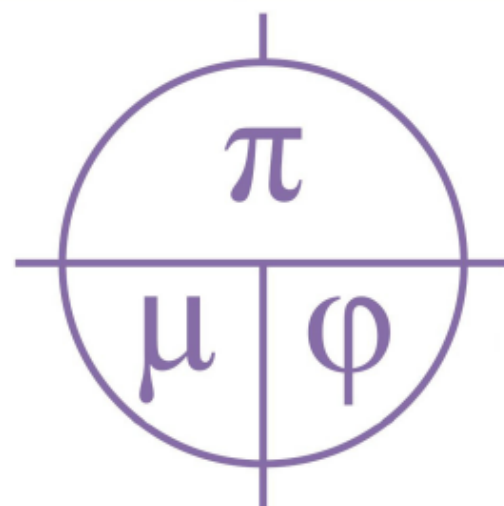
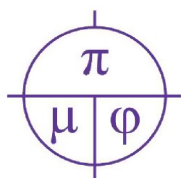


ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА & ФИЗИКА

APPLIED MATHEMATICS & PHYSICS

Том 54, № 3





Прикладная математика & Физика

2022. Том 54, № 3

Основан в 1995 г. Журнал включен в Перечень ВАК рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней кандидата и доктора наук (1.1.1 – вещественный, комплексный и функциональный анализ, 1.1.2 – дифференциальные уравнения и математическая физика, 1.3.8 – физика конденсированного состояния). До 2020 г. журнал издавался под названием «Научные ведомости Белгородского государственного университета. Математика. Физика».

УЧРЕДИТЕЛЬ:

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Белгородский государственный национальный исследовательский университет».

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:

Главный редактор: В. Б. Васильев, доктор физико-математических наук, НИУ «БелГУ»;

Заместители главного редактора: С. М. Ситник, доктор физико-математических наук, НИУ «БелГУ», Математика; А. В. Носков, доктор физико-математических наук, НИУ «БелГУ», Физика. Математическое моделирование;

Ответственный секретарь: О. В. Чернова, кандидат физико-математических наук, НИУ «БелГУ».

ЧЛЕНЫ РЕДАКЦИОННОЙ КОЛЛЕГИИ:

- | | |
|---|---|
| Ш. А. Алимов, д-р ф.-м. н., Ташкент, Узбекистан; | И. С. Ломов, д-р ф.-м. н., Москва, Россия; |
| Ю. А. Алхутов, д-р ф.-м. н., Владимир, Россия; | В. В. Меньших, д-р ф.-м. н., Воронеж, Россия; |
| А. Ашыралыев, д-р ф.-м. н., Алматы, Казахстан; | А. И. Назаров, д-р ф.-м. н., Санкт-Петербург, Россия; |
| С. В. Блажевич, д-р ф.-м. н., Белгород, Россия; | Е. Ю. Панов, д-р ф.-м. н., Великий Новгород, Россия; |
| А. Н. Беляков, д-р ф.-м. н., Белгород, Россия; | О. М. Пенкин, д-р ф.-м. н., Алматы, Казахстан; |
| А. Г. Брусенцев, д-р ф.-м. н., Белгород, Россия; | И. П. Половинкин, д-р ф.-м. н., Воронеж, Россия; |
| Ю. П. Вирченко, д-р ф.-м. н., Белгород, Россия; | Е. В. Радкевич, д-р ф.-м. н., Москва, Россия; |
| А. В. Глушак, д-р ф.-м. н., Белгород, Россия; | С. Е. Савотченко, д-р ф.-м. н., Белгород, Россия; |
| С. Б. Дабагов, д-р ф.-м. н., Москва, Россия; | А. П. Солдатов, д-р ф.-м. н., Москва, Россия; |
| Й. Диблик, д-р ф.-м. н., Брно, Чешская Республика; | В. Е. Федоров, д-р ф.-м. н., Челябинск, Россия; |
| Л. М. Кожевникова, д-р ф.-м. н., Стерлитамак, Россия; | А. А. Шибков, д-р ф.-м. н., Тамбов, Россия. |
| А. Н. Куликов, д-р ф.-м. н., Ярославль, Россия; | М. В. Шитикова, д-р ф.-м. н., Воронеж, Россия; |
| Д. М. Левин, д-р ф.-м. н., Тула, Россия; | Э. Л. Шишкина, д-р ф.-м. н., Воронеж, Россия. |

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор). Выходит 4 раза в год.

Выпускающий редактор: Ю. В. Ивахненко	Гарнитура Times. Уч. изд. л. 6,7
Корректурa Ю. В. Ивахненко	Дата выхода 30.09.2022.
Компьютерная верстка: О. В. Чернова	Оригинал-макет подготовлен отделом
Оригинал-макет: В. Б. Васильев	объединенной редакции научных журналов НИУ «БелГУ»
E-mail: vasilyev_v@bsu.edu.ru	308015, г. Белгород, ул. Победы, 85.

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

А. С. Фараджев

Об одной нелокальной обратной краевой задаче для уравнения Буссинеска шестого порядка с нелокальными интегральными по времени условиями второго рода **141**

A. V. Vasilyev, V. B. Vasilyev

Difference equations in discrete spaces **154**

ФИЗИКА. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Н. С. Астапов, В. Д. Кургузов

Моделирование упругопластического разрушения пластины с краевой трещиной **160**

И. Н. Беляева, И. К. Кириченко, Н. Н. Чеканова

Решение нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения Ермакова степенными рядами **171**

А. В. Кочура, А. В. Борисенко, В. С. Захвалинский, А. З. Хтет

Знакопеременное магнетосопротивление и температурная зависимость электропроводности монокристаллов твердых растворов арсенида кадмия **178**

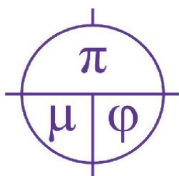
Т. Б. Никуличева, Е. А. Пилюк, О. Н. Иванов, А. А. Морочо, М. Н. Япрынцеv

Квантовые поправки к проводимости в аморфном полупроводнике **186**

ПЕРСОНАЛИИ

Редколлегия журнала «Прикладная математика & Физика»

К юбилею Сергея Васильевича Рогозина **192**



Applied Mathematics & Physics

2022. Volume 54, № 3

Founded in 1995. The journal is included into the List of Higher Attestation Commission of peer-reviewed scientific publications where the main scientific results of dissertations for obtaining scientific degrees of a candidate and doctor of science should be published (1.1.1 – material, complex and functional analysis, 1.1.2 – differential equations and mathematical physics, 1.3.8 – condensed matter physics). Until 2020, the journal was published with the name «Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics. Physics».

FOUNDER:

Federal state autonomous educational establishment of higher education
«Belgorod National Research University».

EDITORIAL BOARD:

Chief Editor: V. B. Vasilyev, Dr.Sc., Ph.D., Belgorod National Research University;
Deputy Editor-in-Chief: S. M. Sitnik, Dr.Sc., Ph.D., Belgorod National Research University, Mathematics;
A. V. Noskov, Dr.Sc., Ph.D., Belgorod National Research University, Physics. Mathematical modeling;
Executive Secretary: O. V. Chernova, PhD, Belgorod National Research University.

EDITORIAL BOARD MEMBERS:

Sh. A. Alimov, Dr.Sc., Ph.D., Tashkent, Uzbekistan;	I. S. Lomov, Dr.Sc., Ph.D., Moscow, Russia;
Yu. A. Alkhutov, Dr.Sc., Ph.D., Vladimir, Russia;	V. V. Menshih, Dr.Sc., Ph.D., Voronezh, Russia;
A. Ashyralyev, Dr.Sc., Ph.D., Almaty, Kazakhstan;	A. I. Nazarov, Dr.Sc., Ph.D., St. Petersburg, Russia;
S. V. Blazhevich, Dr.Sc., Ph.D., Belgorod, Russia;	E. Yu. Panov, Dr.Sc., Ph.D., Velikiy Novgorod, Russia;
A. N. Belyakov, Dr.Sc., Ph.D., Belgorod, Russia;	O. M. Penkin, Dr.Sc., Ph.D., Almaty, Kazakhstan;
A. G. Brusentsev, Dr.Sc., Ph.D., Belgorod, Russia;	I. P. Polovinkin, Dr.Sc., Ph.D., Voronezh, Russia;
Yu. P. Virchenko, Dr.Sc., Ph.D., Belgorod, Russia;	E. V. Radkevich, Dr.Sc., Ph.D., Moscow, Russia;
A. V. Glushak, Dr.Sc., Ph.D., Belgorod, Russia;	S. E. Savotchenko, Dr. Sc Ph.D., Belgorod, Russia;
S. B. Dabagov, Dr.Sc., Ph.D., Moscow, Russia;	A. P. Soldatov, Dr.Sc., Ph.D., Moscow, Russia;
J. Diblik, Dr.Sc., Ph.D., Brno, Czech Republic;	V. E. Fedorov, Dr.Sc., Ph.D., Chelyabinsk, Russia;
L. M. Kozhevnikova, Dr.Sc., Ph.D., Sterlitamak, Russia;	A. A. Shibkov, Dr.Sc., Ph.D., Tambov, Russia.
A. N. Kulikov, Dr.Sc., Ph.D., Yaroslavl, Russia;	M. V. Shitikova, Dr.Sc., Ph.D., Voronezh, Russia;
D. M. Levin, Dr.Sc., Ph.D., Tula, Russia;	E. L. Shishkina, Dr. Sc., Ph.D., Voronezh, Russia.

The journal has been registered at the Federal service for supervision of communications information technology and mass media (Roskomnadzor). Publication frequency: 4 /year.

Commissioning Editor Yu. V. Ivakhnenko
Proofreading Yu. V. Ivakhnenko
Computer imposition O. V. Chernova
Dummy layout by V. B. Vasilyev
E-mail: vasilyev_v@bsu.edu.ru

Typeface Times. Publisher's signature 6,7
Date of publishing 30.09.2022.
The layout is presented by Department of the united
Editorial Board of Scientific Journals Belgorod
National Research University
Address: 85 Pobeda St., Belgorod, 308015, Russia

Mass media registration certificate
EL № FS 77-77959 dd 19.02.2020.

© Belgorod National Research University, 2022

CONTENTS

MATHEMATICS

A. Farajov

On a non-local inverse boundary value problem for the sixth-order Boussinesq equation with non-local time integral conditions of the second kind **141**

A. Vasilyev, V. Vasiluev

Difference equations in discrete spaces **154**

PHYSICS. MATHEMATICAL MODELING

N. Astapov, V. Kurguzov

Simulation of elastoplastic fracture of an edge cracked plate **160**

I. Belyaeva, I. Kirichenko, N. Chekanova

Solution of the nonlinear ordinary differential equation of Ermakov by power series **171**

A. Kochura, A. Borisenko, V. Zakhvalinskii, Aung Zaw Htet

Alternating Magnetoresistance and Temperature Dependence of Electrical Conductivity of Single Crystals of Solid Solutions of Cadmium Arsenide **178**

T. Nikulicheva, E. Pilyuk, O. Ivanov, A. Morocho, M. Yapryntsev

Quantum corrections to conductivity in an amorphous semiconductor **186**

PERSONNEL

Editorial board of the journal "Applied Mathematics & Physics"

To the anniversary of Sergei Vasilyevich Rogozin **192**

МАТЕМАТИКА

УДК 517.95
MSC 35G15, 35R30
оригинальное исследование

DOI 10.52575/2687-0959-2022-54-3-141-153

ОБ ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ ОБРАТНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ БУССИНЕСКА ШЕСТОГО ПОРЯДКА С НЕЛОКАЛЬНЫМИ ИНТЕГРАЛЬНЫМИ ПО ВРЕМЕНИ УСЛОВИЯМИ ВТОРОГО РОДА

А. С. Фараджев 

(Статья представлена членом редакционной коллегии В. Б. Васильевым)

Азербайджанский Государственный Педагогический Университет,
Баку, AZ1000, Азербайджан


E-mail: a.farajov@mail.ru

Аннотация. В работе изучается классическое решение одной нелинейной обратной краевой задачи для уравнения Буссинеска шестого порядка с двойной дисперсией с нелокальными интегральными по времени условиями второго рода. Суть задачи состоит в том, что требуется вместе с решением определить неизвестные коэффициенты. Задача рассматривается в прямоугольной области. При решении исходной обратной краевой задачи осуществляется переход от исходной обратной задачи к некоторой вспомогательной обратной задаче. С помощью сжатых отображений доказываются существование и единственность решения вспомогательной задачи. Затем вновь производится переход к исходной обратной задаче, в результате делается вывод о разрешимости исходной обратной задачи.

Ключевые слова: обратная краевая задача, классическое решение, метод Фурье, уравнения Буссинеска шестого порядка

Для цитирования: Фараджев А. С. 2022. Об одной нелокальной обратной краевой задаче для уравнения Буссинеска шестого порядка с нелокальными интегральными по времени условиями второго рода. Прикладная математика & Физика, 54(3): 141–153. DOI 10.52575/2687-0959-2022-54-3-141-153

ON A NON-LOCAL INVERSE BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE SIXTH-ORDER BOUSSINESQ EQUATION WITH NON-LOCAL TIME INTEGRAL CONDITIONS OF THE SECOND KIND

Araz Salamulla ogly Farajov 

(Article submitted by a member of the editorial board V. B. Vasilyev)

Azerbaijan State Pedagogical University,
Baku, AZ1000, Azerbaijan

E-mail: a.farajov@mail.ru

Received June, 06, 2022

Abstract. In this paper, studies the classical solution of a nonlinear inverse boundary value problem for the Boussinesq equation of the sixth order with double variance with nonlocal time integral conditions of the second kind. The essence of the problem is that it is required to determine an unknown coefficients together with the solution. The problem is considered in a rectangular area. When solving the original inverse boundary value problem, a transition is made from the original inverse problem to some auxiliary inverse problem. With the help of compressed maps, the existence and uniqueness of the solution of the auxiliary problem are proved. Then the transition to the original inverse problem is made again, as a result, a conclusion is made about the solvability of the original inverse problem.

Keywords: inverse boundary value problem, classical solution, Fourier method, sixth-order Boussinesq equations

For citation: Farajov Araz Salamulla ogly. 2022. On a Nonlocal Inverse Boundary Value Problem for the Boussinesq Equation of the Sixth Order with Nonlocal Time-Integral Conditions of the Second Kind. Applied Mathematics & Physics, 54(3): 141–153 (in Russian). DOI 10.52575/2687-0959-2022-54-3-141-153

1. Введение. В данной статье рассматривается нелокальная обратная задача для уравнения Буссинеска шестого порядка с дополнительным интегральным условием.

Теория обратных задач для дифференциальных уравнений является динамично развивающимся разделом современной науки. Обратные задачи возникают в самых различных областях человеческой деятельности, таких, как сейсмология, разведка полезных ископаемых, биология, медицина, контроль качества промышленных изделий и т. д., что ставит их в ряд актуальных проблем современной математики. Наличие в обратных задачах дополнительных неизвестных функций требует, чтобы, помимо граничных условий, естественных для того или иного класса дифференциальных уравнений, задавались также некоторые дополнительные условия переопределения.

Направление в теории дифференциальных уравнений, связанное с исследованием разрешимости нелокальных задач с интегральными условиями, активно развивается в последнее время. Объясняется это потребностями математического моделирования – см. например, работу [13], в которой показывается влияние эффектов нелокальности и памяти на математическую модель того или иного процесса, и потребностями развития собственно математики, поскольку задачи с нелокальными условиями вообще, и с нелокальными условиями интегрального вида в частности представляют собой новый класс задач теории дифференциальных уравнений с частными производными. Например, нелокальные задачи с граничными условиями интегрального вида для многомерных гиперболических уравнений изучены в работах [4]-[6].

При исследовании обратных краевых задач существенную роль играет соответствующая прямая задача, а именно при нахождении решения обратной задачи, во многих случаях, используется формула решения прямой краевой задачи. Ниже приводим некоторые работы, где изучены прямые и обратные задачи, близкие к задаче, изучаемой в настоящей статье.

Уравнение Буссинеска шестого порядка с двойной дисперсией описывает движение волн на воде с поверхностью напряжения и рассмотрено Шнайдером и Юджином в [16],

$$u_{xx} = u_{xx} + u_{xxtt} + \mu u_{xxxx} - u_{xxxxt} + (u^2)_{xx},$$

где $x, t, \mu \in R$ и $u(x, t) \in R$. Эта модель также может быть формально выведена из задачи о двумерных волнах на воде. Для вырожденного случая они доказали, что предел длинных волн можно приблизительно описать двумя несвязанными уравнениями Кавахары. В [19]-[21] исследовано существование и единственность глобального решения задачи Коши для затухающего уравнения Буссинеска шестого порядка двойной дисперсией:

$$u_{tt} - u_{ttxx} - u_{xx} + u_{xxxx} - u_{xxxxx} - ru_{ttx} = f(u)_{xx}, \quad x \in R, \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = \phi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad x \in R,$$

где $u(x; t), f(s)$ и r обозначают неизвестную функцию, заданную нелинейную функцию и константу соответственно. В работе [22] задача Коши изучена для уравнения

$$u_{tt} - u_{xxtt} - u_{xx} + u_{xxxx} + u_{xxxxt} = f(u_x)_x.$$

В работах [17]-[18] найдены условия существования обобщенного решения начальной задачи для уравнения типа Буссинеска со степенной нелинейности $f(u) = \beta|u|^p$.

В работах [10], [14] доказаны теоремы о существовании и единственности классических решений краевых задач для уравнения Буссинеска шестого порядка с нелокальными интегральными условиями.

Различные обратные задачи для отдельных типов дифференциальных уравнений в частных производных высшего порядка изучались в работах [1],[2], [3], [7], [8], [9], [15]. Краткое сообщение данной статьи опубликовано в [11].

2. Постановка задачи и ее сведение к эквивалентной задаче. Пусть $D_T = \{(x, t) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T\}$. Далее, пусть $f(x, t), g(x, t), \varphi(x), \psi(x), p_1(t), p_2(t), h_1(t), h_2(t)$ – заданные функции, определенные при $x \in [0, 1], t \in [0, T]$. Рассмотрим следующую обратную краевую задачу: найти тройку $\{u(x, t), a(t), b(t)\}$ функций $u(x, t), a(t), b(t)$ удовлетворяющих уравнению

$$\begin{aligned} u_{tt}(x, t) - u_{xx}(x, t) - u_{ttxx}(x, t) + u_{xxxx}(x, t) + u_{ttxxxx}(x, t) = \\ = a(t)u(x, t) + b(t)g(x, t) + f(x, t) \end{aligned} \quad (1)$$

с нелокальными начальными условиями

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \int_0^T p_1(t)u(x, t)dt + \varphi(x), \\ u_t(x, 0) &= \int_0^T p_2(t)u(x, t)dt + \psi(x) \quad (0 \leq x \leq 1), \end{aligned} \quad (2)$$

граничными условиями

$$u(0, t) = u_x(1, t) = u_{xx}(0, t) = u_{xxx}(1, t) = 0 \quad (0 \leq t \leq T) \quad (3)$$

и с дополнительными условиями

$$u(x_j, t) = h_i(t) \quad (i = 1, 2; x_1 \neq x_2; 0 \leq t \leq T). \quad (4)$$

Введем обозначение:

$$\tilde{C}^{4,2}(D_T) = \{u(x, t) : u(x, t) \in C^2(D_T), u_{xxxx}(x, t), u_{ttxxxx}(x, t) \in C(D_T)\}.$$

Определение 1.1. Тройку $\{u(x, t), a(t), b(t)\}$ функций $u(x, t) \in C^{4,2}(D_T)$, $a(t) \in C[0, T]$ и $b(t) \in C[0, T]$ удовлетворяющих уравнению (1) в D_T условию (2) в $[0, 1]$ и условиям (3)-(4) в $[0, T]$, назовем классическим решением обратной краевой задачи (1)-(4).

Для исследования (1)-(4) рассмотрим следующую задачу:

$$y''(t) = a(t)y(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (5)$$

$$y(0) = \int_0^T p_1(t)y(t)dt, \quad y'(0) = \int_0^T p_2(t)y(t)dt, \quad (6)$$

где $p_1(t)$, $p_2(t)$, $a(t) \in C[0, T]$ – заданные функции, а $y = y(t)$ – искомая функция, причем под решением задачи (6), (7) понимаем функцию $y(t)$, принадлежащую $C^2[0, T]$ и удовлетворяющую условиям (5), (6) в обычном смысле.

Справедлива следующая

Лемма 1.1. [8] Пусть $p_1(t)$, $p_2(t) \in C[0, T]$, $a(t) \in C[0, T]$ и

$$\|a(t)\|_{C[0,T]} \leq R = \text{const}.$$

Кроме того, пусть выполнено неравенство

$$\left(T\|p_2(t)\|_{C[0,T]} + \|p_1(t)\|_{C[0,T]} + \frac{T}{2}R \right) T < 1.$$

Тогда задача (5), (6) имеет только тривиальное решение.

Теперь наряду с обратной краевой задачей (1)-(4) рассмотрим следующую вспомогательную обратную краевую задачу. Требуется определить тройку $\{u(x, t), a(t), b(t)\}$ функций $u(x, t) \in C^{4,2}(D_T)$, $a(t) \in C[0, T]$, и $b(t) \in C[0, T]$ из соотношений (1)-(3) и

$$\begin{aligned} h_i''(t) - u_{xx}(x_i, t) - u_{ttxx}(x_i, t) + u_{xxxx}(x_i, t) + u_{ttxxxx}(x_i, t) = \\ = a(t)h_i(t) + b(t)g(x_i, t) + f(x_i, t) \quad (i = 1, 2; 0 \leq t \leq T). \end{aligned} \quad (7)$$

Справедлива следующая

Теорема 1.1. Пусть $\varphi(x), \psi(x) \in C[0, 1]$, $p_i(t) \in C[0, T]$, $h_i(t) \in C^2[0, T]$ ($i = 1, 2$), $g(x, t) \in C(D_T)$, $h(t) \equiv h_1(t)g(x_2, t) - h_2(t)g(x_1, t) \neq 0$ ($0 \leq t \leq T$), $f(x, t) \in C(D_T)$, и выполняется условия согласования

$$\begin{aligned} h_i(0) &= \int_0^T p_1(t)h_i(t)dt + \varphi(x_i), \\ h_i'(0) &= \int_0^T p_2(t)h_i(t)dt + \psi(x_i), \quad (i = 1, 2). \end{aligned} \quad (8)$$

Тогда справедливы следующие утверждения: каждое классическое решение $\{u(x, t), a(t), b(t)\}$ задачи (1)-(4) является и решением задачи (1)-(3), (7) и каждое решение $\{u(x, t), a(t), b(t)\}$ задачи (1)-(3), (7) такое, что

$$\left(T\|p_2(t)\|_{C[0,T]} + \|p_1(t)\|_{C[0,T]} + \frac{T}{2}\|a(t)\|_{C[0,T]} \right) T < 1 \quad (9)$$

является классическим решением (1)-(4).

Доказательство. Пусть $\{u(x, t), a(t), b(t)\}$ является классическим решением задачи (1)-(4).

Подставляя в уравнение (1), $x = x_i$, находим:

$$\begin{aligned} u_{tt}(x_i, t) - u_{xx}(x_i, t) - u_{ttxx}(x_i, t) + u_{xxxx}(x_i, t) + u_{ttxxxx}(x_i, t) = \\ = a(t)u(x_i, t) + b(t)g(x_i, t) + f(x_i, t) \quad (i = 1, 2; 0 \leq t \leq T). \end{aligned} \quad (10)$$

Далее, считая $h_i(t) \in C^2[0, T]$ ($i = 1, 2$) и дифференцируя два раза (4), имеем:

$$u_{tt}(x_i, t) = h_i''(t) \quad (i = 1, 2; x_1 \neq x_2; 0 \leq t \leq T). \quad (11)$$

Из (13), с учетом (4) и (14), приходим к выполнению (7).

Теперь предположим, что является решением задачи (1)-(3), (7). Из (7) и (10) находим:

$$\frac{d^2}{dt^2}(u(x_i, t) - h_i(t)) = a(t)(u(x_i, t) - h_i(t)) \quad (i = 1, 2; 0 \leq t \leq T). \quad (12)$$

В силу (2) и условий согласования (8), имеем:

$$\begin{aligned} u(x_i, 0) - h_i(0) - \int_0^T p_1(t)(u(x_i, t) - h_i(t))dt &= \\ &= u(x_i, 0) - \int_0^T p_1(t)u(x_i, t)dt - \left(h_i(0) - \int_0^T p_1(t)h_i(t)dt \right) = \\ &= \varphi(x_i) - \left(h_i(0) - \int_0^T p_1(t)h_i(t)dt \right) = 0 \quad (i = 1, 2), \\ u_t(x_i, 0) - h_i'(0) - \int_0^T p_2(t)(u(x_i, t) - h_i(t))dt &= \\ &= u_t(x_i, 0) - \int_0^T p_2(t)u(x_i, t)dt - \left(h_i'(0) - \int_0^T p_2(t)h_i(t)dt \right) = \\ &= \psi(x_i) - \left(h_i'(0) - \int_0^T p_2(t)h_i(t)dt \right) = 0 \quad (i = 1, 2), \end{aligned} \quad (13)$$

Из (12) и (13), в силу Леммы 1.1., заключаем, что выполняются условия (4). Теорема доказана.

3. Разрешимость обратной краевой задачи. Первую компоненту $u(x, t)$ решения $\{u(x, t), a(t), b(t)\}$ задачи (1)-(3), (7) будем искать в виде:

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \sin \lambda_k x \quad \left(\lambda_k = \frac{\pi}{2}(2k - 1) \right), \quad (14)$$

где

$$u_k(t) = 2 \int_0^1 u(x, t) \sin \lambda_k x dx \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Тогда, применяя формальную схему Фурье, из (1) и (2) имеем:

$$(1 + \lambda_k^2 + \lambda_k^4)u_k''(t) + (\lambda_k^2 + \lambda_k^4)u_k(t) = F_k(t; u, a, b) \quad (0 \leq t \leq T; k = 1, 2, \dots) \quad (15)$$

$$\begin{aligned} u_k(0) &= \varphi_k + \int_0^T p_1(t)u_k(t)dt, \\ u_k'(0) &= \psi_k + \int_0^T p_2(t)u_k(t)dt \quad (k = 1, 2, \dots), \end{aligned} \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned} F_k(t; u, a, b) &= a(t)u_k(t) + b(t)g_k(t) + f_k(t), \quad f_k(t) = \int_0^1 f(x, t) \sin \lambda_k x dx, \\ g_k(t) &= \int_0^1 g(x, t) \sin \lambda_k x dx, \end{aligned}$$

$$\varphi_k = 2 \int_0^1 \varphi(x) \sin \lambda_k x dx, \quad \psi_k = 2 \int_0^1 \psi(x) \sin \lambda_k x dx \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Решая задачу (15)-(16), находим:

$$u_k(t) = \left(\varphi_k + \int_0^T p_1(t) u_k(t) dt \right) \cos \beta_k t + \frac{1}{\beta_k} \left(\psi_k + \int_0^T p_2(t) u_k(t) dt \right) \sin \beta_k t + \frac{1}{\beta_k (1 + \lambda_k^2 + \lambda_k^4)} \int_0^1 F_k(\tau; u, a, b) \sin \beta_k (t - \tau) d\tau \quad (k = 1, 2, \dots), \quad (17)$$

где

$$\beta_k^2 = \frac{\lambda_k^2 + \lambda_k^4}{1 + \lambda_k^2 + \lambda_k^4} \quad (k = 1, 2, \dots).$$

После подстановки выражения $u_k(t)$ ($k = 1, 2, \dots$) в (14) для определения компоненты $u(x, t)$ решения задачи (1)-(3), (5) получаем:

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \left(\varphi_k + \int_0^T p_1(t) u_k(t) dt \right) \cos \beta_k t + \frac{1}{\beta_k} \left(\psi_k + \int_0^T p_2(t) u_k(t) dt \right) \sin \beta_k t + \frac{1}{\beta_k (1 + \lambda_k^2 + \lambda_k^4)} \int_0^t F_k(\tau; u, a, b) \sin \beta_k (t - \tau) d\tau \right\} \sin \lambda_k x. \quad (18)$$

Теперь из (7), с учётом (14), имеем:

$$a(t) = [h(t)]^{-1} \left\{ g(x_2, t) (h_1''(t) - f(x_1, t)) - g(x_1, t) (h_2''(t) - f(x_2, t)) + \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^2 + \lambda_k^4) (u_k''(t) + u_k(t)) (g(x_2, t) \sin \lambda_k x_1 - g(x_1, t) \sin \lambda_k x_2) \right\}, \quad (19)$$

$$b(t) = [h(t)]^{-1} \left\{ h_1(t) (h_2''(t) - f(x_2, t)) - h_2(t) (h_1''(t) - f(x_1, t)) + \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^2 + \lambda_k^4) (u_k''(t) + u_k(t)) (h_1(t) \sin \lambda_k x_2 - h_2(t) \sin \lambda_k x_1) \right\}. \quad (20)$$

Из (15), с учетом (17), получаем:

$$\begin{aligned} (\lambda_k^2 + \lambda_k^4) (u_k''(t) + u_k(t)) &= -u_k''(t) + F_k(t; u, a, b) = \\ &= \frac{\lambda_k^2 + \lambda_k^4}{1 + \lambda_k^2 + \lambda_k^4} u_k(t) + \left(1 - \frac{1}{1 + \lambda_k^2 + \lambda_k^4} \right) F_k(t; u, a, b) = \\ &= \frac{\lambda_k^2 + \lambda_k^4}{1 + \lambda_k^2 + \lambda_k^4} u_k(t) + \frac{\lambda_k^2 + \lambda_k^4}{1 + \lambda_k^2 + \lambda_k^4} F_k(t; u, a, b) = \\ &= \beta_k^2 u_k(t) + \beta_k^2 F_k(t; u, a, b) = \\ &= \beta_k^2 \left[\left(\varphi_k + \int_0^T p_1(t) u_k(t) dt \right) \cos \beta_k t + \frac{1}{\beta_k} \left(\psi_k + \int_0^T p_2(t) u_k(t) dt \right) \sin \beta_k t + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\beta_k (1 + \lambda_k^2 + \lambda_k^4)} \int_0^t F_k(\tau; u, a, b) \sin \beta_k (t - \tau) d\tau \right] + \beta_k^2 F_k(t; u, a, b), \\ &\quad (k = 1, 2, \dots, 0 \leq t \leq T). \end{aligned}$$

Для того, чтобы получить уравнение для второй и третьей компоненты решения $\{u(x, t), a(t), b(t)\}$

задачи (1)-(3), (5) подставим последнее выражение в (19), (20):

$$\begin{aligned}
 a(t) = & [h(t)]^{-1} \left\{ g(x_2, t)(h_1''(t) - f(x_1, t)) - g(x_1, t)(h_2''(t) - f(x_2, t)) + \right. \\
 & + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\beta_k^2 \left[\left(\varphi_k + \int_0^T p_1(t)u_k(t)dt \right) \cos \beta_k t + \frac{1}{\beta_k} \left(\psi_k + \int_0^T p_2(t)u_k(t)dt \right) \sin \beta_k t + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{1}{\beta_k(1 + \lambda_k^2 + \lambda_k^4)} \int_0^t F_k(\tau; u, a, b) \sin \beta_k(t - \tau) d\tau \right] + \right. \\
 & \left. + \beta_k^2 F_k(t; u, a, b) \right] (g(x_2, t) \sin \lambda_k x_1 - g(x_1, t) \sin \lambda_k x_2) \Big\}, \tag{21}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b(t) = & [h(t)]^{-1} \left\{ h_1(t)(h_2''(t) - f(x_2, t)) - h_2(t)(h_1''(t) - f(x_1, t)) + \right. \\
 & + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\beta_k^2 \left[\left(\varphi_k + \int_0^T p_1(t)u_k(t)dt \right) \cos \beta_k t + \frac{1}{\beta_k} \left(\psi_k + \int_0^T p_2(t)u_k(t)dt \right) \sin \beta_k t + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{1}{\beta_k(1 + \lambda_k^2 + \lambda_k^4)} \int_0^t F_k(\tau; u, a, b) \sin \beta_k(t - \tau) d\tau \right] + \right. \\
 & \left. + \beta_k^2 F_k(t; u, a, b) \right] (h_1(t) \sin \lambda_k x_2 - h_2(t) \sin \lambda_k x_1) \Big\}. \tag{22}
 \end{aligned}$$

Таким образом, решение задачи (1)-(3), (7) сведено к решению системы (18), (21), (22) относительно неизвестных функций $u(x, t)$, $a(t)$ и $b(t)$.

Для изучения вопроса единственности решения задачи (1)-(3), (7) важную роль играет следующая

Лемма 1.2. Если $\{u(x, t), a(t), b(t)\}$ – любое классическое решение задачи (1)-(3), (7), то функции

$$u_k(t) = 2 \int_0^1 u(x, t) \sin \lambda_k x dx \quad (k = 1, 2, \dots)$$

удовлетворяют системе (17) в $[0, T]$.

Доказательство. Пусть $\{u(x, t), a(t), b(t)\}$ – любое решение задачи (1)-(3), (5). Тогда, умножив обе части уравнения (1) на функцию $2 \sin \lambda_k x$ ($k = 1, 2, \dots$), интегрируя полученное равенство по x от 0 до 1 и пользуясь соотношениями

$$\begin{aligned}
 2 \int_0^1 u_{tt}(x, t) \sin \lambda_k x dx &= \frac{d^2}{dt^2} \left(2 \int_0^1 u(x, t) \sin \lambda_k x dx \right) = u_k''(t) \quad (k = 1, 2, \dots), \\
 2 \int_0^1 u_{xx}(x, t) \sin \lambda_k x dx &= -\lambda_k^2 \left(2 \int_0^1 u(x, t) \sin \lambda_k x dx \right) = -\lambda_k^2 u_k(t) \quad (k = 1, 2, \dots), \\
 2 \int_0^1 u_{ttxx}(x, t) \sin \lambda_k x dx &= -\lambda_k^2 \left(2 \int_0^1 u_{tt}(x, t) \sin \lambda_k x dx \right) = -\lambda_k^2 u_k''(t) \quad (k = 1, 2, \dots), \\
 2 \int_0^1 u_{xxxx}(x, t) \sin \lambda_k x dx &= \lambda_k^4 \left(2 \int_0^1 u(x, t) \cos \lambda_k x dx \right) = \lambda_k^4 u_k(t) \quad (k = 1, 2, \dots), \\
 2 \int_0^1 u_{ttxxxx}(x, t) \sin \lambda_k x dx &= \lambda_k^4 \left(2 \int_0^1 u_{tt}(x, t) \cos \lambda_k x dx \right) = -\lambda_k^4 u_k(t) \quad (k = 1, 2, \dots),
 \end{aligned}$$

получаем, что удовлетворяется уравнение (15). Аналогично, из (2) получаем, что выполняется условие (16).

Таким образом, $u_k(t)$ ($k = 1, 2, \dots$) является решением задачи (15), (16). А отсюда непосредственно следует, что функции $u_k(t)$ ($k = 1, 2, \dots$) удовлетворяют на $[0, T]$ системе (17). Лемма доказана.

Очевидно, что если $u_k(t) = 2 \int_0^1 u(x, t) \sin \lambda_k x dx$ ($k = 1, 2, \dots$) является решением системы (17), то пара $\{u(x, t), a(t), b(t)\}$ функций $u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \sin \lambda_k x$, $a(t)$ и $b(t)$ является решением системы (18), (21), (22).

Из леммы 1.2 следует, что имеет место следующее

Следствие 1.1. Пусть система (18), (21), (22) имеет единственное решение. Тогда задача (1)-(3), (7) не может иметь более одного решения, т. е. если задача (1)-(3), (7) имеет решение, то оно единственно.

Теперь с целью исследования задачи (1)-(3), (7) рассмотрим следующие пространства:

1. Обозначим через $B_{2,T}^5$ (12) совокупность всех функций $u(x, t)$ вида

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \sin \lambda_k x \left(\lambda_k = \frac{\pi}{2}(2k - 1) \right),$$

рассматриваемых в D_T , где каждая из функций $u_k(t)$ ($k = 1, 2, \dots$) непрерывна в $[0, T]$ и

$$J_T(u) \equiv \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^5 \|u_k(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Норма в этом множестве определяется так:

$$\|u(x, t)\|_{B_{2,T}^5} = J(u).$$

2. Через E_T^5 обозначим пространство вектор-функций $\{u(x, t), a(t), b(t)\}$ таких, что $u(x, t) \in B_{2,T}^5$, $a(t) \in C[0, T]$, $b(t) \in C[0, T]$. Снабдим это пространство нормой

$$\|z\|_{E_T^5} = \|u(x, t)\|_{B_{2,T}^5} + \|a(t)\|_{C[0,T]} + \|b(t)\|_{C[0,T]}.$$

Очевидно, что $B_{2,T}^5$ и E_T^5 являются банаховыми пространствами. Теперь рассмотрим в пространстве E_T^5 оператор

$$\Phi(u, a, b) = \{\Phi_1(u, a, b), \Phi_2(u, a, b), \Phi_3(u, a, b)\},$$

где

$$\Phi_1(u, a, b) = \tilde{u}(x, t) \equiv \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{u}_k(t) \sin \lambda_k x, \quad \Phi_2(u, a, b) = \tilde{a}(t), \quad \Phi_3(u, a, b) = \tilde{b}(t),$$

где $\tilde{u}_k(t)$ ($k = 1, 2, \dots$), $\tilde{a}(t)$ и $\tilde{b}(t)$ равны соответственно правым частям (17), (21) и (22).

Очевидно, что

$$\frac{\sqrt{3}}{3} < \beta_k < \sqrt{2}, \quad \frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{1}{\beta_k} < \sqrt{3}.$$

Тогда имеем:

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^5 \|\tilde{u}_k(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{7} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^5 |\varphi_k|)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \sqrt{21} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^5 |\psi_k|)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \\ & + \sqrt{7} (\|p_1(t)\|_{C[0,T]} + \sqrt{3} \|p_2(t)\|_{C[0,T]}) T \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^5 \|u_k(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \sqrt{21T} \times \\ & \times \left(\int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k |f_k(\tau)|)^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} + \sqrt{21T} \|a(t)\|_{C[0,T]} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^5 \|u_k(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \\ & + \sqrt{21T} \|b(t)\|_{C[0,T]} \left(\int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k |g_k(\tau)|)^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned}
 \|\tilde{a}(t)\|_{C[0,T]} \leq & \| [h(t)]^{-1} \|_{C[0,T]} \left\{ \| g(x_2, t)(h_1''(t) - f(x_1, t)) - \right. \\
 & \left. - g(x_1, t)(h_2''(t) - f(x_2, t)) \|_{C[0,T]} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-2} \right)^{\frac{1}{2}} \| |g(x_1, t)| + \right. \\
 & \left. + |g(x_2, t)| \|_{C[0,T]} \times \left[\left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^5 |\varphi_k|)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \sqrt{3} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^5 |\psi_k|)^2 \right) + \right. \\
 & \left. + (\|p_1(t)\|_{C[0,T]} + \sqrt{3} \|p_2(t)\|_{C[0,T]}) T \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^5 \|u_k(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \right. \\
 & \left. + \sqrt{3T} \left(\int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k |f_k(\tau)|)^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} + \sqrt{3T} \|a(t)\|_{C[0,T]} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^5 \|u_k(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right. \\
 & \left. + \sqrt{3T} \|b(t)\|_{C[0,T]} \left(\int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k |g_k(\tau)|)^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} + \right. \\
 & \left. + \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k \|f_k(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \|b(t)\|_{C[0,T]} \times \right. \\
 & \left. \times \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k \|g_k(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \|a(t)\|_{C[0,T]} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^5 \|u_k(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\}, \tag{24}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \|\tilde{b}(t)\|_{C[0,T]} \leq & \| [h(t)]^{-1} \|_{C[0,T]} \left\{ \| h_1(t)(h_2''(t) - f(x_2, t)) - \right. \\
 & \left. - h_2(t)(h_1''(t) - f(x_1, t)) \|_{C[0,T]} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-2} \right)^{\frac{1}{2}} \| |h_1(t)| + |h_2(t)| \|_{C[0,T]} \times \right. \\
 & \left. \times \left[\left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^5 |\varphi_k|)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \sqrt{3} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^5 |\psi_k|)^2 \right) + \right. \\
 & \left. + \sqrt{3T} \left(\int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k |f_k(\tau)|)^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} + \sqrt{3T} \|a(t)\|_{C[0,T]} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^5 \|u_k(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right. \\
 & \left. + \sqrt{3T} \|b(t)\|_{C[0,T]} \left(\int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k |g_k(\tau)|)^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k \|f_k(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \right. \\
 & \left. + \|b(t)\|_{C[0,T]} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k \|g_k(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \right. \\
 & \left. + \|a(t)\|_{C[0,T]} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^5 \|u_k(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\}. \tag{25}
 \end{aligned}$$

Предположим, что данные задачи (1)-(3), (7) удовлетворяют следующим условиям:

1. $\varphi(x) \in C^4[0, 1], \varphi^5(x) \in L_2[0, 1], \varphi(0) = \varphi'(1) = \varphi''(0) = \varphi'''(1) = \varphi^4(0) = 0;$
2. $\psi(x) \in C^4[0, 1], \psi^5(x) \in L_2[0, 1], \psi(0) = \psi'(1) = \psi''(0) = \psi'''(1) = \psi^4(1) = 0;$
3. $f(x, t) \in C(D_T), f_x(x, t) \in L_2(D_T), f(0, t) = 0 (0 \leq t \leq T);$
4. $g(x, t) \in C(D_T), g_x(x, t) \in L_2(D_T), g(0, t) = 0 (0 \leq t \leq T);$
5. $h_i(t) \in C^2[0, T] (i = 1, 2), h(t) \equiv h_1(t)g(x_2, t) - h_2(t)g(x_1, t) \neq 0 (0 \leq t \leq T).$

Тогда из (23)-(25) имеем:

$$\begin{aligned}
 \|\tilde{u}(x, t)\|_{B_{2,T}^5} \leq & A_1(T) + B_1(T) \|a(t)\|_{C[0,T]} \|u(x, t)\|_{B_{2,T}^5} + \\
 & + C_1(T) \|u(x, t)\|_{B_{2,T}^5} + D_1(T) \|b(t)\|_{C[0,T]}, \tag{26}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|\tilde{a}(t)\|_{C[0,T]} &\leq A_2(T) + B_2(T)\|a(t)\|_{C[0,T]}\|u(x,t)\|_{B_{2,T}^5} + \\ &+ C_2(T)\|u(x,t)\|_{B_{2,T}^5} + D_2(T)\|b(t)\|_{C[0,T]}, \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \|\tilde{b}(t)\|_{C[0,T]} &\leq A_3(T) + B_3(T)\|a(t)\|_{C[0,T]}\|u(x,t)\|_{B_{2,T}^5} + \\ &+ C_3(T)\|u(x,t)\|_{B_{2,T}^5} + D_3(T)\|b(t)\|_{C[0,T]}, \end{aligned} \quad (28)$$

где

$$\begin{aligned} A_1(T) &= \sqrt{7}\|\varphi^{(5)}(x)\|_{L_2(0,1)} + \sqrt{21}\|\psi^{(5)}(x)\|_{L_2(0,1)} + \sqrt{21T}\|f_x(x,t)\|_{L_2(D_T)}, \\ B_1(T) &= \sqrt{21}T, C_1(T) = \sqrt{7}(\|p_1(t)\|_{C[0,T]} + \sqrt{3}\|p_2(t)\|_{C[0,T]})T, \\ D_1(t) &= \sqrt{21T}\|g_x(x,t)\|_{L_2(D_T)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_2(T) &= \|[h(t)]^{-1}\|_{C[0,T]} \left\{ \|h_1(t)(h_2''(t) - f(x_2,t)) - h_2(t)(h_1''(t) - \right. \\ &- f(x_1,t))\|_{C[0,T]} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-2} \right)^{\frac{1}{2}} \| |g(x_1,t)| + |g(x_2,t)| \|_{C[0,T]} \times \\ &\times \left[\|\varphi^5(x)\|_{L_2(0,1)} + \sqrt{3}\|\psi^5(x)\|_{L_2(0,1)} + \sqrt{3T}\|f_x(x,t)\|_{L_2(D_T)} + \right. \\ &\left. \left. + \|\|f_x(x,t)\|_{C[0,T]}\|_{L_2(0,1)} \right] \right\}, \end{aligned}$$

$$B_2(T) = \|[h(t)]^{-1}\|_{C[0,T]} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-2} \right)^{\frac{1}{2}} \| |g(x_1,t)| + |g(x_2,t)| \|_{C[0,T]} (T + 1),$$

$$\begin{aligned} C_2(T) &= \|[h(t)]^{-1}\|_{C[0,T]} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-2} \right)^{\frac{1}{2}} \| |g(x_1,t)| + |g(x_2,t)| \|_{C[0,T]} \times \\ &\times (\|p_1(t)\|_{C(0,T)} + \sqrt{3}\|p_2(t)\|_{C(0,T)})T, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_2(T) &= \|[h(t)]^{-1}\|_{C[0,T]} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-2} \right)^{\frac{1}{2}} \| |g(x_1,t)| + |g(x_2,t)| \|_{C[0,T]} \times \\ &\times \left(\sqrt{3T}\|g_x(x,t)\|_{L_2(D_T)} + \|\|g_x(x,t)\|_{C(0,T)}\|_{L_2(0,1)} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_3(T) &= \|[h(t)]^{-1}\|_{C[0,T]} \left\{ \|g(x_2,t)(h_1''(t) - f(x_1,t)) - g(x_1,t)(h_2''(t) - \right. \\ &- f(x_2,t))\|_{C[0,T]} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-2} \right)^{\frac{1}{2}} \| |h_1(t)| + |h_2(t)| \|_{C[0,T]} \times \\ &\times \left[\|\varphi^5(x)\|_{L_2(0,1)} + \sqrt{3}\|\psi^5(x)\|_{L_2(0,1)} + \sqrt{3T}\|f_x(x,t)\|_{L_2(D_T)} + \right. \\ &\left. \left. + \|\|f_x(x,t)\|_{C[0,T]}\|_{L_2(0,1)} \right] \right\}, \end{aligned}$$

$$B_3(T) = \|[h(t)]^{-1}\|_{C[0,T]} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-2} \right)^{\frac{1}{2}} \| |h_1(t)| + |h_2(t)| \|_{C[0,T]} (T + 1),$$

$$\begin{aligned} C_3(T) &= \|[h(t)]^{-1}\|_{C[0,T]} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-2} \right)^{\frac{1}{2}} \| |h_1(t)| + |h_2(t)| \|_{C[0,T]} \times \\ &\times (\|p_1(t)\|_{C(0,T)} + \sqrt{3}\|p_2(t)\|_{C(0,T)})T, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_3(T) &= \|[h(t)]^{-1}\|_{C[0,T]} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-2} \right)^{\frac{1}{2}} \| |h_1(t)| + |h_2(t)| \|_{C[0,T]} \times \\ &\times \left(\sqrt{3T}\|g_x(x,t)\|_{L_2(D_T)} + \|\|g_x(x,t)\|_{C(0,T)}\|_{L_2(0,1)} \right). \end{aligned}$$

Из неравенств (29)-(31) заключаем:

$$\begin{aligned} & \|\tilde{u}(x, t)\|_{B_{2,T}^5} + \|\tilde{a}(t)\|_{C[0,T]} + \|\tilde{b}(t)\|_{C[0,T]} \leq \\ & \leq A(T) + B(T)\|a(t)\|_{C[0,T]}\|u(x, t)\|_{B_{2,T}^5} + \\ & + C(T)\|u(x, t)\|_{B_{2,T}^5} + D(T)\|b(t)\|_{C[0,T]}, \end{aligned} \quad (29)$$

где

$$\begin{aligned} A(T) &= A_1(T) + A_2(T) + A_3(T), \quad B(T) = B_1(T) + B_2(T) + B_3(T), \\ C(T) &= C_1(T) + C_2(T) + C_3(T), \quad D(T) = D_1(T) + D_2(T) + D_3(T). \end{aligned}$$

Итак, можно доказать следующую теорему:

Теорема 1.2. Пусть выполнены условия 1-5 и

$$(B(T)A(T) + 2 + C(T) + D(T))(A(T) + 2) < 1. \quad (30)$$

Тогда задача (1)-(3), (7) имеет в шаре $K = K_R (\|z\|_{E_T^5} \leq R = A(T) + 2)$ пространства E_T^5 единственное решение.

Доказательство. В пространстве E_T^5 рассмотрим уравнение

$$z = \Phi z, \quad (31)$$

где $z = \{u, a, b\}$, компоненты $\Phi_i(u, a, b)$ ($i = 1, 2, 3$), оператора $\Phi(u, a, b)$ определены правыми частями уравнений (18), (21) и (22).

Рассмотрим оператор $\Phi(u, a, b)$ в шаре $K = K_R$ из E_T^5 . Аналогично (29) получаем, что для любых $z, z_1, z_2 \in K_R$ справедливы оценки:

$$\begin{aligned} \|\Phi z\|_{E_T^5} &\leq A(T) + B(T)\|a(t)\|_{C[0,T]}\|u(x, t)\|_{B_{2,T}^5} + C(T)\|u(x, t)\|_{B_{2,T}^5} + \\ &+ D(T)\|b(t)\|_{C[0,T]} \leq A(T) + B(T)(A(T) + 2)^2 + \\ &+ C(T)(A(T) + 2) + D(T)(A(T) + 2), \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \|\Phi z_1 - \Phi z_2\|_{E_T^5} &\leq B(T)R + \left(\|a_1(t) - a_2(t)\|_{C[0,T]} + \|u_1(x, t) - u_2(x, t)\|_{B_{2,T}^5}\right) + \\ &+ C(T)\|u_1(x, t) - u_2(x, t)\|_{B_{2,T}^5} + D(T)\|b_1(t) - b_2(t)\|_{C[0,T]}. \end{aligned} \quad (33)$$

Тогда из оценок (32), (33), с учетом (30), следует, что оператор Φ действует в шаре $K = K_R$ и является сжимающим. Поэтому в шаре $K = K_R$ оператор Φ имеет единственную неподвижную точку $\{u, a, b\}$, которая является в шаре $K = K_R$ единственным решением уравнения (31), т. е. $\{u, a, b\}$ является в шаре $K = K_R$ единственным решением системы (18), (21) и (22).

Функция $u(x, t)$, как элемент пространства $B_{2,T}^5$, имеет непрерывные производные $u(x, t), u_x(x, t), u_{xx}(x, t), u_{xxx}(x, t), u_{xxxx}(x, t)$ в D_T .

Из (15) нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^5 \|u_k''(t)\|_{C[0,T]})^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^5 \|u_k(t)\|_{C[0,T]})^2\right)^{\frac{1}{2}} + \\ & + \sqrt{2} \left\| \|f_x(x, t) + a(t)u_x(x, t) + b(t)g_x(x, t)\|_{C[0,T]} \right\|_{L_2(0,1)}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $u_{tt}(x, t), u_{ttx}(x, t), u_{ttxx}(x, t), u_{ttxxx}(x, t), u_{ttxxxx}(x, t)$ непрерывны в D_T .

Легко проверить, что уравнение (1) и условия (2), (3) и (7) удовлетворяются в обычном смысле. Следовательно, $\{u(x, t), a(t), b(t)\}$ является решением задачи (1)-(3), (7), причем, в силу следствия леммы 1.2., оно единственное в шаре $K = K_R$. Теорема доказана.

С помощью теоремы 1.1. доказывается следующая

Теорема 1.3. Пусть выполняются все условия теоремы 1.2. и

$$\begin{aligned} h_i(0) &= \int_0^T p_1(t)h_i(t)dt + \varphi(x_i), \quad h_i(0) = \int_0^T p_2(t)h_i(t)dt + \psi(x_i) \quad (i = 1, 2), \\ & \left(T\|p_2(t)\|_{C[0,T]} + \|p_1(t)\|_{C[0,T]} + \frac{T}{2}(A(T) + 2)\right)T < 1. \end{aligned}$$

Тогда задача (1)-(4) имеет в шаре $K = K_R (\|z\|_{E_T^5} \leq R = A(T) + 2)$ из E_T^5 единственное классическое решение.

Список литературы

1. Камынин В. Л. 2013. Обратная задача определения младшего коэффициента в параболическом уравнении при условии интегрального наблюдения. Математические заметки. 94(2): 207–217.
2. Камынин В. Л. 2019. Обратная задача одновременного определения двух зависящих от пространственной переменной младших коэффициентов в параболическом уравнении. Математические заметки. 106(2): 248–261.
3. Камынин В. Л. 2020. Об обратной задаче одновременного определения двух зависящих от времени младших коэффициентов в недивергентном параболическом уравнении на плоскости. Математические заметки. 107(1): 74–86.
4. Кожанов А. И., Пулькина Л. С. 2005. Краевые задачи с интегральным граничным условием для многомерных гиперболических уравнений. Доклады РАН. 404(5): 589–592.
5. Кожанов А. И., Пулькина Л. С. 2006. О разрешимости краевых задач с нелокальным граничным условием интегрального вида для многомерных гиперболических уравнений. Дифференциальные уравнения. 42(9): 1166–1179.
6. Кожанов А. И., Дюжева А. В. 2021. Нелокальные задачи с интегральным смещением для параболических уравнений высокого порядка. Известия Иркутского государственного университета. Серия: Математика. 36: 14–28.
7. Кожанов А. И. 2019. Обратные задачи определения параметра поглощения в уравнении диффузии. Математические заметки, 106(3): 395–408.
8. Мегралиев Я. Т., Ализаде Ф. Х. 2016. Обратная краевая задача для одного уравнения Буссинеска четвертого порядка с нелокальными интегральными по времени условиями второго рода. Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки, 26(4): 503–514.
9. Мегралиев Я. Т., Фараджев А. С. 2021. О разрешимости обратной краевой задачи для уравнения Буссинеска шестого порядка с двойной дисперсией. Фундаментальные и прикладные проблемы математики и информатики. Материалы XIV Международной конференции, приуроченной к 90-летию Дагестанского государственного университета 16-19 сентября 2021 г., 156–158.
10. Фараджев А. С. 2021. Задача для уравнения Буссинеска шестого порядка с двойной дисперсией и нелокальными интегральными условиями. Proceedings of IAM. 10(2): 135–148.
11. Фараджев А. С. 2021. Об одной нелокальной обратной краевой задаче для уравнения Буссинеска шестого порядка. Дифференциальные уравнения, математическое моделирование и вычислительные алгоритмы: сборник материалов международной конференции, Белгород, 25-29 октября 2021 г., 243–245.
12. Худавердиев К. И., Велиев А. А. 2010. Исследование одномерной смешанной задачи для одного класса псевдогиперболических уравнений третьего порядка с нелинейной операторной правой частью. Баку, 168.
13. Bazant Z., Jirasek M. 2002. Nonlocal Integral Formulations of Plasticity and Damage: Survey of Progress. J. Eng. Mech. 128: 1–20.
14. Farajov A. S. 2021. On a non-local boundary value problem for the sixth-order Boussinesq equation with double variance. Transactions of Azerbaijan Ped. Univ. Ser. of math. and natural sciences. 69(2): 22–33.
15. Farajov A. S. 2021. Inverse boundary value problem for the sixth-order Boussinesq equation with double variance. News of Baku university, Series of physico-mathematical sciences. 3: 16–27.
16. Schneider G., Eugene C.W. 2001. Kawahara dynamics in dispersive media. Physica. D. 152-153: 384–394.
17. Taskesen H., Polat N., Ertas A. 2012. On global solutions for the Cauchy problem of a Boussinesq-type equation. Abstract and Applied Analysis. Hindawi.
18. Taskesen H., Polat N. 2013. Global existence for a double dispersive sixth order Boussinesq equation. Contemporary Analysis and Applied Mathematics (CAAM). 1(1): 60–69.
19. Wang Y. 2016. Cauchy problem for the sixth-order damped multidimensional Boussinesq equation. Elec. J.Di. Eqn., 64: 1–16.

20. Wang H. W. and Esfahani A. 2014. Global rough solutions to the sixth-order Boussinesq equation. *Nonlinear Anal.-Theor.*, 102: 97–104.
21. Wang Y. 2017. Existence and blow-up of solution of Cauchy problem for the sixth order damped Boussinesq equation. *Bulletin of the Iranian Mathematical Society*. 43(5): 1057–1071.
22. Wang Y. 2018. Global solutions for a class of nonlinear sixth-order wave equation. *Bulletin of the Korean Mathematical Society*. 55(4): 1161–1178.

References

1. Kamynin V. L. 2013. The Inverse Problem of Determining the Lower-Order Coefficient in Parabolic Equations with Integral Observation. *Math. Notes*, 94(2): 205–213.
2. Kamynin V. L. 2019. The Inverse Problem of Simultaneous Determination of the Two Lower Space-Dependent Coefficients in a Parabolic Equation. *Math. Notes*, 106(2): 235–247.
3. Kamynin V. L. 2020. The Inverse Problem of Simultaneous Determination of the Two Time-Dependent Lower Coefficients in a Nondivergent Parabolic Equation in the Plane. *Math. Notes*, 107(1): 93–104.
4. Kozhanov A. I., Pulkina L. S. 2005. Boundary Value Problems with an Integral Boundary Condition for Multidimensional Hyperbolic Equations. *Reports of the Russian Academy of Sciences*. 404(5): 589–592.
5. Kozhanov A. I., Pulkina L. S. 2006. On the solvability of boundary value problems with a nonlocal boundary condition of integral form for multidimensional hyperbolic equations. *Differ. Equ.*, 42(9): 1233–1246.
6. Kozhanov A. I., Dyuzheva A. V. 2021. Nonlocal problems with integral displacement for high-order parabolic equations. *Izvestia of the Irkutsk State University. Series: Mathematics*. 36: 14–28.
7. Kozhanov A. I. 2019. Inverse Problems of Finding the Absorption Parameter in the Diffusion Equation. *Math. Notes*. 106(3): 378–389.
8. Mehraliev Ya. T., Alizade F. Kh. 2016. Inverse boundary value problem for a fourth-order Boussinesq equation with non-local time integral conditions of the second kind. *Vestn. Udmurtsk. university Mat. Fur. Computer. Nauki*, 26(4): 503–514.
9. Mehraliev Ya.T., Farajov A. S. 2021. On the solvability of the inverse boundary value problem for the Boussinesq equation of the sixth order with double dispersion. *Fundamental and applied problems of mathematics and informatics. Proceedings of the XIV International Conference dedicated to the 90th anniversary of the Dagestan State University September 16-19, 2021*. 156-158.
10. Farajov A. S. 2021. A problem for the sixth-order Boussinesq equation with double dispersion and nonlocal integral conditions. *Proceedings of IAM*. 10(2): 135–148.
11. Farajov A. S. 2021. On a Nonlocal Inverse Boundary Value Problem for the Boussinesq Equation of the Sixth Order. "Differential Equations, Mathematical Modeling and Computational Algorithms"Belgorod, October 25-29, 2021. 243–245.
12. Khudaverdiev K. I., Veliyev A. A. 2010. Study of a one-dimensional mixed problem for a class of third-order pseudohyperbolic equations with a nonlinear operator right-hand side. *Baku*. 168.
13. Bazant Z., Jirasek M. 2002. Nonlocal Integral Formulations of Plasticity and Damage: Survey of Progress. *J. Eng. Mech.* 128: 1–20.
14. Farajov A. S. 2021 On a non-local boundary value problem for the sixth-order Boussinesq equation with double variance. *Transactions of Azerbaijan Ped. Univ. Ser. of math. and natural sciences*. 69(2): 22–33.
15. Farajov A. S. 2021. Inverse boundary value problem for the sixth-order Boussinesq equation with double variance. *News of Baku university ,Series of physico-mathematical sciences*. 3: 16–27.
16. Schneider G., Eugene C.W. 2001. Kawahara dynamics in dispersive media. *Physica. D*. 152-153: 384–394.
17. Taskesen H., Polat N., Ertas A. 2012. On global solutions for the Cauchy problem of a Boussinesq-type equation. *Abstract and Applied Analysis*. Hindawi.
18. Taskesen H., Polat N. 2013. Global existence for a double dispersive sixth order Boussinesq equation. *Contemporary Analysis and Applied Mathematics (CAAM)*. 1(1): 60–69.

19. Wang Y. 2016. Cauchy problem for the sixth-order damped multidimensional Boussinesq equation. Elec. J.Di. Eqn., 64: 1–16.
20. Wang H. W. and Esfahani A. 2014. Global rough solutions to the sixth-order Boussinesq equation. Nonlinear Anal.-Theor., 102: 97–104.
21. Wang Y. 2017. Existence and blow-up of solution of Cauchy problem for the sixth order damped Boussinesq equation. Bulletin of the Iranian Mathematical Society. 43(5): 1057–1071.
22. Wang Y. 2018. Global solutions for a class of nonlinear sixth-order wave equation. Bulletin of the Korean Mathematical Society. 55(4): 1161–1178.

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 27.04.2022

Поступила после рецензирования 01.06.2022

Принята к публикации 06.06.2022

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Фараджев Араз Саламулла оглы – кандидат физико-математических наук, доцент, декан факультета математики, Азербайджанский Государственный Педагогический Университет.

ул. У. Гаджибекова, 68, Баку, AZ 1000, Азербайджан

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Araz Farajov Salamulla – PhD, Associate Professor, Dean of the Faculty of Mathematics, Azerbaijan State Pedagogical University, Baku, Azerbaijan,

УДК 517.929
MSC 39A06; 42A85
оригинальное исследование

DOI 10.52575/2687-0959-2022-54-3-154-159

DIFFERENCE EQUATIONS IN DISCRETE SPACES

A. V. Vasilyev¹ , V. B. Vasilyev² 

¹ООО "Severgrup"

Moscow, 123423, Russia

² Belgorod National Research University,
Belgorod, 308015, Russia

E-mail: alexvassel@gmail.com, vbv57@inbox.ru

Received September, 05, 2022

Abstract. One considers a general difference equation with variable coefficients in discrete spaces. The conditions for unique solvability and Fredholmness for such equation are given using the theory of periodic Riemann boundary value problem. Key role in the studying takes the periodic analogue of the Hilbert transform, it permits to obtain explicit solution for particular cases. Also, this transform has very important properties related to a holomorphy. It leads to Fredholm properties for more general cases of difference equations.

Keywords: discrete spaces, Hilbert transform, general difference equation, Fredholm solvability

For citation: Vasilyev Alexander, Vasilyev Vladimir. 2022. Difference equations in discrete spaces. Applied Mathematics & Physics, 54(3): 154–159. DOI 10.52575/2687-0959-2022-54-3-154-159

РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ДИСКРЕТНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

А. В. Васильев¹ , В. Б. Васильев² 

¹ООО «Севергрупп»,

Москва, 123423, Россия

² Белгородский государственный национальный исследовательский университет,
Белгород, 308015, Россия

E-mail: alexvassel@gmail.com, vbv57@inbox.ru

Аннотация. Рассматривается общее разностное уравнение с переменными коэффициентами в дискретных пространствах. Приведены условия однозначной разрешимости и фредгольмовости такого уравнения с использованием теории периодической краевой задачи Римана. Ключевую роль в изучении играет периодический аналог преобразования Гильберта, позволяющий получить явное решение для частных случаев. Кроме того, это преобразование обладает очень важными свойствами, связанными с голоморфностью. Это приводит к свойствам Фредгольма для более общих случаев разностных уравнений.

Ключевые слова: дискретные пространства, преобразование Гильберта, общее разностное уравнение, фредгольмова разрешимость

Для цитирования: Васильев А. В., Васильев В. Б. 2022. Разностные уравнения в дискретных пространствах. Прикладная математика & Физика, 54(3): 154–159. DOI 10.52575/2687-0959-2022-54-3-154-159

1. Introduction. We consider a general linear difference equation of the type

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} a_k(x)u(x + \beta_k) = v(x), \quad x \in D, \quad (1)$$

where D is the space \mathbf{R}^m or a half-space \mathbf{R}_+^m for a continual case, and \mathbf{Z}^m and discrete half-space \mathbf{Z}_+^m for a discrete one, $\{\beta_k\} \subset D$ is given sequence, $\beta_k = (\beta_{k_1}, \dots, \beta_{k_m})$. For continual variable x we use the term "difference equation and for discrete one "discrete equation".

Situations are very distinct if we consider the equation on a whole space or on a half-space. Here we'll consider the case \mathbf{Z}_+^m because other situations will be considered in separate publications.

Such equations arise in many applied problems, for example in a control theory and digital signal processing [1], thus a problem of their solvability is a very actual. We choice the space $L_2(D)$ as an initial functional space,

but these equations can be considered in more general spaces $L_p(D)$. Key point in our study plays the special lacunary Fourier series

$$\sigma(x, \xi) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_k(x) e^{i\beta_k \cdot \xi}, \tag{2}$$

assuming the series (2) is convergent almost everywhere.

Definition 1. The function $\sigma(x, \xi)$ is called a symbol of the equation (1) or a symbol of the discrete-difference operator

$$\mathcal{D} : u(x) \mapsto \sum_{-\infty}^{+\infty} a_k(x) u(x + \beta_k), \quad x \in D.$$

Remark. This function $\sigma(x, \xi)$ is a periodic function on variable ξ because $\{\beta_k\} \subset \mathbf{Z}^m$. We'll denote its basic cube of periods by $[-T, T]^m$ and if $\{\beta_k\} = \mathbf{Z}^m$ then $T = \pi$.

2. Difference equations with constant coefficients. The first step in our studying will be the following discrete equation with constant coefficients

$$\sum_{|k|=0}^{+\infty} a_k u(\tilde{x} + \beta_k) = v(\tilde{x}), \quad \tilde{x} \in \mathbf{Z}_+^m, \quad \{\beta_k\} \subset \mathbf{Z}_+^m, \tag{3}$$

or in other words finding invertibility conditions for the operator

$$\mathcal{D}_{\tilde{x}_0} : u(\tilde{x}) \mapsto \sum_{|k|=0}^{+\infty} a_k(\tilde{x}_0) u(\tilde{x} + \beta_k), \quad \tilde{x} \in \mathbf{Z}_+^m, \tag{4}$$

where the point $\tilde{x}_0 \in \mathbf{Z}_+^m$ is fixed.

Given operator (4) one defines its symbol

$$\sigma(x_0, \xi) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_k(\tilde{x}_0) e^{i\beta_k \cdot \xi},$$

and introduces.

Definition 2. A symbol $\sigma(x, \xi)$ is called an elliptic symbol if $\sigma(\tilde{x}, \xi) \neq 0, \forall \tilde{x} \in \mathbf{Z}_+^m, \xi \in [-T, T]^m$.

Further one considers a more general equation with two difference-discrete operators \mathcal{A}, \mathcal{B} with constant coefficients and two projectors P_{\pm} on a discrete half-space \mathbf{Z}_{\pm}^m . More precisely let's denote

$$\mathcal{A} : u(\tilde{x}) \mapsto \sum_{|k|=0}^{+\infty} a_k u(\tilde{x} + \alpha_k), \quad \mathcal{B} : u(\tilde{x}) \mapsto \sum_{|k|=0}^{+\infty} b_k u(\tilde{x} + \beta_k),$$

$$\tilde{x} \in \mathbf{Z}_+^m, \quad \{\alpha_k\}, \{\beta_k\} \subset \mathbf{Z}_+^m,$$

and consider the equation

$$(\mathcal{A}P_+ + \mathcal{B}P_-)U = V \tag{5}$$

in the space $L_2(\mathbf{Z}^m)$. We denote symbols of operators \mathcal{A}, \mathcal{B} by $\sigma_{\mathcal{A}}(\xi), \sigma_{\mathcal{B}}(\xi)$.

It is well known the equation (3) is equivalent to the equation (5) with $\mathcal{B} = I, I$ is an identity operator, that's why we study the equation (5).

2.1. Periodic analogue of the Hilbert transform. We denote $\xi = (\xi', \xi_m), \xi' = (\xi_1, \dots, \xi_{m-1})$ and introduce two operators acting in the space $L_2([-\pi, \pi]^m)$

$$P_{\xi'}^{per} = \frac{1}{2}(I + H_{\xi'}^{per}), \quad Q_{\xi'}^{per} = \frac{1}{2}(I - H_{\xi'}^{per}),$$

where $H_{\xi'}^{per}$ is the following periodic analogue of the Hilbert transform

$$(H_{\xi'}^{per} u)(\xi', \xi_m) = \frac{1}{2\pi i} v.p. \int_{-\pi}^{+\pi} \cot \frac{\xi_m - \eta_m}{2} u(\xi', \eta_m) d\eta_m.$$

All details related to these operators can be found in authors' papers [14, 16]. Here we give some needed results only.

Lemma 1. We have the following relations

$$FP_+ = P_{\xi'}^{per} F, \quad FP_- = Q_{\xi'}^{per} F.$$

Thus after applying the Fourier transform to (5) we obtain

$$\sigma_{\mathcal{A}}(\xi)(P_{\xi'}^{per} \tilde{U})(\xi) + \sigma_{\mathcal{B}}(\xi)(Q_{\xi'}^{per} \tilde{U})(\xi) = \tilde{V}(\xi), \quad (6)$$

and the last equation (6) is one-dimensional characteristic singular integral equation with the Hilbert kernel depending on a parameter ξ' [3, 8]. But for solving this equation we need another periodic analogue of the Riemann boundary value problem than usual Riemann-Hilbert problem [3, 8].

2.2. Periodic Riemann boundary value problem. We formulate this problem in the following way [16]. Let Π_{\pm} be two half-strips $\Pi_{\pm} = \{z \in \mathbb{C} : z = t + is, t \in [-\pi, \pi], \pm s > 0\}$.

Periodic Riemann boundary value problem is called the following problem [16]: finding a pair of functions $\Phi^{\pm}(z)$ analytical in Π_{\pm} for which their boundary values under $s \rightarrow 0_{\pm}$ satisfy on the segment $[-\pi; \pi]$ the following linear relation

$$\Phi^{+}(t) = G(t)\Phi^{-}(t) + g(t), \quad t \in [-\pi; \pi],$$

where $G(t)$, $g(t)$ are given functions on $[-\pi; \pi]$, $G(-\pi) = G(\pi)$, $g(-\pi) = g(\pi)$.

For the solution one introduces an integral of the type

$$\Phi(z) = \frac{1}{4\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \cot \frac{x-z}{2} dx, \quad z \in \Pi_{\pm},$$

which is analogue of the well known Cauchy type integral. Further we have analogue of Plemelj-Sokhotskii formulas [3, 8, 16]

Lemma 2. *If $\varphi(t)$ satisfies the Hölder condition on the segment $[-\pi; \pi]$, $\varphi(-\pi) = \varphi(\pi)$, then $(\Phi(z))$ has boundary values $\Phi^{\pm}(t)$ under $s \rightarrow 0_{\pm}$ which are given by formulas*

$$\begin{aligned} \Phi^{+}(\tau) &= \frac{1}{4\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \cot \frac{t-\tau}{2} dt + \frac{\varphi(\tau)}{2} + C, \\ \Phi^{-}(\tau) &= \frac{1}{4\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \cot \frac{t-\tau}{2} dt - \frac{\varphi(\tau)}{2} + C; \end{aligned}$$

where the integral is treated in principal value sense.

These formulas guarantee a validity of lemma 1 at least for smooth functions.

For solving the periodic Riemann boundary value problem and taking into account a parameter ξ' we give the following

Definition 3. *Factorization of the elliptic symbol $\sigma(\xi)$ on the variable ξ_m is called its representation in the form*

$$\sigma(\xi', \xi) = \sigma_{+}(\xi', \xi) \cdot \sigma_{-}(\xi', \xi),$$

where the factors σ_{\pm} admit an analytical continuation into complex half-strips Π_{\pm} for almost all fixed $\xi' \in [-T, T]^{m-1}$ and $\sigma_{\pm} \in L_{\infty}[-T, T]^m$.

Such factorization and related constructions can be realized with help of the periodic Hilbert transform $H_{\xi'}^{per}$ in dependence of so called index of factorization [3, 8, 6, 4, 14, 16].

Assuming that $\sigma_{\mathcal{A}}, \sigma_{\mathcal{B}}$ are continuous functions on $[-T, T]^m$ we fix $\xi' \in [-T, T]^{m-1}$ and define

$$\varkappa(\xi') \equiv \text{Ind } \sigma = \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{+T} d \arg(\sigma_{\mathcal{A}}^{-1}(\cdot, \xi_m) \sigma_{\mathcal{B}}(\cdot, \xi_m)).$$

This index is an integer, and indeed it doesn't depend on ξ' if $m \geq 2$ (homotopy property). The case $m = 1$ is a very specific one (see [17]). So we have

$$\varkappa(\xi') = \varkappa.$$

Now we are ready to formulate a basic result on unique solvability of the equation (5).

Theorem 1. *let $\sigma_{\mathcal{A}}(\xi), \sigma_{\mathcal{B}}(\xi)$ be elliptic symbols which are continuous on $[-T, T]^m$. The equation (5) is a uniquely solvable in the space $L_2(\mathbb{Z}^m)$ for arbitrary right hand side $V \in L_2(\mathbb{Z}^m)$ iff $\varkappa = 0$.*

Proof. The equation (6) can be rewritten as the Riemann boundary value problem

$$\begin{aligned} (P_{\xi'}^{per} \tilde{U})(\xi', \xi_m) &= -\sigma_{\mathcal{A}}^{-1}(\xi', \xi_m) \sigma_{\mathcal{B}}(\xi', \xi_m) (Q_{\xi'}^{per} \tilde{U})(\xi', \xi_m) + \\ &\quad \sigma_{\mathcal{A}}^{-1}(\xi', \xi_m) \tilde{V}(\xi', \xi_m), \quad \xi_m \in [-\pi, \pi], \end{aligned} \quad (7)$$

or as the one-dimensional singular integral equation

$$\frac{\sigma_{\mathcal{A}}(\xi', \xi_m) + \sigma_{\mathcal{B}}(\xi', \xi_m)}{2} \tilde{U}(\xi', \xi_m) + \frac{\sigma_{\mathcal{A}}(\xi', \xi_m) - \sigma_{\mathcal{B}}(\xi', \xi_m)}{2} (H_{\xi'}^{per} \tilde{U})(\xi', \xi_m) = \tilde{V}(\xi', \xi_m), \quad \xi_m \in [-\pi, \pi], \quad (8)$$

with a parameter $\xi' \in [-\pi, \pi]^{m-1}$.

As it was shown in [16] if $\varkappa = 0$ the factorization on variable ξ_m for the symbol $\sigma(\xi', \xi_m) \equiv -\sigma_{\mathcal{A}}^{-1}(\xi', \xi_m) \sigma_{\mathcal{B}}(\xi', \xi_m)$ and it can be constructed as follows

$$\sigma(\xi', \xi_m) = \exp(\Gamma^+(\xi', \xi_m)) \exp(\Gamma^-(\xi', \xi_m)),$$

where

$$\Gamma^+(\xi', \xi_m) = P_{\xi'}^{per}(\ln \sigma(\xi', \xi_m)), \quad \Gamma^-(\xi', \xi_m) = Q_{\xi'}^{per}(\ln \sigma(\xi', \xi_m)).$$

If $\varkappa \neq 0$ then there are either additional summands in a general solution or additional conditions on a right hand side. So the unique solvability for the equation (5) is possible only if $\varkappa = 0$. ■

Note. Of course last cases when the index is not zero are very important, and we hope to study them in forthcoming papers. One-dimensional constructions for such situations are described in [17].

3. Variable coefficients and a Fredholm property. Now we consider the operator

$$\mathcal{D} = \mathcal{A}P_+ + \mathcal{B}P_-$$

in the space $L_2(\mathbf{Z}^m)$ assuming that symbols $\sigma_{\mathcal{A}}(\tilde{x}, \xi)$, $\sigma_{\mathcal{B}}(\tilde{x}, \xi)$ depend on a space discrete variable $\tilde{x} \in \mathbf{Z}^m$.

3.1. Boundedness of difference operators.

Lemma 3. If

$$\sum_{|k|=0}^{\infty} |a_k(\tilde{x})| < +\infty, \quad \forall \tilde{x} \in \mathbf{Z}^m,$$

then the operator \mathcal{D} is a linear bounded operator $L_2(\mathbf{Z}^m) \rightarrow L_2(\mathbf{Z}^m)$ and its symbol $\sigma_{\mathcal{D}}(\tilde{x}, \xi)$ is a bounded function defined on $\mathbf{Z}^m \times \mathbf{T}^m$.

Remark 2. It is more convenient to formulate a boundedness condition as a property of a symbol. So obviously if the symbol $\sigma_{\mathcal{D}}(\tilde{x}, \xi)$ is a continuous function on $\dot{\mathbf{Z}}^m \times \mathbf{T}^m$ then the operator \mathcal{D} is bounded. Here $\dot{\mathbf{Z}}^m$ denotes $\mathbf{Z}^m + \{\infty\}$.

3.1. Fredholmness.

Definition 4. Operator \mathcal{D} is called a Fredholm operator if

$$\text{Ind } \mathcal{D} \equiv \dim \text{Ker } \mathcal{D} - \dim \text{Coker } \mathcal{D} \neq \infty.$$

To move to more concrete results we need a one additional assumption on behavior of the symbol $\sigma_{\mathcal{D}}(\tilde{x}, \xi)$. Let's fix $\tilde{x} \in \dot{\mathbf{Z}}^m$, $\xi' \in \mathbf{T}^{m-1}$ and consider the number

$$\varkappa(\tilde{x}, \xi') = \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T d \arg \sigma_{\mathcal{D}}(\tilde{x}, \xi', \xi_m),$$

which is a winding number of the curve on a complex plane generated by $\sigma_{\mathcal{D}}(\tilde{x}, \xi', \xi_m)$ when ξ_m varies on the segment $[-T, T]$ [3, 8].

Lemma 4. The number $\varkappa(\tilde{x}, \xi') = \varkappa(\tilde{x})$ is an integer non-depending on ξ' .

Proof. Indeed, under fixed $\tilde{x} \in \dot{\mathbf{Z}}^m$ this $\varkappa(\tilde{x}, \xi')$ is an integer valued function continuously depending on $\xi' \in [-T, T]^{m-1}$. Thus it takes the same values for all points ξ' . ■

Definition 5. A local index of the operator \mathcal{D} is called the number $\varkappa(\tilde{x})$ which is defined for all $\tilde{x} \in \dot{\mathbf{Z}}^m$.

Remark 3. This definition and properties of the symbol imply only that this local index can take only finite number of integer values on finite number of non-intersecting finite sets.

To obtain more applicable result we need an additional

Assumption. We suppose that $\sigma_{\mathcal{D}}(\tilde{x}, \xi)$ is a restriction of a continuous function defined on $\dot{\mathbf{R}}^m$, i.e. $\forall \sigma_{\mathcal{D}}(\tilde{x}, \xi) \exists \sigma(x, \xi) \in C(\dot{\mathbf{R}}^m \times [-T, T^m])$ such that

$$\sigma_{\mathcal{D}}(\tilde{x}, \xi) = \sigma(\tilde{x}, \xi), \quad \forall \tilde{x} \in \dot{\mathbf{Z}}^m.$$

Lemma 5. Under assumption 1 the local index $\varkappa(\tilde{x})$ doesn't depend on $\tilde{x} \in \dot{\mathbf{Z}}^m$:

$$\varkappa(\tilde{x}) = \varkappa.$$

Proof. Analogous considerations like lemma 4. ■

Definition 6. The operator $\mathcal{D}_{\tilde{x}_0} = \mathcal{A}_{\tilde{x}_0}P_+ + \mathcal{B}_{\tilde{x}_0}P_-$ is called a local representative of the operator \mathcal{D} in the point $\tilde{x}_0 \in \mathbf{Z}^m$.

Lemma 6. The operator \mathcal{D} has a Fredholm property in the space $L_2(\mathbf{Z}^m)$ iff all its local representatives are invertible in the space $L_2(\mathbf{Z}^m)$.

Sketch of proof. Operators of type \mathcal{D} are included in more wide set of operators. This set consists of operators of the type

$$AP_+ + BP_-,$$

where A, B are pseudo differential operators with symbols $\sigma_A(\tilde{x}, \xi), \sigma_B(\tilde{x}, \xi), \tilde{x} \in \dot{\mathbf{Z}}^m \times [-T, T]^m$. Such operators can be defined by the formula

$$(Au)(\tilde{x}) = F_{\xi \rightarrow \tilde{x}}^{-1}(\sigma(\tilde{x}, \xi)\tilde{u}(\xi)), \quad (9)$$

where $F_{\xi \rightarrow \tilde{x}}^{-1}$ denotes a passing to the "Fourier coefficients"

$$(F_{\xi \rightarrow \tilde{x}}^{-1}\tilde{u})(\tilde{x}) = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{u}(\xi)e^{i\tilde{x} \cdot \xi} d\xi, \quad \tilde{x} \in \mathbf{Z}^m.$$

These operators are operators of local type [6] and can be reconstructed by their local representatives up to compact operator. Then using properties of Fredholm operators we obtain the needed assertion. ■

Theorem 2. For the elliptic operator \mathcal{D} to be a Fredholm operator in the space $L_2(\mathbf{Z}^m)$ it is necessary and sufficient to have

$$\alpha = 0.$$

Proof. It is easy implication from lemma 6 and results of section 2. ■

Conclusion. It seems these results can be useful and applicable for some concrete equations. Some unconsidered here questions will be discussed elsewhere and may be the object of another paper.

References

1. Dudgeon D. E., Mersereau R. M. 1984. Multidimensional Digital Signal Processing. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs. 293.
2. Eskin G. 1981. Boundary value problems for elliptic pseudodifferential equations. AMS, Providence. 581.
3. Gakhov F. D. 1981 Boundary Value Problems. Dover Publications. NY. 369.
4. Gokhberg I., Krupnik N. 2010. Introduction to the Theory of One-dimensional Singular Integral Equations. Birkhäuser, Basel. 201.
5. Jordan C. 1950. Calculus of Finite Differences. Chelsea Publishing Company, New York, NY, 278.
6. Mikhlin S. G. 1986. Pröβdorf S. Singular Integral Operators. Berlin, Akademie-Verlag, 386.
7. Milne-Thomson L. M. 1981. The Calculus of Finite Differences. Chelsea Publishing Company, New York, NY, 203.
8. Muskhelishvili N. I. 1976. Singular Integral Equations. North Holland. 404.
9. Noble B. 1958. Methods Based on Wiener–Hopf Technique for the Solution of Partial Differential Equations. Pergamon Press, London–New York–Paris–Los Angeles, 258.
10. Sobolev S. L. 1992. Cubature Formulas and Modern Analysis: An Introduction. Montreux: Gordon and Breach Sci. Publ. 392.
11. Titchmarsh E. 1986. Introduction to the Theory of Fourier Integrals. Chelsea Publishing Company. New York. NY. 186.
12. Vasilyev V. B. 2013. General boundary value problems for pseudo differential equations and related difference equations. Advances in Difference Equations. 2013: 289.
13. Vasilyev V. B. 2013. On some difference equations of first order. Tatra Mt. Math. Publ. 54: 165–181.
14. Vasilyev A. V., Vasilyev V. B. 2013. Discrete singular operators and equations in a half-space. Azerb. J. Math. 3(1): 84–93.

15. Vasilyev A. V., Vasilyev V. B. 2015. Discrete singular integrals in a half-space. In: Current Trends in Analysis and Its Applications. Proc. 9th ISAAC Congress, Krakow, Poland, 2013. Birkhäuser, Basel. 663–670.
16. Vasilyev A. V., Vasilyev V. B. 2015. Periodic Riemann problem and discrete convolution equations. Differential Equat. 51(5): 652–660.
17. Vasilyev A. V., Vasilyev V. B. 2015. On some classes of difference equations of infinite order. Advances in Difference Equations. 2015: 211.

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 14.07.2022

Поступила после рецензирования 01.09.2022

Принята к публикации 05.09.2022

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Vasilyev Alexander – Senior Developer, ООО "Severgrup"

Narodnogo Opolcheniya street, 34, Moscow, 123423, Russia

Vasilyev Vladimir – PhD, Professor, Head of the Department of Applied Mathematics and Computer Modeling, Belgorod National Research University

Pobedy street, 85, Belgorod, 308015, Russia

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Васильев Александр Владимирович – старший разработчик, ООО «Севергруп», Москва, Россия

Васильев Владимир Борисович – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной математики и компьютерного моделирования, Белгородский государственный национальный исследовательский университет, Белгород, Россия

ФИЗИКА. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 539.421

DOI 10.52575/2687-0959-2022-54-3-160-170

MSC 74R10, 74R20

оригинальное исследование

МОДЕЛИРОВАНИЕ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО РАЗРУШЕНИЯ ПЛАСТИНЫ С КРАЕВОЙ ТРЕЩИНОЙ

Н. С. Астапов^{1,2} , В. Д. Кургузов^{1,2} 

(Статья представлена членом редакционной коллегии Ю. П. Вирченко)

¹Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,

²Новосибирский государственный университет,
Новосибирск, 630090, Россия

E-mail: nika@hydro.nsc.ru, kurguzov@hydro.nsc.ru

Аннотация. Прочность квадратной пластины с краевой трещиной при нормальном отрыве исследована в рамках подхода Нейбера – Новожилова с помощью модифицированной модели Леонова – Панасюка – Дагдейла, использующей дополнительный параметр – поперечник зоны пластичности (ширину зоны предразрушения). В качестве модели деформируемого твердого тела выбрана модель идеального упругопластического материала, имеющего предельное относительное удлинение. К такому классу материалов относятся, например, низколегированные стали, применяемые в конструкциях, работающих при температурах ниже порога хладноломкости. При наличии сингулярной особенности в поле напряжений в окрестности вершины трещины предлагается использовать двух-параметрический интегральный критерий прочности. Деформационный критерий разрушения формулируется в вершине реальной трещины, а силовой критерий для нормальных напряжений с учетом осреднения формулируется в вершине модельной трещины. Длины реальной и модельной трещин отличаются на длину зоны предразрушения. Подробно проанализированы определяющие уравнения аналитической модели в зависимости от характерного линейного размера структуры материала. Получены простые формулы для критической разрушающей нагрузки и длины зоны предразрушения. Построены диаграммы квазихрупкого разрушения структурированной пластины в условиях плоской деформации и плоского напряженного состояния.

Ключевые слова: критерии разрушения, структура материала, зона предразрушения, диаграмма разрушения, метод конечных элементов, компьютерное моделирование

Для цитирования: Астапов Н. С., Кургузов В. Д. 2022. Моделирование упругопластического разрушения пластины с краевой трещиной. Прикладная математика & Физика, 54(3): 160–170. DOI 10.52575/2687-0959-2022-54-3-160-170

SIMULATION OF ELASTOPLASTIC FRACTURE OF AN EDGE CRACKED PLATE

Nikolay Astapov^{1,2} , Vladimir Kurguzov^{1,2} 

Article submitted by a member of the editorial board Yu. P. Virchenko

¹Institute of Hydrodynamics SB RAS,

²Novosibirsk State University
Novosibirsk, 630090, Russia

E-mail: nika@hydro.nsc.ru, kurguzov@hydro.nsc.ru

Received June, 19, 2022

Abstract. The strength of a square plate with an edge crack at normal separation was studied within the framework of the Neuber – Novozhilov approach using a modified Leonov – Panasyuk – Dugdale model. The model employs an additional parameter, the diameter of the plastic zone (width of the pre-fracture zone). As a model of a deformable solid body, a model of an ideal elastoplastic material with a limiting relative elongation was chosen. This class of materials includes, for example, low-alloy steels used in structures operating at temperatures below the cold brittleness threshold. In the presence of a singular feature in the stress field at the vicinity of the crack tip, it is proposed to use a two-parameter discrete integral strength criterion. The deformation fracture criterion is formulated at the tip of a real crack, and the force criterion for normal stresses, taking into account averaging, is formulated at the tip of a model crack. The lengths of real and model cracks differ by the length of the pre-fracture zone. The constitutive equations of the analytical model are analyzed in detail depending on the characteristic linear size of the material structure. Simple formulas are obtained for the critical fracture load and the length of the pre-fracture zone. Diagrams of quasi-brittle fracture of a structured plate are constructed.

Keywords: fracture criteria, material structure, pre-fracture zone, fracture diagram, finite element method, computer simulation

For citation: Astapov Nikolay, Kurguzov Vladimir. 2022. Simulation of elastoplastic fracture of an edge cracked plate. Applied Mathematics & Physics, 54(3): 160–170 (in Russian). DOI 10.52575/2687-0959-2022-54-3-160-170

1. Введение. В обзоре экспериментальных работ [17] проводится физико-техническая классификация процессов разрушения и обсуждение причин возникновения трещин при изготовлении конструкции. Кроме того, в [17] отмечаются проблемы построения аналитических моделей процесса разрушения в рамках линейной механики разрушения. В работе [24] прочностные свойства конструкций исследовались с помощью когезионной модели. В работе [15] даны оценки трещиностойкости по границе раздела материалов. Отметим, что при использовании когезионной модели [15, 24] отсутствуют параметры, описывающие поперечник зоны предразрушения и структуру самой зоны предразрушения. В экспериментальной работе [21] по исследованию распространения трещины нормального отрыва в биматериале керамика-алюминий показано, что зона предразрушения для трещины на границе раздела сред, как правило, расположена только в одном более слабом материале и локализована в окрестности этой границы. Такое расслоение в результате лабораторного эксперимента наблюдалось в работе [25]. В результате численного моделирования методом конечных элементов в работе [14] также показано притягивание продвигающейся трещины к границе раздела сред.

В работе [19] при описании процесса разрушения учитываются пределы упругости составляющих композит материалов, но не учитывается их структура. Однако трещины часто оказываются межзеренными, и наличие периодической структуры существенно влияет на раскрытие трещин, которое изменяется постепенно геометрически упорядоченным образом [17]. В работе [13] показано, что критерии разрушения, учитывающие характерный размер структуры материала, позволяют «расширить область применения по сравнению с традиционными критериями», хотя «вопрос о том, как этот размер связан с составом, структурой и, возможно, с другими параметрами реального материала, до сих пор не изучен». Поэтому проблемы построения простых, пригодных для инженерных расчетов, аналитических моделей процесса разрушения композитов являются актуальными [3, 10]. В работе [10] обосновывается актуальность создания феноменологических моделей для прогнозирования разрушения слоистых материалов.

Настоящая работа является естественным продолжением и обобщением работ [1, 20, 22, 23] по исследованию распространения трещины в рамках модифицированной модели Леонова – Панасюка – Дагдейла (ЛПД). Учет характерного линейного размера материала позволил вывести простые, пригодные в инженерных приложениях, соотношения для критической нагрузки и критической длины зоны предразрушения, а также построить диаграммы разрушения.

2. Постановка задачи. Пусть в однородной структурированной квадратной пластине размером $w \times w$ имеется краевая трещина длины l_0 (рис. 1а). На краях пластины заданы растягивающие напряжения σ_∞ , поверхность трещины свободна от нагрузок, то есть реализуется первая мода разрушения. Материал пластины предполагается идеальным упругопластическим материалом с $(\sigma - \varepsilon)$ -диаграммой одноосного деформирования, показанной на рис. 2. Здесь σ_Y – предел текучести, ε_0 – максимальная упругая деформация, ε_1 – предельная деформация до разрушения. Введем параметр $\bar{\varepsilon}_1 = (\varepsilon_1 - \varepsilon_0)/\varepsilon_0$, характеризующий отношение предельной неупругой деформации к максимальной упругой. Величину $\bar{\varepsilon}_1$ можно трактовать как относительную длину площадки текучести (коротко: показатель пластичности). Материал пластины обладает определенной структурой, имеет квазихрупкий или квазивязкий тип разрушения, причем характерный линейный размер d структурного элемента (например, диаметр зерна) предполагается известным.

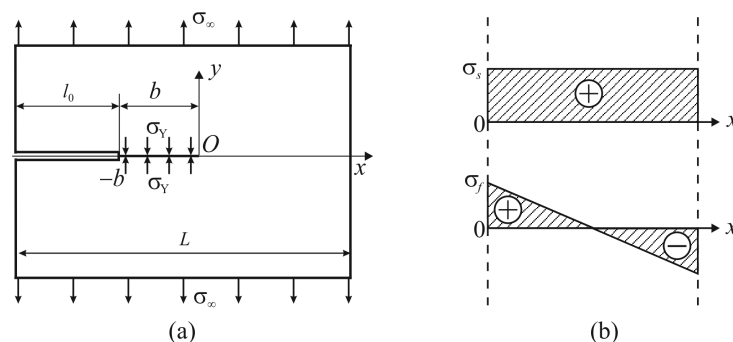


Рис. 1. Напряжение в пластине: а – пластина с краевой трещиной; б – эпюры номинальных напряжений при растяжении σ_s и изгибе σ_f

Fig. 1. Plate stress: a – edge cracked plate. b – diagrams of nominal stresses under tension σ_s and bending σ_f

3. Аналитическая модель разрушения пластины. Предположим, что краевая острая трещина нормального отрыва длиной l_0 (рис. 1а) распространяется прямолинейно в структурно-однородном материале. В модифицированной модели ЛПД [20] помимо реальной внутренней прямолинейной

трещины-разреза длиной l_0 вводится в рассмотрение модельная трещина-разрез длиной $l = l_0 + b$, где b – длина зоны предразрушения или пластической зоны, расположенной на продолжении реальной трещины (рис. 3). Длина зоны предразрушения b определяется в процессе решения задачи о разрушении, а поперечник a этой зоны отождествляется с поперечником зоны пластичности.

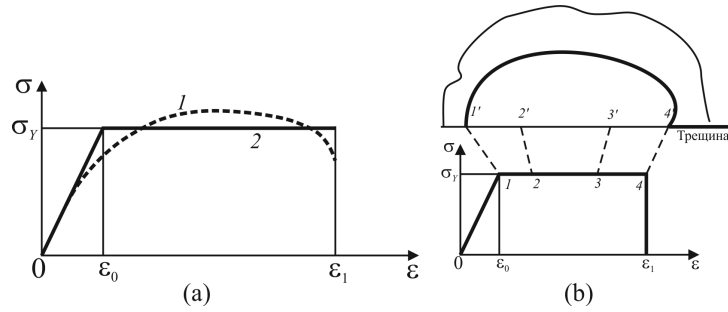


Рис. 2. Диаграммы деформирования материала: а – исходная диаграмма деформирования материала (кривая 1) и ее двухзвенная аппроксимация (кривая 2); б – соответствие точек 1-4 диаграммы деформирования точкам 1'-4' зоны предразрушения

Fig. 2. Stress-strain diagrams of material: a – initial material stress-strain diagram (curve 1) and its bilinear approximation (curve 2); b – correspondence of points 1-4 of the stress-strain diagram to points 1'-4' of the pre-fracture zone

Задача о разрушении имеет два линейных масштаба: 1) диаметр зерна d – постоянная величина, определяемая структурой материала; 2) длина зоны предразрушения b , которая зависит от длины реальной трещины и интенсивности нагружения. Подчеркнем, что при однократном нагружении материалов критическая длина зоны предразрушения b_c – вполне определенный параметр ($l_c = l_0 + b_c$ – критическая длина макротрещины). На рис. 3 показаны нормальные напряжения $\sigma_y = \sigma_Y$, действующие в модифицированной модели ЛПД [20] на продолжении трещины (а) и аппроксимация пластической зоны прямоугольной зоной предразрушения (б). Заметим, что в классической модели ЛПД [2, 4, 6, 16] поперечник пластической зоны $a = 0$. Напряжения пластического деформирования $\sigma_y = \sigma_Y$, действующие на берегах модельной трещины в зоне предразрушения, препятствуют раскрытию трещины и тем самым устраняют сингулярность поля напряжений в окрестности ее вершины.

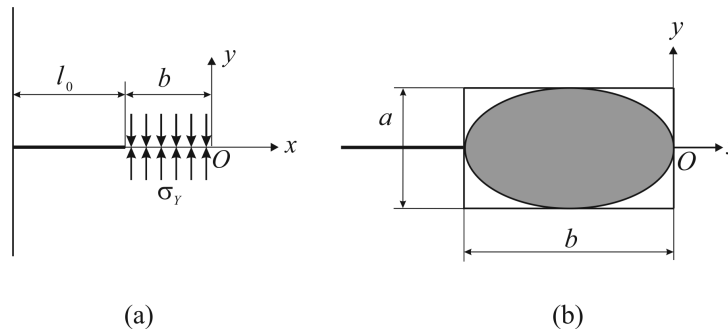


Рис. 3. Зона предразрушения: а – сжимающие напряжения, действующие в модели ЛПД на продолжении трещины; б – аппроксимация пластической зоны прямоугольной зоной предразрушения (плоское напряженное состояние)

Fig. 3. Pre-fracture zone: a – compressive stresses acting in the LPD model on the continuation of the crack; b – approximation of the plastic zone by a rectangular pre-fracture zone (plane stress)

Зона предразрушения занимает только часть зоны пластичности. Предполагается, что напряжения здесь распределяются равномерно и равняются пределу текучести материала σ_Y . Полная постановка задачи распределения напряжений и смещений трещины нормального отрыва для упругопластических материалов рассматривается в нелинейной механике разрушения. Такую нелинейную задачу можно существенно упростить, используя классические представления линейной механики разрушения, когда трещина нормального отрыва моделируется как двусторонний разрез, а нелинейность задачи возникает только при описании зоны предразрушения. После введения модельной (дополнительной) трещины – разреза задача может рассматриваться не как упругопластическая, а как упругая. Напомним, что согласно классической модели ЛПД пластический материал в зоне предразрушения, поперечник которой равен нулю, стягивает берега трещины.

Пусть в лабораторном эксперименте при испытании макрообразца на одноосное растяжение получена $(\sigma - \epsilon)$ -диаграмма деформирования, где σ и ϵ – напряжения и деформации соответственно. Примем простейшую аппроксимацию реальной $(\sigma - \epsilon)$ -диаграммы исследуемого материала, когда эта

диаграмма аппроксимируется двухзвенной ломаной. При такой аппроксимации исходный материал подменяется идеальным упругопластическим материалом, имеющим предельную деформацию. При достижении предельной деформации материал разрушается. На рис. 2а изображены исходная ($\sigma - \varepsilon$)-диаграмма (кривая 1) и ее двухзвенная аппроксимация (кривая 2). Параметры этой аппроксимации подбираются так, чтобы площади под кривыми 1 и 2 совпадали. Кривая 2 полностью определяется следующими параметрами: E – модуль Юнга, σ_Y – предел текучести при одноосном растяжении, ε_0 – максимальная упругая деформация, ε_1 – предельная деформация. Предел текучести и максимальная упругая деформация связаны соотношением $\sigma_Y = E\varepsilon_0$. Аппроксимацию ($\sigma - \varepsilon$)-диаграммы на участке можно трактовать как идеальную пластичность, а отношение $\bar{\varepsilon}_1 = (\varepsilon_1 - \varepsilon_0)/\varepsilon_0$ как запас пластичности материала при монотонном нагружении.

В соответствии с предлагаемой модификацией модели ЛПД надо различать вершины реальной и модельной трещин. На рис. 2б приведена схема, качественно поясняющая взаимосвязь между точками 1, 2, 3, 4 на ($\sigma - \varepsilon$)-диаграмме и точками 1', 2', 3', 4' в зоне предразрушения, расположенными на продолжении реальной трещины слева от нее. Вне зоны предразрушения материал деформируется упруго, на границе этой зоны он начинает деформироваться неупруго, при этом точки зоны предразрушения находятся в области неупругого деформирования материала. В модели ЛПД предполагается, что на продолжении модельной трещины реализуется одноосное растяжение [2, 4], поскольку к берегам трещины-разреза приложены постоянные напряжения σ_Y , которые притягивают берега друг к другу и, следовательно, действуют на материал растягивающим образом. В докритическом состоянии материал в вершине реальной трещины претерпевает удлинение $\varepsilon < \varepsilon_1$, которое в критическом состоянии совпадает с критическим удлинением $\varepsilon = \varepsilon_1$ (см. в точке 4 на рис. 2б). Пластическая зона в окрестности вершины трещины приближенно показана на рис. 3б для случая плоского напряженного состояния.

Для построения модели разрушения структурированной квадратной пластины при нормальном отрыве воспользуемся интегральным критерием разрушения Нейбера – Новожилова [20]

$$\frac{1}{d} \int_0^d \sigma_y(x, 0) dx = \sigma_Y, \quad x \geq 0, \quad (1)$$

$$2v(-b_c) = \delta_c, \quad x < 0. \quad (2)$$

Здесь $\sigma_y(x, 0)$ – нормальные напряжения на продолжении трещины, σ_Y – предел текучести при одноосном растяжении, d – характерный линейный размер структуры материала, $2v(x)$ – раскрытие трещины, b_c – критическая длина зоны предразрушения. Через δ_c обозначено критическое раскрытие модельной трещины; при величине раскрытия равной критическому значению разрушается структура материала в вершине реальной трещины (граничной точке зоны предразрушения, то есть в точке 4' на рис. 2б). Длина зоны предразрушения составляет только часть длины зоны пластичности, если учесть длину интервала осреднения d . Силовой критерий (1) по терминологии Новожилова является необходимым: процесс разрушения материала начинается тогда, когда осредненные по интервалу d нормальные напряжения достигают предела текучести σ_Y . При выполнении деформационного критерия (2) происходит катастрофическое разрушение образца. По этой причине совокупность условий (1), (2) называют достаточным критерием разрушения [20].

Для применения интегрального критерия (1), (2) к обработке результатов численных или лабораторных экспериментов с образцами конечных размеров примем аналитическое выражение нормального напряжения $\sigma_y(x, 0)$ на продолжении трещины в виде [18]

$$\sigma_y(x) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi x}} + \sigma_{nom}, \quad x \geq 0. \quad (3)$$

Здесь $\sigma_{nom} = \sigma_s + \sigma_f$ – номинальные напряжения, иначе оценка регулярной части поля напряжений в окрестности вершины модельной трещины; σ_s и σ_f – номинальные напряжения при растяжении и изгибе соответственно (рис. 1б); $K_I = K_{I\sigma} + K_{Ib}$ – суммарный коэффициент интенсивности напряжений (КИН); $K_{I\sigma}$ – КИН, порождаемый приложенными к пластине напряжениями σ_∞ ; K_{Ib} – КИН, порождаемый постоянными напряжениями σ_Y действующими в зоне предразрушения. Первое и второе слагаемые в соотношении (3) – сингулярная и регулярная части решения соответственно. Первое равенство (1) двойного критерия контролирует достижение осредненными напряжениями на продолжении модельной трещины предела текучести σ_Y , а второе равенство (2) двойного критерия описывает нормальный отрыв в вершине реальной трещины.

В приближении сопротивления материалов номинальные напряжения σ_s и σ_f можно представить в виде

$$\sigma_s = \sigma_\infty \frac{w}{w-l}, \quad \sigma_f = \sigma_\infty \frac{3wl}{(w-l)^2}, \quad (4)$$

где σ_∞ – напряжения, заданные на краях пластины. Выражение КИН $K_{I\sigma}$, обусловленного заданными условиями испытаний образцов с краевыми трещинами, можно представить в виде [9, 11]:

$$K_{I\sigma} = \sigma_\infty \sqrt{\pi l} Y_s(\xi), \quad Y_s(\xi) = 1,12 - 0,23\xi + 10,55\xi^2 - 21,72\xi^3 + 30,39\xi^4, \quad (5)$$

где $\xi = l/w$. КИН K_{Ib} , обусловленный постоянными напряжениями σ_Y , действующими в зоне предразрушения, имеет универсальное представление. Для полуплоскости с краевой трещиной КИН K_{Ib} вычисляются следующим образом [9, 11]

$$K_{Ib} = -\sigma_Y \sqrt{\pi l} \frac{2}{\pi} \arccos \left(1 - \frac{b}{l} \right). \quad (6)$$

Вычислим интеграл из равенства (1), учитывая выражение (3):

$$\frac{1}{d} \int_0^d \sigma_y(x, 0) dx = K_I \sqrt{\frac{2}{\pi d}} + \sigma_s + \sigma_f \left(1 - \frac{d}{w-l} \right). \quad (7)$$

Теперь критерий (1) с учетом (4), (7) запишется в виде

$$K_I \sqrt{\frac{2}{\pi d}} + Y_r \sigma_c = \sigma_Y, \quad (8)$$

где σ_c – критическое напряжение,

$$Y_r = \frac{w}{w-l_c} + \frac{3wl_c}{(w-l_c)^2} \left(1 - \frac{d}{w-l_c} \right). \quad (9)$$

Преобразуем (8), используя для КИН $K_I = K_{I\sigma} + K_{Ib}$ соотношения (5), (6):

$$\sqrt{\pi l_c} \left[Y_s \bar{\sigma}_c - \frac{2}{\pi} \arccos \left(1 - \frac{b_c}{l_c} \right) \right] \sqrt{\frac{2}{\pi d}} = 1 - Y_r \bar{\sigma}_c. \quad (10)$$

Здесь $\bar{\sigma}_c = \sigma_c / \sigma_Y$ – безразмерное критическое напряжение, l_c – критическая длина трещины, b_c – критическая длина зоны предразрушения.

Для использования в расчетах уравнения (2) необходимо иметь аналитические выражения функции раскрытия трещины $2v(x)$ и критического раскрытия δ_c модельной трещины, при котором разрушается структура материала в вершине реальной трещины. Выражение для величины раскрытия модельной трещины $2v(x)$ представим в виде [4]

$$v(x) = \frac{\kappa + 1}{2G} K_I \sqrt{\frac{-2x}{\pi}}, \quad x \leq 0, \quad (11)$$

где κ – параметр вида напряженного состояния: $\kappa = 3 - 4\nu$ для плоской деформации, $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ для плоского напряженного состояния. Модуль сдвига материала G дается формулой $G = E/[2(1 + \nu)] = \sigma_Y/[2\varepsilon_0(1 + \nu)]$, так как для идеального упругопластического материала $E = \sigma_Y/\varepsilon_0$, где E – модуль Юнга, ε_0 – максимальное упругое относительное удлинение. Критическое раскрытие модельной трещины δ_c в соотношении (2) зависит от запаса пластичности $\varepsilon_1 - \varepsilon_0$ исследуемого материала и ширины зоны предразрушения a в вершине реальной трещины. Будем вычислять его по формуле

$$\delta_c = m(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)a, \quad (12)$$

где m – поправочный коэффициент. Конечно, границы реальных пластических зон в окрестности вершины трещины лишь приблизительно похожи на конфигурации, изображенные в [2, 4]. При плоском напряженном состоянии с увеличением нагрузки узкая область пластических деформаций распространяется прямолинейно от вершины трещины по ее оси, принимая форму, похожую на узкий вытянутый прямоугольник. Такую форму пластической зоны, особенно при поперечном сдвиге, и преимущественное направление распространения трещины вдоль ее оси можно наблюдать как в численных, так и в лабораторных экспериментах. В связи с этим в работах [1, 23] для уточнения выражения поперечника зоны предразрушения обосновывается введение в соотношение (12) поправочного коэффициента m . Для определения величины этого коэффициента необходимо использовать непосредственно данные численного либо лабораторного эксперимента.

Полагаем, что поперечник a зоны предразрушения в соотношении (12) пропорционален удвоенному максимальному размеру пластической зоны для трещины нормального отрыва в идеально пластических телах [8]:

$$a = \frac{9(1 - \nu)}{2\sqrt{2}(2 + \pi)} \left(\frac{K_{I\sigma}}{\sigma_Y} \right)^2 = q(\nu) \left(\frac{K_{I\sigma}}{\sigma_Y} \right)^2. \quad (13)$$

Это оценка для плоской деформации. Для плоского напряженного состояния $q = \pi/4$ [8]. Например, при $\nu = 0,33$ получим $q = 0,415$ для плоской деформации и $q = 0,785$ для плоского напряженного состояния. Критическая величина раскрытия модельной трещины δ_c в соотношении (12) соответствует переходу материала в вершине реальной трещины в критическое состояние и его разрушению.

Подставляя выражения (11)–(13) в уравнение (2), получим уравнение

$$\frac{\kappa + 1}{2G} K_I \sqrt{\frac{2b_c}{\pi}} = m(\varepsilon_1 - \varepsilon_0) q \left(\frac{K_{I\sigma}}{\sigma_Y} \right)^2. \quad (14)$$

Учитывая выражение $G = \sigma_Y / (2\varepsilon_0(1 + \nu))$ и используя для $K_I = K_{I\sigma} + K_{Ib}$ соотношения (5), (6), запишем уравнение (14) в виде

$$\sqrt{\pi l_c} \left[Y_s \bar{\sigma}_c - \frac{2}{\pi} \arccos \left(1 - \frac{b_c}{l_c} \right) \right] \sqrt{\frac{2b_c}{\pi}} = \frac{mq\bar{\varepsilon}_1}{(\kappa + 1)(1 + \nu)} \left(\sqrt{\pi l_c} Y_s \bar{\sigma}_c \right)^2. \quad (15)$$

Теперь систему уравнений (10), (15), равносильную исходной системе уравнений (1), (2) при указанном выборе выражений для нормального напряжения $\sigma_y(x, 0)$, раскрытия трещины $2v(x)$ и КИН $K_I = K_{I\sigma} + K_{Ib}$, можно записать в виде

$$\left[Y_s \bar{\sigma}_c - \frac{2}{\pi} \arccos \left(1 - \frac{b_c}{l_c} \right) \right] = (1 - Y_r \bar{\sigma}_c) \sqrt{\frac{d}{2l_c}}, \quad (16)$$

$$\left[Y_s \bar{\sigma}_c - \frac{2}{\pi} \arccos \left(1 - \frac{b_c}{l_c} \right) \right] \sqrt{\frac{b_c}{l_c}} = \frac{\pi m p \bar{\varepsilon}_1 (Y_s \bar{\sigma}_c)^2}{2\sqrt{2}}, \quad (17)$$

где $p = 2q / [(\kappa + 1)(1 + \nu)]$. В частности, при плоском напряженном состоянии $p = q/2 = \pi/8$, при плоской деформации $p = q / [2(1 - \nu^2)] = 9 / [4\sqrt{2}(2 + \pi)(1 + \nu)]$. Таким образом, получена система двух уравнений (16), (17) с двумя неизвестными $\sqrt{b_c/l_c}$ и $\bar{\sigma}_c$. Исключая выражение в квадратных скобках из системы уравнений (16), (17), находим точное выражение для безразмерной критической длины зоны предразрушения

$$\sqrt{\bar{b}_c} = \pi m p \bar{\varepsilon}_1 (Y_s \bar{\sigma}_c)^2 \sqrt{l_c} / [2(1 - Y_r \bar{\sigma}_c)], \quad (18)$$

где $\bar{l}_c = l_c/d$ – безразмерная критическая длина трещины.

Используя приближение $\arccos(1 - b_c/l_c) \approx \sqrt{2b_c/l_c}$, погрешность которого не превышает 5% при $0 \leq b_c/l_c \leq 0,55$, запишем систему уравнений (16), (17) в виде

$$Y_s \bar{\sigma}_c - \frac{2}{\pi} \sqrt{2\bar{b}_c} = \frac{1 - Y_r \bar{\sigma}_c}{\sqrt{2\bar{l}_c}}, \quad (19)$$

$$\left(Y_s \bar{\sigma}_c - \frac{2}{\pi} \sqrt{2\bar{b}_c} \right) \sqrt{\bar{b}_c} = \frac{\pi m p \bar{\varepsilon}_1 Y_s^2 \bar{\sigma}_c^2}{2\sqrt{2}}. \quad (20)$$

Заменяя в (19) $\sqrt{\bar{b}_c}$ выражением (18), получим квадратное уравнение относительно $\bar{\sigma}_c$

$$\left(Y_r^2 + h Y_s^2 + \sqrt{2\bar{l}_c} Y_s Y_r \right) \bar{\sigma}_c^2 - \left(2Y_r + \sqrt{2\bar{l}_c} Y_s \right) \bar{\sigma}_c + 1 = 0,$$

где $h = 2\bar{l}_c m p \bar{\varepsilon}_1$, из которого найдем два приближенных значения критической разрушающей нагрузки $\bar{\sigma}_c$:

$$\bar{\sigma}_{c\pm} = \left[Y_r + Y_s \sqrt{\frac{\bar{l}_c}{2}} \left(1 \pm \sqrt{1 - 4mp\bar{\varepsilon}_1} \right) \right]^{-1}. \quad (21)$$

Величина $\bar{\sigma}_{c+}$, когда перед корнем выбирается знак «+», соответствует квазихрупкому разрушению ($b/l \ll 1$), величина $\bar{\sigma}_{c-}$ соответствует квазивязкому типу разрушения [23]. Формула (21) предлагаемой модели имеет смысл, если $\bar{\varepsilon}_1 \leq 1/(4mp)$ для однородного материала.

Из приближенного уравнения (19) получим выражение для $\sqrt{\bar{b}_c}$:

$$\sqrt{\bar{b}_c} = \pi \left[\left(Y_r + Y_s \sqrt{2\bar{l}_c} \right) \bar{\sigma}_c - 1 \right] / \left(4\sqrt{\bar{l}_c} \right), \quad (22)$$

а из уравнения (20) получим два значения критической длины зоны предразрушения

$$\sqrt{\bar{b}_{c\pm}} = \pi m p \bar{\varepsilon}_1 Y_s \bar{\sigma}_c / \left[\sqrt{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - 4mp\bar{\varepsilon}_1} \right) \right], \quad (23)$$

причем квазихрупкому типу разрушения соответствует $\sqrt{\bar{b}_{c+}}$, когда в равенстве (23) перед корнем выбирается знак «+», квазивязкому типу разрушения соответствует $\sqrt{\bar{b}_{c-}}$. Интересно отметить, что, выбирая любое из приближенных выражений (22) или (23), получим из системы уравнений (19), (20) точно такое же выражение для критической разрушающей нагрузки, какое дается формулой (21). А исключая выражение в круглых скобках из приближенной системы уравнений (19), (20), получим для критической длины \bar{b}_c зоны предразрушения такое же выражение (18), какое получено из точной системы уравнений (16), (17). Напомним, что уравнения (16), (19) так же, как исходное уравнение (1), выполняются для любых нагрузок вблизи граничных точек зоны пластичности (точка 1' на рисунке 2b). Поэтому для любых нагрузок σ_∞ , при которых возникает зона пластичности в окрестности вершины трещины, справедлива и формула (22), которая является следствием равенства (19). Однако уравнения (17) и (20) так же, как и уравнение (2), выполняются только для критических разрушающих нагрузок $\bar{\sigma}_c$. Кроме того, приближенные выражения (11) и (12) для раскрытия трещины $2v(x)$ и критического раскрытия δ_c вносят дополнительную погрешность в уравнения (17), (20), которые используются при выводе формул (18) и (23). Таким образом, получена одна формула (21) для критической разрушающей нагрузки и три различные формулы (18), (22), (23), выражающие критическую длину зоны предразрушения через критическую нагрузку. Результаты численного моделирования подтверждают применимость формулы (22) во всем диапазоне нагрузок.

В выражении критической нагрузки (21) возможен предельный переход при $\bar{\epsilon}_1 \rightarrow 0$, что позволяет рассматривать разрушение хрупких материалов (в таких материалах зона предразрушения отсутствует: $b = 0$). С использованием необходимого критерия разрушения (1) в случае хрупкого разрушения критические напряжения вычисляются по формуле

$$\bar{\sigma}_{c0} = \left(Y_r + Y_s \sqrt{\frac{2l_0}{d}} \right)^{-1}. \quad (24)$$

Проанализируем выражение критической нагрузки (21) более подробно. Коэффициенты Y_s и Y_r даются формулами (5) и (9), характеризуют геометрию образца и полностью определяются шириной пластины w и длиной трещины l . Параметр $\bar{\epsilon}_1$ определяется по $(\sigma - \epsilon)$ -диаграмме деформирования материала пластины. Параметр p определяется коэффициентом Пуассона. Поэтому исследуем зависимость критической нагрузки от оставшихся двух параметров: характерного линейного размера структуры материала d и поправочного коэффициента m . Для любой длины трещины выполняются неравенства $\bar{\sigma}_{c0} \leq \bar{\sigma}_{c+} \leq \bar{\sigma}_{c-} \leq 1$, причём равенство $\bar{\sigma}_{c+} = \bar{\sigma}_{c-}$ выполняется лишь в том случае, когда подкоренное выражение в (21) равно нулю, то есть $4mp\bar{\epsilon}_1 = 1$. А равенства $\bar{\sigma}_{c0} = \bar{\sigma}_{c+} = \bar{\sigma}_{c-} = 1$ выполняются лишь для трещины нулевой длины.

При возрастании параметра d возрастает и $\bar{\sigma}_{c+}$ (квазихрупкий тип разрушения) и $\bar{\sigma}_{c-}$ (квазивязкий тип разрушения). Оказывается для любого $d = d_+ > 0$ можно так выбрать $d = d_-$, что для трещины любой длины критические нагрузки $\bar{\sigma}_{c+}$ и $\bar{\sigma}_{c-}$ совпадут, то есть $\bar{\sigma}_{c+}(d_+) \equiv \bar{\sigma}_{c-}(d_-)$. В этом случае d_+ и d_- связаны соотношением

$$d_- = \left[\left(1 - \sqrt{1-t} \right)^2 / t \right]^2 d_+, \quad (25)$$

где $t = 4mp\bar{\epsilon}_1$. Наибольшее значение множителя $\left[\left(1 - \sqrt{1-t} \right)^2 / t \right]^2$ равно 1 и достигается при $t = 1$, тогда выполняются равенства $d = d_- = d_+$ и $\bar{\sigma}_{c+}(d_+) = \bar{\sigma}_{c-}(d_-) = \left(Y_r + Y_s \sqrt{l/(2d)} \right)^{-1}$, что легко видеть из выражения (21). При возрастании параметра m возрастает и $\bar{\sigma}_{c+}$ (квазихрупкий тип разрушения), а $\bar{\sigma}_{c-}$ убывает. И равенство $\bar{\sigma}_{c+} = \bar{\sigma}_{c-}$ выполняется только тогда, когда $m = 1/(4p\bar{\epsilon}_1)$.

Рассмотрим процесс деформирования при монотонном нагружении $0 < \bar{\sigma}_\infty < 1$, где $\bar{\sigma}_\infty = \sigma_\infty/\sigma_Y$ — безразмерная внешняя нагрузка. Если необходимый критерий (1) не выполняется ($\bar{\sigma}_\infty < \bar{\sigma}_{c0}$), то нелинейные эффекты не проявляются, исходная длина трещины l_0 не меняется. В случае если в достаточном критерии (1), (2) условие (1) выполнено, а условие (2) — нет, имеет место докритическое состояние системы, при котором наблюдается устойчивое увеличение длины модельной трещины $l = l_0 + b$. Первое соотношение в достаточном критерии (1), (2) определяет движение вершины модельной трещины. Если оба условия (1), (2) выполнены, то система переходит в критическое состояние. Ближайшая к вершине трещины структура разрушается, поскольку длина зоны предразрушения достигает критического значения (18), (23). При $\bar{\sigma}_\infty = \bar{\sigma}_{c\pm}$ неустойчивость критического состояния нелинейной системы очевидна. Соотношение (2) определяют обрыв силовых связей в ближайшей к вершине реальной трещины структуре зоны предразрушения. Таким образом, критические нагрузки, вычисленные по необходимому (24) и достаточному (21) критериям разрушения, являются нижней и верхней оценками критических нагрузок рассматриваемой нелинейной системы.

По трем параметрам материала d , σ_Y и $\bar{\varepsilon}_1$ можно построить в широком диапазоне изменения длин трещин две критические кривые $\bar{\sigma}_0 = \bar{\sigma}_0(\bar{l}_0)$ и $\bar{\sigma}_c = \bar{\sigma}_c(\bar{l}_c)$ по формулам (24) и (21) (знак «+») соответственно. Совместим плоскости $(\bar{l}_0, \bar{\sigma}_0)$ и $(\bar{l}_c, \bar{\sigma}_c)$. На совмещенной плоскости «длина трещины – напряжение» $(\bar{l}, \bar{\sigma})$ построим диаграммы квазихрупкого разрушения пластины (рис. 4). Пусть задана интенсивность нагружения $\bar{\sigma}_\infty$. Тогда диаграмма квазихрупкого разрушения позволяет оценить состояние тела с трещиной. Две критические кривые $\bar{\sigma}_0 = \bar{\sigma}_0(\bar{l}_0)$ и $\bar{\sigma}_c = \bar{\sigma}_c(\bar{l}_c)$ (достаточный критерий представлен двумя кривыми: при плоской деформации и плоском напряженном состоянии) разделяют плоскость $(\bar{l}, \bar{\sigma})$ на три подобласти: область $\bar{\sigma} < \bar{\sigma}_0$, где отсутствуют повреждения; область $\bar{\sigma}_0 < \bar{\sigma} < \bar{\sigma}_c$, где имеет место накопление повреждений в материале зоны предразрушения; область $\bar{\sigma}_c < \bar{\sigma}$, где образец разрушается при монотонном нагружении. Для удобства практического приложения длина трещины l на рис. 4 отнесена к ширине пластины w . Вычисления были проведены при следующих значениях параметров: $d = 0,7$ мм, $\nu = 0,33$, $\bar{\varepsilon}_1 = 2,5$ при плоском напряженном состоянии, $\bar{\varepsilon}_1 = 4,0$ при плоской деформации.

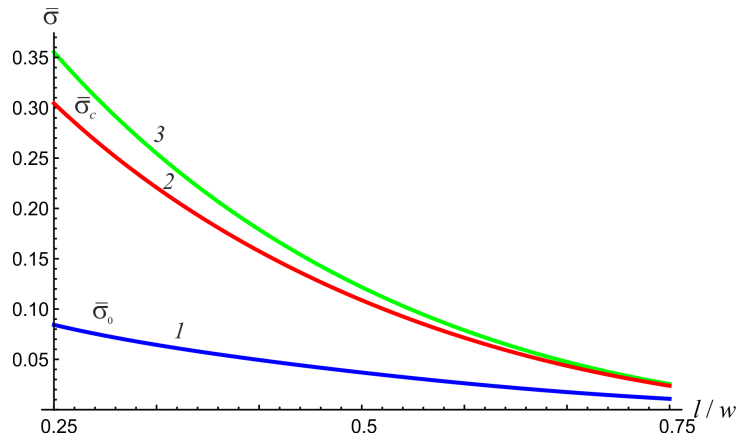


Рис. 4. Диаграммы квазихрупкого разрушения: кривая 1 – необходимый критерий (24); кривая 2 – достаточный критерий (21) (плоская деформация); кривая 3 – достаточный критерий (21) (плоское напряженное состояние)
 Fig. 4. Diagrams of quasi-brittle fracture: curve 1 – necessary criterion (24); curve 2 – sufficient criterion (21) (plane strain); curve 3 – sufficient criterion (21) (plane stress)

4. Обсуждение результатов. Выбор параметра осреднения d необходимого критерия (1) в определенной мере субъективен [7]. Зона радиуса d , где напряженное состояние определяет момент инициации трещины, больше сингулярной, поэтому только значения коэффициента интенсивности напряжений K_I , как характеристики напряженно-деформированного состояния, теперь уже недостаточно. Будем рассматривать эту зону не как область, где реализуется процесс микроповреждений, пластических деформаций, микроразрушений, а как область, где напряженное состояние по известным решениям теории упругости за счет перераспределения внутренних усилий определяет момент разрушения. Размер осреднения d считается характеристикой материала и зависит от других характеристик материала: разрушающих напряжений для образца без трещины и характеристики трещиностойкости. Для относительно длинных трещин, принимая во внимание асимптотику поля напряжений в окрестности вершины трещины, можно получить оценку параметра d в виде

$$d = \frac{2}{\pi} \left(\frac{K_{Ic}}{\sigma_t} \right)^2,$$

где K_{Ic} – критический коэффициент интенсивности напряжений, σ_t – предел прочности материала на растяжение. Необходимость осреднения напряжений связывают с образованием зоны предразрушения, в которой происходит перераспределение напряжений и изменение физико-механических свойств материала. Размер этой зоны d сопоставим с размерами структурных составляющих материала и намного меньше размеров пластины, длины трещины и т. п. [12, 13]. Интегральный критерий Нейбера – Новожилова (1) относится к структурным критериям разрушения. Присутствие в критерии параметра осреднения d означает, что процесс разрушения обладает собственной структурой, которая в общем случае не обязательно связана со структурой материала.

5. Заключение. Полученные простые структурные формулы (18), (21)-(23) можно применять для прогнозирования критической разрушающей нагрузки $\bar{\sigma}_c = \sigma_c/\sigma_Y$ и оценки длины зоны предразрушения \bar{b}_c при нагружении по первой моде (нормальный отрыв) в структурированных материалах при плоском напряженном состоянии и при плоской деформации. Указанные формулы выражают величину нагрузки $\bar{\sigma}_c$ и длины зоны предразрушения \bar{b}_c через длину трещины l с использованием следующих четырех параметров: d – характерный линейный размер структуры материала, ε_0 и ε_1 – параметры

($\sigma - \varepsilon$)–диаграммы деформирования, m – поправочный коэффициент. Эти четыре параметра подбираются по результатам лабораторного эксперимента или численного моделирования.

Подробный анализ выражения (21) критической нагрузки $\bar{\sigma}_{c\pm}$ показал следующее. Для двух пластин, отличающихся лишь характерным линейным размером d структуры материала так, что выполняется равенство (25), критические нагрузки $\bar{\sigma}_{c+}$ (квазихрупкое разрушение) и $\bar{\sigma}_{c-}$ (квазивязкое разрушение) совпадают, то есть $\bar{\sigma}_{c+}(d_+) \equiv \bar{\sigma}_{c-}(d_-)$ во всём диапазоне длин трещины. Для двух одинаковых пластин равенство $\bar{\sigma}_{c+} = \bar{\sigma}_{c-}$ выполняется тождественно лишь тогда, когда $4\pi r \bar{\varepsilon}_1 = 1$.

В целом рассматриваемую аналитическую модель можно использовать при исследовании разрушения конструкций из структурированных материалов с различными упругими свойствами. Это позволит уменьшить количество лабораторных или численных экспериментов, необходимых для оценки разрушающей нагрузки.

Список литературы

1. Астапов Н. С. 2014. Модифицированная модель зоны предразрушения квазихрупких структурированных материалов. *Физическая мезомеханика*, 17(1): 89–96.
2. Астафьев В. И., Радаев Ю. Н., Степанова Л. В. 2001. *Нелинейная механика разрушения*. Самара, Изд-во «Самарский университет». 632.
3. Глаголев В. В., Маркин А. А., Фурсаев А. А. 2018. Моделирование образования новых материальных поверхностей в процессах адгезионного расслоения композита. *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*, (1): 100–109.
4. Матвиенко Ю. Г. 2006. *Модели и критерии механики разрушения*. М., Физматлит. 328.
5. Новопащин М. Д., Сукнев С. В. 2007. Градиентные критерии предельного состояния. *Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия*, 54(4): 316–335.
6. Панасюк В. В., Андрейкив А. Е., Партон В. З. 1988. *Основы механики разрушения материалов*. Киев, Наукова думка. 488.
7. Пестриков В. М., Морозов Е. М. 2012. *Механика разрушения*. СПб., ЦОП «Профессия». 552.
8. Райс Дж. 1975. *Математические методы в механике разрушений*. Разрушение. Т. 2. М., Мир. 204–335.
9. Саврук М. П. 1988. Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами. *Механика разрушения и прочность материалов*. Т. 2. Киев., Наукова думка. 619.
10. Смирнов С. В., Веретенникова И. А., Вичужанин Д. И. 2014. Моделирование расслоения при пластической деформации биметаллического материала, полученного сваркой взрывом. *Вычислительная механика сплошных сред*, 7(4): 398–411.
11. *Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений*. В 2-х томах. Под ред. Ю. Мураками. Т. 1. 1990. М., Мир. 448.
12. Сукнев С. В., Новопащин М. Д. 2000. Определение локальных механических свойств материалов. *Доклады академии наук*, 373(1): 48–50.
13. Сукнев С. В. 2011. Применение нелокальных и градиентных критериев для оценки разрушения геоматериалов в зонах концентрации растягивающих напряжений. *Физическая мезомеханика*, 14(2): 67–75.
14. Aluru K., Wen F.-L., Shen Y.-L. 2011. Direct simulation of fatigue failure in solder joints during cyclic shear. *Materials and Design*, 32: 1940–1947.
15. Chandra N. 2002. Evaluation of interfacial fracture toughness using cohesive zone model. *Compos. Part A: Appl. Sci. Manufact.*, 33: 1433–1447.
16. Dugdale D. S. 1960. Yielding of steel sheets containing slits. *J. Mech. Phys. Solids*, 8: 100–104.
17. Eaton N. F., Glover A. G., McGrath J. T. 1978. Aspects of fracture in the production and service of welded structures. *Fracture 1977: Advances in research on the strength and fracture, of materials*. Fourth intern. Conf. on fracture, June 1977, Univ. of Waterloo, Canada / D. M. R. Taplin, ed. New York: Pergamon. 1: 751–773.
18. Gross D., Seelig T. 2006. *Fracture Mechanics*. Berlin, Springer. 320.

19. Kim Y. J., Schwalbe K. H. 2001. Mismatch effect on plastic yield loads in idealised weldments II. Heat affected zone cracks. *Eng. Fract. Mech.*, 68: 183-199.
20. Kornev V. M., Kurguzov V. D. 2001. Sufficient discrete-integral criterion of rupture strength. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 42(2): 328–336.
21. Kruzic J. J., McNaney J. M., Cannon R. M., Ritchie R. O. 2004. Effects of plastic constraint on the cyclic and static fatigue behavior of metal/ceramic layered structures. *Mechanics of materials*, 36: 57–72.
22. Kurguzov V. D., Kornev V. M. 2013. Construction of diagrams of quasi-brittle and quasi-viscous material destruction on the basis of necessary and sufficient criteria. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 54(1): 179–195.
23. Kurguzov V. D., Astapov N. S., Astapov I. S. 2014. Fracture model for structured quasibrittle materials. *J. of Applied Mechanics and Technical Physics*, 55(6): 1055–1065.
24. Lin G., Meng X.-G., Cornec A., Schwalbe K.-H. 1999. The effect of strength mis-match on mechanical performance of weld joints. *Int. J. of Fracture*, 96: 37-54.
25. Pirondi A., Moroni F. 2009. An investigation of fatigue failure prediction of adhesively bonded metal/metal joints. *Int. Journal of Adhesion & Adhesives*, 29: 796–805.

References

1. Astapov N. S. 2014. Modifitsirovannaya model' zony predrazrusheniia kvazikhрупких strukturirovannykh materialov [Modified model of the pre-fracture zone of quasi-brittle structured materials]. *Fizicheskaya mezhmekhanika*, 17(1): 89–96.
2. Astaf'ev V. I., Radaev Iu. N., Stepanova L. V. 2001. Nelineinaya mekhanika razrusheniia [Non-linear fracture mechanics]. Samara, Publ. «Samarskii universitet». 632.
3. Glagolev V. V., Markin A. A., Fursaev A. A. 2018. Modeling generation of a new material surfaces in the processes of adhesive delamination of a composite. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 1: 100–109 (in Russian).
4. Matvienko Yu. G. 2006. Modeli i kriterii mehaniki razrusheniia [Models and criteria of fracture mechanics]. Moskva, Fizmatlit. 328.
5. Novopashin M. D., Suknev S. V. 2007. Gradientnye kriterii predel'nogo sostoiianiia [Gradient limit state criteria]. *Vestnik SamGU. Estestvennonauchnaia seriia*, 54(4): 316–335.
6. Panasiuk V. V., Andreikiv A. E., Parton V. Z. 1988. Osnovy mekhaniki razrusheniia materialov [Fundamentals of fracture mechanics of materials]. Kiev, Naukova dumka. 488.
7. Pestrikov V. M., Morozov E. M. 2012. Mekhanika razrusheniia. [Fracture mechanics]. SPb, Professia. 552.
8. Rice J. R. 1968. *Mathematical Methods in Fracture Mechanics*. Fracture. V. 2. New York, Academic Press. 204–335 (in Russian).
9. Savruk M. P. 1988. Koefitsienty intensivnosti naprjazhenij v telah s treshhinami. *Mekhanika razrusheniia i prochnost' materialov* [Stress intensity factor in the solids with cracks. Fracture mechanics and strength of materials]. V. 2. Kiev, Naukova Dumka. 619.
10. Smirnov S. V., Veretennikova I. A., Vichuzhanin D. I. 2014. Modelirovanie rassloeniia pri plasticheskoj deformacii bimetallicheskogo materiala, poluchennogo svarkoj vzryvom [Modeling of delamination in multilayer metals produced by explosive welding under plastic deformation]. *Vychislitel'naja mekhanika sploshnyh sred*. 7(4): 398–411.
11. Murakami Y. *Stress intensity factors handbook* (in 2 volumes). Oxford, Pergamon. 1986. 512.
12. Suknev S. V., Novopashin M. D. 2000. Opredelenie lokal'nykh mekhanicheskikh svoistv materialov [Determination of local mechanical properties of materials]. *Doklady akademii nauk*, 373(1): 48–50.
13. Suknev S. V. 2011. Primenenie nelokal'nykh i gradientnykh kriteriev dlia otsenki razrusheniia geomaterialov v zonakh kontsentratsii rastiagivaiushchikh napriazhenii [Application of non-local and gradient criteria for assessing the destruction of geomaterials in zones of tensile stress concentration]. *Fizicheskaya mezhmekhanika*, 14(2): 67–75.

14. Aluru K., Wen F.-L., Shen Y.-L. 2011. Direct simulation of fatigue failure in solder joints during cyclic shear. *Materials and Design*, 32: 1940–1947.
15. Chandra N. 2002. Evaluation of interfacial fracture toughness using cohesive zone model. *Compos. Part A: Appl. Sci. Manufact.*, 33: 1433–1447.
16. Dugdale D. S. 1960. Yielding of steel sheets containing slits. *J. Mech. Phys. Solids*, 8: 100–104.
17. Eaton N. F., Glover A. G., McGrath J. T. 1978. Aspects of fracture in the production and service of welded structures. *Fracture 1977: Advances in research on the strength and fracture, of materials. Fourth intern. Conf. on fracture, June 1977, Univ. of Waterloo, Canada / D. M. R. Taplin, ed. New York: Pergamon. 1: 751–773.*
18. Gross D., Seelig T. 2006. *Fracture Mechanics*. Berlin, Springer. 320.
19. Kim Y. J., Schwalbe K. H. 2001. Mismatch effect on plastic yield loads in idealised weldments II. Heat affected zone cracks. *Eng. Fract. Mech.*, 68: 183–199.
20. Kornev V. M., Kurguzov V. D. 2001. Sufficient discrete-integral criterion of rupture strength. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 42(2): 328–336.
21. Kruzic J. J., McNaney J. M., Cannon R. M., Ritchie R. O. 2004. Effects of plastic constraint on the cyclic and static fatigue behavior of metal/ceramic layered structures. *Mechanics of materials*, 36: 57–72.
22. Kurguzov V. D., Kornev V. M. 2013. Construction of diagrams of quasi-brittle and quasi-viscous material destruction on the basis of necessary and sufficient criteria. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 54(1): 179–195.
23. Kurguzov V. D., Astapov N. S., Astapov I. S. 2014. Fracture model for structured quasibrittle materials. *J. of Applied Mechanics and Technical Physics*, 55(6): 1055–1065.
24. Lin G., Meng X.-G., Cornec A., Schwalbe K.-H. 1999. The effect of strength mis-match on mechanical performance of weld joints. *Int. J. of Fracture*, 96: 37–54.
25. Pirondi A., Moroni F. 2009. An investigation of fatigue failure prediction of adhesively bonded metal/metal joints. *Int. Journal of Adhesion & Adhesives*, 29: 796–805.

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 30.04.2022

Поступила после рецензирования 12.06.2022

Принята к публикации 19.06.2022

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Астапов Николай Степанович – кандидат физико-математических наук, доцент, старший научный сотрудник лаборатории механики разрушения материалов и конструкций, Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, доцент кафедры высшей математики, Новосибирский государственный университет

Пр-т Лаврентьева, 15, Новосибирск, 630090, Россия

Кургузов Владимир Дмитриевич – доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник лаборатории механики разрушения материалов и конструкций, Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, профессор кафедры механики твердого тела, Новосибирский государственный университет

Пр-т Лаврентьева, 15, Новосибирск, 630090, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Nikolay Astapov – PhD, associate professor, senior researcher of Laboratory of Fracture Mechanics of Lavrentyev Institute of Hydrodynamics of Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, associate professor of the Department of Higher Mathematics of Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia




Vladimir Kurguzov – PhD, professor, chief researcher of Laboratory of Fracture Mechanics of Lavrentyev Institute of Hydrodynamics of Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, professor of the Department of Solid Mechanics of Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia

УДК 51 – 741
MSC 34L30

DOI 10.52575/2687-0959-2022-54-3-171-177

оригинальное исследование

РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОГО ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ЕРМАКОВА СТЕПЕННЫМИ РЯДАМИ

И. Н. Беляева¹ , И. К. Кириченко² , Н. Н. Чеканова³ 

(Статья представлена членом редакционной коллегии С. В. Блажевичем)

¹Белгородский государственный национальный исследовательский университет,
Белгород, 308015, Россия

²Харьковский национальный автомобильный университет, Харьков, 61002, Украина

³Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина,
Учебно-научный институт «Каразинская школа бизнеса»,
Харьков, 61001, Украина



E-mail: ibelyaeva@bsu.edu.ru, ikir238@gmail.com, natchek1976@gmail.com

Аннотация. Нелинейные дифференциальные уравнения достаточно широко используются в различных современных науках. В частности, нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение Ермакова успешно применяется для решения задач в квантовой механике, электродинамике, в оптике, в теории упругости, для описания молекулярных структур, в гетероструктурах со сложной потенциальной функцией и во многих других разделах теоретической и математической физике. Однако эффективного метода решения нелинейных уравнений типа уравнения Ермакова в настоящее время нет. К примеру, при решении задач на собственные значения современные авторы уравнение Ермакова вычисляли прямыми численными методами. Как известно из работ самого Ермакова и других известных авторов, решение уравнения Ермакова определяется двумя линейно независимыми решениями подходящего так называемого присоединенного линейного дифференциального уравнения второго порядка. Теория интегрирования линейных дифференциальных уравнений степенными рядами математически строго разработана, в частности, для присоединенных линейных уравнений к уравнению Ермакова доказана сходимости степенных рядов, представляющих решение присоединенных линейных дифференциальных уравнений. В настоящей работе эти линейно независимые решения присоединенного линейного уравнения были вычислены в виде степенных рядов с применением компьютерной системы аналитических вычислений MAPLE, и для ряда уравнений Ермакова построены их решения в виде степенных рядов, в общем, с произвольным максимальным показателем степени. Непосредственной постановкой было показано, что так полученные степенные ряды удовлетворяют уравнению Ермакова. Полученные решения в виде степенных рядов, содержащих также и спектральный параметр, могут быть успешно применены к решению задач на собственные значения, в частности для решения стационарного уравнения Шредингера.

Ключевые слова: математическое моделирование, символично-численные методы, комплексы программ, дифференциальные уравнения, нелинейные обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка, уравнение Ермакова, степенные ряды

Для цитирования: Беляева И. Н., Кириченко И. К., Чеканова Н. Н. 2022. Решение нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения Ермакова степенными рядами. Прикладная математика & Физика, 54(3): 171–177. DOI 10.52575/2687-0959-2022-54-3-171-177

SOLUTION OF THE NONLINEAR ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATION OF ERMAKOV BY POWER SERIES

I. N. Belyaeva¹ , I. K. Kirichenko² , N. N. Chekanova³ 

(Article submitted by a member of the editorial board S. V. Blazhevich)

¹Belgorod National Research University, Belgorod, 308015, Russia

²Kharkiv National Automobile and Highway University, Kharkiv, 61002, Ukraine

³Kharkiv National University named after V. N. Karazhin,
«Karazin Business school», Kharkiv, 61001, Ukraine

E-mail: ibelyaeva@bsu.edu.ru, ikir238@gmail.com, natchek1976@gmail.com

Received August, 31, 2022

Abstract. Nonlinear differential equations are widely used in various modern sciences. In particular, the nonlinear ordinary differential equation of Ermakov is successfully used to solve problems in quantum mechanics, electrodynamics, optics, elasticity theory, to describe molecular structures, in heterostructures with a complex potential function and in many other

branches of theoretical and mathematical physics. However, there is currently no effective method for solving nonlinear equations such as the Ermakov equation. For example, when solving eigenvalue problems, known modern authors calculated solutions of the Ermakov equation by direct numerical methods. As is known from the works of Ermakov himself and other modern authors, the solution of the Ermakov equation is determined by two linearly independent solutions of a suitable so-called attached linear differential equation of the second order. The theory of integration of linear differential equations by power series is mathematically strictly developed, in particular, for the attached linear equations to the Ermakov equation, the convergence of power series representing the solution of the attached linear differential equations is proved. In this paper, these linearly independent solutions of the attached linear equation were calculated in the form of power series using the MAPLE analytical computing computer system and for a number of Ermakov equations, their solutions were constructed in the form of power series, in general, with an arbitrary number terms. By direct substitution, it was shown that the power series obtained in this way satisfy the Ermakov equation. The obtained solutions in the form of power series containing also a spectral parameter can be successfully applied to solving eigenvalue problems, in particular for solving the stationary Schrodinger equation.

Key words: mathematical modeling, symbolic-numerical methods, software packages, differential equation, nonlinear ordinary differential equation of second order, equation of Ermakov, power series

For citation: Belyaeva I. N., Kirichenko I. K., Chekanova N. N. 2022. Solution of the nonlinear ordinary differential equation of Ermakov by power series. Applied Mathematics & Physics, 54(3): 171–177 (in Russian).

DOI 10.52575/2687-0959-2022-54-3-171-177

1. Введение. В свое время В. П. Ермаков – профессор математики Киевского университета – показал, что решения некоторых нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений могут быть построены при помощи решений соответствующих (присоединенных) линейных дифференциальных уравнений второго порядка. Для исследованных им некоторых нелинейных уравнений, включая разные варианты уравнения Риккати, а также предложенного своего уравнения, Ермаков представил конкретные общие формулы для решений нелинейных уравнений посредством решений соответствующих (присоединенных) линейных уравнений [8]. В частности, для своего предложенного нелинейного уравнения в виде

$$u'' + q(x)u + \frac{c}{u^3} = 0, \quad (1)$$

где $c = const$. Ермаков доказал, что общее решение уравнения (1) может быть записано следующим образом:

$$C_1 \cdot \int \frac{dx}{\xi^2(x)} + C_2 = \sqrt{C_1 \cdot \frac{u^2}{\xi^2(x)} - C}, \quad (2)$$

где $\xi(x)$ – какое-нибудь частное решение следующего присоединенного линейного уравнения

$$y'' + q(x)y = 0. \quad (3)$$

В работе [6] ее авторы выполнили подробный анализ более общих подобных нелинейных уравнений, включая и уравнение Ермакова (1). Данные авторы показали, что, исходя из представления (2), общее решение уравнения (1) может быть записано в виде

$$u(x) = \sqrt{y_1^2(x) + c \cdot W^{-2} \cdot y_2^2(x)}, \quad (4)$$

где $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – линейно независимые решения линейного уравнения (3), а величина $W = y_1 \cdot y_2' - y_2 \cdot y_1'$ – вронскиан этих решений, $W[y_1, y_2] \neq 0$. Значительно позже уравнение (1) было переоткрыто другими авторами [19], [20].

Может быть даже неожиданно, но нелинейное уравнение Ермакова нашло применение позже в современных областях математики и физики. К примеру, в работе [10] уравнение Ермакова было применено для построения нового варианта теории ВКБ-приближения в квантовой механике, который получил простую структуру, в частности, были получены практически полезные рекуррентные соотношения для ВКБ-разложений. В работах [18], [12] на основе уравнения Ермакова получены инварианты для описания движения нерелятивистской заряженной частицы в зависящем от времени магнитном поле. Ермаков установил также в [8], что линейное уравнение (3) допускает следующую фундаментальную систему решений

$$y_{1,2}(x) = y(x) \cdot \exp\left(\pm\sqrt{-c} \cdot \int \frac{dx}{u^2(x)}\right), \quad (5)$$

где $u(x)$ есть какое-нибудь решение нелинейного уравнения (1). Используя этот результат, автор статьи [19] разработал численный метод решения задачи на собственные значения и успешно применил его к уравнению Шредингера для ангармонического осциллятора. В работе [21], посвященной решению

уравнения Шредингера, появились сразу два нелинейные уравнения, и Ермакова, и Риккати, которые описывают эволюцию максимума и ширины волновой функции $\Psi(x, t)$. В статье [15] показано, что обсуждаемые нелинейные обыкновенные дифференциальные уравнения успешно применяются для описания процессов и явлений в нелинейной оптике, в теории нелинейной упругости, в молекулярных структурах, в квантовой теории поля в криволинейных пространствах и квантовой космологии (см. также [1], [13], [16], [17]).

2. Результаты и их обсуждение. Известно, что решения линейных обыкновенных дифференциальных уравнений могут быть получены в виде степенных или обобщенно степенных рядов, если уравнение имеет регулярные особые точки (см., например, [9], [11], [7]). В настоящей работе разработанная авторами компьютерная программа [2] применяется для решения конкретных уравнений Ермакова и представления его решений в виде рядов [3], [5], [14].

Для нахождения его двух линейно независимых решений $y_1(x)$ и $y_2(x)$ в используемую программу достаточно ввести только функцию-коэффициент $q(x)$ из уравнения (3), если при этом уравнение (3) имеет регулярную особую точку, то следует на входе программы включить соответствующий флаг. В результате на выходе получим решение $u(x)$ с начальными данными $u(x_0) = 1, u'(x_0) = 0$, а также решение $y(x)$ с начальными данными $y(x_0) = 0, y'(x_0) = 1$, оба решения в виде степенных или обобщенных степенных рядов. Подставляя эти решения в формулу (4), находим решение $u(x)$ уравнения Ермакова (1) в виде степенных рядов. Подставляя так найденное решение $u(x)$ в само уравнение Ермакова, получаем, что оно действительно ему удовлетворяет до определенной степени вычисленного степенного ряда.

Ниже представляем результаты расчетов для конкретных нелинейных уравнений Ермакова.

1. Пусть дано уравнение

$$u'' - xu = \frac{1}{u^3}. \quad (6)$$

Соответствующее линейное однородное уравнение имеет вид:

$$y'' - xy = 0. \quad (7)$$

При помощи математического пакета символьных вычислений Maple нами была разработана ранее программа решения данного дифференциального уравнения. Уравнение (7) не имеет особых точек. При помощи этой программы [2] найдено аналитическое решение уравнения (6) в виде степенных рядов, в которых максимальный показатель степени x , необходимый для построения степенного ряда, был выбран $N = 26$:

$$y_1 = 1 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{180}x^6 + \frac{1}{12960}x^9 + \frac{1}{1710720}x^{12} + \frac{1}{359251200}x^{15} + \frac{1}{109930867200}x^{18} + \\ + \frac{1}{46170964224000}x^{21} + \frac{1}{25486372251648000}x^{24}; \\ y_2 = x + \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{504}x^7 + \frac{1}{45360}x^{10} + \frac{1}{7076160}x^{13} + \frac{1}{1698278400}x^{16} + \frac{1}{580811212800}x^{19} + \frac{1}{268334780313600}x^{22}. \quad (8)$$

Далее, используя найденные решения, модифицируем программу для нахождения решения соответствующего нелинейного уравнения (6). Таким образом, находим решение данного нелинейного уравнения

$$u(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{41}{720}x^6 + \frac{1}{48}x^7 - \frac{187}{4480}x^8 + \frac{271}{12960}x^9 - \frac{2537}{80640}x^{10} + \\ + \frac{533}{26880}x^{11} - \frac{2493259}{95800320}x^{12} + \frac{13759}{725760}x^{13} - \frac{8196943}{358758400}x^{14} + \frac{52755623}{2874009600}x^{15} - \\ - \frac{29201560681}{1394852659200}x^{16} + \frac{38774261}{2152550400}x^{17} - \frac{25366097010517}{1280474741145600}x^{18} + \frac{611375851}{34159656960}x^{19} - \\ - \frac{1165993680277}{60678438912000}x^{20} + \frac{172698415643953}{9603560558592000}x^{21} - \frac{25895906098288313}{1362425124578918400}x^{22}. \quad (9)$$

2. Рассмотрим нелинейное уравнение

$$u'' + \frac{2}{x}u = \frac{1}{u^3}. \quad (10)$$

Его присоединенное линейное уравнение имеет вид

$$y'' + \frac{2}{x}y = 0. \quad (11)$$

Линейное однородное дифференциальное уравнение (11) содержит особую точку $x = 0$. Из-за этого решение уравнения содержит логарифмические члены. Решение данного линейного однородного уравнения, которое получено с помощью разработанной программы [2] при $N = 9$, имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} y_1 &= x - x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{18}x^4 + \frac{1}{180}x^5 - \frac{1}{2700}x^6 + \frac{1}{56700}x^7, \\ y_2 &= -1 + (1 + 2\ln(x))x + (2 - 2\ln(x))x^2 + \left(-\frac{11}{9} + \frac{2}{3}\ln(x)\right)x^3 + \left(\frac{29}{108} - \frac{1}{9}\ln(x)\right)x^4 + \\ &+ \left(-\frac{43}{1350} + \frac{1}{90}\ln(x)\right)x^5 + \left(\frac{97}{40500} - \frac{1}{1350}\ln(x)\right)x^6. \end{aligned} \quad (12)$$

Выполняя компьютерный расчет в Maple, находим решение соответствующего нелинейного уравнения (10) в виде:

$$\begin{aligned} u(x) &= \left(-1 + 2x + 4x^2 - \frac{76}{9}x^3 + \frac{35}{54}x^4 + \frac{4739}{1350}x^5 - \frac{7648}{3375}x^6 + \frac{22177}{30375}x^7 - \frac{1551071}{10206000}x^8 + \right. \\ &+ \frac{14072}{637875}x^9 - \frac{339401}{153090000}x^{10} + \frac{56069}{382725000}x^{11} - \frac{31019}{5740875000}x^{12} - \frac{1}{76545000}x^{13} + \\ &+ \frac{1}{3214890000}x^{14} + \ln(x) \left(4x - 8x^2 - \frac{8}{3}x^3 + \frac{34}{3}x^4 - \frac{1132}{135}x^5 + \frac{439}{135}x^6 - \frac{8197}{10125}x^7 + \frac{8617}{60750}x^8 - \right. \\ &- \frac{731}{40500}x^9 + \frac{199}{121500}x^{10} - \frac{61}{607500}x^{11} + \frac{97}{27337500}x^{12} \left. \right) - \ln(x)^2 \left(4x^2 - 8x^3 + \frac{20}{3}x^4 - \right. \\ &\left. - \frac{28}{9}x^5 + \frac{14}{15}x^6 - \frac{44}{225}x^7 + \frac{61}{2025}x^8 - \frac{7}{2025}x^9 + \frac{7}{24300}x^{10} - \frac{1}{60750}x^{11} + \frac{1}{182250}x^{12} \right) \left. \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (13)$$

3. Пусть дано нелинейное дифференциальное уравнение

$$u'' + u = \frac{1}{u^3}. \quad (14)$$

Тогда соответствующее ему линейное однородное уравнение имеет вид

$$y'' + y = 0. \quad (15)$$

Применяя программу [2], указав во входных данных максимальный показатель степени x строящего степенного ряда, а также что $TypeV = 1$, т. е. уравнение не имеет особых точек, получаем два линейно независимых решения уравнения (15)

$$\begin{aligned} y_1 &= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6 + \frac{1}{40320}x^8 - \frac{1}{3628800}x^{10} + \frac{1}{479001600}x^{12}, \\ y_2 &= x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7 + \frac{1}{362880}x^9 - \frac{1}{39916800}x^{11}. \end{aligned} \quad (16)$$

Затем, проведя соответствующие расчеты в Maple, находим решение нелинейного уравнения (14):

$$u(x) = 1 - x^2 - \frac{1}{6}x^4 - \frac{19}{90}x^6 - \frac{559}{2520}x^8 - \frac{29161}{113400}x^{10}. \quad (17)$$

4. Рассмотрим нелинейное дифференциальное уравнение

$$u'' + xu = \frac{1}{u^3}. \quad (18)$$

Его присоединенное линейное однородное уравнение

$$y'' + xy = 0. \quad (19)$$

Применяя программу [2], [4], [5], [14], во входных данных ставим максимальный показатель степени $N = 24$, а также что $TypeV = 1$, т. е. уравнение не имеет особых точек, получаем два линейно независимых решения уравнения (19):

$$y_1 = 1 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{180}x^6 - \frac{1}{12960}x^9 + \frac{1}{1710720}x^{12} - \frac{1}{359251200}x^{15} +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{109930867200}x^{18} - \frac{1}{46170964224000}x^{21}, \\
y_2 = & x - \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{504}x^7 - \frac{1}{45360}x^{10} + \frac{1}{7076160}x^{13} - \frac{1}{1698278400}x^{16} + \\
& + \frac{1}{580811212800}x^{19} - \frac{1}{268334780313600}x^{22}.
\end{aligned} \tag{20}$$

Решение нелинейного уравнения (18) получаем в виде следующего степенного ряда:

$$\begin{aligned}
u(x) = & 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{41}{720}x^6 - \frac{1}{48}x^7 - \frac{187}{4480}x^8 - \frac{271}{12960}x^9 - \frac{2537}{80640}x^{10} - \\
& - \frac{533}{26880}x^{11} - \frac{2493259}{95800320}x^{12} - \frac{13759}{725760}x^{13} - \frac{8196943}{358758400}x^{14} - \frac{52755623}{2874009600}x^{15} - \\
& - \frac{29201560681}{1394852659200}x^{16} - \frac{38774261}{2152550400}x^{17} - \frac{25366097010517}{1280474741145600}x^{18} - \frac{611375851}{34159656960}x^{19} - \\
& - \frac{1165993680277}{60678438912000}x^{20} - \frac{172698415643953}{9603560558592000}x^{21}.
\end{aligned} \tag{21}$$

3. Заключение. Таким образом, в данной работе предложен способ решения нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений Ермакова при помощи решений соответствующих (присоединенных) линейных дифференциальных уравнений второго порядка, решение которых находится в виде сходящихся степенных рядов с применением мощной системы аналитических вычислений Maple и разработанной авторами программы. Установлено расчетами, что если максимальная степень степенного ряда в решении присоединенного линейного уравнения (3) равна N , то построенное с их помощью решение уравнения Ермакова (1) тоже в виде степенного ряда удовлетворяется до степени $(N - 1)$. Однако разработанная программа позволяет находить решение линейного уравнения для произвольного значения N , поэтому решение уравнения Ермакова также может быть найдено до любой степени N . Важно отметить, что решения в виде степенных рядов содержит спектральный параметр, что упрощает решение задачи на собственные значения.

Список литературы

1. Белецкий В. В., Розов Н. Х. 2005. К 70-летию Л. М. Берковича. Вестник СамГУ, Естественнаучная серия, 6(40): 5–14.
2. Беляева И. Н., Уколов Ю. А., Чеканов Н. А. 2005. Построение общего решения дифференциальных уравнений фуксовского типа в виде степенных рядов. Свидетельство об отраслевой регистрации разработки в Отраслевом фонде алгоритмов и программ. М.: ВНИИЦ, №50200500089.
3. Беляева И. Н., Богачев В. Е., Чеканов Н. А. 2012. Алгоритм символьно-численного вычисления функции Грина дифференциальных уравнений второго порядка. Вестник РУДН, Серия Математика, Информатика, Физика, 3: 43–51.
4. Беляева И. Н., Богачев В. Е., Чеканов Н. А. 2012. Символьно-численное вычисление функции Грина обыкновенных дифференциальных уравнений второго и третьего порядков. Вестник Херсонского национального технического университета, 2(45): 50–55.
5. Беляева И. Н., Чеканов Н. А., Кириченко И. А., Чеканова Н. Н. 2019. Символьно-численные методы решения дифференциальных уравнений классической и квантовой механики. Харків: "ІСМА", 420.
6. Беркович Л. М., Розов Н. Х. 1972. Некоторые замечания о дифференциальных уравнениях вида $y'' + a(x)y = f(x)y^{-\alpha}$. Дифференциальные уравнения, 8(11): 2076–2079.
7. Зайцев В. Ф., Полянин А. Д. 1997. Справочник по линейным обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Изд-во «Факториал», 304.
8. Ермаков В. П. 1880. Дифференциальные уравнения второго порядка. Условия интегрируемости в конечном виде. Киев, Универ. Изв., 9: 1–25.
9. Матвеев Н. М. 1963. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Высшая школа, 546.
10. Соловьев Е. А. 1984. Уравнение Милна и высшие порядки ВКБ приближения. Письма в ЖЭТФ, 39(2): 84–86.

11. Трикоми Ф. 1962. Дифференциальные уравнения. М.: Изд-во иностранной литературы, 352.
12. Чеканова Н. Н., Чеканов Н. А. 2013. Инварианты одномерного гармонического осциллятора с зависящей от времени частотой. Вестник ХНТУ, 2(47): 372–374.
13. Athorne C. 1990. Geometry of Ermakov systems. Nonlinear Evolution Equations and Dynamical systems (NEEDS'90), Proc. of the 6th International Workshop, 16-26 July, USSR.: 100–103.
14. Belyaeva I., Kirichenko I., Ptashny O., Chekanova N., Yarkho T. 2021. Integrating linear ordinary fourth-order differential equations in the MAPLE programming environment. Eastern-European Journal of Enterprise Technologies, 3/4(111): 51–57.
15. Hansen R. M., Lidsey J. E. 2002. Ermakov-Pinney equation in scalar field cosmologies. Phys. Rev. D, 66. 023523.
16. Korsch H. J., Laurent H. 1981. Milne's differential equation and numerical solutions of the Shrodinger equation I. Bound-state energies for single- and double-minimum potentials. J. Phys. B.: At. Mol. Phys., 14: 4213–4230.
17. Korsch H. J., Laurent H., Mohlenkamp R. 1982. Milne's differential equation and numerical solutions of the Schrodinger equation II. Complex energy resonance states. J. Phys. B: At. Mol. Phys., 15: 1–14.
18. Lewis H. R. 1968. Motion of a time-dependent harmonic oscillator, and of a charged particle in a class of time-dependent, axially symmetric electromagnetic fields. Phys. Rev., 172(5): 1313–1315.
19. Milne W. 1930. The numerical determination of characteristic numbers. Phys. Rev., 35: 863–867.
20. Pinney E. 1950. The nonlinear differential equation. Proc. Amer. Math. Soc.: 581.
21. Schuch D. 2008. Riccati and Ermakov equations in Time-Dependent and Time-Independent Quantum Systems. SIGMA 4, 043: 16.

References

1. Beleckij V. V., Rozov N. H. 2005. K 70-letiju L. M. Berkovicha [To the 70th anniversary of L. M. Berkovich]. Vestnik SamGU, Estestvennonauchnaja serija, 6(40): 5–14.
2. Belyaeva I. N., Ukolov Ju. A., Chekanov N. A. 2005. Postroenie obshhego reshenija differencial'nyh uravnenij fuksovskogo tipa v vide stepennyh rjadov [Construction of a general solution for differential Fuchs type equations in the form of power series]. Svidetel'stvo ob otraslevoj registracii razrabotki v Otrasleyvom fonde algoritmov i programm. M.: VNTIC, №50200500089.
3. Belyaeva I. N., Bogachev V. E., Chekanov N. A. 2012. Algoritm simvol'no-chislennogo vychislenija funkcii Grina differencial'nyh uravnenij vtorogo porjadka [Algorithm for symbolic-numerical calculation of a function Green's differential equations of the second order. Bulletin of RUDN University]. Vestnik RUDN, Serija Matematika, Informatika, Fizika, 3: 43–51.
4. Belyaeva I. N., Bogachev V. E., Chekanov N. A. 2012. Simvol'no-chislennoe vychislenija funkcii Grina obyknovennyh differencial'nyh uravnenij vtorogo i tret'ego porjadkov [Symbolic-numerical calculation of the Green's function ordinary differential equations of the second and third orders]. Vestnik Hersonskogo nacional'nogo tehniceskogo universiteta, 2(45): 50–55.
5. Belyaeva I. N., Chekanov N. A., Kirichenko I. A., Chekanova N. N. 2019. Simvol'no-chislennye metody reshenija differencial'nyh uravnenij klassicheskoj i kvantovoj mehaniki [Symbolic-numerical methods of solution differential equations of classical and quantum mechanics.]. Harkiv: "ICMA", 420.
6. Berkovich L. M., Rozov N. H. 1972. Nekotorye zamechanija o differencial'nyh uravnenijah vida $y'' + a(x)y = f(x)y^{-\alpha}$ [Some remarks on differential equations $y'' + a(x)y = f(x)y^{-\alpha}$]. Differencial'nye uravnenija, 8(11): 2076 – 2079.
7. Zajcev V. F., Poljanin A. D. 1997. Spravochnik po linejnym obyknovennym differencial'nym uravnenijam [Handbook of linear ordinary differential equations]. M.: Izd-vo «Faktorial», 304.
8. Ermakov V. P. 1880. Differencial'nye uravnenija vtorogo porjadka [Second order differential equations]. Uslovija integriruемости v konechnom vide. Kiev, Univer. Izv., 9: 1–25.
9. Matveev N. M. 1963. Metody integrirovaniija obyknovennyh differencial'nyh uravnenij [Methods for integrating ordinary differential equations]. M.: Vysshaja shkola, 546.

10. Solov'ev E. A. 1984. Uravnenie Milna i vysshie porjadki VKB priblizhenija [The Milne equation and higher orders of the WKB approximation]. Pis'ma v ZhJETF, 39(2): 84–86.
11. Triкоми F. 1962. Differencial'nye uravnenija [Differential Equations]. M.: Izd-vo inostrannoj literatury, 352.
12. Chekanova N. N., Chekanov N. A. 2013 Invarianty odnomernogo garmonicheskogo oscilljatora s zavisjashhej ot vremeni chastotoj [Invariants of a one-dimensional harmonic oscillator with dependence on time frequency]. Vestnik HNTU, 2(47): 372-374.
13. Athorne C. 1990. Geometry of Ermakov systems. Nonlinear Evolution Equations and Dynamical systems (NEEDS'90), Proc. of the 6th International Workshop, 16-26 July, USSR.: 100-103.
14. Belyaeva I., Kirichenko I., Ptashny O., Chekanova N., Yarkho T. 2021. Integrating linear ordinary fourth-order differential equations in the MAPLE programming environment. Eastern-European Journal of Enterprise Technologies, 3/4(111): 51-57.
15. Hansen R.M., Lidsey J.E. 2002. Ermakov-Pinney equation in scalar field cosmologies. Phys. Rev. D, 66. 023523.
16. Korsch H.J., Laurent H. 1981. Milne's differential equation and numerical solutions of the Shrodinger equation I. Bound-state energies for single- and double-minimum potentials. J. Phys. B.: At. Mol. Phys., 14: 4213-4230.
17. Korsch H.J., Laurent H., Mohlenkamp R. 1982. Milne's differential equation and numerical solutions of the Schrodinger equation II. Complex energy resonance states. J. Phys. B: At. Mol. Phys., 15: 1-14.
18. Lewis H.R. 1968. Motion of a time-dependent harmonic oscillator, and of a charged particle in a class of time-dependent, axially symmetric electromagnetic fields. Phys. Rev., 172(5): 1313–1315.
19. Milne W. 1930. The numerical determination of characteristic numbers. Phys. Rev., 35: 863-867.
20. Pinney E. 1950. The nonlinear differential equation . Proc. Amer. Math. Soc.: 581.
21. Schuch D. 2008. Riccati and Ermakov equations in Time-Dependent and Time-Independent Quantum Systems. SIGMA 4, 043: 16.

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 01.07.2022

Поступила после рецензирования 26.08.2022

Принята к публикации 31.08.2022

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Беляева Ирина Николаевна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры информатики, естественно-научных дисциплин и методик преподавания, Белгородский государственный национальный исследовательский университет

ул. Победы, 85, г. Белгород, 308015, Россия

Кириченко Игорь Константинович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики, Харьковский национальный автомобильный университет

ул. Ярослава Мудрого, 25, г. Харьков, 61002, Украина

Чеканова Наталья Николаевна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры информационных технологий и математического моделирования, Харьковский национальный университета им. В. Н. Каразина, Учебно-научный институт «Каразинская школа бизнеса»

ул. Мироносицкая, 1, г. Харьков, 61001, Украина

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Irina Belyaeva – PhD, Associate Professor (Docent) of the Department of Computer Science, Natural Sciences and Teaching Methods, Belgorod State National Research University, Belgorod, Russia.

Igor Kirichenko – PhD, Professor of Department of higher Mathematics Kharkiv National Automobile and Highway University, Kharkiv, Ukraine.

Natalia Chekanova – PhD, Associate Professor (Docent) of the Department Information Technology and Mathematic Modeling Kharkiv National University named after V. N. Karazin, "Karazin Business school Kharkiv, Ukraine.

УДК 539.23

DOI 10.52575/2687-0959-2022-54-3-178-185

оригинальное исследование

ЗНАКОПЕРЕМЕННОЕ МАГНЕТСОПРОТИВЛЕНИЕ И ТЕМПЕРАТУРНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТИ МОНОКРИСТАЛЛОВ ТВЕРДЫХ РАСТВОРОВ АРСЕНИДА КАДМИЯ

Е. П. Кочура¹, А. В. Борисенко², В. С. Захвалинский², А. З. Хтет¹

(Статья представлена членом редакционной коллегии А. В. Носковым)

¹Юго-Западный государственный университет,
г. Курск, 305040, Россия

²Белгородский государственный национальный исследовательский университет,
г. Белгород, 308015, Россия

E-mail: akochura@mail.ru, 1491654@bsu.edu.ru, zakhvalinskii@bsu.edu.ru, zawh0898@gmail.com

Аннотация. Модифицированным методом Бриджмена выращен монокристалл твердого раствора $(\text{Cd}_{0.5}\text{Zn}_{0.5})_3\text{As}_2$. Измерена холловская подвижность и концентрация носителей заряда. Исследована зависимость электропроводности и магнетосопротивления в диапазоне от 10 до 300 К. Обнаружено, что в системе $(\text{Cd}_{0.5}\text{Zn}_{0.5})_3\text{As}_2$ демонстрирующей механизм прыжковой проводимости с переменной длиной прыжка типа Мотта, проявляется отрицательное магнетосопротивление в широком температурном диапазоне в ортогональном магнитном поле 1 Тл. Определены радиус локализации носителей заряда $a = 262 \text{ \AA}$, ширина мягкой параболической щели $\Delta = 0.259 \text{ мэВ}$.

Ключевые слова: отрицательное магнетосопротивление, твердый раствор, монокристалл, прыжковая проводимость, арсенид кадмия

Для цитирования: Кочура А. В., Борисенко А. В., Захвалинский В. С., Хтет А. З. 2022. Знакопеременное магнетосопротивление и температурная зависимость электропроводности монокристаллов твердых растворов арсенида кадмия. Прикладная математика & Физика, 54(4): 178–185.

DOI 10.52575/2687-0959-2022-54-3-178-185

ALTERNATING MAGNETORESISTANCE AND TEMPERATURE DEPENDENCE OF ELECTRICAL CONDUCTIVITY OF SINGLE CRYSTALS OF SOLID SOLUTIONS OF CADMIUM ARSENIDE

E. P. Kochura¹, A. V. Borisenko², V. S. Zakhvalinskii², Aung Zaw Htet¹

(Article submitted by a member of the editorial board A. V. Noskov)

¹ Southwest State University,
Kursk, 305040, Russia

²Belgorod National Research University, Belgorod, 308015, Russia

E-mail: akochura@mail.ru, 1491654@bsu.edu.ru, zakhvalinskii@bsu.edu.ru, zawh0898@gmail.com

Received September, 06, 2022

Abstract. A single crystal of solid solution was grown by the modified Bridgman method $(\text{Cd}_{0.5}\text{Zn}_{0.5})_3\text{As}_2$. The Hall mobility and the concentration of charge carriers were measured. The dependence of electrical conductivity and magnetoresistance was investigated in the range from 10 to 300 K. It was found that in the system $(\text{Cd}_{0.5}\text{Zn}_{0.5})_3\text{As}_2$ demonstrating the Mott variable-range hopping conductivity mechanism. Negative magnetoresistance is manifested in a wide temperature range in an orthogonal magnetic field of 1 Tl. The radius of localization of charge carriers $a = 262 \text{ \AA}$, the Coulomb gap $\Delta = 0.259 \text{ meV}$ are determined.

Keywords: negative magnetoresistance, solid solution, single crystal, hopping conductivity, cadmium arsenide

For citation: Kochura A. V., Borisenko A. V., Zakhvalinskii V. S., Htet Aung Zaw. 2022. Alternating magnetoresistance and temperature dependence of electrical conductivity of single crystals of solid solutions of cadmium arsenide. Applied Mathematics & Physics, 54(3): 178–185 (in Russian).

DOI 10.52575/2687-0959-2022-54-3-178-185

1. Введение. Ранее было установлено, что (Cd_3As_2) является трехмерным полуметаллом Дирака [1, 3], который обладает чрезвычайно высокой подвижностью, особыми транспортными свойствами, такими как большое магнетосопротивление в поперечных магнитных полях, что может иметь значение для практического применения [10]. В последние годы широко исследуется эффект отрицательного магнетосопротивления в топологических материалах и механизмы его возникновения [4]. Одной из причин

наблюдаемого отрицательного магнетосопротивления является присутствие киральной аномалии [5]. Другой причиной считается влияние прыжковой проводимости с переменной длиной прыжка типа Шкловского – Эфроса [14, 15]. Тем не менее происхождение отрицательного магнетосопротивления остается спорным. Что еще более важно, данное исследование позволяет предполагать характерную зависимость наблюдаемого отрицательного магнетосопротивления от прыжковой проводимости с переменной длиной прыжка типа Мотта, что согласуется с теорией [11]. В ряде работ особое внимание уделено эволюции топологических свойств в тройных и четверных твердых растворах на основе арсенида кадмия [10]. Область твердых растворов $(\text{Cd}_{1-x}\text{Zn}_x)_3\text{As}_2$ вблизи $x = 0.5$ практически не изучена, а в соответствии с моделью Боднара [2] свидетельствует о не инверсном чередовании энергетических зон. Кроме того, образцы твердых растворов в диапазоне составов $0.38 \leq x \leq 0.6$ могут кристаллизоваться либо в α'' -фазе, либо в α''' -фазе [13], что требует тщательного контроля полученных образцов. Таким образом, целью настоящей работы было исследование свойств монокристаллов твердого раствора $(\text{Cd}_{0.5}\text{Zn}_{0.5})_3\text{As}_2$: проведены измерения температурных зависимостей удельного сопротивления и магнетосопротивления.

2. Материалы и методика эксперимента. Монокристалл твердого раствора $(\text{Cd}_{0.5}\text{Zn}_{0.5})_3\text{As}_2$ был получен модифицированным методом Бриджмена. Для определения состава и однородности распределения элементов на поверхности образца использовался сканирующий электронный микроскоп JSM-6610LV (Jeol) с приставкой для энергодисперсионной рентгеновской спектроскопии (ЭДРС) $X - \text{Max}^N$ (Oxford Instruments). Было установлено, что содержание элементов в образце $(\text{Cd}_{1-x}\text{Zn}_x)_3\text{As}_2$ было однородным (рис. 1) с составом $x = 0.50$. Не обнаружено присутствие включений (преципитатов), других химических соединений или эвтектик.

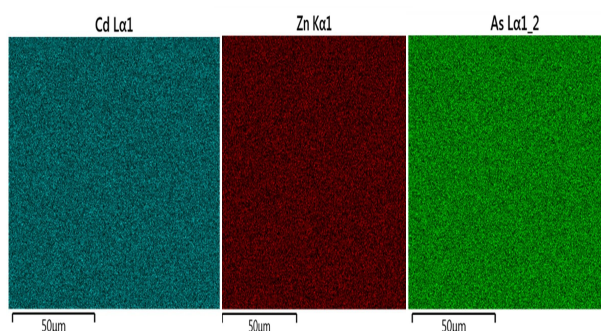


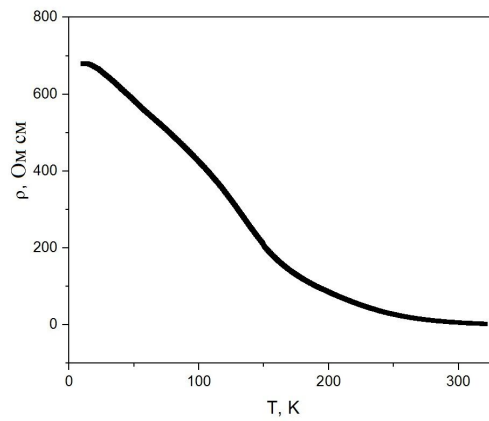
Рис. 1. Равномерное распределение элементов по поверхности образца $(\text{Cd}_{0.5}\text{Zn}_{0.5})_3\text{As}_2$ по данным энергодисперсионной рентгеновской спектроскопии $(\text{Cd}_{0.5}\text{Zn}_{0.5})_3\text{As}_2$

Fig. 1. Uniform distribution of elements over the surface of sample $(\text{Cd}_{0.5}\text{Zn}_{0.5})_3\text{As}_2$ according to energy dispersive X-ray spectroscopy

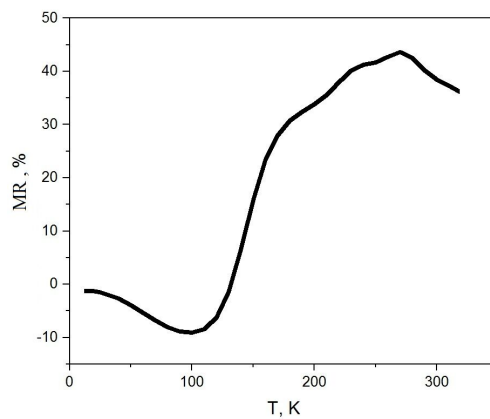
Рентгенофазовый анализ, выполненный с помощью рентгеновского дифрактометра GBC ЕММА (излучение $\text{Cu K}\alpha$, $\lambda = 1.5401 \text{ \AA}$) при комнатной температуре, также подтвердил однофазовый состав образца. Его кристаллическая структура соответствовала α''' -полиморфной модификации, которая наблюдалась ранее для некоторых составов твердых растворов арсенид кадмия – арсенид цинка [9, 13]. Эта структура является тетрагональной (п. г. $I4_1/amd$) с параметрами $a = b = 8.55 \text{ \AA}$ и $c = 24.13 \text{ \AA}$.

Образец для измерения удельного сопротивления был подготовлен в форме параллелепипеда, размеры которого составили: длина 5.23 мм, ширина 4.46 мм, высота 2.52 мм. Стороны образца отшлифованы до поверхности «зеркала». Измерения проводились шестизондовым методом в температурном диапазоне от 320 К до 10 К. Для получения температурных зависимостей удельного сопротивления и магнетосопротивления исследуемого материала применялась криогенная установка с использованием гелиевого компрессора и термоконтроллера для управления температурой.

3. Результаты и обсуждение. На рис. 2 представлена температурная зависимость удельного сопротивления образца $(\text{Cd}_{1-x}\text{Zn}_x)_3\text{As}_2$ при $x = 0.5$. Поведение графика зависимости удельного сопротивления твердого раствора $(\text{Cd}_{0.5}\text{Zn}_{0.5})_3\text{As}_2$ от температуры близко к тому, о котором сообщалось в ссылке [10].

Рис. 2. Температурная зависимость удельного сопротивления образца $(\text{Cd}_{0.5} \text{Zn}_{0.5})_3\text{As}_2$ Fig. 2. Temperature dependence of the resistivity for the sample $(\text{Cd}_{0.5} \text{Zn}_{0.5})_3\text{As}_2$

Температурная зависимость удельного сопротивления образца имеет полупроводниковый характер, плавно возрастая с понижением температуры. Такая температурная зависимость говорит о том, что повышение температуры приводит к увеличению количества свободных зарядов в полупроводнике. На рис. 3 приведена зависимость поперечного магнетосопротивления (т.е. зависимость сопротивления кристалла, помещенного в магнитное поле, перпендикулярное электрическому току) от температуры. Магнетосопротивление MR было определено как $(\text{MR}_B - \text{MR}_0) / \text{MR}_0 \cdot 100\%$.

Рис. 3. Зависимость магнетосопротивления монокристалла $(\text{Cd}_{0.5} \text{Zn}_{0.5})_3\text{As}_2$ от температурыFig. 3. Temperature dependence of magnetoresistance of single crystal $(\text{Cd}_{0.5} \text{Zn}_{0.5})_3\text{As}_2$

При 10 К магнетосопротивление принимает отрицательные значения. С повышением температуры до 140 К меняет знак и достигает максимальной величины 40 % при температуре 270 К. Эффект отрицательного магнетосопротивления в поперечном магнитном поле наблюдается на образце с «полупроводниковой» температурной зависимостью $\text{MR}(T)$, то есть имеет место переход полуметалл-полупроводник.

Тип носителей заряда полупроводника был определен с помощью нагревания одного конца испытуемого полупроводника, используя явление Зеебека. В ходе исследования, подогревая один конец образца, происходит затрата внешней тепловой энергии. Вследствие чего на горячем конце освобождается больше электронов, чем на холодном. Тогда у холодной части полупроводника концентрация электронов становится меньше, нежели у горячей стороны. Происходит их диффузия от горячей стороны к холодной. Таким образом, горячий конец заряжается положительно, а холодный – отрицательно. Между концами полупроводника возникает разность потенциалов. Из чего следует, что при комнатной температуре монокристалл $(\text{Cd}_{1-x} \text{Zn}_x)_3\text{As}_2$ при $x = 0.5$ принадлежит к n-типу.

По результатам измерения напряжения Холла на исследуемом образце получена температурная зависимость постоянной Холла R_H (рис. 4). По знаку R_H можно судить о знаке заряда носителей тока в образце.

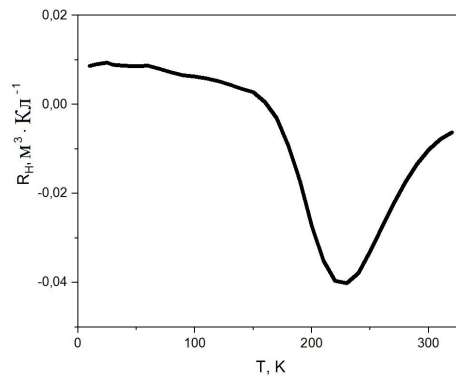


Рис. 4. Зависимость постоянной Холла R_H от температуры образца $(\text{Cd}_{0.5}\text{Zn}_{0.5})_3\text{As}_2$
 Fig. 4. Temperature dependence of the Hall coefficient for the sample $(\text{Cd}_{0.5}\text{Zn}_{0.5})_3\text{As}_2$

В диапазоне гелиевых температур постоянная Холла принимает положительные значения. При возрастании температуры график зависимости R_H убывает, проходя через нуль при температуре 162 К (температура инверсии). При дальнейшем увеличении температуры знак постоянной Холла становится отрицательным из-за большой подвижности электронов: график зависимости резко убывает до температуры 230 К, при которой $R_H = -0.04 \text{ м}^3/\text{Кл}$.

Следовательно, основными носителями заряда от 10 К и до достижения 162 К являются дырки и полупроводник имеет p-тип проводимости. Затем происходит смена знака основных носителей заряда на противоположный, и до температуры в 320 К основными носителями являются электроны, а полупроводник демонстрирует n-тип проводимости.

Зная значения постоянной Холла, можно определить температурную зависимость концентрации носителей заряда (электронов n и дырок p) N , которая приведена на рис. 5.

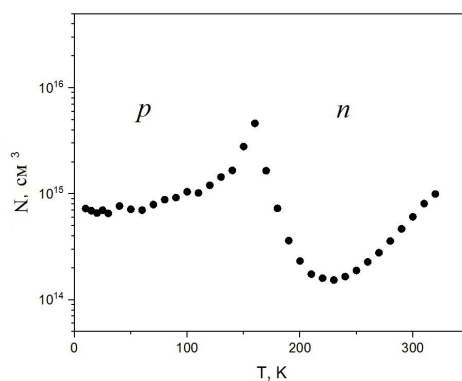


Рис. 5. Температурная зависимость концентрации носителей заряда в монокристалле $(\text{Cd}_{0.5}\text{Zn}_{0.5})_3\text{As}_2$
 Fig. 5. Temperature dependence of the concentration of charge carriers in a single crystal $(\text{Cd}_{0.5}\text{Zn}_{0.5})_3\text{As}_2$

По графику видно, что концентрация дырок постепенно растет в диапазоне температуры от 10 К до 100 К, затем резко возрастает до 159 К, доходя до максимума в $4.62 \cdot 10^{15} \text{ см}^3$, затем происходит смена знака основных носителей заряда, концентрация электронов экспоненциально падает до $1.54 \cdot 10^{15} \text{ см}^3$, после чего постепенно начинает расти до температуры 320 К. Полученные результаты измерений позволили вычислить холловскую подвижность (рис. 6). Анализируя графики температурных зависимостей холловской подвижности и концентрации, можно сделать вывод, что с понижением температуры от 320 К подвижность основных носителей заряда μ уменьшается с увеличением концентрации дырок.

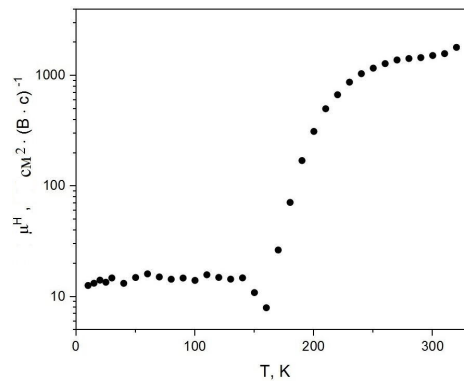


Рис. 6. Температурная зависимость холловской подвижности монокристалла $(\text{Cd}_{0.5}\text{Zn}_{0.5})_3\text{As}_2$
 Fig. 6. Temperature dependence of the Hall mobility of a single crystal $(\text{Cd}_{0.5}\text{Zn}_{0.5})_3\text{As}_2$

Знак постоянной Холла зависит от знака носителей заряда, имеющих более высокую подвижность. Анализируя рис. 6, становится понятно, что высокую подвижность имеют электроны, подвижность которых непрерывно растет от 163 К до 320 К, достигая значения в $1805 \text{ см}^2 \cdot (\text{В} \cdot \text{с})^{-1}$. В свою очередь, подвижность дырок на промежутке от 10 К до 159 К довольно мала $16 \text{ см}^2 \cdot (\text{В} \cdot \text{с})^{-1}$. Увеличение подвижности электронов при увеличении температуры сопровождается рассеянием на ионах примеси. На рис. 7 отчетливо виден участок линейного увеличения рассеяния на ионизированных примесях с повышением температуры на промежутке от 163 К до 270 К, такое поведение зависимости на данном участке характерно для носителей заряда n-типа [6].

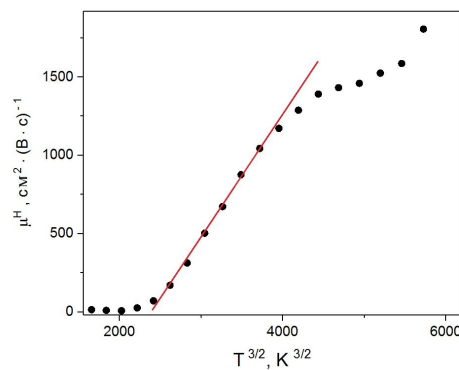


Рис. 7. Температурная зависимость μ^H от $T^{3/2}$ образца $(\text{Cd}_{0.5}\text{Zn}_{0.5})_3\text{As}_2$
 Fig. 7. Temperature dependence of μ^H on $T^{3/2}$ for the sample $(\text{Cd}_{0.5}\text{Zn}_{0.5})_3\text{As}_2$

Данная зависимость объясняется возрастающей тепловой скоростью носителей, за счет чего уменьшается время нахождения носителей заряда в поле ионизированного атома, тем меньше искажаются их траектории. Благодаря этому возрастает длина свободного пробега носителей, увеличивается их подвижность. Установлено, что подвижность, обусловленная рассеянием на ионах примеси, растет пропорционально $T^{3/2}$. Так как подвижность дырок на отрезке от 10 К до 159 К имеет небольшие значения, соответственно, механизмы рассеяния не столь явные для их описания.

При высоких температурах преобладает собственная проводимость полупроводников, связанная с термической активацией электронов из валентной зоны в зону проводимости. С понижением температуры становится важной примесная проводимость, которая реализуется путем теплового возбуждения носителей заряда в зоне проводимости или валентной зоне. При низких температурах, когда активационная проводимость невозможна в локализованных системах, имеет место механизм прыжковой проводимости с переменной длиной прыжка. Для определения механизма проводимости образца $(\text{Cd}_{1-x}\text{Zn}_x)_3\text{As}_2$, при $x = 0.5$ в области гелиевых температур необходимо обратиться к температурной зависимости удельного сопротивления (рис. 2) и воспользоваться универсальной формулой:

$$\rho(T) = DT^m e^{(T_0/T)}, \quad (1)$$

где T_0 – характеристическая температура, D – постоянный коэффициент, p и m параметры, зависящие от механизма прыжковой проводимости.

Характеристическая температура T_0 , параметры m и p определяют тип проводимости. Так, для прыжковой проводимости с переменной длиной прыжка типа Мотта $T_0 = T_M = \beta_M / k_B \cdot g_0 \cdot a^3$ параметр p равен

1/4. Тогда как, в случае прыжковой проводимости с переменной длиной прыжка типа Шкловского – Эфроса $T_0 = T_{SE} = \beta_{SE} \cdot e^2 / k_B \cdot k \cdot a$, при $p = 1/2$. Здесь $\beta_M = 2.1$ и $\beta_{SE} = 2.8$ – численные коэффициенты, g_0 – плотность локализованных состояний, a – радиус.

Параметры m и p независимо друг от друга определяются в том случае, если записать уравнение (1) в виде:

$$\ln\left(\frac{E_A}{k_B \cdot T} + m\right) = \ln \rho + \rho \cdot \ln T_0 + \rho \cdot \ln \frac{1}{T}. \quad (2)$$

где E_A – локальная энергия активации, определяемая как:

$$E_A = \frac{d \ln \rho(T)}{d(1/k_B T)}, \quad (3)$$

Подбирая значение параметра m , левая часть уравнения (2) должна представлять линейную зависимость от функции $\ln(1/T)$, а значение параметра p представляет собой угол наклона этой зависимости (рис. 8).

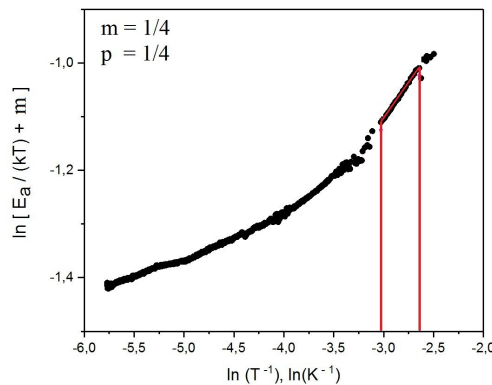


Рис. 8. Зависимость $\ln\left(\frac{E_A}{k_B T} + m\right)$ от $\ln \frac{1}{T}$ образца $(\text{Cd}_{0.5} \text{Zn}_{0.5})_3\text{As}_2$
 Fig. 8. Dependence of $\ln\left(\frac{E_A}{k_B T} + m\right)$ on $\ln \frac{1}{T}$ for the sample $(\text{Cd}_{0.5} \text{Zn}_{0.5})_3\text{As}_2$

Принимая значение параметра $m = 1/4$ в уравнении (2), угол наклона линейной зависимости, т. е. параметр p , также равен $1/4$, что может свидетельствовать о наличии прыжковой проводимости типа Мотта. Температура начала прыжковой проводимости T_v определяется по графику (рис. 8) как начало линейного участка со стороны высоких температур и равна 20.63 К.

Построив зависимость $\ln\left(\frac{\rho}{T^{1/4}}\right)$ от $1/T^{1/4}$, можно увидеть линейный участок (рис. 9), что подтверждает предположение о механизме проводимости.

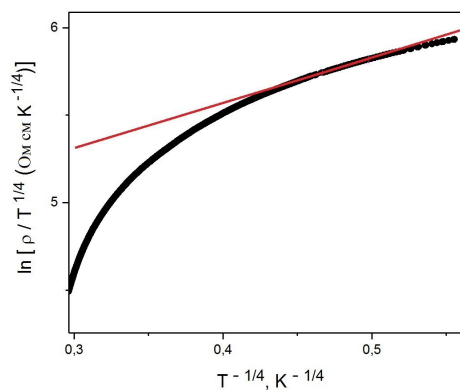


Рис. 9. Зависимость $\ln\left(\frac{\rho}{T^{1/4}}\right)$ от $1/T^{1/4}$
 Fig. 9. Dependence of $\ln\left(\frac{\rho}{T^{1/4}}\right)$ on $1/T^{1/4}$

Параметры D и T_0 определяются из графика на рис. 9, как коэффициенты в уравнении прямой, где угол наклона равен $T_0^{1/4}$, $\ln D$ – точка пересечения этой прямой с осью ординат. Таким образом, $D = 96.544 \text{ Ом} \cdot \text{см} \cdot \text{К}^{-1/2}$ и $T_0 = 39.063 \text{ К}$.

Для режима прыжковой проводимости с переменной длиной прыжка типа Мотта ширина кулоновской щели W и плотность локализованных состояний $g(\mu)$ выражаются как:

$$W = k_B \cdot T_v^{3/4} T_0^{1/4}, \quad (4)$$

$$g(\mu) = N_A/(2W), \quad (5)$$

где N_A – концентрация акцепторов [12].

Для образца $(\text{Cd}_{0.5}\text{Zn}_{0.5})_3\text{As}_2$ значения W и $g(\mu)$ соответственно равны 2.085 мэВ и $3.453 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3} \text{ мэВ}^{-1}$. Согласно [8] произведен расчет радиуса локализации, который принимает значение $a = 262 \text{ \AA}$, и ширины мягкой параболической щели $\Delta = 0.259 \text{ мэВ}$. Достигнутые результаты не противоречат литературным данным для прыжковой проводимости с переменной длиной прыжка типа Мотта.

4. Заключение. Методом Бриджмена были получены монокристаллы $(\text{Cd}_{0.5}\text{Zn}_{0.5})_3\text{As}_2$ и подготовлены образцы для исследования гальваномагнитных свойств. Были изучены температурные характеристики электропроводности кристалла, коэффициента Холла и магнетосопротивления. Обнаружено, что зависимость удельного сопротивления от температуры имеет «полупроводниковый характер». Определены холловская подвижность и концентрация. В системе $(\text{Cd}_{0.5}\text{Zn}_{0.5})_3\text{As}_2$, демонстрирующей прыжковую проводимость с переменной длиной прыжка типа Мотта, при низких температурах проявляется отрицательное магнетосопротивление. Для области прыжковой проводимости вычислены значения радиуса локализации носителей заряда $a = 262 \text{ \AA}$ и ширины мягкой параболической щели $\Delta = 0.259 \text{ мэВ}$.

References

1. Amarnath R., Bhargavi K. S., Kubakaddi S. S. 2020. Thermoelectric transport properties in 3D Dirac semimetal Cd_3As_2 . *Journal of Physics Condensed Matter*, 32(22): 225704 12.
2. Bodnar J. 1977. In Proceedings of the International Conference on the Physics of Narrow-Gap Semiconductors. Proc. Internat. Conf., 311.
3. Chorsi H. T. et al. 2020. Widely Tunable Optical and Thermal Properties of Dirac Semimetal Cd_3As_2 . *Advanced Optical Materials*, 8(8): 120302 6.
4. Crassee I. et al. 2018. 3D Dirac semimetal Cd_3As_2 : A review of material properties. *Physical Review Materials*, 2(12): 120302 15.
5. Huang X., Zhao L., Long Y., Wang P., Chen D., Yang Z., et al. 2015. Observation of the Chiral-Anomaly-Induced Negative Magnetoresistance in 3D Weyl Semimetal TaAs. *Phys. Rev. X*, 5 : 031023.
6. Grundmann M. 2021. The Physics of Semiconductors. Graduate Texts in Physics. Springer Berlin Heidelberg, 989: 255–265.
7. Lu H. et al. 2017. Topological phase transition in single crystals of $(\text{Cd}_{1-x-y}\text{Zn}_x\text{Mn}_y)_3\text{As}_2$. // Scientific reports. 7. (1): 3148.
8. Laiho R., Lashkul A., Lisunov K., Lahderanta E., Shakhov M. and Zakhvalinskii V. 2008. Hopping conductivity of ni-doped p-CdSb. *Journal of Physics: Condensed Matter*, 20(29): 295204-295214.
9. Volodina G.F. et al. 2013. Crystal Structure of $\alpha'''-(\text{Zn}_{1-x}\text{Cd}_x)_3\text{As}_2$ ($x = 0.26$). *Crystallography Reports*, 58(58):563-567.
10. Wang Z., Weng H., Wu Q. et al. 2013. Three-Dimensional Dirac Semimetal and Quantum Transport in Cd_3As_2 // *Phys. Rev.*, 88: 125427.
11. Xue J., Huang S., Wang J. Y. and Xu H. Q. 2019. Mott variable-range hopping transport in a MoS2 nanoflake. *RSC. Adv*, 9 : 17885.
12. Zakhvalinskii V. S., Alam M., Nikulicheva T. B., Lahderanta E., Shakhov M. A., Piljuk E. A., Ivanchikhin S. V., Kochura A. V. 2017. Hopping Conductivity in Single Crystals $(\text{Cd}_{0.6}\text{Zn}_{0.32}\text{Mn}_{0.08})_3\text{As}_2$. *International Journal of Engineering*, B, 30 : 11.
13. Zakhvalinskii V. S., Nikulicheva T. B., Kochura A. V., Lahderanta E., Shakhov M., Kubankin A. S., Sukhov M., Yaprincev M. N., and Morocho A. A. 2021. Mixed conductivity analysis of single crystals of $\alpha'''-(\text{Cd}_{1-x}\text{Zn}_x)_3\text{As}_2$ ($x = 0.45$). *Materials Science*. AIP, 11 (3) : 035028.
14. Zhang Y. and Sarachik M. P. 1989. *Phys. Rev. B*, 39 : 8059.
15. Zhang Y., Dai P. and Sarachik M. P. 1992. Magnetoconductance of CdSe in the hopping regime: The effect of quantum interference. *Phys. Rev. B*, 45 : 9473.

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.
Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 10.07.2022

Поступила после рецензирования 02.09.2022

Принята к публикации 06.09.2022

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Кочура Евгения Павловна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры программной инженерии, Юго-Западный государственный университет
ул. 50 лет Октября, 94, г. Курск, 308015, Россия

Борисенко Александр Васильевич – аспирант, Белгородский государственный национальный исследовательский университет
ул. Победы, 85, г. Белгород, 308015, Россия

Захвалинский Василий Сергеевич – доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник лаборатории перспективных материалов и технологий, Белгородский государственный национальный исследовательский университет
ул. Победы, 85, г. Белгород, 308015, Россия

Хтет Аунг Зо – аспирант Юго-Западного государственного университета
ул. 50 лет Октября, 94, г. Курск, 308015, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Kochura Evgenia – PhD, Associate Professor, Department of Software Engineering, Southwestern State University, Kursk, Russia

Borisenko Alexander – Graduate Student, Belgorod State National Research University, Belgorod, Russia

Zakhvalinsky Vasily – PhD, Professor, Leading Researcher, Laboratories of Advanced Materials and Technologies, Belgorod State National Research University, Belgorod, Russia

Htet Aung Zo – Graduate Student, Southwestern State University, Kursk, Russia

УДК 539.23

DOI 10.52575/2687-0959-2022-54-3-186-191

оригинальное исследование

КВАНТОВЫЕ ПОПРАВКИ К ПРОВОДИМОСТИ В АМОРФНОМ ПОЛУПРОВОДНИКЕ

Т. Б. Никуличева¹ , Е. А. Пилюк¹ , О. Н. Иванов^{1,2} , А. А. Морочо³ , М. Н. Япрынтцев¹ 

(Статья представлена членом редакционной коллегии С. Е. Савотченко)

¹Белгородский государственный национальный исследовательский университет,
г. Белгород, 308015, Россия

²Белгородский государственный технологический университет им. В. Г. Шухова,
г. Белгород, 308012, Россия

³Высшая политехническая школа Чимборасо,
г. Риобамба, 060155, Эквадор

E-mail: nikulicheva@bsu.edu.ru, pilyuk@bsu.edu.ru, olniv@mail.ru, alxndral@outlook.com, yaprintsev@bsu.edu.ru

Аннотация. В данной работе представлены результаты исследования магнитосопротивления (МС) тонкой пленки арсенида кадмия, нанесенной на подложку из лейкосапфира. При изучении МС наблюдался эффект слабой антилокализации, возникающий из-за поверхностных состояний. Наблюдаемый эффект хорошо описывается моделью Хиками – Ларкина – Нагаоки. Расчетное значение длины фазовой когерентности L_ϕ изменяется в зависимости от температуры T по степенному закону $L_\phi \sim T^{-1/2}$, что свидетельствует о наличии двумерных топологических поверхностных состояний.

Ключевые слова: дираковский полуметалл, арсенид кадмия, тонкие пленки, слабая антилокализация

Для цитирования: Никуличева Т. Б., Пилюк Е. А., Иванов О. Н., Морочо А. А., Япрынтцев М. Н. 2022. Квантовые поправки к проводимости в аморфном полупроводнике. Прикладная математика & Физика, 54(3): 186–191. DOI 10.52575/2687-0959-2022-54-3-186-191

QUANTUM CORRECTIONS TO CONDUCTIVITY IN AN AMORPHOUS SEMICONDUCTOR

T. B. Nikulicheva¹ , E. A. Pilyuk¹ , O. N. Ivanov^{1,2} , A. A. Morocho³ , M. N. Yapryntsev¹ 

(Article submitted by a member of the editorial board S. E. Savotchenko)

¹Belgorod National Research University,
Belgorod, 308015, Russia

²Belgorod State Technological University named after V.G. Shukhov,
Belgorod, 308012, Russia

³Higher Polytechnic School of Chimborazo,
Riobamba, 060155, Ecuador

E-mail: nikulicheva@bsu.edu.ru, pilyuk@bsu.edu.ru, olniv@mail.ru, alxndral@outlook.com, yaprintsev@bsu.edu.ru

Received September, 10, 2022

Abstract. This article presents the results of a study of the magnetoresistance (MR) of a thin film of cadmium arsenide deposited on a sapphire leucosapphire substrate. In the study of MR, the effect of weak antilocalization, which arises due to surface states, was observed. The observed effect is well described by the Hikami-Larkin-Nagaoka model. The calculated value of the phase coherence length L_ϕ varies depending on the temperature T according to the power law $L_\phi \sim T^{-1/2}$, which indicates the presence of two-dimensional topological surface states.

Keywords: dirac semimetal, cadmium arsenide, thin films, weak antilocalization

For citation: Nikulicheva T. B., Pilyuk E. A., Ivanov O. N., Morocho A. A., Yapryntsev M. N. 2022. Quantum corrections to conductivity in an amorphous semiconductor. Applied Mathematics & Physics, 54(3): 186–191 (in Russian).

DOI 10.52575/2687-0959-2022-54-3-186-191

1. Введение. Полуметаллы Дирака (ДПМ), рассматриваемые как трехмерный аналог графена, привлекают внимание возможностью их использования в электронных устройствах следующего поколения [8, 11, 13]. Арсенид кадмия является типичным трехмерным ДПМ, а полуметаллическое состояние Вейля может быть получено путем нарушения симметрии или уменьшения линейных размеров образца [16, 3]. Арсенид кадмия вызывает повышенный исследовательский интерес как материал с принципиально новыми электронными свойствами [15, 3], а также за счет изучения механизма электронного переноса в объемных кристаллах, что позволило выявить наличие новых явлений, таких как высокая

подвижность, гигантское магнитосопротивление, нетривиальные квантовые осцилляции и расщепление уровней Ландау под действием магнитного поля [5, 12, 4, 18]. Двумерное топологическое состояние поверхности является важной особенностью трехмерного дираковского полуметалла, которое наблюдалось на плоскостях (112) и (001) арсенида кадмия, соответственно [17]. Эффект слабой антилокализации наблюдался также в тонких пленках арсенида кадмия [19].

В этой работе мы сообщаем об анализе особенностей магнитосопротивления и слабой антилокализации, возникающих в тонких пленках аморфного арсенида кадмия.

2. Материалы и методика эксперимента. Тонкие пленки арсенида кадмия (Cd_3As_2), толщиной ~ 80 нм, были получены на подложке лейкосапфира ($\alpha\text{-Al}_2\text{O}_3$) ориентации (001) методом магнетронного распыления при давлении 8×10^{-3} мбар. Скорость осаждения при подводимой мощности 10 Вт и расстоянии мишень–подложка составляла около 1 нм/мин. Температура подложки во время осаждения составляла 20°C . В качестве катода использовалась мишень, представляющая собой поликристаллический диск диаметром 40 мм и толщиной 3 мм. Синтез Cd_3As_2 для мишени осуществлялся прямым сплавлением Cd и As в вакууме. Проведен контроль качества полученных пленок Cd_3As_2 рентгеновскими методами на дифрактометре Rigaku SmartLab (Rigaku corp., Япония) и рамановской спектроскопии на приборе LabRam HR Evolution (HORIBA JOBIN YVON S.A.S., Франция). На рис. 1 представлена кривая рентгеновского рассеяния пленок Cd_3As_2 . Имеются размытые пики, характеризующиеся дифракционной картиной, типичной для аморфных и нанокристаллических материалов [1, 7]. Наличие фазы Cd_3As_2 в полученных пленках подтверждается спектроскопией комбинационного рассеяния, полученной на приборе LabRam HR Evolution, $L = 532$ нм. Магнитосопротивление измеряли в стандартной четырехзондовой конфигурации с помощью системы Mini Cryogen Free Measurement System (Cryogenic Ltd., Великобритания).

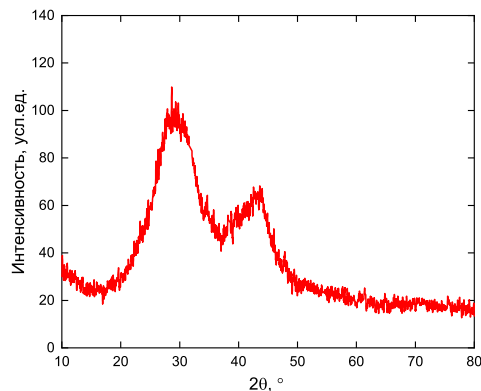


Рис. 1. Дифрактограмма образца тонкой пленки из арсенида кадмия, нанесенной на подложку из лейкосапфира
Fig. 1. X-ray diffraction pattern of a sample of a thin film of cadmium arsenide deposited on a substrate of leucosapphire

3. Результаты и обсуждение.

На рис. 2 показана зависимость нормированного магнитосопротивления (МС) от магнитного поля (магнитное поле \vec{B} перпендикулярно электрическому полю \vec{E}), снятое при различных температурах.

Магнитосопротивление определяется как отношение $[\rho(B) - \rho(0)]/\rho(0)$, где $\rho(B)$ и $\rho(0)$ – удельное сопротивление в присутствии магнитного поля \vec{B} и в нулевом магнитном поле, соответственно. В магнитном поле 5 Тл значение МС изменяется от 0,04 при 300 К до 0,95 при 4 К. Пик МС, наблюдаемый в области слабых магнитных полей (рис. 2) при $T = 2, 4$ и 10 К может быть вызван эффектом слабой антилокализации. Наличие слабой антилокализации характерно для соединений арсенида кадмия из-за наличия сильного спин-орбитального взаимодействия [9]. Эффект слабой антилокализации типичен для двумерных поверхностных состояний объемных монокристаллов и тонких пленок [19] и является признаком топологических поверхностных состояний.

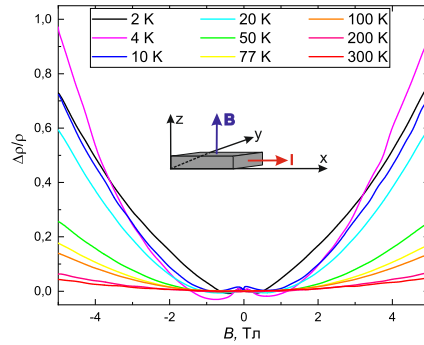


Рис. 2. Нормированное магнитосопротивление в зависимости от магнитного поля \vec{B} при температурах $T = 2, 4, 10, 20, 50, 77, 100, 200$ и 300 К. На вставке показана схематическая диаграмма электротранспортных измерений.

Fig. 2. Normalized magnetoresistance versus magnetic field \vec{B} at temperatures $T = 2, 4, 10, 20, 50, 77, 100, 200$ and 300 K. The inset shows a schematic diagram of electric transport measurements.

При низких температурах $T = 2 - 10$ К, кривые МС состоят из двух составляющих:

1. отрицательное МС, образующее плавную впадину при $\pm 0,4$ Тл для 2К ($\pm 0,75$ Тл для 4 и 10 К);
2. положительный пик МС при $\pm 0,12$ Тл.

При температурах $T > 20$ К магнитосопротивление представляет собой монотонную кривую. Положительный пик МС соответствует слабой антилокализации из-за перехода состояния поверхности. Отрицательное МС можно интерпретировать как результат слабой локализации из-за малой толщины пленки. Кроме того, объемное состояние внутри пленки квантуется в 2D-слои, поэтому можно ожидать перехода слабой локализации при прохождении через эти квантованные слои [10].

Эффект слабой антилокализации можно описать уравнением Хиками – Ларкина – Нагаока, учитывая изменение проводимости при приложении магнитного поля [19, 6]:

$$\Delta\sigma(B) = \alpha \frac{e^2}{2\pi^2\hbar} \left[\ln\left(\frac{B_\phi}{B}\right) - \Psi\left(\frac{1}{2} + \frac{B_\phi}{B}\right) \right] + cB^2, \quad (1)$$

где $\Delta\sigma(B) = \sigma(B) - \sigma(0)$ – магнитная проводимость, $\sigma = \frac{L}{W \cdot R(B)}$ – электрическая проводимость, L – длина образца, W – ширина образца, $R(B)$ – сопротивление в приложенном магнитном поле $\vec{B} \perp \vec{E}$, $\Psi(x)$ – дигамма-функция, $B_\phi = \frac{\hbar}{4eL_\phi^2}$ – характеристическое поле, L_ϕ – длина фазовой когерентности.

На рис. 3 показано изменение магнитопроводимости в приложенном магнитном поле (от -5 до 5 Тл).

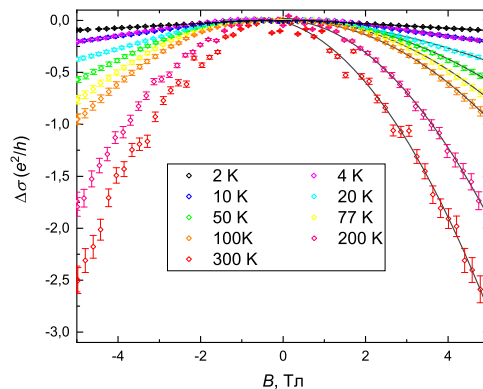


Рис. 3. Изменение магнитной проводимости $\Delta\sigma$ в присутствии приложенного магнитного поля с подгонкой (темно-серые сплошные кривые) в соответствии с (1)

Fig. 3. Change in magnetic conductivity $\Delta\sigma$ in the presence of an applied magnetic field with adjustment (dark gray solid curves) to eq. (1)

Крутизна пиков, наблюдаемых в нулевом магнитном поле на рис. 2 при $T = 2, 4$ и 10 К, зависит от величины длины фазовой когерентности L_ϕ , которая является характерным параметром для эффектов квантовой интерференции. Значение L_ϕ уменьшается с 573 нм до 119 нм при повышении температуры от 2 К до 77 К (рис. 4). Префактор $\alpha \approx -1/2$ практически не зависит от температуры в диапазоне $T = 2 - 10$ К, как показано на вставке к рис. 4. Размерность 2D-системы подтверждается и температурной зависимостью L_ϕ . Теоретически для электрон-электронного рассеяния длина фазовой когерентности пропорциональна температуре в соответствии с соотношениями $L_\phi \sim T^{-1/3}$, $L_\phi \sim T^{-1/2}$ и $L_\phi \sim T^{-3/4}$ для 1D, 2D и 3D-систем соответственно [2]. На рис. 4 показана приближенная кривая, изменяющаяся по степенному закону температурной зависимости $L_\phi \sim T^{-0,43}$ (сплошная кривая), что очень близко к ожидаемой функции $T^{-1/2}$ для тонких пленок.

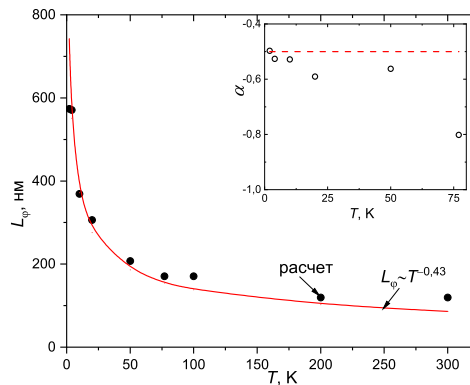


Рис. 4. Температурная зависимость L_ϕ в диапазоне температур от $T = 2$ до 77 К. Сплошная красная линия показывает изменение L_ϕ по зависимости $L_\phi \sim T^{-0,43}$. На вставке показана температурная зависимость префактора α из уравнения (1) в диапазоне температур $T = 2 - 77$ К

Fig. 4. Temperature dependence of L_ϕ in the temperature range from $T = 2$ to 77 К. The solid red line shows the change in L_ϕ according to the $L_\phi \sim T^{-0,43}$ dependence. The inset shows the temperature dependence of the α prefactor from Eq. (1) in the temperature range $T = 2 - 77$ К

При температурах выше 10 К значение α уменьшается. Возможное объяснение температурного поведения α можно интерпретировать как связь между поверхностным и объемным состояниями или между различными поверхностными состояниями [14]. Таким образом, при наличии связи между разными проводящими каналами за счет рассеяния носителей от одного проводящего канала к другому (с сохранением фазовой когерентности) они могут вносить вклад в проводимость как единый фазокогерентный канал.

4. Заключение. Таким образом, мы измерили магнитосопротивление пленки арсенида кадмия толщиной ~ 80 нм в приложенном магнитном поле $\vec{B} \perp \vec{E}$. Наблюдается отрицательное магнитосопротивление при $T = 2 - 10$ К в слабом магнитном поле. Этот эффект можно интерпретировать как результат слабой локализации из-за малой толщины пленки Cd_3As_2 . Положительное магнитосопротивление при температуре выше 20 К соответствует слабой антилокализации из-за перехода поверхностных состояний. Длина фазовой когерентности изменяется в зависимости от температуры T по степенному закону $L_\phi \sim T^{-0,43}$, что очень близко к ожидаемой функции $T^{-1/2}$ для тонких пленок. Это указывает на наличие двумерных топологических поверхностных состояний в тонкой пленке арсенида кадмия.

References

1. Abrosimova G., Aronin A. 2016. Amorphous and nanocrystalline metallic alloys. Progress in Metallic Alloys, 9.
2. Altshuler B. L., Aronov A. G., Khmelnitsky D. E. 1982. Effects of electron-electron collisions with small energy transfers on quantum localisation. Journal of Physics C: Solid State Physics, 15(36): 7367–7386.
3. Armitage N. P., Mele E. J., Vishwanath A. 2018. Weyl and Dirac semimetals in three-dimensional solids. Rev. Mod. Phys., 90: 015001.
4. Cao J. et al. 2015. Landau level splitting in Cd_3As_2 under high magnetic fields. Nat. Commun., 6: 7779.
5. Jeon S. et al. 2014. Landau quantization and quasiparticle interference in the three-dimensional Dirac semimetal Cd_3As_2 . Nat. Mater., 13: 851.

6. Hikami S., Larkin A. I., Nagaoka Y. 1980. Spin-orbit interaction and magnetoresistance in the two dimensional random system. Prog. Theor. Phys., 63(2): 707–710.
7. Holder C. F., Schaak, R. E. 2019. Tutorial on powder X-ray diffraction for characterizing nanoscale materials. Acs Nano, 13(7): 7359–7365.
8. Kong D. Cui Y. 2011. Opportunities in chemistry and materials science for topological insulators and their nanostructures. Nat. Chem., 3: 845.
9. Koumoulis D. et al. 2017. Effects of Cd vacancies and unconventional spin dynamics in the Dirac semimetal Cd_3As_2 . The Journal of Chemical Physics, 147(8): 084706.
10. Lu H.-Z., Shi J., Shen S.-Q. 2011. Competition between Weak Localization and Antilocalization in Topological Surface States. Physical Review Letters, 107(7).
11. Mellnik A. R., et al. 2014. Spin-transfer torque generated by a topological insulator. Nature., 511(7510) : 449–451.
12. Narayanan A. et al. 2015. Linear Magnetoresistance Caused by Mobility Fluctuations in n-Doped Cd_3As_2 . Phys. Rev. Letts., 114 : 117201.
13. Q, X.-L. Zhang S.-C. 2011. Topological insulators and superconductors. Rev. Mod. Phys. 83 : 1057.
14. Steinberg, H. et al. 2011. Electrically tunable surface-to-bulk coherent coupling in topological insulator thin films. Physical Review B, 84(23).
15. Wang S., Lin B.-C., Wang A.-Q., Yu D., Liao Z.-M. 2017. Quantum transport in Dirac and Weyl semimetals: A review. Adv. Phys. X, 2 : 518–544.
16. Wang Z. et al. 2013. Three-dimensional Dirac semimetal and quantum transport in Cd_3As_2 . Phys. Rev. B, 88 : 125427.
17. Yi H. et al. 2014. Evidence of Topological Surface State in Three-Dimensional Dirac Semimetal Cd_3As_2 . Sci. Rep., 4 : 6106.
18. Zhao Y., et al. 2015. Anisotropic Fermi surface and quantum limit transport in high mobility three-dimensional Dirac semimetal Cd_3As_2 . Physical Review X, 5(3) : 031037.
19. Zhao B. et al. 2016. Weak antilocalization in Cd_3As_2 thin films. Sci. Rep., 6 : 22377.

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 30.07.2022

Поступила после рецензирования 10.09.2022

Принята к публикации 12.09.2022

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Никуличева Татьяна Борисовна – кандидат физико-математических наук, доцент, зав. лабораторией перспективных материалов и технологий, Белгородский государственный национальный исследовательский университет

ул. Победы, 85, г. Белгород, 308015, Россия

Пиллюк Евгений Александрович – кандидат физико-математических наук, доцент, ведущий научный сотрудник лаборатории перспективных материалов и технологий, Белгородский государственный национальный исследовательский университет

ул. Победы, 85, г. Белгород, 308015, Россия

Иванов Олег Николаевич – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры физики, Белгородский государственный технологический университет им. В. Г. Шухова, профессор кафедры материаловедения и нанотехнологий, Белгородский государственный национальный исследовательский университет

ул. Костюкова, 46, г. Белгород, 308012, Россия

Морочо Амбойя Александер Альфредо – научный сотрудник Высшей политехнической школы Чимборасо

г. Риобамба, 060155, Эквадор

Максим Николаевич Япрынцев – кандидат физико-математических наук, научный сотрудник Центра коллективного пользования «Технологии и Материалы НИУ «БелГУ»

ул. Победы, 85, г. Белгород, 308015, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Nikulicheva Tatiana – PhD, Associate Professor, Head Laboratory of Advanced Materials and Technologies, Belgorod State National Research University, Belgorod, Russia

Pilyuk Evgeniy – PhD, Associate Professor, Leading Researcher Laboratory of Advanced Materials and Technologies, Belgorod State National Research University, Belgorod, Russia

Ivanov Oleg – PhD, Professor, Professor of the Department of Physics, Belgorod State Technological University named after V. I. V. G. Shukhova, Professor, Department of Materials Science and Nanotechnology, Belgorod State National Research University, Belgorod, Russia

Morocho Amboya Alexander Alfredo – Research Fellow at the Higher Polytechnic School of Chimborazo, Riobamba, Ecuador

Yapryntsev Maxim – PhD, Researcher at the Center for Shared Use "Technologies and Materials" of the National Research University "BelSU Belgorod, Russia

ПЕРСОНАЛИИ



К юбилею Сергея Васильевича Рогозина,
доцента Белорусского государственного университета

11 августа 2022 года исполнилось 70 лет Сергею Васильевичу Рогозину, доценту Белорусского государственного университета, известному специалисту в области анализа и приложений. Сергей Васильевич родился в Архангельской области Российской Федерации. Он рос активным мальчиком с живым и быстрым умом. В школе особенно интересовался математикой, физикой и историей, участвовал в конкурсах и олимпиадах. В 1969 году окончил среднюю школу с золотой медалью и поступил на математический факультет Белорусского государственного университета. Еще в студенчестве принимал участие в работе научных семинаров на факультете, в частности, городского семинара по краевым задачам на кафедре теории функций под руководством академика Федора Дмитриевича Гахова. Федор Дмитриевич заметил интерес молодого человека к научным исследованиям и пригласил его присоединиться к научной школе на кафедре. Так Сергей Васильевич стал одним из последних аспирантов академика Ф. Д. Гахова. В 1980 году С. В. Рогозин защитил кандидатскую диссертацию «Краевые задачи с бесконечным индексом для полуплоскости в исключительном случае» под руководством академика Ф. Д. Гахова и доцента М. Э. Толочко. Первые результаты С. В. Рогозина касались краевых задач и сингулярных интегральных уравнений с бесконечным индексом. Позже его научные интересы значительно расширились. На сегодняшний день это краевые задачи для аналитических функций, интегральные уравнения, нелинейный анализ, вейвлет-анализ, краевые задачи со свободными границами, геометрическая теория функций, композиционные материалы, специальные функции и дробное исчисление, дифференциальные уравнения дробного порядка, механика сплошных сред и биомеханика, применение методов дробного исчисления в моделях механики, медицины и экономики. Расширению сферы научных интересов способствовало активное и разностороннее международное сотрудничество с учеными Великобритании, Германии, Испании, Италии, Литвы, ОАЭ, Польши, Португалии, Турции. Особое место занимает в этом ряду Россия. Сергея Васильевича связывают тесные научные и дружеские связи с математиками Москвы, Санкт-Петербурга, Новосибирска, Казани, Ростова-на-Дону, Воронежа, Белгорода, Челябинска, Сыктывкара. Он неоднократно участвовал в конференциях, выступал на семинарах в вузах этих городов, публиковал статьи в российских журналах. В 2013–2015 гг. С. В. Рогозин работал в качестве профессора-исследователя на научных грантах в университете Абериствиса (Великобритания). Сергей Васильевич обладает широкой научной эрудицией. Многие известные математические издания приглашают его в качестве рецензента и референта статей и монографий. Он является членом редколлегии международных научных журналов *Analysis* и *Fractional Calculus and Applied Analysis*. Обладая хорошими организационными способностями и человеческими качествами, С. В. Рогозин создает и умело руководит научными коллективами для выполнения государственных исследовательских программ, проектов Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (в том числе, совместно с Российским научным фондом). С. В. Рогозин является одним из главных организаторов

серии международных конференций и семинаров «Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений» (АМАДЕ), которые проводятся в Минске начиная с 1996 года и вызывают неизменный интерес специалистов. Он принимал активное участие в организации и проведении Белорусской математической конференции, в 1996, 2000 и 2008 годах был ученым секретарем ее Оргкомитета. С 2009 по 2015 гг. С. В. Рогозин – член научного бюро Международного общества по анализу, приложениям и вычислениям (International Society for Analysis, its Applications and Computation – ISAAC). Он был организатором специальных секций на Конгрессах ISAAC с 2005 по 2021 год. С организацией научных форумов тесно связана издательская активность Сергея Васильевича. Под его редакцией вышли многочисленные сборники материалов и трудов конференций и школ. Наряду с научными исследованиями Сергей Васильевич уделяет внимание методической работе. Он автор учебных программ, а также учебно-методических пособий и комплексов. За свою длительную карьеру преподавателя с 1974 года он читал различные курсы: вещественный и комплексный анализ, методы оптимизации и исследование операций, теорию оптимального управления, математическую и экономическую статистику, эконометрику, а также специальные курсы, посвященные актуальным проблемам анализа и приложений, методике преподавания математических дисциплин. Для многих студентов эти специальные курсы стали стартом в науке, пробудили научный интерес и открыли возможности приобщения к серьезным исследованиям. Некоторые из этих молодых людей в дальнейшем построили научную карьеру как в математике, так и в других отраслях знаний (экономике, статистике, биологии, искусственном интеллекте и машинном обучении). Под руководством доцента С. В. Рогозина успешно защищены четыре кандидатские диссертации: М. В. Дубатовская «Сингулярные интегральные уравнения с бесконечным индексом для полуплоскости в исключительном случае» (БГУ, Минск, 1997), Макарук С.Ф. «Смешанные краевые задачи для аналитических функций в многосвязных областях и их приложения к задаче оптимального дизайна композиционных материалов» (БГУ, Минск, 2004), Песецкая Е.В. «Аналитическое решение смешанных краевых задач для многосвязных областей и их приложение к исследованию влияния возмущения включений на проводимость композиционных материалов» (БГУ, Минск, 2006), Вайтехович Т.С. «Краевые задачи для аналитических и обобщенных аналитических функций в двусвязных областях и их приложения» (Свободный университет, Берлин, 2008). Практически вся профессиональная деятельность С. В. Рогозина связана с Белорусским государственным университетом. За многолетний труд и высокие достижения он неоднократно был награжден Грамотами Министерства образования Республики Беларусь и БГУ. В 2021 году доценты С. В. Рогозин и С. М. Босяков получили премию имени А. Н. Севченко Белорусского государственного университета за лучшую научную работу в области естественных наук.

***Редколлегия журнала «Прикладная математика & Физика»
сердечно поздравляет Сергея Васильевича Рогозина
с юбилеем и желает ему здоровья, долголетия,
новых успехов и научных результатов!***

Избранные научные публикации С. В. Рогозина

2022

1. Rogosin S. On Visco-elastic Biological Materials // International Journal of Biology and Biomedicine. – 2022. – Vol. 7. – Pp. 1-5.
2. Rogosin S. Kinetic undercooling regularization of the Hele-Shaw problem with obstacles / Bull. Comput. Appl. Math., Vol. 10, No. 2, 2022, 13 p.
3. Чехменок Т.А., Рогозин С.В. Параметрическое описание классов решений нелинейной степенной краевой задачи // Труды 10-го междунар. науч. семинара АМАДЕ-2021, 13-17 сентября 2021 г., Минск, Беларусь, БГУ. – Минск: ИВЦ Минфина, 2022. – С. 133-142.
4. Тенденции применения валютных корзин: мировая практика и опыт Национального банка Республики Беларусь (Trends in the use of the currency basket: the world's practice and experience of the National Bank of the Republic of Belarus) / R. V. Zuenok, S. V. Rogosin (Зуёнок, Р. В., Рогозин, С. В.) // Тенденции экономического развития в XXI веке : материалы IV Междунар. науч.-практ. конф., Минск, 1 марта 2022 г. / Белорус. гос. ун-т ; редкол.: А. А. Королёва (гл. ред.) [и др.]. – Минск : БГУ, 2022. – С. 174-177.

2021

1. Rogosin S., Dubatovskaya M. Mkhitar Djobashian and his contribution to fractional calculus // *Fract. Calc. Appl. Anal.* Vol. 23, No 6 (2021), pp. 1797–1809. Rogosin S., Khvoshchinskaya L. Construction of 2x2 Fuchsian System with Five Singular Points // *Lobachevskii journal of mathematics* – 2022. – Vol. 42 (4), 830-849.
2. Abrahams I.D., Xun Huang, Kisil A., Mishuris G., Nieves M., Rogosin S., Spitkovsky, I. Reinvigorating the Wiener-Hopf technique in the pursuit to understand processes and materials // *National Science Review*. 2021. – Vol. 8 – No 2. nwa225 (impact factor 2020, 16,693)
3. Kisil A.V., Abrahams I.D., Mishuris G., Rogosin S.V. The Wiener–Hopf technique, its generalizations and applications: constructive and approximate methods // *Proceedings of the Royal Society A*. – 2021. – Vol. 477 (2254), 20210533.
4. Rogosin S., Dubatovskaya M. Fractional calculus in Russia at the end of XIX century // *Mathematics*. – 2021. – Vol. 9 (15), 1736.
5. Vitali G., Rogosin S. Climate change and grain production // *Nuovo Cimento della Societa Italiana di Fisica C*. 2021. Vol. 44. No 4-5.
6. Субоч, Т. Д., Рогозин, С. В. Модели экономического роста = Models of economic growth / Т. Д. Субоч, С. В. Рогозин // *Тенденции экономического развития в XXI веке : материалы III Междунар. науч. конф., Минск, 1 марта 2021 г. / Белорус. гос. ун-т ; редкол.: А. А. Королёва (гл. ред.) [и др.]*. – Минск : БГУ, 2021. – С. 357-359.

2020

1. Gorenflo R., Kilbas A., Mainardi F., Rogosin S. Mittag-Leffler Functions: Related Topics and Applications. Series: Springer Monographs in Mathematics. Springer Verlag, 2nd edition, 2020, xvi, 540 p. 22 illus., 11 illus.
2. Mityushev, V., Rogosin, S. On relations between elliptic and elementary functions // *Acta Physica Polonica B, Proceedings Supplement*. – Vol. 13, Issue 4 (2020), pp. 745-751.
3. Rogosin, S., Dubatovskaya, M. A short survey of basic elements of Fractional Calculus. solution method for Riemann problem with two pairs of unknown functions. In: *Analytical Methods of Analysis and Differential Equations: Materials of the 9th International Workshop (AMADE 2018)*. Eds.: S.V. Rogosin, M. V. Dubatovskaya, Cambridge Scientific Publishers. 2020, P. 207-238.
4. Primachuk, L., Rogosin, S., Dubatovskaya, M. On R-linear conjugation problem on the unit circle // *Eurasian Mathematical Journal*. – 2020. – 11 (3), P. 79-88. (Impact factor 2019, 0,5)
5. Khvostchinskaya, L., Rogosin, S. On a solution method for Riemann problem with two pairs of unknown functions. In: *Analytical Methods of Analysis and Differential Equations: Materials of the 9th International Workshop (AMADE 2018)*. Eds.: S. V. Rogosin, M. V. Dubatovskaya, Cambridge Scientific Publishers. 2020, P. 79-112.
6. Dalla Riva, M., Lamberti, P. D., Musolino, P., Rogosin, S. V. A tribute to Massimo Lanza de Cristoforis. // *Complex Variables and Elliptic Equations*. – 2020. – 65(1), – P. 1-5. (Impact factor 2019, 0,85)
7. Adukov, V.M., Mishuris, G., Rogosin, S.V. Exact conditions for preservation of the partial indices of a perturbed triangular 2×2 matrix function // *Proceedings of The Royal Society A Mathematical Physical and Engineering Sciences* 476(2237): 20200099. DOI: 1098/rspa.2020.0099 (Impact factor 2019, 2,741)
8. *Analytical Methods of Analysis and Differential Equations: Materials of the 9th International Workshop (AMADE 2018)*. Eds.: S. V. Rogosin, M. V. Dubatovskaya, Cambridge Scientific Publishers. 2020.

2019

1. Maslyukova, T.I., Rogosin, S.V. Explicit Solution to an Integral Equation with Elliptic Function in the Kernel. // *Lobachevskii J Math*. – 2019. – 40, 2090–2094. (Impact factor 2018, 0,53)
2. Rogosin S.V., Dubatovskaya M.V. Special Functions Method for Fractional Analysis and Fractional Modeling. // In: «Analysis as a Life» (O. Celebi, S. Rogosin Eds.), Berlin – Birkhauser, 2019. – P. 261–278.
3. Rogosin S., Gorenflo R., Mainardi F. Mittag-Leffler function: properties and applications // In: *Handbook of Calculus with Applications in 8 volumes* (ed. by J. A. Tenreiro Machado). Vol. 1 Basic Theory (Eds. A. Kochubei, Yu. Luchko), Berlin/Boston: De Gruyter, 2019. P. 269–295.

4. Analysis as a Life. Dedicated to Heinrich Begehr on the occasion of his 89-th Birthday (S. Rogosin, O. Celebi, eds.), Springer Nature (Birkhauser), Cham, 2019.

2018

1. Rogosin S., Mishuris G. Regular and singular perturbation of matrix-functions with unstable partial indices // Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений: Материалы междунар. семинара 17-21 сентября 2018 г., Минск, Беларусь: ИМ НАН РБ 2018. — С. 62-63.
2. Примарчук Л.П., Рогозин С.В., Дубатовская М.В. Трехэлементная краевая задача на окружности с рациональным коэффициентом // Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений: Материалы междунар. семинара 17-21 сентября 2018 г., Минск, Беларусь: ИМ НАН РБ 2018. С. 69.
3. Rogosin, S.V. Modelling with fractional calculus: from mathematical curiosity to real life processes and materials // Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений: Материалы междунар. семинара 17-21 сентября 2018 г., Минск, Беларусь: ИМ НАН РБ 2018. — С. 71.
4. Rogosin S.V., Dubatovskaya M.V. On existence of the Marchaud fractional derivative Материалы XVIII Международной научной конференции по дифференциальным уравнениям (Еругинские чтения – 2018). Гродно, 15-18 мая 2018. Часть 2. – Мн.: Институт математики НАН Беларуси, 2018. – с. 76-78.
5. Primachuk L., Rogosin S.: Factorization of Triangular Matrix-Functions of an Arbitrary Order // Lobachevskii Journal of Mathematics, – 2018. – Vol. 39, No. 6. – P. 809–817.
6. Rogosin S., Dubatovskaya M. Letnikov vs Marchaud: A Survey on Two Prominent Constructions of Fractional Derivatives // Mathematics. – 2018. – Vol. 6 (1), 3.
7. Mishuris, G., Rogosin, S. Regular approximate factorization of a class of matrix-function with an unstable set of partial indices // Proc. Royal Soc. A, 2018. – Vol. 474, 20140279.
8. Dubatovskaya M., Primachuk L., Rogosin S. On factorization of triangle matrix functions // Вестник Сыктывкарского университета. Серия 1: Математика, Механика, Информатика. – 2018. – 4(25). Вып. 17. – P. 5–14.
9. Viscoelastic Behaviour of Periodontal Ligament: Stresses Relaxation at Translational Displacement of a Tooth Root, S. Bosiakov, G. Mikhasev, S. Rogosin, pp. 51-64. In: Modern Problems in Applied Analysis (P. Drygas, S. Rogosin Eds.) Basel: Birkhauser Verlag, 214 p., (2018).
10. Modern problem in Applied Analysis (S. Rogosin, P. Drygas, eds.), Springer Scientific, Basel, 2018.

2017

1. Garrappa R., Rogosin S., Mainardi F. On a generalized three-parameter Wright function of the Le Roy type // Fract. Calc. Appl. Anal. – 2017.– Vol. 20(5). – P. 1196–1215.
2. Rogosin, S.: Real variable Hele-Shaw problem with kinetic undercooling // Lobachevskii J. of Mathematics. – 2017. – Vol. 38, No. 3. – P. 510-519. (impact 0,368) Garrappa R., Rogosin S., Mainardi F.: On a generalized three-parameter Wright function of Le Roy type, Fract. Calc. Appl. Anal. – 2017. – Vol. 20, № 5. pp. 1196–1215. DOI: 10.1515/fca-2017-0063. (impact 2016 2,034).
3. Trzepieciniski T., Bak L., Stachowicz F., Bosiakov S., Rogosin S. Analysis of sheet surface roughness change under contact with flat and spherical indenters // Kovove Materialy – 2017. – Vol. 55(6). – P. 413-420. Rogosin S., Mainardi F.: A.Ya. Khintchine's Work in Probability Theory // Notices of ICCM – 2017. – Vol. 5, N. 2. – P. 60-75.
4. Рогозин С.В., Дубатовская М.В. О решении векторно-матричной задачи Римана с функционально-коммутативным коэффициентом // Математические методы в технике и технологиях: сб. тр. междунар. науч. конф.: в 12 т. Т. 10 / под общ. ред. А. А. Большакова. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2017. С. 11-15.
5. Rogosin S., Dubatovskaya M. Double Laplace transform and explicit fractional analogue of 2D laplacian // Ch. 25 in Costanda et al (eds.) Integral Methods in Science and Engineering, Springer, Vol. 1 (2017), pp. 263–278.

2016

1. Mishuris, G., Rogosin, S. Factorization of a class of matrix-functions with stable partial indices. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. – 2016. – Vol. 39, Issue 13. – P. 3791-3807. (impact 1,017)
2. Mishuris, G., Peck, D., Rogosin S., Wrobel M. Simulation the Hele-Shaw flow in the presence of various obstacles and moving particles // *Meccanica*. – 2016. – Vol. 51 (5). – P. 1041-1055. (impact 2,196)
3. Rogosin, S., Mishuris, G., Koroleva, A., Vinakurava, A.: Analysis of the unilateral contact problem for biphasic cartilage layers with an elliptic contact zone and accounting for tangential displacements // *Mathematical Modelling and Analysis*. – 2016. – Vol. 21, No. 5. – P. 585-609. (impact 0,521)
4. *Analytic Method of Analysis and Differential Equations (AMADE 2015)* Eds.: S.V. Rogosin, M.V. Dubatovskaya, Cambridge Scientific Publishers. 2016.
5. Rogosin, S., Mishuris, G. Constructive methods for factorization of matrix-functions // *IMA Journal of Applied Mathematics*. – 2016. – Vol. 81 (2). – P. 365-391.

2015

1. Bosiakov, S., Koroleva, A., Rogosin, S., Silberschmidt, V. Viscoelasticity of periodontal ligament: an analytical model // *Mechanics of Advanced Materials and Modern Processes*. – 2015. – Vol. 1. – P. 7.1–7.11.
2. Agarwal, P., Rogosin, S., Trujillo, J.J. Certain fractional integral operators and the generalized multi-index Mittag-Leffler functions // *Proceedings – Mathematical Sciences*. – 2015. – Vol. 125. – P. 291-306. (impact 2016 0,371)
3. Rogosin, S. The role of the Mittag-Leffler function in fractional modeling // *Mathematics*. – 2015. – Vol. 3. P. 368-381.
4. Mishuris G., Rogosin S., Wrobel M. Moving stone in the Hele-Shaw flow // *Mathematika*. – 2015. – Vol. 61 (2). P. 457-474. doi:10.1112/S0025579314000461 (impact 2016 0,667)
5. Dalla Riva M., Musolino P., Rogosin S. Series expansions for the solution of the Dirichlet problem in a planar domain with a small hole // *Asymptotic Analysis*. – 2015. – Vol. 92. – P. 339-361. (impact 2016 0,933)
6. Bosiakov, S., Rogosin, S. Analytical modeling of the viscoelastic behavior of periodontal ligament with using Rabotnov's fractional exponential function / Ch. 7 in: "Computational Problems in Science and Engineering", Volume 343 of the Series "Lecture Notes in Electrical Engineering", Springer International Publishing, 2015. P. 153–167.

2014

1. Gorenflo R., Kilbas A., Mainardi F., Rogosin S. *Mittag-Leffler Functions: Related Topics and Applications*. Springer Monographs in Mathematics. Springer Verlag, 2014, xiv + 443 p.
2. Trzepiecinski, T., Stachowicz, F., Bosiakov, S., Rogosin, S.: A 3d numerical modeling of hemispherical contact against an elastic-plastic flat surface // *RUTMech*, Vol. XXXI. 2014. P. 629-638.
3. Bosiakov, S., Rogosin, S.: Fractional viscoelastic model of the tooth root displacements in «noncompensable» periodontal ligament, In: *Recent advances in mathematical methods in applied sciences/Proc. of 2014 Int. Conf. Math. Models and Methods in Applied Sciences (MMAS 2014)*. S.-Petersburg, Russia, 23-25 September, 2014. Eds. Yu.B. Senichenkov, V. Korablev, I. Chernorytski, N.V. Korovkin, S. Pozdnjkov, Kimis Ntalianis. – St.Petersbourg, 2014. P. 114-117.
4. Dubatovskaya, M., Mishuris, G., Rogosin, S.: Nonlinear heat conduction problem in doubly periodic 2D composite materials, *Recent advances in mathematical methods in applied sciences/Proc. of 2014 Int. Conf. Math. Models and Methods in Applied Sciences (MMAS 2014)*. S.-Petersburg, Russia, 23-25 September, 2014. Eds. Yu.B. Senichenkov, V. Korablev, I. Chernorytski, N.V. Korovkin, S. Pozdnjkov, Kimis Ntalianis. – St.Petersbourg, 2014. P. 41-46.
5. Dubatovskaya, M., Rogosin, S.: On effective conductivity formula for bounded symmetric composite material // In: *Complex Analysis and Potential Theory with Applications / Cambridge Scientific Publishers*, 2014. (T. Aliev Azerogly, A. Golberg, S. Rogosin eds.). – P. 53-62.
6. Koroleva, A., Mishuris, G., Rogosin S.: Description of the contact zone by using the Wright function // In: *Complex Analysis and Potential Theory with Applications / Cambridge Scientific Publishers*, 2014. (T. Aliev Azerogly, A. Golberg, S. Rogosin eds.). – P. 133-138.

7. Mishuris G., Rogosin S. An asymptotic method of factorization of a class of matrix functions. Proc. Royal Soc. A, 2014. – Vol. 470, 20140109. (impact 2016 0,754)
8. Mishuris G., Rogosin S., Wrobel M. Hele-Shaw flow with a small obstacle. Meccanica. – 2014. – Vol. 49. – P. 2037. (impact 2016 2,196)
9. Rogosin S., Mainardi F. George William Scott Blair – the pioneer of fractional calculus in rheology. Comm. in Applied and Industrial Math. – 2014. – Vol. 6, no. 1. – e481 doi:10.1685/journal.caim. (impact 2016 0,315)
10. Complex Analysis and Potential Theory with Applications (T. Aliev Azerogly, A. Golberg, S.V. Rogosin Eds.) Cambridge Scientific Publishers (2014). Analytic Methods of Analysis and Differential Equations: AMADE-2012 (M.V. Dubatovskaya, S.V. Rogosin Eds.) Cambridge Scientific Publishers (2014).

2013

1. Kilbas A.A., Koroleva A.A., Rogosin S. Multi-parametric Mittag-Leffler functions and their extension. Fractional Calculus and Applied Analysis. – 2013. – Vol. 16, No. 2. – P. 378-404. (impact 2016 2.034)
2. Rivero M., Rogosin S., Tenreiro Machado J., Trujillo J. Stability of Fractional Order Systems. Mathematical Problems in Engineering, Volume 2013 (2013), Article ID 356215, 14 pages. (impact 2016 0.802)
3. Gryshchuk S., Rogosin S. Effective Conductivity of 2D Disk – Ring Composite Material // Mathematical Modelling and Analysis. – 2013. – Vol. 18, No. 3. – P. 386-394. (impact 2016 0.521)
4. Ilchukov A., Rogosin S. Boundary value problems in spaces defined by modulus of continuity // Siauliai Math. Sem. – 2013. – Vol. 8 (16). – P. 71.-82.

2012

1. Rogosin S. 2D Free Boundary Value Problems // In: Advances in Applied Analysis. (S.Rogosin, A.Koroleva, Eds.) Trends in Mathematics. Basel: Birkh?userVerlag, 2012. – P. 219-250.
2. Advances in Applied Analysis (A.A. Koroleva, S.V. Rogosin Ed.) Basel: Birkhauser Verlag (2012).

2011

1. Rogosin, S. Mainardi F. Legacy of A.Ya. Khintchine Work in Probability Theory. – Cambridge Scientific Publishers, 2011. – xiv + 275 p.
2. Luchko Yu., Mainardi F., Rogosin S. Professor Rudolf Gorenflo and his contribution to fractional calculus // Fractional Calculus and Applied Analysis. – 2011. – Vol. 14, No. 1. – P. 3-18. (impact 2016 2.034)
3. Rogosin S., Speck F.-O. On the analytical solution of the linear-fractional Riemann problem // Mathematische Nachrichten 2011. – Vol. 284, No. 4. – P. 543-559. (impact 2016 0.742)

2010

1. Koroleva A., Rogosin S.V. Integral representation of the four-parametric Mittag-Leffler function // Lithuanian Mathematical Journal. – 2010. – Vol. 50, No. 3. – P. 337-343. (impact 2016 0.50)
2. Rogosin S., Vaitekhovich T. On a biharmonic problem in a circular ring // Analysis. – 2010. – Vol. 30 (1). – P. 93-106. (impact 2016 0.125)
3. Rogosin S., Urbanovich T. Hyperfunction theory approach to the study of Riemann boundary value problem in an exceptional case // Siauliai Math. Sem. – 2010. – Vol. 5 (13). – P. 71-85.
4. Analytic Methods of Analysis and Differential Equations: AMADE-2009 (S.V.Rogosin Ed.) Cambridge Scientific Publishers (2010).

2009

1. Dubatovskaya M.V., Pesetskaya E.V., Rogosin S.V. Eisenstein sums and functions and their application at the study of heat conduction in composites // Siauliai Mathematical Seminar. – 2009. – Vol. 12. – P. 167-187.
2. De Castro L., Pesetskaya E.V., Rogosin S.V. Effective conductivity of composite materials with non-ideal contact condition // Complex Variables and Elliptic Equations. – 2009. – Vol. 54, No. 12. – P. 1085-1100. (impact 2016 0.616)

3. Makarova N.I., Rogosin S.V. Wavelet-analysis of time series with gap data. A preliminary study // *Mathematical Methods in Economics and Finance*. – 2009. – Vol. 4, No. 1. – P. 27-42.

2008

1. Mityushev V.V., Pesetskaya E.V., Obnosov Yu.V., Rogosin S.V. Complex analytic methods for heat conduction in composites // *Mathematical Modelling and Analysis*. – 2008. – Vol. 13, No. 1. – P. 67-78. (impact 2016 0.521)
2. Mityushev V.V., Rogosin S.V. On Riemann-Hilbert problem with a piece-wise constant matrix // *Zeitschrift fuer Analysis und ihre Anwendungen*. – 2008. – Vol. 27, No. 1. – P. 53-66. (impact 2008 0.87)
3. Lebed S., Rogosin S.V. Optimal design of unbounded 2D composite materials with circular inclusions of different radii // *Annales Academiae Paedagogicae Cracoviensis Studia Mathematica*. – 2008. – Vol. 7. – P. 91-99.
4. Mityushev V.V., Pesetskaya E.V., Rogosin S.V. Analytical Methods for Heat Conduction in Composites and Porous Media / Ch. 5 in: “Thermal Properties of Cellular and Porous Materials” (A. Schsner, G. Murch, and M. de Lemos eds.). Amsterdam: WILEY-VCH. – 2008. – P. 124-167.
5. *Analytic Methods of Analysis and Differential Equations: AMADE-2006* (A.A. Kilbas, S.V. Rogosin Eds.) Cambridge Scientific Publishers (2008).

2007

1. Dubatovskaya M.V., Rogosin S.V. Heat Conduction of 2D Composite Materials with Symmetric Inclusions: a Model and Reduction to a Vector-Matrix Problem // *Material Science Forum*. – 2007. – Vol. 553. – P. 136-142. (impact 2007 0.32)
2. Pesetskaya E.V., Schsner A., Rogosin S.V. The Effective Conductivity of 2D Porous Materials with Temperature Dependent Material Properties // *Material Science Forum*. – 2007. – Vol. 553. – P. 112-117. (impact 2007 0.32)
3. Rogosin S.V., Vaitekhovich T.S. Hele-Shaw Model for Melting/Freezing with Two Dendrits // *Material Science Forum*. – 2007. – Vol. 553. – P. 143-151. (impact 2007 0.32)
4. Rogosin S.V., Chakhmianok T.A. On solvability of inhomogeneous nonlinear power-type boundary value problem // *Complex Variables and Elliptic Equations*. – 2007. – Vol. 52, No. 10-11. – P. 933-943. (impact 2016 0.616)
5. Rogosin S.V., Vaitekhovich T.S. Complex Hele-Shaw Model. Local solvability for a doubly connected domain // *J. Applied Functional Analysis*. – 2007. – Vol. 2, No. 2. – P. 159-184.

2006

1. Rogosin S.V. On nonlinear Vekua type equations // *Nonlinear Analysis: Modelling and Control*. – 2006. – Vol. 11, No. 2. – P. 187-200. (impact 2016 0.952)
2. Cattani C., Dubrovina O., Rogosin S., Voskresensky S., Zelenko E. On the creation of a new diagnostic model for fetal well-being on the base of wavelet analysis of cardiocograms // *J. Med. Systems*. 2006. – Vol. 30, No. 6. P. 489-494. (impact 2016 2.456)
3. Mainardi F., Rogosin S. An origin of infinitely divisible distribution: from de Finetti’s problem to Levy-Khintchine formula // *Mathematical Methods in Economics and Finance*. – 2006. – Vol. 1. – P. 37-56. *Analytic Methods of Analysis and Differential Equations: AMADE-2003* (A.A. Kilbas, S.V. Rogosin Eds.) Cambridge Scientific Publishers (2006).

2005

1. Rogosin S.V. Hele-Shaw Moving Boundary Value Problem in a Bounded Domain. Local in Time Solvability // *Complex Variables*. – 2005. – Vol. 50, № 7-11. – P. 745-764. (impact 2016 0.616)

2004

1. Dubatovskaya M.V., Rogosin S.V. On an exact description of the Schottky group of symmetries // *Math. Model. and Analysis*. – 2004. – Vol. 9, No. 2. – P. 137-148. (impact 2016 0.521)

2. Preciso L., Rogosin S.V. Real analyticity of an operator, associated to the Schwarz operator for multiply connected domains // Proc. of Institute of Math., NAS Ukraine. — 2004. — Vol. 1, No. 3. — P. 151-168.

2003

1. Preciso L., Rogosin S.V. On the analyticity of the Schwarz operator with respect to a curve // Proceedings of the International Conference FSORP2002 (S.G.Samko, A.Lebre and A.F.dos Santos eds.). Dordrecht: Kluwer AP. — 2003. — P. 237-254.
2. Preciso L., Rogosin S.V. Real analyticity with respect to the boundary curve of an operator related to the solution of the Schwarz boundary value problem in a multiply connected domain // Complex Analysis and Potential Theory / Proceedings of the Ukrainian Math. Congress. Section 4 (Tamrazov P.M. ed.). — Kiev: NAS Ukraine. — 2003. — P. 100-111.

2002

1. Lanza de Cristoforis M., Rogosin S.V. A Newton-Kantorovich method for the conformal representation // Analysis. — 2002. — Vol. 22. — P. 131-148. (impact 2016 0.125)
2. Rogosin S.V. On classical formulation of Hele-Shaw moving boundary problem for power-law fluid // Math. Model. and Analysis. — 2002. — V. 7, No. 1. — P. 158-168. (impact 2016 0.521)
3. Дубатовская М.В., Песецкая Е.В., Рогозин С.В. О течении Хеле-Шоу в ограниченной области // Труды матем. центра им. Н.И.Лобачевского. 2002. Т. 14. С. 113-129.
4. Ланца де Кристофорис М., Пречизо Л., Рогозин С.В. Регулярность операторов, связанных с краевыми задачами для голоморфных функций // Труды матем. центра им. Н.И. Лобачевского. 2002. Т. 14. С. 185-199.

2001

1. Lanza de Cristoforis M., Rogosin S.V. Analyticity of a nonlinear operator associated to the conformal representation a doubly connected domain in Schauder spaces // Complex Variables. — 2001. — Vol. 44. — P. 193-223. (impact 2016 0.616)

2000

1. Rogosin S.V. On well-posedness of nonlinear conjugation problem for analytic functions // Mathematical Modelling and Analysis. — 2000. — Vol. 5. — P. 153-163. (impact 2016 0.521)
2. Rogosin S.V. On well-posedness of one-sided nonlinear boundary value problems for analytic functions // J. of Integral Equations and Applications. — 2000. Vol. 12, No. 3. — P. 131-156. (impact 2000 0.69)
3. Lanza de Cristoforis M., Rogosin S.V. Analyticity of a nonlinear operator associated to the conformal representation in Schauder spaces. An integral equations approach // Math. Nachr. — 2000. — Vol. 220. — P. 59-77. (impact 2016 0.742)
4. Rogosin S.V. Properties of the solution of a nonlinear problem of Riemann-Hilbert-Poincare type for harmonic functions // Analytical Methods of Analysis and Differential Equations / Proceedings of Institute of Mathematics NAS. — Minsk, 2000. — Vol. 5. — P. 153-163.
5. Рогозин, С. В. Комплексная модель Хеле-Шоу с регуляризацией кинетического типа для двусвязной области / С.В. Рогозин // Весці НАН Беларусі, сер. фіз.-матем. навук. — 2000. № 4. С. 5-10.

1999

1. Mityushev V.V., Rogosin S.V. Constructive Methods for Linear and Nonlinear Boundary Value Problems for Analytic Functions: Theory and Applications. — Boca Raton — London — New York — Washington: Chapman & Hall / CRC PRESS, 1999. — xii+284 p. (Monographs and surveys in pure and applied mathematics; v. 108).
2. Reisig M., Rogosin S.V. with appendix by Huebner F. Analytical and numerical treatment of a complex model for Hele-Shaw moving boundary value problems with kinetic undercooling regularization // Euro. J. Appl. Math. — 1999. — Vol. 10. — P. 561-579. (impact 2016 0.688)
3. Рогозин, С. В. О разрешимости нелинейной степенной задачи сопряжения / С.В. Рогозин // Доклады АН Беларусі. 1999. Т. 43. № 3. С. 36-40.

1998

1. Gorenflo R., Kilbas A.A., Rogosin S.V. On generalized Mittag-Leffler type functions // *Integral Transforms and Special Functions*. – 1998. – Vol. 7, No. 3-4. – P. 215-224. (impact 2016 0.873)

1996 и ранее

1. Рогозин С.В., Толочко М.Э. Однородная краевая задача Римана с бесконечным индексом для полуплоскости в исключительном случае // *Известия АН БССР, сер. физ.-мат. наук*/ 1978. – № 3., с. 35-40.
2. Говоров Н.В., Сандригайло И.Е., Рогозин С.В. Об асимптотических свойствах особого интеграла типа Коши с контуром на положительном луче // *Вестник Белорусского ун-та. Сер. 1. Физика, математика, механика*. 1982. № 3. С. 46-53.
3. Рогозин С.В. Неоднородная краевая задача Римана с бесконечным индексом в исключительном случае для полуплоскости // *Вестник Белорусского ун-та. Сер. 1. Физика, математика, механика*. 1983. № 2. С. 60-62.
4. Рогозин С.В. О некоторых классах функций, аналитических в полуплоскости // *Известия вузов. Математика*. – 1990. – № 2. – С. 84-86. (impact 2015 0,297)
5. Рогозин С.В., Забрейко П.П. О разрешимости и однозначной разрешимости нелинейных интегральных уравнений в пространствах Орлича // *Доклады АН Беларуси*. 1992. Т. 36, № 5. С. 398-402.
6. Дубатовская М.В., Рогозин С.В. Однородное характеристическое уравнение с бесконечным индексом в исключительном случае. // *Доклады АН Беларуси*. – Т. 40, № 4. – 1996. – С. 19-23.