по времени задача для неоднородных эволюционных уравнений. Сиб. мат. журн., 55(4): 882–897.
6. Федоров В. Е., Борель Л. В. 2014. О разрешимости вырожденных линейных эволюционных уравнений с эффектами памяти. Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер.: Математика, 10: 106–124.
7. Фёдоров В. Е., Стахеева О. А. 2014. О разрешимости эволюционных уравнений с памятью. Научные ведомости Белгородского гос. ун-та. Сер.: Математика. Физика, 19(190)36: 111–125.

#### 2013

1. Федоров В. Е., Давыдов П. Н. 2013. О нелокальных решениях полулинейных уравнений соболевского типа. Дифференц. уравнения, 49(3): 338–347.
2. Фёдоров В. Е., Давыдов П. Н. 2013. Полулинейные вырожденные эволюционные уравнения и нелинейные системы гидродинамического типа. Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН, 19(4): 267–278.

3. Федоров В. Е., Дебуш А. 2013. Один класс вырожденных дробных эволюционных систем в банаховых пространствах. Дифференц. уравнения, 49(12): 1616–1622.

**2012**

1. Федоров В. Е., Омельченко Е. А. 2012. Неоднородные линейные уравнения соболевского типа с запаздыванием. Сиб. мат. журн., 53(2): 418–429.
2. Федоров В. Е., Шкляр Б. 2012. Полная нуль-управляемость вырожденных эволюционных уравнений скалярным управлением. Мат. сб., 203(12): 137–156.

**2011**

1. Федоров В. Е., Панов А. В. Инвариантные и частично инвариантные решения системы уравнений механики двухфазной среды. Вестник Челяб. гос. ун-та. Физика, 11(38)(253): 65–68.
2. Федоров В. Е., Плеханова М. В. 2011. Задача стартового управления для класса полулинейных распределенных систем соболевского типа. Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН, 17(1): 259–267.
3. Плеханова М. В., Федоров В. Е. 2011. О существовании и единственности решений задач оптимального управления линейными распределенными системами, не разрешенными относительно производной по времени. Изв. РАН. Сер. мат., 75(2): 177–194.

**2010**

1. Fedorov V. E., Plekhanova M. V. 2010. Solvability of start control problems for semilinear distributed Sobolev type systems. Int. J. Mathematical Modelling and Numerical Optimisation, 1(3): 153–167.

**2009**

1. Уразаева А. В., Фёдоров В. Е. 2009. О корректности задачи прогноз-управления для некоторых систем уравнений. Мат. заметки, 85(3): 440–450.

**2008**

1. Федоров В. Е., Рузакова О. А. 2008. О разрешимости возмущенных уравнений соболевского типа. Алгебра и анализ, 20(4): 189–217.
2. Уразаева А. В., Федоров В. Е. 2008. Задачи прогноз-управления для некоторых систем уравнений гидродинамики. Дифференц. уравнения, 44(8): 1111–1119.

**2007**

1. Плеханова М. В., Федоров В. Е. 2007. Критерий оптимальности в задаче управления для линейного уравнения соболевского типа. Изв. РАН. Теория и системы управления, 2: 37–44.

**2006**

1. Федоров В. Е., Сагадеева М. А. 2006. Существование экспоненциальных дихотомий некоторых классов вырожденных линейных уравнений. Вычислительные технологии, 11(2): 82–92.

**2005**

1. Федоров В. Е. 2005. Обобщение теоремы Хилле – Йосиды на случай вырожденных полугрупп в локально выпуклых пространствах. Сиб. мат. журн., 46(2): 426–448.
2. Федоров В. Е., Сагадеева М. А. 2005. Об ограниченных на прямой решениях линейных уравнений соболевского типа с относительно секториальными операторами. Изв. вузов. Математика., 4: 81–84.
3. Fedorov V. E. 2005. Applications of the theory of degenerate operator semigroups to the initial-boundary-value problems. J. of Math. Sc., 126(6): 1658–1663.
4. Рузакова О. А., Федоров В. Е. 2005. Об  $\varepsilon$ -управляемости линейных уравнений, не разрешенных относительно производной в банаховых пространствах. Вычислительные технологии, 10(5): 90–102.

**2004**

1. Федоров В. Е., Плеханова М. В. 2004. Слабые решения и проблема квадратического регулятора для вырожденного дифференциального уравнения в гильбертовом пространстве. Вычислительные технологии, 9(2): 92–102.
2. Федоров В. Е. 2004. Сильно голоморфные группы линейных уравнений соболевского типа в локально выпуклых пространствах. Дифференц. уравнения., 40(5): 702–712.
3. Плеханова М. В., Федоров В. Е. 2004. Задача оптимального управления для одного класса вырожденных уравнений. Изв. РАН. Теория и системы управления, 5: 40–44.
4. Федоров В. Е. 2004. Голоморфные разрешающие полугруппы уравнений соболевского типа в локально выпуклых пространствах. Мат. сб., 195(8): 131–160.
5. Fedorov V. E., Urazaeva A. V. 2004. An inverse problem for linear Sobolev type equations. J. of Inverse and Ill-Posed Problems, 12(4): 387–395.
6. Федоров В. Е., Плеханова М. В. 2004. Оптимальное управление линейными уравнениями соболевского типа. Дифференц. уравнения, 40(11): 1548–1556.

**2003**

1. Федоров В. Е. 2003. Ослабленные решения линейного уравнения соболевского типа и полугруппы операторов. Изв. РАН. Сер. Мат., 67(4): 171–188.
2. Федоров В. Е., Рузакова О. А. 2003. Одномерная и двумерная управляемость уравнений соболевского типа в банаховых пространствах. Мат. заметки., 74(4): 618–628.

**2002**

1. Федоров В. Е., Рузакова О. А. 2002. Управляемость линейных уравнений соболевского типа с относительно  $p$ -радиальными операторами. Изв. вузов. Математика, 7: 54–57.
2. Федоров В. Е., Рузакова О. А. Одномерная управляемость в гильбертовых пространствах линейных уравнений соболевского типа. Дифференц. уравнения, 38(8): 1137–1139.

**2001**

1. Федоров В. Е. 2001. О гладкости решений линейных уравнений соболевского типа. Дифференц. уравнения. 37(12): 1646–1649.

**2000**

1. Федоров В. Е. 2000. Вырожденные сильно непрерывные группы операторов. Изв. вузов. Математика. 3(454): 54–65.
2. Федоров В. Е. 2000. Вырожденные сильно непрерывные полугруппы операторов. Алгебра и анализ, 12(3): 173–200.

**1999**

1. Федоров В. Е. 1999. Бесконечно дифференцируемые полугруппы операторов с ядрами. Сиб. мат. журн., 40(6): 1409 – 1421.

**1998**

1. Свиридюк Г. А., Федоров В. Е. 1998. О единицах аналитических полугрупп операторов с ядрами. Сиб. мат. журн, 39(3): 604–616.

**1996**

1. Федоров В. Е. 1996. Линейные уравнения типа Соболева с относительно  $p$ -радиальными операторами. ДАН., 351(3): 316–318.

**1995**

1. Свиридюк Г. А., Федоров В. Е. 1995. Аналитические полугруппы с ядрами и линейные уравнения типа Соболева. Сиб. мат. журн, 36(5): 1130–1145.