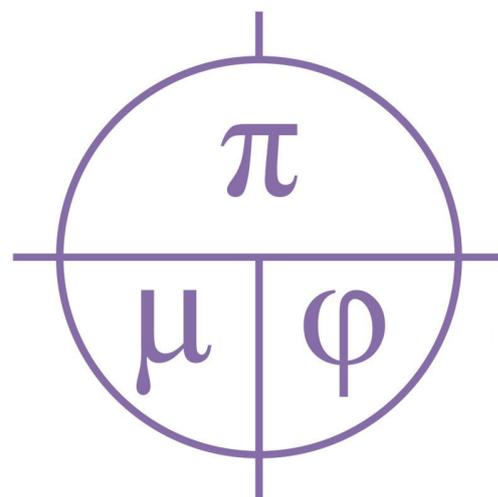


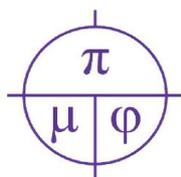
ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА & ФИЗИКА

APPLIED MATHEMATICS & PHYSICS



2022. Том 54, № 2





Прикладная математика & Физика

2022. Том 54, № 2

Основан в 1995 г. Журнал принимает к публикации оригинальные и обзорные статьи отечественных и зарубежных авторов по всем разделам современной математики и физики, и их приложений, исторические обзоры научной деятельности выдающихся учёных и краткие сообщения о научной жизни и научных мероприятиях в России и за рубежом. Журнал включен в Перечень ВАК рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней кандидата и доктора наук (1.1.1 – вещественный, комплексный и функциональный анализ, 1.1.2 – дифференциальные уравнения и математическая физика, 1.3.8 – физика конденсированного состояния). До 2020 г. журнал издавался под названием «Научные ведомости Белгородского государственного университета. Математика. Физика».

УЧРЕДИТЕЛЬ:

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Белгородский государственный национальный исследовательский университет».

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:

Главный редактор: В. Б. Васильев, доктор физико-математических наук, НИУ «БелГУ».

Заместители главного редактора:

С. М. Ситник, доктор физико-математических наук, НИУ «БелГУ», Математика;

А. В. Носков, доктор физико-математических наук, НИУ «БелГУ», Физика. Математическое моделирование.

Ответственный секретарь: О. В. Чернова, кандидат физико-математических наук, НИУ «БелГУ».

ЧЛЕНЫ РЕДАКЦИОННОЙ КОЛЛЕГИИ:

Ш. А. Алимов,	Ташкент, Узбекистан;	И. С. Ломов,	Москва, Россия;
Ю. А. Алхутлов,	Владимир, Россия;	В. В. Меньших,	Воронеж, Россия;
А. Ашыралыев,	Алматы, Казахстан;	А. И. Назаров,	Санкт-Петербург, Россия;
С. В. Блажевич,	Белгород, Россия;	Е. Ю. Панов,	В. Новгород, Россия;
А. Н. Беяков,	Белгород, Россия;	О. М. Пенкин,	Алматы, Казахстан;
А. Г. Брусенцев,	Белгород, Россия;	И. П. Половинкин,	Воронеж, Россия;
Ю. П. Вирченко,	Белгород, Россия;	Е. В. Радкевич,	Москва, Россия;
А. В. Глушак,	Белгород, Россия;	С. Е. Савотченко,	Белгород, Россия;
С. Б. Дабагов,	Москва, Россия;	А. П. Солдатов,	Москва, Россия;
Й. Диблик,	Брно, Чехия;	В. Е. Федоров,	Челябинск, Россия;
Л. М. Кожевникова,	Стерлитамак, Россия;	А. А. Шибков,	Тамбов, Россия;
А. Н. Куликов,	Ярославль, Россия;	М. В. Шитикова,	Воронеж, Россия;
Д. М. Левин,	Тула, Россия;	Э. Л. Шишкина,	Воронеж, Россия.

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор). Выходит 4 раза в год.

Выпускающий редактор: В. С. Берегова	Гарнитура Times. Уч. изд. л. 6,3
Корректурa Ю. В. Ивахненко	Дата выхода 30.06.2022.
Компьютерная верстка: О. В. Чернова	Оригинал-макет подготовлен отделом
Оригинал-макет: В. Б. Васильев	объединенной редакции научных журналов НИУ «БелГУ»
E-mail: vasilyev_v@bsu.edu.ru	308015, г. Белгород, ул. Победы, 85.

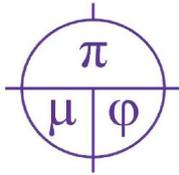
СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

- В. П. Кривоколеско***
О линейно выпуклых областях Гартогса в \mathbb{C}^2 , имеющих фрактальную структуру **81**
- А. Л. Джабраилов, Э. Л. Шишкина***
Связь обобщенных потенциалов Бесселя и решения сингулярного уравнения теплопроводности **89**
- Е. М. Богатов, В. П. Богатова***
О вкладе математиков первой величины в атомный проект СССР **98**
- А. В. Дзарахохов***
Операторы преобразования для собственных функций некоторых операторов дифференцирования и дробных степеней **114**

ФИЗИКА. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

- Е. В. Голованова, Т. Г. Кузьмичева, Н. П. Путивцева, Т. В. Зайцева***
Использование метода анализа иерархий при выборе способа исследования ферритовых материалов **124**
- Ю. П. Вирченко, И. М. Шаполова***
Статистический подход определения предела прочности твердотельного пористого материала **131**



Applied Mathematics & Physics

2022. Volume 54, № 2

Founded in 1995. The journal accepts for publication original and review articles by domestic and foreign authors on all areas of modern mathematics and physics and their applications, historical reviews of the scientific activities of prominent scientists and brief reports on scientific life and scientific events in Russia and abroad. The journal is included into the List of Higher Attestation Commission of peer-reviewed scientific publications where the main scientific results of dissertations for obtaining scientific degrees of a candidate and doctor of science should be published (1.1.1 – material, complex and functional analysis, 1.1.2 – differential equations and mathematical physics, 1.3.8 – condensed matter physics). Until 2020, the journal was published with the name «Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics. Physics».

FOUNDER:

Federal state autonomous educational establishment of higher education
«Belgorod National Research University».

EDITORIAL BOARD:

Chief Editor: V. B. Vasilyev, Dr.Sc., Ph.D., Belgorod National Research University.

Deputy Editor-in-Chief:

S. M. Sitnik, Dr.Sc., Ph.D., Belgorod National Research University, Mathematics;

A. V. Noskov, Dr.Sc., Ph.D., Belgorod National Research University, Physics. Mathematical modeling.

Executive Secretary: O. V. Chernova, PhD, Belgorod National Research University.

EDITORIAL BOARD MEMBERS:

Sh. A. Alimov,	Tashkent, Uzbekistan;	I. S. Lomov,	Moscow, Russia;
Yu. A. Alkhutov,	Vladimir, Russia;	V. V. Menshih,	Voronezh, Russia;
A. Ashyralyev,	Almaty, Kazakhstan;	A. I. Nazarov,	St. Petersburg, Russia;
S. V. Blazhevich,	Belgorod, Russia;	E. Yu. Panov,	Velikiy Novgorod, Russia;
A. N. Belyakov,	Belgorod, Russia;	O. M. Penkin,	Almaty, Kazakhstan;
A. G. Brusentsev,	Belgorod, Russia;	I. P. Polovinkin,	Voronezh, Russia;
Yu. P. Virchenko,	Belgorod, Russia;	E. V. Radkevich,	Moscow, Russia;
A. V. Glushak,	Belgorod, Russia;	S. E. Savotchenko,	Belgorod, Russia;
S. B. Dabagov,	Moscow, Russia;	A. P. Soldatov,	Moscow, Russia;
J. Diblik,	Brno, Czech;	V. E. Fedorov,	Chelyabinsk, Russia;
L. M. Kozhevnikova,	Sterlitamak, Russia;	A. A. Shibkov,	Tambov, Russia.
A. N. Kulikov,	Yaroslavl, Russia;	M. V. Shitikova,	Voronezh, Russia;
D. M. Levin,	Tula, Russia;	E. L. Shishkina,	Voronezh, Russia.

The journal has been registered at the Federal service for supervision of communications information technology and mass media (Roskomnadzor). Publication frequency: 4 /year.

Commissioning Editor V. S. Beregova
Proofreading Yu. V. Ivakhnenko
Computer imposition O. V. Chernova
Dummy layout by V. B. Vasilyev
E-mail: vasilyev_v@bsu.edu.ru

Typeface Times. Publisher's signature 6,3
Date of publishing 30.06.2022.
The layout is presented by Department of the united
Editorial Board of Scientific Journals
Belgorod National Research University
Address: 85 Pobeda St., Belgorod, 308015, Russia

CONTENTS

MATHEMATICS

V. Krivokolesko

On Linearly Convex Hartogs Region in \mathbb{C}^2 , with Fractal Structure **81**

A. Dzhabrailov, E. Shishkina

Connection Between Generalized Bessel Potentials and Solutions to the Singular Heat Equation **89**

E. Bogatov, V. Bogatova

About the Contribution of the First Magnitude Mathematicians to the Soviet Atomic Project **98**

A. Dzarakhokhov

Transformation Operators for Eigenfunctions of Some Differentiation Operators and Fractional Powers **114**

PHYSICS. MATHEMATICAL MODELING

E. Golovanova, T. Kuzmicheva, N. Putivtseva, T. Zaitseva

Using the analytical hierarchical process when choosing a method for the study of ferrite materials **124**

Yu. Virchenko, I. Shapolova

Statistical approach of the determination of the tensile strength of solid porous material **131**

МАТЕМАТИКА

УДК 517.55
MSC 05A10
краткое сообщение

DOI 10.52575/2687-0959-2022-54-2-81-88

О ЛИНЕЙНО ВЫПУКЛЫХ ОБЛАСТЯХ ГАРТОГСА В \mathbb{C}^2 , ИМЕЮЩИХ ФРАКТАЛЬНУЮ СТРУКТУРУ

В. П. Кривоколеско 

(Статья представлена членом редакционной коллегии В. Б. Васильевым)

Сибирский Федеральный Университет,
г. Красноярск, 660041, Россия

E-mail: krivokolesko@gmail.com

Аннотация. В семидесятых годах прошлого века было доказано, что ограниченная линейно выпуклая область с гладкой границей в \mathbb{C}^n гомеоморфна открытому шару. Если граница ограниченной линейно выпуклой области в \mathbb{C}^n не является гладкой, то область может иметь разный топологический тип. Только при $n = 2$ проекция комплексной плоскости $a_1z_1 + \dots + a_nz_n + c = 0$ на диаграмму Гартогса (Хартогса) в \mathbb{C}^n с плоскостью симметрии $z_n = 0$ имеет простой геометрический вид: является круговым конусом с вершиной на плоскости $z_2 = 0$. Этот факт позволяет строить линейно выпуклые области Гартогса в \mathbb{C}^2 с плоскостью симметрии $z_2 = 0$, проекция которых на диаграмму Гартогса имеет фрактальную структуру.

Ключевые слова: линейная выпуклость, области Гартогса, фрактальная структура

Для цитирования: Кривоколеско В. П. 2022. О линейно выпуклых областях Гартогса в \mathbb{C}^2 , имеющих фрактальную структуру. Прикладная математика & Физика. 54(2): 81–88. DOI 10.52575/2687-0959-2022-54-2-81-88

ON LINEARLY CONVEX HARTOGS REGIONS IN \mathbb{C}^2 , WITH FRACTAL STRUCTURE

Viacheslav Krivokolesko 

(Article submitted by a member of the editorial board V. B. Vasilyev)

Associate Professor of the Department of Higher and Applied Mathematics, Institute of Mathematics and Fundamental Informatics, Siberian Federal University, Svobodny 79, Krasnoyarsk, 660041, Russia

E-mail: krivokolesko@gmail.com

Received March, 14, 2022

Abstract. In the 1970s, it was proved that a bounded linearly convex domain with a smooth boundary in \mathbb{C}^n is homeomorphic to an open ball. If the boundary of a bounded linearly convex domain in \mathbb{C}^n is not smooth, then the domain may have different topological types. Only for $n = 2$ complex plane projection $a_1z_1 + \dots + a_nz_n + c = 0$ to the Hartogs (Hartogs) diagram in \mathbb{C}^n with symmetry plane $z_n = 0$ has a simple geometric form: it is a circular cone with vertex on the plane $z_2 = 0$. This fact allows one to construct linearly convex Hartogs domains in \mathbb{C}^2 with symmetry plane $z_2 = 0$, whose projection onto the Hartogs diagram has a fractal structure.

Key words: linear convex, Hartogs regions, fractal structure

For citation: Viacheslav Krivokolesko. 2022. On linearly Convex Hartogs region in \mathbb{C}^2 , with fractal structure. Applied Mathematics & Physics. 54(2): 81–88. (in Russian) DOI 10.52575/2687-0959-2022-54-2-81-88

1. Введение. В статье [4] было показано, что ограниченная линейно выпуклая область с гладкой границей в \mathbb{C}^n гомеоморфна открытому шару в \mathbb{C}^n . Если границы таких областей не являются гладкими, то ограниченные линейно выпуклые области могут иметь разный топологический тип, более того, можно построить полукруговые линейно выпуклые области, проекция которых на диаграмму Гартогса имеет фрактальную структуру.

Статья состоит из введения и двух частей (параграфов). Первая часть содержит необходимые определения и критерий линейной выпуклости для областей Гартогса в \mathbb{C}^2 . Во второй части приводится описание процессов построения ограниченных линейно выпуклых областей Гартогса в \mathbb{C}^2 , имеющих фрактальную структуру.

2. Необходимые определения.

Определение 2.1. Область $G \subset \mathbb{C}^n$ называется линейно выпуклой ([1], §8), если для каждой точки ζ её границы ∂G существует комплексно $(n-1)$ -мерная аналитическая плоскость

$$a_1(z_1 - \zeta_1) + \dots + a_n(z_n - \zeta_n) = 0,$$

проходящая через ζ и не пересекающая G .

Отметим, что некоторые авторы используют термин «слабая линейная выпуклость»: например, см. [5].

Определение 2.2. Множество $G \subset \mathbb{C}^n$ называется множеством Гартогса (Хартогса) относительно переменной z_n с плоскостью симметрии $z_n = 0$, если вместе с точкой $(z_1, \dots, z_{n-1}, z_n) \in G$ этому множеству принадлежат и все точки $(z_1, \dots, z_{n-1}, z_n e^{i\varphi})$, $0 \leq \varphi < 2\pi$.

Замечание 2.1. Приведенное определение дано аналогично определению области Гартогса ([3], §1). Отметим, что в книге В. С. Владимировой ([2], стр. 63) наряду с термином «области Гартогса» применяется термин «полукруговые области» как равнозначный термин.

Следуя [3], рассмотрим проекцию \mathbb{C}^n на диаграмму Гартогса по правилу

$$\pi : (z_1, \dots, z_{n-1}, z_n) \rightarrow (z_1, \dots, z_{n-1}, |z_n|).$$

Проекция π позволяет вместе с множествами Гартогса в $G \subset \mathbb{C}^n$ рассматривать и $\pi(G)$ – изображения G в $\mathbb{R}^{(2n-1)}$.

Предложение 2.1. Проекция π переводит плоскость

$$a_1 z_1 + a_2 z_2 + c = 0 \tag{1}$$

при $a_1 \neq 0$ в круговую коническую поверхность на диаграмме Гартогса

$$|a_2|^2 |z_2|^2 = |a_1|^2 \left(x_1 + \operatorname{Re} \frac{c}{a_1} \right)^2 + |a_1|^2 \left(y_1 + \operatorname{Im} \frac{c}{a_1} \right)^2 \tag{2}$$

с вершиной в точке $(-\operatorname{Re} \frac{c}{a_1}, -\operatorname{Im} \frac{c}{a_1}, 0)$ на плоскости $|z_2| = 0$, где $z_1 = x_1 + iy_1$, причем каждая точка этой конической поверхности является проекцией некоторой точки плоскости (1).

При $a_1 = 0$ и $a_2 \neq 0$ проекция π переводит плоскость (1) в «вырожденную» коническую поверхность

$$|a_2| |z_2| = |c|. \tag{3}$$

Доказательство. Рассмотрим проекцию плоскости $a_1(z_1 - \zeta_1) + a_2(z_2 - \zeta_2) = 0$ в \mathbb{C}^2 , проходящей через точку (ζ_1, ζ_2) , на диаграмму Гартогса.

Предварительно запишем уравнение плоскости в \mathbb{C}^2 в виде

$$a_1 z_1 + a_2 z_2 + c = 0, \text{ где } c = -a_1 \zeta_1 - a_2 \zeta_2.$$

Из уравнения (1) при $a_1 \neq 0$, применяя обозначение

$$z_1 = x_1 + iy_1,$$

где $i = \sqrt{-1}$, следует

$$|a_2| |z_2| = |a_1 z_1 + c|, \tag{4}$$

т. к. с каждой точкой z_2 аналитической плоскости (1) принадлежат и все точки $z_2 e^{i\varphi}$ при $0 \leq \varphi < 2\pi$ (уравнение $a_1 z_1 + a_2 z_2 + c = 0$ разрешимо для $z_2 e^{i\varphi}$ при $a_1 \neq 0$). Из (4) следует (2), то есть

$$|a_2|^2 |z_2|^2 = |a_1|^2 \left(x_1 + \operatorname{Re} \frac{c}{a_1} \right)^2 + |a_1|^2 \left(y_1 + \operatorname{Im} \frac{c}{a_1} \right)^2.$$

В нашем случае на диаграмме Гартогса, то есть в системе координат $(0, x_1, y_1, |z_2|)$, где обычно тройка координатных осей $0x_1, 0y_1, 0|z_2|$ правая, уравнение (2) задает круговую коническую поверхность с вершиной в точке $(-\operatorname{Re} \frac{c}{a_1}, -\operatorname{Im} \frac{c}{a_1}, 0)$ на плоскости $|z_2| = 0$ и «раствором» (тангенсом угла при вершине конической поверхности) равным

$$k = \frac{|a_2|}{|a_1|}. \tag{5}$$

Отметим, что $c \neq 0$ и $a_1 \rightarrow 0$ «раствор» конуса $k \rightarrow \infty$ и первые координаты его вершины $-\operatorname{Re} \frac{c}{a_1} \rightarrow \infty, -\operatorname{Im} \frac{c}{a_1} \rightarrow \infty$.

При $c = 0$ из (2) следует, что проекция (1) на диаграмму Гартогса задается круговой конической поверхностью с вершиной в начале координат и раствором $k = \frac{|a_2|}{|a_1|}$ при $a_1 \neq 0$.

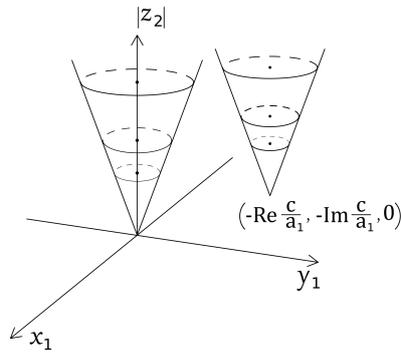


Рис. 1. Проекция плоскости $a_1z_1 + a_2z_2 + c = 0$ на диаграмму Гартогса, где $a_1 \cdot a_2 \neq 0$
 Fig. 1. Projection of the plane $a_1z_1 + a_2z_2 + c = 0$ onto the Hartogs diagram, where $a_1 \cdot a_2 \neq 0$

При $a_2 = 0$ «раствор» (5) конической поверхности (2) равен нулю и на диаграмме Гартогса коническая поверхность вырождается в луч с вершиной в точке $(-\text{Re} \frac{c}{a_1}, -\text{Im} \frac{c}{a_1}, 0)$, параллельный оси $0|z_2|$.
 Очевидно, что при $a_2 = 0$ каждая точка луча $(-\text{Re} \frac{c}{a_1}, -\text{Im} \frac{c}{a_1}, |z_2|)$ удовлетворяет уравнению (2).

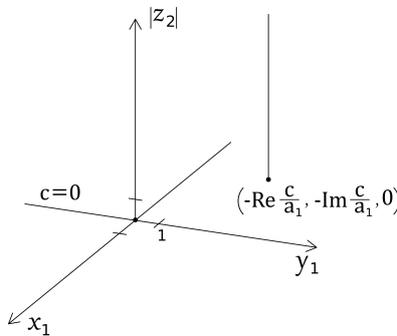


Рис. 2. Проекция плоскости $a_1z_1 + c = 0$ ($a_2 = 0$) на диаграмму Гартогса, где $a_1 \neq 0$
 Fig. 2. Projection of the plane $a_1z_1 + c = 0$ ($a_2 = 0$) onto the Hartogs diagram, where $a_1 \neq 0$

При $a_1 = 0$ из (1) следует, что проекция (1) на диаграмму Гартогса удовлетворяет уравнению

$$|z_2| = \frac{|c|}{|a_2|}, \tag{6}$$

которое задает коническую поверхность бесконечного «раствора» с вершиной в бесконечно удаленной точке.

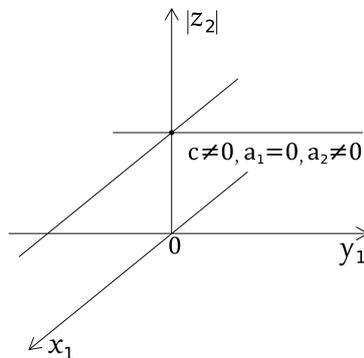


Рис. 3. Проекция плоскости $a_2z_2 + c = 0$ ($a_1 = 0$) на диаграмму Гартогса, где $a_2 \neq 0$
 Fig. 3. Projection of the plane $a_2z_2 + c = 0$ ($a_1 = 0$) onto the Hartogs diagram, where $a_2 \neq 0$

Покажем, что каждой точке круговой конической поверхности (2) при $a_1 \neq 0$ соответствует хотя бы одна точка аналитической плоскости (1).

Пусть $ca_1a_2 \neq 0$. Рассмотрим точку круговой конической поверхности (2) при фиксированном значении z_2 . Тогда точки конической поверхности при фиксированном значении z_2 лежат на окружности

радиуса $r = \frac{|a_2|}{|a_1|}|z_2|$ с центром в точке $(-Re \frac{c}{a_1}, -Im \frac{c}{a_1})$, а координаты точек z_1 , лежащих на окружности радиуса r , соответственно равны

$$\begin{cases} x_1 = -Re \frac{c}{a_1} + r \cos \phi = -Re \frac{c}{a_1} + \frac{|a_2|}{|a_1|}|z_2| \cos \phi, \\ y_1 = -Im \frac{c}{a_1} + r \sin \phi = -Im \frac{c}{a_1} + \frac{|a_2|}{|a_1|}|z_2| \sin \phi, \\ 0 \leq \phi < 2\pi. \end{cases}$$

Подставим координаты этих точек в (1) и получим, что равенство

$$\begin{aligned} & a_1(-Re \frac{c}{a_1} + \frac{|a_2|}{|a_1|}|z_2| \cos \phi - i \cdot (Im \frac{c}{a_1} + \frac{|a_2|}{|a_1|}|z_2| \sin \phi)) + a_2 z_2 + c = \\ & = -a_1 \frac{c}{a_1} + a_1 \cdot \frac{|a_2|}{|a_1|}|z_2| e^{i\phi} + a_2 z_2 + c = e^{i\varphi a_1} |a_2| |z_2| e^{i\phi} + |a_2| e^{i\varphi a_2} |z_2| e^{i\varphi z_2} = \\ & = |a_2| |z_2| (e^{i\varphi a_1} e^{i\phi} + e^{i\varphi a_2} e^{i\varphi z_2}) = 0 \end{aligned}$$

справедливо при $\varphi z_2 = -\varphi a_2 + \varphi a_1 + \phi + \pi$.

При $c = 0$ и $a_1 a_2 \neq 0$ каждой точке $(z_1, |z_2|)$ на диаграмме Гартогса соответствуют в \mathbb{C}^2 точки $(z_1, z_2) = (z_1, |z_1| \frac{|a_1|}{|a_2|} e^{i\varphi})$, где φ меняется от 0 до 2π .

Подставим координаты этих точек в (1) при условии $c = 0$ и $a_1 a_2 \neq 0$ и получим, что равенство

$$\begin{aligned} a_1 z_1 + a_2 |z_1| \frac{|a_1|}{|a_2|} e^{i\varphi} &= |a_1| e^{i\varphi a_1} |z_1| e^{i\varphi z_1} + |a_2| e^{i\varphi a_2} |z_1| \frac{|a_1|}{|a_2|} e^{i\varphi} = \\ &= |a_1| |z_1| (e^{i\varphi a_1} e^{i\varphi z_1} + e^{i\varphi a_2} e^{i\varphi}) = 0 \end{aligned}$$

справедливо при $\varphi = -\varphi a_2 + \varphi a_1 + \varphi z_1 + \pi$.

Покажем, что каждой точке круговой конической поверхности (2) при $a_1 = 0$ соответствует хотя бы одна точка аналитической плоскости (1).

При $a_1 = 0$ из (6) следует, что каждой точке $(z_1, |z_2|)$ на диаграмме Гартогса соответствуют в \mathbb{C}^2 точки $(z_1, |z_2| e^{i\varphi}) = (z_1, \frac{|c|}{|a_2|} e^{i\varphi})$, где φ меняется от 0 до 2π .

Подставим координаты этих точек в (1) при условии $a_1 = 0$ и получим, что равенство

$$0 \cdot z_1 + a_2 \frac{|c|}{|a_2|} e^{i\varphi} + c = |a_2| e^{i\varphi a_2} \frac{|c|}{|a_2|} e^{i\varphi} + |c| e^{i\varphi c} = |c| (e^{i\varphi a_2} e^{i\varphi} + e^{i\varphi c}) = 0$$

справедливо для $\varphi = -\varphi a_2 + \varphi c + \pi$ и произвольного значения z_1 .

При $a_1 = 0$ и $c = 0$ равенство (6) справедливо при $|z_2| = 0$.

Тогда $z_2 = 0$ и равенство $0 \cdot z_1 + a_2 \cdot 0 + 0 = 0$ выполняется при любом значении z_1 , то есть на диаграмме Гартогса каждой точке $(z_1, 0)$ плоскости $|z_2| = 0$ соответствует точка $(z_1, 0)$ плоскости $z_2 = 0$, принадлежащей \mathbb{C}^2 .

Предложение 2.2. Пусть для области Гартогса $G \subset \mathbb{C}^2$ относительно переменной z_2 аналитическая плоскость $a_1(z_1 - \zeta_1) + a_2(z_2 - \zeta_2) = 0$ проходит через точку $(\zeta_1, \zeta_2) \in \partial G$ – границы G и не пересекает G .

Тогда для $0 \leq \phi < 2\pi$ аналитические плоскости

$$a_1(z_1 - \zeta_1) + a_2 e^{-i\phi} (z_2 - \zeta_2 e^{i\phi}) = 0 \quad (7)$$

проходят через точки $(\zeta_1, \zeta_2 e^{i\phi}) \in \partial G$ и не пересекают G .

Доказательство. Пусть для точки $(\zeta_1, \zeta_2) \in \partial G$ – границы G аналитическая плоскость $a_1(z_1 - \zeta_1) + a_2(z_2 - \zeta_2) = 0$ не пересекает область G . Так как G – область Гартогса относительно переменной z_2 , то точки $(\zeta_1, \zeta_2 e^{i\phi}) \in \partial G$.

Тогда аналитические плоскости $a_1(z_1 - \zeta_1) + a_2 e^{-i\phi} (z_2 - \zeta_2 e^{i\phi}) = 0$ не пересекают область G и проходят через точку $(\zeta_1, \zeta_2 e^{i\phi}) \in \partial G$.

Предположим, что аналитическая плоскость $a_1(z_1 - \zeta_1) + a_2 e^{-i\phi} (z_2 - \zeta_2 e^{i\phi}) = 0$ пересекает G в точке (\hat{z}_1, \hat{z}_2) , то есть $a_1(\hat{z}_1 - \zeta_1) + a_2 e^{-i\phi} (\hat{z}_2 - \zeta_2 e^{i\phi}) = 0$, причем эта аналитическая плоскость будет проходить через точку $(\zeta_1, \zeta_2 e^{i\phi}) \in \partial G$. Но тогда аналитическая плоскость $a_1(z_1 - \zeta_1) + a_2 e^{-i\phi} e^{i\phi} (z_2 - \zeta_2 e^{i\phi} e^{-i\phi}) = 0$ будет проходить через точку $(\zeta_1, \zeta_2) \in \partial G$ и через точку $(\hat{z}_1, \hat{z}_2 e^{-i\phi}) \in G$, то есть пересекает G . Противоречие.

Замечание 2.2. Семейство аналитических плоскостей (7) является множеством Гартогса относительно переменной z_2 с плоскостью симметрии $z_2 = 0$, и его проекция на диаграмму Гартогса совпадает с проекцией произвольной аналитической плоскости из этого семейства на эту диаграмму, так как это одна и та же коническая поверхность.

Доказательство. Запишем (7) в виде

$$a_1 z_1 + a_2 z_2 e^{-i\phi} + c = 0, \quad (8)$$

где $c = -a_1\zeta_1 - a_2\zeta_2$ и

$$|a_2z_2e^{-i\phi}| = |a_1z_1 + c| = |a_2||z_2|.$$

Следствие 2.1. Пусть $G \subset \mathbb{C}^2$ – область Гартогса относительно переменной z_2 с плоскостью симметрии $z_2 = 0$, и аналитическая плоскость $a_1z_1 + a_2z_2 + c = 0$ проходит через точку $(\zeta_1, \zeta_2) \in \partial G$ – границы G и не пересекает G .

Тогда на диаграмме Гартогса $\pi(a_1z_1 + a_2z_2 + c = 0) \cap \pi(G) \subset \pi(\partial G)$, то есть круговая коническая поверхность (2) не пересекает $G_{|z_2|}$ – проекцию G на диаграмму Гартогса, если $G \subset \mathbb{C}^2$ – область, и эта круговая коническая поверхность содержит точку $(\zeta_1, |\zeta_2|) \in \pi(\partial G)$ и может содержать только проекции точек ∂G границы области на диаграмму Гартогса. И наоборот, если на диаграмме Гартогса круговая коническая (2) касается области $G_{|z_2|}$, то для $0 \leq \phi < 2\pi$ семейство аналитических плоскостей $a_1z_1 + a_2e^{-i\phi}z_2 + c = 0$ касается области $G \subset \mathbb{C}^2$.

Доказательство. Справедливость утверждения следует из предложений 2.1, 2.2 и замечания 2.2.

Геометрический критерий линейной выпуклости области Гартогса (множества) $G \subset \mathbb{C}^2$.

Пусть на диаграмме Гартогса $(0, z_1, |z_2|)$ относительно переменной z_2 задана область (множество) D . Если для каждой точки $(\zeta_1, |\zeta_2|) \in \partial D$ – границы D найдется круговая коническая поверхность с вершиной на плоскости $|z_2| = 0$, проходящая через эту точку и не пересекающая область D (внутренних точек множество D), то D является проекцией линейно выпуклой области Гартогса $G = \pi^{-1}(D) \subset \mathbb{C}^2$.

Сформулированный критерий позволяет строить примеры ограниченных линейно выпуклых областей Гартогса в \mathbb{C}^2 , проекция которых на диаграмму Гартогса имеет фрактальный характер.

Замечание 2.3. Например, любая цилиндрическая поверхность на диаграмме Гартогса с образующей на плоскости $|z_2| = 0$ и направляющая которой параллельна оси $0|z_2|$ является проекцией неограниченной линейно выпуклой области в \mathbb{C}^2 .

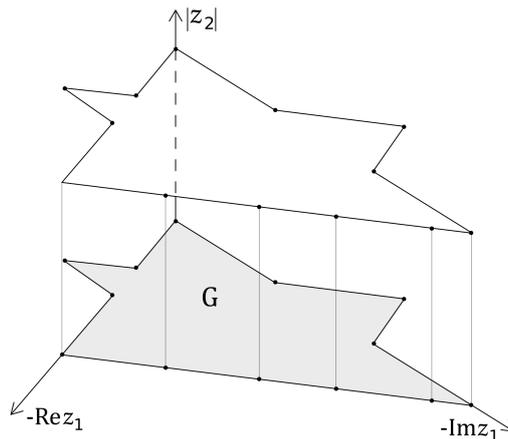


Рис. 4. Цилиндрическая поверхность на диаграмме Гартогса
Fig. 4. Cylindrical surface on the Hartogs diagram

Также любая цилиндрическая поверхность на диаграмме Гартогса с образующей на плоскости $|z_2| = 0$, и направляющая которой параллельна оси $0|z_2|$ ограниченная двумя плоскостями $|z_2| = d_1$ и $|z_2| = d_2$, является проекцией ограниченной линейно выпуклой области в \mathbb{C}^2 .

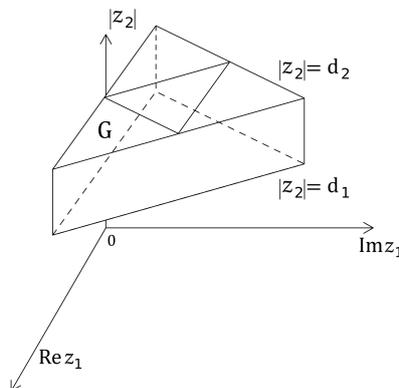


Рис. 5. Ограниченная цилиндрическая поверхность на диаграмме Гартогса
Fig. 5. Bounded cylindrical surface on the Hartogs diagram

Замечание 2.4. Аналогичные рассуждения при $n > 2$ **не аналогичны** приведенным выше результатам, так как уже при $n = 3$ проекция аналитической плоскости

$$a_1 z_1 + a_2 z_2 + a_3 z_3 + c = 0$$

на диаграмму Гартогса $(0, z_1, z_2, |z_3|)$ не является конической поверхностью.

3. Построение линейно выпуклых областей Гартогса в \mathbb{C}^2 , имеющих фрактальную структуру.
Замечание 2.3. и рисунки к нему подсказывают идеи построения линейно выпуклых областей Гартогса в \mathbb{C}^2 , имеющих фрактальный характер.

Так, например, если в качестве образующей цилиндрической поверхности в рисунке 4 взять кривую Коха после конечного числа шагов, то получим неограниченную линейно выпуклую область Гартогса в \mathbb{C}^2 и даже в \mathbb{C}^n , имеющую фрактальную структуру.

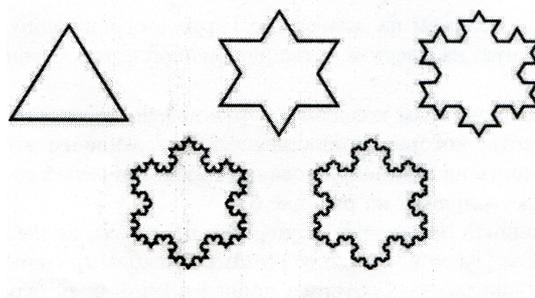


Рис. 6. Снежинки Коха при $n = 1, 2, 3, 4, 5$

Fig. 6. Koch snowflakes for $n = 1, 2, 3, 4, 5$

Если в качестве образующей ограниченной цилиндрической поверхности в рисунке 5 взять ковер Серпинского после конечного числа шагов, то получим ограниченную линейно выпуклую область Гартогса в \mathbb{C}^2 , имеющую фрактальную структуру.

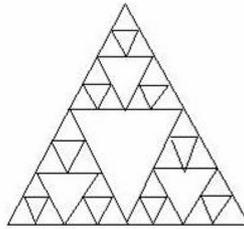


Рис. 7. Ковер Серпинского при $n = 4$

Fig. 7. Sierpinski carpet for $n = 4$

Приведенные соображения позволяют строить довольно простые примеры ограниченных линейно выпуклых областей Гартогса в \mathbb{C}^2 , так «касательные конусы» вырождены (см. рис. 2 и рис. 3).

Изложим идею построения чуть более сложной ограниченной линейно выпуклой области Гартогса в \mathbb{C}^2 .

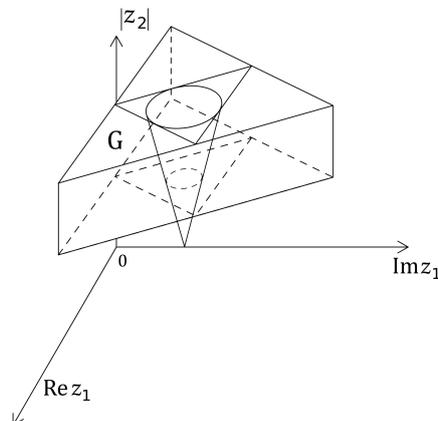


Рис. 8. Второй шаг

Fig. 8. Second step

На первом шаге возьмем на диаграмме Гартоса ограниченную цилиндрическую область, изображенную на рисунке 5, направляющей которой является равносторонний треугольник.

На втором шаге круговым конусом с вершиной на плоскости $|z_2| = 0$ «вырежем» в этой области часть, которая принадлежит внутренности этого конуса, причем граничная окружность на верхнем основании цилиндрической области принадлежит «центральному» треугольнику на рисунке 5.

Конус, изображенный на рисунке 8 диаграммы Гартоса, является круговым с вершиной на плоскости $|z_2| = 0$, и в силу геометрического критерия линейной выпуклости, область на диаграмме Гартоса является проекцией ограниченной линейно выпуклой области в \mathbb{C}^2 .

Третий и последующие шаги полностью аналогичны шагам, которые делаем при построении ковры Серпинского. На рисунке 9 приведен третий шаг.

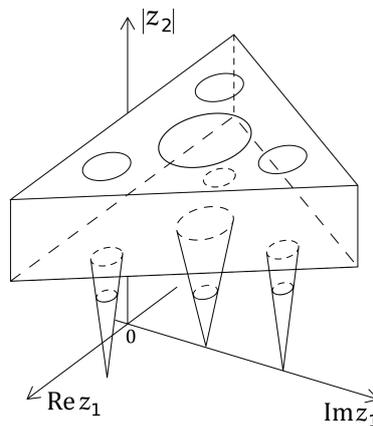


Рис. 9. Третий шаг

Fig. 9. Third step

После каждого конечного числа шагов будем получать ограниченную линейно выпуклую область Гартоса, проекция которой на диаграмму Гартоса имеет фрактальный характер.

Замечание 3.1. Можно дать разгуляться своей фантазии: с одной стороны можно из исходной ограниченной цилиндрической поверхности, изображенной на рисунке 5, «вырезать» по шагам конусы как описано выше, а с другой стороны «деформировать» границу по принципу снежинки Коха.

Можно в качестве ограниченной цилиндрической поверхности брать не треугольник, а квадрат или что-то иное и действовать аналогично.

Благодарность. Автор признателен и благодарен Е. А. Клешковой и Д. Ю. Почекуту за помощь в работе и сделанные замечания.

Список литературы

1. Айзенберг Л. А., Южаков А. П. 1979. Интегральные представления и вычеты в многомерном комплексном анализе. Новосибирск: Наука. 368.
2. Владимиров В. С. 1964. Методы теории функций многих комплексных переменных. Москва: Наука. 412.
3. Шабат Б. В. 2004. Введение в комплексный анализ. Функция нескольких переменных: Учебник: В 2-х ч. Ч. 2. 4-е изд., стер. – СПб.: Издательство «Лань». 464.
4. Южаков А. П., Кривоколеско В. П. 1971. Некоторые свойства линейно выпуклых областей с гладкими границами в \mathbb{C}^n . Сиб. матем. журн., 12(2): 452-458.
5. Andersson M., Passare M., Sigurdsson R. 2004. Complex convexity and analytic functionals, Basel – Boston – Berlin: Birkhäuser, (Progr. Math.; 225), 164.

References

1. Aizenberg L. A., Yuzhakov A. P. 1979. Integral representations and residues in multidimensional complex analysis. Novosibirsk: Science. 368. (in Russian)
2. Vladimirov V. S. 1964. Methods of the theory of functions of several complex variables. Moscow: Nauka. 412. (in Russian)

3. Shabat B. V. 2004. Introduction to complex analysis. Function of several variables: Textbook: In 2 hours. Part 2. 4th ed., Sr. – St. Petersburg: «Lan» Publishing House. 464. (in Russian)
4. Yuzhakov A. P., Krivokolesko V. P. 1971. Some properties of linearly convex domains with smooth boundaries in \mathbb{C}^n . Sib. math. journal, 12(2): 452-458. (in Russian)
5. Andersson M., Passare M., Sigurdsson R. 2004. Complex convexity and analytic functionals, Basel – Boston – Berlin: Birkhäuser, (Progr. Math.; 225), 164.

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 14.03.2022

Поступила после рецензирования 25.04.2022

Принята к публикации 28.04.2022

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Кривоколеско Вячеслав Павлович – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры высшей и прикладной математики Института математики и фундаментальной информатики, Сибирский федеральный университет.

Проспект Свободный, 79, Красноярск, 660041, Россия

E-mail: krivokolesko@gmail.com

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Viacheslav Krivokolesko – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Higher and Applied Mathematics, Institute of Mathematics and Fundamental Informatics, Siberian Federal University, Krasnoyarsk, Russia

УДК 517.3
MSC 31B15; 47G10; 44A15; 46E30
оригинальное исследование

DOI 10.52575/2687-0959-2022-54-2-89-97

СВЯЗЬ ОБОБЩЕННЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ БЕССЕЛЯ И РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

А. Л. Джабраилов , Э. Л. Шишкина 

Чеченский государственный университет им. А. А. Кадырова, г. Грозный, 364024, Россия;
Воронежский государственный университет, г. Воронеж, 394018, Россия,

E-mail: ahmed_0065@mail.ru, ilina_dico@mail.ru

Аннотация. В настоящей работе мы рассматриваем обобщение ядра Гаусса – Вейерштрасса, являющееся решением сингулярного уравнения теплопроводности, и соответствующий ему интеграл. Изучаем их свойства. Далее, мы показываем, что обобщенный потенциал Бесселя функции, интегрируемой в p -й степени со степенным весом, может быть представлен интегралом простого вида при помощи ядра Гаусса – Вейерштрасса.

Ключевые слова: обобщенное ядро Гаусса – Вейерштрасса, сингулярное уравнение теплопроводности, обобщенный потенциал Бесселя

Благодарности: Работа первого автора выполнена при поддержке Минобрнауки РФ по гос. заданию FECS-2020-0001.

Для цитирования: Джабраилов А. Л., Шишкина Э. Л. 2022. Связь обобщенных потенциалов Бесселя и решения сингулярного уравнения теплопроводности. Прикладная математика & Физика. 54(2): 89–97.

DOI 10.52575/2687-0959-2022-54-2-89-97

CONNECTION BETWEEN GENERALIZED BESSEL POTENTIALS AND SOLUTIONS TO THE SINGULAR HEAT EQUATION

Akhmed Dzhabrailov , Elina Shishkina 

Kadyrov Chechen State University, Grozny, 36402, Russia;
Voronezh State University, Voronezh, 394018, Russia,

E-mail: ahmed_0065@mail.ru, ilina_dico@mail.ru

Received March, 19, 2022

Abstract. In this paper, we consider a generalization of the Gauss – Weierstrass kernel, which is the solution to the singular heat equation and the corresponding integral to it. We study their properties. Further, we show that the generalized Bessel potential of a function integrable to the p -th degree with a power weight can be represented by an integral of a very simple form using the Gauss – Weierstrass kernel.

Keywords: generalized Gauss – Weierstrass kernel, singular heat-conduction equation, generalized Bessel potential

Acknowledgements: the work of the first author was carried out with the support of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation on a state assignment FECS-2020-0001.

For citation: Akhmed Dzhabrailov, Elina Shishkina. 2022. Connection between generalized Bessel potentials and solutions to the singular heat equation. Applied Mathematics & Physics. 54(2): 89–97. (in Russian)

DOI 10.52575/2687-0959-2022-54-2-89-97

1. Введение. В этой статье мы будем иметь дело с сингулярным дифференциальным оператором Бесселя B_γ (см. [3], стр. 5):

$$(B_\gamma)_t = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\gamma}{t} \frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{t^\gamma} \frac{\partial}{\partial t} t^\gamma \frac{\partial}{\partial t}, \quad t > 0, \quad \gamma \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Мы рассматриваем дробное интегрирование, которое представляет собой дробную степень оператора $(I - \Delta_\gamma)^{-\alpha/2}$, $\alpha > 0$, где I – единичный оператор и Δ_γ – оператор Лапласа–Бесселя вида

$$\Delta_\gamma = (\Delta_\gamma)_x = \sum_{k=1}^n (B_{\gamma_k})_{x_k}. \quad (2)$$

Дробная степень $(I - \Delta_\gamma)^{-\alpha/2}$ при помощи преобразования Ханкеля сводится к умножению на степень $(1 + |x|^2)^{-\alpha/2}$. А именно, дробная степень $(I - \Delta_\gamma)^{-\alpha/2}$ реализуется как обобщенная свертка прообраза преобразования Ханкеля функции $(1 + |x|^2)^{-\alpha/2}$ и некоторой функции. Такую свертку мы будем называть обобщенным потенциалом Бесселя.

Классический потенциал Бесселя, реализующий дробные степени оператора $(I - \Delta)^{-\frac{\alpha}{2}}$, где Δ – оператор Лапласа, широко изучен. Такой потенциал появился в работах Н. Ароншайна и К. Т. Смита [13] и А. П. Кальдерона [14] в

1961 г. Пространство потенциалов Бесселя, которое иногда называют пространством Лиувилля дробной гладкости α , является расширением пространств Соболева $L_p^m(\mathbb{R}^n)$ на случай дробного порядка α , поэтому его также называют пространствами Соболева дробного порядка [21, 16]. Результаты о пространстве бesselевых потенциалов были получены И. Стейном [22] для случая $0 < \alpha < 2$ и И. П. Лизоркиным [6] в общем случае. Обращение потенциалов Бесселя с помощью гиперсингулярных интегралов было дано В. А. Ногиным [10, 11] в 1981–85 гг.; М. Л. Гольдманом в [1, 3, 2] получены оптимальные вложения пространств потенциалов типа Бесселя.

Пространства обобщенных потенциалов Бесселя V_Y^α , построенного с использованием преобразования Ханкеля, было впервые введено Л. Н. Ляховым и М. В. Половинкиной в [9] с использованием подхода Стейна – Лизоркина. В [9] введенные ранее Л. Н. Ляховым в [8, 7] В-гиперсингулярные интегралы и В-потенциалы Рисса были применены для построения нормы в V_Y^α .

В. С. Гулиев, З. В. Сафаров в [19] изучали потенциал Бесселя, порожденный дифференциальными операторами Бесселя. В [19] доказана ограниченность в весовом пространстве Лебега такого потенциала и получены теоремы вложения в пространствах $B_{k,n}$ -Соболева – Лиувилля. В [20] потенциалы Бесселя охарактеризованы в терминах пространств В-Лизоркина – Трибеля. Также в этой статье доказано неравенство Юнга для В-сверточных операторов в пространствах V_Y^α и даны некоторые приложения, использующие дифференциальный оператор Лапласа – Бесселя.

2. Основные определения и утверждения. Пусть \mathbb{R}^n – n -мерное евклидово пространство,

$$\mathbb{R}_+^n = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, x_1 > 0, \dots, x_n > 0\},$$

$$\overline{\mathbb{R}}_+^n = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0\},$$

$\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ – мультииндекс, составленный из положительных фиксированных вещественных чисел $\gamma_i \geq 0, i = 1, \dots, n$ и $|\gamma| = \gamma_1 + \dots + \gamma_n$.

Пусть Ω – конечное открытое множество в \mathbb{R}^n , симметричное относительно каждой гиперплоскости $x_i = 0, i = 1, \dots, n, \Omega_+ = \Omega \cap \mathbb{R}_+^n$ и $\overline{\Omega}_+ = \Omega \cap \overline{\mathbb{R}}_+^n$, где $\overline{\mathbb{R}}_+^n = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0\}$.

Класс $C_{ev}^0(\Omega_+)$ состоит из непрерывных на Ω_+ функций, продолжаемых непрерывно четным образом на Ω при $x_i < 0, i = 1, \dots, n$.

Пусть $L_p^Y(\mathbb{R}_+^n) = L_p^Y, 1 \leq p < \infty$ – пространство всех измеримых на \mathbb{R}_+^n функций, четных по каждой из переменных $x_i, i = 1, \dots, n$, таких, что

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} |f(x)|^p x^\gamma dx < \infty,$$

где здесь и далее

$$x^\gamma = \prod_{i=1}^n x_i^{\gamma_i}.$$

Для вещественных чисел $p \geq 1$ норма в L_p^Y функции f определяется равенством

$$\|f\|_{L_p^Y(\mathbb{R}_+^n)} = \|f\|_{p,Y} = \left(\int_{\mathbb{R}_+^n} |f(x)|^p x^\gamma dx \right)^{1/p}.$$

Известно (см. [3]), что L_p^Y – банахово пространство.

Нормированная функция Бесселя первого рода j_ν определяется формулой (см. [3], стр. 10 и [6])

$$j_\nu(x) = \frac{2^\nu \Gamma(\nu + 1)}{x^\nu} J_\nu(x), \tag{3}$$

где J_ν – функция Бесселя первого рода.

Для $x \in \mathbb{R}^n$ мы будем использовать обозначение

$$j_Y(x, \xi) = \prod_{i=1}^n j_{\frac{\gamma_i-1}{2}}(x_i \xi_i), \quad j_Y(0, \xi) = 1. \tag{4}$$

Многомерное преобразование Ханкеля функции $f \in L_1^Y(\mathbb{R}_+^n)$ выражается как

$$F_Y[f](\xi) = F_Y[f(x)](\xi) = \widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}_+^n} f(x) j_Y(x, \xi) x^\gamma dx.$$

Пусть $f \in L_1^Y(\mathbb{R}_+)$ и представляет собой функцию ограниченной вариации в окрестности точки x непрерывности f . Тогда для $\gamma > 0$ формула обращения имеет вид

$$F_Y^{-1}[\widehat{f}(\xi)](x) = f(x) = \frac{2^{n-|\gamma|}}{\prod_{j=1}^n \Gamma^2\left(\frac{\gamma_j+1}{2}\right)} \int_{\mathbb{R}_+^n} j_Y(x, \xi) \widehat{f}(\xi) \xi^\gamma d\xi.$$

Часть шара $|x| \leq r$, $|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$, принадлежащая \mathbb{R}_+^n , обозначается $B_r^+(n)$. Граница $B_r^+(n)$ обозначается $S_r^+(n)$ и состоит из части сферы $\{x \in \mathbb{R}_+^n : |x|=r\}$ и частей координатных гиперплоскостей $x_i=0, i=1, \dots, n$, таких что $|x_i| \leq r$.

Многомерный обобщенный сдвиг определяется равенством

$$({}^Y T_x^y f)(x) = {}^Y T_x^y f(x) = ({}^{Y_1} T_{x_1}^{y_1} \dots {}^{Y_n} T_{x_n}^{y_n} f)(x), \tag{5}$$

где каждый одномерный обобщенный сдвиг ${}^{Y_i} T_{x_i}^{y_i}$ для $i=1, \dots, n$ действует по формуле (см. [6])

$$({}^{Y_i} T_{x_i}^{y_i} f)(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{Y_i+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{Y_i}{2}\right)} \times \int_0^\pi f(x_1, \dots, x_{i-1}, \sqrt{x_i^2 + y_i^2 - 2x_i y_i \cos \varphi_i}, x_{i+1}, \dots, x_n) \sin^{Y_i-1} \varphi_i d\varphi_i, \quad Y_i > 0.$$

Для $Y_i = 0$ обобщенный сдвиг ${}^{Y_i} T_{x_i}^{y_i}$ имеет вид

$${}^0 T_{x_i}^{y_i} = \frac{f(x+y) - f(x-y)}{2}.$$

Справедлива формула (см. [11])

$${}^Y T_x^y j_Y(x, \xi) = j_Y(x, \xi) j_Y(y, \xi). \tag{6}$$

Обобщенная свертка, порожденная ${}^Y T_x^y$ имеет вид

$$(f * g)_Y(x) = (f * g)_Y = \int_{\mathbb{R}_+^n} f(y) ({}^Y T_x^y g)(x) y^Y dy. \tag{7}$$

Преобразование Ханкеля, действующее на обобщенную свертку (7), дает

$$F_Y[(f * g)_Y(x)](\xi) = F_Y[f(x)](\xi) F_Y[g(x)](\xi). \tag{8}$$

3. Свойства ядра типа Гаусса – Вейерштрасса. Рассмотрим функцию вида

$$W_Y(x, t) = C_{n,Y} \frac{e^{-\frac{|x|^2}{4t}}}{t^{\frac{n+|Y|}{2}}}, \quad C_{n,Y} = \frac{2^{-|Y|}}{\prod_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{Y_i+1}{2}\right)}. \tag{9}$$

Функцию (9) будем называть ядром типа Гаусса – Вейерштрасса. Ядро (9) имеет ряд замечательных свойств, в частности является сглаживающим ядром, используемым в определении преобразования Вейерштрасса. Кроме того, с таким ядром тесно связана производящая функция полиномов Эрмита. Ядро вида (9) находит свое применение в теории вероятности, статистике, теории ортогональных полиномов, при построении фильтров в цифровой обработке изображений.

Теорема 3.1. Для ядра типа Гаусса – Вейерштрасса справедливы следующие свойства:

(1) ядро (9) допускает оценку вида

$$0 < W_Y(x, t) < \frac{C_{n,Y}}{t^{\frac{n+|Y|}{2}}} \tag{10}$$

для всех $x \in \mathbb{R}_+^n, t > 0$ и $W_Y(x, t)$ является решением сингулярного уравнения теплопроводности вида

$$u_t = \Delta_Y u, \quad u = u(x, t), \tag{11}$$

(2) если $t > 0, \eta \geq 0$ и g – измеримая на $(0, \infty)$, то

$$\int_{|x| \geq \eta} g(|x|^2) W_Y(x, t) x^Y dx = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n+|Y|}{2}\right)} \int_{\frac{\eta^2}{4t}}^\infty g(4t\sigma) e^{-s} s^{\frac{n+|Y|}{2}-1} ds \tag{12}$$

всякий раз, когда интеграл справа существует. В частности, $W_Y(x, t)$ является усредняющим ядром

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} W_Y(x, t) x^Y dx = 1 \tag{13}$$

и

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} \left(\frac{|x|^2}{4t}\right)^a W_Y(x, t) x^Y dx = \frac{\Gamma\left(\frac{n+|Y|}{2} + a\right)}{\Gamma\left(\frac{n+|Y|}{2}\right)}. \tag{14}$$

Доказательство.

(1) Оценка ядра (9) очевидна. Покажем, что оно удовлетворяет уравнению (11). Имеем:

$$\begin{aligned} \Delta_Y \frac{e^{-\frac{|x|^2}{4t}}}{t^{\frac{n+|Y|}{2}}} &= \frac{1}{t^{\frac{n+|Y|}{2}}} \sum_{i=1}^n B_{Y_i} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} = \frac{1}{t^{\frac{n+|Y|}{2}}} \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i^{Y_i}} \frac{\partial}{\partial x_i} x_i^{Y_i} \frac{\partial}{\partial x_i} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} = \\ &= \frac{1}{t^{\frac{n+|Y|}{2}}} \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i^{Y_i}} \frac{\partial}{\partial x_i} x_i^{Y_i} \left(-\frac{2x_i}{4t}\right) e^{-\frac{|x|^2}{4t}} = -\frac{1}{2t^{\frac{n+|Y|}{2}+1}} \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i^{Y_i}} \frac{\partial}{\partial x_i} x_i^{Y_i+1} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} = \\ &= -\frac{1}{2t^{\frac{n+|Y|}{2}+1}} \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i^{Y_i}} \left((Y_i+1)x_i^{Y_i} + x_i^{Y_i+1} \left(-\frac{2x_i}{4t}\right) \right) e^{-\frac{|x|^2}{4t}} = \\ &= -\frac{1}{2t^{\frac{n+|Y|}{2}+1}} \sum_{i=1}^n \left((Y_i+1) - \frac{x_i^2}{2t} \right) e^{-\frac{|x|^2}{4t}} = \frac{e^{-\frac{|x|^2}{4t}}}{2t^{\frac{n+|Y|}{2}+1}} \left(\frac{|x|^2}{2t} - (n+|Y|) \right), \\ &\frac{\partial}{\partial t} \frac{e^{-\frac{|x|^2}{4t}}}{t^{\frac{n+|Y|}{2}}} = \frac{e^{-\frac{|x|^2}{4t}}}{2t^{\frac{n+|Y|}{2}+1}} \left(\frac{|x|^2}{2t} - (n+|Y|) \right), \end{aligned}$$

следовательно, $W_Y(x, t)$ — есть решение уравнения (11).

(2) Произведем сферическую замену $x = r\sigma$, получим

$$\begin{aligned} \int_{|x| \geq \eta} g(|x|^2) W_Y(x, t) x^Y dx &= \int_{\eta}^{\infty} g(r^2) r^{n+|Y|-1} dr \int_{S_1^+(n)} W_Y(r\sigma, t) \sigma^Y dS \\ &= \frac{C_{n,Y}}{t^{\frac{n+|Y|}{2}}} \int_{\eta}^{\infty} g(r^2) e^{-\frac{r^2}{4t}} r^{n+|Y|-1} dr \int_{S_1^+(n)} \sigma^Y dS = \{r^2 = 4ts\} = \\ &= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n+|Y|}{2}\right)} \int_{\frac{\eta^2}{4t}}^{\infty} g(4ts) e^{-s} s^{\frac{n+|Y|}{2}-1} ds, \end{aligned}$$

что и дает (12). В частности, при $g = 1$ имеем

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} W_Y(x, t) x^Y dx = \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{|x| \geq \eta} W_Y(x, t) x^Y dx = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n+|Y|}{2}\right)} \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{\frac{\eta^2}{4t}}^{\infty} e^{-s} s^{\frac{n+|Y|}{2}-1} ds = 1,$$

что совпадает с (13).

При $g = |x|^{2a}$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_+^n} |x|^{2a} W_Y(x, t) x^Y dx &= \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{|x| \geq \eta} |x|^{2a} W_Y(x, t) x^Y dx = \\ &= \frac{(4t)^a}{\Gamma\left(\frac{n+|Y|}{2}\right)} \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{\frac{\eta^2}{4t}}^{\infty} s^a e^{-s} s^{\frac{n+|Y|}{2}-1} ds = (4t)^a \frac{\Gamma\left(\frac{n+|Y|}{2} + a\right)}{\Gamma\left(\frac{n+|Y|}{2}\right)}, \end{aligned}$$

что и приводит к (14).

4. Свойства обобщенного интеграла Гаусса – Вейерштрасса. Пусть $t > 0$. Для дальнейшего нам понадобится обобщенный интеграл Гаусса – Вейерштрасса вида

$$(\mathcal{W}_t^Y \varphi)(x) = u_Y(x, t) = \int_{\mathbb{R}_+^n} W_Y(y, t) ({}^Y T_x^y \varphi(x)) y^Y dy. \tag{15}$$

Теорема 4.1. Пусть φ — измеримая на \mathbb{R}_+^n функция такая, что обобщенный интеграл Гаусса – Вейерштрасса (15) от φ существует в точке (a, b) , $a \in \mathbb{R}_+^n$, $b > 0$ и пусть $S = \mathbb{R}_+^n \times (0, b)$. Тогда $u_Y(x, t)$ существует для всех $(x, t) \in S$ и $u_Y(x, t)$ — есть решение уравнения теплопроводности вида $u_t = \Delta_Y u$, $u = u(x, t)$ на S .

Доказательство. Пусть $(x, t) \in S$. Мы имеем по условию теоремы, что интеграл

$$u_Y(a, b) = \int_{\mathbb{R}_+^n} W_Y(y, b) ({}^Y T_a^y \varphi(a)) y^Y dy \tag{16}$$

сходится.

Пусть $(x, t) \in S$,

$$D_+ = \left\{ y \in \mathbb{R}_+^n : |a - y| \geq \frac{\beta|a - x|}{\beta - \tau} \right\}, \quad E_+ = \mathbb{R}_+^n \setminus D_+,$$

где $\tau = \sqrt{t}$, $\beta = \sqrt{b}$. Тогда имеем

$$u_Y(x, t) = \int_{D_+} ({}^Y T_x^y W_Y(x, t)) \varphi(y) y^Y dy + \int_{E_+} ({}^Y T_x^y W_Y(x, t)) \varphi(y) y^Y dy. \quad (17)$$

Пусть $\langle xy \cos \varphi \rangle = x_1 y_1 \cos \varphi_1 + \dots + x_n y_n \cos \varphi_n$ и

$$C(Y) = \pi^{-\frac{n}{2}} \prod_{i=1}^n \frac{\Gamma\left(\frac{Y_i+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{Y_i}{2}\right)}.$$

В интеграле $\int_{D_+} ({}^Y T_x^y W_Y(x, t)) \varphi(y) y^Y dy$ перейдем к координатам

$$\begin{aligned} \tilde{y}_1 &= y_1 \cos \varphi_1, & \tilde{y}_2 &= y_1 \sin \varphi_1, \\ \tilde{y}_3 &= y_2 \cos \varphi_2, & \tilde{y}_4 &= y_2 \sin \varphi_2, \dots, \\ \tilde{y}_{2n-1} &= y_n \cos \varphi_n, & \tilde{y}_{2n} &= y_n \sin \varphi_n, \end{aligned}$$

получим

$$\begin{aligned} \int_{D_+} ({}^Y T_x^y W_Y(x, t)) \varphi(y) y^Y dy &= \frac{C_{n,Y}}{t^{\frac{n+|Y|}{2}}} \int_{D_+} \left({}^Y T_x^y e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \right) \varphi(y) y^Y dy = \\ &= \frac{C_{n,Y} C(Y)}{t^{\frac{n+|Y|}{2}}} \int_{D_+} \left(\int_0^\pi \dots \int_0^\pi \exp\left(-\frac{1}{4t} [|x|^2 + |y|^2 - 2\langle xy \cos \varphi \rangle]\right) \prod_{i=1}^n \sin^{Y_i-1} \varphi_i d\varphi_i \right) \varphi(y) y^Y dy = \\ &= \frac{C_{n,Y} C(Y)}{t^{\frac{n+|Y|}{2}}} \int_{\tilde{D}_+} \exp\left(-\frac{1}{4t} [(x_1 - \tilde{y}_1)^2 + \tilde{y}_2^2 + \dots + (x_n - \tilde{y}_{2n-1})^2 + \tilde{y}_{2n}^2]\right) \varphi(y) \prod_{i=1}^n y_{2i}^{Y_i-1} x^Y d\tilde{y} = \\ &= \frac{C_{n,Y} C(Y)}{t^{\frac{n+|Y|}{2}}} \int_{\tilde{D}_+} \exp\left(-\frac{1}{4t} (|x - \tilde{y}'|^2 + |\tilde{y}''|^2)\right) \varphi(y) \prod_{i=1}^n y_{2i}^{Y_i-1} x^Y d\tilde{y}, \end{aligned}$$

где $\tilde{y} = (\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_{2n}) = (\tilde{y}', \tilde{y}'')$, $\tilde{y}' = (\tilde{y}_1, \tilde{y}_3, \dots, \tilde{y}_{2n-1})$, $\tilde{y}'' = (\tilde{y}_2, \tilde{y}_4, \dots, \tilde{y}_{2n})$,

$\tilde{D}_+ = \{\tilde{y} \in \mathbb{R}^{2n} : (\sqrt{\tilde{y}_1^2 + \tilde{y}_2^2}, \dots, \sqrt{\tilde{y}_{2n-1}^2 + \tilde{y}_{2n}^2}) \in D_+, y_{2i}^{Y_i-1} > 0, i = 1, \dots, n\}$. Если $\tilde{y} \in \tilde{D}_+$, то $y \in D_+$ и

$$\begin{aligned} |x - \tilde{y}'|^2 + |\tilde{y}''|^2 &= |x - y|^2 \geq (|a - y| - |a - x|)^2 \geq |a - y| \left(1 - \frac{\beta - \tau}{\beta}\right)^2 = |a - y|^2 \frac{\tau^2}{\beta^2} = \\ &= (|a - \tilde{y}'|^2 + |\tilde{y}''|^2) \frac{\tau^2}{\beta^2}, \end{aligned}$$

следовательно,

$$\exp\left(-\frac{1}{4t} (|x - \tilde{y}'|^2 + |\tilde{y}''|^2)\right) \leq \exp\left(-\frac{1}{4t} (|a - \tilde{y}'|^2 + |\tilde{y}''|^2)\right).$$

Тогда, применяя это неравенство и возвращаясь обратно к переменным $y = (y_1, \dots, y_n)$, получим

$$\begin{aligned} \int_{D_+} ({}^Y T_x^y W_Y(x, t)) \varphi(y) y^Y dy &\leq \\ &\leq \frac{C_{n,Y} C(Y)}{t^{\frac{n+|Y|}{2}}} \int_{\tilde{D}_+} \exp\left(-\frac{1}{4t} \frac{\tau^2}{\beta^2} [(a_1 - \tilde{y}_1)^2 + \tilde{y}_2^2 + \dots + (a_n - \tilde{y}_{2n-1})^2 + \tilde{y}_{2n}^2]\right) \varphi(y) \prod_{i=1}^n y_{2i}^{Y_i-1} x^Y d\tilde{y} = \\ &= \frac{2^{-|Y|}}{\prod_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{Y_i+1}{2}\right) t^{\frac{n+|Y|}{2}}} \int_{D_+} e^{-\frac{|y|^2}{4b}} ({}^Y T_a^y \varphi(a)) y^Y dy = \left(\frac{b}{t}\right)^{\frac{n+|Y|}{2}} \int_{D_+} W_Y(y, b) ({}^Y T_a^y \varphi(a)) y^Y dy < \infty. \end{aligned}$$

Здесь мы учли сходимость интеграла (16).

Покажем теперь ограниченность интеграла $\int_{E_+} ({}^Y T_x^y W_Y(x, t)) \varphi(y) y^Y dy$. В силу оценки обобщенного сдвига и (10)

для всех $y \in E_+$, получим

$$\int_{E_+} |({}^Y T_x^y W_Y(x, t)) \varphi(y)| y^Y dy \leq \frac{C_{n,Y}}{t^{\frac{n+|Y|}{2}}} \int_{E_+} |\varphi(y)| y^Y dy =$$

$$= e^{\frac{|a-x|^2}{4(\beta-\tau)^2}} \left(\frac{\beta}{\tau}\right)^{n+|Y|} C_{n,Y} \frac{e^{-\frac{|a-x|^2}{4(\beta-\tau)^2}}}{b^{\frac{n+|Y|}{2}}} \int_{E_+} |\varphi(y)| y^Y dy.$$

Для $y \in E_+$ имеем $|a-y| \leq \frac{\beta|a-x|}{\beta-\tau}$ и

$$W_Y(a-y, b) = C_{n,Y} \frac{e^{-\frac{|a-y|^2}{4b}}}{b^{\frac{n+|Y|}{2}}} \geq C_{n,Y} \frac{e^{-\frac{|a-x|^2}{4(\beta-\tau)^2}}}{b^{\frac{n+|Y|}{2}}},$$

следовательно, в силу сходимости интеграла (16)

$$\int_{E_+} |({}^Y T_x^Y W_Y(x, t)) \varphi(y)| y^Y dy \leq e^{\frac{|a-x|^2}{4(\beta-\tau)^2}} \left(\frac{\beta}{\tau}\right)^{n+|Y|} \int_{E_+} W_Y(a-y, b) |\varphi(y)| y^Y dy < \infty.$$

Тогда из (17) мы получаем, что $u_Y(x, t)$ существует для всех $(x, t) \in S$. То, что $u_Y(x, t)$ есть решение уравнения теплопроводности вида $u_t = \Delta_Y u$, $u = u(x, t)$ на S следует из Теоремы 3.1. Теорема доказана.

Лемма 4.1. Если $\varphi \in C_{ev}^0(S)$, то $\lim_{(x,t) \rightarrow (x_0,0)} u_Y(x, y) = \varphi(x_0)$ на S равномерно по x_0 в любом компактном подмножестве \mathbb{R}_+^n . Если, кроме того, φ ограничена и равномерно непрерывна на \mathbb{R}_+^n , то сходимость равномерна на \mathbb{R}_+^n .

Следствие 4.1. Функция $u_Y(x, t)$ есть решение задачи Коши вида

$$u_t = \Delta_Y u, \quad u = u(x, t), \\ u(x, 0) = \varphi(x),$$

на $S = \mathbb{R}_+^n \times (0, b)$ при $\varphi \in C_{ev}^0(S)$.

Пример 4.1. Решение задачи Коши

$$u_t = \Delta_Y u, \quad u = u(x, t), \quad t \in (0, b), \quad x \in \mathbb{R}_+^n, \\ u(x, 0) = j_Y(x, \xi), \quad x \in \mathbb{R}_+^n,$$

определяется формулой

$$u_Y(x, t) = \frac{C_{n,Y} j_Y(x, \xi)}{t^{\frac{n+|Y|}{2}}} \int_{\mathbb{R}_+^n} e^{-\frac{|y|^2}{4t}} j_Y(y, \xi) y^Y dy.$$

Здесь мы учли формулу (6). Найдем интеграл:

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} e^{-\frac{|y|^2}{4t}} j_Y(y, \xi) y^Y dy = \{y = r\sigma\} = \int_0^\infty e^{-\frac{r^2}{4t}} r^{n+|Y|-1} dr \int_{S_1^+(n)} j_Y(r\sigma, \xi) \sigma^Y dS.$$

Применяя формулу (см. [11], формула 246) вида

$$\int_{S_1^+(n)} j_Y(r\sigma, \xi) \sigma^Y dS = \frac{\prod_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{Y_i+1}{2}\right)}{2^{n-1} \Gamma\left(\frac{n+|Y|}{2}\right)} j_{\frac{n+|Y|}{2}-1}(r|\xi|),$$

получим

$$u_Y(x, t) = \frac{C_{n,Y} j_Y(x, \xi)}{t^{\frac{n+|Y|}{2}}} \frac{\prod_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{Y_i+1}{2}\right)}{2^{n-1} \Gamma\left(\frac{n+|Y|}{2}\right)} \int_0^\infty e^{-\frac{r^2}{4t}} r^{n+|Y|-1} j_{\frac{n+|Y|}{2}-1}(r|\xi|) dr = \\ = \frac{C_{n,Y} j_Y(x, \xi)}{t^{\frac{n+|Y|}{2}}} \frac{\prod_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{Y_i+1}{2}\right)}{2^{n-1} \Gamma\left(\frac{n+|Y|}{2}\right)} \frac{2^{\frac{n+|Y|}{2}-1} \Gamma\left(\frac{n+|Y|}{2}\right)}{|\xi|^{\frac{n+|Y|}{2}-1}} \int_0^\infty e^{-\frac{r^2}{4t}} r^{\frac{n+|Y|}{2}} J_{\frac{n+|Y|}{2}-1}(r|\xi|) dr = \\ = \frac{2^{-|Y|}}{\prod_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{Y_i+1}{2}\right)} \frac{j_Y(x, \xi)}{t^{\frac{n+|Y|}{2}}} \frac{\prod_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{Y_i+1}{2}\right)}{2^{n-1} \Gamma\left(\frac{n+|Y|}{2}\right)} \frac{2^{\frac{n+|Y|}{2}-1} \Gamma\left(\frac{n+|Y|}{2}\right)}{|\xi|^{\frac{n+|Y|}{2}-1}} 2^{\frac{n+|Y|}{2}} e^{-t|\xi|^2} |\xi|^{\frac{n+|Y|}{2}-1} t^{\frac{n+|Y|}{2}}.$$

После упрощения будем иметь

$$u_Y(x, t) = e^{-t|\xi|^2} j_Y(x, \xi).$$

5. Определение обобщенного потенциала Бесселя и его свойства. Представление обобщенного потенциала Бесселя через обобщенный интеграл Гаусса – Вейерштрасса. Определим обобщенный потенциал Бесселя соотношением

$$(G_Y^\alpha \varphi)(x) = \frac{2^{\frac{n-|Y|-\alpha}{2}+1}}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) \prod_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{Y_i+1}{2}\right)} \int_{\mathbb{R}_+^n} |y|^{\frac{\alpha-n-|Y|}{2}} K_{\frac{n+|Y|-\alpha}{2}}(|y|) ({}^Y T_x^Y \varphi(x)) y^Y dy. \tag{18}$$

Также можем записать

$$(G_Y^\alpha \varphi)(x) = (G_\alpha^Y(x) * \varphi(x))_Y = \int_{\mathbb{R}_+^n} G_\alpha^Y(y) ({}^Y T_x^y \varphi(x)) y^Y dy, \tag{19}$$

где $G_\alpha^Y(x) = \frac{2^{\frac{n+|Y|-\alpha}{2}}}{|x|^{\frac{n+|Y|-\alpha}{2}} \Gamma(\frac{\alpha}{2}) \prod_{i=1}^n \Gamma(\frac{Y_i+1}{2})} K_{n+|Y|-\alpha}(|x|)$ — обобщенное ядро Бесселя. Функция $K_\alpha(x)$ — это модифицированная функция Бесселя второго рода (см. [1, 18]).

Для обобщенного ядра Бесселя справедливы свойства [17]:

- (1) преобразование Ханкеля ядра $G_\alpha^Y(x)$ имеет вид $F_Y[G_\alpha^Y](\xi) = (1 + |\xi|^2)^{-\alpha/2}$,
- (2) $G_\alpha^Y(x)$ бесконечно дифференцируема вне начала координат,
- (3) для $|x| \rightarrow 0$ функция $G_\alpha^Y(x)$ допускает оценку

$$G_\alpha^Y(x) \sim \frac{2^{n-|Y|}}{\Gamma(\frac{\alpha}{2}) \prod_{i=1}^n \Gamma(\frac{Y_i+1}{2})} \begin{cases} \frac{\Gamma(\frac{n+|Y|-\alpha}{2})}{2^{\alpha-|Y|}} |x|^{\alpha-n-|Y|}, & \text{если } 0 < \alpha < n + |Y|; \\ -2^{1-n} \left(\ln\left(\frac{|x|}{2}\right) + \vartheta \right), & \text{если } \alpha = n + |Y|; \\ \frac{\Gamma(\frac{\alpha-n-|Y|}{2})}{2^n}, & \text{если } n + |Y| < \alpha, \end{cases} \tag{20}$$

- (4) для $|x| \rightarrow \infty$ функция $G_\alpha^Y(x)$ допускает оценку

$$G_\alpha^Y(x) \sim \frac{\sqrt{\pi} 2^{\frac{n-|Y|-\alpha+1}{2}}}{|x|^{\frac{n+|Y|-\alpha+1}{2}} \Gamma(\frac{\alpha}{2}) \prod_{i=1}^n \Gamma(\frac{Y_i+1}{2})} e^{-|x|},$$

- (5) $G_\alpha^Y(x) \in L_1^Y(\mathbb{R}_+^n)$,
- (6) $(G_\alpha^Y * G_\beta^Y)_Y = G_{\alpha+\beta}^Y$, $\alpha > 0, \beta > 0$, где $(G_\alpha^Y * G_\beta^Y)_Y$ — обобщенная свертка (7),
- (7) $(I - \Delta_Y)^k G_{\alpha+2k}^Y = G_\alpha^Y$, $k \in \mathbb{N}$,
- (8) $\int_{\mathbb{R}_+^n} G_\alpha^Y(x) x^Y dx = 1$.

Из этих свойств следует, что для функции $\varphi \in L_p^Y(\mathbb{R}_+^n)$, $1 \leq p \leq \infty$ оператор G_Y^α ограничен и

$$\|G_Y^\alpha \varphi\|_{p,Y} \leq \|\varphi\|_{p,Y}, \quad \alpha > 0.$$

Кроме того, справедливы следующие основные свойства обобщенного потенциала Бесселя

- (1) полугрупповое свойство $G_Y^\alpha G_Y^\beta \varphi = G_Y^{\alpha+\beta} \varphi$, $\varphi \in L_p^Y(\mathbb{R}_+^n)$,
- (2) $(I - \Delta_Y)^k G_Y^{\alpha+2k} \varphi = G_Y^\alpha \varphi$, $k \in \mathbb{N}$, $\varphi \in L_p^Y(\mathbb{R}_+^n)$,
- (3) $G_Y^0 \varphi = \varphi$, $\varphi \in L_p^Y(\mathbb{R}_+^n)$.

Следовательно, при $\alpha = k \in \mathbb{N}$ оператор G_Y^α можно рассматривать как конструктивную реализацию отрицательной степени итерированного оператора $(I - \Delta_Y)^k$.

Формулы обращения обобщенного потенциала Бесселя были получены в [15].

Теперь обратимся к соотношению между обобщенным потенциалом Бесселя и одномерным обобщенным интегралом Гаусса – Вейерштрасса.

Теорема 5.1. Пусть $\alpha > 0, 1 \leq p \leq \infty, \varphi \in L_p^Y$ и $u_Y(x, t)$ — обобщенный интеграл Гаусса – Вейерштрасса функции φ на Ω . Тогда обобщенный потенциал Бесселя $G_Y^\alpha \varphi$ почти для всех x совпадает с интегралом

$$G_Y^\alpha \varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} \int_0^\infty t^{\frac{\alpha}{2}-1} e^{-t} u_Y(x, t) dt. \tag{21}$$

Доказательство. Мы имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} \int_0^\infty t^{\frac{\alpha}{2}-1} e^{-t} u_Y(x, t) dt &= \frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} \int_{\mathbb{R}_+^n} ({}^Y T_x^y \varphi(x)) y^Y dy \int_0^\infty W_Y(y, t) t^{\frac{\alpha}{2}-1} e^{-t} dt = \\ &= \frac{2^{-|Y|}}{\Gamma(\frac{\alpha}{2}) \prod_{i=1}^n \Gamma(\frac{Y_i+1}{2})} \int_{\mathbb{R}_+^n} ({}^Y T_x^y \varphi(x)) y^Y dy \int_0^\infty e^{-\frac{|y|^2}{4t} - t \frac{\alpha}{2} - \frac{n+|Y|}{2} - 1} dt. \end{aligned}$$

Для внутреннего интеграла, используя Wolfram Mathematica, получим

$$\int_0^\infty e^{-\frac{|y|^2}{4t} - t \frac{\alpha}{2} - \frac{n+|Y|}{2} - 1} dt = 2^{\frac{n+|Y|-\alpha}{2}+1} |y|^{\frac{\alpha-n-|Y|}{2}} K_{\frac{n+|Y|-\alpha}{2}}(|y|),$$

тогда

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \int_0^{\infty} t^{\frac{\alpha}{2}-1} e^{-t} u_{\gamma}(x, t) dt = \\ & = \frac{2^{\frac{n-|\gamma|-\alpha}{2}+1}}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) \prod_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)} \int_{\mathbb{R}_+^n} |y|^{\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}} K_{\frac{n+|\gamma|-\alpha}{2}}(|y|) ({}^Y \Gamma_x^y \varphi(x)) y^{\gamma} dy = G_{\gamma}^{\alpha} \varphi(x), \end{aligned}$$

что и завершает доказательство.

Список литературы

1. Гольдман М. Л. 2007. Интегральные свойства обобщенных бesselевых потенциалов. ДАН. 414(2): 159-164.
2. Гольдман М. Л. 2008. Перестановочно-инвариантные оболочки обобщенных потенциалов Бесселя и Рисса. ДАН. 423(1): 14-18.
3. Гольдман М. Л. 2008. Конус перестановок для обобщенных бesselевых потенциалов. Тр. МИАН. 260: 151-163.
4. Киприянов И. А. 1997. Сингулярные эллиптические краевые задачи. М., Наука-Физматлит, 204.
5. Левитан Б. М. 1951. Разложения по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье. М., УМН. 6:2 (42): 102-143.
6. Лизоркин П. И. 1970. Описание пространств $L_p^r(R_n)$ в терминах разностных сингулярных интегралов. Матем. сб., 81(123): 79-91.
7. Ляхов Л. Н. 1990. Об одном классе гиперсингулярных интегралов. Докл. АН СССР. 315(2): 291-296.
8. Ляхов Л. Н. 1991. Обращение В-потенциалов Рисса. Докл. АН СССР. 321(3): 466-469.
9. Ляхов Л. Н., Половинкина М. В. 2005. Пространство весовых потенциалов Бесселя. Дифференциальные уравнения и динамические системы, Сборник статей, Тр. МИАН. – М.: Наука, МАИК «Наука/Интерпериодика». 250: 192-197.
10. Ногин В. А. 1982. Об обращении бesselевых потенциалов. Дифференц. уравнения, 18(8): 1407-1411.
11. Ногин В. А. 1985. Обращение бesselевых потенциалов с помощью гиперсингулярных интегралов. Изв. вузов. Матем. 3: 57-65.
12. Ситник С. М., Шишкина Э. Л. 2019. Метод операторов преобразования для дифференциальных уравнений с операторами Бесселя. Физматлит, Москва, 224.
13. Aronszajn N., Smith K. T. 1961. Theory of Bessel potentials, I. Ibid. 11: 365-475.
14. Calderon A. P. 1961 Lebesgue spaces of differentiable functions and distributions. In Proc. Sympos. Pure Math. Amer. Math. Soc. Providence R. I., 4: 33-50.
15. Dzhabrailov A., Luchko Y., Shishkina E. 2021. Two Forms of An Inverse Operator to the Generalized Bessel Potential. Axioms. 10(3): 232.
16. Ekincioglu I., Keskin C., Guner S. 2018. $BL_{p,v}^m$ Estimates for the Riesz transforms associated with Laplace–Bessel operator. J. Nonlinear Sci. Apply. 11: 832-840.
17. Ekincioglu I., Shishkina E. L., Keskin C. 2021. Generalized Bessel potential and its application to non-homogeneous singular screened Poisson equation. Integral Transforms and Special Functions. 32(12): 932-947.
18. Erdelyi A., Magnus W., Oberhettinger F., Tricomi F. G. 1953. Higher Transcendental Functions. Vol. 2. New York: McGraw-Hill Book Co, 308.
19. Guliev V. S., Safarov Z. V. 2001. $B_{k,n}$ -Bessel potentials and certain imbedding theorems in $B_{k,n}$ -Sobolev–Liouville spaces. Proc. Inst. Math. Mech. Natl. Acad. Sci. Azerb. 15: 68-80.
20. Guliyev V. S., Serbetci A., Akbulut A., Mammadov Y. Y. 2011. Nikol'skii–Besov and Lizorkin–Triebel spaces constructed on the base of the multidimensional Fourier–Bessel transform. Eurasian Math. J. 2(3): 42-66.
21. Guliyev V. S., Serbetci A. and Ekincioglu I. 2007. On boundedness of the generalized B-potential integral operators in the Lorentz spaces. Integral Transforms and Special Functions. 18(12): 885-895.
22. Stein E. M. 1961. The characterization of functions arising as potentials. I. Bull. Amer. Math. Soc. 67(1): 102-104.
23. Watson G. N. 1922. A Treatise on the Theory of Bessel Functions. Cambridge: University Press, 804.

References

1. Gol'dman M. L. 2007. Integral'nye svoystva obobshchennykh besselevykh potentsialov [Integral properties of generalized Bessel potentials]. DAN. 414(2): 159-164.
2. Gol'dman M. L. 2008. Konus perestanovok dlya obobshchennykh besselevykh potentsialov [The cone of rearrangements for generalized Bessel potentials]. Tr. MIAN. 260: 151-163.
3. Gol'dman M. L. 2008. Perestanovochno-invariantnye obolochki obobshchennykh potentsialov Besselya i Rissa [Rearrangement-invariant spans for generalized Bessel and Riesz Potentials]. DAN. 423(1): 14-18.

4. Kipriyanov I. A. 1997. Singulyarnye ellipticheskie kraevye zadachi [Singular Elliptic Boundary Value Problems]. M., Nauka–Fizmatlit, 204.
5. Levitan B. M. 1951. Razlozheniya po funktsiyam Besselya v rjady i integraly Fur'e [Expansion in Fourier series and integrals with Bessel functions]. M., UMN. 6:2 (42): 102-143.
6. Lizorkin P. I. 1970. Opisanie prostranstv $L_p^r(R_n)$ v terminakh raznostnykh singulyarnykh integralov [Characterization of the spaces $L_p^r(R_n)$ in terms of difference singular integrals]. Matem. sb., 81(123): 79–91.
7. Lyakhov L.N. 1991. A class of hypersingular integrals. Dokl. Math., 42 (3): 765-769 (in Russian).
8. Lyakhov L.N. 1992. Inversion of Riesz B-potentials. Dokl. Math., 44 (3): 717-720 (in Russian).
9. Lyakhov L. N., Polovinkina M. V. 2005. Prostranstvo vesovykh potentsialov Besselya [The Space of Weighted Bessel Potentials]. Differentsial'nye uravneniya i dinamicheskie sistemy, Sbornik statey, Tr. MIAN. — M.: Nauka, MAIK «Nauka/Interperiodika». 250: 192-197.
10. Nogin V. A. 1982. Ob obrashchenii besselevykh potentsialov [Inversion of Bessel potentials]. Differents. uravneniya, 18(8): 1407-1411.
11. Nogin V.A. 1985. Inversion of Bessel potentials by means of hypersingulr integrals. Soviet Math. (Iz. VUZ). 29(3): 73-83 (in Russian).
12. Sitnik S. M., Shishkina E. L. 2019. Metod operatorov preobrazovaniya dlya differentsial'nykh uravneniy s operatorami Besselya [Transmutation operators method for differential equations with Bessel operator]. Fizmatlit, Moskva, 224.
13. Aronszajn N., Smith K. T. 1961. Theory of Bessel potentials, I. Ibid. 11: 365-475.
14. Calderon A. P. 1961 Lebesgue spaces of differentiable functions and distributions. In Proc. Sympos. Pure Math. Amer. Math. Soc. Providence R. I., 4: 33-50.
15. Dzhabrailov A., Luchko Y., Shishkina E. 2021. Two Forms of An Inverse Operator to the Generalized Bessel Potential. Axioms. 10(3): 232.
16. Ekincioglu I., Keskin C., Guner S. 2018. $BL_{p,v}^m$ Estimates for the Riesz transforms assicated with Laplace–Bessel operator. J. Nonlinear Sci. Apply. 11: 832-840.
17. Ekincioglu I., Shishkina E. L., Keskin C. 2021. Generalized Bessel potential and its application to non-homogeneous singular screened Poisson equation. Integral Transforms and Special Functions. 32(12): 932-947.
18. Erdelyi A., Magnus W., Oberhettinger F., Tricomi F. G. 1953. Higher Transcendental Functions. Vol. 2. New York: McGraw-Hill Book Co, 308.
19. Guliev V. S., Safarov Z. V. 2001. $B_{k,n}$ -Bessel potentials and certain imbedding theorems in $B_{k,n}$ -Sobolev–Liouville spaces. Proc. Inst. Math. Mech. Natl. Acad. Sci. Azerb. 15: 68-80.
20. Guliyev V. S., Serbetci A., Akbulut A., Mammadov Y. Y. 2011. Nikol'skii–Besov and Lizorkin–Triebel spaces constructed on the base of the multidimensional Fourier–Bessel transform. Eurasian Math. J. 2(3): 42-66.
21. Guliyev V. S., Serbetci A. and Ekincioglu I. 2007. On boundedness of the generalized B-potential integral operators in the Lorentz spaces. Integral Transforms and Special Functions. 18(12): 885-895.
22. Stein E. M. 1961. The characterization of functions arising as potentials. I. Bull. Amer. Math. Soc. 67(1): 102-104.
23. Watson G. N. 1922. A Treatise on the Theory of Bessel Functions. Cambridge: University Press, 804.

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 19.03.2022

Поступила после рецензирования 30.04.2022

Принята к публикации 03.05.22

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Джабраилов Ахмед Лечаевич – старший преподаватель, Чеченский государственный университета им. А. А. Кадьрова

ул. А. Шерипова, 32, Грозный, 36402, Россия

E-mail: ahmed_0065@mail.ru

Шишкина Элина Леонидовна – доктор физико-математических наук, доцент, профессор, Воронежский государственный университет

Университетская площадь, д. 1, Воронеж, 394018, Россия

E-mail: ilina_dico@mail.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Dzhabrailov Akhmed Lechayevich – Senior Lecturer Kadyrov Chechen State University, Grozny, Russia

Shishkina Elina Leonidovna – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Professor, Voronezh State University, Voronezh, Russia

УДК 51(092)
MSC 01A60
обзорная статья

DOI 10.52575/2687-0959-2022-54-2-98-113

О ВКЛАДЕ МАТЕМАТИКОВ ПЕРВОЙ ВЕЛИЧИНЫ В АТОМНЫЙ ПРОЕКТ СССР¹

Е. М. Богатов , В. П. Богатова ,

(Статья представлена членом редакционной коллегии Ю. П. Вирченко)

Филиал Национального исследовательского технологического университета «МИСиС»

в г. Губкине Белгородской области,

Губкин, 309180, Россия

Старооскольский технологический институт им. А. А. Угарова (филиал)

Национального исследовательского технологического университета «МИСиС»,

Старый Оскол, 309516, Россия

E-mail: embogatov@inbox.ru

Аннотация. Представлен вклад академиков М. В. Келдыша, С. Л. Соболева, члена-корреспондента академии наук Советского Союза А. Н. Тихонова и профессора Л. В. Канторовича в математическое обеспечение советского Атомного проекта 1948–1955 гг. Под руководством Соболева (расчётное бюро спецлаборатории атомного ядра при Академии наук) для получения урана-235 в промышленных масштабах разрабатывалась теория устойчивого функционирования комплекса каскадов и проводился его расчёт. Под началом Келдыша (расчётное бюро Института математики Академии наук) производились расчётно-теоретические работы по термоядерным бомбам «слойка» и «труба». Под руководством Тихонова (математическое бюро Геофизического института Академии наук) осуществлялся прямой расчёт атомного взрыва (плутониевый и урановый шары), а также энерговыделения водородной бомбы на основе уравнений газодинамики с лучистой теплопроводностью, рождением и переносом нейтронов. В расчётной группе Канторовича (бюро ленинградского отделения Института математики Академии наук) поначалу вычислялись критические массы заряда плутониевой бомбы. Позднее эта группа создала модель комптон-эффекта при взрыве термоядерной бомбы «труба» с учётом анизотропии и выполнила его расчёт.

Ключевые слова: Атомный проект СССР, вклад советских математиков в создание ядерного оружия, М. В. Келдыш, С. Л. Соболев, А. Н. Тихонов, Л. В. Канторович

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект 20-011-00402.

Для цитирования: Богатов Е. М., Богатова В. П. 2022. О вкладе математиков первой величины в Атомный проект СССР. Прикладная математика & Физика. 54(2): 98–113. DOI 10.52575/2687-0959-2022-54-2-98-113

ABOUT THE CONTRIBUTION OF THE FIRST MAGNITUDE MATHEMATICIANS TO THE SOVIET ATOMIC PROJECT

Egor Bogatov , Vera Bogatova 

(Article submitted by a member of the editorial board Yu. P. Virchenko)

Branch of National Research University of Science and Technology "MISIS" in Gubkin town of Belgorod Region

Gubkin, 309180, Russia;

Stary Oskol Technological Institute of National Research University of Science and Technology "MISIS"

Stary Oskol, 309516, Russia

E-mail: embogatov@inbox.ru

Received March, 21, 2022

Abstract. The contribution to the mathematical support of the Soviet Atomic Project of 1948–1955 by Academicians M. V. Keldysh and S. L. Sobolev, Corresponding Member of the Academy of Sciences A. N. Tikhonov, as well as Professor L. V. Kantorovich is presented. Under the leadership of Sobolev (calculation bureau of the special laboratory of the atomic nucleus at the Academy of Sciences), in order to obtain uranium-235 on an industrial scale, a theory of the stable functioning of the complex of cascades was developed and its calculation was carried out. Under the supervision of Keldysh (calculation bureau of the Institute of Mathematics of the Academy of Sciences), computational and theoretical work was carried out on thermonuclear bombs "puff" and "pipe". Under the leadership of Tikhonov (calculation bureau of the Geophysical Institute), a direct calculation of an atomic explosion (plutonium and uranium balls), as well as a hydrogen bomb, was carried out based on the equations of gas dynamics with radiant heat conduction, the birth and transfer of neutrons. In the calculation group of Kantorovich (bureau of the Leningrad branch of the Institute of Mathematics of the Academy of Sciences), the critical

¹Работа представляет собой расширенный и дополненный вариант докладов на Крымской осенней математической школе-симпозиуме КРОМШ-2021 [8] и на семинаре по дифференциальным и функционально-дифференциальным уравнениям Математического института им. С.М. Никольского 15.02.2022 [9].

masses of the plutonium bomb charge were initially calculated. Later, this group created a model of the Compton effect in the explosion of a thermonuclear bomb "pipe taking into account the anisotropy, and performed its calculation.

Keywords: Atomic project of the USSR, contribution of Soviet mathematicians to the development of nuclear weapons, M. V. Keldysh, S. L. Sobolev, A. N. Tikhonov, L. V. Kantorovich

Acknowledgements: The work is supported by RFBR, project No 20-011-00402.

For citation: Egor Bogatov, Vera Bogatova . 2022. About the contribution of the first magnitude mathematicians to the Soviet Atomic Project. Applied Mathematics & Physics. 54(2): 98–113. (in Russian) DOI 10.52575/2687-0959-2022-54-2-98-113

1. Введение. Вклад учёных-физиков в создание ядерного щита нашей страны в настоящее время хорошо известен (см., например, [23, 24, 11]). А вот вкладу математиков в историко-научной литературе уделено гораздо меньше внимания. После снятия грифа секретности с этой темы информационный вакуум стал понемногу заполняться воспоминаниями учёных, участвовавших в Атомном проекте (см., например, [38, 16]). Начиная с 1999 г. стали выходить многотомные сборники документов и материалов по Атомному проекту СССР [1]–[6], содержащие достоверные сведения об участии математиков и других специалистов в разработке ядерного и термоядерного оружия. Прочная документальная основа позволила пролить свет на взаимодействие математиков и физиков в рамках Атомного проекта [14] и сделать первые шаги в конкретизации роли математиков в нём [8]. Настоящее исследование является продолжением начатой работы, оно имеет следующие цели:

- выделение ключевых фигур, внесших наиболее существенный вклад в математическое обеспечение Атомного проекта;
- поиск ответа на вопрос, почему именно эти люди были приглашены в Проект;
- детализацию математического вклада каждого из основных участников Проекта;
- оценку результатов участия ведущих математиков в Проекте с точки зрения их дальнейшей карьеры и развития численных методов;
- оценку масштаба теоретических и прикладных математических исследований, проводимых в рамках Атомного проекта.

2. Старт работ по Атомному проекту. 28 сентября 1942 г. Государственный Комитет Обороны (ГКО) принял секретное распоряжение «Об организации работ по урану», которое обозначило начало работ по Атомному проекту в СССР. ГКО в принятом распоряжении обязал Академию наук СССР возобновить работы по использованию атомной энергии ядер урана [1, с. 330]. Временное руководство работами по указанной тематике в декабре 1942 г. было поручено И. В. Курчатову [1, с. 280]. Курчатов организовал группу физиков для обсуждения проблемы и разработки направления исследований. После победы в Сталинградской битве в феврале 1943 г. ГКО официально поручил И.В. Курчатову научное руководство выбранными направлениями работ. [1, с. 306]. На базе ЛФТИ в Казани была создана временная спецлаборатория атомного ядра АН СССР (позже Лаборатория № 2), которой было поручено срочно изучить проблему в целом и ответить на вопрос «о возможности создания урановой бомбы или уранового топлива». 12 апреля 1943 г., в соответствии с постановлением ГКО, вице-президентом АН СССР было подписано распоряжение об организации Лаборатория № 2 АН СССР. Назначение И.В. Курчатова начальником Лаборатории № 2 было оформлено приказом ЛФТИ в августе 1943 г. [1, с. 321].

20.08.1945 г. при ГКО был организован Специальный комитет во главе с Л. П. Берией – заместителем Председателя Совета Народных Комиссаров СССР И. В. Сталина. На Специальный комитет была возложена организация всей деятельности по использованию атомной энергии в СССР: научно-исследовательских работ, разведки месторождений и добычи урана, создания атомной промышленности, атомно-энергетических установок, опытных образцов и серийного производства атомных бомб. Одновременно со Специальным комитетом было организовано Первое главное управление (ПГУ), которому была поручена задача непосредственного руководства научно-исследовательскими, проектными, конструкторскими организациями по использованию атомной энергии и промышленными предприятиями по производству атомных бомб.

Осуществлять Атомный проект СССР была призвана группа наиболее талантливых математиков: академиков и членов-корреспондентов АН СССР, докторов и кандидатов наук, аспирантов и студентов, специалистов без званий. Не имея возможности отразить участие всех вышеперечисленных математиков в одной статье², мы сосредоточимся на вкладе руководителей математических бюро Атомного проекта:

- академика Соболева;
- академика Келдыша;
- члена-корреспондента АН СССР Тихонова;
- профессора Канторовича,

внесших, по нашему мнению, наиболее весомый вклад³ в его математическое обеспечение.

Мы считаем необходимым привести ряд биографических сведений об указанных учёных, позволяющих лучше понять причины их включения в Атомный проект.

²Вклад математиков второй величины был частично проанализирован в работе [10].

³Этот факт косвенно подтверждается статусом полученных ими званий, премий и наград за участие в Атомном проекте (см. ниже).

3. О вкладе академика С. Л. Соболева. С. Л. Соболев известен математическому миру, как создатель обобщённых производных и пространств своего имени. Его участие в Атомном проекте по понятным причинам не получило широкой огласки.

В 1929 г. после окончания ЛГУ Соболев был направлен в теоретический отдел Сейсмологического института АН СССР. Уже в 1930 г. он написал четыре важных статьи по теории упругости и распространения волн в неоднородных средах. Одна из них была представлена на Первом Всесоюзном математическом съезде. С 1932 г. С. Л. Соболев начинает работать в математическом институте Академии наук СССР (МИАН) в отделе дифференциальных уравнений. В 1933 г. (в возрасте 25 лет) за выдающиеся заслуги в математике он был удостоен звания члена-корреспондента АН СССР. В 1934 г. С. Л. Соболева назначили заведующим отделом МИАН, а в 1939 году он был избран действительным членом Академии наук СССР [7, 15].

В самом начале войны Соболев стал директором МИАН и в сентябре 1941 г. ему пришлось заниматься эвакуацией математического института в Казань. В трудных условиях он занимался организацией работ по военной тематике, сам активно участвовал в исследованиях по увеличению точности артиллерийской стрельбы и бомбометания. Кроме того, в Казани Сергеем Львовичем было выполнено закрытое исследование⁴ по динамике вращающейся жидкости, связанное с методом центрифугирования для получения изотопов урана. Весной 1943 г. ГКО принял решение о возвращении в Москву из эвакуации академических институтов и основной части Лаборатории № 2. В этом же 1943 году Соболев заканчивает второе математическое исследование по качественной теории вращающейся жидкости [35], [7, с. 181]. В предвоенные годы Соболев С. Л. был известен как редкий специалист, умело сочетающий исследование в сфере уравнений математической физики с её приложениями в физике и механике. Сергей Львович получил фундаментальные результаты в теории уравнений с частными производными и функциональном анализе, которые вошли в золотой фонд мировой математики. Учитывая всё это, а также молодость и организаторские способности Сергея Львовича, и в связи со сложностью новых научных и технических задач было решено пригласить его в Лабораторию № 2 на должность первого заместителя И. В. Курчатова. В марте 1944 года Соболев оставляет должность директора МИАН и переходит на постоянную работу в Лабораторию № 2, где его избирают председателем Ученого совета [19].

В августе 1945 г. руководство Лаборатории № 2 отчиталось о том, что у них имеется достаточно данных для организации промышленного производства атомных взрывчатых веществ (урана-235 и плутония-239). При этом Соболев являлся научным руководителем в группах как по урану, так и по плутонию, организовывая и направляя работу вычислителей. Для получения урана-235 в промышленных масштабах была создана теория, основанная на использовании каскадов центрифуг (член-корреспондент АН СССР, физик И. К. Кикоин). Руководство расчётами промышленного комплекса указанных каскадов, его газодинамики, устойчивости и регулируемости каскадов, а также экономической целесообразности схем параллельной работы цепочек диффузных машин было поручено Соболеву [34, 321-322], [35, с. 76]. Отметим, что все расчёты огромного объёма выполнялись на трофейных электромеханических машинках «Мерседес» и логарифмических линейках. В этот период за исключительные заслуги перед государством академик С.Л. Соболев был отмечен двумя Государственными премиями и званием Героя Социалистического Труда.

Эксперименты по обогащению газообразного урана вместе с огромным числом разнообразных научных, технологических и организационных проблем начались в 1946-м г. В октябре 1947 г. академика Соболева вводят в состав Научно-технического совета ПГУ, состоявшего прежде из физиков и управленцев [2, с. 229]. В июне 1948 г. Совет Министров СССР обязывает «... организовать при Лаборатории № 2 закрытый семинар в составе акад. Ландау, акад. Петровского, акад. Соболева, чл.-корр. Тамма, чл.-корр. Харитона, чл.-корр. Зельдовича, чл.-корр. Тихонова, ... Возложить руководство семинаром на академика Соболева С.Л.» [2, с. 497].

Испытания первой советской атомной бомбы на Семипалатинском полигоне 29 августа 1949 г. были успешными. Большая группа наиболее отличившихся участников атомного проекта была награждена орденами. Сергей Львович Соболев получил в награду орден Ленина.

В середине 1949 г. Лаборатория № 2 была переименована в ЛИПАН – Лабораторию измерительных приборов Академии наук. Усилия Кикоина и Соболева, прошедших совместный путь от начала освоения газодиффузного метода разделения изотопов урана до его инженерно-технической проработки, были сфокусированы на производственной деятельности диффузионного завода. В другой группе (И. В. Курчатова) по разработке уран-графитового атомного реактора Сергей Львович с сотрудниками нашли точное значение граничных условий «задачи для чёрного стержня». Участвуя в проектировании заводской установки для получения тяжёлой воды (оксида дейтерия D_2O), Соболев написал заметку «Время установления равновесия в разделительной электролизной установке» [19, с. 347]. После завершения участия в Атомном проекте Сергей Львович продолжал работы по расчётам, связанным с мирным применением атомной энергии.

В разговорах с коллегами Соболев признавался, что он приобрел вкус к вычислительной математике, почувствовал ее исключительные возможности именно в годы работы в Лаборатории № 2. Осмысление теоретических основ вычислений, проводимых в рамках атомного проекта, привели Соболева к исследованиям в области теории алгоритмов. Он разработал понятие *замыкания вычислительного алгоритма*, анализируя эффективность того или иного приближённого метода [40]. В ряде случаев оказалось, что при увеличении числа итераций n можно говорить о предельном переходе в самом алгоритме решения (например, в методе сеток для уравнения Лапласа предельным процессом при уменьшении шага h является уравнение теплопроводности). Получается, что асимптотическое изучение свойств данного алгоритма (при больших n , малых h) может строиться на основе исследований этого предельного процесса. Существенное значение при этом имеет характер предельного перехода (так называемая *регулярность и нерегулярность* замыкания алгоритма). Если замыкание регулярно, то имеются основания ожидать

⁴По сведениям профессора А. Л. Скубачевского (РУДН), математические результаты этого исследования до сих пор полностью не рассмотрены.

устойчивости алгоритма. Подобное исследование было подробно проведено Сергеем Львовичем в работе [41], где он анализировал алгоритм решения интегральных уравнений Фредгольма.

Атомный проект обогатил научный и личностный потенциал Соболева. Он возглавил первую в нашей стране кафедру вычислительной математики механико-математического факультета МГУ и выступил инициатором создания Вычислительного центра МГУ (1952–1958 гг), вошедшего за короткое время в число самых мощных в стране. Применение ЭВМ для решения вычислительных задач стало одной из главных забот Соболева, с момента их появления в СССР. При решении задач вычислительной математики С. Л. Соболев широко использовал аппарат функционального анализа, уравнений с частными производными и теории функций [42]. Более того, задачи вычислительной математики он часто в своих работах представлял как задачи функционального анализа. В 50-е годы руководимый Сергеем Львовичем семинар кафедры вычислительной математики был одним из крупнейших центров притяжения, объединявших ученых нашей страны, специализировавшихся в области теории численных методов, программирования, кибернетики, разработки вычислительной техники [36].

Обобщая свой опыт участия в Атомном проекте, С. Л. Соболев выступил на III Всесоюзном математическом съезде с пленарным докладом «Некоторые современные вопросы вычислительной математики». В этом докладе он определил главные направления, послужившие основой развития вычислительной математики на длительный период. На секции функционального анализа того же съезда С. Л. Соболев, Л. А. Люстерник и Л. В. Канторович представили совместный доклад «Функциональный анализ и вычислительная математика» [43], в котором объединили имеющиеся у них результаты. По нашему мнению, участие Соболева и Канторовича в Атомном проекте послужило катализатором для рассмотрения новых задач и идей, вытекающих из взаимосвязи упомянутых разделов математики.

4. О вкладе академика М. В. Келдыша. В 1927 г. Мстислав Келдыш поступил в МГУ на математическое отделение. После его окончания в 1931 г. он был принят в Центральный аэрогидродинамический институт имени Н. Е. Жуковского (ЦАГИ). Наибольший интерес для молодого Келдыша представляли вопросы гидродинамики и нестационарной аэродинамики. С 1934 г. Мстислав Всеволодович совмещает работу в ЦАГИ и МИАН. В сентябре 1934 г. он поступил в аспирантуру МИАН, и в 1935 г. без защиты диссертации ему присвоили ученую степень кандидата физико-математических наук.

В эти же годы в самолётостроении возникли серьезные проблемы, которые стали препятствием на пути развития скоростной авиации. При возрастании скорости самолёт начинало сильно трясти, и он рассыпался в воздухе – это явление назвали *флаттером*. При взлёте и посадке самолёта возникала другая проблема: переднее колесо трёхколёсного шасси могло внезапно сильно завибрировать и привести к катастрофе. Это явление самовозбуждения колебаний было названо *шимми*. В 1936 г. за большой цикл работ, посвящённый колебаниям авиационных конструкций, Келдыш получил степень кандидата технических наук и звание профессора по специальности «аэродинамика». В январе 1938 г. он защитил докторскую диссертацию по математике.

С 1939 г. имя ученого и его работы засекречены, поскольку в предвоенные и военные годы проблема вибрации в самолётостроении относилась к категории государственных задач особой важности. В 1941 году Келдыша назначают начальником отдела динамической прочности. Он руководил разработкой решения проблемы прочности самолетов – это вопросы флаттера, вибраций винтомоторных групп, усталости авиационных конструкций, прочности и шимми шасси и ряд других. Авиастроение всех передовых стран столкнулось с явлением флаттера раньше СССР, но именно у нас в стране, быстрее других, флаттер был преодолён в наиболее полном наборе всех его разновидностей. Это произошло благодаря работам М. В. Келдыша и его коллег. За научные работы по предупреждению разрушений самолетов ему (совместно с Е. П. Гроссманом) в апреле 1942 г. была присуждена Сталинская премия. Под руководством М. В. Келдыша были разработаны основы моделирования явления флаттера в аэродинамических трубах и методы его численного расчёта. За выдающиеся заслуги в области научно-исследовательских работ в авиации М. В. Келдыш был награжден орденом Трудового Красного Знамени (июнь 1943 г.). В сентябре 1943 г. его избрали членом-корреспондентом АН СССР по Отделению физико-математических наук, а в ноябре 1946 г. – академиком АН СССР [13, с. 13-15].

С 1942 г. по 1953 г. Келдыш являлся профессором МГУ. На физико-техническом факультете МГУ он заведовал кафедрой термодинамики и вел курс математической физики, на механико-математическом – читал лекции и руководил семинаром по теории функций комплексного переменного. В апреле 1944 г. в МИАН создали отдел прикладной механики, которым с июня 1944 г. по июнь 1953 г. заведовал (по совместительству) М. В. Келдыш. В 1946 г. он получил Сталинскую премию II степени за научные исследования в области теории и методов расчета автоколебаний самолетных конструкций.

Вернёмся к Атомному проекту. В него было одновременно вовлечено несколько институтов АН СССР помимо МИАН, в том числе Институт химической физики (ИХФАН) и Институт физических проблем (ИФПАН). Эти институты испытывали острую нехватку математиков-прикладников. Почти весь 1946-й год директор ИХФАН Семёнов Н. Н. добивался перевода Келдыша в свой институт, давая ему такую характеристику: «По отзывам всех руководящих математиков нашей страны профессор Келдыш является самым талантливым математиком молодого поколения (ему 34 года), к тому же имеющим опыт технических расчётов... Как только он овладеет новой областью, создастся возможность втягивания в проблему всех основных математических сил» [11, с. 182-183]. Но Келдыш, имевший серьёзные наработки по численным методам, был нужен не только ИХФАН. В конце 1946 г. в МИАН было образовано расчётно-математическое бюро, руководство которого было поручено М. В. Келдышу. В конце 1946 года с целью обеспечить быстрое развитие эксперимента и теории в области реакций на быстрых нейтронах (применительно к процессам ядерного взрыва) при ИХФАН был организован постоянно действующий семинар для обсуждения работы в указанном направлении в составе 37 человек, среди которых было три математика: С. Л. Соболев, М. В. Келдыш

и К. А. Семендяев⁵ [3, с. 800; с. 212]. В мае 1948 г. было решено приступить к разработке конструкции «сверхмощной» (термоядерной⁶) бомбы, после чего постановлением Совета Министров СССР расчётная группа МИАН была усилена до 39 человек. При этом её научное руководство было передано академику И.Г. Петровскому. В начале декабря 1946 г. М. В. Келдыш был назначен начальником Реактивного НИИ и его творческая энергия на какое-то время была перенаправлена на задачи, связанные с созданием реактивных двигательных установок для оснащения крылатых ракет. Мстислав Всеволодович, возглавив указанный научный Институт, реорганизовал его работу и чётко направил усилия его коллектива на создание теоретических основ ракетостроения и космонавтики [53].

К концу 1950 г. для ускоренной разработки термоядерных бомб возникла острая необходимость в усилении всех математических бюро, задействованных в Атомном проекте. Постановлением Совета Министров СССР от 9 мая 1951 г. Келдыш М. В. был утверждён председателем математической секции № 7 Научно-технического совета, *главным научным руководителем работ* по созданию конструкций быстродействующих вычислительных машин (БВМ) и разработке методов работы на них. Кроме того, Келдышу было поручено руководство организацией вычислительного центра ПГУ. В указанном постановлении также предписывалось:

- обязать ПГУ организовать расчетно-теоретические работы по термоядерной бомбе РДС-6Т в МИАН под руководством академика *Келдыша М.В.* параллельно работам, ведущимся в ИФПАН;
- утвердить академика *Келдыша М.В.* заведующим отделом прикладной математики (ОПМ) МИАН;
- обязать МИАН (т.т. Виноградова и *Келдыша*) создать в институте группу газодинамиков и математиков под руководством д. т. н. Дородницына А. А.

Келдышу и Дородницыну была поручена задача «Расчет основной газодинамической задачи о детонации цилиндрического заряда при заданном законе выделения энергии как функции давления и температуры без учета переноса энергии излучением и быстрыми частицами», в том числе:

- а) проведение качественного анализа установившегося режима распространения взрыва по цилиндрическому заряду;
- б) построение численных методов решения газодинамической задачи.

[5, с. 397-401].

Постановление Совета Министров СССР от 29.12.1951 г. обязало ПГУ сосредоточить в 1952 г. основные силы физиков, математиков и конструкторов на ускорении разработки изделия РДС-6С – термоядерной бомбы «слойки». В связи с чем следовало привлечь к участию в выполнении работ по ней Ландау, Зельдовича, *Келдыша*, Блохинцева и Колмогорова и поручить им ознакомиться с теоретическими и расчетными работами по РДС-6С, представив ПГУ свое заключение по ним.

30 января 1953 г. и повторно 29 мая 1953 г. Келдыш был назначен руководителем следующих работ:

1. Проверка уточненными методами устойчивости решения задачи о распространении детонации в цилиндрическом заряде.
2. Теория зажигания тяжелым горючим инициатора для РДС-6Т⁷.
3. Точный расчет возникновения детонации в цилиндрическом заряде от тритиевого инициатора с учетом передачи энергии частицами и квантами и переменной концентрации реагирующих веществ.

Задача об иницировании трубы заключалась в точном расчете процесса превращения сферической волны в стационарную, распространяющуюся в цилиндрической трубе. Только после решения этой задачи можно было с уверенностью сказать, что стационарный режим не только принципиально может существовать, но и практически может быть получен. В рамках этой задачи М. В. Келдыш вместе с Дородницыным являлись ответственными исполнителями: формулировали уравнения, выбирали начальные условия первого варианта расчета, программировали расчеты на электронной машине и осуществляли их проведение [5, с. 603-608]. Кроме этого, Келдыш был одним из соисполнителей темы «Разработка нестационарного метода расчета двумерных гидродинамических задач». В выпущенном отчёте о проведении расчёта двумерной (гидродинамической) задачи об осесимметричном движении газа с ударной волной впервые была описана матричная прогонка.

Главный конструктор КБ-11⁸ Ю. Б. Харитон так оценивал участие Мстислава Всеволодовича в решении атомной проблемы: «*Особенности таланта М. В. Келдыша, мне кажется, заключались в умении предвидеть дальнейший ход развития науки. Из самых тонких физических экспериментов он делал такие математические выводы, что, казалось, ему доступна сама сущность вещей...*» [52, с. 66-71].

Многообразии обязанностей и интересов М. В. Келдыша вызывает восхищение и удивление. Он успешно работал по четырём ведущим направлениям развития науки и техники того времени – ракетостроение, атомная проблема, вычислительная математика и создание ЭВМ [32]–[33]. Именно «победы на всех фронтах» привели к тому, что после 1955 г. в СССР уже работала первая атомная электростанция, появились ракеты, оснащенные атомными зарядами, было создано новое поколение более эффективных термоядерных бомб, росли количественно и качественно коллективы вычислителей, начали выпускаться первые ЭВМ [54, с. 102-107].

5. О вкладе члена-корреспондента академии наук СССР А. Н. Тихонова. В 1922 году в возрасте 15 лет Андрей Тихонов поступил на математическое отделение физико-математического факультета МГУ. Это отделение

⁵По нашему убеждению, Семендяев относится к *математикам второй величины* из числа участников Атомного проекта [10].

⁶Подробности создания термоядерных бомб см. в Приложении 1.

⁷Эта конструкция бомбы кратко называлась «труба»

⁸КБ-11 было создано при Лаборатории № 2 в апреле 1946 г. В его составе были НИИ, конструкторские подразделения, а с 1949 г. – заводы по производству атомных бомб.

объединяло в то время следующие специальности: математика, физика, механика, геофизика, астрономия. Для всех специальностей был общий четырехлетний курс, и студенты могли получить знания по весьма широкому кругу смежных дисциплин. Разделение по специальностям проявлялась в основном в курсах «по выбору» и теме дипломной работы. После защиты дипломной в 1927 г. Тихонов поступил в аспирантуру в НИИ математики и механики при МГУ, а после её окончания стал преподавать на кафедре математики физического отделения физмата МГУ. В том же 1930 г. А. Н. Тихонов был зачислен на должность ученого специалиста Гидрометеослужбы. С 1931 г. он стал работать учёным специалистом Государственного геофизического института [46, с. 5-12]. Его исследования в геофизическом институте были связаны с определением исторического климата земли, с вопросами мерзлотоведения. В простейшем приближении распространение температуры вглубь земли описывается уравнением теплопроводности на полубесконечном промежутке. А. Н. Тихонов показал, что решение задачи Коши в этом случае без условия ограничения роста решения на бесконечности не будет единственным. Одновременно он поставил и исследовал обратную задачу теплопроводности. Для учета влияния излучения на температурный режим земной коры А. Н. Тихоновым были изучены нелинейные краевые задачи для уравнения теплопроводности. Им была предложена редукция, сводящая эти задачи к нелинейным интегральным уравнениям типа Вольтерра. В 1936 г. Андрей Николаевич защитил докторскую диссертацию, и через год стал профессором МГУ и заведующим кафедрой математики на физическом факультете [22]. В 1937 г. был организован Институт теоретической геофизики АН СССР. В нём Тихонов начал работать по совместительству научным сотрудником, а затем заведующим отделом математической геофизики. В тот период работы А. Н. Тихонова были зачастую связаны с исследованием фундаментальных задач геофизики и электродинамики.

В 1939 году Тихонов был избран членом-корреспондентом Академии Наук СССР по отделению Математических и Естественных наук по специальности «геолого-географические науки» за основополагающие разработки по созданию и развитию электромагнитных методов изучения земной коры (в частности, для разведки полезных ископаемых). В начале войны (1941-43 гг.) он курировал геологическую разведку нефтяных месторождений в Башкортостане. В 1943 г. А. Н. Тихонов вернулся из эвакуации в Москву и продолжил работать на прежних местах [21].

Как уже упоминалось ранее, в Атомном проекте было задействовано несколько академических институтов. Проблема расчёта теоретической мощности ядерного взрыва обсуждалась на семинаре И. В. Курчатова в начале 1948 года. К этому времени уже были предложены упрощенные модели взрыва атомной бомбы, описываемые системой обыкновенных дифференциальных уравнений для средних величин. Однако уточнение приближённой модели требовало развития численных методов, теория которых ещё не сложилась. Физикам требовалась помощь математиков, разрабатывающих указанную теорию. В этой связи постановлением Совета Министров СССР «О дополнительных заданиях по плану специальных научно-исследовательских работ на 1948 год» в институте Геофизики было организовано Бюро математических расчётов под руководством члена-корреспондента АН СССР А. Н. Тихонова в составе 30 человек. Для увязки теоретических и расчётных работ и контроля за выполнением заданий, предусмотренных настоящим Постановлением, было также предписано создать закрытый семинар при Лаборатории № 2 с участием А. Н. Тихонова [6, с. 121-122]. Именно на этом семинаре в начале 1948 г., по воспоминаниям его ученика Самарского, А. Н. Тихонов предложил провести прямой численный расчёт взрыва⁹ методом конечных разностей *на основе полных моделей физических процессов*, описываемых системой нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. В то время ни теории, ни опыта практического применения разностных схем для сложных задач математической физики почти не было. Для физиков данное заявление было неожиданным и вызвало реплику Л. Д. Ландау о том, что такой расчёт явился бы «научным подвигом» [38, с. 215] по причине отсутствия достаточного опыта реализации разностных схем для сложных задач математической физики.

Ядерный взрыв представляет собой совокупность взаимосвязанных процессов: деления ядер урана или плутония нейтронами, распространения образующихся при этом нейтронов, выделения энергии и её переноса по веществу, газодинамического разлёта сильно разогретого вещества. Математическая модель ядерного взрыва есть описание этих процессов системами нелинейных уравнений в частных производных. Методики аналитического решения таких уравнений не существовало, теория численных методов только начинала складываться. Предстояло выполнять чрезвычайно сложную и объёмную пионерскую работу, требующую совместных усилий физиков, математиков и вычислителей. При этом для расчетов можно было использовать только логарифмические линейки, арифмометры «Феликс» и позже клавишные машины «Мерседес».

Тихонов с Самарским начали работу по созданию разностного метода для решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений, моделирующую атомный взрыв. Система составлялась вместе с отделом Ландау, с учётом переноса нейтронов. Разностный метод был в то время обоснован только для линейных дифференциальных уравнений¹⁰ в эйлеровых координатах. Требовалось применить и обосновать сеточный метод для расчета полной системы нелинейных уравнений *в лагранжевых координатах* (это было абсолютно новым). Также нужно было построить эффективный алгоритм расчета, ориентированный на его реализацию примитивными вычислительными средствами [38, с. 217].

Во время создания атомной бомбы физики, по требованию ПГУ, давали математическим бюро расчётные задания, не объясняя их смысла и цели. Ни вычислители, ни научные сотрудники математических бюро не должны были знать, в решении каких задач они участвуют, что рассчитывают, с кем в параллели работают. Однако меньше чем за год математическое бюро Тихонова построило соответствующие методы и отладило алгоритм. К лету 1949 г. первый расчет полной системы уравнений взрыва плутониевого шара был осуществлен.

⁹Атомной бомбы.

¹⁰В частности, разностная схема решения уравнения Пуассона была обоснована в монографии Канторовича и Крылова [25].

На следующем этапе в бюро Тихонова от Ландау поступило более сложное задание: решить систему уравнений, описывающую взрыв шара с оболочкой из урана. Эта задача была гораздо труднее: на приведение ее к виду, пригодному для решения, и на разработку алгоритма потребовался месяц. Интерполяционную формулу энерговыделения в зависимости от параметров, для оценок готовящегося тогда атомного взрыва, составляли в группе Ландау, основываясь на расчётах бюро Тихонова. Совместно с А. А. Самарским А. Н. Тихоновым была создана теория однородных разностных схем, нашедшая важные и многочисленные практические приложения. За эти работы Андрей Николаевич был награжден Орденом Трудового Красного Знамени, а его сотрудники получили большие премии [46, с. 31-37].

В конце 1948 г. проводились работы по построению теории взрыва новых бомб на основе тяжёлого водорода в группе Я. Б. Зельдовича и И. Е. Тамма. На заседании Совета при Лаборатории № 2 от 02.12.1948 было заявлено, что «... объем расчетно-теоретических работ, необходимых для уточнения вопроса о возможности детонации дейтерия (работы группы Зельдовича), весьма велик, и поручил тов. Соболеву выяснить совместно с тт. Тихоновым и Петровским возможность применения математических приемов, которые позволили бы ускорить работу» [5, с. 169].

В начале 1950-го г. А. Д. Сахаров написал записку о работах над термоядерной бомбой «слойка» с использованием дейтерия, лития и обеднённого урана с заключением: «Гидродинамическая картина разлёта слойки при ядерном взрыве с учетом эффекта теплопроводности за счет диффузии световых квантов очень существенно входит в результаты подсчёта действия слойки¹¹. Для ее выяснения необходимы громоздкие численные математические вычисления». На основе этой записки 10 февраля 1950 г. И. В. Курчатов и Ю. Б. Харитон вместе с представителями администрации ПГУ написали письмо Л. П. Берии об архитектуре и происходящих реакциях в обеих упомянутых разработках. В ответ на это письмо вышло большое Постановление Совета Министров СССР «О работах по созданию РДС-6», где на Институт теоретической геофизики АН СССР (А. Н. Тихонова) было возложено проведение расчетных работ в 1950–1951 гг. по заданиям КБ-11 [5, с. 249, с. 284, с. 301].

Математическая модель бомбы РДС-6С описывается уравнениями газодинамики с лучистой теплопроводностью, рождением и переносом нейтронов за счет деления и термоядерных реакций. Существенную роль в модели играют уравнения состояния и физические характеристики процесса, например, коэффициенты поглощения света. Построение модели, апробация и расчёты по ней потребовали от сотрудников бюро Тихонова концентрации всех сил. Были составлены разностные уравнения, подготовлены детальные задания, уточнены физические характеристики, организованы расчёты [38].

В то время «Манхэттенский проект» опережал советский «Атомный проект»; в США под руководством Неймана уже были созданы ЭВМ. В СССР требовалось разработать в первую очередь экономичные и устойчивые алгоритмы счета для построения математической модели термоядерной бомбы. Ранее разработанные методы не годились для решения новой, на порядок более сложной задачи. А. Н. Тихонов и А. А. Самарский реализовали многие новые идеи по теории разностных схем, которые позже были изложены в работах [47]–[49]. Тихонов регулярно проводил в математическом бюро семинар с бывшими учениками, на котором обсуждались новые идеи, ход работы, возникающие трудности и полученные результаты. В частности, здесь был сформулирован и обсуждён общий принцип выполнения тех же законов сохранения на дискретном уровне для разностных схем, что и для исходной дифференциальной задачи, названный *принципом консервативности*.

Чтобы опередить США в создании термоядерной бомбы, надо было торопиться, но для ускорения темпов расчётных работ катастрофически не хватало вычислительной техники и кадров. В отчёте о работах по созданию бомбы РДС-6Т Технический совет при ПГУ, ознакомившись с представленными материалами (отчёты Ландау и КБ-11), отметил следующее:

В настоящее время на чисто вычислительных работах занято около 100 человек¹². При этом удается проводить решение только самых важных и первоочередных задач и то совершенно неудовлетворительными темпами. Совершенно не удается просчитывать ряд сходных вариантов, несколько отличных один от другого по числовым характеристикам, для отбора наилучшего варианта. Необходимо скорейшее увеличение числа математиков и расчетных работников в Математическом институте, в группе Ландау, в Институте теоретической геофизики и в КБ-11. Необходимо скорейшее создание универсальных математических машин и обеспечение средней математической механизации.

Отметим, что Совет Министров СССР отозвался на указанные острые проблемы (Постановление от 7 июня 1952 г.) и принял меры к их решению [5, с. 453].

Разработка математических методов детального расчета, выполненная по заданиям КБ-11 группами Л. Д. Ландау и А. Н. Тихонова, потребовала серьезной исследовательской и большой вычислительной работы. В ходе поиска оптимального варианта РДС-6С и методики расчётов было проведено 12 детальных расчетов термоядерных бомб. Количество произведенных при этом арифметических операций исчислялось многими десятками миллионов. Важно, что удалось выработать метод расчета, в котором неизбежно возникающие в громоздких вычислениях малые ошибки не накапливались и не приводили к существенной погрешности в итоговом результате. Это оказалось принципиальным и при применении ЭВМ [6, с. 20-27].

Испытание первой советской термоядерной бомбы РДС-6С 12 августа 1953 года на Семипалатинском полигоне подтвердило верность идей физиков, заложенных в конструкцию. Также это испытание показало, что математические модели и расчеты (проведенные до появления ЭВМ) с хорошей точностью соответствовали реальным процессам [5, с. 44].

31 декабря 1953 г. за создание термоядерной бомбы и новых конструкций атомных бомб Тихонову А. Н. присудили Сталинскую премию первой степени; через три дня ему было присвоено звание Героя Социалистического Труда.

¹¹Принцип функционирования термоядерных бомб см. в Приложении.

¹²Не считая двадцати пяти физиков-теоретиков.

3 марта 1954 года Технический Совет КБ-11 решил принять все меры по форсированию работ по новой термоядерной бомбе РДС-6СД (газовый вариант). При этом окончательное решение о сравнительной эффективности того или иного варианта бомбы РДС-6СД было отложено до завершения точного расчета в математическом бюро А. Н. Тихонова.

Подчеркнём, что в математическом бюро А. Н. Тихонова своевременно шло развитие теоретических исследований на уровне, определяемом классом решаемых задач. Результатом явились построенные основы теории разностных схем для широких классов стационарных и нестационарных уравнений математической физики. По мере востребования были разработаны:

- теория устойчивости разностных схем [50];
- теория итерационных методов решения сеточных уравнений;
- общая теория регуляризации разностных схем [51];
- принципы суммарной или слабой аппроксимации многомерных задач.

Следует отметить, что предложенный А. Н. Тихоновым алгоритм решения некорректно поставленных задач оказался хорошо приспособленным для реализации на ЭВМ. Метод регуляризации Тихонова допускает применение для широкого класса задач; задачи об отыскании решения интегрального и операторного уравнения первого рода, обратной задачи теории потенциала и теплопроводности, задачи об аналитическом продолжении функции, задачи геофизической разведки полезных ископаемых, задачи оптической и нейтронной спектроскопии и многих других.

В ходе работ по созданию математических моделей и методов, разработанных для численных расчётов энерговыделения атомных и термоядерных бомб под руководством А. Н. Тихонова, вырос большой коллектив специалистов по прикладной математике [46].

6. Вклад профессора Л. В. Канторовича. В возрасте 14 лет Л. В. Канторович поступил в ЛГУ. На втором курсе он принял активное участие в семинарах, которыми руководили Б. Н. Делоне, В. И. Смирнов и Г. М. Фихтенгольц. Окончив университет в 1930 г., Леонид Витальевич читал лекции в разных вузах Ленинграда (в том числе ЛГУ), сочетая преподавание с интенсивными научными исследованиями.

По окончании университета в 1930 г. Леонид Витальевич преподавал в высших учебных заведениях Ленинграда – ЛГУ, Высшем военном инженерно-техническом училище Военно-Морского Флота (ВВИТУ ВМФ) и Ленинградском институте инженеров промышленного строительства. Продолжая интенсивно заниматься научными исследованиями, уже в 1932 г. он стал профессором Ленинградского института инженеров промышленного строительства и доцентом ЛГУ. В 1934 г. Канторович получил должность профессора ЛГУ, а в 1935 г. – учёную степень доктора физико-математических наук (без защиты диссертации) [31].

Видимо, преподавание в вузах, выпускающих инженеров, пробудило его интерес к прикладным задачам и приближённым вычислениям. В 1931 г. Леонид Витальевич стал посещать семинар В. И. Смирнова по приближённым методам высшего анализа и разрабатывать методы приближённого решения задач математической физики. В 1936-м году вышла монография Л. В. Канторовича в соавторстве с В. И. Крыловым «*Методы приближенного решения дифференциальных уравнений в частных производных*» [25]. Эта монография имела большой успех, выдержав шесть переизданий.

Во время войны Л. В. Канторович служил начальником кафедры математики Высшего военного инженерно-технического училища Военно-Морского Флота (ВВИТУ ВМФ) в звании майора. С этим училищем он провел годы войны в Ярославле. В это время Канторович написал оригинальный курс «Теория вероятностей» (1946), предназначенный для военных учебных заведений и отражающий специфические военные приложения этой науки.

К этому времени набирал свои обороты советский Атомный проект, в который также оказался вовлечённым и Канторович. В Постановлении Совета Министров СССР от 10.06.1948 г. «В целях обеспечения теоретических и расчетных работ, выполняемых для Лаборатории № 2», в частности, поручалось:

- Министерству вооруженных сил СССР освободить профессора Канторовича от работы в Высшем военном-морском инженерном училище ... и демобилизовать его из рядов ВМФ;
- в двухнедельный срок организовать в ЛОМИ¹³ расчетную группу в количестве до 15 чел., возложив руководство этой группой на профессора Канторовича [2, с. 496-497].

В своё математическое бюро (расчётную группу) Леонид Витальевич начал набирать выпускников математического факультета ЛГУ из послевоенного выпуска. По воспоминаниям члена этой расчётной группы В. Н. Кублановской, сначала это было пять человек в ЛОМИ и три на машинно-счетной станции. Первый послевоенный выпуск был небольшим, почти всех математиков удалось собрать в расчётную группу. Специализация у выпускников была разная: геометрия, теория чисел, функциональный анализ, теория функций комплексного переменного. Из Москвы привозили определенные задания, в которых указывался строго определенный срок их выполнения. Решали интегральные или интегро-дифференциальные уравнения. Что именно считалось, никому не сообщалось, и только впоследствии узнали, что расчеты велись для атомной бомбы, но без конкретики. Даже параметры уравнений были «строго секретными» [17]. Расчеты велись вручную – на «Мерседесах» и «Рейнметаллах» с использованием восьмизначных таблиц, купленные в США. В них приводились все функции, вплоть до интегрального логарифма. Примерно через год наладилась работа машинно-счетной станции. Первая задача группы Канторовича состояла в расчёте критической массы заряда атомной бомбы (с математической точки зрения задача сводилась к вычислению собственных значений значений сингулярных интегральных операторов). Сначала считали критическую массу для шара, потом потребовался расчет для цилиндра.

¹³ Ленинградское отделение МИАН.

В процессе создания термоядерной бомбы в КБ-11 пришло понимание чрезвычайной сложности решаемых задач и необходимости корректировки плана соответствующих расчётно-теоретических работ. В результате в этот план (утверждённый Советом Министров СССР 9 мая 1951 г.) было, среди прочего, включено построение приближенных формул для изменения энергии квантов при однократном рассеянии на электронах в зависимости от температуры электронов и энергии квантов. Исполнителями были назначены Ландау (ИФПАН) и Канторович (ЛОМИ).

К середине октября 1951 г. была принципиально определена конструкция и рассчитано действие заряда, предназначенного для подрыва термоядерной бомбы РСД-6С. Для большей надёжности планировался ряд необходимых теоретических и математических исследований. В частности, сложные теоретические исследования, порученные группе Н. Н. Боголюбова (КБ-11), было решено форсировать. Этой группе должна быть обеспечена возможность опираться на расчеты математического бюро Л. В. Канторовича [5, с. 422].

После подрыва 12 августа 1953 года бомбы модели РСД-6С «слойки» основные научные силы участников Атомного проекта СССР направлены на создание дейтериевой термоядерной бомбы РСД-6Т «трубы» (она работала на принципе детонации жидкого дейтерия с протеканием термоядерных реакций). При реакции дейтерия образуются тритий и гелий-3, которые сами вступают во вторичную реакцию с образованием быстрых частиц (нейтронов и протонов). Отличительной особенностью РСД-6Т является протекание реакций при температуре до ста миллионов градусов, при которой вещество не находится в равновесии с излучением. Испускаемое электронами тормозное излучение является основным видом теплопотерь. В дальнейшем это излучение при рассеянии его электронами дополнительно отнимает от них тепло. Последний из перечисленных процессов получил название *комптонизации* [16].

Расчёт комптон-эффекта при заданном распределении температуры электронов было поручено выполнить к концу 1952 года учёным Померанчуку Ю. Я. (Лаборатория № 3) и Канторовичу Л. В. (ЛОМИ). В плане расчётно-теоретических работ по модели РСД-6Т на вторую половину 1953 г. Канторовичу и Кронроду было поручено разработать приближенный метод учета анизотропии в расчете комптон-эффекта при заданном гидродинамическом поле и точный метод расчёта комптон-эффекта с полным учетом анизотропии при заданном гидродинамическом поле [5, с. 653], [20].

Работая в Атомном проекте, Канторович пришел к убеждению о необходимости поставить вычислительные процессы на прочный теоретический фундамент. К концу 1940-х он осознал, что «идеи и методы функционального анализа могут быть использованы для построения и анализа эффективных практических алгоритмов решения математических задач с таким же успехом, как для теоретического исследования этих задач» [27, с. 89]. В 1948 году в журнале Успехи математических наук по этому поводу вышла его обзорная 96-страничная статья «Функциональный анализ и прикладная математика» [27], за которую в 1949 г. Канторович был награжден Сталинской премией. Развивая результаты статьи [27], к 1956 он подготовил новую работу «Приближённое решение функциональных уравнений» [28].

Потребность в решении трудоёмких вычислительных задач в контексте Атомного проекта побудила Канторовича внести свой вклад в развитие вычислительной техники и программирования. Он предложил остроумные алгоритмические и структурные решения, которые стали основой оригинальных вычислительных устройств. К концу 50-х годов под руководством Л. В. Канторовича были разработаны релейные клавишные вычислительные машины «Вятка» и «Вильнюс». Эти КВМ сыграли важную роль в автоматизации вычислительных работ [18]. В те же годы он обратился к формам интеллектуальной деятельности человека, в частности, вопросам автоматизации программирования. В работе «Об одной математической символике, удобной при проведении вычислений на машинах» [29] Леонид Витальевич предложил принципы, которые получили продолжение в работах отечественных и зарубежных авторов (подробности см., например, в [39]).

В 1963–1965 гг. в Институте математики Сибирского отделения АН СССР под руководством Л. В. Канторовича был разработан специализированный процессор с роторным принципом реализации массовых арифметических операций (авторское свидетельство 172567 от 7 мая 1965 г.). Скорость выполнения операции этого процессора ограничивалась только быстродействием оперативной памяти. Смелая идея использования проблемно-ориентированных процессоров материализовалась в перспективное направление вычислительной техники [30].

7. Заключение. Трудности, стоявшие перед создателями ядерного оружия, усугублялись крайне ограниченными сведениями о физической природе явлений, сопровождающих протекание ядерных процессов. Важным методом познания особенностей ядерного взрыва было его математическое моделирование с последующими расчетами по построенным физико-химико-математическим моделям. В процессе работы модели совершенствовались, улучшались и методы расчетов. Наиболее распространённые многомерные задачи, решаемые в рамках Атомного проекта, сводились к уравнениям вида:

$$A \frac{\partial V}{\partial t} + B \frac{\partial V}{\partial x} + C \frac{\partial V}{\partial y} + DV = F,$$

где B, C, F – заданные матрицы; V – вектор-функция, D – линейный или нелинейный матричный оператор [45, с. 270]. Построение указанных моделей осуществлялось совместными усилиями физиков, химиков и математиков, продемонстрировавших поразительную силу сотрудничества наук.

Наиболее существенный вклад в математическое обеспечение проекта был внесён С. Л. Соболевым, М. В. Келдышем, А. Н. Тихоновым и Л. В. Канторовичем. Они были приглашены в проект в силу нескольких причин:

- все перечисленные являлись крупными математиками, имеющими опыт работы в прикладных областях, в том числе оборонного характера;
- они хорошо зарекомендовали себя на руководящих должностях;

- эти учёные обладали подходящими личностными свойствами: работоспособностью, ответственностью, целеустремлённостью и т. п.

Каждый из перечисленных участников, за исключением Келдыша (перегруженного организационной работой), проводил глубокие исследования по темам, связанным с работой в проекте. У Соболева это были изыскания в области теории алгоритмов и кубатурных формул, Тихонов разрабатывал теорию разностных схем. Канторович проводил анализ приближённых методов в рамках функционального анализа, а также проектировал вычислительные машины и процессоры. Их результаты впоследствии получили мировое признание.

Участие в Атомном проекте безусловно повысило авторитет учёных-математиков в научном сообществе и их социальный статус. В этом определённую роль сыграло их награждение орденами и медалями, также большие зарплаты и премии (премии руководителей математических бюро по результатам работ составили 100 тысяч рублей при средней месячной зарплате в СССР в те годы около 650 рублей). Кроме того, математики-руководители расчётных групп позиционировались по окончании проекта, как «проверенные кадры» в самых высоких кругах, что позволило им занимать ключевые позиции в других местах (Келдыш – руководитель космической программы; президент АН СССР, Соболев – директор Института математики Сибирского отделения АН СССР, Тихонов – декан факультета ВМК МГУ, позднее директор ИПМ АН СССР, Канторович – создатель математико-экономического отделения СО АН СССР; Нобелевский лауреат).

Результатом участия математиков в Атомном проекте явилось также следующее:

- научный потенциал Атомного проекта и опыт математического моделирования был использован в космическом проекте;
- усилилась роль математики и математиков в разработке сложных систем;
- были созданы новые факультеты (ВМиК МГУ и т. п.), кафедры и направления подготовки специалистов (например, прикладная математика).

Обобщение опыта проведения масштабного вычислительного эксперимента позволило создать новые направления в математике:

- теорию алгоритмов;
- теорию разностных схем;
- теорию регуляризации;
- кибернетику;
- прикладную математику.

Необходимость численного решения многомерных нелинейных задач вызвала революцию в области вычислительной математики. Были намечены принципиально новые возможности приложений математики к разработкам оптимальных технических конструкций. В результате общенаучное значение вычислительной математики изменилось коренным образом. По признанию физиков, математические расчеты не только позволяли понимать эксперимент, но и зачастую вскрывали явления, которые невозможно усмотреть экспериментально. Таким образом, математическое моделирование резко повышало темпы технического прогресса.

Благодарность. Авторы выражают благодарность профессору Вл. П. Визгину (ИИЕТ РАН, г. Москва) за знакомство с рукописью и полезные замечания, а также участниками семинара 15.02.2022 по дифференциальным и функционально-дифференциальным уравнениям Математического института им. С. М. Никольского за продуктивные обсуждения.

Приложение

Некоторые подробности создания водородной бомбы в СССР

Заявление Президента США от 31 января 1950 года о продолжении работ над всеми видами ядерного оружия, включая водородную бомбу, стимулировало неотложные меры со стороны Правительства СССР. 26 февраля 1950 года Советом Министров СССР было принято постановление о создании водородной (термоядерной) бомбы. Советская разведка обеспечивала информацией руководство СССР о работах в США над созданием указанной бомбы, благодаря чему И. В. Курчатов имел сведения о технологии её изготовления в некоторых подробностях. 21.04.1949 г. И. В. Курчатов в докладе Л. П. Берии писал, что теоретически нельзя исключить возможность использования дейтерия для резкого усиления взрыва атомной бомбы. В этом направлении у нас были сделаны два конструктивных предложения. В обоих для зажигания больших количеств дейтерия, окружающего обычную атомную бомбу, предполагалось использовать второй тяжелый изотоп водорода – тритий (H^3), добываемый в уран-графитовом котле. Сотрудники ФИАН А. Д. Сахаров и В. Л. Гинзбург предложили (1950 г.) изготовить многослойный заряд для атомной бомбы [5, с. 192]. Принцип действия проектируемого многослойного заряда заключается в следующем. Плутониевый заряд, служащий для инициирования всего изделия, помещается в центре системы из перемежающихся слоев природного урана и легкого материала, состоящего из смеси дейтерида и тритида лития-6. После обжаривания всей системы сферической детонационной волной в плутонии протекает цепная реакция и под действием развивающейся при этом высокой температуры в легком материале возникает термоядерная реакция: $D + T = He + n$. При этом образующиеся при реакции нейтроны имеют энергию 14 мегаэлектронвольт. Эти быстрые нейтроны вызывают деление ядер урана, вследствие чего выделяющаяся в многослойном заряде полная энергия в расчете на один израсходованный атом T возрастает примерно в 5 раз (с 17 до 85 мегаэлектронвольт). Находящийся в легком материале литий-6, взаимодействуя с нейтронами, образует дополнительное количество трития в результате реакции $Li^6 + n = T + He$, усиливая тем самым первичную термоядерную реакцию и увеличивая выделение энергии при взрыве [5, с. 333]. В докладной записке И. В. Курчатова и др., направленной Л. П. Берии от 14.04.1952 г., сообщалось:

- Разработаны методы расчета процессов, протекающих во время работы многослойного заряда (МЗ), в частности процесса обжигания МЗ, процесса перемешивания легких и тяжелых слоев, процесса диффузии нейтронов в МЗ.
- Проведены расчеты действия МЗ путем интегрирования системы уравнений движения, теплопроводности, кинетики ядерных реакций, диффузии и размножения нейтронов.
- На основе экспериментальных исследований построено уравнение состояния гидрида лития. Экспериментально исследовано обжигание многослойных систем взрывом. Показано, что расчеты удовлетворительно описывают прохождение ударных волн через многослойную систему.
- Произведено определение основных ядерных констант, необходимых для расчета эффективности изделия¹⁴ (сечение реакции $T + D$, сечение деления урана-238 нейтронами с энергией 2 и 14 мегаэлектронвольт, сечение реакций $n + Li^6 = T^3 + He^4$ или $He^6 + p$ и т. д.)
- Посредством ядерно-физического исследования моделей различных типов произведено определение коэффициента использования нейтронов, т. е. количество делений урана-238, вызываемых в среднем одним нейтроном с энергией 14 МэВ, образовавшимся в результате реакции $T + D^5$.
- На основе произведенных расчетов и экспериментов разработана конструкция из легких (дейтерида и дейтерида-тритида лития-6) и тяжелых (урана) слоев, перемежающих легкие.
- Разработана конструкция заряда из взрывчатых веществ в габаритах изделия РДС-7, обеспечивающая необходимое обжигание и отвод выделяемого тритием тепла.
- Разработана технология получения основных материалов, необходимых для изготовления водородной бомбы: трития и лития-6, и технология изготовления соединения трития и дейтерия с литием-6.
- Разработана технология изготовления деталей из тритида-дейтерида и лития-6, и деталей крупного размера из урана-238 [6, с. 333].

В итоге 12 августа 1953 года испытанием первой советской водородной бомбы РДС-6С СССР опередил США более чем на полгода.

17 октября 1953 г. А. Д. Сахаров с Я. Б. Зельдовичем передали И.В. Курчатову записку с предложением новой конструкции и новым принципом окружения атомной бомбы: в полости находится газ D^2 под давлением 150 атмосфер, уран и сферические оболочки из Li^6D , предполагая в этой конструкции протекание процессов, которые никогда ранее не были проверены экспериментально и не исследовались теоретически:

1. Лучистый теплообмен в полости сложной формы.
2. Лучистый теплообмен в продуктах взрыва первичного изделия.
3. Сжатие урана и Li^6D при давлениях в сотни миллионов атмосфер.
4. Диффузия нейтронов от первичного изделия.
5. Процесс атомно-водородного взрыва в системе уран - Li^6D [6, с. 377].

Экспертная комиссия согласилась с тем, что конструктивная схема изделия РДС-27 близка к конструктивной схеме испытанного изделия РДС-6С и также близка к оптимальной в данном габарите среди изделий, работающих на принципе многослойного заряда. Комиссия отметила важное преимущество изделия РДС-27 перед изделием РДС-6С, а именно – отсутствие в заряде трития, что, кроме экономичности, намного облегчает вопросы технологии изготовления и эксплуатации изделия, связанные с радиоактивностью трития.

6 ноября 1955 г. на полигоне № 2 Министерства обороны СССР успешно испытана водородная бомба РДС-27. По своим данным (прочность конструкции, вес) изделие РДС-27 могло быть использовано как в виде авиабомбы, так и в качестве спецзаряда трансконтинентальной баллистической ракеты.

22 ноября 1955 г. испытанием более совершенной водородной бомбы двухступенчатой конструкции РДС-37 (значение тротилового эквивалента 1,76 млн тонн) стало ключевым моментом в развитии ядерной программы СССР, открывшим перспективу нескольким поколениям термоядерного заряда с высокими мощностными характеристиками [6, с. 416; с. 422].

Список литературы

1. Атомный проект СССР: документы и материалы. 1998. Под общ. ред. Л. Д. Рябева. Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ; М.: Наука, Физматлит. I (1), 432.
2. Атомный проект СССР. Документы и материалы. 1999. Под общ. ред. Л.Д. Рябева. Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ; М.: Наука, Физматлит. II(1), 737.
3. Атомный проект СССР. Документы и материалы. 2007. Под общ. ред. Л.Д. Рябева. Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ; М.: Наука, Физматлит. II(6), 897.
4. Атомный проект СССР. Документы и материалы. 2007. Под общ. ред. Л.Д. Рябева. Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ; М.: Наука, Физматлит. II (7), 697.
5. Атомный проект СССР. Документы и материалы. 2009. Под общ. ред. Л.Д. Рябева. Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ; М.: Наука, Физматлит. III(1), 737.

¹⁴Так именовались бомбы в официальных документах Атомного проекта.

6. Атомный проект СССР. Документы и материалы. 2009. Под общ. ред. Л.Д. Рябева. Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ; М.: Наука, Физматлит. III(2), 601.
7. Бицадзе А. В., Канторович Л. В., Лаврентьев М. А. 1968. Сергей Львович Соболев (к шестидесятилетию со дня рождения). Успехи математических наук, 23:5(143): 177-186.
8. Богатов Е. М. 2021. Атомный проект СССР – кузница кадров Академии наук (отделение математики). Сборник материалов международной конференции КРОМШ-2021. Симферополь: ПОЛИПРИНТ: 110.
9. Богатов Е. М., Богатова В. П. О вкладе математиков в Атомный проект СССР [Интернет-ресурс]
URL: http://m.mathnet.ru/php/seminars.phtml?option_lang=rus&presentid=33937 (дата обращения: 08.04.2022)
10. Богатов Е. М., Коренев А. В., Михайлов И. С. 2022. О вкладе математиков второй величины в Атомный проект СССР. Материалы 12-й Международной научной конференции МОЛОДЕЖЬ И XXI ВЕК – 2022. В 4-х томах. Отв. редактор М. С. Разумов. Курск, 1: 366-368.
11. Богуненко Н. Н., Пелипенко А. Д., Соснин Г. А. 2005. Герои атомного проекта. Федеральное агентство по атомной энергии. Саров: ФГУП РФЯЦ-ВНИИЭФ, 566.
12. Брушлинский К. В., Езерова Г. Н., Забродин А. В., Келдыш С. М. 2002. Келдыш М.В. Творческий портрет по воспоминаниям современников. М.: Наука, 398.
13. Брушлинский К. В. 2011. Строитель советской науки. 100 лет со дня рождения Мстислава Келдыша. Наш современник. 2: 185-190.
14. Визгин В. П. 2011. Взаимодействие физиков и математиков в советском атомном проекте (1940-1950-е гг.). Историко-математические исследования : 53–76.
15. Вишик М. И., Люстерник Л. А., 1959. Сергей Львович Соболев (к пятидесятилетию со дня рождения), Успехи математических наук. 14:3(87): 203-210.
16. Владимиров В. С. 2009. Математика и создание первых образцов атомного оружия. К 60-летию взрыва первой атомной бомбы. Атомная стратегия. 05(42): 27-40.
17. Владимиров В. С., Кублановская В. Н. 2002. Вычисления для атомного проекта. Леонид Витальевич Канторович: человек и учёный. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 153-160.
18. Даугавет О. К., Романовский И. В. 2012. О деятельности и работах Л.В. Канторовича в области программирования. Журнал Новой экономической ассоциации. М., 1(13): 185-190.
19. Демиденко Г. В. 2008. К столетию со дня рождения Сергея Львовича Соболева. Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. 8(4): 3-12.
20. Дмитриев А. Л., Иванова Е. А. 2002. К 90-летию со дня рождения Л. В. Канторовича. Экономическая наука современной России. 3: 124-127.
21. Еругин Н. П., Ильин В. А., Самарский А. А., Свешников А. Г. 1981. Андрей Николаевич Тихонов (к 75-летию со дня рождения). Дифференциальные уравнения, 17(10): 1731-1737.
22. Ильин В. А., Свешников А. Г. 1966. Андрей Николаевич Тихонов (к 60-летию со дня рождения). Дифференциальные уравнения. 2(10): 1408-1412.
23. История советского атомного проекта: Документы, воспоминания, исследования: вып. 1 / отв. ред. и сост. В. П. Визгин. - М.: Янус-К, 1998, 392.
24. История советского атомного проекта. Документы, воспоминания, исследования. Вып. 2 / Ред. В. П. Визгин. СПб.: Изд. РХГИ, 2002: 413–488.
25. Канторович Л. В., Крылов В. И. 1936. Методы приближенного решения дифференциальных уравнений в частных производных. М.-Л., ОНТИ, 528.
26. Канторович Л. В., Крылов В. И. 1949. Приближенные методы высшего анализа. Л., М.: ГИТТЛ: 696.
27. Канторович Л. В. 1948. Функциональный анализ и прикладная математика. Успехи математических наук, 3:6(28): 89–185.
28. Канторович Л. В. 1956. Приближённое решение функциональных уравнений. Успехи математических наук, 11:6(72): 99–116.
29. Канторович Л. В. 1957. Об одной математической символике, удобной при проведении вычислений на машинах. Доклады АН СССР, 113:4: 738–741.
30. Канторович В. Л., Кутателадзе С. С., Фет Я. И. (Ред.). 2002. Леонид Витальевич Канторович – человек и учёный. Новосибирск: Издательство Института математики, 1:543.
31. Канторович Леонид Витальевич (1912-1986): Биобиблиографический указатель. 2012. Ред. Кутателадзе С.С. 2-е изд., перераб. и доп. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 204.
32. Келдыш М. В. 1985. Избранные труды. Математика. отв. ред. Бабенко К. И., Боголюбов Н.Н., Ченцов Н.Н.. М.: Наука, 447.
33. Келдыш М. В. 1985. Избранные труды. Механика. Отв. ред. Бабенко К.И., Свищев Г.П., Ченцов Н.Н., М.: Наука, 567.

34. К исследованию феномена советской физики 1950–1960-х гг. Социокультурные и междисциплинарные аспекты. 2014. Сост. и ред. В. П. Визгин, А. В. Кессених и К. А. Томилини. СПб.: РХГА, 560.
35. Крайнева И.А. 2019. Академик Сергей Львович Соболев в советском атомном проекте. Гуманитарный вектор. 14(6):72-80.
36. Кутателадзе С. С. 2008. Соболев из школы Эйлера. Сибирский математический журнал, 49(5): 955-985.
37. Мстислав Всеволодович Келдыш (к семидесятипятилетию со дня рождения). 1986. Успехи математических наук, 41:3(249): 209–212.
38. Самарский А. А. 1997. Прямой расчет мощности взрыва. Наука и общество: история советского атомного проекта (40-50 годы). Труды международного симпозиума ИСАП-96. М.: ИздАТ: 214-222.
39. Самокиш Б. А. 2012. Л.В. Канторович и вычислительная математика. Журнал Новой экономической ассоциации. М., 1 (13): 181–185.
40. Соболев С. Л. 1955. Замыкание вычислительных алгоритмов и некоторые его применения. М.: АН СССР: 30.
41. Соболев С. Л. 1956. Некоторые замечания о численном решении интегральных уравнений. Известия АН СССР. Серия математическая, 20:4, 413-436.
42. Соболев С. Л. 2003. Избранные труды. Уравнения математической физики. Вычислительная математика и кубатурные формулы. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, Филиал «Гео» Изд-ва СО РАН, 1, 692.
43. Соболев С. Л., Канторович Л. В., Люстерник Л. А. 1956. Функциональный анализ и вычислительная математика. Труды III Всесоюзного математического съезда. М., 2; 43.
44. Соболев Сергей Львович (1908-1989). Биобиблиографический указатель. 2008. Ред. и авт. вступ. ст. С. С. Кутателадзе. 3-е изд., перераб. и доп. Новосибирск: Изд-во Института математики. 150.
45. Софронов И. Д. 2005. Математическое моделирование во ВНИИЭФ. Историко-математические исследования. Вторая серия. 9: 265-281.
46. Тихонова А. А., Тихонов Н. А. 2004. Андрей Николаевич ТИХОНОВ. Серия «Выдающиеся ученые физического факультета МГУ», VIII. М.: Физический факультет МГУ. 124.
47. Тихонов А. Н., Самарский А. А. 1956. О разностных схемах для уравнений с разрывными коэффициентами. Доклады АН СССР. 108(3): 393-396.
48. Тихонов А. Н., Самарский А. А. 1958. Об однородных разностных схемах. Доклады АН СССР. 122(4): 562–565.
49. Тихонов А. Н., Самарский А. А. 1959. О сходимости разностных схем в классе разрывных коэффициентов. Доклады АН СССР. 124(3):1529–1532.
50. Тихонов А. Н., Самарский А. А. 1963. Об устойчивости разностных схем. Доклады АН СССР. 149(3): 529-531.
51. Тихонов А. Н. 1963. О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации. Доклады АН СССР. 151(3): 501-504.
52. Трутнев Ю. А. 2002. Келдыш М. В. и его коллектив в решении атомной проблемы. В кн. Творческий портрет по воспоминаниям современников. М.: Наука: 66-71.
53. Ученый с широким кругозором, умеющий мечтать: к 100-летию со дня рождения академика М. В. Келдыша. Исторический архив. 2011. 1: 3–32.
54. Ченцов Н. Н. 1991. Всемирно известный, всемерно засекреченный. Наука и жизнь. 2: 102-107.

References

1. Atomnyj proekt SSSR: dokumenty i materialy [Atomic project of the USSR: documents and materials]. 1998. Pod obshh. red. L. D. Rjabeva. Sarov: RFJaC-VNIIEF; M.: Nauka, Fizmatlit. I (1), 432.
2. Atomnyj proekt SSSR. Dokumenty i materialy [Atomic project of the USSR: documents and materials]. 1999. Pod obshh. red. L.D. Rjabeva. Sarov: RFJaC-VNIIEF; M.: Nauka, Fizmatlit. II(1), 737.
3. Atomnyj proekt SSSR. Dokumenty i materialy [Atomic project of the USSR: documents and materials]. 2007. Pod obshh. red. L.D. Rjabeva. Sarov: RFJaC-VNIIEF; M.: Nauka, Fizmatlit. II(6), 897.
4. Atomnyj proekt SSSR. Dokumenty i materialy [Atomic project of the USSR: documents and materials]. 2007a. Pod obshh. red. L.D. Rjabeva. Sarov: RFJaC-VNIIEF; M.: Nauka, Fizmatlit. II (7), 697.
5. Atomnyj proekt SSSR. Dokumenty i materialy [Atomic project of the USSR: documents and materials]. 2009. Pod obshh. red. L.D. Rjabeva. Sarov: RFJaC-VNIIEF; M.: Nauka, Fizmatlit. III(1), 737.
6. Atomnyj proekt SSSR. Dokumenty i materialy [Atomic project of the USSR: documents and materials]. 2009a. Pod obshh. red. L.D. Rjabeva. Sarov: RFJaC-VNIIEF; M.: Nauka, Fizmatlit. III(2), 601.
7. Bitsadze A. V., Kantorovich L. V., Lavrent'ev M. A. 1968. Sergei L'vovich Sobolev (on his sixtieth birthday). Russian Math. Surveys, 23:5 (1968), 131–140. (in Russian).
8. Bogatov E. M. 2021. Atomnyj proekt SSSR — kuznica kadrov Akademii nauk (otdelenie matematiki) [The atomic project of the USSR is the forge of personnel of the Academy of Sciences (Department of Mathematics)]. Sbornik materialov mezhdunarodnoj konferencii KROMSh-2021. Simferopol': POLIPRINT: 110.

9. Bogatov E. M., Korenev A. V., Mihajlov I. S. 2022. O vklade matematikov vtoroj velichiny v Atomnyj proekt SSSR [On the contribution of mathematicians of the second magnitude to the Atomic Project of the USSR]. *Materialy 12-j Mezhdunarodnoj nauchnoj konferencii MOLODEZH" I XXI VEK - 2022. V 4-h tomah. Otv. redaktor M. S. Razumov. Kursk, 1: 366-368.*
10. Bogatov E. M., Bogatova V. P. 2022. O vklade matematikov v Atomnyj proekt SSSR. [On the contribution of mathematicians to the Atomic Project of the USSR]
URL http://m.mathnet.ru/php/seminars.phtml?option_lang=rus&presentid=33937 (accessed 08.04.2022)
11. Bogunenko N. N., Pelipenko A. D., Sosnin G. A. 2005. Geroi atomnogo proekta (Heroes of the atomic project). Federal'noe agentstvo po atomnoj jenergii. Sarov: FGUP RFJaC-VNIIEF, 566.
12. Brushlinskij K. V., Ezerova G. N., Zabrodin A. V., Keldysh S. M. 2002. Keldysh M.V. Tvorcheskij portret po vospominanijam sovremennikov [Keldysh M.V. A creative portrait based on the memoirs of contemporaries.]. M.: Nauka, 398.
13. Brushlinskij K. V. 2011. Stroitel' sovetsoj nauki. 100 let so dnja rozhdenija Mstislava Keldysha [Builder of Soviet science. 100 years since the birth of Mstislav Keldysh]. *Nash sovremennik. 2: 185-190.*
14. Vizgin V. P. 2011. Vzaimodejstvie fizikov i matematikov v sovetskom atomnom proekte (1940–1950-e gg.) [Interaction of physicists and mathematicians in the Soviet atomic project (1940-1950s)]. *Istoriko-matematicheskie issledovaniya : 53-76.*
15. Vishik M. I., Ljusternik L. A. 1959. Sergej L'vovich Sobolev (k pjatidesjatiletiju so dnja rozhdenija) [Sergei Lvovich Sobolev (on his fiftieth birthday)]. *Uspehi matematicheskikh nauk. 14:3(87): 203-210.*
16. Vladimirov V. S. 2009. Matematika i sozdanie pervykh obrazcov atomnogo oruzhija. K 60-letiju vzryva pervoj atomnoj bomby [Mathematics and the creation of the first samples of atomic weapons. To the 60th anniversary of the explosion of the first atomic bomb]. *Atomnaja strategija. 05(42): 27-40.*
17. Vladimirov V. S., Kublanovskaja V. N. 2002. Vychislenija dlja atomnogo proekta. Leonid Vital'evich Kantorovich: chelovek i uchjonyj [Calculations for the atomic project. Leonid Vitalievich Kantorovich: man and scientist]. *Novosibirsk: Izd-vo SO RAN, 153-160.*
18. Daugavet O. K., Romanovskij I. V. 2012. O dejatel'nosti i rabotah L.V. Kantorovicha v oblasti programmirovanija [On the activities and works of L. V. Kantorovich in the field of programming]. *Zhurnal Novoj jekonomicheskoy asociacii. M., 1(13): 185–190.*
19. Demidenko G. V. 2008. K stoletiju so dnja rozhdenija Sergeja L'vovicha Soboleva [On the centenary of the birth of Sergei Lvovich Sobolev]. *Vestnik NGU. Serija: Matematika, mehanika, informatika. 8(4): 3-12.*
20. Dmitriev A. L., Ivanova E. A. 2002. K 90-letiju so dnja rozhdenija L. V. Kantorovicha [To the 90th anniversary of the birth of L. V. Kantorovich]. *Jekonomicheskaja nauka sovremennoj Rossii. 3: 124-127.*
21. Erugin N. P., Il'in V.A., Samarskij A. A., Sveshnikov A. G. 1981. Andrej Nikolaevich Tihonov (k 75-letiju so dnja rozhdenija) [Andrey Nikolaevich Tikhonov (on the occasion of the 75th birthday)]. *Differenc. uravnenija, 17(10): 1731–1737.*
22. Il'in V. A., Sveshnikov A. G. 1966. Andrej Nikolaevich Tihonov (k 60-letiju so dnja rozhdenija) [Andrey Nikolaevich Tikhonov (on the occasion of his 60th birthday)]. *Differencial'nye uravnenija. 2(10): 1408–1412.*
23. Istorija sovetskogo atomnogo proekta: Dokumenty, vospominanija, issledovanija: vyp. 1 [History of the Soviet atomic project: Documents, memoirs, research]. Otv. red. i sost. V.P. Vizgin. — M.: Janus-K, 1998, 392.
24. Istorija sovetskogo atomnogo proekta. Dokumenty, vospominanija, issledovanija. Vyp. 2. [History of the Soviet atomic project: Documents, memoirs, research]. Red. V. P. Vizgin. SPb.: Izd. RHGI, 2002: 413–488.
25. Kantorovich L. V., Krylov V. I. 1936. Metody priblizhennogo reshenija differencial'nyh uravnenij v chastnyh proizvodnyh [Methods for Approximate Solution of Partial Differential Equations]. M.-L., ONTI, 528.
26. Kantorovich L. V., Krylov V. I. 1949. Priblizhennye metody vysshego analiza [Approximate methods of higher analysis]. L., M.: GITTL: 696.
27. Kantorovich L. V. 1948. Funkcional'nyj analiz i prikladnaja matematika [Functional analysis and applied mathematics]. *Uspehi matematicheskikh nauk, 3:6(28): 89–185.*
28. Kantorovich L. V. 1956. Priblizhjonnoe reshenie funkcional'nyh uravnenij [Approximate solution of functional equations]. *Uspehi matematicheskikh nauk, 11:6(72): 99–116.*
29. Kantorovich L. V. 1957. Ob odnoj matematicheskoj simvolike, udobnoj pri provedenii vychislenij na mashinah [About one mathematical symbolism, convenient for carrying out calculations on machines]. *Doklady AN SSSR, 113:4, 738–741.*
30. Kantorovich V. L., Kutateladze S. S., Fet Ja. I. (Red.). 2002. Leonid Vital'evich Kantorovich – chelovek i uchjonyj [Леонид Витальевич Канторович - человек и учёный]. *Novosibirsk: Izdatel'stvo Instituta matematiki, I:543.*
31. Kantorovich Leonid Vital'evich (1912–1986): Biobibliograficheskij ukazatel' [Kantorovich Leonid Vitalievich (1912–1986): Bio-Bibliographic Index]. 2012. Red. Kutateladze S.S. 2-e izd., pererab. i dop. *Novosibirsk: Izd-vo In-ta matematiki, 204.*
32. Keldysh, M. V. 1985. Izbrannye trudy. Matematika [Selected works. Mathematics]. otv. red. Babenko K. I., Bogoljubov N. N., Chencov N. N. M.: Nauka, 447.
33. Keldysh, M. V. 1985a. Izbrannye trudy. Mehanika [Selected works. Mechanics]. Otv. red. Babenko K.I., Svishhev G.P., Chencov N.N., M.: Nauka, 567.

34. Krajneva I. A. 2019. Akademik Sergej L'vovich Sobolev v sovetskom atomnom proekte [Academician Sergei Lvovich Sobolev in the Soviet atomic project]. Gumanitarnyj vektor. 14(6):72-80.
35. Kutateladze S. S. 2008. Sobolev of the Euler school. Siberian Math. J, 49:5, 771–779 (in Russian).
36. Mstislav Vsevolodovich Keldysh (on the seventy-fifth anniversary of his birth). 1986. Russian Math. Surveys, 41:3, 241–245 (in Russian).
37. Samarskij A. A. 1997. Prjamoj raschet moshhnosti vzryva. Nauka i obshhestvo: istorija sovetskogo atomnogo proekta (40-50 gody) [Direct calculation of the power of the explosion. Science and society: the history of the Soviet atomic project (40s - 50s)]. Trudy mezhdunarodnogo simpoziuma ISAP-96. M.: Izdat, 214-222.
38. Samokish B. A. 2012. L.V. Kantorovich i vychislitel'naja matematika [L.V. Kantorovich and computational mathematics]. Zhurnal Novoj jekonomicheskoy associacii. M., 1 (13): 181-185.
39. Sobolev S. L. 1955. Zamykanie vychislitel'nyh algoritmov i nekotorye ego primenenija [Closure of computational algorithms and some of its applications]. M.: AN SSSR: 30.
40. Sobolev S. L. 1956. Nekotorye zamechanija o chislennom reshenii integral'nyh uravnenij [Some remarks on the numerical solution of integral equations]. Izvestija AN SSSR. Serija matematicheskaja. 20:4, 413–436.
41. Sobolev S. L. 2003. Izbrannye trudy. Uravnenija matematicheskoy fiziki. Vychislitel'naja matematika i kubaturnye formuly [Selected works. Equations of mathematical physics. Computational mathematics and cubature formulas]. Novosibirsk: Izd-vo In-ta matematiki, Filial «Geo» Izd-va SO RAN, 1: 692 .
42. Sobolev S. L., Kantorovich L. V., Ljusternik L. A. 1956. Funkcional'nyj analiz i vychislitel'naja matematika. Trudy III Vsesojuznogo matematicheskogo s'ezda [Functional analysis and computational mathematics. Proceedings of the III All-Union Mathematical Congress]. M., 2; 43.
43. Sobolev Sergej L'vovich (1908–1989). Biobibliograficheskij ukazatel' [Sobolev Sergey Lvovich (1908-1989). Bio-bibliographic index]. 2008. Red. i avt. vstup. st. S. S. Kutateladze. 3-e izd., pererab. i dop. Novosibirsk: Izd-vo Instituta matematiki. 150.
44. Sofronov I. D. 2005. Matematicheskoe modelirovanie vo VNIIEF [Mathematical modeling at VNIIEF]. Istoriko-matematicheskie issledovanija. Vtoraja serija. 9: 265-281.
45. Tihonova A. A., Tihonov N.A.. 2004. Andrej Nikolaevich TIKHONOV. Serija «Vydajushhiesja uchenye fizicheskogo fakul'teta MGU», VIII. M.: Fizicheskij fakul'tet MGU. 124.
46. Tihonov A. N., Samarskij A.A. 1956. O raznostnyh shemah dlja uravnenij s razryvnymi koeficientami [On difference schemes for equations with discontinuous coefficients]. Doklady AN SSSR. 108(3): 393-396.
47. Tihonov A. N., Samarskij A. A. 1958. Ob odnorodnyh raznostnyh shemah [On homogeneous difference schemes]. Doklady AN SSSR. 122(4): 562–565.
48. Tihonov A. N., Samarskij A. A. 1959. O shodimosti raznostnyh shem v klasse razryvnyh koeficientov [On the convergence of difference schemes in the class of discontinuous coefficients]. Doklady AN SSSR. 124(3):1529-1532.
49. Tihonov A. N., Samarskij A. A. 1963. Ob ustojchivosti raznostnyh shem [On the stability of difference schemes]. Doklady AN SSSR. 149(3): 529-531.
50. Tihonov A. N. 1963. O reshenii nekorrektno postavlenykh zadach i metode reguljarizacii [On the solution of ill-posed problems and the regularization method]. Doklady AN SSSR. 151(3): 501-504.
51. Trutnev Ju. A. 2002. M. V. Keldysh i ego kollektiv v reshenii atomnoj problemy. V kn. Tvorcheskij portret po vospominanijam sovremennikov [M. V. Keldysh and his team in solving the atomic problem. In book "A creative portrait based on the memoirs of contemporaries"]. M.: Nauka: 66-71.
52. Uchenyj s širokim krugozorom, umejushhij mechtat': k 100-letiju so dnja rozhdenija akademika M.V. Keldysha [A scientist with a broad outlook, able to dream: on the occasion of the 100th anniversary of Academician M.V. Keldysh]. Istoricheskij arhiv. 2011. 1: 3-32.
53. Chencov N. N. 1991. Vsemirno izvestnyj, vseмерно zasekrechennyj [World famous, top secret]. Nauka i zhizn'. 2: 102-107.

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 21.03.2022

Поступила после рецензирования 02.05.2022

Принята к публикации 05.05.2022

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Богатов Егор Михайлович – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент филиала Национального исследовательского технологического университета «МИСиС» в г. Губкине Белгородской области; доцент Старооскольского технологического института им. А. А. Угарова (филиала) Национального исследовательского технологического университета «МИСиС»

ул. Комсомольская, 16, Губкин, 309180, Россия
мкр. Макаренко, 42, Старый Оскол, 309516, Россия
E-mail: embogatov@inbox.ru

Богатова Вера Павловна – кандидат физико-математических наук, доцент, пенсионер
E-mail: mverabog@mail.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Egor Bogatov – PhD in Mathematics, Associate professor, Associate professor in Branch of National Research University of Science and Technology "MISIS" Gubkin, Russia; Associate professor in Sary Oskol Technological Institute of National Research University of Science and Technology "MISIS Sary Oskol, Russia

Vera Bogatova – PhD in Mathematics, Associate professor, pensioner, Gubkin, Russia

УДК 517.3
MSC 31B15; 47G10; 44A15; 46E30

DOI 10.52575/2687-0959-2022-54-2-114-123

ОПЕРАТОРЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДЛЯ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ НЕКОТОРЫХ ОПЕРАТОРОВ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ И ИХ ДРОБНЫХ СТЕПЕНЕЙ

А. В. Дзарахохов 

(Статья представлена членом редакционной коллегии Э. Л. Шишкиной)

Горский государственный аграрный университет, Владикавказ, 362040, Россия

E-mail: azambat79@mail.ru

Аннотация. В работе рассматриваются дифференциальные операторы целого и дробного порядка, а также их собственные функции. Получены операторы преобразования, которые связывают собственные функции рассматриваемых дифференциальных операторов. Построенные операторы преобразования собственных функций могут быть использованы при решении задач Штурма – Лиувилля для уравнений, содержащих рассматриваемые в статье дифференциальные операторы.

Ключевые слова: оператор преобразования, собственная функция оператора, дробная производная Римана – Лиувилля, дробная производная Бесселя, функция Миттаг-Леффлера, функция Фокса – Райта

Для цитирования: Дзарахохов А. В. 2022. Операторы преобразования для собственных функций некоторых операторов дифференцирования и их дробных степеней. Прикладная математика & Физика. 54(2): 114–123.

DOI 10.52575/2687-0959-2022-54-2-114-123

TRANSMUTATION OPERATORS FOR EIGENFUNCTIONS OF SOME DIFFERENTIATION OPERATORS AND ITS FRACTIONAL POWERS

Azamat Dzarakhokhov 

(Article submitted by a member of the editorial board E. L. Shishkina)

Gorsky State Agrarian University, Vladikavkaz, 362040, Russia

E-mail: azambat79@mail.ru

Received March, 22, 2022

Abstract. The paper discusses differential operators of integer and fractional order, as well as their own functions. Transformation operators are obtained that relate the eigenfunctions of the differential operators under consideration. The constructed eigenfunction transformation operators can be used in solving Sturm – Liouville problems for equations containing the differential operators examined in the article.

Keywords: transmutation operator, operator eigenfunction, Riemann – Liouville fractional derivative, Bessel fractional derivative, Mittag-Leffler function, Fox – Wright function

For citation: Azamat Dzarakhokhov. 2022. Transmutation operators for eigenfunctions of some differentiation operators and its fractional powers. Applied Mathematics & Physics. 54(2): 114–123. (in Russian)

DOI 10.52575/2687-0959-2022-54-2-114-123

1. Введение. Данная статья посвящена операторам преобразования, то есть таким ненулевым операторам T , которые сплетают пару операторов A и B , то есть переводят оператор A в оператор B по формуле

$$T A = B T. \quad (1)$$

В настоящее время теория операторов преобразования привлекает все большее число исследователей. Общая теория операторов преобразования популяризована и систематически изложена Р. В. Кэрроллом [17, 18], Ж. Дельсартом [20, 19], В. А. Марченко [7, 8], Б. М. Левитаном [5], В. В. Катраховым [2] и С. М. Ситником [38]. Развитие этой теории и ее приложения к решению и исследованию дифференциальных уравнений с особенностями в коэффициентах, в том числе содержащих операторы Бесселя, было продолжено в [2, 11, 37]. Но несмотря на то, что теория операторов преобразования представляет собой полностью оформившийся самостоятельный раздел математики, существует еще много различных нерешенных вопросов в этой области. В частности, все большую популярность приобретает задача отыскания операторов преобразования, переводящих собственную функцию одного оператора в собственную функцию другого оператора с заданными свойствами. Этот подход использован в [4, 1] при построении точных и приближенных решений прямых и обратных задач для уравнений Штурма – Лиувилля с различными потенциалами.

В этой работе рассмотрены различные операторы преобразования, сплетающие собственные функции различных дифференциальных операторов как целого, так и дробного порядков.

2. Собственные функции операторов дробного и целого порядков. Изучение собственных функций линейных операторов является классической темой. Для работы в рамках этой темы могут быть использованы инструменты гармонического анализа. Например, рассмотрим простейший оператор $\frac{d}{dt}$. Пусть $\lambda > 0$. Решением уравнения

$$\frac{d}{dt}f(t) = -\lambda f(t)$$

является, очевидно, функция

$$f(t) = c_0 e^{-\lambda t}.$$

Это собственная функция оператора дифференцирования первого порядка, где c_0 — константа, зависящая от граничных условий. Добавив, например, условие $f(0) = 1$, получим единственную собственную функцию оператора $\frac{d}{dt}$ вида

$$f(t) = e^{-\lambda t}. \tag{2}$$

Для классического обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка вида

$$\frac{d^2}{dt^2}f(t) = -\lambda f(t)$$

при условиях

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = 0$$

собственной функцией будет

$$f(t) = \cos(\sqrt{\lambda}t). \tag{3}$$

Для оператора Бесселя (см. [3], стр. 5)

$$(B_\gamma)_t = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\gamma}{t} \frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{t^\gamma} \frac{\partial}{\partial t} t^\gamma \frac{\partial}{\partial t}, \quad t > 0, \quad \gamma \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

собственная функция, то есть такая функция, что

$$(B_\gamma)_t f(t) = -\lambda f(t), \tag{5}$$

удовлетворяющая условиям

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = 0,$$

имеет вид

$$f(t) = j_{\frac{\gamma-1}{2}}(\sqrt{\lambda}t), \tag{6}$$

где j_ν — нормированная функция Бесселя первого рода вида (см. [3], стр. 10, [6])

$$j_\nu(t) = \frac{2^\nu \Gamma(\nu + 1)}{t^\nu} J_\nu(t), \tag{7}$$

J_ν — функция Бесселя первого рода. Нетрудно видеть, что

$$j_{-\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda}t) = \cos(\sqrt{\lambda}t).$$

Гармонический анализ, приспособленный для работы с оператором (4), разработан И. А. Киприяновым, Л. Н. Ляховым, С. С. Платоновым, Э. Л. Шишкиной и др.

В течение нескольких последних десятилетий внимание исследователей привлекает дробное интегро-дифференциальное исчисление. Появилось много различных конструкций производных и интегралов дробного (вещественного или комплексного) порядка. Появляется все больше моделей, представляющих собой интегро-дифференциальные уравнения с дробными производными в задачах вязкоупругости, электрохимии, теории управления, моделирования эпидемий и др. Более подробно о прикладных аспектах дробных операторов (см. [13]). Естественно, возникает вопрос о поиске собственных функций для различных дробных производных. Для многих дробных производных, реализующих положительные вещественные степени оператора $\frac{d}{dt}$, этот вопрос решен (см. [27], стр. 312; [9, 33]). Так, для дробной производной Герасимова – Капуто

$$(\mathcal{D}_{0+}^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_0^t \frac{f^{(n)}(\tau) d\tau}{(t - \tau)^{\alpha - n + 1}}, \quad \alpha \notin \mathbb{N}, \quad n = [\alpha] + 1 \tag{8}$$

решение задачи

$$\begin{aligned} (\mathcal{D}_{0+}^\alpha f)(t) &= -\lambda f(t), & t > 0, & \quad \alpha > 0, \\ f^{(k)}(0) &= b_k, & k = 0, 1, \dots, n-1, & \quad b_k \in \mathbb{C}, \end{aligned}$$

единственно и имеет вид

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k t^k E_{\alpha, k+1}(-\lambda t^\alpha),$$

где $E_{\alpha,\beta}(z)$ – функция Миттаг-Леффлера. Это целая, порядка $1/\alpha$ функция, определенная при $\alpha > 0$ рядом

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + \beta)}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad \beta > 0. \quad (9)$$

При $0 < \alpha < 1$ и

$$f(0) = 1$$

собственная функция оператора $\mathcal{D}_{0+}^{\alpha}$ имеет вид

$$f(t) = E_{\alpha,1}(-\lambda t^{\alpha}), \quad (10)$$

При $1 < \alpha < 2$ и собственная функция оператора $\mathcal{D}_{0+}^{\alpha}$ при условиях

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = 0$$

также будет равна (10).

Поскольку

$$E_{1,1}(-\lambda t) = e^{-\lambda t}, \quad E_{2,1}(-\lambda t^2) = \cos(\sqrt{\lambda t}),$$

то мы получим соответствие собственным функциям (2) и (3) операторов $\frac{d}{dt}$ и $\frac{d^2}{dt^2}$ при соответствующих начальных условиях.

Явное определение дробной степени оператора Бесселя $(B_{\gamma})_t = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\gamma}{t} \frac{\partial}{\partial t}$ было представлено И. Г. Шпринкхёйзен-Купер в [39]. Это определение было получено в терминах гипергеометрических функций Гаусса с различными приложениями к УЧП. А. С. Макбрайд в [32] рассмотрел дробные степени гипер-бесселева оператора, которые включают в себя рассматриваемые в этой статье операторы.

Пусть $\alpha > 0$, $\gamma > 0$. Левосторонний дробный интеграл Бесселя на полуоси $B_{\gamma,0+}^{-\alpha}$ для $f \in L[0, \infty)$ определяется формулой

$$\begin{aligned} (B_{\gamma,0+}^{-\alpha} f)(x) &= (IB_{\gamma,0+}^{\alpha} f)(x) = \\ &= \frac{1}{\Gamma(2\alpha)} \int_0^x \left(\frac{y}{x}\right)^{\gamma} \left(\frac{x^2 - y^2}{2x}\right)^{2\alpha-1} {}_2F_1\left(\alpha + \frac{\gamma-1}{2}, 2\alpha; 1 - \frac{y^2}{x^2}\right) f(y) dy. \end{aligned} \quad (11)$$

Свойства (11) приведены в [12, 35, 36].

Пусть $n = [\alpha] + 1$, $f \in L[0, \infty)$, $IB_{\gamma,b-}^{n-\alpha} f, IB_{\gamma,b-}^n f \in C^{2n}(0, \infty)$. Определим левостороннюю дробную производную Бесселя на полуоси равенством

$$(\mathcal{B}_{\gamma,0+}^{\alpha} f)(x) = (IB_{\gamma,0+}^{n-\alpha} B_{\gamma}^n f)(x), \quad (12)$$

где $B_{\gamma}^n = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\gamma}{x} \frac{\partial}{\partial x}\right)^n$ – итерированный оператор Бесселя.

В [32] пространства, адаптированные для работы с операторами вида $B_{\gamma,0+}^{\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, были введены:

$$\begin{aligned} F_p &= \left\{ \varphi \in C^{\infty}(0, \infty) : x^k \frac{d^k \varphi}{dx^k} \in L^p(0, \infty) \text{ для } k = 0, 1, 2, \dots \right\}, \quad 1 \leq p < \infty, \\ F_{\infty} &= \left\{ \varphi \in C^{\infty}(0, \infty) : x^k \frac{d^k \varphi}{dx^k} \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow 0+ \text{ и при } x \rightarrow \infty \text{ для } k = 0, 1, 2, \dots \right\} \end{aligned}$$

и

$$F_{p,\mu} = \{ \varphi : x^{-\mu} \varphi(x) \in F_p \}, \quad 1 \leq p \leq \infty, \quad \mu \in \mathbb{C}.$$

В [21] приведено решение задачи $0 < \alpha \leq 1$ ($n = 1$):

$$(\mathcal{B}_{\gamma,0+}^{\alpha} f)(t) = -\lambda f(t), \quad \alpha > 0, \quad (13)$$

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = 0, \quad (14)$$

которое имеет вид

$$f(t) = \frac{2\gamma \Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} {}_2\Psi_2 \left[\begin{matrix} \left(\frac{\gamma}{2} + 1, \alpha\right), (1, 1) \\ (1, \alpha), (\gamma + 1, 2\alpha) \end{matrix} \middle| -\lambda t^{2\alpha} \right], \quad (15)$$

где ${}_p\Psi_q$ – функция Фокса – Райта, определенная рядом (см. [22, 41])

$$\begin{aligned} {}_p\Psi_q(z) &= {}_p\Psi_q \left[\begin{matrix} (a_l, \alpha_l)_{1,p} \\ (b_j, \beta_j)_{1,q} \end{matrix} \middle| z \right] = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\prod_{l=1}^p \Gamma(a_l + \alpha_l k)}{\prod_{j=1}^q \Gamma(b_j + \beta_j k)} \frac{z^k}{k!}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad a_l, b_j \in \mathbb{C}, \quad \alpha_l, \beta_j \in \mathbb{R}, \quad l = 1, \dots, p, \quad j = 1, \dots, q. \end{aligned} \quad (16)$$

Для случая гипер-бесселева оператора решение задачи, аналогичной (13)–(14), получено в [28, 29, 31].

При $\alpha = 1$ собственная функция (15) имеет вид:

$$f(t) = \frac{2^\gamma \Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} {}_2\Psi_2 \left[\begin{matrix} \left(\frac{\gamma}{2} + 1, 1\right), (1, 1) \\ (1, 1), (\gamma + 1, 2) \end{matrix} \middle| -\lambda t^2 \right] = \frac{2^\gamma \Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} {}_1\Psi_1 \left[\begin{matrix} \left(1 + \frac{\gamma}{2}, 1\right) \\ (\gamma + 1, 2) \end{matrix} \middle| -\lambda t^2 \right] = \\ = \frac{2^\gamma \Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \Gamma\left(1 + \frac{\gamma}{2} + m\right)}{\Gamma(\gamma + 1 + 2m)} \frac{t^{2m}}{m!}.$$

Используя формулу удвоения для гамма-функции вида [14]

$$\Gamma(2z) = \frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(z) \Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right),$$

получим

$$f(t) = 2^\gamma \Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \lambda^m \Gamma\left(1 + \frac{\gamma}{2} + m\right)}{2^{\gamma+2m} \Gamma\left(1 + \frac{\gamma}{2} + m\right) \Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2} + m\right)} \frac{t^{2m}}{m!} = \\ = \frac{2^{\frac{\gamma-1}{2}} \Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{(\sqrt{\lambda}t)^{\frac{\gamma-1}{2}}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2} + m\right)} \frac{1}{m!} \left(\frac{\sqrt{\lambda}t}{2}\right)^{2m+\frac{\gamma-1}{2}} = j_{\frac{\gamma-1}{2}}(\sqrt{\lambda}t),$$

что соответствует функции (6).

Осталось проверить случай, когда $\gamma = 0$ в (15). При $\gamma = 0$ оператор Бесселя переходит во вторую производную $\frac{d^2}{dt^2}$. Имеем

$$f(t) = {}_2\Psi_2 \left[\begin{matrix} (1, \alpha), (1, 1) \\ (1, \alpha), (1, 2\alpha) \end{matrix} \middle| -\lambda t^{2\alpha} \right] = {}_1\Psi_1 \left[\begin{matrix} (1, 1) \\ (1, 2\alpha) \end{matrix} \middle| -\lambda t^{2\alpha} \right] = E_{\alpha,1}(-\lambda t^{2\alpha}),$$

что совпадает с (10) при замене α на 2α , которая осуществляется, поскольку левосторонняя дробная производная Бесселя на полуоси переходит в дробную производную Герасимова – Капуто порядка 2α .

3. Операторы преобразования, связывающие собственные функции различных операторов. В этом разделе мы рассмотрим операторы преобразования, связывающие собственные функции (2), (3), (6), (10) и (15). Подробное современное изложение можно найти в работах [2, 11, 37, 38].

Утверждение 3.1. Если $u(\lambda, t)$ – функция, удовлетворяющая задаче

$$u_{tt} = -\lambda u, \quad u(\lambda, 0) = 1, \quad u_t(\lambda, 0) = 0,$$

то функция

$$v(\lambda, t) = \tilde{L}u(\lambda, t), \tag{17}$$

удовлетворяет задаче

$$v_t = -\lambda v, \quad v(\lambda, 0) = 1.$$

В (17) \tilde{L} – оператор преобразования, действующий по формуле

$$\tilde{L}u(\lambda, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty u(\lambda, s) e^{-\frac{s^2}{4t}} ds.$$

Доказательство. Известно, что $u(\lambda, t) = \cos(\sqrt{\lambda}t)$, а $v(\lambda, t) = e^{-\lambda t}$, легко видеть, что

$$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty \cos(\sqrt{\lambda}s) e^{-\frac{s^2}{4t}} ds = e^{-\lambda t}.$$

Это простое соотношение показывает, в частности, связь между диффузионными и волновыми процессами.

Справедливо и более общее утверждение. Пусть A – некоторый линейный оператор. Если функция $u(t, x)$ удовлетворяет абстрактной задаче Коши

$$u_{tt} = Au, \quad u(0, x) = f(x), \quad u_t(0, x) = 0,$$

то

$$v(t, x) = \tilde{L}u(t, x) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty u(s, x) e^{-\frac{s^2}{4t}} ds \tag{18}$$

удовлетворяет абстрактной задаче Коши

$$v_t = Av, \quad v(0, x) = f(x).$$

Результаты относительно такого оператора преобразования были получены в [10, 15, 16, 24, 34, 40]. В конспектах лекций Р. Херша [26] этот пример был приведен наряду с пятью другими примерами операторов преобразования.

Рассмотрим, как можно использовать (18) для получения решения задачи Коши для уравнения диффузии, если мы знаем решение задачи Коши для волнового уравнения. Для задачи

$$u_{tt} = u_{xx},$$

$$u(0, x) = f(x), \quad u_t(0, x) = 0$$

решением является

$$u = \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2},$$

тогда решение задачи

$$v_t = v_{xx}, \quad v(0, x) = f(x)$$

имеет вид

$$v(t, x) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(s+x) e^{-\frac{s^2}{4t}} ds. \quad (19)$$

Рассмотрим оператор Пуассона (вида [6])

$$\mathcal{P}_x^\gamma f(x) = \frac{2C(\gamma)}{x^{\gamma-1}} \int_0^x (x^2 - t^2)^{\frac{\gamma}{2}-1} f(t) dt, \quad C(\gamma) = \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)}. \quad (20)$$

Для $f(x) \in C^2$, такой что $f'(0) = 0$, оператор Пуассона действует как оператор преобразования по формуле

$$\mathcal{P}_x^\gamma D^2 f = B_\gamma \mathcal{P}_x^\gamma f, \quad D^2 = \frac{d^2}{dx^2}, \quad B_\gamma = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{\gamma}{x} \frac{d}{dx}.$$

Утверждение 3.2. Если $u(\lambda, t)$ – функция, удовлетворяющая задаче

$$u_{tt} = -\lambda u, \quad u(\lambda, 0) = 1, \quad u_t(\lambda, 0) = 0,$$

то

$$v(\lambda, t) = \mathcal{P}_t^\gamma u(\lambda, t), \quad (21)$$

удовлетворяет задаче

$$(B_\gamma)_t v = -v, \quad v(\lambda, 0) = 1, \quad v_t(\lambda, 0) = 0.$$

Доказательство. Нам известно, что $u(\lambda, t) = \cos(\sqrt{\lambda}t)$, а $v(\lambda, t) = j_{\frac{\gamma-1}{2}}(\sqrt{\lambda}t)$. Для функции Бесселя первого рода J_ν следующее интегральное представление с использованием интеграла Пуассона с $\nu > -\frac{1}{2}$ (см. формула (2), стр. 60 в [1])

$$J_\nu(x) = \frac{x^\nu}{\sqrt{\pi} 2^{\nu-1} \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} \int_0^1 (1-r^2)^{\nu-\frac{1}{2}} \cos(xr) dr.$$

Тогда имеем

$$\frac{2C(\gamma)}{t^{\gamma-1}} \int_0^t (t^2 - s^2)^{\frac{\gamma}{2}-1} \cos(\sqrt{\lambda}s) ds = j_{\frac{\gamma-1}{2}}(\sqrt{\lambda}t).$$

Это соотношение показывает связь между решением невозмущенного и возмущенного волнового уравнения.

Справедливо и более общее утверждение (см. [37], стр. 132, Теорема 34). Пусть A – некоторый линейный оператор, $\gamma > 0$. Дважды непрерывно дифференцируемое решение $u = u(x, t; \gamma)$ уравнения

$$Au = (B_\gamma)_t u, \quad u = u(x, t; \gamma), \quad x = (x_1, \dots, x_n), \quad t > 0 \quad (22)$$

связано с дважды непрерывно дифференцируемым решением уравнения

$$Aw = w_{tt}, \quad w = w(x, t), \quad x = (x_1, \dots, x_n), \quad t \in \mathbb{R} \quad (23)$$

формулой

$$u(x, t; \gamma) = \mathcal{P}_t^\gamma w(x, t), \quad (24)$$

где \mathcal{P}_t^γ – оператор Пуассона, действующий по переменной t .

Учитывая (19), получим, что решение задачи

$$u_t = u_{xx} + \frac{\gamma}{x} u_x,$$

$$u(x, 0; \gamma) = f(x), \quad 0 \leq x < \infty$$

имеет вид

$$u(x, t; \gamma) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \frac{2C(\gamma)}{x^{\gamma-1}} \int_0^x (x^2 - \xi^2)^{\frac{\gamma}{2}-1} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} f(s+\xi) e^{-\frac{s^2}{4t}} ds.$$

Теперь перейдем к дробной производной Герасимова – Капуто (8).

Утверждение 3.3. Если $u(\lambda, t)$ – функция, удовлетворяющая задаче

$$u_t = -\lambda u, \quad u(\lambda, 0) = 1,$$

то функция

$$v_\alpha(\lambda, t) = \mathfrak{L}^\alpha u(\lambda, t) \tag{25}$$

удовлетворяет задаче

$$\mathcal{D}_{0+}^\alpha v_\alpha = -\lambda v_\alpha, \quad v_\alpha(\lambda, 0) = 1, \quad 0 < \alpha < 1$$

или задаче

$$\mathcal{D}_{0+}^\alpha v_\alpha = -\lambda v_\alpha, \quad v_\alpha(\lambda, 0) = 1, \quad (v_\alpha)_t(\lambda, 0) = 0, \quad 1 < \alpha < 2.$$

В (25) \mathfrak{L}^α – оператор преобразования, действующий по формуле

$$\mathfrak{L}^\alpha u(\lambda, t) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi} \int_0^\infty \frac{s^{\alpha-1}}{1 + 2s^\alpha \cos(\alpha\pi) + s^{2\alpha}} u(\lambda^{\frac{1}{\alpha}}, ts) ds.$$

Доказательство. Известно, что $u(\lambda, t) = e^{-\lambda t}$, а $v_\alpha(\lambda, t) = E_{\alpha,1}(-\lambda t^\alpha)$. Для функции Миттаг-Леффлера справедливо представление (см. [25], формула (7.3)) вида

$$E_{\alpha,1}(-t^\alpha) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi} \int_0^\infty \frac{s^{\alpha-1}}{1 + 2s^\alpha \cos(\alpha\pi) + s^{2\alpha}} e^{-ts} ds, \quad \alpha > 0,$$

которое и доказывает утверждение.

Утверждение 3.4. Если $u(\lambda, t)$ – функция, удовлетворяющая задаче

$$u_{tt} = -\lambda u, \quad u(\lambda, 0) = 1, \quad u_t(\lambda, 0) = 0,$$

то функция

$$v_\alpha(\lambda, t) = \mathfrak{M}^\alpha u(\lambda, t) \tag{26}$$

удовлетворяет задаче

$$\mathcal{D}_{0+}^\alpha v_\alpha = -\lambda v_\alpha, \quad v_\alpha(\lambda, 0) = 1, \quad 0 < \alpha < 1$$

или задаче

$$\mathcal{D}_{0+}^\alpha v_\alpha = -\lambda v_\alpha, \quad v_\alpha(\lambda, 0) = 1, \quad (v_\alpha)_t(\lambda, 0) = 0, \quad 1 < \alpha < 2.$$

В (26) \mathfrak{M}^α – оператор преобразования, действующий по формуле

$$\mathfrak{M}^\alpha u(\lambda, t) = \frac{2}{\pi} \sin \frac{\alpha\pi}{2} \int_0^\infty \frac{s^{\alpha-1}}{1 + 2s^\alpha \cos \frac{\alpha\pi}{2} + s^{2\alpha}} u(\lambda^{\frac{2}{\alpha}}, ts) ds,$$

Доказательство. Известно, что $u(\lambda, t) = \cos(\sqrt{\lambda}t)$, а $v_\alpha(\lambda, t) = E_{\alpha,1}(-\lambda t^\alpha)$. Для функции Миттаг-Леффлера справедливо представление (см. [25], формула (7.2)) вида

$$E_{\alpha,1}(-t^\alpha) = \frac{2}{\pi} \sin \frac{\alpha\pi}{2} \int_0^\infty \frac{s^{\alpha-1}}{1 + 2s^\alpha \cos \frac{\alpha\pi}{2} + s^{2\alpha}} \cos(ts) ds, \quad \alpha > 0,$$

которое и доказывает утверждение.

Наконец, покажем связь между собственной функцией левосторонней дробной производной Бесселя на полуоси и собственной функцией дробной производной Герасимова – Капуто. Оператор преобразования, реализующий эту связь, конструируется из дробного интеграла Римана – Лиувилля

$$I_{0+}^\gamma f(x) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_0^x f(t)(x-t)^{\gamma-1} dt$$

и левого обратного оператора для оператора Пуассона (20) с $\gamma > 0$ и задается формулой [37]

$$(\mathcal{P}_x^\gamma)^{-1} H(x) = \frac{2\sqrt{\pi}x}{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)\Gamma\left(p-\frac{\gamma}{2}\right)} \left(\frac{d}{2xdx}\right)^p \int_0^x H(z)(x^2-z^2)^{p-\frac{\gamma}{2}-1} z^\gamma dz, \tag{27}$$

где $p = \left[\frac{\gamma}{2}\right] + 1$.

Утверждение 3.5. Если $u_\alpha(\lambda, t)$ – функция, удовлетворяющая задаче

$$\mathcal{D}_{0+}^\alpha u_\alpha = -\lambda u_\alpha, \quad u_\alpha(\lambda, 0) = 1, \quad 0 < \alpha < 1,$$

или задаче

$$\mathcal{D}_{0+}^\alpha u_\alpha = -\lambda u_\alpha, \quad u_\alpha(\lambda, 0) = 1, \quad (u_\alpha)_t(\lambda, 0) = 0, \quad 1 < \alpha < 2,$$

то функция $v_\alpha^\gamma(\lambda, t) = \mathfrak{W}^\gamma u_\alpha(\lambda, t)$, где \mathfrak{W}^γ — оператор преобразования, действующий по формуле

$$\mathfrak{W}^\gamma u_\alpha(\lambda, t) = \frac{2^\gamma \Gamma(\gamma) \Gamma^2\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\pi t \Gamma(2\alpha)} (\mathcal{P}_t^\gamma)^{-1} t^{1-\gamma} I_{0+}^\gamma u_\alpha(\lambda, t),$$

удовлетворяет задаче

$$(\mathcal{B}_{\gamma,0+}^\alpha f)(t) = -\lambda f(t), \quad f(0) = 1, \quad f'(0) = 0, \quad 0 < \alpha \leq 1.$$

Доказательство. Найдем сначала $\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(2\alpha)} x^{1-\gamma} (I_{0+}^\gamma)_x u_\alpha(\lambda, t)$. Известно, что $u_\alpha(\lambda, t) = E_{\alpha,1}(-\lambda t^\alpha)$, тогда как

$$v_\alpha^\gamma(\lambda, t) = \frac{2^\gamma \Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} {}_2\Psi_2 \left[\begin{matrix} \left(\frac{\gamma}{2} + 1, \alpha\right), (1, 1) \\ (1, \alpha), (\gamma + 1, 2\alpha) \end{matrix} \middle| -\lambda t^{2\alpha} \right].$$

Используя формулу (4.4.5) из [23] вида

$$\int_0^\tau (\tau - z)^{\mu-1} E_{\alpha,\beta}(-\lambda z^\alpha) z^{\beta-1} dz = \Gamma(\alpha) \tau^{\mu+\beta-1} E_{\alpha,\mu+\beta}(-\lambda \tau^\alpha), \quad \mu > 0, \quad \beta > 0,$$

получим

$$I_{0+}^\gamma E_{2\alpha,1}(-\lambda t^{2\alpha}) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_0^t (t-z)^{\gamma-1} E_{2\alpha,1}(-\lambda z^{2\alpha}) dz = \frac{\Gamma(2\alpha)}{\Gamma(\gamma)} t^\gamma E_{2\alpha,\gamma+1}(-\lambda t^{2\alpha})$$

и

$$\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(2\alpha)} t^{1-\gamma} I_{0+}^\gamma E_{2\alpha,1}(-\lambda t^{2\alpha}) = t E_{2\alpha,\gamma+1}(-\lambda t^{2\alpha}).$$

Теперь применим обратное интегральное преобразование Пуассона к $x E_{2\alpha,\gamma+1}(-\lambda x^{2\alpha})$. Применяя разложение (9), будем иметь:

$$\begin{aligned} & \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(2\alpha)} (\mathcal{P}_t^\gamma)^{-1} t^{1-\gamma} I_{0+}^\gamma E_{2\alpha,1}(-\lambda t^{2\alpha}) = (\mathcal{P}_t^\gamma)^{-1} t E_{2\alpha,\gamma+1}(-\lambda t^{2\alpha}) = \\ & = \frac{2\sqrt{\pi}t}{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right) \Gamma\left(p - \frac{\gamma}{2}\right)} \left(\frac{d}{2tdt}\right)^p \int_0^t z^{\gamma+1} E_{2\alpha,\gamma+1}(-\lambda z^{2\alpha}) (t^2 - z^2)^{p-\frac{\gamma}{2}-1} dz = \\ & = \frac{2\sqrt{\pi}t}{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right) \Gamma\left(p - \frac{\gamma}{2}\right)} \left(\frac{d}{2tdt}\right)^p \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \lambda^k}{\Gamma(2\alpha k + \gamma + 1)} \int_0^t z^{2k\alpha + \gamma + 1} (t^2 - z^2)^{p-\frac{\gamma}{2}-1} dz, \end{aligned}$$

где $p = \left[\frac{\gamma}{2}\right] + 1$. Проинтегрировав, получим

$$\begin{aligned} & \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(2\alpha)} (\mathcal{P}_t^\gamma)^{-1} t^{1-\gamma} I_{0+}^\gamma E_{2\alpha,1}(-\lambda t^{2\alpha}) = \\ & = \frac{2\sqrt{\pi}t}{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right) \Gamma\left(p - \frac{\gamma}{2}\right)} \left(\frac{d}{2tdt}\right)^p \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \lambda^k}{\Gamma(2\alpha k + \gamma + 1)} \frac{\Gamma\left(p - \frac{\gamma}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\gamma}{2} + 1 + k\alpha\right)}{2\Gamma(p + 1 + k\alpha)} t^{2\alpha k + 2p} = \\ & = \frac{\sqrt{\pi}t}{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)} \left(\frac{d}{2tdt}\right)^p \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1+k)}{\Gamma(2\alpha k + \gamma + 1)} \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma}{2} + 1 + k\alpha\right)}{\Gamma(p + 1 + k\alpha)} \frac{(-\lambda)^k}{k!} t^{2\alpha k + 2p}. \end{aligned}$$

Применяя формулу

$$\left(\frac{d}{2xdx}\right)^p x^{2\mu+2p} = \frac{\Gamma(\mu+p+1)}{\Gamma(\mu+1)} x^{2\mu},$$

найдем

$$\begin{aligned} & \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(2\alpha)} (\mathcal{P}_t^\gamma)^{-1} t^{1-\gamma} I_{0+}^\gamma E_{2\alpha,1}(-\lambda t^{2\alpha}) = \\ & = \frac{\sqrt{\pi}t}{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1+k)}{\Gamma(2\alpha k + \gamma + 1)} \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma}{2} + 1 + k\alpha\right)}{\Gamma(1+k\alpha)} \frac{(-\lambda)^k}{k!} t^{2\alpha k} = \\ & = \frac{\sqrt{\pi}t}{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)} {}_2\Psi_2 \left[\begin{matrix} \left(\frac{\gamma}{2} + 1, \alpha\right), (1, 1) \\ (1, \alpha), (\gamma + 1, 2\alpha) \end{matrix} \middle| -\lambda t^{2\alpha} \right]. \end{aligned}$$

Окончательно будем иметь

$$v_\alpha^\gamma(\lambda, t) = \frac{2^\gamma \Gamma(\gamma) \Gamma^2\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\pi t \Gamma(2\alpha)} (\mathcal{P}_t^\gamma)^{-1} t^{1-\gamma} I_{0+}^\gamma E_{2\alpha,1}(-\lambda t^{2\alpha}) =$$

$$= \frac{2^{\gamma} \Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} {}_2\Psi_2 \left[\begin{matrix} \left(\frac{\gamma}{2} + 1, \alpha\right), (1, 1) \\ (1, \alpha), (\gamma + 1, 2\alpha) \end{matrix} \middle| -\lambda t^{2\alpha} \right].$$

4. Заключение. В этой работе представлены собственные функции, связанные с операторами дифференцирования первого и второго порядков, оператором Бесселя и их дробными степенями. Приведены формулы перехода между этими функциями. Рассмотренные операторы преобразования могут быть использованы для решения прямых и обратных задач Штурма – Лиувилля на конечных и бесконечных интервалах, разработанных В. В. Кравченко в [1]. Метод из [1] позволяет получать теоретические и числовые расчеты для различных величин, входящих в прямые и обратные задачи Штурма – Лиувилля.

Список литературы

1. Ватсон Г. Н. 1949. Теория бесселевых функций. Ч. 1. М.: Иниздат, 798.
2. Катрахов В. В., Ситник С. М. 2018. Метод операторов преобразования и краевые задачи для сингулярных эллиптических уравнений. Современная математика. Фундаментальные направления, 64(2): 211–426.
3. Киприянов И. А. 1997. Сингулярные эллиптические краевые задачи. М., Наука-Физматлит, 204.
4. Кравченко В. В., Шишкина Э. Л., Торба С. М. 2018. О представлении в виде ряда интегральных ядер операторов преобразования для возмущенных уравнений Бесселя. Матем. заметки, 104(4): 552–570.
5. Левитан Б. М. 1951. Разложения по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье. М., УМН. 6:2 (42): 102–143.
6. Левитан Б. М. 1984. Обратные задачи Штурма – Лиувилля. М. Наука, 240.
7. Марченко В. А. 1972. Спектральная теория операторов Штурма – Лиувилля. Киев, Наукова Думка, 220.
8. Марченко В. А. 1977. Операторы Штурма – Лиувилля и их приложения. Киев, Наукова Думка, 331.
9. Псху А. В. 2005. Уравнения в частных производных дробного порядка, М., Наука, 199.
10. Резницкая К. Г. 1974. Связь между решениями задачи Коши для уравнений различных типов и обратные задачи. Математические проблемы геофизики. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 5(1): 55–62.
11. Ситник С. М., Шишкина Э. Л. 2019. Метод операторов преобразования для дифференциальных уравнений с операторами Бесселя. Физматлит, Москва, 224.
12. Ситник С. М., Шишкина Э. Л. 2021. О двух классах операторов обобщенного дробного интегро-дифференцирования (с коротким историческим обзором). Итоги науки. 198: 109–122.
13. Шитикова М. В. 2022. Обзор вязкоупругих моделей с операторами дробного порядка, используемых в динамических задачах механики твердого тела. Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 1: 3–40.
14. Abramowitz M., Stegun I. A. 1972. Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables. Dover Publ., Inc., New York, 470.
15. Balakrishnan A. V. 1958. Abstract Cauchy problems of the elliptic type, Bull. Amer. Math. Soc. 64: 290–291
16. Bragg L. R., Dettman J. W. 1968. Related problems in partial differential equations. Bull. Amer. Soc. 74: 375–378.
17. Carroll R. W. 1979. Transmutation and operator differential equations. Mathematics Studies, v. 37, North Holland, Amsterdam–New York–Oxford, 1–245.
18. Carroll R. W. 1982. Transmutation, scattering theory and special functions. Mathematics Studies, v. 69, North Holland, Amsterdam–New York–Oxford, 456.
19. Delsarte J. 1938. Sur certaines transformations fonctionnelles relatives aux équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre. C. R. Acad. Sc., 206: 178–182.
20. Delsarte J. 1938. Sur une extension de la formule de Taylor. J Math. Pures et Appl., 17: 213–230.
21. Dzarakhohov A., Luchko Y., Shishkina E. 2021. Special Functions as Solutions to the Euler–Poisson–Darboux Equation with a Fractional Power of the Bessel Operator Mathematics. 9(13): 1–18.
22. Fox C. 1961. The G and H -functions as symmetrical Fourier kernels. Trans. Amer. Math. Soc. 98: 395–429.
23. Gorenflo R., Kilbas A. A., Mainardi F. and Rogosin S. V. 2014. Mittag-Leffler Functions, Related Topics and Applications. Springer, New York, 443.
24. Griego R., Hersh R. 1971. Theory of random evolutions with applications to partial differential equations. Trans. Amer. Math. Soc., 156: 405–418.
25. Haubold H. J., Mathai A. M., Saxena R. K. 2011. Mittag-Leffler Functions and Their Applications. Journal of Applied Mathematics, Article ID 298628: 1–51.
26. Hersh R., 1975. The method of transmutations, in: J.A. Goldstein (Ed.), Partial differential equations and related topics (Program, Tulane University, New Orleans, LA, 1974), Lecture Notes in Mathematics, vol. 446, Springer, Berlin, 264–282.
27. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. 2006. Theory and applications of fractional differential equations. Amsterdam: Elsevier, 540.

28. Kiryakova V. 1994. Generalized Fractional Calculus and Applications. Pitman Res. Notes Math. 301. Longman Scientific & Technical, Harlow, Co-publ. John Wiley, New York, 360.
29. Kiryakova V. 2005. Obrechhoff Integral Transform and Hyper-Bessel Operators via G-function and Fractional Calculus Approach. Global Journal of Pure and Applied Mathematics Proceedings of the 13th Symposium of the Tunisian Mathematical Society, 1(3): 321–341.
30. Kravchenko V. V. 2020. Direct and Inverse Sturm-Liouville Problems. A Method of Solution. In series: Frontiers in Mathematics. Springer Nature Switzerland AG, Birkhäuser, Cham., 154.
31. Luchko Y. F., Kiryakova V. S. 2000. Generalized Hankel Transforms for Hyper-Bessel Differential Operators. Comptes Rendus de l'Academie Bulgare des Sciences, 53: 8–17.
32. McBride, A. C., 1982. Fractional powers of a class of ordinary differential operators. Proc. London Math. Soc. 3 (45): 519–546.
33. Pskhu A. V. 2019. Fundamental solutions and Cauchy problems for an odd-order partial differential equation with fractional derivative. Electron. J. Differential Equations, 21: 1–13.
34. Romanov N. P. 1947. On one-parameter groups of linear transformation, I, Ann. of Math. 2(48): 216–233.
35. Shishkina E. L., Sitnik S. M. 2017. On fractional powers of Bessel operators. Journal of Inequalities and Special Functions, Special issue to honor Prof. Ivan Dimovski's contributions. 8(1): 49–67.
36. Shishkina E. L., Sitnik S. M. 2019. A fractional equation with left-sided fractional Bessel derivatives of Gerasimov–Caputo type. *Mathematics*. 7(12): 1–21.
37. Shishkina E. L., Sitnik S. M. 2020 Transmutations, singular and fractional differential equations with applications to mathematical physics. Elsevier, Amsterdam, 564.
38. Sitnik S. M. 2010. Transmutations and applications: a survey, <http://arxiv.org/abs/1012.3741>, 141.
39. Sprinkhuizen-Kuyper I. G. 1979. A fractional integral operator corresponding to negative powers of a certain second-order differential operator. J. Math. Analysis and Applications 72: 674–702.
40. Ungar A. 1971. On an integral transform related to the wave and to the heat equations, A. M. s. Notices 18: 1100.
41. Wright E. M. 1935. The asymptotic expansion of the generalized hypergeometric function. London Math. Soc. 10: 286–293.

References

1. Watson G. N. 1949. Theory of Bessel functions. Part 1. M.: Inizdat, 798.
2. Katrakhov V. V., Sitnik S. M. 2018. Method of transformation operators and boundary value problems for singular elliptic equations. Contemporary mathematics. Fundamental directions, 64(2): 211–426.
3. Kipriyanov I. A. 1997. Singular Elliptic Boundary Value Problems. M.: Nauka-Fizmtlit, 1997.
4. Kravchenko V. V., Shishkina E. L., Torba S. M. 2018. On a Series Representation for Integral Kernels of Transmutation Operators for Perturbed Bessel Equations. Math. Notes, 104(4): 530–544.
5. Levitan B. M. 1984. Inverse Sturm–Liouville problems. M. Science, 240.
6. Levitan B. M. 1951. Expansion in Fourier series and integrals with Bessel functions. Uspekhi Mat. Nauk, 6:2(42): 102–143.
7. Marchenko V. A. 1972. Spectral theory of Sturm–Liouville operators. Kiev, Naukova Dumka, 220.
8. Marchenko V. A. 1977. Sturm–Liouville operators and their applications. Kiev, Naukova Dumka, 331.
9. Pskhu A. V. 2005. Partial differential equations of fractional order, Nauka, Moscow, 199.
10. Reznitskaya K. G. 1974. Connection between solutions of the Cauchy problem for equations of various types and inverse problems. Mathematical problems of geophysics. Novosibirsk: Computing Center SO AN USSR, 5(1): 55–62.
11. Sitnik S. M., Shishkina E. L. 2019. Transmutation operators method for differential equations with Bessel operator. Moscow. Fizmathlit, 224.
12. Sitnik S. M., Shishkina E. L. 2021. On Two Classes of Generalized Fractional Operators (with Short Historical Survey of Fractional Calculus). Itogi nauki. 198: 109–122.
13. Shitikova M. V. 2022. Fractional operator viscoelastic models in dynamic problems of mechanics of solids: a review. Mechanics of solids. 57(1): 1–33.
14. Abramowitz M., Stegun I. A. 1972. Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables. Dover Publ., Inc., New York, 470.
15. Balakrishnan A. V. 1958. Abstract Cauchy problems of the elliptic type, Bull. Amer. Math. Soc. 64: 290–291
16. Bragg L. R., Dettman J. W. 1968. Related problems in partial differential equations. Bull. Amer. Soc. 74: 375–378.
17. Carroll R. W. 1979. Transmutation and operator differential equations. Mathematics Studies, v. 37, North Holland, Amsterdam–New York–Oxford, 1–245.
18. Carroll R. W. 1982. Transmutation, scattering theory and special functions. Mathematics Studies, v. 69, North Holland, Amsterdam–New York - Oxford, 456.

19. Delsarte J. 1938. Sur certaines transformations fonctionnelles relatives aux équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre. C. R. Acad. Sc., 206: 178–182.
20. Delsarte J. 1938. Sur une extension de la formule de Taylor. J Math. Pures et Appl., 17: 213–230.
21. Dzarakhohov A., Luchko Y., Shishkina E. 2021. Special Functions as Solutions to the Euler–Poisson–Darboux Equation with a Fractional Power of the Bessel Operator Mathematics. 9(13): 1–18.
22. Fox C. 1961. The G and H–functions as symmetrical Fourier kernels. Trans. Amer. Math. Soc. 98: 395–429.
23. Gorenflo R., Kilbas A. A., Mainardi F., Rogosin S. V. 2014. Mittag-Leffler Functions, Related Topics and Applications. Springer, New York, 443.
24. Griego R., Hersh R. 1971. Theory of random evolutions with applications to partial differential equations. Trans. Amer. Math. Soc., 156: 405–418.
25. Haubold H. J., Mathai A. M., Saxena R. K. 2011. Mittag-Leffler Functions and Their Applications. Journal of Applied Mathematics, Article ID 298628: 1–51.
26. Hersh R. 1975. The method of transmutations, in: J.A. Goldstein (Ed.), Partial differential equations and related topics (Program, Tulane University, New Orleans, LA, 1974), Lecture Notes in Mathematics, Vol. 446, Springer, Berlin, 264–282.
27. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. 2006. Theory and applications of fractional differential equations. Amsterdam: Elsevier, 540.
28. Kiryakova V. 1994. Generalized Fractional Calculus and Applications. Pitman Res. Notes Math. 301. Longman Scientific & Technical, Harlow, Co-publ. John Wiley, New York, 360.
29. Kiryakova V. 2005. Obrechhoff Integral Transform and Hyper-Bessel Operators via G-function and Fractional Calculus Approach. Global Journal of Pure and Applied Mathematics Proceedings of the 13th Symposium of the Tunisian Mathematical Society, 1(3): 321–341.
30. Kravchenko V. V. 2020. Direct and Inverse Sturm-Liouville Problems. A Method of Solution. In series: Frontiers in Mathematics. Springer Nature Switzerland AG, Birkhäuser, Cham., 154.
31. Luchko Y. F., Kiryakova V. S. 2000. Generalized Hankel Transforms for Hyper-Bessel Differential Operators. Comptes Rendus de l'Academie Bulgare des Sciences, 53: 8–17.
32. McBride A. C., 1982. Fractional powers of a class of ordinary differential operators. Proc. London Math. Soc. 3 (45), 519–546.
33. Pskhu A.V. 2019. Fundamental solutions and Cauchy problems for an odd-order partial differential equation with fractional derivative. Electron. J. Differential Equations, 21: 1–13.
34. Romanov N.P. 1947. On one-parameter groups of linear transformation, I, Ann. of Math. 2(48): 216–233.
35. Shishkina E. L., Sitnik S. M. 2017. On fractional powers of Bessel operators. Journal of Inequalities and Special Functions, Special issue to honor Prof. Ivan Dimovski's contributions. 8(1): 49–67.
36. Shishkina E. L., Sitnik S. M. 2019. A fractional equation with left-sided fractional Bessel derivatives of Gerasimov–Caputo type. Mathematics. 7(12): 1–21.
37. Shishkina E. L., Sitnik S. M. 2020. Transmutations, singular and fractional differential equations with applications to mathematical physics. Elsevier, Amsterdam, 564.
38. Sitnik S. M. 2010. Transmutations and applications: a survey, <http://arxiv.org/abs/1012.3741>, 141.
39. Sprinkhuizen-Kuyper I. G. 1979. A fractional integral operator corresponding to negative powers of a certain second-order differential operator. J. Math. Analysis and Applications 72: 674–702.
40. Ungar A. 1971. On an integral transform related to the wave and to the heat equations, A. M. s. Notices 18: 1100.
41. Wright E. M. 1935. The asymptotic expansion of the generalized hypergeometric function. London Math. Soc. 10: 286–293.

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 22.03.2022

Поступила после рецензирования 05.05.2022

Принята к публикации 10.05.2022

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Дзарахохов Азамат Валерианович – старший преподаватель кафедры математики и физики Федерального государственного образовательного учреждения высшего образования «Горский государственный аграрный университет»,

ул. Кирова, 37, Владикавказ, 362040, Россия

E-mail: azambat79@mail.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Azamat Dzarakhohov – Senior Lecturer, Gorsky State Agrarian University, Vladikavkaz, Russia

ФИЗИКА. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 735.29
обзорная статья

DOI 10.52575/2687-0959-2022-54-2-124-130

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА АНАЛИЗА ИЕРАРХИЙ ПРИ ВЫБОРЕ СПОСОБА ИССЛЕДОВАНИЯ ФЕРРИТОВЫХ МАТЕРИАЛОВ

Е. В. Голованова¹ , Т. Г. Кузьмичева² 
Н. П. Путивцева² , Т. В. Зайцева² 

(Статья представлена членом редакционной коллегии Ю. П. Вирченко)

¹ФГБОУ ВО Белгородский ГАУ

п. Майский, Белгородская область, 308503, Россия

²ФГАОУ ВО «Белгородский государственный национальный исследовательский университет»,
Белгород, 308015, Россия

E-mail: golovanova@bsu.edu.ru, kuzmicheva@bsu.edu.ru, putivzeva@bsu.edu.ru, zaitseva@bsu.edu.ru

Аннотация. Рассматривается задача выбора наиболее подходящего метода исследования для проведения анализа параметров ферритовых материалов. Приводится обзор основных характеристик ферритовых материалов, которые выбираются в качестве критериев для сравнения и выбора наиболее подходящего метода их исследования. На основе анализа библиографических источников и с учетом характеристик получаемых материалов был проведен предварительный отбор методов, которые могут быть использованы для исследования ферритовых материалов. В качестве инструмента был выбран метод анализа иерархий. Метод анализа иерархий позволяет определить наиболее подходящий вариант решения с наибольшим собственным значением, определяющимся на основе попарного сравнения исследуемых характеристик на основе иерархического представления проблемы, заполнения матриц парных сравнений критериев и альтернатив, расчета векторов локальных приоритетов критериев и альтернатив и вычисления вектора глобальных приоритетов с использованием линейной свертки. Кратко приводится описание метода анализа иерархий. Приводится пример решения задачи выбора метода исследования ферритовых материалов с использованием СППР «Решение».

Ключевые слова: метод анализа иерархий, ферритовые материалы, методы исследования параметров веществ

Для цитирования: Голованова Е. В., Кузьмичева Т. Г., Путивцева Н. П., Зайцева Т. В. 2022. Использование метода анализа иерархий при выборе способа исследования ферритовых материалов. Прикладная математика & Физика. 54(2): 124–130. DOI 10.52575/2687-0959-2022-54-2-124-130

USING THE ANALYTICAL HIERARCHICAL PROCESS WHEN CHOOSING A METHOD FOR THE STUDY OF FERRITE MATERIALS

E. V. Golovanova¹ , T. G. Kuzmicheva² , N. P. Putivtseva² , T. V. Zaitseva² 

(Article submitted by a member of the editorial board Yu. P. Virchenko)

¹Belgorod State University, Vavilova str., 1, Maysky village, Belgorod region, 308503, Russia;

²Belgorod National Research University, Belgorod, 308015, Russia

E-mail: golovanovabsu.edu.ru, kuzmichevabsu.edu.ru, putivzevabsu.edu.ru, zaitsevabsu.edu.ru

Received May, 04, 2022

Abstract. The problem of selecting the most appropriate research method for analyzing the parameters of ferrite materials is considered. An overview of the main characteristics of ferrite materials that are selected as criteria for comparison and selection of the most appropriate method of their research is given. Based on the analysis of bibliographic sources and taking into account the characteristics of the obtained materials, a preliminary selection of methods that can be used for the study of ferrite materials was carried out. The hierarchy analysis method was chosen as a tool. The hierarchy analysis method allows you to determine the most appropriate solution with the highest eigenvalue, determined on the basis of pairwise comparison of the studied characteristics based on the hierarchical representation of the problem, filling in matrices of paired comparisons of criteria and alternatives, calculating vectors of local priorities of criteria and alternatives, and calculating the vector of global priorities using linear convolution. A brief description of the hierarchy analysis method is provided. An example of solving the problem of choosing a method for studying ferrite materials using the "Solution" method is given.

Keywords: method of analysis of hierarchies, ferrite materials, methods of research of parameters of substances

For citation: Elena Golovanova, Tatiana Kuzmicheva, Natalia Putivtseva, Tatiana Zaitseva. 2022. Using the analytical hierarchical process when choosing a method for the study of ferrite materials. Applied Mathematics & Physics. 54(2): 124–130. (in Russian) DOI 10.52575/2687-0959-2022-54-2-124-130

1. Введение. Различные методы поддержки принятия решений на сегодняшний день используются в разных предметных областях [1],[2]. В работе рассматривается применение метода анализа иерархий для определения подходящей технологии получения ферритовых материалов. Метод анализа иерархий позволяет определить наиболее подходящий вариант решения с наибольшим собственным значением, определяющимся на основе попарного сравнения исследуемых характеристик. В качестве исходных параметров решаемой задачи рассматриваются наиболее значимые параметры для определения технологии ферритизации, а также оценка качества исследования данных параметров при использовании различных методов исследования.

2. Определение исходных параметров решаемой задачи. Выбор технологии получения ферритовых материалов зависит от различных параметров. Разнообразие и уникальность свойств нано-частиц ферритовых материалов зависит от их состава, размера частиц, технологии получения, магнитных характеристик, времени и температуры ферритизации. Так, используя разные технологии: криохимическая, соосаждение из раствора, соосаждение из расплава, кристаллизация из стекла, вододисперсионная технология, получают ферритовые порошки с разными выходными характеристиками. Отсюда вытекает важность минимизации погрешности при определении физических параметров исходных материалов при производстве ферритов [9]–[11].

При исследовании физических свойств ферритовых материалов используются различные методы исследования. К методам, охватывающим наиболее обширный спектр характеристик и имеющих наименьшие погрешности, можно отнести следующие: метод электромагнитной индукции, термогравиметрический анализ, рентгенофазовый анализ, индукционный метод Фонера, мессбауэровский метод. Расширенный обзор методов приводится в работах известных исследователей [4]–[13].

3. Описание работы метода анализа иерархий. Метод анализа иерархий (МАИ) [14]–[15] – математический инструмент, позволяющий решать сложные многокритериальные проблемы принятия решений. При оценке вариантов решений на основе МАИ используется как объективная, так и субъективная исходная информация.

Структура модели принятия решения в методе анализа иерархий представляет собой схему, которая включает:

- 1) набор реальных или потенциально возможных альтернативных решений;
- 2) главный критерий рейтингования решений;
- 3) набор групп однотипных факторов, влияющих на рейтинг;
- 4) множество направленных связей, указывающих на влияние решений, критерия и факторов друг на друга.

Структура модели отражает результат анализа ситуации принятия решения. Первая группа понятий связана с описанием возможных структур моделей принятия решения. Для вычисления приоритетов альтернативных решений к структуре необходимо добавить информацию о силе влияний решений, критерия и факторов друг на друга. Вторая группа понятий связана с описанием данных для моделей принятия решения. После того как сформирована структура и собраны все данные, в модели принятия решений могут быть рассчитаны рейтинги приоритетов решений и факторов. Рассчитанные приоритеты используются в процессе принятия решения о наиболее подходящей альтернативе. Третья группа понятий связана с описанием результатов, получаемых в моделях принятия решения. Четвертая группа понятий связана с пояснением полученных результатов.

Основным инструментом для обработки данных, большинство из которых являются качественными, является процедура парных сравнений.

Первым шагом при решении задачи методом МАИ является формулировка цели и совокупности одновременно реализуемых альтернатив, которые обеспечивают достижение этой цели. Затем указанная цель декомпозируется на ряд подцелей или критериев (условий), выполнение которых обеспечивает достижение поставленной цели. Этот процесс называется построением дерева иерархий проблемы. Выбранные критерии попарно сравниваются между собой по девятибалльной шкале относительной важности, разработанной автором метода.

Для каждого элемента строится квадратная матрица, размерность которой равна числу элементов n более низкого уровня иерархии ($1, 2, \dots, n$), связанных с соответствующим элементом верхнего уровня. Элементы a_{ij} определены по следующим правилам.

Правило 1. Если $a_{ij} = \alpha$, то $a_{ji} = 1/\alpha$, $\alpha \neq 0$.

Правило 2. Если суждения таковы, что i имеет одинаковую с j относительную важность, то $a_{ij} = 1$, $a_{ji} = 1$; в частности, $a_{ii} = 1$ для всех i .

В дальнейшем с учетом степени важности каждого критерия определяется предпочтительность каждой альтернативы для достижения поставленной цели.

Процедура МАИ располагает встроенным критерием, позволяющим оценить качество работы эксперта – индексом согласованности (ИС), который дает информацию о степени нарушения экспертом согласованности при формулировке экспертных суждений. Отсутствие согласованности может быть серьезным ограничивающим фактором для исследования некоторых проблем.

ИС является мерой оценки степени отклонения матрицы парных сравнений, заполненной экспертом, от идеально согласованной. ИС в каждой матрице и для всей иерархии можно приближенно оценить, используя формулу:

$$\text{ИС} = \frac{\lambda_{\max} - n}{n - 1},$$

где λ – собственное значение, n – число сравниваемых факторов.

Случайные согласованности (СС) для матриц разного порядка приведены в таблице 1.

Таблица 1. Значения случайной согласованности для матриц разного порядка
Table 1. Values of random consistency of matrices of different order

Порядок матрицы	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
СС	0	0	0,58	0,90	1,12	1,24	1,32	1,41	1,45	1,49

Если разделить ИС на СС, рассчитанную для матрицы того же порядка, то получим отношение согласованности (ОС):

$$ОС = \frac{ИС}{СС}.$$

Качество суждений эксперта, под которым в методе подразумевается согласованность его суждений, оценивается по величине ОС. Приемлемым считается значение оценки согласованности, не превышающее 10%. В случаях исследования сложной и зависящей от большого количества факторов системы можно установить верхнюю границу в 20%. Если ОС выходит за эти пределы, то экспертам рекомендуется пересмотреть свои суждения о превосходстве одних объектов над другими.

4. Применение метода для решения задачи. При применении метода анализа иерархий к решению поставленной в данной работе задачи в качестве цели выступает выбор наиболее подходящего метода исследования ферритовых материалов.

На втором уровне представлены характеристики ферритовых материалов, качество исследования которых является основным критерием для определения наиболее подходящего метода их исследования. На основе анализа литературных источников [11 – 15] были выделены следующие критерии оценки альтернативных методов исследования: возможность исследования температуры ферритизации, возможность исследования времени ферритизации, возможность исследования однофазности материала, возможность исследования намагниченности насыщения, возможность исследования коэрцитивной силы, возможность исследования размера частиц, возможность исследования состояния порошка.

Каждому из представленных типов исследования характеристик ферритов на третьем уровне иерархии сопоставлены пять альтернативных методов исследования: метод электромагнитной индукции; термогравиметрический анализ; рентгенофазовый анализ; индукционный метод Фонера; мессбауэровский метод исследования. Из этих перечисленных методов выбирается наиболее подходящий.

Вначале произведем парное сравнение критериев для того чтобы определить, какие из них наиболее важны при выборе метода исследования ферритовых материалов (Таблица 2).

Таблица 2. Матрица приоритетов критериев
Table 2. The matrix of priority criteria

	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	Приоритеты
1. Учет температуры ферритизации	1	1/2	1	1/3	2	1	1/2	0,092
2. Исследование однофазности	2	1	2	1/2	5	2	1	0,183
3. Исследование намагниченности насыщения	1	1/2	1	1/3	2	1	1/2	0,092
4. Исследование коэрцитивной силы	3	2	3	1	9	3	2	0,318
5. Исследование времени ферритизации	1/2	1/5	1/2	1/9	1	1/2	1/5	0,041
6. Исследование размера частиц	1	1/2	1	1/3	2	1	1/2	0,092
7. Исследование состояния порошка	2	1	2	1/2	5	2	1	0,183

Важность критериев: исследование температуры ферритизации (9%), исследование времени ферритизации (4%), исследование однофазности материала (18%), исследование намагниченности насыщения (9%), исследование коэрцитивной силы (31%), исследование размера частиц (9%), исследование состояние порошка (18%). ИС = 0,005; ОС = 0,004.

Таким образом, при выборе метода исследования наиболее важны наличие возможности исследования коэрцитивной силы, возможности исследования однофазности материала и состояния порошка.

Далее в таблицах 3–9 приводятся попарные сравнения пяти сравниваемых методов между собой по каждому критерию в отдельности.

Таблица 3. Матрица попарных сравнений альтернатив по критерию
«Учет температуры ферритизации»

Table 3. The matrix of paired comparisons of alternatives according to the criterium of "Ferritization temperature"

	1.	2.	3.	4.	5.	Приоритеты
1. Метод электромагнитной индукции	1	1/4	1/2	4	1/2	0,114
2. Термогравиметрический анализ	4	1	4	5	6	0,516
3. Рентгенофазный анализ	2	1/4	1	3	2	0,187
4. Индукционный метод Фонера	3	2	3	1	9	0,318
5. Мессбауэровский метод исследования	2	1/6	1/2	3	1	0,131

Оценка методов по учету температуры ферритизации: метод электромагнитной индукции (11%); термогравиметрический анализ (51%); рентгенофазовый анализ (18%); индукционный метод Фонера (5%); мессбауэровский метод исследования (13%). Таким образом, наилучшим методом для учета температуры является термогравиметрический анализ, на втором месте рентгенофазовый анализ.

Таблица 4. Матрица попарных сравнений альтернатив по критерию «Исследование однофазности»

Table 4. The matrix of paired comparisons of alternatives according to the criterium of "Investigation of the single-phase"

	1.	2.	3.	4.	5.	Приоритеты
1. Метод электромагнитной индукции	1	5	4	1/2	1	0,231
2. Термогравиметрический анализ	1/5	1	1/2	1/9	1/5	0,043
3. Рентгенофазный анализ	1/4	2	1	1/6	1/4	0,067
4. Индукционный метод Фонера	2	9	6	1	2	0,427
5. Мессбауэровский метод исследования	1	5	4	1/2	1	0,231

Оценка методов по исследованию однофазности: метод электромагнитной индукции (23%); термогравиметрический анализ (4%); рентгенофазовый анализ (6%); индукционный метод Фонера (42%); мессбауэровский метод исследования (23%). То есть лидерами в исследовании однофазности являются индукционный метод Фонера и мессбауэровский метод исследования.

Таблица 5. Матрица попарных сравнений альтернатив по критерию «Исследование намагниченности насыщения»

Table 5. The matrix of paired comparisons of alternatives according to the criterium of "Investigation of saturation magnetization"

	1.	2.	3.	4.	5.	Приоритеты
1. Метод электромагнитной индукции	1	1/2	1/4	1/2	1/3	0,077
2. Термогравиметрический анализ	2	1	1/3	1	1/4	0,117
3. Рентгенофазный анализ	4	3	1	2	1/2	0,276
4. Индукционный метод Фонера	2	1	1/2	1	1/3	0,135
5. Мессбауэровский метод исследования	3	4	2	3	1	0,395

Оценка методов по исследованию намагниченности насыщения: метод электромагнитной индукции (36%); термогравиметрический анализ (5%); рентгенофазовый анализ (9%); индукционный метод Фонера (36%); мессбауэровский метод исследования (11%). Наилучшими методами для исследования намагниченности насыщения являются метод электромагнитной индукции и индукционный метод Фонера.

Таблица 6. Матрица попарных сравнений альтернатив по критерию «Исследование коэрцитивной силы»

Table 6. The matrix of paired comparisons of alternatives according to the criterium of "Investigation of coercive force"

	1.	2.	3.	4.	5.	Приоритеты
1. Метод электромагнитной индукции	1	1/2	1/4	1/2	1/3	0,077
2. Термогравиметрический анализ	2	1	1/3	1	1/4	0,117
3. Рентгенофазный анализ	4	3	1	2	1/2	0,276
4. Индукционный метод Фонера	2	1	1/2	1	1/3	0,135
5. Мессбауэровский метод исследования	3	4	2	3	1	0,395

Оценка методов по исследованию коэрцитивной силы: метод электромагнитной индукции (8%); термогравиметрический анализ (12%); рентгенофазовый анализ (28%); индукционный метод Фонера (13%); мессбауэровский метод исследования (40%), то есть наилучшим методом исследования коэрцитивной силы выступает мессбауэровский метод исследования. Несколько хуже для данной цели подходит рентгенофазовый анализ.

Таблица 7. Матрица попарных сравнений альтернатив по критерию «Исследование времени ферритизации»

Table 7. The matrix of paired comparisons of alternatives according to the criterium of "Investigation of ferritization time"

	1.	2.	3.	4.	5.	Приоритеты
1. Метод электромагнитной индукции	1	2	1	1/2	5	0,222
2. Термогравиметрический анализ	1/2	1	1/2	1/2	3	0,132
3. Рентгенофазный анализ	1	2	1	1/2	5	0,222
4. Индукционный метод Фонера	2	2	2	1	9	0,379
5. Мессбауэровский метод исследования	1/5	1/3	1/5	1/9	1	0,044

Оценка методов по исследованию времени ферритизации: метод электромагнитной индукции (22%); термогравиметрический анализ (13%); рентгенофазовый анализ (22%); индукционный метод Фонера (40%); мессбауэровский метод исследования (4%). На первом месте по данному критерию индукционный метод Фонера.

Таблица 8. Матрица попарных сравнений альтернатив по критерию «Исследование размера частиц»

Table 8. The matrix of paired comparisons of alternatives according to the criterium of "Investigation of particle size"

	1.	2.	3.	4.	5.	Приоритеты
1. Метод электромагнитной индукции	1	1	1/6	1	1/6	0,070
2. Термогравиметрический анализ	1	1	1/7	1	1/3	0,078
3. Рентгенофазный анализ	6	7	1	5	1	0,416
4. Индукционный метод Фонера	1	1	1/5	1	1/6	0,072
5. Мессбауэровский метод исследования	6	3	1	6	1	0,364

Оценка методов по исследованию размера частиц: метод электромагнитной индукции (7%); термогравиметрический анализ (8%); рентгенофазовый анализ (42%); индукционный метод Фонера (7%); мессбауэровский метод исследования (36%). С незначительным отрывом лидерами по исследованию размера частиц являются рентгенофазовый анализ и мессбауэровский метод исследования.

Таблица 9. Матрица попарных сравнений альтернатив по критерию «Исследование состояния порошка»

Table 9. The matrix of paired comparisons of alternatives according to the criterium of "Investigation of particle size"

	1.	2.	3.	4.	5.	Приоритеты
1. Метод электромагнитной индукции	1	1/6	1/2	1	1/2	0,148
2. Термогравиметрический анализ	1	1/6	1/9	1	1/9	0,040
3. Рентгенофазный анализ	2	9	1	9	1	0,378
4. Индукционный метод Фонера	1	1	1/9	1	1/9	0,057
5. Мессбауэровский метод исследования	2	9	1	9	1	0,378

Оценка методов по исследованию состояния порошка: метод электромагнитной индукции (14%); термогравиметрический анализ (4%); рентгенофазовый анализ (38%); индукционный метод Фонера (6%); мессбауэровский метод исследования (38%), то есть примерно одинаков будет результат использования рентгенофазового анализа и мессбауэровского метода исследования.

В результате, оценка предпочтения методов исследования физических свойств ферритовых материалов по КПД (практический выход/теоретический выход) имеет следующие показатели: метод электромагнитной индукции (16%); термогравиметрический анализ (19%); рентгенофазовый анализ (24%); индукционный метод Фонера (19%); мессбауэровский метод исследования (30%).

Из приведенных расчетов мы видим, что наиболее предпочтительным методом является мессбауэровский метод исследования, несмотря на то, что по некоторым не самым важным критериям данный метод не являлся наиболее предпочтительным.

5. Заключение. В результате проведенного исследования продемонстрировано использование метода анализа иерархий при решении задачи выбора наиболее подходящего метода исследования физических свойств материалов. Наиболее предпочтительным методом исследования определен мессбауэровский метод. Матрицы попарных сравнений были заполнены при участии экспертов предметной области, решающих задачу подбора технологии получения ферритовых материалов. Поэтому следует учитывать, что при решении задачи, имеющей другую цель, при использовании тех же критериев либо альтернатив, матрицы попарных сравнений будут отличны от приведенных.

Список литературы

1. Антамошин А. Н. 2016. Интеллектуальные системы управления организационно-техническими системами. М., ГЛТ, 160.
2. Антамошин А. Н. 2014. Математические методы принятия решений. М.: МГТУ им. Н. Э. Баумана, 584.
3. Василенко В. Т. 1970. Материалы III межотраслевого совещания по методам получения и анализа ферритовых, сегнето- и пьезоэлектрических материалов и сырья для них. Донецк: ВНИИ «Реактивэлектрон», ч. 3, 283.
4. Вонсовский С. В. 1948. Ферромагнетизм. М., Гостехиздат, 816.
5. Евменов В. П. 2016. Интеллектуальные системы управления: превосходство искусственного интеллекта над естественным интеллектом. М.: КД Либроком, 304.
6. Катудев А. Н. 2012. Математические методы в системах поддержки принятия решений; Высшая школа, Москва, 312.

7. Комиссарова Т. Е. 1969. Материалы II межотраслевого совещания по методам получения и анализа ферритовых, сегнето- и пьезоэлектрических материалов и сырья для них. Донецк: ВНИИ «Реактивэлектрон», ч. 2, 19.
8. Котельникова О. А. 2003. Исследование температурной зависимости намагниченности ферромагнетиков. М., МГУ, 23.
9. Кузьмичева Т. Г. 2011. Магнитные свойства нанодispersных ферритовых порошков с криохимической предысторией, ФТТ, Т.53, №11, 2169-2174.
10. Кузьмичева Т. Г. 2012. Получение и исследование высокодисперсных ферритовых порошков для создания биосовместимой подмагничивающей среды, Труды XIV Международной конференции «Электромеханика, Электротехнологии, Электрические материалы и Компоненты» (МКЭЭЭ-2012), Крым, Алушта. 8-10.
11. Кузьмичева Т. Г. 2011. Синтез высокодисперсного гексаферрита кальция и исследование его структурных и магнитных параметров, Физикохимия поверхности и защита материалов, Т.47, №5, 534-540.
12. Набатова Д. С. 2016. Математические и инструментальные методы поддержки принятия решений: Учебник и практикум для бакалавриата и магистратуры. Люберцы: Юрайт, 292.
13. Павлов Г. Д. 1989. Анализ методов получения ферритовых порошков и сырьевых материалов для них. Оценка перспективности их использования. Обзоры по электронной технике, №6, вып. 7, 32.
14. Саати Т. Л. 1997. Принятие решений. Метод анализа иерархий. Москва, «Радио и связь», 278.
15. Семенов С. С. 2016. Методы принятия решений в задачах оценки качества и технического уровня сложных технических систем. М.: Ленанд, 520.

References

1. Antamoshin A. N. 2016. Intelligent organizational management systems - technical system. M., GLT, 160.
2. Antamoshin A. N. 2014. Mathematical methods of decision-making. Moscow: Moscow state technical University. N. E. Bauman, 584.
3. Vasilenko V. T. 1970. Proceedings of the III inter-sectoral meeting on methods of obtaining and analyzing ferrite, ferroelectric and piezoelectric materials and raw materials for them Donetsk: research Institute "reactivelectron part 3, 283.
4. Vonsovsky S. V. 1948. Ferromagnetism. M., Gostekhizdat, 816.
5. Evmenov V. P. 2016. Intelligent control systems: excellence artificial intelligence over natural intelligence. M.: KD Librokom, 304.
6. Katulev A. N. 2012. Mathematical methods in decision support systems; Higher school, Moscow, 312.
7. Komissarova T. E. 1969. Materials of the II inter-sectoral meeting on methods of obtaining and analyzing ferrite, ferroelectric and piezoelectric materials and raw materials for them Donetsk: research Institute "reactivelectron part 2, 19.
8. Kotelnikova O. A. 2003. Study of temperature dependence of ferromagnetics Magnetization. M., MSU, 23.
9. Kuzmicheva T. G. 2011. Magnetic properties of nanodisperse ferrite powders with cryochemical background, ФТТ, V.53, №11, 2169-2174.
10. Kuzmicheva T. G. 2012. Obtaining and research of highly dispersed ferrite powders for creation of biocompatible magnetizing medium, Proceedings of the XIV International conference "Electro-Mechanics, Electrotechnologies, Electrical materials and Components"(FEEE-2012), Crimea, Alushta. 8-10.
11. Kuzmicheva T. G. 2011. Synthesis of highly dispersed calcium hexaferrite and investigation of its structural and magnetic parameters, surface physicochemistry and material protection, V.47, №5, 534-540.
12. Nabatova D.S. 2016. Mathematical and instrumental methods of decision support solutions: Textbook and workshop for undergraduate and graduate studies. Lyubertsy: Yurayt, 292.
13. Pavlov G. D. 1989. Analysis of methods for obtaining ferrite powders and raw materials for them. Assessment of the prospects of their use Reviews on electronic technology, №6, V.7, 32.
14. Saati T.L. 1997. Decision making. Method of analysis of hierarchies. Moscow, Radio and communications, 278.
15. Semenov S.S. 2016. Methods of decision-making in the problems of quality assessment and technical level of complex technical systems. M.: Lenand, 520.

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 04.05.2022

Поступила после рецензирования 08.06.2022

Принята к публикации 10.06.2022

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Голованова Елена Васильевна – кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой физики, математики, химии и информационных технологий, ФГБОУ ВО Белгородский ГАУ

ул. Вавилова, 1, п. Майский, Белгородский район, Белгородская область, 308503, Россия

E-mail: golovanovabsu.edu.ru

Кузьмичева Татьяна Георгиевна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной информатики и информационных технологий, Белгородский государственный национальный исследовательский университет

ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия

E-mail: kuzmichevabsu.edu.ru

Путивцева Наталья Павловна – кандидат технических наук, доцент кафедры прикладной информатики и информационных технологий, Белгородский государственный национальный исследовательский университет

ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия

E-mail: putivzevabsu.edu.ru

Зайцева Татьяна Валентиновна – кандидат технических наук, доцент кафедры прикладной информатики и информационных технологий, Белгородский государственный национальный исследовательский университет

ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия

E-mail: zaitsevabsu.edu.ru

INFORMATION ABOUT AUTHORS

Elena Golovanova – PhD in Mathematics, Associate Professor, Head of the Department of Physics, Mathematics, Chemistry and Information Technology, Belgorod State University, Vavilova str., 1, Maysky village, Belgorod district, Belgorod region, Russia

Tatiana Kuzmicheva – PhD in Mathematics, Associate Professor of the Department of Applied Informatics and Information Technologies, Belgorod State National Research University, Belgorod, Russia

Natalia Putivtseva – PhD in Technicals, Associate Professor of the Department of Applied Informatics and Information Technologies, Belgorod State National Research University, Belgorod, Russia

Zaitseva Tatiana Valentinovna – PhD in Technicals, Associate Professor of the Department of Applied Informatics and Information Technologies, Belgorod State National Research University, Belgorod, Russia

УДК 519.218.5

MSC 82B99

оригинальное исследование

DOI 10.52575/2687-0959-2022-54-2-131-136

СТАТИСТИЧЕСКИЙ ПОДХОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПРЕДЕЛА ПРОЧНОСТИ ТВЕРДОТЕЛЬНОГО ПОРИСТОГО МАТЕРИАЛА

Ю. П. Вирченко¹ , И. М. Шаполова² 

¹Белгородский государственный технологический университет,
Белгород, 308012, Россия;

²Белгородский государственный университет,
Белгород, 308007, Россия

E-mail: virch@bsu.edu.ru

Аннотация. Анализируется статистическая модель, сконструированная в предыдущих работах авторов, которая позволяет связать вероятность разрыва образца пористого твердотельного материала под действием внешней растягивающей образец нагрузки. Катастрофическое явление разрыва образца трактуется как фазовый переход. Вычислен предел прочности p_* материала как функции от плотности пор внутри образца.

Ключевые слова: микротрещина, предел прочности, хрупкое разрушение, поры, плотность, независимые случайные величины

Для цитирования: Вирченко Ю. П., Шаполова И. М., 2022. Статистический подход определения предела прочности твердотельного пористого материала. Прикладная математика & Физика. 54(2): 131–136.

DOI 10.52575/2687-0959-2022-54-2-131-136

STATISTICAL APPROACH OF THE DETERMINATION OF THE TENSILE STRENGTH OF SOLID POROUS MATERIAL

Yuri Virchenko¹ , Irina Shapolova² 

¹Belgorod State Technological Shukhov University, Belgorod, 308012, Russia;

²Belgorod National Research University, Belgorod, 308007, Russia.

E-mail: virch@bsu.edu.ru

Received May, 06, 2022

Abstract. The statistical model constructed in the previous works of the authors is analyzed. It allows to link the probability of the sample rupture under the action of an external load which stretches this sample if it represents a porous solid-state material. The catastrophic phenomenon of sample rupture is interpreted as a phase transition. The tensile strength p_* of the material is calculated as a function of the pore density inside the sample.

Keywords: microcrack, tensile strength, fragile destruction, porous distribution, density, statistically independent random values

For citation: Yuri Virchenko, Irina Shapolova. 2022. Statistical approach of the determination of the tensile strength of solid porous material. Applied Mathematics & Physics. 54(2): 131–136. (in Russian)

DOI 10.52575/2687-0959-2022-54-2-131-136

1. Введение. Изучение механического разрушения материалов, которое выражается в виде разрыва их образцов в результате действия внешних сил, является предметом многочисленных исследований в рамках различных подходов к изучению этого явления [1, 2], [4]–[19]. Пусть каждый из образцов материала представляется вытянутым вдоль некоторого направления (ось z). К противоположным торцам этого параллелепипеда приложены направленные в противоположные стороны силы, растягивающие его вдоль оси z . Образцы при этом, несмотря на их вытянутость, не должны быть очень тонкими в направлении поперечном к направлению приложения сил растяжения. Такая механическая ситуация являлась предметом многочисленных теоретических исследований в рамках различных подходов к изучению этого явления (см., например, [1]–[17]). Известно, что при достаточно большой величине внешней нагрузки p при превышении ею некоторого порогового значения p_* — предела прочности материала на растяжение в рассматриваемой ситуации происходит разрыв образца. Целью многих таких исследований является изучение зависимости предела прочности от параметров, характеризующих термодинамическое состояние образца.

Основой исследования настоящей работы является определение распределения вероятностей критических напряжений разрыва образцов пористого материала. Это распределение вероятностей определяется на основе статистической модели, сконструированной ранее в работах авторов настоящего исследования на основе феноменологических общезначимых представлений, описывающей сценарий зарождения микротрещин достаточно большого

размера в объемных образцах пористых твердотельных материалов, которые под действием приложенной одноосной внешней нагрузки приводят к поперечному разрыву.

2. Физическая картина явления. Механический сценарий изучаемого явления представляется следующим образом. Рассмотрим медленный процесс растяжения образца под действием сколь угодно медленно увеличивающейся растягивающей его силы. При малой величине внешней силы, происходит упругая деформация образца, которая выражается в виде его удлинения и которая зависит линейным образом от величины силы. При этом в каждом макроскопически малом объеме образца возникают упругие напряжения, стремящиеся вернуть его в исходное положение. Упругость деформации выражается в том, что при прекращении действия внешней силы образец возвращается в исходное состояние без изменения своей формы и размеров. При большей величине внешней силы проявляется уже нелинейная зависимость его деформации, хотя она остается по-прежнему упругой. При дальнейшем увеличении внешней силы прекращается стадия упругой деформации, то есть она становится такой, что при устранении действия силы образец не возвращается в прежнее состояние. Эта стадия эволюции состояния образца материала называется пластической деформацией. Наконец, при каком-то значении внешней нагрузки происходит разрыв образца материала так, что он уже не представляет собой единое целое. При этом следует иметь в виду, что диапазоны изменения внешней нагрузки, которые ответственны за каждую из стадий в описанном эволюционном сценарии, могут измениться в широких пределах, при переходе от материала к материалу, и они могут сильно отличаться по порядку величины. Так, например, если величина диапазона изменения внешней нагрузки, который ответственен за пластическую деформацию, может иметь пренебрежимо малую величину по сравнению с величиной диапазона, связанного с упругой деформацией. Такое положение отвечает так называемым хрупким материалам. Наоборот, во многих материалах можно наблюдать очень малую величину диапазона изменения внешней силы, связанного с нелинейной зависимостью величины деформации от величины напряжения.

Разрыв образца материала происходит, вообще говоря, в два этапа. На первом из них происходит, относительно медленно, развитие микротрещины, развивающейся из какого-то «зародыша». Затем, на втором этапе, когда эта трещина достигнет достаточно большого размера, начинается второй этап, когда лавинным образом из этой трещины формируется разлом всего образца. Наличие зародыша в виде микротрещины, казалось бы, указывает на то, что разрыв образца подобен фазовому переходу первого рода. Однако, это неверно, так как он не характеризуется независимым от размера образца значением интенсивного параметра. Таким образом, мы приходим к выводу о том, что разрыв не является фазовым переходом в термодинамическом смысле.

Для того чтобы объемный эффект имел свое объяснение, необходимо связать разрыв с какой-то величиной, значение которой зависело бы от объема, то есть определяющейся не локально по отношению к образцу и, в то же время, разрыв должен характеризоваться каким-то масштабом — линейным размером зародыша.

3. Описание модели и постановка задачи. Теоретический предел прочности идеальной (бездефектной) кристаллической твердотельной структуры определяется электростатическими силами взаимодействия, и поэтому он представляет собой очень большую величину. Он определяется в этом случае тепловыми флуктуациями в материале. Следовательно, в реальном случае разрыв образца должен связываться с существующими в образце материала «дефектами» структуры. Это связано с тем, что поверхности разлома образцов материала зарождаются именно на такого рода «дефектах». Поэтому предел прочности должен существенным образом зависеть от типа дефектов, присутствующих в образце, и от такого термодинамического параметра как концентрация дефектов ρ . В связи с этим возникает вопрос о функции $p_*(\rho)$, определяющей эту зависимость. Задача об теоретическом определении этой функции должна решаться в рамках какого-либо разумного теоретического подхода. При этом существенное значение приобретает определение критерия того, что должно называться критическим напряжением.

Так как пространственное распределение в каждом образце носит случайный характер, то одним из подходов теоретического изучения разрушения материалов является так называемый статистический микроскопический подход (см., например, [1], [4]-[19]). Исследование, предлагаемое в настоящей работе, основано на статистической модели, описанной в [2]. Конструкция этой модели основана на предположении, что основное влияние на величину предела прочности оказывают присутствующие в образце микротрещины различной случайной формы и размеров. Их наличие может быть связано как с процессом приготовления материала, так и с процессом его «старения» в изменяющихся внешних условиях. В модели вводится статистическое пространственное распределение этих микротрещин по образцу, определяемому таким образом, что случайные точки расположения «центров» этих микротрещин образуют безгранично делимое пуассоновское случайное точечное поле с некоторой плотностью $\rho = N/|\Omega| = N/V$, N — число дефектов в области Ω , занимаемой образцом. Тогда вероятность того, что в области Δ случайное число \tilde{n} попавших в нее пор опеределается распределением Пуассона

$$\Pr\{\tilde{n} = n\} = \frac{(\rho|\Delta|)^n}{n!} \exp(-\rho|\Delta|). \quad (1)$$

С физической точки зрения использование такого распределения вероятностей для случайного числа \tilde{n} тем более оправдано, если суммарный объем пор по образцу намного меньше объема $|\Omega|$ самого образца, в силу малости объема каждой поры и, как следствие, малости объемной концентрации $\rho = N/|\Omega|$ пор. Заметим, что такая модель материала со случайным образом распределенными в нем дефектами является частным случаем вероятностных моделей, используемых в математической и теоретической физике (см. [1]-[3], [8], [21]). Определив распределение вероятностей для расположения пор в Ω , принципиально, можно подсчитать вероятность появления той величины критической флуктуации $\Delta\tilde{n}_c$, которая определяет возможность появления трещины требуемого размера в образце в зависимости от величины концентрации ρ . Для установления связи между критическим напряжением p_* и концентрацией пор ρ , приводящей к росту трещины, используется закон Гриффитса:

$$d = d_0 (k/p)^{\alpha/2}, \quad (2)$$

где d – критическая длина микротрещины, с которой начинается ее развитие под действием внешнего напряжения, $\alpha > 0$ и k – т. н. постоянная Гриффитса. Для определения критической величины плотности дефектов используется связь между величиной d и критической плотностью n_* пор

$$n_* = (d/\delta)^3, \quad (3)$$

где δ – характерное расстояние между ионами материала такое, что при его превышении возникает явление охрупчивания материала.

Введем вероятность P того, что в параллелепипеде Ω существует малая область с критическим размером d , расположение которой характеризуется радиус-вектором x и в которой случайное число пор превышает значение n_* . Эта вероятность является функцией ρ , p и полного объема образца V , то есть $P \equiv P(\rho, p; V)$ интерпретируется как вероятность разрушения образца. Зависимость этой вероятности от V называется в материаловедении *размерным эффектом*. Интерпретация вероятности P как вероятности разрушения образца основана на известном в теории разрушения принципе *слабого звена*.

4. Разрушение как термодинамический фазовый переход. Теоретическое определение критического напряжения связано с интерпретацией того, по какому сценарию развивается разрушение образца. Разрыв образца является пороговым или катастрофическим физическим явлением, то есть оно происходит при превышении какой-либо физической величиной, в данном случае, приложенной внешней нагрузкой строго определенной величины. С этой точки зрения разрушение материала естественно уподобить термодинамическому (но не термическому, а под внешним механическим воздействием) фазовому переходу.

Термодинамические фазовые переходы делятся на две группы – переходы первого и второго рода. Переходы первого рода происходят в том случае, когда среда при медленном изменении внешних параметров подводится к такому состоянию, в котором сколь угодно малое внешнее воздействие на него, равномерно распределенное по пространству, приводит к переходу образца в качественно другое физическое состояние – другую термодинамическую фазу среды. При этом если внешнее возмущение действует на систему только лишь локально, то фазового перехода не происходит. Характерно, что процесс перехода в другую фазу начинается в некоторых макроскопически малых, равномерно распределенных по объему, занимаемому средой, пространственных областях, которые называются зародышами фазы. Геометрический размер зародыша по порядку величины таков, что абсолютная величина термодинамической флуктуации некоторого интенсивного термодинамического параметра, «резкое» изменение которого как раз характеризует появление нового физического качества в результате фазового перехода, допускает, в сумме с текущим наблюдаемым значением этого параметра, перескок через пороговое значение. Тот факт, что локальное возмущение в среде не приводит к фазовому переходу, связан с тем, что в ней отсутствует внутренний физический механизм, который приводил бы к росту каждого такого зародыша посредством положительной обратной связи. С академической точки зрения фазовый переход первого рода может произойти без появления зародышей так, что новая фаза возникает сразу во всем объеме среды, что означает появление зародыша с линейным размером, порядка размера всей системы. Фазовый переход первого рода характеризуется пороговым значением локального (т. н. интенсивного) термодинамического параметра и поэтому никак не зависит от объема системы.

В противоположность фазовым переходам первого рода, переходы второго рода происходят сразу во всем объеме без появления зародышей новой фазы, и поэтому они не происходят вследствие локальных флуктуаций какой-либо термодинамической величины и пространственных размеров этих флуктуаций. Такие переходы происходят в том случае, когда среда находится в так называемом критическом состоянии. Однако, такого рода критические состояния составляют некоторое исключительное множество в пространстве всех возможных термодинамических состояний изучаемой системы и поэтому само попадание в них в экспериментальных условиях является до некоторой степени теоретической идеализацией. С точки зрения такой идеализации, критическое состояние охватывает весь объем, занимаемый средой, и поэтому фазовый переход происходит сразу во всем объеме, но вместе с тем он так же как и фазовый переход первого рода характеризуется независимым от объема пороговым значением локального термодинамического параметра.

Таким образом, описанное качественное поведение термодинамически большой системы показывает, что, хотя аналогия катастрофического явления разрыва образца под действием внешних сил с термодинамическими фазовыми переходами не лишена смысла, однако, не совсем корректна, так как точки термодинамических фазовых переходов или, более общо, поверхности фазовых переходов на фазовых диаграммах, вообще говоря, не зависят от геометрических размеров образцов материала, в то время как упомянутый выше размерный эффект как раз заключается в том, что пороговое значение упругого напряжения, при котором возникает разрыв образца, зависит, хотя и слабо, от его линейного размера по направлению действия разрывающих его внешних сил.

Известны примеры такого катастрофического поведения, которые имеют чисто геометрический характер. Они связаны с таким явлением, которое называется перколяцией или просачиванием. Такого рода явления характеризуются наличием в системе кластера, который состоит из каким-то образом выделенных ее элементов, между которыми имеется физическая связь. Так как возникновение такого кластера должно охватывать весь объем системы, то, казалось бы в этом случае налицо имеется нелокальность эффекта, а также должен существовать характерный масштаб, который указывает, на каком расстоянии друг от друга проявляется связь между элементами системы. Одной из изучаемых в теории перколяции величин является вероятность просачивания насквозь через систему. Зависимость этой величины от внешних управляющих параметров такова, что при $V \rightarrow \infty$ она носит характер закона «0 и 1», когда области изменения параметров, соответствующие нулю и единице, не зависят от величины V , что опять же не согласуется с размерным эффектом.

5. Вычисление вероятности разрушения. Для вычисления вероятности P дискретизуем изучаемую модель. А именно, разобьем образец Ω на кубические ячейки с центрами x , которые образуют в Ω решетчатое множество. Ребро

куба каждой такой ячейки Δ равно d и, соответственно, ее объем равен $v_* = d^3$. Вместо пуассоновского точечного случайного поля будем рассматривать бернуллиевское случайное поле на сформированном решеточном множестве. Будем считать, что при действии на образец внешней силы с поверхностной плотностью p и, следовательно, p представляет собой упругое напряжение, действующее на границу каждой из ячеек в направлении одного из ребер. Трещина зарождается в какой-то из ячеек, если в ней количество пор превышает величину m_* . Эта величина рассчитывается на основе (3),

$$m_* = v_*/h^3 = (d/h)^3. \quad (3)$$

Следовательно, рост трещины начинается в том случае, если в образце хрупкого материала найдется ячейка Δ , в которой число пор m превосходит критическое значение m_* .

Представим вероятность P разрушения в виде $P = 1 - \bar{P}$, где \bar{P} – вероятность того, что во всех ячейках образца случайное число \tilde{m} пор не превосходит m_* . Так как, по предположению, при распределении пор по ячейкам случайное число \tilde{m} попавших в конкретную ячейку пор не зависит от всех остальных ячеек, то обозначив \bar{P}_* вероятность попадания в конкретную ячейку числа пор, меньшего m_* , получим $\bar{P} = \bar{P}_*^N$. Тогда $P = 1 - \bar{P}_*^N$. Используя (1), находим

$$\bar{P}_* = \exp(-\rho|\Delta|) \sum_{m=0}^{m_*-1} \frac{(\rho|\Delta|)^m}{m!} = 1 - \exp(-\rho|\Delta|) \sum_{m=m_*}^{\infty} \frac{(\rho|\Delta|)^m}{m!}. \quad (4)$$

Число $m_* \gg 1$ очень велико. Для размеров ячейки Δ порядка 10^{-6} см, в ней может находиться порядка $10^2 \div 10^3$ пор. Тогда $m_* \approx 10^2$. Воспользуемся приближением числа m_* на основе асимптотической формулы Стирлинга. Таким образом,

$$m_*! \approx (2\pi m_*) \left(\frac{m_*}{e}\right)^{m_*}.$$

Оценим сумму в формуле (4)

$$\sum_{m=m_*}^{\infty} \frac{(\rho|\Delta|)^m}{m!} \approx \frac{(\rho|\Delta|)^{m_*}}{m_*!} \approx (2\pi m_*)^{-1/2} \left(\frac{\rho e|\Delta|}{m_*}\right)^{m_*}.$$

Это дает нам следующее приближенное выражение для вероятности \bar{P} ,

$$\bar{P}_* = (1 - \eta)^N, \quad \eta \equiv \eta(\rho, p) = \frac{\exp[-\rho|\Delta|]}{\sqrt{2\pi m_*}} \left(\frac{\rho e|\Delta|}{m_*}\right)^{m_*},$$

где $m_* \ll N$. Формула (2) позволяет выразить вероятность P через физически контролируемые характеристики. Следовательно, вероятность разрыва образца равна

$$P(p, \rho; V) = 1 - (1 - \eta(\rho, p))^{V/d^3}.$$

Так как $1 \ll m_* \ll N$, то $(1 - \eta)^N \approx \exp(-\eta N)$ и, кроме того, заменим число m_* его приближенным значением $m_* = \rho d^3$. В этом случае, так как $|\Delta| \approx d^3$, то

$$\eta = (2\pi\rho d^3)^{-1/2}.$$

Тогда вероятность разрыва образца

$$P(p, \rho; V) = 1 - \exp(-V\eta(\rho, p)/d^3). \quad (5)$$

Для нахождения формулы для предела прочности p_* найдем решение уравнения $P(p, \rho; V) = 1 - \varepsilon$, где число ε является уровнем значимости, $1 > \varepsilon > 0$, и его величина не влияет на характер зависимости величины p_* от физических параметров (в частности, значение $\varepsilon = 1/2$ соответствует статистическому квантилю), а только лишь изменяет множитель пропорциональности в этой зависимости. Уравнение (5) эквивалентно $\varepsilon = \exp(-\eta_* N)$, η_* – значение η при $p = p_*$. Следовательно, $\eta_* = |\ln \varepsilon|/N$. Подставляя явное выражение для η_* в это решение и, учитывая зависимость (2), выразив p_* как функцию от ρ и V , находим

$$p_* = kC_0 \left(\frac{d_0\rho}{V^2}\right)^{(3\alpha)^{-1}}, \quad (6)$$

где C_0 – безразмерная постоянная.

6. Заключение. В результате проведенного теоретического исследования построена простая теоретическая статистическая модель, описывающая явление хрупкого разрушения материала под воздействием на него внешней нагрузки. В этой модели образование микротрещины критического размера проявляется как следствие наличия в образце достаточно большой флуктуации концентрации пор. Так как величина средней квадратичной флуктуации концентрации пор внутри образца материала связана с величиной самой концентрации, то, в результате, имеется зависимость между концентрацией пор и критическим механическим напряжением (пределом разрывной прочности) материала p_* . Построенная нами модель претендует на предсказание количественных характеристик хрупкого разрушения материала, так как она устанавливает вид указанной зависимости. На основе найденной формулы связи между концентрацией пор и пределом прочности материала, в частности, устанавливается зависимость между пределом прочности и размером образца. Наличие такой зависимости называется в материаловедении *масштабным эффектом*, который, качественно, связан с тем, что увеличение размеров образца приводит к увеличению вероятности появления в какой-то из малых областей внутри него достаточно большой флуктуации, величина которой превосходит критическую величину, начиная с которой происходит разрастание трещины при воздействии на образец материала внешней растягивающей нагрузки, т. е. к увеличению вероятности преодоления локально в этой области внутри материала предела его прочности. Последнее, в конце концов, приводит к зарождению макроскопической трещины с последующим ее разрастанием и разрывом образца.

Список литературы

1. Вирченко Ю. П., Шеремет О. И. 2001. Геометрические модели статистической теории фрагментации. Теор. и мат. физика. 128(2): 161-177.
2. Вирченко Ю. П., Шаполова И. М. 2021. Распределение вероятностей критических напряжений разрыва образцов пористого материала. Прикладная математика & Физика. 53(4): 312-316.
3. Вирченко Ю. П. 1997. Пуассоновские среды. Энциклопедический словарь. Математическая физика. М.: Российская энциклопедия.
4. Batdorf S. B. 1973. A statistical theory for failure of brittle materials under combined stresses. AIAA Paper. 381: 1-5.
5. Batdorf S. B. 1975. Fracture statistics of brittle materials with intergranular cracks. Nucl. Eng. and Des. 35(3): 349-360.
6. Fisher J. C., Hollomon J. M. 1947. A statistical theory of fracture. Metals Technol. 14(5): 1-16.
7. Frenkel Ya. I., Kontorova T. A. 1943. A statistical theory of the brittle strength of real crystals. J. Phys. (Moscow). 7: 108.
8. Gilbert E. N. 1962. The Poisson random medium in statistical physics. Ann. Math. Statistics. 33(3): 958.
9. Griffith A. A. 1921. The Phenomenon of Rupture and Flow in Solids. Phil. Trans. Roy. Soc. of London. A221:163-198.
10. Griffith A. A. 1924. The Theory of Rupture. Proc/ First Inter. Cong. Appl. Mech., Delft. 55.
11. Hellan K. 1984. Introduction to Fracture Mechanics. New York: McGraw-Hill Book Company, 1984.
12. Gilvarry J. J. 1961. Fracture of Brittle Solids. II. Distribution Function for Fragment Size in Single Fracture (Experimental). J. Appl. Phys. 32 (3): 400-410.
13. Gilvarry J. J. 1961. Fracture of Brittle Solids. I. Distribution Function for Fragment Size in Single Fracture (Theoretical). J. Appl. Phys. 32(3): 391-399.
14. Irwin G. 1948. Fracture dynamics. Fracture of Metals. Cleveland: ASM.
15. Mechanics of fracture. 1973. vol.1 /Ed. G.C. Nordoff/ Leugen: Int. Publ.
16. Orowan E. 1950. Fundamentals of brittle behavior of metals. Fatigue and Fracture of Metals. New York: Willey.
17. Weibull W. 1949. A statistical representation of fatigue failure in solids. Trans. Roy. Inst. Tech. (Stocholm). 27: 27-43.
18. Virchenko Yu. P., 1998. Percolation Mechanism of Material Ageing and Distribution of the Destruction Time. Functional Materials. 5(1): 7-13.
19. Virchenko Yu. P., Sheremet O.I. 1999. The formation of destruction time distribution of material ageing by statistically independent perturbations. Functional Materials. 1999. 6(1): 5-12.
20. Weibull W.A. 1939. A statistical theory of the strength of materials. Proc. Roy. Swed. Inst. Eng. Res. 151: 5-45.
21. Zaiman J.M. 1979. Models of disorder. Theoretical physics of homogeneously disordered systems. New York: Cambridge University Press, 525.

References

1. Virchenko Yu. P., Sheremet O. I. 2001. Geometric models of statistical theory of fragmentation. Theoretical and mathematical physics. 128(2): 161-177.
2. Virchenko Yu. P., Shapolova I. M. 2021. Probability distribution of critical tensile strengthes of porous samples. Applied Mathematics & Phisics. 53(4): 312-316.
3. Virchenko Yu.P. 1997. Poissonian media. Encyclopedian Dictionary. Mathematical Physics. Moscow: Russian Encyclopedia.
4. Batdorf S. B. 1973. A statistical theory for failure of brittle materials under combined stresses. AIAA Paper. 381: 1-5.
5. Batdorf S. B. 1975. Fracture statistics of brittle materials with intergranular cracks. Nucl. Eng. and Des. 35(3): 349-360.
6. Fisher J. C., Hollomon J. M. 1947. A statistical theory of fracture. Metals Technol. 14(5): 1-16.
7. Frenkel Ya. I., Kontorova T. A. 1943. A statistical theory of the brittle strength of real crystals. J. Phys. (Moscow). 7: 108.
8. Gilbert E. N. 1962. The Poisson random medium in statistical physics. Ann. Math. Statistics. 33(3): 958.
9. Griffith A. A. 1921. The Phenomenon of Rupture and Flow in Solids. Phil. Trans. Roy. Soc. of London. A221:163-198.
10. Griffith A. A. 1924. The Theory of Rupture. Proc/ First Inter. Cong. Appl. Mech., Delft. 55.
11. Hellan K. 1984. Introduction to Fracture Mechanics. New York: McGraw-Hill Book Company, 1984.
12. Gilvarry J. J. 1961. Fracture of Brittle Solids. II. Distribution Function for Fragment Size in Single Fracture (Experimental). J. Appl. Phys. 32(3): 400-410.
13. Gilvarry J. J. 1961. Fracture of Brittle Solids. I. Distribution Function for Fragment Size in Single Fracture (Theoretical). J. Appl. Phys. 32(3): 391-399.
14. Irwin G. 1948. Fracture dynamics. Fracture of Metals. Cleveland: ASM.
15. Mechanics of fracture. 1973. vol.1 /Ed. G.C. Nordoff/ Leugen: Int. Publ.
16. Orowan E. 1950. Fundamentals of brittle behavior of metals. Fatigue and Fracture of Metals. New York: Willey.
17. Weibull W. 1949. A statistical representation of fatigue failure in solids. Trans. Roy. Inst. Tech. (Stocholm). 27: 27-43.

18. Virchenko Yu. P., 1998. Percolation Mechanism of Material Ageing and Distribution of the Destruction Time. Functional Materials. 5(1): 7-13.
19. Virchenko Yu. P., Sheremet O.I. 1999. The formation of destruction time distribution of material ageing by statistically independent perturbations. Functional Materials. 1999. 6(1): 5-12.
20. Weibull W.A. 1939. A statistical theory of the strength of materials. Proc. Roy. Swed. Inst. Eng. Res. 151: 5-45.
21. Zaiman J. M. 1979. Models of disorder. Theoretical physics of homogeneously disordered systems. New York: Cambridge University Press, 525.

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 06.05.2022

Поступила после рецензирования 10.06.2022

Принята к публикации 14.06.2022

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Вирченко Юрий Петрович – доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры программного обеспечения вычислительной техники и автоматизированных систем, Белгородский государственный технологический университет им. В. Г. Шухова

ул. Костюкова, 46, Белгород, 308012, Россия

E-mail: virch@bsu.edu.ru

Шаполова Ирина Михайловна – аспирант второго года обучения института инженерных и цифровых технологий, Белгородский государственный национальный исследовательский университет

Ул. Победы, 85, Белгород, 30801, Россия

E-mail: shapolova@bsu.edu.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Yuri Virchenko – PhD in Physics and Mathematics, Professor, Professor of the Department of Software for Computing Machinery and Automated Systems, Belgorod State Technological University named after V. G. Shukhova, Belgorod, Russia

Irina Shapolova – postgraduate student of the second year of study at the Institute of Engineering and Digital Technologies, Belgorod National Research University, Belgorod, Russia