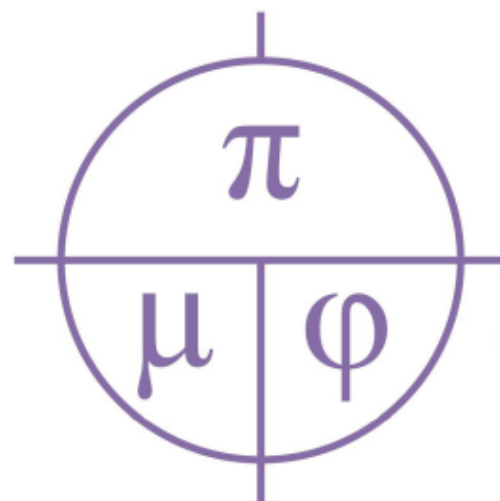
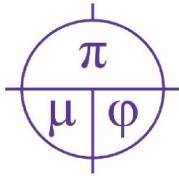


ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА & ФИЗИКА

APPLIED MATHEMATICS & PHYSICS

Том 54, № 4





Прикладная математика & Физика

2022. Том 54, № 4

Основан в 1995 г. Журнал принимает к публикации оригинальные и обзорные статьи отечественных и зарубежных авторов по всем разделам современной математики и физики, и их приложений, исторические обзоры научной деятельности выдающихся учёных и краткие сообщения о научной жизни и научных мероприятиях в России и за рубежом. Журнал включен в Перечень ВАК рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней кандидата и доктора наук (1.1.1 – вещественный, комплексный и функциональный анализ, 1.1.2 – дифференциальные уравнения и математическая физика, 1.3.8 – физика конденсированного состояния). До 2020 г. журнал издавался под названием «Научные ведомости Белгородского государственного университета. Математика. Физика».

УЧРЕДИТЕЛЬ:

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Белгородский государственный национальный исследовательский университет».

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:

Главный редактор: В. Б. Васильев, доктор физико-математических наук, НИУ «БелГУ»;

Заместители главного редактора: С. М. Ситник, доктор физико-математических наук, НИУ «БелГУ», Математика; А. В. Носков, доктор физико-математических наук, НИУ «БелГУ», Физика. Математическое моделирование;

Ответственный секретарь: О. В. Чернова, кандидат физико-математических наук, НИУ «БелГУ».

ЧЛЕНЫ РЕДАКЦИОННОЙ КОЛЛЕГИИ:

- | | |
|---|---|
| Ш. А. Алимов, д-р ф.-м. н., Ташкент, Узбекистан; | И. С. Ломов, д-р ф.-м. н., Москва, Россия; |
| Ю. А. Алхутов, д-р ф.-м. н., Владимир, Россия; | В. В. Меньших, д-р ф.-м. н., Воронеж, Россия; |
| А. Ашыралыев, д-р ф.-м. н., Алматы, Казахстан; | А. И. Назаров, д-р ф.-м. н., Санкт-Петербург, Россия; |
| С. В. Блажевич, д-р ф.-м. н., Белгород, Россия; | Е. Ю. Панов, д-р ф.-м. н., Великий Новгород, Россия; |
| А. Н. Беляков, д-р ф.-м. н., Белгород, Россия; | О. М. Пенкин, д-р ф.-м. н., Алматы, Казахстан; |
| А. Г. Брусенцев, д-р ф.-м. н., Белгород, Россия; | И. П. Половинкин, д-р ф.-м. н., Воронеж, Россия; |
| Ю. П. Вирченко, д-р ф.-м. н., Белгород, Россия; | Е. В. Радкевич, д-р ф.-м. н., Москва, Россия; |
| А. В. Глушак, д-р ф.-м. н., Белгород, Россия; | С. Е. Савотченко, д-р ф.-м. н., Белгород, Россия; |
| С. Б. Дабагов, д-р ф.-м. н., Москва, Россия; | А. П. Солдатов, д-р ф.-м. н., Москва, Россия; |
| Й. Диблик, д-р ф.-м. н., Брно, Чешская Республика; | В. Е. Федоров, д-р ф.-м. н., Челябинск, Россия; |
| Л. М. Кожевникова, д-р ф.-м. н., Стерлитамак, Россия; | А. А. Шибков, д-р ф.-м. н., Тамбов, Россия. |
| А. Н. Куликов, д-р ф.-м. н., Ярославль, Россия; | М. В. Шитикова, д-р ф.-м. н., Воронеж, Россия; |
| Д. М. Левин, д-р ф.-м. н., Тула, Россия; | Э. Л. Шишкина, д-р ф.-м. н., Воронеж, Россия. |

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор). Выходит 4 раза в год.

Выпускающий редактор: Ю. В. Ивахненко	Гарнитура Times. Уч. изд. л. 8,0
Корректора Ю. В. Ивахненко	Дата выхода 30.12.2022.
Компьютерная верстка: О. В. Чернова	Оригинал-макет подготовлен отделом
Оригинал-макет: В. Б. Васильев	объединенной редакции научных журналов НИУ «БелГУ»
E-mail: vasilyev_v@bsu.edu.ru	308015, г. Белгород, ул. Победы, 85.

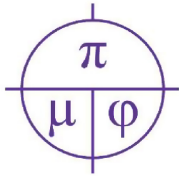
СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

<i>А. В. Букушева, С. В. Галаев</i>	
Субримановы квази-статистические структуры на неголомомных многообразиях Кенмоцу	205
<i>С. А. Телкова</i>	
Внешние дифференциальные системы стохастической динамики	213
<i>А. Л. Тасевич</i>	
Об одном эллиптическом функционально-дифференциальном уравнении со сжатием	219

ФИЗИКА. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

<i>В. В. Сыщенко, В. А. Кривцов</i>	
Качественные особенности переходного излучения быстрых и медленных частиц	242
<i>Е. С. Ткачев, А. С. Долженко, А. Э. Федосеева</i>	
О природе низкого сопротивления ударным нагрузкам 12% Cr сталей с низким содержанием азота	252
<i>М. Р. Газизов, И. С. Зуйко, С. С. Малофеев</i>	
EBSD-анализ микроструктуры Al-Cu-Mg сплава, подвергнутого сварке трением с перемешиванием	261
<i>М. С. Болдин, М. С. Озеров, В. С. Соколовский, Е. А. Поволяева</i>	
Механические свойства композита Ti/TiB после горячей прокатки	266
<i>О. Г. Климова-Корсмик, Д. Н. Клименко, М. В. Вережак, С. В. Жеребцов</i>	
Прогнозирование пластичности высокоэнтропийных сплавов	271



Applied Mathematics & Physics

2022. Volume 54, № 4

Founded in 1995. The journal accepts for publication original and review articles by domestic and foreign authors on all areas of modern mathematics and physics and their applications, historical reviews of the scientific activities of prominent scientists and brief reports on scientific life and scientific events in Russia and abroad. The journal is included into the List of Higher Attestation Commission of peer-reviewed scientific publications where the main scientific results of dissertations for obtaining scientific degrees of a candidate and doctor of science should be published (1.1.1 – material, complex and functional analysis, 1.1.2 – differential equations and mathematical physics, 1.3.8 – condensed matter physics). Until 2020, the journal was published with the name «Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics. Physics».

FOUNDER:

Federal state autonomous educational establishment of higher education
«Belgorod National Research University».

EDITORIAL BOARD:

Chief Editor: V. B. Vasilyev, Dr.Sc., Ph.D., Belgorod National Research University;
Deputy Editor-in-Chief: S. M. Sitnik, Dr.Sc., Ph.D., Belgorod National Research University, Mathematics;
A. V. Noskov, Dr.Sc., Ph.D., Belgorod National Research University, Physics. Mathematical modeling;
Executive Secretary: O. V. Chernova, PhD, Belgorod National Research University.

EDITORIAL BOARD MEMBERS:

Sh. A. Alimov, Dr.Sc., Ph.D., Tashkent, Uzbekistan;	I. S. Lomov, Dr.Sc., Ph.D., Moscow, Russia;
Yu. A. Alkhutov, Dr.Sc., Ph.D., Vladimir, Russia;	V. V. Menshih, Dr.Sc., Ph.D., Voronezh, Russia;
A. Ashyralyev, Dr.Sc., Ph.D., Almaty, Kazakhstan;	A. I. Nazarov, Dr.Sc., Ph.D., St. Petersburg, Russia;
S. V. Blazhevich, Dr.Sc., Ph.D., Belgorod, Russia;	E. Yu. Panov, Dr.Sc., Ph.D., Velikiy Novgorod, Russia;
A. N. Belyakov, Dr.Sc., Ph.D., Belgorod, Russia;	O. M. Penkin, Dr.Sc., Ph.D., Almaty, Kazakhstan;
A. G. Brusentsev, Dr.Sc., Ph.D., Belgorod, Russia;	I. P. Polovinkin, Dr.Sc., Ph.D., Voronezh, Russia;
Yu. P. Virchenko, Dr.Sc., Ph.D., Belgorod, Russia;	E. V. Radkevich, Dr.Sc., Ph.D., Moscow, Russia;
A. V. Glushak, Dr.Sc., Ph.D., Belgorod, Russia;	S. E. Savotchenko, Dr. Sc Ph.D., Belgorod, Russia;
S. B. Dabagov, Dr.Sc., Ph.D., Moscow, Russia;	A. P. Soldatov, Dr.Sc., Ph.D., Moscow, Russia;
J. Diblik, Dr.Sc., Ph.D., Brno, Czech Republic;	V. E. Fedorov, Dr.Sc., Ph.D., Chelyabinsk, Russia;
L. M. Kozhevnikova, Dr.Sc., Ph.D., Sterlitamak, Russia;	A. A. Shibkov, Dr.Sc., Ph.D., Tambov, Russia.
A. N. Kulikov, Dr.Sc., Ph.D., Yaroslavl, Russia;	M. V. Shitikova, Dr.Sc., Ph.D., Voronezh, Russia;
D. M. Levin, Dr.Sc., Ph.D., Tula, Russia;	E. L. Shishkina, Dr. Sc., Ph.D., Voronezh, Russia.

The journal has been registered at the Federal service for supervision of communications information technology and mass media (Roskomnadzor). Publication frequency: 4 /year.

Commissioning Editor Yu. V. Ivakhnenko
Proofreading Yu. V. Ivakhnenko
Computer imposition O. V. Chernova
Dummy layout by V. B. Vasilyev
E-mail: vasilyev_v@bsu.edu.ru

Typeface Times. Publisher's signature 8,0
Date of publishing 30.12.2022.
The layout is presented by Department of the united
Editorial Board of Scientific Journals Belgorod
National Research University
Address: 85 Pobeda St., Belgorod, 308015, Russia

CONTENTS

MATHEMATICS

A. Bukusheva, S. Galaev Sub-Riemannian quasi-statistical structures on non-holonomic Kenmotsu manifolds	205
S. Telkova Exterior Differential Systems of stochastic Dynamic	213
A. Tasevich On an elliptic functional differential equation with contractions	219

PHYSICS. MATHEMATICAL MODELING

V. Sychshenko, V. Krivtsov Qualitative features of the transition radiation from slow particles vs fast ones	242
E. Tkachev, A. Dolzhenko, A. Fedoseeva On origin of low impact toughness for the 12% Cr steels with a low N content	252
M. Gazizov, I. Zuiko², S. Malopheyev EBSD-investigation of Al–Cu–Mg alloy microstructure subjected to friction-stir welding	261
M. Boldin, M. Ozerov, V. Sokolovsky, E. Povolyaeva, S. Zhrebtsov Mechanical properties of the TI/TIB composite after hot rolling	266
O. Klimova-Korsmik¹, D. Klimenko, M. Verezhak, S. Zhrebtsov Prediction of the plasticity of high-entropic alloys	271

МАТЕМАТИКА

УДК 514.76

DOI 10.52575/2687-0959-2022-54-4-205-212

MSC 53C15

оригинальное исследование

СУБРИМАНОВЫ КВАЗИ-СТАТИСТИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ НА НЕГОЛОНОМНЫХ МНОГООБРАЗИЯХ КЕНМОЦУ

А. В. Букушева , С. В. Галаев 

(Статья представлена членом редакционной коллегии С. М. Ситником)

ФГБОУ ВО «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского»,
Саратов, 410012, Россия

E-mail: bukusheva@list.ru, sgalaev@mail.ru

Аннотация. На неголономном многообразии Кенмоцу вводится и исследуется субриманова квази-статистическая структура. Неголономное многообразие Кенмоцу сохраняет все свойства многообразия Кенмоцу за исключением следующего свойства: распределение многообразия Кенмоцу инволютивно. В основе субримановой квази-статистической структуры лежит связность с кручением специального строения. Связность с кручением определяется внутренней связностью и структурным эндоморфизмом, сохраняющим распределение неголономного многообразия Кенмоцу. Доказывается, что внутренняя связность согласована с метрикой, индуцированной на распределении рассматриваемого многообразия. Найдено строение структурного эндоморфизма.

Ключевые слова: неголономное многообразие Кенмоцу, субриманова квази-статистическая структура, N-связность

Для цитирования: Букушева А. В., Галаев С. В. 2022. Субримановы квази-статистические структуры на неголономных многообразиях Кенмоцу. Прикладная математика & Физика. 54(4): 205–212.

DOI 10.52575/2687-0959-2022-54-4-205-212

SUB-RIEMANNIAN QUASI-STATISTICAL STRUCTURES ON NON-HOLONOMIC KENMOTSU MANIFOLDS

Aliya Bukusheva , Sergei Galaev 

(Article submitted by a member of the editorial board S. M. Sitnik)

Saratov National Research State University named after N. G. Chernyshevsky,
Saratov, 410012, Russia

E-mail: bukusheva@list.ru, sgalaev@mail.ru

Received November, 12, 2022

Abstract. The paper is devoted to continuation of the study of almost contact metric manifolds equipped with a connection with torsion of a special type. The connection with torsion to be used is determined by the internal connection of an almost contact metric manifold and a field of endomorphisms acting on this manifold and preserving its distribution. The field of endomorphisms is called the second structural endomorphism of an almost contact metric manifold. In previous works, it has been shown that the structure of the second structural endomorphism may significantly depend on the geometry of the manifold under consideration. For example, the structure of the endomorphism, corresponding to the skew-symmetric connection, was found. In this article, we introduce and study the sub-Riemannian quasi-statistical structure on a non-holonomic Kenmotsu manifold. A non-holonomic Kenmotsu manifold possesses all properties of the Kenmotsu manifolds except for the following one: the distribution of a Kenmotsu manifold is involutive. At the core of a sub-Riemannian quasi-statistical structure lies a connection with torsion of a special type. It is proved that the internal connection is consistent with the metric induced on the distribution of the manifold under consideration. The structural endomorphism corresponding to a sub-Riemannian quasi-statistical structure is described.

Keywords: Non-Holonomic Kenmotsu Manifold, Sub-Riemannian Quasi-Statistical Structure, N-connection

For citation: Bukusheva A., Galaev S. 2022. Sub-Riemannian quasi-statistical structures on non-holonomic Kenmotsu manifolds. Applied Mathematics & Physics. 54(4): 205–212. (in Russian) DOI 10.52575/2687-0959-2022-54-4-205-212

1. Введение. Понятие неголономного многообразия Кенмоцу M введено первым из авторов настоящей статьи в работе [1]. Многообразие M повторяет все свойства многообразия Кенмоцу [16] за

исключением одного: распределение D неголономного многообразия Кенмоцу не обязано быть инволютивным. В работе [2] неголономное многообразие Кенмоцу оснащается N -связностью ∇^N с кручением специального строения. N -связность ∇^N определяется на почти контактном метрическом многообразии M заданием пары (∇, N) , где ∇ – внутренняя линейная связность, $N : TM \rightarrow TM$ – эндоморфизм касательного расслоения многообразия M , такой, что $N\vec{\xi} = 0$, $N(D) \subset D$. Задавая подходящим образом эндоморфизм N , можно получить большинство из известных ранее классов связностей с кручением [3, 4, 7]. Интерес к связностям с кручением обусловлен использованием их в теоретической физике [12, 17]. Кручение внутренней связности полагается равным нулю.

Свойства N -связности ∇^N подробно изучены в работе [5]. N -связность ∇^N в указанной работе определяется как единственная связность, удовлетворяющая следующим условиям:

1) $\nabla_X^N \in \Gamma(D)$, 2) $\nabla_X^N \vec{\xi} = 0$, 3) $\nabla_{\vec{\xi}}^N Y = [\vec{\xi}, Y] + NY$, 4) $\nabla_Y^N Z = \nabla_Y Z$, $X \in \Gamma(TM)$, $Y, Z \in \Gamma(D)$. Здесь ∇ – внутренняя линейная связность [5]. Кручение $S(X, Y)$ связности ∇^N находится по формуле [5]:

$$S(X, Y) = 2\omega(X, Y)\vec{\xi} + \eta(X)NY - \eta(Y)NX, \quad X, Y, Z \in \Gamma(TM).$$

В предлагаемой работе мы определяем субриманову квази-статистическую структуру как триплет (M, g, ∇^N) , где M – почти контактное метрическое многообразие, а связность ∇^N связана с метрикой g посредством равенства

$$\nabla_X^N g(X, Y) - \nabla_Y^N g(X, Z) + \tilde{S}(X, Y, Z) - 2\omega(X, Y)\eta(Z) = 0,$$

где $\tilde{S}(X, Y, Z) = g(S(X, Y), Z)$, $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$, $\omega = d\eta$.

Расширение термина «квази-статистическая структура» путем добавления слова «субриманова» оправдано использованием в определяющем структуре равенстве внешней формы $\omega = d\eta$, относящейся к внутренней геометрии субриманова многообразия контактного типа [14]. Субриманово многообразие контактного типа является естественным обобщением почти контактного метрического многообразия. Из равенства

$$\nabla_X^N g(Y, Z) - \nabla_Y^N g(X, Z) + \tilde{S}(X, Y, Z) - 2\omega(X, Y)\eta(Z) = 0, \quad X, Y, Z \in \Gamma(TM)$$

следует равенство

$$\nabla_X g(Y, Z) = \nabla_Y g(X, Z), \quad X, Y, Z \in \Gamma(D).$$

Последнее означает, что внутренняя связность ∇ совместима с метрикой g , являющейся ограничением исходного метрического тензора на распределении D .

Статистическая структура, введенная Лауритценом в [19], представляет собой пару (g, ∇) , где g – псевдориманова метрика и ∇ – совместимая с ней линейная связность без кручения. Многообразие M , оснащенное статистической структурой, получает название статистического многообразия. К теории статистических структур тесно примыкает теория сопряженных линейных связностей, разработанная А.П. Норденом [9]. Совокупность связностей без кручения, сопряженных относительно метрики, составляет весьма интересный класс связностей, совместимых с метрикой. Этот класс наряду со связностью Леви – Чивиты – единственной самосопряженной связностью – включает другие связности, вызывающие интерес исследователей. Линейные связности, совместимые с римановой метрикой, находят интересные приложения в геометрическом истолковании ряда вопросов математической статистики [8, 10, 11].

Для описания геометрических структур в пространствах квантовых состояний Курозе вводит понятие квази-статистического многообразия, допуская наличие кручения у связности, совместимой с метрикой [18]. В работе [13] предложены способы построения квази-статистических структур.

Мы будем называть N -связность ∇^N продолжением связности ∇ посредством эндоморфизма N .

Задавая подходящим образом эндоморфизм N , можно получить большинство из известных ранее классов связностей с кручением – связность Схоутена-ван Кампена, связность Танаки – Вебстера и др. [5]. В то же время, в тех работах, в которых использовались связности с кручением ∇^N (для конкретных эндоморфизмов N), присутствие эндоморфизма N явно не обсуждалось. Исключение представляет работа [14] (см., также, [4]), где свойства эндоморфизма N , обозначаемого в работе символом « τ », получили конкретное описание.

Мотивация определения и изучения субримановой квази-статистической структуры (M, g, ∇^N) подкрепляется следующими обстоятельствами:

1. Как уже было сказано выше – класс связностей ∇^N широко представлен в современных геометрических исследованиях;
2. N -связность ∇^N возникает естественным образом как продолжение внутренней связности ∇ , занимающей важное место в геометрическом моделировании задач неголономной механики и теоретической физики [17].

2. Основные результаты. Почти контактным метрическим многообразием называется гладкое многообразие M нечетной размерности $n = 2m + 1$, $m \geq 1$ с заданной на нем почти контактной метрической структурой $(M, \vec{\xi}, \eta, \varphi, g)$ [15]. Здесь, в частности, $\eta - 1$ – форма и $\vec{\xi}$ – векторное поле, порождающие, соответственно, распределение $D : D = \ker(\eta)$ и оснащение D^\perp распределения $D : D^\perp = \text{Span}(\vec{\xi})$. Гладкое распределение D называется распределением почти контактного метрического многообразия. Имеет место разложение $TM = D \oplus D^\perp$. Почти контактное метрическое многообразие называется нормальным, если выполняется условие $N_\varphi + 2d\eta \otimes \vec{\xi} = 0$, где $N_\varphi(X, Y) = [\varphi X, \varphi Y] + \varphi^2[X, Y] - \varphi[\varphi X, Y] - \varphi[X, \varphi Y]$ – тензор Нейенхайса эндоморфизма φ . Нормальное почти контактное метрическое многообразие M называется неголономным многообразием Кенмоцу, если выполняется $L_{\vec{\xi}}g = 2(g - \eta \otimes \eta)$ [1].

Карта $k(x^i)$ ($i, j, k = 1, \dots, n; a, b, c = 1, \dots, n - 1$) многообразия M называется адаптированной к распределению D , если $\partial_n = \vec{\xi}$ [6]. Пусть $P : TM \rightarrow D$ – проектор, определяемый разложением $TM = D \oplus D^\perp$, и $k(x^a)$ – адаптированная карта. Векторные поля $P(\partial_a) = \vec{e}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n$ порождают распределение $D : D = \text{Span}(\vec{e}_a)$. Для неголономного поля базисов $(\vec{e}_i) = (\vec{e}_a, \partial_n)$ выполняется соотношение $[\vec{e}_a, \vec{e}_b] = 2\omega_{ba}\partial_n$. Для нормального почти контактного метрического многообразия выполняется условие $\omega(\vec{\xi}, \cdot) = 0$. Это условие эквивалентно тому, что в адаптированных координатах $\partial_n \Gamma_a^n = 0$.

Пусть $k(x^i)$ и $k'(x'^i)$ – адаптированные карты, тогда получаем следующие формулы преобразования координат: $x^a = x^a(x'^a)$, $x^n = x'^n + x^n(x'^a)$.

Внутренней линейной связностью ∇ [15] на почти контактном метрическом многообразии называется отображение $\nabla : \Gamma(D) \times \Gamma(D) \rightarrow \Gamma(D)$, удовлетворяющее следующим условиям:

- 1) $\nabla_{f_1 X + f_2 Y} = f_1 \nabla_X + f_2 \nabla_Y$,
- 2) $\nabla_X f Y = (Xf)Y + f \nabla_X Y$,
- 3) $\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$,

где $\Gamma(D)$ – модуль допустимых векторных полей (векторных полей, в каждой точке принадлежащих распределению D).

Пусть $\tilde{\nabla}$ связность Леви – Чивиты и $\tilde{\Gamma}_{jk}^i$ – ее коэффициенты. Воспользовавшись равенством

$$\Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2} g^{km} (\vec{e}_i g_{jk} + \vec{e}_j g_{ik} - \vec{e}_k g_{ij} + \Omega_{kj}^l g_{li} + \Omega_{ki}^l g_{lj}) + \Omega_{ij}^m,$$

где $[\vec{e}_i, \vec{e}_j] = \Omega_{ij}^m \vec{e}_k$, убеждаемся в справедливости следующего предложения [15].

Предложение 1. Коэффициенты $\tilde{\Gamma}_{jk}^i$ связности Леви – Чивиты почти контактного метрического многообразия в адаптированных координатах имеют вид:

$$\tilde{\Gamma}_{ab}^c = \Gamma_{ab}^c, \tilde{\Gamma}_{ab}^n = \omega_{ba} - C_{ab}, \tilde{\Gamma}_{an}^b = \tilde{\Gamma}_{na}^b = C_a^b + \psi_a^b, \tilde{\Gamma}_{na}^n = -\partial_n \Gamma_a^n, \tilde{\Gamma}_{nn}^a = g^{ab} \partial_n \Gamma_b^n,$$

где $\Gamma_{bc}^a = \frac{1}{2} g^{ad} (\vec{e}_b g_{cd} + \vec{e}_c g_{bd} - \vec{e}_d g_{bc})$, $\psi_a^b = g^{bc} \omega_{ac}$, $C_{ab} = \frac{1}{2} \partial_n g_{ab}$, $C_a^b = g^{bc} C_{ac}$.

Здесь эндоморфизм $\psi : TM \rightarrow TM$ определяется из равенства $\omega(X, Y) = g(\psi X, Y)$. Выполняются также следующие соотношения: $C(X, Y) = \frac{1}{2} (L_{\vec{\xi}} g)(X, Y)$, $g(CX, Y) = C(X, Y)$.

Заметим, что если $\omega(\vec{\xi}, \cdot)$, выражения для коэффициентов $\tilde{\Gamma}_{jk}^i$ связности Леви – Чивиты почти контактного метрического многообразия в адаптированных координатах принимают более простой вид. Ненулевыми компонентами связности Леви – Чивиты остаются следующие компоненты:

$$\tilde{\Gamma}_{ab}^c = \Gamma_{ab}^c, \tilde{\Gamma}_{ab}^n = \omega_{ba} - C_{ab}, \tilde{\Gamma}_{an}^b = \tilde{\Gamma}_{na}^b = C_a^b + \psi_a^b.$$

Заметим, что для многообразия Кенмоцу $C_{ab} = g_{ab}$ и $C_a^b = \delta_a^b$.

Пусть ∇ – внутренняя линейная связность, ∇^N – связность, однозначно определяемая условиями:

- 1) $\nabla_X^N \in \Gamma(D)$, 2) $\nabla_X^N \vec{\xi} = 0$, 3) $\nabla_X^N Y = [\vec{\xi}, Y] + NY$, 4) $\nabla_Y^N Z = \nabla_Y Z$, $X \in \Gamma(TM)$, $Y, Z \in \Gamma(D)$.

На протяжении всей работы будем полагать, что кручение $T(X, Y)$ внутренней линейной связности ∇ равно нулю:

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - P[X, Y] = 0.$$

Непосредственно проверяется, что кручение $S(X, Y)$ связности ∇^N находится по формуле:

$$S(X, Y) = 2\omega(X, Y)\vec{\xi} + \eta(X)NY - \eta(Y)NX, X, Y, Z \in \Gamma(TM).$$

Здесь $\omega(X, Y) = d\eta(X, Y)$.

Если $\nabla_X g(Y, Z) = 0$, $X, Y, Z \in \Gamma(D)$, то будет справедливо следующее равенство:

$$\nabla_X^N Y = \tilde{\nabla}_X Y + (\tilde{\nabla}_X \eta)(Y)\vec{\xi} - \eta(Y)\tilde{\nabla}_X \vec{\xi} - \eta(X)(C + \psi - N)Y.$$

Непосредственно проверяется, что в этом случае в адаптированных координатах ненулевые компоненты G_{jk}^i связности ∇^N имеют вид $G_{bc}^a = \frac{1}{2} g^{ad} (\vec{e}_b g_{cd} + \vec{e}_c g_{bd} - \vec{e}_d g_{bc})$, $G_{na}^b = N_a^b$.

В случае внутренней линейной связности (не обязательно метрической) коэффициенты G_{bc}^a находятся из соотношения $\nabla_a \vec{e}_b = G_{ab}^c \vec{e}_c$.

Положим, $\tilde{S}(X, Y, Z) = g(S(X, Y), Z)$, $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$. В адаптированных координатах ненулевые компоненты тензора $\tilde{S}(X, Y, Z) = g(S(X, Y), Z)$, $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ будут иметь следующий вид:

$$\tilde{S}(\vec{e}_a, \vec{e}_b, \partial_n) = 2\omega_{ab}, \tilde{S}(\vec{e}_a, \partial_n, \vec{e}_b) = -g(N\vec{e}_a, \vec{e}_b), \tilde{S}(\partial_n, \vec{e}_a, \vec{e}_b) = g(N\vec{e}_a, \vec{e}_b).$$

Понятие квази-статистической структуры на римановом многообразии введено в работе [18]. Триплет (M, g, ∇) называется квази-статистической структурой, если выполняется следующее равенство [18]:

$$\nabla_X g(Y, Z) - \nabla_Y g(X, Z) + \tilde{S}(X, Y, Z) = 0, X, Y, Z \in \Gamma(TM).$$

Мы назовем триплет (M, g, ∇^N) субримановой квази-статистической структурой (СРКС-структурой), если имеет место равенство

$$\Phi(X, Y, Z) = \nabla_X^N g(Y, Z) - \nabla_Y^N g(X, Z) + \tilde{S}(X, Y, Z) - 2\omega(X, Y)\eta(Z) = 0,$$

где $\tilde{S}(X, Y, Z) = g(S(X, Y), Z)$, $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$, $\omega = d\eta$. При этом будем полагать, что кручение внутренней связности ∇ равно нулю. Заметим, что если (M, g, ∇^N) – субриманова квази-статистическая структура, то

$$\nabla_X g(Y, Z) - \nabla_Y g(X, Z) = 0, X, Y, Z \in \Gamma(D).$$

Можно констатировать следующее: если триплет (M, g, ∇^N) является субримановой квази-статистической структурой, то соответствующая внутренняя связность ∇ совместима с ограничением метрики g на распределении D .

Теорема 1. Триплет (M, g, ∇^N) является СРКС-структурой почти контактного метрического многообразия M тогда и только тогда, когда $N = 2C$ и $\nabla_X g(Y, Z) - \nabla_Y g(X, Z) = 0$, $X, Y, Z \in \Gamma(D)$.

Доказательство. Перепишем равенство

$$\nabla_X^N g(Y, Z) - \nabla_Y^N g(X, Z) + \tilde{S}(X, Y, Z) - 2\omega(X, Y)\eta(Z) = 0, X, Y, Z \in \Gamma(TM)$$

в адаптированных координатах.

Если $X = \partial_n$, $X = \vec{e}_b$, $X = \vec{e}_c$, то получаем: $\nabla_n^N g(\vec{e}_b, \vec{e}_c) + g(N\vec{e}_b, \vec{e}_c) = 0$.

Отсюда в адаптированных координатах имеем:

$$\partial_n g_{bc} - N_b^d g_{da} - N_c^d g_{bd} + N_b^d g_{da} = 0.$$

Окончательно получается равенство $N_b^a = 2C_b^a$. Теорема доказана.

Пусть теперь (M, g, ∇^N) – СРКС-структура. Обращаясь к уравнению

$$\nabla_X^N g(Y, Z) - \nabla_Y^N g(X, Z) + \tilde{S}(X, Y, Z) - 2\omega(X, Y)\eta(Z) = 0,$$

получаем следующую модификацию теоремы 1:

Теорема 2. Триплет (M, g, ∇^N) в случае, когда ∇ – внутренняя метрическая связность, является субримановой квази-статистической структурой на неголономном многообразии Кенмоцу M тогда и только тогда, когда $N = 2\tilde{E}$, где $\tilde{E}X = X$, $\tilde{E}\vec{\xi} = 0$, $X \in \Gamma(D)$.

Таким образом, в адаптированных координатах ненулевые компоненты G_{jk}^i связности ∇^N в рассматриваемом случае имеют вид

$$G_{bc}^a = \frac{1}{2}g^{ad}(\vec{e}_b g_{cd} + \vec{e}_c g_{bd} - \vec{e}_d g_{bc}), G_{na}^b = 2\delta_b^a.$$

Пусть $\tilde{\nabla}^N$ – связность, сопряженная к связности ∇^N , входящей в СРКС-структуру (M, g, ∇^N) :

$$Xg(Y, Z) = g(\nabla_X^N Y, Z) + g(Y, \tilde{\nabla}_X^N Z).$$

Найдем компоненты \tilde{G}_{jk}^i связности $\tilde{\nabla}^N$ в адаптированных координатах. Полагая $X = \vec{e}_a$, $Y = \vec{e}_b$, $Z = \vec{e}_c$, получаем $\tilde{G}_{bc}^a = G_{bc}^a$.

В случае, когда $X = \partial_n$, $X = \vec{e}_b$, $X = \vec{e}_c$, имеем: $\tilde{G}_{na}^b = 0$.

Все остальные компоненты \tilde{G}_{jk}^i равны нулю.

Предложение 2. Ненулевые компоненты \tilde{G}_{jk}^i связности $\tilde{\nabla}^N$, сопряженной связности ∇^N , имеют вид: $\tilde{G}_{bc}^a = G_{bc}^a$. Или в случае метрической связности ∇ : $\tilde{G}_{bc}^a = \frac{1}{2}g^{ad}(\vec{e}_b g_{cd} + \vec{e}_c g_{bd} - \vec{e}_d g_{bc})$.

Тем самым установлено, что сопряженная связность к связности ∇^N также имеет строение N -связности с нулевым структурным эндоморфизмом N . Следующее утверждение является аналогом предложения 1 из работы [12].

Предложение 3. Пусть M – почти контактное метрическое многообразие и пусть Q – тензорное поле типа $(1,2)$, такое, что $g(Q(X, Z), Y) = g(X, Q(Y, Z))$. Тогда (M, g, ∇^N) – субриманова квази-статистическая структура тогда и только тогда, когда $(M, g, \dot{\nabla}^N = \nabla^N + Q)$ – субриманова квази-статистическая структура.

Доказательство. Воспользуемся равенствами, полученными в работе [12]:

$$\begin{aligned} \dot{S}(X, Y) &= S(X, Y) + Q(X, Y) - Q(Y, X), \\ \dot{\nabla}_X^N g(Y, Z) &= \nabla_X^N g(Y, Z) - g(Q(X, Y), Z) - g(Y, Q(X, Z)). \end{aligned}$$

Отсюда заключаем, что

$$\dot{\Phi}(X, Y, Z) = \Phi(X, Y, Z) + g(X, Q(Y, Z)) - g(Y, Q(X, Z)), X, Y, Z \in \Gamma(TM).$$

$$\text{Здесь: } \dot{\Phi}(X, Y, Z) = \dot{\nabla}_X^N g(Y, Z) - \dot{\nabla}_Y^N g(X, Z) + \dot{S}(X, Y, Z) - 2\omega(X, Y)\eta(Z) = 0.$$

Тем самым, предложение доказано.

Ниже приводится адаптированное к нашему случаю определение квази-полу-вейлевой структуры, впервые опубликованное в работе [12]. Пусть M – почти контактное метрическое многообразие. Триплет (M, g, ∇^N) называется квази-полу-вейлевой структурой, если выполняется следующее равенство:

$$\nabla_X^N g(Y, Z) + \eta(X)g(Y, Z) = \nabla_Y^N g(X, Z) + \eta(Y)g(X, Z) - \tilde{S}(X, Y, Z).$$

Перепишем последнее равенство в адаптированных координатах, имеем:

- 1) Если $X = \vec{e}_a, Y = \vec{e}_b, Z = \partial_n$, то отсюда следует, что $d\eta = 0$;
- 2) Если $X = \partial_n, Y = \vec{e}_b, Z = \vec{e}_c$, то получаем:

$$\nabla_n^N g(\vec{e}_a, \vec{e}_b) + g(\vec{e}_b, \vec{e}_c) = -g(N\vec{e}_b, \vec{e}_c).$$

Отсюда в адаптированных координатах имеем:

$$\partial_n g_{bc} - N_b^d g_{da} - N_c^d g_{bd} + g_{bc} = -N_b^d g_{da}.$$

Окончательно получается равенство

$$N_b^a = 2C_b^a + \delta_b^a.$$

Тем самым, имеет место следующая теорема:

Теорема 3. Триплет (M, g, ∇^N) является квази-полу-вейлевой структурой почти контактного метрического многообразия M тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

1. Распределение D многообразия M инволютивно;
2. Структурный эндоморфизм N имеет следующее строение:
 $N = 2C + \tilde{E}$, где $\tilde{E}X = X, \tilde{E}\tilde{\xi} = 0, X \in \Gamma(D)$.
3. Внутренняя связность ∇ совместима с ограничением метрики g на распределении D :

$$\nabla_X g(Y, Z) - \nabla_Y g(X, Z) = 0, X, Y, Z \in \Gamma(D).$$

Для того, чтобы отказаться от требования инволютивности распределения D многообразия M , уточним определение квази-полу-вейлевой структуры следующим образом. А именно, назовем триплет (M, g, ∇^N) субримановой квази-полу-вейлевой структурой, если выполняется следующее равенство:

$$\nabla_X^N g(Y, Z) + \eta(X)g(Y, Z) = \nabla_Y^N g(X, Z) + \eta(Y)g(X, Z) - \tilde{S}(X, Y, Z) + 2\omega(X, Y)\eta(Z), X, Y, Z \in \Gamma(TM).$$

Перепишем последнее равенство в адаптированных координатах.

Если $X = \partial_n, Y = \vec{e}_b, Z = \vec{e}_c$, то получаем:

$$\nabla_n^N g(\vec{e}_a, \vec{e}_b) + g(\vec{e}_b, \vec{e}_c) = -g(N\vec{e}_b, \vec{e}_c).$$

Отсюда в адаптированных координатах имеем:

$$\partial_n g_{bc} - N_b^d g_{da} - N_c^d g_{bd} + g_{bc} = -N_b^d g_{da}.$$

Окончательно получается равенство

$$N_b^a = 2C_b^a + \delta_b^a.$$

Имеет место следующая теорема:

Теорема 4. Триплет (M, g, ∇^N) является субримановой квази-полу-вейлевой структурой почти контактного метрического многообразия M тогда и только тогда, когда:

1. $N = 2C + \tilde{E}$, где $\tilde{E}X = X, \tilde{E}\tilde{\xi} = 0, X \in \Gamma(D)$;
2. $\nabla_X g(Y, Z) - \nabla_Y g(X, Z) = 0, X, Y, Z \in \Gamma(D)$.

Теорема 5, фиксирующая связи между понятиями субримановой квази-статистической структуры и субримановой квази-полу-вейлевой структуры почти контактного метрического многообразия, является следствием теорем 1, 4.

Теорема 5. Пусть связности ∇^N и $\nabla^{\dot{N}}$ являются продолжениями одной и той же внутренней связности ∇ почти контактного метрического многообразия M . Тогда триплет (M, g, ∇^N) является субримановой квази-статистической структурой тогда и только тогда, когда триплет $(M, g, \nabla^{\dot{N}})$ является субримановой квази-полу-вейлевой структурой, где $\dot{N} = N + \dot{E}$.

3. Заключение. Настоящая статья вносит дополнительный вклад в теорию N -связностей, используемых для развития и многочисленных приложений геометрии почти контактных метрических многообразий. Связность ∇^N , являющаяся продолжением внутренней связности ∇ посредством эндоморфизма \dot{N} , в определенном смысле органично соответствует идеям геометризации обширного класса задач теоретической физики. Еще предстоит по существу прояснить роль N -связностей в известной геометрической интерпретации движения заряженной частицы в объединенной теории гравитационных и электромагнитных взаимодействий [17].

Список литературы

1. Букушева А. В. 2021. К геометрии неголономных многообразий Кенмоцу. Известия Алтайского государственного университета, 1(117): 84–87. DOI: 10.14258/izvasu(2021)1-13
2. Букушева А. В. 2021. Неголономные многообразия Кенмоцу, оснащенные обобщенной связностью Танаки – Вебстера. Дифференциальная геометрия многообразий фигур, 52: 42–51. DOI: 10.5922/0321-4796-2020-52-5
3. Галаев С. В. 2019. Золотое сечение в геометрии η -Эйнштейновых субримановых многообразий с N -связностью. Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика, 51(4): 465–474. DOI 10.18413/2075-4639-2019-51-4-465-474
4. Галаев С. В. 2016. Геометрическая интерпретация тензора кривизны Вагнера для случая многообразия с контактной метрической структурой. Сибирский математический журнал, 57(3(337)): 632–640. DOI: 10.17377/smzh.2016.57.310
5. Галаев С. В. 2021. ∇^N -Эйнштейновы почти контактные метрические многообразия. Вестник Томского государственного университета. Математика и механика, 70: 5–15. DOI: 10.17223/19988621/70/1
6. Галаев С. В. 2015. Почти контактные метрические пространства с N -связностью. Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия. Математика. Механика. Информатика, 15(3): 258–263.
7. Галаев С. В. 2016. Обобщенный тензор кривизны Вагнера почти контактных метрических пространств. Чебышевский сборник, 17(3(59)): 53–63.
8. Морозова Е. А., Ченцов Н. Н. 1991. Естественная геометрия семейств вероятностных законов. Итоги науки и техн. ВИНТИ. Современ. пробл. матем. Фундам. направления, 83: 133–265.
9. Норден А. П. 1976. Пространства аффинной связности. М., Наука, 432.
10. Рылов А. А. 1994. Связности, совместимые с римановой метрикой, в теории статистических многообразий. Изв. вузов. Матем., 3: 62–64.
11. Степанов С. Е., Степанова Е. С., Шандра И. Г. 2007. Сопряженные связности на статистических многообразиях. Изв. вузов. Матем., 10: 90–98.
12. Agricola I., Ferreira A. C. 2014. Einstein manifolds with skew torsion. Quart. J. Math., 65: 717–741.
13. Blaga A.M., Nannicini A. 2022. On Statistical and Semi-Weyl Manifolds Admitting Torsion. Mathematics, 10(990). DOI 10.3390/math10060990
14. Falbel E., Gorodski C. 1995. On contact sub-riemannian symmetric spaces. Annales scientifiques de l’Ecole Normale Supérieure, 28(5): 571–589.
15. Galaev S.V. 2015. Intrinsic geometry of almost contact kahlerian manifolds. Acta Mathematica Academiae Paedagogicae Nyiregyhaziensis. 31(1): 35–46.
16. Kenmotsu K. 1972. A class of almost contact Riemannian manifolds. Tohoku Math. J., 24: 93–103.
17. Krym V. R. 1999. Equations of Geodesic for a Charged Particle in the Unified Theory of Gravitational and Electromagnetic Interactions, Teor. Mat. Fiz., 119(3): 811–820.

18. Kurose T. 2007. Statistical Manifolds Admitting Torsion. Geometry and Something; Fukuoka Univ.: Fukuoka-shi, Japan.
19. Lauritzen S. L. 1987. Statistical manifolds. Differential Geometry in Statistical Inferences; IMS Lecture Notes Monograph Series; Institute of Mathematical Statistics: Hayward, CA, USA, 10: 96–163.

References

1. Bukusheva A. V. 2021. K geometrii negolonomnyh mnogoobrazij Kenmocu [Geometry of nonholonomic Kenmotsu manifolds]. Izvestiya Altajskogo gosudarstvennogo universiteta, 1(117): 84–87. DOI: 10.14258/izvasu(2021)1-13
2. Bukusheva A. V. 2021. Negolonomnye mnogoobraziya Kenmocu, osnashchennye obobshchennoj svyaznost'yu Tanaki – Vebstera [Non-holonomic Kenmotsu manifolds equipped with generalized Tanaka-Webster connection]. Differencial'naya geometriya mnogoobrazij figur, 52: 42–51. DOI: 10.5922/0321-4796-2020-52-5
3. Galaev S. V. 2019. Zolotoe sechenie v geometrii η -Ejnshtejnovyh subrimanovyh mnogoobrazij s N –svyaznost'yu [Golden ration in geometry of η -Einstein sub-Riemannian manifolds with N -Connection]. Nauchnye vedomosti Belgorodskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Matematika. Fizika, 51(4): 465–474. DOI 10.18413/2075-4639-2019-51-4-465-474
4. Galaev S. V. 2016. Geometric interpretation of the Wagner curvature tensor in the case of a manifold with contact metric structure. Siberian Mathamatical journal, 57(3): 498–504. DOI: 10.1134/S0037446616030101
5. Galaev S. V. 2021. ∇^N -Ejnshtejnovy pochti kontaktnye metricheskie mnogoobraziya [∇^N -Einshein almost contact metric manifolds]. Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika, 70: 5–15. DOI: 10.17223/19988621/70/1
6. Galaev S. V. 2015. Pochti kontaktnye metricheskie prostranstva s N -svyaznost'yu [Almost contact metric spaces with N -connection]. Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya. Matematika. Mekhanika. Informatika, 15(3): 258–263.
7. Galaev S. V. 2016. Obobshchennyj tenzor krivizny Vagnera pochti kontaktnyh metriceskih prostranstv [Generalized Wagner's curvature tensor of almost contact metric spaces]. CHEbyshevskij sbornik, 17(3(59)): 53–63.
8. Morozova E. A., CHencov N. N. 1991. Estestvennaya geometriya semejstv veroyatnostnyh zakonov [Natural geometry of families of probabilistic laws]. Itogi nauki i tekhn. VINITI. Sovremen. probl. matem. Fundam. napravleniya, 83: 133–265.
9. Norden A. P. 1976. Prostranstva affinnnoj svyaznosti [Spaces of affine connection]. M., Nauka, 432.
10. Rylov A. A. 1994. Connections that are compatible with the metric, and statistical manifolds. Russian Mathematics, 38(3): 60–62 (in Russian).
11. Stepanov S. E., Stepanova E. S., SHandra I. G. 2007. Conjugate connections on statistical manifolds. Russian Mathematics, 51(10): 89–96 (in Russian).
12. Agricola I., Ferreira A. C. 2014. Einstein manifolds with skew torsion. Quart. J. Math., 65: 717–741.
13. Blaga A.M., Nannicini A. 2022. On Statistical and Semi-Weyl Manifolds Admitting Torsion. Mathematics, 10(990). DOI 10.3390/math10060990
14. Falbel E., Gorodski C. 1995. On contact sub-riemannian symmetric spaces. Annales scientifiques de l'Ecole Normale Superieure, 28(5): 571–589.
15. Galaev S.V. 2015. Intrinsic geometry of almost contact kahlerian manifolds. Acta Mathematica Academiae Paedagogicae Nyiregyhaziensis. 31(1): 35–46.
16. Kenmotsu K. 1972. A class of almost contact Riemannian manifolds. Tohoku Math. J., 24: 93–103.
17. Krym V. R. 1999. Equations of Geodesic for a Charged Particle in the Unified Theory of Gravitational and Electromagnetic Interactions, Teor. Mat. Fiz., 119(3): 811–820.
18. Kurose T. 2007. Statistical Manifolds Admitting Torsion. Geometry and Something; Fukuoka Univ.: Fukuoka-shi, Japan.

19. Lauritzen S. L. 1987. Statistical manifolds. Differential Geometry in Statistical Inferences; IMS Lecture Notes Monograph Series; Institute of Mathematical Statistics: Hayward, CA, USA, 10: 96–163.

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 27.09.2022

Поступила после рецензирования 08.11.2022

Принята к публикации 12.11.2022

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Букушева Алия Владимировна – кандидат педагогических наук, доцент, доцент кафедры геометрии, ФГБОУ ВО «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского».

ул. Астраханская, 83, Саратов, 410012, Россия

Галаев Сергей Васильевич – кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой геометрии, ФГБОУ ВО «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского»

ул. Астраханская, 83, Саратов, 410012, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Aliya Bukusheva – PhD, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Geometry, Saratov State University, Saratov, Russia

Sergei Galaev – PhD, Associate Professor, Head of the Department of Geometry, Saratov State University, Saratov, Russia


УДК 514.7

DOI 10.52575/2687-0959-2022-54-4-213-218

MSC 58A15

оригинальное исследование

ВНЕШНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ

С. А. Телкова 

(Статья представлена членом редакционной коллегии С. М. Ситником)

Воронежский институт МВД России,

Воронеж, 394065, Россия

E-mail: tsa76@inbox.ru

Аннотация. В работе рассматривается геометрия стохастических дифференциальных уравнений. На основе корреляционных соотношений для средних значений Винеровского процесса предлагается расширение распределения Картана. Несмотря на особенности, переплетающиеся независимые переменные, данное распределение допускает существование полей Ли и их лифты. Геометрическая постановка задачи вариационного исчисления предполагает использование распределения Картана в качестве неголономной связи и введения дифференциальной 1-формы импульса как множителя Лагранжа. На основе этого в работе получено уравнение Эйлера – Лагранжа, реализующее уравнение Ито как экстремаль некоторого функционала, а также система уравнений Якоби в гамильтоновой форме.

Ключевые слова: распределение Картана, дифференциальное уравнение Ито, уравнение Эйлера – Лагранжа

Для цитирования: Телкова С. А. 2022. Внешние дифференциальные системы стохастической динамики. Прикладная математика & Физика, 54(4): 213–218. DOI 10.52575/2687-0959-2022-54-4-213-218

EXTERIOR DIFFERENTIAL SYSTEMS OF STOCHASTIC DYNAMIC

Svetlana Telkova 

(Article submitted by a member of the editorial board S. M. Sitnik)

Voronezh Institute of the Ministry of the Interior of Russia,

Voronezh, 394065, Russia

E-mail: tsa76@inbox.ru

Received November, 16, 2022

Abstract. In article geometry of stochastic differential equations is considered. Based correlation relations for the mean of the Wiener process an extension of the Cartan distributions is proposed. In spite of features intertwining independent variables this distribution admits existence of Lie's fields and their lifts. Geometric formulation of problem of the variations calculus involves the Cartan distributions as nonholonomic connection and introduction of a differential 1-form of momentum as the Lagrange multiplier. On the basis of this the Euler – Lagrange equation that realizing the Ito equation as an extremal of some functional was obtained in the work, as well as the system of Jacobi equations in Hamiltonian form.

Keywords: Cartan Distributions, Ito Equation, Euler – Lagrange equation

For citation: Telkova S. 2022. Exterior Differential Systems of stochastic Dynamic. Applied Mathematics & Physics, 54(4): 213–218 (in Russian). DOI 10.52575/2687-0959-2022-54-4-213-218

1. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений как подмногообразие Σ в расслоении джетов $J^n(\pi): E \rightarrow M$, определяемое уравнениями

$$F(x, y, p_{00}, p_{10}, p_{01}, p_{20}, p_{11}, p_{02}) = 0,$$

где $x, y \in M \subset R$, $u = p_0 \in U \subset R$, $p_i \in J^i(\pi) \subset R^n$, $E = M \times U$. В работе рассматривается аксиоматический подход к исследованию геометрии стохастических дифференциальных уравнений. Как и любое дифференциальное уравнение оно описывает струю в пространстве джетов $J^1(2, 1) = J^1(R^2, R)$, с локальными координатами $(x, y, u, u_t, u_y, u_{yy})$, где расширение расслоения до вторых производных (u_{yy}) является следствием корреляционных соотношений для средних Винеровского процесса [4]

$$\langle dy \rangle = 0, \quad \langle dy^2 \rangle = \langle dx \rangle.$$

С каждым таким многообразием джетов ассоциировано каноническое подрасслоение

$$\begin{aligned} W^* &\subset T^*(J^k(R, M)), \\ W^* &= \text{span}(\theta^1, \theta^2, \dots, \theta^m). \end{aligned}$$

Последние соотношения позволяют ввести распределение Картана для СДУ в виде [1]

$$\theta = du - \left(u_x + \frac{1}{2} u_{yy} \right) dx - u_y dy. \quad (1)$$

Как и в классическом случае, W^* можно определить бескоординатным способом, задавая вложение

$$J^k(R, M) \subset J^1(R, J^1(R, J^1(R, \dots))).$$

Например, в случае $k = 2$ подрасслоение $W^* \subset T^*(J^2(R, M))$ будет индуцировано из канонического подрасслоения в $T^*(J^1(R, J^1(R, M)))$.

Определение 1.1. [2] Градуированный идеал $I = \bigoplus_{q \geq 0} I^q$ во внешней алгебре $\Lambda^*(X) = \bigoplus_{q \geq 0} \Lambda^q(X)$ форм класса C^∞ на многообразии X , обладающий свойствами

$$dI \subset I,$$

будем называть **дифференциальным идеалом**.

Таким образом, для любых

$$\begin{aligned} \omega &= \sum \omega^k \in I, \\ \omega^k &\in \Lambda^k(X), \\ \nu &\in \Lambda^*(X) \end{aligned}$$

будем иметь

$$\omega^k \in I, \quad \omega \wedge \nu \in I, \quad d\omega \in I.$$

Для любого подмножества $\Sigma \subset \Lambda^*(X)$ обозначим через $\{\Sigma\}$ **алгебраический идеал**, порожденный множеством Σ . В нашем случае

$$\{\Sigma\} = \{\theta^k\}.$$

Таким образом, если $d\Sigma$ – множество форм $d\omega$ для $\omega \in \Sigma$, то дифференциальный идеал, порожденный Σ , – это $\{\Sigma, d\Sigma\}$. Тогда для 1-форм распределения Картана

$$I = \{\Sigma, d\Sigma\} = \{\theta, d\theta\}$$

пфаффовым дифференциальным идеалом.

Пфаффов дифференциальный идеал $\{\theta, d\theta\}$ называется вполне интегрируемым, если

$$d\theta \in \{\theta\} \quad \text{или} \quad d\theta = 0 \text{ mod } \{\theta\}.$$

2. Поскольку 2-форма $d\theta \neq \theta_1 \wedge \theta$ – по теореме Фробениуса распределение не интегрируемо. Несмотря на особенности, переплетающие независимые переменные, данное распределение $J^k(\pi)$ допускает существование полей Ли и их поднятие в $J^{k+1}(\pi)$. Для этого рассмотрим однопараметрическую группу преобразований, действующую в пространстве детерминированной и стохастической независимых переменных и одной зависимой переменной:

$$\begin{aligned} x' &= f(x, w, u, a), \\ w' &= h(x, w, u, a), \\ u' &= \varphi(x, w, u, a). \end{aligned}$$

Инфинитезимальный оператор группы \mathbf{G} есть [3]

$$\mathbf{x} = \xi^x \frac{\partial}{\partial x} + \xi^y \frac{\partial}{\partial y} + \eta \frac{\partial}{\partial u},$$

где

$$\xi^x = \left. \frac{\partial f}{\partial a} \right|_{a=0}, \quad \xi^y = \left. \frac{\partial h}{\partial a} \right|_{a=0}, \quad \eta = \left. \frac{\partial \varphi}{\partial a} \right|_{a=0}.$$

Найдем первое продолжение группы \mathbf{G} :

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x} + \zeta^x \frac{\partial}{\partial u_x} + \zeta^w \frac{\partial}{\partial u_w},$$

где $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$, $u_y = \frac{\partial u}{\partial y}$, а действие группы на эти переменные записывается как

$$\begin{aligned} u'_x &= \psi_x(x, y, u, u_x, u_y, a), \\ u'_y &= \psi_y(x, y, u, u_x, u_y, a). \end{aligned}$$

Дополнительные координаты $\zeta^x = \left. \frac{\partial \psi_x}{\partial a} \right|_{a=0}$, $\zeta^y = \left. \frac{\partial \psi_y}{\partial a} \right|_{a=0}$ будем искать, используя формулу Ито для стохастического распределения Картана (1):

$$\begin{aligned} \theta &= du - \left(u_x + \frac{1}{2} u_{ww} \right) dx - u_w dw, \\ \theta_x &= du_x - \left(u_{xx} + \frac{1}{2} u_{xww} \right) dx - u_{xw} dw, \\ \theta_w &= du_w - \left(u_{wx} + \frac{1}{2} u_{www} \right) dx - u_{ww} dw. \end{aligned}$$

Появление дифференциалов требует также задания правил действия продолженной группы \mathbf{G}_1 на них

$$\begin{aligned} dx' &= \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial u} du, \\ dw' &= \left(\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right) dx + \frac{\partial h}{\partial y} dy + \frac{\partial h}{\partial u} du, \\ du' &= \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial u} du \end{aligned}$$

в пространстве переменных $(x, y, u, u_x, u_y, dx, dy, du, a)$.

Зададим инфинитезимальный оператор

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \bar{\xi}^x \frac{\partial}{\partial dx} + \bar{\xi}^y \frac{\partial}{\partial dy} + \bar{\eta} \frac{\partial}{\partial du}.$$

Здесь

$$\begin{aligned} \bar{\xi}^x &= \left. \frac{\partial dx'}{\partial a} \right|_{a=0} = \left(\frac{\partial \xi^x}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \xi^x}{\partial w^2} \right) dx + \frac{\partial \xi^x}{\partial y} dy + \frac{\partial \xi^x}{\partial u} du, \\ \bar{\xi}^y &= \left. \frac{\partial dy'}{\partial a} \right|_{a=0} = \left(\frac{\partial \xi^y}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \xi^y}{\partial y^2} \right) dx + \frac{\partial \xi^y}{\partial y} dy + \frac{\partial \xi^y}{\partial u} du, \\ \bar{\eta} &= \left. \frac{\partial du'}{\partial a} \right|_{a=0} = \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} \right) dx + \frac{\partial \eta}{\partial y} dy + \frac{\partial \eta}{\partial u} du. \end{aligned}$$

Записывая критерий инвариантности в виде

$$\mathbf{x}\theta = \bar{\eta} - \left(u_x + \frac{1}{2} u_{ww} \right) \bar{\xi}^x - u_w \bar{\xi}^w - \zeta^x dx - \zeta^w dw = 0.$$

получим

$$\begin{aligned} \zeta^x &= \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial w^2} + u_x \frac{\partial \eta}{\partial u} \right) \\ &\quad - \left(u_x + \frac{1}{2} u_{ww} \right) \left(\frac{\partial \xi^x}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \xi^x}{\partial w^2} + u_x \frac{\partial \xi^x}{\partial u} \right) \\ &\quad - u_w \left(\frac{\partial \xi^w}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \xi^w}{\partial w^2} + u_x \frac{\partial \xi^w}{\partial u} \right) \\ \zeta^w &= \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial w^2} + u_w \frac{\partial \eta}{\partial u} \right) \\ &\quad - \left(u_x + \frac{1}{2} u_{ww} \right) \left(\frac{\partial \xi^x}{\partial x} + u_w \frac{\partial \xi^x}{\partial u} \right) \\ &\quad - u_w \left(\frac{\partial \xi^w}{\partial x} + u_w \frac{\partial \xi^w}{\partial u} \right) \end{aligned}$$

Другими словами, инфинитезимальный сдвиг вдоль векторного поля \mathbf{x} оставляет инвариантной форму Картана, т. е. производная Ли формы Картана по векторному полю \mathbf{x} есть ноль [1]. Последнее обстоятельство позволяет использовать стандартные алгоритмы построения инвариантов СДУ для нахождения частных решений, а также находить классы уравнений, инвариантных относительно выделенных групп инфинитезимальных преобразований. Например, векторное поле

$$\mathbf{x} = x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} + \left(u_x + \frac{1}{2} u_{yy} \right) \frac{\partial}{\partial u_y} - u_y \frac{\partial}{\partial u_x}$$

сохраняет распределение Картана. Действительно, непосредственной проверкой можно показать, что производная Ли формы θ по векторному полю \mathbf{x} :

$$\mathcal{L}_X \theta = \mathbf{x} \lrcorner d\theta + d\mathbf{x} \lrcorner \theta = 0,$$

поэтому оно является контактным преобразованием.

3. Внешняя дифференциальная система (I, ω) на многообразии X задается дифференциальным идеалом $I \subset \Lambda^*(X)$ и формой $\omega \in \Lambda^n(X)$.

Произвольный интегральный элемент системы (I, ω) задается парой (p, E) , состоящей из точки $p \in X$ и n -мерной плоскости $E \subset T_p(X)$, удовлетворяющей условиям:

$$\begin{aligned} \theta|E &= 0, \quad \forall \theta \in I, \\ \omega|E &\neq 0. \end{aligned}$$

Данная запись означает, что в кокасательном расслоении над X задана двухступенчатая фильтрация подрасслоениями

$$W^* \subset L^* \subset T^*(X), \quad \text{rank } L^*/W^* = 1.$$

Здесь, $\text{rank } \Omega$ – ранг формы, т. е. число n такое, что

$$\begin{aligned} \Omega^n &\neq 0, \\ \Omega^{n+1} &= 0. \end{aligned}$$

Пример. На многообразии $X = J^1(R^2, M)$ в локальных координатах система (I, ω) имеет вид

$$\begin{cases} \theta = 0, \\ \omega = dx \wedge dy \neq 0, \end{cases}$$

где первое уравнение имеет смысл неголономной связи, налагаемой на интегральное многообразие, а второе уравнение есть условие трансверсальности, налагаемое на решения. Интегральные многообразия этой дифференциальной системы задаются 1-струями параметризованных иммерсированных кривых в M . Другими словами, первыми интегралами системы (I, ω) являются 1-струи кривых в M [5].

Теперь будем искать на некотором многообразии X пфаффову систему (J, ω) , интегральные многообразия N которой находятся в естественном взаимно-однозначном соответствии с интегральными многообразиями системы (I, ω) , удовлетворяющими уравнениям Эйлера – Лагранжа для функционала

$$\Phi = \int f \varphi,$$

где $\varphi \in \Lambda^n(X)$.

Поставленную вариационную задачу, ассоциированную с функционалом Φ , обозначим через $(J, \omega; \varphi)$. Геометрическая постановка задачи вариационного исчисления

$$\mathbf{v} \lrcorner d(Ldx \wedge dy + \Lambda \wedge \theta) = 0$$

предполагает использование распределения Картана θ в качестве неголономной связи и введения дифференциальной 1-формы импульса

$$\Lambda = \lambda dx + \mu dy$$

как множителя Лагранжа. Здесь L – плотность лагранжиана, а $\omega = Ldx \wedge dy \neq 0$ – условие трансверсальности. Используя в качестве векторных полей

$$\mathbf{v} = \partial_\theta, \quad \mathbf{v} = \partial_{u_x}, \quad \mathbf{v} = \partial_{u_y}$$

получим систему

$$\begin{aligned} L_u dx \wedge dy &= -d\lambda \wedge dx - d\mu \wedge dy, \\ \lambda &= L_{u_y}, \\ \mu &= -\frac{L_{u_x}}{1 + \frac{1}{2} \frac{du_{yy}}{du_x}}. \end{aligned}$$

Тогда уравнения Эйлера – Лагранжа поставленной вариационной задачи принимают вид

$$L_u = \frac{d}{dx} \left(\frac{L_{u_x}}{1 + \frac{1}{2} \frac{du_{yy}}{du_x}} \right) + \frac{d}{dy} (L_{u_y}).$$

4. Рассмотрим теперь гамильтонов вариант данной задачи. Для этого приведем форму

$$\psi = L dx \wedge dy + \Lambda \wedge \theta$$

к нормальному виду Пфаффа – Дарбу

$$\psi = -H\omega + \Lambda \wedge du,$$

с гамильтонианом

$$H = -L + \frac{u_x + u_{xx}/2}{1 + \frac{1}{2} \frac{du_{yy}}{du_x}} L_{u_x} + u_y L_{u_y}.$$

В классическом случае гамильтонианом H , ассоциированным с вариационной задачей $(J, \omega; \varphi)$, называется ограничение на пространство импульсов $Y \subset T^*(X)$ функции

$$H = -L + \mu u_x + \lambda u_y.$$

Дифференцируя форму Пфаффа – Дарбу, получим структурные уравнения

$$\Psi = d\psi,$$

или

$$\Psi = -\frac{\partial H}{\partial u} du \wedge \omega - \frac{\partial H}{\partial \lambda} d\lambda \wedge \omega - \frac{\partial H}{\partial \mu} d\mu \wedge \omega + d\lambda \wedge dx \wedge du + d\mu \wedge dy \wedge du.$$

Ограничение этой формы на поля $\mathbf{v} = \partial_u, \mathbf{v} = \partial_\lambda, \mathbf{v} = \partial_\mu$ дает систему Картана $C(\Psi_Y)$, которая порождается уравнениями Пфаффа

$$\begin{aligned} \eta_1 &= -H_u \omega + d\lambda \wedge dx + d\mu \wedge dy, \\ \eta_2 &= -H_\lambda \omega + dx \wedge du, \\ \eta_3 &= -H_\mu \omega + dy \wedge du. \end{aligned}$$

Заметим, что векторное поле $\mathbf{v} = \partial_u$ является полем Рибба:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \lrcorner \psi &= \Lambda, \\ \mathbf{v} \lrcorner \Psi &= \mathbf{v} \lrcorner d\psi = 0. \end{aligned}$$

Вместе с условиями трансверсальности $\omega \neq 0$ уравнения Пфаффа образуют систему Эйлера – Лагранжа (J, ω) на пространстве импульсов Y , а ее решения находятся из динамических уравнений Гамильтона:

$$\begin{aligned} \frac{dH}{du} &= -\frac{d\lambda}{dy} + \frac{d\mu}{dx}, \\ \frac{dH}{d\lambda} &= \frac{d\mu}{dy}, \\ \frac{dH}{d\mu} &= -\frac{d\lambda}{dx}. \end{aligned}$$

Можно видеть, что множители Лагранжа (λ, μ) здесь приобретают смысл обобщенных импульсов.

Определение 2. Пусть $N \subset X$ – интегральное многообразие системы (I, ω) с ассоциированной системой Эйлера – Лагранжа (J, ω) на пространстве импульсов Y . Тогда для интегрального многообразия $\Gamma \subset Y$ касательное пространство $T_\Gamma(J, \omega)$ – является пространством якобиевых векторных полей.

Рассматривая нормальное векторное поле

$$\mathbf{x} = U \frac{\partial}{\partial u} + V \frac{\partial}{\partial \lambda} + W \frac{\partial}{\partial \mu},$$

из условия $\mathcal{L}_x \eta = 0$ получим систему уравнений Якоби в гамильтоновой форме

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - \frac{\partial V}{\partial y} &= U \frac{\partial^2 H}{\partial u^2} + V \frac{\partial^2 H}{\partial u \partial \lambda} + W \frac{\partial^2 H}{\partial u \partial \mu}, \\ \frac{\partial U}{\partial y} &= - \left(U \frac{\partial^2 H}{\partial u \partial \lambda} + V \frac{\partial^2 H}{\partial \lambda^2} + W \frac{\partial^2 H}{\partial \lambda \partial \mu} \right), \\ \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} &= - \left(U \frac{\partial^2 H}{\partial \lambda \partial \mu} + V \frac{\partial^2 H}{\partial \lambda \partial \mu} + W \frac{\partial^2 H}{\partial \mu^2} \right). \end{aligned}$$

Список литературы

1. Виноградов А. М., Красильщик И. С. (ред.) 1997. Симметрии и законы сохранения уравнений математической физики. М., Факториал, 368.
2. Гриффитс Ф. 1986. Внешние дифференциальные системы и вариационное исчисление. М., Мир, 360.
3. Ибрагимов Н. Х. 1983. Группы преобразований в математической физике. М., Наука, 280.
4. Оксендаль Б. 2003. Стохастические дифференциальные уравнения. М., Мир, 408.
5. Тихонов А. Н., Самарский А. А. 1999. Уравнения математической физики. М.: Изд-во МГУ, 408.

References

1. Vinogradov A.M., Krasilshchik I.S. (eds.) 1999. Symmetries and Conservation Laws for Differential Equations of Mathematical Physics. Providence, Amer. Math. Soc., 333.
2. Griffiths P. A. 1983. Exterior Differential Systems and the Calculus of Variations. Boston, Birkhauser, 339.
3. Ibragimov N.H. 1985. Transformation Groups Applied to Mathematical Physics. Dordrecht, Springer, 394.
4. Oksendal B. 2003. Stochastic Differential Equations. Heidelberg, Springer, 379.
5. Tikhonov A. N., Samarsky A. A. 1999. Equations of mathematical physics. M.: Publishing House of Moscow State University, 408.

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 01.10.2022

Поступила после рецензирования 12.11.2022

Принята к публикации 16.11.2022

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Телкова Светлана Анатольевна – кандидат педагогических наук, доцент кафедры математики и моделирования систем, Воронежский институт МВД России
проспект Патриотов, 53, Воронеж, 394065, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Svetlana Telkova – PhD, Assistant Professor of the Chair of Higher Mathematics, Voronezh Institute of the Ministry of the Interior of Russia, Voronezh, Russia

УДК 539.421

DOI 10.52575/2687-0959-2022-54-4-219-241

MSC 74R10, 74R20

оригинальное исследование

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СО СЖАТИЯМИ

А. Л. Тасевич 

(Статья представлена членом редакционной коллегии В. Б. Васильевым)

Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН,

Москва, 119333, Россия

Российский университет дружбы народов,

Москва, 117198, Россия

E-mail: atasevich@gmail.com

Аннотация. Статья посвящена исследованию функционально-дифференциального уравнения эллиптического типа, содержащего в старшей части преобразование сжатия аргументов искомой функции, причем по разным переменным сжатие различается. Представлен ряд необходимых и достаточных условий выполнения неравенства типа Гординга, аналога условия сильной эллиптичности, в явном виде. Исследована фредгольмова разрешимость и структура спектра первой краевой задачи в пространствах Соболева. Даны достаточные условия разрешимости уравнения в весовых пространствах Кондратьева на плоскости. В ходе доказательства получены достаточные условия обратимости конечно-разностного оператора с переменными коэффициентами на прямой. Приведены примеры, иллюстрирующие полученные результаты.

Ключевые слова: эллиптические уравнения, весовые пространства, функционально-дифференциальные уравнения, оператор взвешенного сдвига

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 20-01-00288.

Для цитирования: Тасевич А. Л. 2022. Об одном эллиптическом функционально-дифференциальном уравнении со сжатием. Прикладная математика & Физика, 54(4): 219–241. DOI 10.52575/2687-0959-2022-54-4-219-241

ON A CLASS OF ELLIPTIC FUNCTIONAL DIFFERENTIAL EQUATION WITH CONTRACTIONS

Alla Tasevich

(Article submitted by a member of the editorial board V. B. Vasilyev)

Federal research center «Computer Science and Control» of Russian Academy of Sciences,

Moscow, 119333, Russia

RUDN University,

Moscow, 117198, Russia

E-mail: atasevich@gmail.com

Received November, 26, 2022

Abstract. The article is devoted to the study of one elliptic-type functional differential equation that contains in its upper part the contraction transformation of unknown function arguments herewith contractions are different for every argument, i.e. contractions are orthotropic. Some necessary and sufficient conditions of strong ellipticity in the terms of the Garding-type inequality fulfilment were presented in explicit form. Thus, a new class of equations satisfying the Kato square root problem was obtained. The first boundary valued problem for the strongly elliptic functional differential equation with contractions was considered in the domain containing the origin — the fixed point of contraction transformation, and star-shaped regarding it. The Fredholm solvability and spectrum structure in the Sobolev spaces were studied. Further the sufficient conditions for solvability of the equation considered in the Kondratiev weighted spaces on the plane were obtained. It is remarkable that the conditions depend on the weight parameter. In the course of the proof, sufficient conditions for the invertibility of a finite-difference operator with variable coefficients on a line are obtained. Some concrete examples illustrating the obtained results were presented.

Key words: Elliptic Equations, Weighted Spaces, Functional Differential Equations, Weighted Shift Operator

Acknowledgements: The work is supported by Russian Foundation of Basic Research, project No. 20-01-00288.

For citation: Tasevich A. 2022. On an elliptic functional differential equation with contractions. Applied Mathematics & Physics, 54(4): 219–241 (in Russian). DOI 10.52575/2687-0959-2022-54-4-219-241

1. Введение. Первая часть работы посвящена первой краевой задаче

$$A_R u \equiv - \sum_{i,j=1}^2 (R_{ij} u_{x_i})_{x_j} = f(x_1, x_2), \quad x = (x_1, x_2) \in B, \quad u|_{\partial B} = 0 \quad (1)$$

в ограниченной области $B \subset \mathbb{R}^2$. Здесь

$$R_{ij} v(x_1, x_2) = a_{ij0} v(x_1, x_2) + a_{ij1} v(q^{-1} x_1, p x_2) + a_{ij,-1} v(q x_1, p^{-1} x_2),$$

параметры сжатия $p, q > 1$, коэффициенты $a_{ij0}, a_{ij,\pm 1} \in \mathbb{C}$ ($i, j = 1, 2$), а комплекснозначная функция $f(x)$ принадлежит пространству Лебега $L_2(B)$.

Освещается исследование известного неравенства

$$\operatorname{Re}(A_R u, u)_{L_2(B)} \geq c_1 \|u\|_{H^1(B)}^2 - c_2 \|u\|_{L_2(B)}^2 \quad (\forall u \in C_0^\infty(B)), \quad (2)$$

называемого неравенством типа Гординга, а также условие коэрцитивности оператора A_R . Если положить $a_{ij,\pm 1} = 0$, то оператор A_R становится линейным дифференциальным оператором второго порядка с постоянными коэффициентами, и в этом случае оценка (2) равносильна хорошо известному условию сильной эллиптичности:

$$\operatorname{Re} \sum_{i,j=1}^2 a_{ij0} \xi_i \xi_j \geq c_1 |\xi|^2.$$

Вопрос, связанный с выполнением неравенства (2) для дифференциальных операторов, включая уравнения высокого порядка, системы уравнений и переменные коэффициенты, был решен в работах [4, 22], а для дифференциально-разностных операторов в ограниченных областях, а также в цилиндре — в работе [25, 5, 6]. Функционально-дифференциальные уравнения, содержащие в старшей части сжатия и растяжения аргументов неизвестной функции, рассматривались в работах [10, 11, 12, 13], где предполагалось, что коэффициент сжатия (растяжения) по всем переменным одинаков,

$$v(x_1, x_2) \mapsto v(q x_1, q x_2). \quad (3)$$

Для такого класса уравнений были получены при постоянных коэффициентах необходимые и достаточные условия в алгебраической форме выполнения неравенства типа Гординга, а при переменных коэффициентах — ряд необходимых условий и достаточных условий.

Хорошо известно, что свойства краевой задачи для функционально-дифференциального уравнения во многом определяются структурой орбит точек области под действием группы, порожденной присутствующими в уравнении преобразованиями. Для преобразований вида (3) орбиты располагаются на лучах, выходящих из начала координат. Объективная трудность в изучении уравнений со сжатиями (растяжениями), не позволяющая в полной мере воспользоваться существующей теорией нелокальных эллиптических задач, состоит в том, что все орбиты сгущаются в одной точке — начале координат.

У функционально-дифференциальных уравнений, содержащих сжатия по одним переменным и растяжения по другим,

$$v(x_1, x_2) \mapsto v(q^{-1} x_1, p x_2), \quad (4)$$

орбиты лежат на “гиперболах” $|x_1|^{\ln p} |x_2|^{\ln q} = \text{const}$, что определяет основное отличие задач с ортотропными сжатиями вида (4) от задач с изотропными сжатиями вида (3).

Показано, что неравенство типа Гординга в случае уравнения (1) сводится к проверке положительной определенности действующего в $L_2(\mathbb{R})$ самосопряженного разностного оператора

$$z(t) \mapsto z(t) + g(t)z(t-1) + \bar{g}(t+1)z(t+1)$$

с гладким коэффициентом $g(t)$, имеющим конечные пределы на $\pm\infty$. В то же время, доказательство однозначной разрешимости задачи (1), дискретности, полуограниченности и секториальной структуры ее спектра в $L_2(B)$ при условии выполнения (2) абсолютно стандартно.

Более того, рассматриваемая задача дополняет класс задач, для которых справедлива известная гипотеза Т. Като о квадратном корне из максимально аккретивного оператора, см. [23], где было показано, что эта гипотеза справедлива для сильно эллиптических дифференциальных операторов в ограниченной области, если коэффициенты операторов и граница области достаточно гладкие. После построения в [24] примера регулярно аккретивного оператора, для которого гипотеза Като не выполняется, дальнейшие исследования были посвящены расширению множества операторов, для которых она верна. Важным шагом стало доказательство гипотезы Като для сильно эллиптических дифференциальных операторов с измеримыми ограниченными коэффициентами [21]. Одновременно и независимо от этой работы

для некоторого класса сильно эллиптических дифференциально-разностных операторов было доказано утверждение, эквивалентное гипотезе Като [20]. В дальнейшем выполнение данной гипотезы для более широких классов сильно эллиптических функционально-дифференциальных операторов было доказано в [1, 18]. В [19] была изучена проблема Като для эллиптических дифференциально-разностных операторов второго порядка с вырождением в ограниченной области.

Во второй половине статьи приведены результаты о разрешимости уравнения из (1) в весовых пространствах $H_0^s(\mathbb{R}^2)$ ($f \in H_0^s(\mathbb{R}^2)$) на всей плоскости. Согласно определению В. А. Кондратьева [7], весовым пространством $H_0^s(\mathbb{R}^2)$ при целом неотрицательном s называется пополнение множества $C_0^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ по норме

$$\|u\|_{H_0^s(\mathbb{R}^2)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq s} \int_{\mathbb{R}^2} |x|^{2(-s+|\alpha|)} |D^\alpha u(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

В [8, Глава 2, параграф 1] показано, как при помощи преобразования Меллина по радиальной переменной и разложения в тригонометрический ряд Фурье по угловой координате это определение можно распространить на произвольный показатель $s \in \mathbb{R}$.

В. А. Кондратьевым весовые пространства такого типа были предложены для исследования разрешимости эллиптических задач в областях с угловыми или коническими особенностями. Позже оказалось удобным использовать те же пространства и при решении краевых задач для функционально-дифференциальных уравнений. Это вызвано существованием обобщенных решений, имеющих степенные особенности как на границе, так и внутри области. Наличие таких решений с особенностями в случае дифференциально-разностных уравнений продемонстрировано в [17, 26]. Для функционально-дифференциальных уравнений со сжатием эффект появления особенностей дополнительно связан с наличием в области неподвижной точки преобразования сжатия – начала координат. В [14] установлена разрешимость в шкале весовых пространств функционально-дифференциальных уравнений с изотропными сжатиями, т. е. одинаковыми сжатиями по всем переменным, и показано, как за счет выбора показателей пространства добиться однозначной разрешимости.

Исследование разрешимости в весовом пространстве состоит из трех частей. В первой части исходное уравнение приводится при помощи ряда преобразований к разностному уравнению на прямой

$$v(\tau) + \gamma_1(\tau)v(\tau - h) + \gamma_2(\tau)v(\tau - 2h) = g(\tau), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{5}$$

которое решается в пространстве $L_2(\mathbb{R})$.

Разрешимость уравнений вида (5), содержащих операторы взвешенного сдвига, исследовалась в работах многих авторов, в том числе [2, 3]. Однако необходимые и достаточные условия разрешимости уравнения вида (5), напрямую выраженные через коэффициенты γ_0, γ_1 и γ_2 , не были получены. Исследованию разрешимости разностных уравнений с переменными коэффициентами на прямой посвящена вторая часть работы. В ней показано, что основное влияние на разрешимость оказывают значения коэффициентов γ_0, γ_1 и γ_2 на $\pm\infty$.

В третьей части получены достаточные условия разрешимости в весовых пространствах рассматриваемого уравнения в явном виде. При этом в условиях фигурирует показатель веса, чье изменение имеет существенное влияние. Более подробные доказательства приведенных в статье утверждений можно найти в работах [15, 16, 27].

2. Сильная эллиптичность функционально-дифференциального оператора с ортотропными сжатиями. В работе через $H^1(B)$ обозначается пространство Соболева комплекснозначных функций, принадлежащих $L_2(B)$ вместе с обобщенными производными первого порядка, а через $\dot{H}^1(B)$ – замыкание множества $C_0^\infty(B)$ финитных бесконечно дифференцируемых функций в $H^1(B)$. Пространство $H^1(B)$ – гильбертово со скалярным произведением

$$(u, v)_{H^1(B)} = \int_B (u\bar{v} + u_{x_1}\bar{v}_{x_1} + u_{x_2}\bar{v}_{x_2}) dx.$$

Пространство $\dot{H}^1(B)$ можно отождествлять с подпространством функций из $H^1(\mathbb{R}^2)$, равных нулю вне B .

Зафиксировав числа $p > 1, q > 1$, введем ограниченный линейный оператор P в пространстве $L_2(\mathbb{R}^2)$ по формуле

$$Pu(x_1, x_2) = u(q^{-1}x_1, px_2).$$

Если же оператор P применяется к функциям, заданным в ограниченной области B , то считаем, что последние продолжены нулем вне B .

Легко вычислить, что

$$P^{-1}u(x_1, x_2) = u(qx_1, p^{-1}x_2), \quad P^* = qp^{-1}P^{-1}, \quad Px_1 = q^{-1}x_1P, \quad Px_2 = px_2P,$$

а в образах Фурье оператор P заменяется на P^* ,

$$\tilde{u}(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2)} u(x_1, x_2) dx_1 dx_2, \quad \widetilde{Pu}(\xi_1, \xi_2) = P^* u(\xi_1, \xi_2).$$

Спектр $\sigma(P)$ оператора $P : L_2(\mathbb{R}^2) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^2)$ лежит на окружности $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = \sqrt{q/p}\}$. Можно показать аналогично [10], что $\sigma(P)$ совпадает с указанной окружностью.

Если есть оператор $R = a_0 I + a_1 P + a_{-1} P^{-1}$ с комплексными коэффициентами $a_0, a_{\pm 1}$, то, обозначив через \bar{R} оператор с комплексно-сопряженными коэффициентами, $\bar{R} = \bar{a}_0 I + \bar{a}_1 P + \bar{a}_{-1} P^{-1}$, получаем, что \bar{R} при преобразовании Фурье переходит в сопряженный оператор R^* .

Неравенство (2) после интегрирования слева по частям и замены переменных $y = tx, t > 1$, переходит в неравенство

$$\operatorname{Re} \sum_{i,j=1}^2 (R_{ij} v_{y_i}, v_{y_j})_{L_2(tB)} \geq c_1 \|\nabla v\|_{L_2(tB)}^2 - (c_2 - c_1) t^{-2} \|v\|_{L_2(tB)}^2, \quad (6)$$

справедливое уже для произвольной функции $v \in C_0^\infty(tB)$, где tB есть исходная область в новых координатах.

Из (6) следует, что для произвольной функции $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ выполнено неравенство

$$\operatorname{Re} \sum_{i,j=1}^2 (R_{ij} u_{x_i}, u_{x_j})_{L_2(\mathbb{R}^2)} \geq c_1 \|\nabla u\|_{L_2(\mathbb{R}^2)}^2.$$

В силу плотности $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ в $H^1(\mathbb{R}^2)$ оно распространяется на все функции u из пространства $H^1(\mathbb{R}^2)$. Кроме того, заменяя в этом неравенстве функцию $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$ на комплексно-сопряженную функцию \bar{u} , приходим к

$$\operatorname{Re} \sum_{i,j=1}^2 (\bar{R}_{ij} u_{x_i}, u_{x_j})_{L_2(\mathbb{R}^2)} \geq c_1 \|\nabla u\|_{L_2(\mathbb{R}^2)}^2 \quad (\forall u \in H^1(\mathbb{R}^2)). \quad (7)$$

Применив в (7) преобразование Фурье, по теореме Планшереля получаем эквивалентное неравенство

$$\operatorname{Re} \sum_{i,j=1}^2 (R_{ij}^* \xi_i \tilde{u}, \xi_j \tilde{u})_{L_2(\mathbb{R}^2)} \geq c_1 \|\xi \tilde{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^2)}^2,$$

справедливое уже для всех функций $\tilde{u}(\xi)$ из пространства $L_2(\mathbb{R}^2)$, для которых конечен интеграл справа.

В левой части полученного неравенства введем новые обозначения:

$$2 \operatorname{Re} (R_{ij}^* \xi_i \tilde{u}, \xi_j \tilde{u})_{L_2(\mathbb{R}^2)} = (R'_i \xi_i \tilde{u}, \xi_i \tilde{u})_{L_2(\mathbb{R}^2)},$$

где самосопряженные операторы R'_1 и R'_2 определены по формулам

$$\begin{aligned} R'_1 &= R_{11} + R_{11}^* = 2\alpha_{10} I + p\alpha_{11} P + q\bar{\alpha}_{11} P^{-1}, \\ R'_2 &= R_{22} + R_{22}^* = 2\alpha_{20} I + q^{-1}\alpha_{21} P + p^{-1}\bar{\alpha}_{21} P^{-1} \end{aligned} \quad (8)$$

с коэффициентами

$$\alpha_{i0} = \operatorname{Re} a_{ii0} \quad (i = 1, 2), \quad \alpha_{11} = p^{-1} a_{111} + q^{-1} \bar{a}_{11,-1}, \quad \alpha_{21} = q a_{221} + p \bar{a}_{22,-1}. \quad (9)$$

Обозначая через

$$R = 2\beta_0 I + \beta_1 P + \bar{\beta}_1 P^{-1} \quad (10)$$

оператор с коэффициентами

$$\beta_0 = \operatorname{Re}(a_{120} + a_{210}), \quad \beta_1 = q a_{121} + q^{-1} \bar{a}_{12,-1} + p^{-1} a_{211} + p \bar{a}_{21,-1}, \quad (11)$$

будем иметь окончательно

$$2 \operatorname{Re} \sum_{i,j=1}^2 (R_{ij}^* \xi_i \tilde{u}, \xi_j \tilde{u})_{L_2(\mathbb{R}^2)} = ((\xi_1 R'_1 \xi_1 + \xi_2 R'_2 \xi_2 + R \xi_1 \xi_2) \tilde{u}, \tilde{u})_{L_2(\mathbb{R}^2)}.$$

Далее все условия будут выражаться через коэффициенты $\alpha_{i0}, \alpha_{i1}, \beta_0$ и β_1 .

Замечание 2.1. Отметим, что функции, обращающиеся в ноль во всех четвертях плоскости \mathbb{R}_ξ^2 , кроме одной, образуют инвариантное подпространство для функциональных операторов рассматриваемого класса. Поэтому достаточно проверить два неравенства

$$((\xi_1 R'_1 \xi_1 + \xi_2 R'_2 \xi_2 \pm R \xi_1 \xi_2) \tilde{u}, \tilde{u})_{L_2(Q)} \geq 2c_1 \|\xi | \tilde{u}\|_{L_2(Q)}^2$$

лишь на функциях \tilde{u} с носителями в первой четверти $Q = \{\xi \in \mathbb{R}^2 : \xi_1 > 0, \xi_2 > 0\}$.

Сформулируем промежуточный результат.

Лемма 2.1. Пусть область B содержит начало координат. Тогда неравенство (2) равносильно двум неравенствам

$$((\xi_1 R'_1 \xi_1 + \xi_2 R'_2 \xi_2 \pm R \xi_1 \xi_2) \tilde{u}, \tilde{u})_{L_2(Q)} \geq 2c_1 \|\xi | \tilde{u}\|_{L_2(Q)}^2 \quad (12)$$

на классе всех функций $\tilde{u} \in L_2(Q)$, для которых сходится стоящий справа в (12) интеграл, а операторы R'_1 , R'_2 и R заданы формулами (8)–(11).

Далее, основываясь на структуре орбит точек области под действием оператора ортотропного сжатия, введем новые координаты таким образом, что действие оператора будет проводиться вдоль новой координатной оси. Положим,

$$s_1 = \frac{2 \ln q}{\ln pq}, \quad s_2 = \frac{2 \ln p}{\ln pq} \quad (s_1 + s_2 = 2), \quad (13)$$

сделаем в интегралах из неравенства (12) замену переменных

$$\xi_1 = \rho t^{s_1}, \quad \xi_2 = \rho t^{-s_2}, \quad (14)$$

$$\rho = \sqrt{\xi_1^{s_2} \xi_2^{s_1}}, \quad t = \sqrt{\xi_1 / \xi_2}, \quad (15)$$

диффеоморфно отображающую первую четверть Q на себя.

Якобиан такой замены равен

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial \xi_1}{\partial t} & \frac{\partial \xi_1}{\partial \rho} \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial t} & \frac{\partial \xi_2}{\partial \rho} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} s_1 \rho t^{s_1-1} & t^{s_1} \\ -s_2 \rho t^{-s_2-1} & t^{-s_2} \end{array} \right| = 2 \rho t^{s_1-s_2-1}.$$

Если

$$\tilde{u}(\xi_1, \xi_2) = \tilde{u}(\rho t^{s_1}, \rho t^{-s_2}) = v(\rho, t) = v\left(\sqrt{\xi_1^{s_2} \xi_2^{s_1}}, \sqrt{\xi_1 / \xi_2}\right),$$

то

$$P \tilde{u}(\xi_1, \xi_2) = \tilde{u}(q^{-1} \xi_1, p \xi_2) = v\left(\sqrt{(q^{-1} \xi_1)^{s_2} (p \xi_2)^{s_1}}, \sqrt{(q^{-1} \xi_1) / (p \xi_2)}\right) = v(\rho, (pq)^{-1/2} t),$$

поскольку $p^{s_1/2} q^{-s_2/2} = 1$. Таким образом, оператор P в новых переменных есть оператор сжатия (растяжения) по t , $t > 0$. Положим, $t = e^\tau$ ($-\infty < \tau < +\infty$) и $v(\rho, t) = v(\rho, e^\tau) = w(\rho, \tau) = w(\rho, \ln t)$. Тогда $dt/t = d\tau$ и

$$Pv(\rho, t) = v(\rho, (pq)^{-1/2} t) = w(\rho, \ln((pq)^{-1/2} t)) = w(\rho, \tau - \ln \sqrt{pq}),$$

т. е. в результате сделанных преобразований оператор P превращается в оператор сдвига T на прямой,

$$Tw(\rho, \tau) = w(\rho, \tau - \ln \sqrt{pq}), \quad T^{-1}w(\rho, \tau) = w(\rho, \tau + \ln \sqrt{pq})$$

(переменная $\rho > 0$ в данном случае является параметром). Введя обозначения

$$h_1 = \frac{1}{2}(3s_1 - s_2), \quad h_2 = \frac{1}{2}(s_1 - 3s_2), \quad h = \frac{h_1 + h_2}{2} = s_1 - s_2 \quad (h_2 < h < h_1),$$

перепишем

$$\begin{aligned} t^{2s_1-s_2} R'_1 t^{s_1} &= e^{h_1 \tau} e^{h\tau/2} (2\alpha_{10} I + p\alpha_{11} T + q\bar{\alpha}_{11} T^{-1}) e^{-h\tau/2} e^{h_1 \tau} = \\ &= e^{h_1 \tau} \left(2\alpha_{10} I + (pq)^{1/2} \alpha_{11} T + (pq)^{1/2} \bar{\alpha}_{11} T^{-1} \right) e^{h_1 \tau} = e^{h_1 \tau} R_1 e^{h_1 \tau}, \\ t^{s_1-2s_2} R'_2 t^{-s_2} &= e^{h_2 \tau} e^{h\tau/2} (2\alpha_{20} I + q^{-1} \alpha_{21} T + p^{-1} \bar{\alpha}_{21} T^{-1}) e^{-h\tau/2} e^{h_2 \tau} = \\ &= e^{h_2 \tau} \left(2\alpha_{20} I + (pq)^{-1/2} \alpha_{21} T + (pq)^{-1/2} \bar{\alpha}_{21} T^{-1} \right) e^{h_2 \tau} = e^{h_2 \tau} R_2 e^{h_2 \tau}, \\ t^{s_1-s_2} R t^{s_1-s_2} &= e^{h\tau} R e^{h\tau}, \end{aligned}$$

где теперь R_1 , R_2 и R представляют собой самосопряженные разностные операторы

$$R_1 = 2\alpha_{10} I + (pq)^{1/2} \alpha_{11} T + (pq)^{1/2} \bar{\alpha}_{11} T^{-1}, \quad R_2 = 2\alpha_{20} I + (pq)^{-1/2} \alpha_{21} T + (pq)^{-1/2} \bar{\alpha}_{21} T^{-1},$$

$$R = 2\beta_0 I + \beta_1 T + \bar{\beta}_1 T^{-1}, \quad (16)$$

а коэффициенты по-прежнему задаются формулами (9), (11).

Итак, неравенства (12) заменяются неравенствами

$$\int_0^{+\infty} \rho^3 d\rho \int_{-\infty}^{+\infty} \left(e^{h_1 \tau} R_1 e^{h_1 \tau} + e^{h_2 \tau} R_2 e^{h_2 \tau} \pm e^{h \tau} R e^{h \tau} \right) w \bar{w} dt \geq 2c_1 \int_0^{+\infty} \rho^3 d\rho \int_{-\infty}^{+\infty} \left(e^{2h_1 \tau} + e^{2h_2 \tau} \right) |w|^2 dt. \quad (17)$$

где $w(\rho, \tau)$ пробегает множество всех измеримых в полуплоскости $\{(\rho, \tau) \in \mathbb{R}^2 : \rho > 0\}$ функций, для которых конечен интеграл

$$\int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (\rho e^{h \tau} + \rho^3 (e^{2h_1 \tau} + e^{2h_2 \tau})) |w(\rho, \tau)|^2 d\tau d\rho.$$

Для выполнения (17) необходимо и достаточно, чтобы для внутреннего интеграла имела место соответствующая оценка

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(e^{h_1 \tau} R_1 e^{h_1 \tau} + e^{h_2 \tau} R_2 e^{h_2 \tau} \pm e^{h \tau} R e^{h \tau} \right) w(\tau) \bar{w}(\tau) dt \geq 2c_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \left(e^{2h_1 \tau} + e^{2h_2 \tau} \right) |w(\tau)|^2 dt \quad (18)$$

на множестве всех функций $w(\tau)$ на прямой, для которых конечен интеграл в правой части (18). Достаточность очевидна, а чтобы показать необходимость, предположим, что для некоторой функции w_0 из указанного класса выполняется противоположное неравенство

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(e^{h_1 \tau} R_1 e^{h_1 \tau} + e^{h_2 \tau} R_2 e^{h_2 \tau} + e^{h \tau} R e^{h \tau} \right) w_0(\tau) \bar{w}_0(\tau) dt < 2c_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \left(e^{2h_1 \tau} + e^{2h_2 \tau} \right) |w_0(\tau)|^2 dt$$

(со знаком + перед R для определенности). Рассмотрим тогда функцию

$$w(\rho, \tau) = \begin{cases} w_0(\tau), & 0 < \rho < 1, \\ 0, & \rho > 1. \end{cases}$$

Она принадлежит нужному пространству, поскольку $2h_1 < h < 2h_2$, и для нее неравенство (17) нарушено.

После введения обозначения $z(\tau) = e^{h \tau} w(\tau)$ оценка (18) принимает более удобный вид

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(e^{\tau} R_1 e^{\tau} + e^{-\tau} R_2 e^{-\tau} \pm R \right) z(\tau) \bar{z}(\tau) dt \geq 2c_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \left(e^{2\tau} + e^{-2\tau} \right) |z(\tau)|^2 dt \quad (19)$$

(заметим, что $(h_1 - h_2)/2 = 1$). Доказана

Лемма 2.2. Пусть область B содержит начало координат. Тогда неравенство (2) равносильно двум неравенствам (19) на множестве всех функций $z(\tau)$ таких, что функции $e^{|\tau|} z(\tau)$ принадлежат $L_2(\mathbb{R})$. Операторы R_1, R_2 и R заданы формулами (16) и (9), (11).

Следствие 2.1. Если выполнено неравенство (2), а B содержит начало координат, то разностные операторы $R_1, R_2 : L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R})$ положительно определены, или, что то же самое, $\alpha_{10} > (pq)^{1/2} |\alpha_{11}|$ и $\alpha_{20} > (pq)^{-1/2} |\alpha_{21}|$.

Подставим в (19) вместо функции $z(\tau)$ функцию $z(\tau)/\text{ch } \tau$, где теперь $z(\tau)$ пробегает все пространство $L_2(\mathbb{R})$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{e^{\tau}}{\text{ch } \tau} R_1 \frac{e^{\tau}}{\text{ch } \tau} + \frac{e^{-\tau}}{\text{ch } \tau} R_2 \frac{e^{-\tau}}{\text{ch } \tau} \pm \frac{1}{\text{ch } \tau} R \frac{1}{\text{ch } \tau} \right) z(\tau) \bar{z}(\tau) dt \geq 4c_1 \|z\|_{L_2(\mathbb{R})}^2. \quad (20)$$

Таким образом, стоящий в скобках разностный оператор положительно определен. Приводя в нем подобные члены, видим, что он равен

$$\frac{g_0^{\pm}(\tau)}{\text{ch}^2 \tau} I + \frac{g_1^{\pm}(\tau)}{\text{ch } \tau \text{ch}(\tau - \ln \sqrt{pq})} T + T^{-1} \frac{g_1^{\pm}(\tau)}{\text{ch } \tau \text{ch}(\tau - \ln \sqrt{pq})},$$

где

$$g_0^{\pm}(\tau) = 2(\alpha_{10} e^{2\tau} + \alpha_{20} e^{-2\tau} \pm \beta_0), \quad g_1^{\pm}(\tau) = \alpha_{11} e^{2\tau} + \alpha_{21} e^{-2\tau} \pm \beta_1.$$

На функциях, носитель которых лежит на отрезке длины $\ln \sqrt{pq}$, неравенство (20) превращается в

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g_0^\pm(\tau)}{\operatorname{ch}^2 \tau} |z(\tau)|^2 d\tau \geq 4c_1 \|z\|_{L_2(\mathbb{R})}^2,$$

откуда немедленно следует положительность функций $g_0^\pm(\tau)$, т. е. $\beta_0^2 < \alpha_{10}\alpha_{20}$. Но тогда рассматриваемый разностный оператор можно представить в виде

$$\frac{\sqrt{g_0^\pm(\tau)}}{\operatorname{ch} \tau} [I + g^\pm(\tau)T + T^{-1}g^\pm(\tau)] \frac{\sqrt{g_0^\pm(\tau)}}{\operatorname{ch} \tau}$$

(см. формулу (22)).

Сформулируем основную теорему о выполнении неравенства Гординга.

Теорема 2.1. Пусть область V содержит начало координат. Неравенство (2) выполнено тогда и только тогда, когда $\beta_0^2 < \alpha_{10}\alpha_{20}$ и самосопряженные разностные операторы

$$I + g^\pm(\tau)T + T^{-1}g^\pm(\tau) : L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R}), \tag{21}$$

где

$$g^\pm(\tau) = \frac{\alpha_{11}e^{2\tau} + \alpha_{21}e^{-2\tau} \pm \beta_1}{2\sqrt{(\alpha_{10}e^{2\tau} + \alpha_{20}e^{-2\tau} \pm \beta_0)((pq)^{-1}\alpha_{10}e^{2\tau} + pq\alpha_{20}e^{-2\tau} \pm \beta_0)}} \tag{22}$$

положительно определены.

Итак, вопрос о выполнении неравенства типа Гординга сведен к вопросу о положительной определенности самосопряженного разностного оператора (21) на прямой с гладким стабилизирующим на бесконечности коэффициентом $g^\pm(\tau)$.

При получении следующих ниже достаточных условий положительной определенности операторов (21) использован подход, предложенный в работе [13].

Лемма 2.3. Если существуют такие положительные числа $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ и такая измеримая вещественная функция $\delta(\tau)$, что при почти всех $\tau \in \mathbb{R}$ выполнены условия

$$\delta(\tau) \geq \varepsilon_1, \quad |g^\pm(\tau)|^2 \leq \delta(\tau - \ln \sqrt{pq}) [1 - \delta(\tau) - \varepsilon_2], \tag{23}$$

то разностные операторы (21) положительно определены.

Доказательство леммы см. в [15].

Легко проверяется, что условие

$$|g^\pm(\tau)| < 1 \quad (\tau \in \mathbb{R})$$

является необходимым для положительной определенности оператора (21). Очевидное достаточное условие

$$\sup_{\tau \in \mathbb{R}} |g^\pm(\tau)| < 1/2 \tag{24}$$

получается, если положить $\delta(\tau) \equiv 1/2$ в лемме 2.3.

Приведем сейчас еще одно, более тонкое, нежели (24), достаточное условие, основанное на применении леммы 2.3.

Следствие 2.2. Пусть

$$\varkappa = \sup_{\tau \in \mathbb{R}} (|g^\pm(\tau)| + |g^\pm(\tau + \ln \sqrt{pq})|) < 1. \tag{25}$$

Тогда разностные операторы (21) положительно определены.

Пример 2.1. Рассмотрим уравнение

$$-\Delta u + au_{x_1x_2}(q^{-1}x_1, px_2) + \bar{b}u_{x_1x_2}(qx_1, p^{-1}x_2) = f.$$

Выпишем условия на коэффициенты $a, b \in \mathbb{C}$, гарантирующие выполнение неравенства (2).

В исходных обозначениях имеем $a_{110} = a_{220} = 1$,

$$a_{111} = a_{11,-1} = a_{221} = a_{22,-1} = a_{120} = a_{210} = 0.$$

Можно считать, что $a_{121} = a/p, a_{12,-1} = pb$, в то время как $a_{211} = a_{21,-1} = 0$. Тогда $\alpha_{11} = \alpha_{21} = 0, \alpha_{10} = \alpha_{20} = 1, \beta_0 = 0$ и, таким образом,

$$g^\pm(\tau) = \frac{\pm\beta_1}{2\sqrt{\operatorname{ch} 2\tau \operatorname{ch}(2\tau - \ln pq)}},$$

где $\beta_1 = qa/p + pb/q$.

При $\tau = (\ln pq)/4$ знаменатель этой дроби достигает своего минимума, равного $(pq + 1)/\sqrt{pq}$. Поэтому наибольшее значение функции $|g^\pm(\tau)|$ равно $|\beta_1|\sqrt{pq}/(pq + 1)$, и (24) в данном случае означает, что

$$|\beta_1| < \frac{pq + 1}{2\sqrt{pq}},$$

т. е.

$$|q^2 a + p^2 b| < (pq + 1)\sqrt{pq}/2.$$

Чтобы воспользоваться следствием 2.2., нужно найти наибольшее значение функции

$$\begin{aligned} |g^\pm(\tau) + |g^\pm(\tau + \ln \sqrt{pq})| &= \frac{|\beta_1|}{2\sqrt{\operatorname{ch} 2\tau \operatorname{ch}(2\tau - \ln pq)}} + \frac{|\beta_1|}{2\sqrt{\operatorname{ch} 2\tau \operatorname{ch}(2\tau + \ln pq)}} = \\ &= \frac{|\beta_1|}{\sqrt{2(\operatorname{ch}(4\tau - \ln pq) + \operatorname{ch} \ln pq)}} + \frac{|\beta_1|}{\sqrt{2(\operatorname{ch}(4\tau + \ln pq) + \operatorname{ch} \ln pq)}}. \end{aligned}$$

3. Разрешимость первой краевой задачи для сильно эллиптического функционально-дифференциального уравнения с ортотропными сжатиями. Будем рассматривать задачу (1) в предположении выполнения неравенства (2). Уравнение тогда принято называть сильно эллиптическим. При этом из рассуждений предыдущего пункта видно, что неравенство (2) выполняется для рассматриваемого уравнения при постоянной c_2 , равной нулю. Будем считать также область B ограниченной.

С задачей (1) свяжем непрерывную на пространстве $\dot{H}^1(B)$ полуторалинейную форму

$$a_R[u, v] = \sum_{i,j=1}^2 (R_{ij}u_{x_i}, v_{x_j})_{L_2(B)} \quad (u, v \in \dot{H}^1(B)).$$

Очевидно, существует постоянная $M > 0$ такая, что

$$|a_R[u, v]| \leq M \|u\|_{\dot{H}^1(B)} \|v\|_{\dot{H}^1(B)} \quad (u, v \in \dot{H}^1(B)). \quad (26)$$

Кроме того, неравенство (2), левая часть которого совпадает на гладких финитных функциях с $\operatorname{Re} a_R[u, u]$, обеспечивает оценку

$$\operatorname{Re} a_R[u, u] \geq c_1 \|u\|_{\dot{H}^1(B)}^2 \quad (u \in \dot{H}^1(B)) \quad (27)$$

на всем пространстве $\dot{H}^1(B)$.

Функция $u \in \dot{H}^1(B)$ называется обобщенным решением задачи (1), если интегральное тождество

$$a_R[u, v] = (f, v)_{L_2(B)}$$

выполнено для любой функции $v \in \dot{H}^1(B)$.

Будем рассматривать также неограниченный оператор

$$\mathcal{A}_R : \mathcal{D}(\mathcal{A}_R) \subset L_2(B) \rightarrow L_2(B),$$

область определения $\mathcal{D}(\mathcal{A}_R)$ которого состоит из всевозможных обобщенных решений задачи (1), когда f пробегает все пространство $L_2(B)$. Если u — обобщенное решение, отвечающее правой части f , то полагаем $\mathcal{A}_R u = f$ (оператор \mathcal{A}_R , очевидно, корректно определен на $\mathcal{D}(\mathcal{A}_R)$). Понятно, что $C_0^\infty(B) \subset \mathcal{D}(\mathcal{A}_R) \subset \dot{H}^1(B)$ и $\mathcal{A}_R u = A_R u$, если $u \in C_0^\infty(B)$.

Рассуждения этого пункта хорошо известны, они носят достаточно общий характер и опираются на неравенство (2), позволяющее ввести в пространстве $\dot{H}^1(B)$ связанное с оператором в уравнении эквивалентное скалярное произведение.

Лемма 3.1. *Формула*

$$(u, v)'_{\dot{H}^1(B)} = \frac{1}{2} \left(a_R[u, v] + \overline{a_R[v, u]} \right) \quad (28)$$

задает эквивалентное скалярное произведение на пространстве $\dot{H}^1(B)$.

Лемма 3.2. *Существует (единственный) линейный ограниченный оператор*

$$K : \dot{H}^1(B) \rightarrow \dot{H}^1(B)$$

такой, что

$$(u, Kv)'_{\dot{H}^1(B)} = \frac{1}{2i} \left(a_R[u, v] - \overline{a_R[v, u]} \right) \quad (29)$$

для всех $u, v \in \dot{H}^1(B)$. При этом оператор K является самосопряженным,

$$(Ku, v)'_{\dot{H}^1(B)} = (u, Kv)'_{\dot{H}^1(B)},$$

$u \|K\|' \leq M/c_1$, где M и c_1 — постоянные из неравенств (26) и (27), а $\|\cdot\|'$ обозначает операторную норму, отвечающую норме $\|\cdot\|'_{\dot{H}^1(B)}$.

Теорема 3.1. Для любой функции $f \in L_2(B)$ задача (1) имеет единственное обобщенное решение $u \in \dot{H}^1(B)$, причем $\|u\|'_{\dot{H}^1(B)} \leq (1/\sqrt{c_1})\|f\|_{L_2(B)}$.

Спектр $\sigma(\mathcal{A}_R)$ оператора \mathcal{A}_R дискретный и содержится во множестве

$$\sigma(\mathcal{A}_R) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda > 0, |\arg \lambda| \leq \arctg(M/c_1)\}.$$

Для любого числа $\lambda \in \mathbb{C}$ оператор $\lambda I - \mathcal{A}_R : L_2(B) \rightarrow L_2(B)$ фредгольмов. Если $\lambda \notin \sigma(\mathcal{A}_R)$, то резольвента $(\lambda I - \mathcal{A}_R)^{-1}$ есть компактный оператор в $L_2(B)$.

Доказательство. Рассмотрим уравнение

$$\mathcal{A}_R u = f, \quad u \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_R), f \in L_2(B).$$

По определению, $a_R[u, v] = (f, v)_{L_2(B)}$, или

$$\frac{1}{2} \left(a_R[u, v] + \overline{a_R[v, u]} \right) + i \frac{1}{2i} \left(a_R[u, v] - \overline{a_R[v, u]} \right) = (f, v)_{L_2(B)}$$

для всех $v \in \dot{H}^1(B)$. В силу лемм 3.1. и 3.2. последнее соотношение можно переписать следующим образом:

$$(u, v)'_{\dot{H}^1(B)} + i(Ku, v)'_{\dot{H}^1(B)} = (f, v)_{L_2(B)}. \tag{30}$$

Правая часть этого равенства является непрерывным антилинейным функционалом относительно v на пространстве $\dot{H}^1(B)$ и по теореме Рисса порождает ограниченный линейный оператор $\Lambda : L_2(B) \rightarrow \dot{H}^1(B)$ такой, что

$$(\Lambda f, v)'_{\dot{H}^1(B)} = (f, v)_{L_2(B)}, \quad v \in \dot{H}^1(B).$$

Таким образом, исходное уравнение равносильно уравнению $(I + iK)u = F$ в $\dot{H}^1(B)$ с правой частью $F = \Lambda f$. Поскольку оператор iK кососимметрический, его спектр лежит на мнимой оси, и существует ограниченный обратный оператор

$$(I + iK)^{-1} : \dot{H}^1(B) \rightarrow \dot{H}^1(B),$$

т. е. уравнение имеет единственное решение

$$u = (I + iK)^{-1}F = (I + iK)^{-1}\Lambda f.$$

Чтобы оценить норму этого решения, подставим в (30) $v = u$. Будем иметь

$$\|u\|_{\dot{H}^1(B)}'^2 + i(Ku, u)'_{\dot{H}^1(B)} = (f, u)_{L_2(B)},$$

откуда с учетом вещественности $(Ku, u)'_{\dot{H}^1(B)}$ получаем оценку

$$\|u\|_{\dot{H}^1(B)}'^2 \leq |(f, u)_{L_2(B)}| \leq \|f\|_{L_2(B)} \|u\|_{L_2(B)}.$$

Поскольку

$$\|u\|_{\dot{H}^1(B)}'^2 = \operatorname{Re} a_R[u, u] + c_2 \|u\|_{L_2(B)}^2 \geq c_1 \|u\|_{\dot{H}^1(B)}^2 \geq c_1 \|u\|_{L_2(B)}^2,$$

выводим $\|u\|_{\dot{H}^1(B)}' \leq (1/\sqrt{c_1})\|f\|_{L_2(B)}$.

Итак, точка $\lambda = 0$ является резольвентной точкой оператора \mathcal{A}_R , и оператор \mathcal{A}_R^{-1} компактен в силу компактного вложения $\dot{H}^1(B)$ в $L_2(B)$. Отсюда следует, что оператор \mathcal{A}_R имеет дискретный спектр, т. е. спектр, состоящий из изолированных собственных значений конечной кратности. Чтобы в этом убедиться, достаточно записать оператор $\lambda I - \mathcal{A}_R$ для произвольного $\lambda \in \mathbb{C}$ в виде

$$\lambda I - \mathcal{A}_R = -(I - \lambda \mathcal{A}_R^{-1}) \mathcal{A}_R,$$

сводящем вопрос о разрешимости к уравнению с оператором „тождественный плюс компактный“. Из этого представления очевидным образом вытекает и фредгольмовость оператора $\lambda I - \mathcal{A}_R$.

Убедимся теперь, что все собственные значения лежат в угле, охватывающем положительную вещественную полуось. Пусть $\mathcal{A}_R u = \lambda u$ при ненулевой функции $u \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_R)$, которую можно нормировать: $\|u\|'_{\dot{H}^1(B)} = 1$. Имеем

$$(u, v)'_{\dot{H}^1(B)} + i(Ku, v)'_{\dot{H}^1(B)} = \lambda(\Lambda u, v)'_{\dot{H}^1(B)} \quad (v \in \dot{H}^1(B)).$$

Полагая теперь $v = u$, будем иметь

$$1 + i(Ku, u)'_{\dot{H}^1(B)} = \mu(\Lambda u, u)'_{\dot{H}^1(B)} + iv(\Lambda u, u)'_{\dot{H}^1(B)}, \quad (31)$$

где μ и ν обозначают действительную и мнимую части числа λ .

Отметим, что сужение оператора Λ на пространство $\dot{H}^1(B)$ (будем обозначать это сужение Λ_0) является положительным и компактным оператором в $\dot{H}^1(B)$. Действительно, по определению,

$$(\Lambda_0 u, u)'_{\dot{H}^1(B)} = \|u\|_{L_2(B)}^2 > 0, \quad u \neq 0,$$

а компактность Λ_0 следует из компактности вложения $\dot{H}^1(B)$ в $L_2(B)$. Приравняем действительные и мнимые части равенства (31):

$$1 = \mu(\Lambda_0 u, u)'_{\dot{H}^1(B)}, \quad (Ku, u)'_{\dot{H}^1(B)} = \nu(\Lambda_0 u, u)'_{\dot{H}^1(B)}.$$

Отсюда следует, что действительная и мнимая части собственного значения удовлетворяют соотношениям

$$\mu > 0, \quad \frac{\nu}{\mu} = (Ku, u)'_{\dot{H}^1(B)}.$$

Поскольку u лежит на единичной сфере, имеем $|(Ku, u)'_{\dot{H}^1(B)}| \leq \|K\|'$. Из леммы 3.2. выводим $|\nu|/\mu \leq M/c_1$. Теорема доказана.

4. Функционально-дифференциальное уравнение с ортотропными сжатиями в весовых пространствах. Рассмотрим функционально-дифференциальное уравнение на всей плоскости

$$A_R u(x_1, x_2) = - \sum_{i,j=1}^2 (R_{ij} u_{x_i})_{x_j} = f(x_1, x_2), \quad x \in \mathbb{R}^2. \quad (32)$$

Проведем преобразования, переводящие исходное уравнение (32) в разностное уравнение вида (5) с переменными коэффициентами на прямой.

Замечание 4.1. Обратим внимание на орбиты точек плоскости под действием оператора P . Если точка не лежит на координатных осях, то ее орбита лежит на одной из линий

$$|x_1|^{\ln p} |x_2|^{\ln q} = \text{const}.$$

При этом точка не покидает “свою” координатную четверть. Таким образом, функции, обращающиеся в нуль во всех четвертях плоскости \mathbb{R}^2 , кроме одной, образуют инвариантное подпространство для оператора P . Координатные оси и начало координат являются, соответственно, неподвижными прямыми и неподвижной точкой преобразования ортотропного сжатия.

Применим преобразование Фурье к уравнению (32):

$$\begin{aligned} & (a_{110}\tilde{u} + a_{111}q^2 p^{-1}P^{-1}\tilde{u} + a_{11,-1}pq^{-2}P\tilde{u}) \xi_1^2 + \\ & ((a_{120} + a_{210})\tilde{u} + (a_{121}q + a_{211}p^{-1})qp^{-1}P^{-1}\tilde{u} + (a_{12,-1}q^{-1} + a_{21,-1}p)pq^{-1}P\tilde{u}) \xi_1 \xi_2 + \\ & (a_{220}\tilde{u} + a_{221}qp^{-2}P^{-1}\tilde{u} + a_{22,-1}p^2 q^{-1}P\tilde{u}) \xi_2^2 = \tilde{f}. \end{aligned} \quad (33)$$

Поскольку преобразование Фурье, как известно [8, Глава 2, параграф 2], продолжается до изоморфизма

$$F_s : H_0^s(\mathbb{R}^2) \rightarrow H_s^0(\mathbb{R}^2), \quad s \notin \mathbb{Z},$$

функция $\tilde{f} = F[f]$ принадлежит весовому пространству $H_s^0(\mathbb{R}^2)$, определенному, в свою очередь, как пополнение множества $C_0^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ по норме

$$\|\tilde{f}\|_{H_s^0(\mathbb{R}^2)} = \left(\int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{2s} |\tilde{f}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2}. \quad (34)$$

В силу замечания 4.1., уравнение (33) на всей плоскости \mathbb{R}_ξ^2 распадается на четыре независимых уравнения в каждой из четвертей. Заменой ξ_1 (ξ_2) на $-\xi_1$ ($-\xi_2$) можно свести каждое из этих уравнений к уравнениям в первой четверти $\mathbb{R}_I^2 = \{\xi \in \mathbb{R}^2 : \xi_1 > 0, \xi_2 > 0\}$:

$$\begin{aligned} & (a_{110}\tilde{u} + a_{111}q^2p^{-1}P^{-1}\tilde{u} + a_{11,-1}pq^{-2}P\tilde{u})\xi_1^2 \pm \\ & ((a_{120} + a_{210})\tilde{u} + (a_{121}q + a_{211}p^{-1})qp^{-1}P^{-1}\tilde{u} + (a_{12,-1}q^{-1} + a_{21,-1}p)pq^{-1}P\tilde{u})\xi_1\xi_2 + \\ & (a_{220}\tilde{u} + a_{221}qp^{-2}P^{-1}\tilde{u} + a_{22,-1}p^2q^{-1}P\tilde{u})\xi_2^2 = \tilde{f}. \end{aligned} \tag{35}$$

Проведем замены переменных (13)-(15). Переобозначая функцию в правой части

$$\tilde{f}(\xi_1, \xi_2) = \tilde{f}(\rho t^{s_1}, \rho t^{-s_2}) = \hat{f}(\rho, t)$$

и сохраняя для оператора сжатия прежнее обозначение, перепишем уравнение (33)

$$\begin{aligned} & (a_{110}\hat{u} + a_{111}q^2p^{-1}P^{-1}\hat{u} + a_{11,-1}pq^{-2}P\hat{u})\rho^2t^{2s_1} + \\ & ((a_{120} + a_{210})\hat{u} + (a_{121}q + a_{211}p^{-1})qp^{-1}P^{-1}\hat{u} + (a_{12,-1}q^{-1} + a_{21,-1}p)pq^{-1}P\hat{u})\rho^2t^{s_1-s_2} + \\ & (a_{220}\hat{u} + a_{221}qp^{-2}P^{-1}\hat{u} + a_{22,-1}p^2q^{-1}P\hat{u})\rho^2t^{-2s_2} = \hat{f}. \end{aligned}$$

Перепишем норму весового пространства (34)

$$\left(\int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} 2\rho^{2s+1}t^{s_1-s_2-1} (t^{2s_1} + t^{-2s_2})^s |\hat{u}(\rho, t)|^2 d\rho dt \right)^{1/2}. \tag{36}$$

Перейдем к операторам сдвига T по переменной $\tau \in \mathbb{R}, t = e^\tau$, повторяя рассуждения пункта 2.

Определение 4.1. Через K^s обозначим множество измеримых в $\mathbb{R}_+^2 = \{(\rho, \tau) \in \mathbb{R}^2 : \rho > 0\}$ функций, для которых конечен интеграл

$$\|g\|_{K^s} := \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} 2\rho^{2s+1}e^{\tau(s_1-l_2)} (e^{2s_1\tau} + e^{-2s_2\tau})^s |g(\rho, \tau)|^2 d\rho d\tau \right)^{1/2}. \tag{37}$$

Замечание 4.2. Норма (37) получена в результате логарифмической замены из (36), т. е. имеет место равенство $\|\tilde{f}\|_{H_s^0(\mathbb{R}_I^2)} = \|g\|_{K^s}$.

Далее для краткости будем использовать обозначения $l = \ln \sqrt{pq}$, $e(\tau) = e^{2s_1\tau} + e^{-2s_2\tau}$, а также

$$\begin{aligned} \theta_{-1}(\tau) &= a_{111}q^2p^{-1}e^{2s_1\tau} \pm (a_{121}q + a_{211}p^{-1})qp^{-1}e^{(s_1-s_2)\tau} + a_{221}qp^{-2}e^{-2s_2\tau}, \\ \theta_0(\tau) &= a_{110}e^{2s_1\tau} \pm (a_{120} + a_{210})e^{(s_1-s_2)\tau} + a_{220}e^{-2s_2\tau}, \\ \theta_1(\tau) &= a_{11,-1}pq^{-2}e^{2s_1\tau} \pm (a_{12,-1}q^{-1} + a_{21,-1}p)pq^{-1}e^{(s_1-s_2)\tau} + a_{22,-1}p^2q^{-1}e^{-2s_2\tau}. \end{aligned}$$

Сформулируем промежуточный результат.

Лемма 4.1. Уравнение (32) имеет единственное решение $u \in H_0^{s+2}(\mathbb{R}^2)$ при любой функции $f \in H_0^s(\mathbb{R}^2)$, $s \notin \mathbb{Z}$, тогда и только тогда, когда уравнение

$$\rho^2 (\theta_0(\tau)w(\rho, \tau) + \theta_{-1}(\tau)T^{-1}w(\rho, \tau) + \theta_1(\tau)Tw(\rho, \tau)) = g(\rho, \tau) \tag{38}$$

имеет единственное решение $w \in K^{s+2}$ при любой функции $g \in K^s$.

Можно переписать уравнение (38) следующим образом

$$\begin{aligned} & [\gamma_0(\tau)I + \gamma_1(\tau)T + \gamma_2(\tau)T^2] \left(e^{\tau(s_1-s_2)/2} (e(\tau))^{s/2+1} w(\rho, \tau) \right) = \\ & \rho^{-2} e^{\tau(s_1-s_2)/2} (e(\tau))^{s/2+1} \frac{g(\rho, \tau - l)}{e(\tau - l)}, \end{aligned}$$

где

$$\gamma_0(\tau) = \frac{\theta_{-1}(\tau - l)}{e(\tau - l)}, \quad \gamma_1(\tau) = \frac{\theta_0(\tau - l)\sqrt{q/p}e^{s/2+1}(\tau)}{e^{s/2+2}(\tau - l)}, \quad \gamma_2(\tau) = \frac{\theta_1(\tau - l)(q/p)e^{s/2+1}(\tau)}{e(\tau - l)e^{s/2+1}(\tau - 2l)}.$$

Обратим внимание на то, что принадлежность функций $w(\rho, \tau)$ и $g(\rho, \tau)$ пространствам K^{s+2} и K^s , соответственно, означает, что при почти всех $\rho > 0$ функции

$$e^{\tau(s_1-s_2)/2} (e(\tau))^{s/2+1} w(\rho, \tau), \quad \rho^{-2} e^{\tau(s_1-s_2)/2} (e(\tau))^{s/2+1} (e(\tau - l))^{-1} g(\rho, \tau - l)$$

являются элементами пространства $L_2(\mathbb{R})$ как функции переменного τ .

Учитывая, что коэффициенты γ_i , $i = 0, 1, 2$, зависят только от τ , вопрос о разрешимости уравнения (38) сводится к вопросу об обратимости оператора

$$B_0 = \gamma_0 I + \gamma_1 T + \gamma_2 T^2 : L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R}).$$

Обратим внимание на то, что получившиеся коэффициенты γ_i , $i = 0, 1, 2$, стабилизируются на бесконечности, т. е. существуют конечные пределы

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \gamma_0(\tau) &= a_{111} \frac{q^2}{p}, & \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \gamma_1(\tau) &= a_{110} \sqrt{\frac{q}{p}} q^{s+2}, & \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \gamma_2(\tau) &= a_{11,-1} q^{2s+3}, \\ \lim_{\tau \rightarrow -\infty} \gamma_0(\tau) &= a_{221} \frac{q}{p^2}, & \lim_{\tau \rightarrow -\infty} \gamma_1(\tau) &= a_{220} \sqrt{\frac{q}{p}} p^{-s-2}, & \lim_{\tau \rightarrow -\infty} \gamma_2(\tau) &= a_{22,-1} p^{-2s-3}, \end{aligned}$$

причем сходимость к этим пределам экспоненциальная.

Условие 4.1. Одним из основных условий на коэффициенты рассматриваемого уравнения является условие отделимости от нуля коэффициента при операторе T или при T^{-1} в (38). Для этих двух случаев нет никаких принципиальных различий в дальнейших рассуждениях, поэтому будем считать, что $\theta_{-1}(\tau) \neq 0$, $\forall \tau \in \mathbb{R} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

5. Обратимость оператора взвешенного сдвига. Построим обратный оператор к оператору взвешенного сдвига

$$B_0 = \sum_{j=0}^2 \gamma_j(\tau) T^j : L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R}). \quad (39)$$

Коэффициенты $\gamma_j(\tau)$, $j = \overline{0, 2}$, являются непрерывными функциями, имеющими на бесконечности конечные пределы и сходящимися к ним экспоненциально. Здесь мы предполагаем выполненным условие 4.1., что позволяет считать $\gamma_0(\tau) \equiv 1$ (в противном случае на γ_0 следует разделить).

Спектр оператора взвешенного сдвига достаточно подробно изучался в работах [2, 3]. Из результатов [2] вытекают необходимые и достаточные условия обратимости двучленного оператора вида (39) на прямой. В этом пункте мы получим достаточные условия для трех слагаемых в разностном операторе, легко обобщаемые и на произвольное количество слагаемых в (39).

Для произвольного вещественного N обозначим $I = (-\infty, N]$ и рассмотрим $C(I)$ – банахово пространство непрерывных ограниченных функций на I (с супремум-нормой), а также $\mathcal{H}_d(C(I))$ – пространство всех аналитических в круге $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < d\}$ функций со значениями в $C(I)$.

Введем алгебру \mathcal{A}_d операторов $B(\tau, T)$ с переменными коэффициентами. Опираясь на интегральную формулу Коши, легко показать, что функции $b(\tau, \lambda)$ из $\mathcal{H}_d(C(I))$ есть суммы степенных рядов $\sum_{k=0}^{\infty} b_k(\tau) \lambda^k$ с коэффициентами $b_k \in C(I)$, удовлетворяющими условию: для любого $d' < d$ найдется постоянная $M(d') > 0$ такая, что

$$\|b_k\|_{C(I)} \leq M(d') d'^{-k} \quad (k = 0, 1, \dots). \quad (40)$$

Более того, $b_k(\tau) = (1/k!) b_\lambda^{(k)}(x, 0)$, а в качестве постоянной $M(d')$ можно взять величину $M(d') = \max_{|\lambda|=d'} \|b(\cdot, \lambda)\|_{C(I)}$.

Каждой функции $b(\tau, \lambda)$ из $\mathcal{H}_d(C(\bar{I}))$ сопоставим (пока формальный) операторный ряд $\sum_{k=0}^{\infty} b_k(\tau) T^k$.

Лемма 5.1. Пусть $b \in \mathcal{H}_d(C(I))$, где $d > 1$. Тогда формулой

$$B(\tau, T)u(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} (1/k!) (b)_\lambda^{(k)}(x, 0) u(\tau - kl) \quad (41)$$

определен ограниченный оператор $B(\tau, T) : L_2(I) \rightarrow L_2(I)$.

Доказательство леммы см. в [16].

Операторы, соответствующие функциям из $\mathcal{H}_d(C(I))$, образуют некоммутативную алгебру \mathcal{A}_d . Чтобы получить формулу композиции, перемножим соответствующие ряды. Если

$$B_1(\tau, T) = \sum_{k=0}^{\infty} b_{1,k}(\tau) T^k, \quad B_2(\tau, T) = \sum_{k=0}^{\infty} b_{2,k}(\tau) T^k,$$

где $b_1, b_2 \in \mathcal{H}_d(C(I))$, то композиция $B_1 B_2$ представляет собой оператор

$$B_3(\tau, T) = \sum_{k=0}^{\infty} b_{3,k}(\tau) T^k, \quad b_{3,k}(\tau) = \sum_{j=1}^k b_{1,k}(\tau) b_{2,k-j}(\tau - jl).$$

Легко видеть, что соответствующий символ $b_3(\tau, \lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} b_{3,k}(\tau)\lambda^k$ также принадлежит классу $\mathcal{H}_d(C(I))$.

Теорема 5.1. Пусть для оператора B_0 выполнено условие

$$b_0(-\infty, \lambda) := \sum_{j=0}^2 \gamma_j(-\infty)\lambda^j \neq 0 \quad (|\lambda| < d).$$

Тогда существует обратный оператор $B_0^{-1}(\tau, T) \in \mathcal{A}_d$.

Доказательство. Будем строить обратный оператор в виде ряда $\sum_{k=0}^{\infty} r_k(\tau)T^k$. Равенство $B_0B_0^{-1} = I$ приводит к системе

$$\begin{cases} r_0(\tau) = 1, \\ r_k(\tau) = -\gamma_1(\tau)r_{k-1}(\tau-l) - \gamma_2(\tau)r_{k-2}(\tau-2l), \quad k \in \mathbb{N}, \end{cases} \quad (42)$$

для определения коэффициентов $r_k(\tau)$, в то время как $B_0^{-1}B_0 = I$ дает

$$\begin{cases} r_0(\tau) = 1, \\ r_k(\tau) = -\gamma_1(\tau - (k-1)l)r_{k-1}(\tau) - \gamma_2(\tau - (k-2)l)r_{k-2}(\tau), \quad k \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad (43)$$

Можно показать, что системы (42) и (43) определяют одну и ту же последовательность коэффициентов $r_k(\tau), k \in \mathbb{N}$.

А именно, функции $r_k(\tau), k = 1, 2, \dots$, из (42) и (43) можно вычислить по формуле

$$r_k(\tau) = (-1)^k \det M_k(\tau), \quad (44)$$

где матрицы $M_k(\tau)$ имеют порядок $k \times k, k \in \mathbb{N}$ и задаются формулой

$$M_k(\tau) = \begin{pmatrix} \gamma_1(\tau) & \gamma_2(\tau) & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \gamma_1(\tau-l) & \gamma_2(\tau-l) & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \gamma_1(\tau-2l) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \gamma_1(\tau - (k-1)l) \end{pmatrix}.$$

Докажем равенство (44) и, следовательно, эквивалентность формул (42) и (43) по индукции. При $k = 1$ равенство очевидно. Предположим, что равенство (44) выполняется вплоть до некоторого k . Докажем, что оно справедливо и для $k + 1$. Раскрыв определитель $\det M_{k+1}(\tau)$ по первому столбцу, получаем уравнение из (42), а раскрыв его по последней строке, получаем уравнение из системы (43).

Теперь введем 2×2 -матрицы

$$G_k(\tau) = \begin{pmatrix} -\gamma_1(\tau - (k+1)l) & -\gamma_2(\tau - kl) \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

и вектор-столбцы $S_k(\tau) = (r_{k+1}(\tau), r_k(\tau))^T, k = 0, 1, 2, \dots$. Тогда будут справедливы рекуррентные соотношения $S_k = G_{k-1}S_{k-1}$ и формула общего члена

$$S_k = G_{k-1} \dots G_0 S_0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

Оценка (40), которую нам осталось установить для коэффициентов $r_k(\tau)$, сводится к проверке неравенств

$$\sup_{\tau \in I} \|(G_{k-1} \dots G_0)(\tau)\| \leq c(d')d'^{-k} \quad (k = 1, 2, \dots)$$

(здесь $\|\cdot\|$ есть матричная норма).

Обозначим $\bar{I} = I \cup \{-\infty\}$ одноточечную компактификацию I . Тогда функции из $C(I)$, сходящиеся на $-\infty$, можно отождествить с непрерывными функциями на компакте \bar{I} . Пусть \mathcal{B} есть банахова алгебра непрерывных на компакте \bar{I} матричных функций порядка 2×2 . Понятно, что последовательность $g_k = G_k$ принадлежит \mathcal{B} . При этом она сходится в \mathcal{B} к элементу $g = G(-\infty)$ так, что выполняется оценка

$$\|g_k - g\|_{\mathcal{B}} \leq c_N(qp)^{-k}.$$

Это непосредственным образом вытекает из вида функций $\gamma_{1,2}(\tau)$.

Воспользуемся следующей леммой

Лемма 5.2. ([14]) Пусть \mathcal{B} — банахова алгебра и последовательность $g_n \in \mathcal{B}, n = 0, 1, 2, \dots$, экспоненциально сходится к элементу $g \in \mathcal{B}$: $\|g_n - g\|_{\mathcal{B}} \leq cd^n$ для некоторых постоянных $c > 0, 0 < d < 1$. Тогда

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|g_{n-1} \dots g_0\|_{\mathcal{B}}^{1/n} \leq d(g),$$

где $d(g)$ обозначает спектральный радиус элемента g в \mathcal{B} .

По этой лемме для всякого $\bar{d} > d(g)$ найдется постоянная $\tilde{M} = \tilde{M}(\bar{d})$ такая, что

$$\|g_{n-1} \dots g_0\|_{\mathcal{B}}^{1/n} \leq \tilde{M}(\bar{d}) \bar{d}^k \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (45)$$

Оценим спектральный радиус $d(g)$ элемента $g \in \mathcal{B}$. Он совпадает с большим по модулю собственным значением постоянной матрицы $G(-\infty)$. Характеристическое уравнение для определения этих собственных значений имеет вид

$$z^2 + \gamma_1(-\infty)z + \gamma_2(-\infty) = 0. \quad (46)$$

Делая замену $z^{-1} = \lambda$, мы получаем уравнение $b_0(-\infty, \lambda) = 0$. Условие теоремы 5.1. означает, что все корни уравнения (46) не превосходят d^{-1} , а значит и спектральный радиус $d(g) \leq d^{-1}$. Поскольку в условии (40) $d' < d$, имеем $d'^{-1} > d^{-1} \geq d(g)$. Положив в (45) $\bar{d} = d'^{-1}$, получим

$$\sup_{\tau \in I} \|(G_{k-1} \dots G_0)(\tau)\| = \|g_{k-1} \dots g_0\|_{\mathcal{B}} \leq c_N (d') d'^{-k} \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

Теорема доказана.

Из леммы 5.1. и теоремы 5.1. вытекает

Следствие 5.1. Пусть для оператора B_0 выполнено условие

$$b_0(-\infty, \lambda) := \sum_{j=0}^l \gamma_j(-\infty) \lambda^j \neq 0 \quad (|\lambda| \leq 1).$$

Тогда оператор $B_0(\tau, T)$ есть изоморфизм пространства $L_2(I)$.

Было показано, что уравнение

$$u(\tau) + \gamma_1(\tau)u(\tau - l) + \gamma_2(\tau)u(\tau - 2l) = f(\tau) \quad (47)$$

имеет единственное решение

$$u(\tau) = \sum_{k=0}^{+\infty} r_k(\tau) f(\tau - kl), \quad (48)$$

причем ряд в правой части (48) сходится в $L_2(I)$ для любого N , а коэффициенты $r_k(\tau)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, определяются системой (42) или (43). При этом справедлива оценка

$$\|u\|_{L_2(I)} \leq c \|f\|_{L_2(I)}. \quad (49)$$

Покажем, что на самом деле функция, задаваемая формулой (48), принадлежит $L_2(\mathbb{R})$ и непрерывно зависит от $f \in L_2(\mathbb{R})$. Для этого нам понадобится другое представление функции u . Рассмотрим уравнение (47) на полуинтервале $[N, +\infty)$ с начальными условиями

$$\begin{aligned} u(\tau) &= \phi_0(\tau), \quad \text{при } \tau \in [N - 2l, N - l], \\ u(\tau) &= \phi_1(\tau), \quad \text{при } \tau \in [N - hl, N]. \end{aligned}$$

Введем обозначения $S = [N - 2l, N - l]$ и $u_k(\tau) = u(\tau + kl)$, $f_k(\tau) = f(\tau + kl)$, $\gamma_{1,k}(\tau) = \gamma_1(\tau + kl)$, $\gamma_{2,k}(\tau) = \gamma_2(\tau + kl)$ при $\tau \in S$, где $k = 0, 1, 2, \dots$. Заметим, что элементы с индексом $k = 0, 1$ рассматриваются далее только для последовательности $\{u_k\}_{k=0}^{\infty}$. Учитывая введенные обозначения, перепишем исходное уравнение и начальные условия

$$u_{k+2}(\tau) + \gamma_{1,k+2}(\tau)u_{k+1}(\tau) + \gamma_{2,k+2}(\tau)u_k(\tau) = f_{k+2}(\tau), \quad (50)$$

$$u_0(\tau) = \phi_0(\tau), \quad u_1(\tau) = \phi_1(\tau + l).$$

Здесь $\tau \in S$, $k = 0, 1, 2, \dots$

Определим пространство $L_2^{\infty}(S)$ последовательностей функций $\{u_k\}_{k=0}^{\infty}$ со скалярным произведением

$$(u, v)_{L_2^{\infty}(S)} = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{N-2h}^{N-h} u_k(\tau) \overline{v_k(\tau)} d\tau.$$

С задачей (50) связывается ограниченный оператор

$$\mathcal{W} : L_2^{\infty}(S) \rightarrow L_2^{\infty}(S) \times L_2(S) \times L_2(S),$$

действующий по формуле $\mathcal{W} \{u_k\}_{k=0}^{\infty} = \{ \{u_{k+2} + \gamma_{1,k+2}u_{k+1} + \gamma_{2,k+2}u_k\}_{k=0}^{\infty}, u_0, u_1 \}$.

Учитывая то, что функции $\gamma_i(\tau)$, $i = 1, 2$, стабилизируются на бесконечности, используем для них представление

$$\gamma_{i,k}(\tau) = \gamma_i(+\infty) + \epsilon_{N,i,k}(\tau), \quad i = 1, 2; k = 0, 1, 2, \dots; \tau \in S.$$

При этом по любому наперед заданному $\epsilon > 0$ выберем N так, чтобы иметь

$$|\epsilon_{N,i,k}(\tau)| < \epsilon \quad \text{при} \quad i = 1, 2; k = 0, 1, 2, \dots; \tau \in S.$$

В соответствии с этим представлением, разложим оператор \mathcal{W} в сумму двух операторов

$$\mathcal{W} = W + W_\epsilon,$$

где оператор W является оператором с постоянными коэффициентами,

$$W \{u_k\}_{k=0}^\infty = \{ \{u_{k+2} + \gamma_1(+\infty)u_{k+1} + \gamma_2(+\infty)u_k\}_{k=0}^\infty, u_0, u_1 \},$$

а коэффициенты оператора W_ϵ малы равномерно по k ,

$$W_\epsilon \{u_k\}_{k=0}^\infty = \{ \{ \epsilon_{N,1,k+2}(\tau)u_{k+1} + \epsilon_{N,2,k+2}(\tau)u_k \}_{k=0}^\infty, 0, 0 \}.$$

Оценим норму оператора W_ϵ . Поскольку

$$\sum_{k=0}^\infty \left(\int_S |\epsilon_{N,1,k+2}(\tau)u_{k+1} + \epsilon_{N,2,k+2}(\tau)u_k|^2 d\tau \right) \leq 2\epsilon^2 \sum_{k=0}^\infty \int_S (|u_{k+1}|^2 + |u_k|^2) d\tau, \quad (51)$$

то $\|W_\epsilon\| \leq 2\epsilon$.

Теперь перейдем к решению неоднородного разностного уравнения с постоянными коэффициентами, отвечающего оператору W ,

$$u_{k+2} + \gamma_1(+\infty)u_{k+1} + \gamma_2(+\infty)u_k = f_{k+2}, \quad (52)$$

где $u_0 = \phi_0$, $u_1 = \phi_1(\cdot + h)$. Его характеристическое уравнение имеет вид, аналогичный уравнению (46):

$$\lambda^2 + \gamma_1(+\infty)\lambda + \gamma_2(+\infty) = 0.$$

Пусть λ_1 и λ_2 – корни этого уравнения.

Хорошо известно [9], что если $\lambda_1 \neq \lambda_2$, т. е. $\gamma_2(+\infty) \neq (\gamma_1(+\infty)/2)^2$, то решение соответственного однородного разностного уравнения имеет вид

$$u_k = C_1\lambda_1^k + C_2\lambda_2^k,$$

а решение уравнения (52) находится по формуле

$$u_k = \phi_1 \frac{\lambda_1^k - \lambda_2^k}{\lambda_1 - \lambda_2} - \phi_0 \gamma_2(+\infty) \frac{\lambda_1^{k-1} - \lambda_2^{k-1}}{\lambda_1 - \lambda_2} + \sum_{i=2}^k f_{k+2-i} \frac{\lambda_1^{i-1} - \lambda_2^{i-1}}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

Если же $\lambda_1 = \lambda_2 =: \lambda$, т. е. $\gamma_2(+\infty) = (\gamma_1(+\infty)/2)^2$, то решение имеет вид

$$u_k = \phi_1 k \lambda^{k-1} - \phi_0 \gamma_2(+\infty) (k-1) \lambda^{k-2} + \sum_{i=2}^k f_{k+2-i} \lambda^{i-2}.$$

Тогда в обоих случаях имеем оценку

$$\frac{1}{3} |u_k(\tau)|^2 \leq k^2 |\lambda|^{2(k-1)} |\phi_1(\tau + h)|^2 + (k-1)^2 |\gamma_2(+\infty)|^2 |\lambda|^{2(k-2)} |\phi_0(\tau)|^2 + \left(\sum_{i=2}^k |\lambda|^{(i-2)} |f_{k+2-i}(\tau)| \right)^2.$$

Здесь $|\lambda| = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|\}$. Нетрудно убедиться в том, что для последнего слагаемого выполняется оценка

$$\left(\sum_{i=2}^k |\lambda|^{(i-2)} |f_{k+2-i}(\tau)| \right)^2 \leq 2 \sum_{i=2}^k \sum_{j=i}^k |\lambda|^{2k-(i+j)} |f_i(\tau)| |f_j(\tau)|.$$

Просуммируем по k

$$\frac{1}{3} \sum_{k=2}^{\infty} |u_k(\tau)|^2 \leq |\phi_1(\tau+h)|^2 \sum_{k=2}^{\infty} k^2 |\lambda|^{2(k-1)} + |\phi_0(\tau)|^2 |y_2(+\infty)|^2 \sum_{k=2}^{\infty} (k-1)^2 |\lambda|^{2(k-2)} + \quad (53)$$

$$2 \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{i=2}^k \sum_{j=i}^k |\lambda|^{2k-(i+j)} |f_i(\tau)| |f_j(\tau)|.$$

Условием сходимости рядов в правой части неравенства (53) является оценка $|\lambda| < 1$. Рассмотрим отдельно последний ряд

$$\sum_{k=2}^{\infty} \sum_{i=2}^k \sum_{j=i}^k |\lambda|^{2k-i-j} |f_i| |f_j| = \sum_{i=2}^{\infty} |\lambda|^{-i} |f_i| \sum_{j=i}^{\infty} |\lambda|^{-j} |f_j| \sum_{k=j}^{\infty} |\lambda|^{2k} = \frac{1}{1-|\lambda|^2} \sum_{i=2}^{\infty} |\lambda|^{-i} |f_i| \sum_{j=i}^{\infty} |\lambda|^j |f_j| =$$

$$\frac{1}{1-|\lambda|^2} \sum_{i=2}^{\infty} |f_i| \sum_{m=0}^{\infty} |\lambda|^m |f_{i+m}| = \frac{1}{1-|\lambda|^2} \sum_{m=0}^{\infty} |\lambda|^m \sum_{i=2}^{\infty} |f_i| |f_{i+m}| \leq$$

$$\frac{1}{1-|\lambda|^2} \sum_{m=0}^{\infty} |\lambda|^m \left(\sum_{i=2}^{\infty} |f_i|^2 \sum_{i=2}^{\infty} |f_{i+m}|^2 \right)^{1/2} \leq \frac{1}{1-|\lambda|^2} \sum_{m=0}^{\infty} |\lambda|^m \sum_{i=2}^{\infty} |f_i|^2$$

Таким образом, правую часть (53) можно оценить через

$$|\phi_1(\tau+h)|^2 \frac{|\lambda|^2 (|\lambda|^4 - 3|\lambda|^2 + 4)}{(1-|\lambda|^2)^3} + |\phi_0(\tau)|^2 \frac{|\lambda|^2 + 1}{(1-|\lambda|^2)^3} + \frac{2}{(1-|\lambda|^2)(1-|\lambda|)} \sum_{i=2}^{\infty} |f_i|^2.$$

Проинтегрируем (53) по отрезку S

$$\int_{N-2l}^{N-l} \sum_{k=2}^{\infty} |u_k(\tau)|^2 d\tau = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{N+kl}^{N+(k+1)l} |u(\tau)|^2 d\tau = \|u\|_{L_2([N,+\infty))}^2 \leq$$

$$\frac{3|\lambda|^2 (|\lambda|^4 - 3|\lambda|^2 + 4)}{(1-|\lambda|^2)^3} \int_{N-2l}^{N-l} |\phi_1(\tau+l)|^2 d\tau + \frac{3(|\lambda|^2 + 1)}{(1-|\lambda|^2)^3} \int_{N-2l}^{N-l} |\phi_0(\tau)|^2 d\tau +$$

$$\frac{6}{(1-|\lambda|^2)(1-|\lambda|)} \int_{N-2l}^{N-l} \sum_{i=2}^{\infty} |f(\tau+ih)|^2 d\tau \leq C \left(\|\phi_1\|_{L_2([N-l, N])} + \|\phi_0\|_{L_2([N-2l, N-l])} + \|f\|_{L_2([N,+\infty))}^2 \right).$$

Получаем, что при $\max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|\} < 1$ выполняется оценка

$$\|u\|_{L_2([N,+\infty))} \leq c \left(\|\phi_1\|_{L_2([-N, -N+h])} + \|\phi_0\|_{L_2([N-2h, N-h])} + \|f\|_{L_2([N,+\infty))} \right), \quad (54)$$

причем константа не зависит от N . Таким образом, мы убедились в том, что норма оператора W^{-1} не зависит от N .

В силу этого мы можем взять такое N , что норма оператора W_ε будет достаточно мала для обратимости оператора $W + W_\varepsilon$. Действительно,

$$(W + W_\varepsilon)^{-1} = (W(I + W^{-1}W_\varepsilon))^{-1} = (I + W^{-1}W_\varepsilon)^{-1} W^{-1},$$

значит для обратимости оператора $W + W_\varepsilon$ достаточно выполнения оценки $\|W^{-1}W_\varepsilon\| < 1$, или $\|W_\varepsilon\| < 1/\|W^{-1}\|$. В силу (51), выбираем N так, чтобы $\varepsilon < 1/(2\|W^{-1}\|)$.

Таким образом, из (49) и (54) получаем

$$\|u\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq c \|f\|_{L_2(\mathbb{R})}. \quad (55)$$

Тогда сформулируем достаточные условия обратимости оператора B_0 .

Теорема 5.2. Пусть для оператора B_0 выполнено условие

$$b_0(\pm\infty, \lambda) := \sum_{j=0}^2 \gamma_j(\pm\infty) \lambda^j \neq 0 \quad (|\lambda| \leq 1).$$

Тогда существует ограниченный обратный оператор $B_0^{-1}(\tau, T)$.

Замечание 5.1. Условия обратимости оператора B_0 , полученные в этом пункте, легко обобщаются на случай $M + 1$ -членного оператора

$$B_0 = \sum_{j=0}^M \gamma_j(\tau) T^j$$

с коэффициентами, экспоненциально сходящимися на $\pm\infty$, и имеют аналогичный вид, а именно, требуется, чтобы $\sum_{j=0}^M \gamma_j(\pm\infty) \lambda^j \neq 0$ при $|\lambda| \leq 1$.

6. Разрешимость в весовом пространстве. Сформулируем основной результат о разрешимости функционально-дифференциального уравнения в весовых пространствах.

Теорема 6.1. Пусть для оператора $A_R : H_0^{s+2}(\mathbb{R}^2) \rightarrow H_0^s(\mathbb{R}^2)$ в (32) выполнены условия

$$a_{111} p q e^{2s_1 \tau} \pm (a_{121} p q + a_{211}) e^{(s_1 - s_2) \tau} + a_{221} e^{-2s_2 \tau} \neq 0 \quad (\tau \in \overline{\mathbb{R}}); \tag{56}$$

$$a_{111} + a_{110} \lambda + a_{11,-1} \lambda^2 \neq 0 \quad (|\lambda| \leq \sqrt{p/q} q^{s+1}); \tag{57}$$

$$a_{221} + a_{220} \lambda + a_{22,-1} \lambda^2 \neq 0 \quad (|\lambda| \leq \sqrt{p/q} p^{-s-1}). \tag{58}$$

Тогда существует ограниченный обратный оператор A_R^{-1} .

Доказательство. Действительно, условие (56) позволяет при исследовании исходного уравнения рассматривать оператор

$$I + \frac{\gamma_1(\tau)}{\gamma_0(\tau)} T + \frac{\gamma_2(\tau)}{\gamma_0(\tau)} T^2.$$

Его обратимость гарантируется теоремой 5.2. при условии, что корни уравнений

$$1 + \frac{\gamma_1(\pm\infty)}{\gamma_0(\pm\infty)} \lambda + \frac{\gamma_2(\pm\infty)}{\gamma_0(\pm\infty)} \lambda^2 = 0$$

лежат вне круга единичного радиуса. Подставляя значения пределов $\gamma_i(\pm\infty)$, $i = 0, 1, 2$, мы получаем два уравнения

$$\frac{a_{11,-1}}{a_{111}} q^{2(s+1)} \frac{p}{q} \lambda^2 + \frac{a_{110}}{a_{111}} q^{s+1} \sqrt{\frac{p}{q}} \lambda + 1 = 0,$$

$$\frac{a_{22,-1}}{a_{221}} p^{-2(s+1)} \frac{p}{q} \lambda^2 + \frac{a_{220}}{a_{221}} p^{-(s+1)} \sqrt{\frac{p}{q}} \lambda + 1 = 0.$$

После замен $\tilde{\lambda} = q^{s+1} \sqrt{p/q} \lambda$ и $\hat{\lambda} = p^{-(s+1)} \sqrt{p/q} \lambda$ мы получаем условия (57), (58).

Теперь в (55) используем функции $u(\tau) = e^{\tau(s_1 - s_2)/2} (e(\tau))^{s/2+1} w(\rho, \tau)$ и

$$f(\tau) = \rho^{-2} e^{\tau(s_1 - s_2)/2} (e(\tau))^{s/2+1} (e(\tau - h))^{-1} g(\rho, \tau - h)$$

(они принадлежат пространству $L_2(\mathbb{R})$ при почти всех $\rho > 0$):

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau(s_1 - s_2)} (e(\tau))^{s+2} |w(\rho, \tau)|^2 d\tau \leq c \int_{-\infty}^{\infty} \rho^{-4} e^{\tau(s_1 - s_2)} (e(\tau))^{s+2} (e(\tau - l))^{-2} |g(\rho, \tau - l)|^2 d\tau.$$

Умножим обе части последнего неравенства на $2\rho^{2s+3}$ и проинтегрируем по ρ от 0 до $+\infty$. Получаем оценку

$$\|w\|_{K^{s+2}}^2 \leq c \|g\|_{K^s}^2,$$

равносильную оценке

$$\|\tilde{u}\|_{H_{s+2}^0(\mathbb{R}^2)}^2 \leq c \|\tilde{f}\|_{H_s^0(\mathbb{R}^2)}^2.$$

Теорема доказана.

Замечание 6.1. Интересным является наличие параметра s в условиях теоремы 6.1. Увеличение этого параметра позволяет нам ослабить условие на коэффициенты a_{22k} , $k = 0, \pm 1$: уменьшается круг, куда не должны попасть корни выражения в (58). Но в то же время ужесточаются условия на коэффициенты a_{11k} , $k = 0, \pm 1$, т. к. увеличивается круг, где выражение из (57) не должно обращаться в ноль.

Замечание 6.2. Обратим внимание на то, что коэффициенты при смешанных производных входят лишь в условие (56), которое является значительно менее ограничительным по сравнению с (57) и (58).

Симметричные достаточные условия разрешимости получаются, если потребовать, чтобы $\theta_1(\tau) \neq 0$ на $\overline{\mathbb{R}}$. Тогда можно свести вопрос об обратимости оператора A_R к вопросу об обратимости оператора

$$\hat{B}_0 = \delta_0 I + \delta_1 T^{-1} + \delta_2 T^{-2} : L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R}),$$

где

$$\delta_0(\tau) = \frac{\theta_1(\tau+l)}{e(\tau+l)}, \quad \delta_1(\tau) = \frac{\theta_0(\tau+l)\sqrt{p/q}e^{s/2+1}(\tau)}{e^{s/2+2}(\tau+l)}, \quad \delta_2(\tau) = \frac{\theta_{-1}(\tau+l)(p/q)e^{s/2+1}(\tau)}{e(\tau+h)e^{s/2+1}(\tau+2l.96 * +968/j)}.$$

Аналогично убеждаемся, что для существования ограниченного обратного оператора \hat{B}_0 в этом случае достаточно выполнения условий

$$1 + \frac{\delta_1(\pm\infty)}{\delta_0(\pm\infty)}\lambda + \frac{\delta_2(\pm\infty)}{\delta_0(\pm\infty)}\lambda^2 \neq 0 \quad (|\lambda| \leq 1).$$

Подставляя предельные значения, получаем следующий результат.

Теорема 6.2. Пусть для оператора $A_R : H_0^{s+2}(\mathbb{R}^2) \rightarrow H_0^s(\mathbb{R}^2)$ выполнены условия

$$\begin{aligned} a_{11,-1}e^{2s_1\tau} \pm (a_{12,-1} + a_{21,-1}pq)e^{(s_1-s_2)\tau} + a_{22,-1}pqe^{-2s_2\tau} &\neq 0 \quad (\tau \in \overline{\mathbb{R}}); \\ a_{111} + a_{110}\lambda + a_{11,-1}\lambda^2 &\neq 0 \quad (|\lambda| \geq \sqrt{p/q}q^{s+1}); \\ a_{221} + a_{220}\lambda + a_{22,-1}\lambda^2 &\neq 0 \quad (|\lambda| \geq \sqrt{p/q}q^{-s-1}). \end{aligned}$$

Тогда существует ограниченный обратный оператор A_R^{-1} .

Комбинируя теоремы 6.1. и 6.2., приходим к такому утверждению.

Следствие 6.1. Пусть для оператора $A_R : H_0^{s+2}(\mathbb{R}^2) \rightarrow H_0^s(\mathbb{R}^2)$ из (32) одновременно выполняются условия

$$\begin{aligned} a_{111}pqe^{2s_1\tau} \pm (a_{121}pq + a_{211})e^{(s_1-s_2)\tau} + a_{221}e^{-2s_2\tau} &\neq 0 \quad (\tau \in \overline{\mathbb{R}}), \\ a_{11,-1}e^{2s_1\tau} \pm (a_{12,-1} + a_{21,-1}pq)e^{(s_1-s_2)\tau} + a_{22,-1}pqe^{-2s_2\tau} &\neq 0 \quad (\tau \in \overline{\mathbb{R}}), \end{aligned}$$

и пусть λ_1, λ_2 — корни уравнения

$$a_{111} + a_{110}\lambda + a_{11,-1}\lambda^2 = 0.$$

Если оба корня уравнения

$$a_{221} + a_{220}\lambda + a_{22,-1}\lambda^2 = 0$$

лежат внутри круга радиуса $\sqrt{p/q}q^{-s-1}$, когда $|\lambda_{1,2}| < \sqrt{p/q}q^{s+1}$, и лежат вне его, когда $|\lambda_{1,2}| > \sqrt{p/q}q^{s+1}$, то существует ограниченный обратный оператор A_R^{-1} .

В заключение остановимся на ситуации, когда в исходном уравнении либо все коэффициенты a_{ij1} одновременно обращаются в ноль, либо все коэффициенты $a_{ij,-1}$ одновременно обращаются в ноль, т. е. когда одна из функций θ_1 или θ_{-1} тождественно равна нулю. Без ограничения общности будем считать, что $\theta_1(\tau) \equiv 0$. Тогда решение уравнения сводится к обращению двучленного оператора

$$\beta w(\tau) = \gamma_0(\tau)w(\tau) + \gamma_1(\tau)w(\tau - h) : L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R}). \quad (59)$$

Следующий результат доказан в [2, теорема 11.1, параграф 11].

Теорема 6.3. Пусть коэффициенты γ_0, γ_1 принадлежат $L_\infty(\mathbb{R})$ и существуют пределы $\lim_{\tau \rightarrow \pm\infty} \gamma_{0,1}(\tau) = \gamma_{0,1}(\pm\infty)$. Тогда оператор (59) обратим в пространстве $L_p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$, в том и только в том случае, если выполнены следующие условия:

1. существует номер k_0 такой, что $|\gamma_{k_0}(\pm\infty)| > |\gamma_{1-k_0}(\pm\infty)|$;
2. существует число $\delta > 0$ такое, что почти всюду $|\gamma_{k_0}| > \delta$.

Замечание 6.3. Поскольку условия теоремы 6.3. совпадают с условиями теоремы 5.2. в случае вырождения коэффициентов при одном из сдвигов, то мы можем говорить о близости полученных в статье достаточных условий обратимости разностного оператора B_0 к необходимым.

Теперь рассмотрим решения уравнения (33), записанного в виде

$$A\tilde{u} = \tilde{f},$$

из пространства $H_{s+2}^k(\mathbb{R}^2)$, $k \in \mathbb{N}$. В этом случае, $\tilde{f} \in H_s^k(\mathbb{R}^2)$. Получим ниже алгебраические условия, при которых решения удовлетворяют априорной оценке

$$\|\tilde{u}\|_{H_{s+2}^k(\mathbb{R}^2)} \leq C\|\tilde{f}\|_{H_s^k(\mathbb{R}^2)}.$$

Эквивалентное утверждение состоит в наличии у оператора $A : H_{s+2}^k(\mathbb{R}^2) \rightarrow H_s^k(\mathbb{R}^2)$ тривиального ядра и замкнутого образа. Начнем со случая, когда $k = 1$,

$$\|\tilde{f}\|_{H_s^1(\mathbb{R}^2)}^2 = \int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{2(s-1)} |\tilde{f}(\xi)|^2 d\xi + \sum_{i=1}^2 \int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{2s} \left| \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \xi_i} \right|^2 d\xi < \infty.$$

Таким образом, $\tilde{f} \in H_{s-1}^0(\mathbb{R}^2)$ и $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \xi_i} \in H_s^0(\mathbb{R}^2)$. Заменяя параметр s на $(s - 1)$ в Теореме 6.1., получим условие, при котором существует единственное решение $\tilde{u} \in H_{s+1}^0(\mathbb{R}^2)$, и выполняется следующая оценка

$$\|\tilde{u}\|_{H_{s+1}^0(\mathbb{R}^2)} \leq C_0 \|\tilde{f}\|_{H_{s-1}^0(\mathbb{R}^2)}. \quad (60)$$

Предполагая, что $\tilde{u} \in H_{s+2}^1(\mathbb{R}^2)$, продифференцируем уравнение (33) по ξ_1 и по ξ_2 . Используя предыдущие краткие обозначения, перепишем данные уравнения в следующем виде:

$$A_1 \tilde{u}_{\xi_1} = \tilde{f}_{\xi_1} + B_1 \tilde{u}, \quad (61)$$

$$A_2 \tilde{u}_{\xi_2} = \tilde{f}_{\xi_2} + B_2 \tilde{u}. \quad (62)$$

Поскольку $\tilde{u} \in H_{s+1}^0(\mathbb{R}^2)$, члены $\xi_i \tilde{u}$, $i = 1, 2$, также принадлежат $H_s^0(\mathbb{R}^2)$, а операторы B_1, B_2 непрерывно отображают $H_{s+1}^0(\mathbb{R}^2)$ в $H_s^0(\mathbb{R}^2)$. Отсюда функции правой части уравнений (61), (62) принадлежат пространству $H_s^0(\mathbb{R}^2)$.

Предположим, что для операторов $A_1, A_2 : H_{s+2}^0(\mathbb{R}^2) \rightarrow H_s^0(\mathbb{R}^2)$ выполняются условия, аналогичные условиям Теоремы 6.1. Тогда данные операторы непрерывно обратимы, и мы имеем

$$\begin{aligned} \|\tilde{u}_{\xi_i}\|_{H_{s+2}^0(\mathbb{R}^2)} &\leq C_1 \|\tilde{f}_{\xi_i} + B_i \tilde{u}\|_{H_s^0(\mathbb{R}^2)} \leq C_1 \left(\|\tilde{f}_{\xi_i}\|_{H_s^0(\mathbb{R}^2)} + \|B_i \tilde{u}\|_{H_s^0(\mathbb{R}^2)} \right) \leq \\ &C_2 \left(\|\tilde{f}_{\xi_i}\|_{H_s^0(\mathbb{R}^2)} + \|\tilde{u}\|_{H_{s+1}^0(\mathbb{R}^2)} \right) \leq C_2 \left(\|\tilde{f}_{\xi_i}\|_{H_s^0(\mathbb{R}^2)} + C_0 \|\tilde{f}\|_{H_{s-1}^0(\mathbb{R}^2)} \right) \leq C_3 \|\tilde{f}\|_{H_s^1(\mathbb{R}^2)}. \end{aligned}$$

Совместно с (60) это дает, что

$$\|\tilde{u}\|_{H_{s+2}^1(\mathbb{R}^2)} \leq C \|\tilde{f}\|_{H_s^1(\mathbb{R}^2)}. \quad (63)$$

Выразим вышеупомянутые условия на A, A_1 и A_2 в явном виде. Если мы начнем с выражения

$$a_{111} p q e^{2s_1 \tau} \pm (a_{121} p q + a_{211}) e^{(s_1 - s_2) \tau} + a_{221} e^{-2s_2 \tau} \neq 0 \quad (\tau \in \mathbb{R})$$

общего для всех трех операторов, то необходимо дополнительно потребовать

$$a_{111} + a_{110} \lambda + a_{11,-1} \lambda^2 \neq 0 \quad \left(|\lambda| \leq \sqrt{\frac{p}{q}} q^s \right), \quad a_{221} + a_{220} \lambda + a_{22,-1} \lambda^2 \neq 0 \quad \left(|\lambda| \leq \sqrt{\frac{p}{q}} p^{-s} \right)$$

для A ,

$$a_{111} + a_{110} \lambda + a_{11,-1} \lambda^2 \neq 0 \quad \left(|\lambda| \leq \sqrt{\frac{p}{q}} q^s \right), \quad a_{221} + a_{220} \lambda + a_{22,-1} \lambda^2 \neq 0 \quad \left(|\lambda| \leq \sqrt{\frac{p}{q}} p^{-(s+1)} q^{-1} \right)$$

для A_1 и

$$a_{111} + a_{110} \lambda + a_{11,-1} \lambda^2 \neq 0 \quad \left(|\lambda| \leq \sqrt{\frac{p}{q}} q^{s+1} p \right), \quad a_{221} + a_{220} \lambda + a_{22,-1} \lambda^2 \neq 0 \quad \left(|\lambda| \leq \sqrt{\frac{p}{q}} p^{-s} \right)$$

для A_2 . Поскольку $p q > 1$, пересечение данных условий выражается последними двумя выражениями. Альтернативные условия, связанные с выражением

$$a_{11,-1} e^{2s_1 \tau} \pm (a_{12,-1} + a_{21,-1} p q) e^{(s_1 - s_2) \tau} + a_{22,-1} p q e^{-2s_2 \tau} \neq 0 \quad (\tau \in \mathbb{R}),$$

формулируются аналогично. Запишем ниже полученный результат.

Теорема 6.3. *Априорная оценка*

$$\|u\|_{H_1^{s+2}(\mathbb{R}^2)} \leq C \|f\|_{H_1^s(\mathbb{R}^2)}$$

выполняется для решений уравнения (32), если выполняется один из следующих двух блоков условий:

(i)

$$a_{111} p q e^{2s_1 \tau} \pm (a_{121} p q + a_{211}) e^{(s_1 - s_2) \tau} + a_{221} e^{-2s_2 \tau} \neq 0 \quad (\tau \in \mathbb{R}),$$

$$a_{111} + a_{110} \lambda + a_{11,-1} \lambda^2 \neq 0 \quad \left(|\lambda| \leq \sqrt{\frac{p}{q}} q^{s+1} p \right), \quad a_{221} + a_{220} \lambda + a_{22,-1} \lambda^2 \neq 0 \quad \left(|\lambda| \leq \sqrt{\frac{p}{q}} p^{-s} \right);$$

(ii)

$$a_{11,-1}e^{2s_1\tau} \pm (a_{12,-1} + a_{21,-1}pq) e^{(s_1-s_2)\tau} + a_{22,-1}pqe^{-2s_2\tau} \neq 0 \quad (\tau \in \mathbb{R}),$$

$$a_{111} + a_{110}\lambda + a_{11,-1}\lambda^2 \neq 0 \quad \left(|\lambda| \geq \sqrt{\frac{p}{q}}q^s\right), \quad a_{221} + a_{220}\lambda + a_{22,-1}\lambda^2 \neq 0 \quad \left(|\lambda| \geq \sqrt{\frac{p}{q}}p^{-(s+1)}q^{-1}\right).$$

Сформулируем очевидное обобщение для натурального k .**Теорема 6.4.** *Априорная оценка*

$$\|u\|_{H_k^{s+2}(\mathbb{R}^2)} \leq C\|f\|_{H_k^s(\mathbb{R}^2)}$$

выполняется для решений уравнения (32), если выполняется один из следующих двух блоков условий:

(i)

$$a_{111}pqe^{2s_1\tau} \pm (a_{121}pq + a_{211}) e^{(s_1-s_2)\tau} + a_{221}e^{-2s_2\tau} \neq 0 \quad (\tau \in \mathbb{R}),$$

$$a_{111} + a_{110}\lambda + a_{11,-1}\lambda^2 \neq 0 \quad \left(|\lambda| \leq \sqrt{\frac{p}{q}}q^{s+1}p^k\right), \quad a_{221} + a_{220}\lambda + a_{22,-1}\lambda^2 \neq 0 \quad \left(|\lambda| \leq \sqrt{\frac{p}{q}}p^{-(s+1-k)}\right);$$

(ii)

$$a_{11,-1}e^{2s_1\tau} \pm (a_{12,-1} + a_{21,-1}pq) e^{(s_1-s_2)\tau} + a_{22,-1}pqe^{-2s_2\tau} \neq 0 \quad (\tau \in \mathbb{R}),$$

$$a_{111} + a_{110}\lambda + a_{11,-1}\lambda^2 \neq 0 \quad \left(|\lambda| \geq \sqrt{\frac{p}{q}}q^{s+1-k}\right), \quad a_{221} + a_{220}\lambda + a_{22,-1}\lambda^2 \neq 0 \quad \left(|\lambda| \geq \sqrt{\frac{p}{q}}p^{-(s+1)}q^{-k}\right).$$

Пример 6.1. *Исследуем разрешимость уравнения*

$$au_{x_1x_1}(x_1, x_2) + u_{x_1x_1}(x_1/2, 2x_2) + bu_{x_1x_2}(x_1/2, 2x_2) + u_{x_2x_2}(x_1/2, 2x_2) + cu_{x_2x_2}(2x_1, x_2/2) = f(x_1, x_2). \quad (64)$$

Здесь $p = q = 2$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $f \in H_0^s(\mathbb{R}^2)$, $s \notin \mathbb{Z}$. Тогда $a_{110} = a$, $a_{111} = 2$, $2a_{121} + a_{211}/2 = b$, $a_{221} = 1/2$, $a_{22,-1} = 2c$, остальные коэффициенты нулевые. Воспользуемся теоремой 6.1. Условие (56) имеет вид

$$4e^{2\tau} + \frac{1}{4}e^{-2\tau} \neq \pm b, \quad \forall \tau \in \overline{\mathbb{R}},$$

что возможно лишь когда $|b| < 2$. Условия (57) и (58) выглядят следующим образом:

$$2 + a\lambda = 0 \quad \text{только при } |\lambda| > 2^{s+1},$$

$$\frac{1}{2} + 2c\lambda^2 = 0 \quad \text{только при } |\lambda| > 2^{-s-1}.$$

Это значит, что при $|a| < 2^{-s}$, $|c| < 2^{2s}$ и $|b| < 2$ уравнение (64) имеет единственное решение в $H_0^{s+2}(\mathbb{R}^2)$.**Благодарность.** Автор выражает благодарность А. Л. Скубачевскому и Л. Е. Россовскому за поддержку, внимание к работе, ценные замечания и советы.

Список литературы

1. Агранович М. С., Селицкий А. М. 2013. Дробные степени операторов, отвечающих коэрцитивным задачам в липшицевых областях. Функциональный анализ и его приложения, 47(2): 2–17. DOI: 10.4213/faa3109
2. Антоневиц А. Б. 1988. Линейные функциональные уравнения: Операторный подход. Мн.: Университетское, 232.
3. Антоневиц А. Б., Ахматова А. А. 2012. Спектральные свойства дискретного оператора взвешенного сдвига. Труды Института математики, 20(1): 14–21.
4. Вишик М. И. 1951. О сильно эллиптических системах дифференциальных уравнений. Математический сборник, 29(71), 3: 615–676.
5. Лийко В. В., Скубачевский А. Л. 2019. Сильно эллиптические дифференциально-разностные уравнения со смешанными краевыми условиями в цилиндрической области. Современная математика. Фундаментальные направления, 65(4): 635–654. DOI: 10.22363/2413-3639-2019-65-4-635-654
6. Лийко В. В., Скубачевский А. Л. 2020. Смешанные задачи для сильно эллиптических дифференциально-разностных уравнений в цилиндре. Математические заметки, 107(5): 693–716. DOI: 10.4213/mzm12597
7. Кондратьев В. А. 1967. Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками. Труды Московского математического общества, 16: 209–292.

8. Пламеневский Б. А. 1986. Алгебры псевдодифференциальных операторов. М.: Наука, 256.
9. Полянин А. Д., Манжиров А. В. 1998. Справочник по интегральным уравнениям: Точные решения. М.: Факториал, 432.
10. Россовский Л. Е. 1996. Коэрцитивность функционально-дифференциальных уравнений. Математические заметки, 59(1): 103–113. DOI: 10.4213/mzm1698
11. Россовский Л. Е. 2001. Краевые задачи для эллиптических функционально-дифференциальных уравнений с растяжением и сжатием аргументов. Труды Московского математического общества, 62: 199–228.
12. Россовский Л. Е. 2011. О спектральной устойчивости функционально-дифференциальных уравнений. Математические заметки, 90(6): 885–901. DOI: 10.4213/mzm8753
13. Россовский Л. Е. 2012. К вопросу о коэрцитивности функционально-дифференциальных уравнений. Современная математика. Фундаментальные направления, 45: 122–131. DOI: 10.1007/s10958-014-2018-5
14. Россовский Л. Е. 2014. Эллиптические функционально-дифференциальные уравнения со сжатием и растяжением аргументов неизвестной функции. Современная математика. Фундаментальные направления. 54: 3–138. DOI: 10.1007/s10958-017-3360-1
15. Россовский Л. Е., Тасевич А. Л. 2015. Первая краевая задача для сильно эллиптического функционально-дифференциального уравнения с ортотропными сжатиями. Математические заметки, 97(5): 733–748. DOI: 10.4213/mzm10654
16. Россовский Л. Е., Тасевич А. Л. 2017. Об однозначной разрешимости функционально-дифференциального уравнения с ортотропными сжатиями в весовых пространствах. Дифференциальные уравнения, 53(12): 1631–1644. DOI: 10.1134/S037406411712010X
17. Скубачевский А. Л. 1986. Эллиптические задачи с нелокальными условиями вблизи границы. Математический сборник, 129(171), 2: 279–302. DOI: 10.1070/SM1987v057n01ABEH003070
18. Скубачевский А. Л. 2016. Краевые задачи для эллиптических функционально-дифференциальных уравнений и их приложения. Успехи математических наук, 71, 5(431): 3–112. DOI: 10.4213/rm9739
19. Скубачевский А. Л. 2018. Гипотеза Като для эллиптических дифференциально-разностных операторов с вырождением в цилиндре. Доклады Российской академии наук, 478(2): 145–147. DOI: 10.7868/S0869565218020056
20. Скубачевский А. Л., Шамин Р. В. 2001. Параболические дифференциально-разностные уравнения второго порядка. Доклады Российской академии наук, 379(5): 595–598.
21. Auscher P., Hofmann S., McIntosh A., Tchamitchian P. 2001. The Kato square root problem for higher order elliptic operators and systems on \mathbb{R}^n . Journal of Evolution Equations, 1: 361–385. DOI: 10.1007/PL00001377
22. Gårding L. 1953. Dirichlet's problem for linear elliptic partial differential equations. Mathematica Scandinavica, 1: 55–72. DOI: 10.7146/math.scand.a-10364
23. Kato T. 1961. Fractional powers of dissipative operators. The Journal of Mathematical Society of Japan, 13(3): 264–274. DOI: 10.2969/jmsj/01330246
24. McIntosh A. 1972. On the comparability of $A^{1/2}$ and $A^{*1/2}$. Proceedings of the American Mathematical Society, 32(2): 430–434. DOI: 10.2307/2037834
25. Skubachevskii A. L. 1986. The first boundary value problem for strongly elliptic differential-difference equations. Journal of Differential Equations. 63: 332–361. DOI: 10.1016/0022-0396(86)90060-4
26. Skubachevskii A. L. 1997. Elliptic functional differential equations and applications. Birkhäuser, Basel–Boston–Berlin, 1997. 294. DOI: 10.1007/978-3-0348-9033-5.
27. Tasevich A.L. 2017. Analysis of functional-differential equation with orthotropic contraction. Mathematical modelling of natural phenomena, 12(6): 240–248. DOI: 10.1051/mmnp/2017076

References

1. Agranovich M. S., Selitskii A. M. 2013. Fractional powers of operators corresponding to coercive problems in Lipschitz domains. *Functional Analysis and Its Applications*, 47(2): 83–95 (in Russian). DOI: 10.1007/s10688-013-0013-0
2. Antonevich A. B. 1996. *Linear functional equations. Operator approach*. Birkh, user, 183 (in Russian).
3. Antonevich A. B., Akhmatova A. A. 2012. Spectral properties of discrete weighted shift operators. *Trudy Instituta Matematiki*, 20(1): 14–21 (in Russian).
4. Vishik M. I. 1951. On strongly elliptic systems of differential equations. *Matematicheskii Sbornik*, 29(71), 3: 615–676 (in Russian).
5. Liiko V. V., Skubachevskii A. L. 2019. Strongly elliptic differential-difference equations with mixed boundary conditions in a cylindric domain. *Contemporary Mathematics. Fundamental Directions*, 65(4): 635–654 (in Russian). DOI: 10.22363/2413-3639-2019-65-4-635-654
6. Liiko V. V., Skubachevskii A. L. 2020. Mixed Problems for strongly elliptic differential-difference equations in a cylinder. *Mathematical Notes*, 107(5): 770–790 (in Russian). DOI: 10.1134/S0001434620050065
7. Kondrat'ev V. A. 1967. Boundary value problems for elliptic equations in domains with conical or angular points. *Trudy Moskovskogo Matematicheskogo Obshchestva*, 16: 209–292 (in Russian).
8. Plamenevskii B. A. 1989. *Algebras of pseudodifferential operators*. Springer Dordrecht, 292 (in Russian). DOI: 10.1007/978-94-009-2364-5
9. Polyanin A. D., Manzhirov A. V. 1998. *Handbook of integral equations*. CRC Press LLC, 796 (in Russian).
10. Rossovskii L. E. 1996. Coerciveness of functional-differential equations. *Mathematical Notes*, 59(1): 75–82 (in Russian). DOI: 10.1007/BF02312468
11. Rossovskii L. E. 2001. Boundary value problems for elliptic functional-differential equations with extension and contraction of arguments. *Trudy Moskovskogo Matematicheskogo Obshchestva*, 62: 199–228 (in Russian).
12. Rossovskii L. E. 2011. On the spectral stability of functional-differential equations. *Mathematical Notes*, 90: 867–881 (in Russian). DOI: 10.1134/S0001434611110265
13. Rossovskii L. E. 2014. The coercivity of functional differential equations. *Journal of Mathematical Sciences*, 201: 663–672 (in Russian). DOI: 10.1007/s10958-014-2018-5
14. Rossovskii L. E. 2017. Elliptic functional differential equations with contractions and extensions of independent variables of the unknown function. *Journal of Mathematical Sciences*. 223: 351–493 (in Russian). DOI: 10.1007/s10958-017-3360-1
15. Rossovskii L. E., Tasevich A.L. 2015. The first boundary-value problem for strongly elliptic functional-differential equations with orthotropic contractions. *Mathematical Notes*, 97: 745–758 (in Russian). DOI: 10.1134/S0001434615050090
16. Rossovskii L. E., Tasevich A.L. 2018. Unique solvability of a functional-differential equation with orthotropic contractions in weighted spaces. *Differential Equations*, 53: 1631–1644 (in Russian). DOI: 10.1134/S0012266117120102
17. Skubachevskii A. L. 1987. Elliptic problems with nonlocal conditions near the boundary. *Math. USSR-Sb*, 57(1): 293–316 (in Russian). DOI: 10.1070/SM1987v057n01ABEH003070
18. Skubachevskii A. L. 2016. Boundary-value problems for elliptic functional-differential equations and their applications. *Russian Mathematical Surveys*, 71(5): 801–906 (in Russian). DOI: 10.1070/RM9739
19. Skubachevskii A. L. 2018. The Kato conjecture for elliptic differential-difference operators with degeneration in a cylinder. *Doklady Mathematics*, 97(1): 32–34 (in Russian). DOI: 10.1134/S1064562418010106
20. Skubachevskii A. L., Shamin R. V. 2001. Second-order parabolic differential-difference equations. *Doklady Mathematics*, 64(1): 98–101 (in Russian).
21. Auscher P., Hofmann S., McIntosh A., Tchamitchian P. 2001. The Kato square root problem for higher order elliptic operators and systems on \mathbb{R}^n . *Journal of Evolution Equations*, 1: 361–385. DOI: 10.1007/PL00001377

22. Gårding L. 1953. Dirichlet's problem for linear elliptic partial differential equations. *Mathematica Scandinavica*, 1: 55–72. DOI: 10.7146/math.scand.a-10364
23. Kato T. 1961. Fractional powers of dissipative operators. *The Journal of Mathematical Society of Japan*, 13(3): 264–274. DOI: 10.2969/jmsj/01330246
24. McIntosh A. 1972. On the comparability of $A^{1/2}$ and $A^{*1/2}$. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 32(2): 430–434. DOI: 10.2307/2037834
25. Skubachevskii A. L. 1986. The first boundary value problem for strongly elliptic differential-difference equations. *Journal of Differential Equations*. 63: 332–361. DOI: 10.1016/0022-0396(86)90060-4
26. Skubachevskii A. L. 1997. *Elliptic functional differential equations and applications*. Birkhäuser, Basel–Boston–Berlin, 1997. 294. DOI: 10.1007/978-3-0348-9033-5.
27. Tasevich A.L. 2017. Analysis of functional-differential equation with orthotropic contraction. *Mathematical modelling of natural phenomena*, 12(6): 240–248. DOI: 10.1051/mmnp/2017076

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 10.10.2022

Поступила после рецензирования 21.11.2022

Принята к публикации 26.11.2022

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Тасевич Алла Львовна – кандидат физико-математических наук, младший научный сотрудник Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» РАН, ассистент, Российский университет дружбы народов

ул. Вавилова, д. 40, Москва, 119333, Россия,

ул. Миклухо-Маклая, д. 6, Москва, 117198, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Alla Tasevich – PhD, junior researcher, Federal research center "Computer Science and Control" of RAS, Moscow, Russia, assistant professor, RUDN University, Moscow, Russia

ФИЗИКА. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 537.531.3

DOI 10.52575/2687-0959-2022-54-4-242-251

MSC 78A40

краткое сообщение

КАЧЕСТВЕННЫЕ ОСОБЕННОСТИ ПЕРЕХОДНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ БЫСТРЫХ И МЕДЛЕННЫХ ЧАСТИЦ

В. В. Сыщенко , В. А. Кривцов 

Белгородский государственный национальный исследовательский университет,
Белгород, 308015, Россия

E-mail: syshch@yandex.ru

Аннотация. Переходное излучение возникает при движении заряженной частицы сквозь границу раздела двух сред с различными электромагнитными свойствами, в простейшем случае — границы вакуума и проводника. Интерес к явлению переходного излучения резко возрос, когда стало ясно, что его выход резко растет с энергией излучающей частицы. Поэтому наиболее интенсивно исследуется и используется на практике излучение частиц высоких энергий, что формирует у многих исследователей определенные интуитивные ожидания относительно характера излучения, неверные, однако, в общем случае. В статье систематически обсуждаются характеристики (спектрально-угловая плотность и поляризация) переходного излучения при наклонном падении частицы на проводящую плоскость, прослежено происхождение отличий этих характеристик в случае медленных (умеренно релятивистских и нерелятивистских) частиц от интуитивно ожидаемых характеристик излучения ультрарелятивистских частиц.

Ключевые слова: переходное излучение, быстрые частицы, медленные частицы, высокие энергии, низкие энергии, детектор, мониторинг пучков

Для цитирования: Сыщенко В. В., Кривцов В. А. 2022. Качественные особенности переходного излучения быстрых и медленных частиц. Прикладная математика & Физика. 54(4): 242–251.

DOI 10.52575/2687-0959-2022-54-4-242-251

QUALITATIVE FEATURES OF THE TRANSITION RADIATION FROM SLOW PARTICLES vs FAST ONES

Vladislav Syshchenko , Vadim Krivtsov 

Belgorod National Research University,
Belgorod, 308015, Russia

E-mail: syshch@yandex.ru

Received September, 25, 2022

Abstract. Transition radiation arises while the charged particle crosses the interface between two media with different electromagnetic properties, e.g. the boundary between vacuum and the conductor in the simplest case. The interest to the transition radiation is due to its yield rapidly increases with the particle's energy rise. Since that, the main accent in researches and practical use is paid to the radiation from the high energy particles. This forms among the researches the specific intuitive picture concerning the radiation peculiarities, which could be not valid in the general case. The present article systematically studies the characteristics (both the spectral-angular density and the polarization) of the transition radiation under oblique incidence of the particle on the conducting plane. The genesis of differences of that characteristics in the case of slow (slightly relativistic and non-relativistic) particles from the intuitively expectable ones for the ultrarelativistic particles is clearly traced out.

Key words: transition radiation, fast particles, slow particles, high energy, low energy, detector, beam monitoring

For citation: Syshchenko V., Krivtsov V. 2022. Qualitative features of the transition radiation from slow particles vs fast ones. Applied Mathematics & Physics. 54(4): 242–251. (in Russian) DOI 10.52575/2687-0959-2022-54-4-242-251

1. Введение. Равномерно движущаяся частица может породить излучение электромагнитных волн либо в однородной среде, если выполняется условие черенковского излучения, либо при взаимодействии с неоднородностями среды. В последнем случае принято разделять переходное излучение, возникающее при пересечении движущейся частицей двух сред, и дифракционное излучение, отвечающее

случаю движения частицы вблизи пространственно локализованной неоднородности среды (мишени) без пересечения её границы. С микроскопической точки зрения, такое излучение порождается нестационарными токами, индуцированными в мишени полем пролетающей частицы. В макроскопическом подходе излучение обусловлено условиями, налагаемыми на решения уравнений Максвелла на границе мишени. Оказывается, что удовлетворить граничным условиям можно, лишь прибавив к полю, создаваемому в двух средах пролетающей частицей, решение свободных уравнений Максвелла, которое и представляет собой поле излучения (см. [12, 10]).

Переходное излучение было предсказано в работе В. Л. Гинзбурга и И. М. Франка [4]. В настоящее время оно широко используется для детектирования заряженных частиц и мониторинга пучков в ускорительной технике (см., например, обзор [6] и ссылки в нем).

Интерес к переходному излучению связан, помимо прочего, с тем обстоятельством, что в релятивистском случае его выход быстро возрастает с ростом энергии частицы. Поэтому основной интерес большинства исследователей сосредоточен на переходном излучении частиц высокой энергии (ультрарелятивистских частиц), хотя и излучение нерелятивистских частиц находит свои практические приложения (см., например, недавнюю серию двух статей [14, 15]). В настоящей статье мы обращаем внимание на некоторые качественные особенности переходного излучения медленных частиц, оказывающиеся неожиданными и контринтуитивными в случае, когда такая интуиция формируется на задачах, касающихся частиц высокой энергии.

2. Излучение произвольно движущегося заряда в вакууме. Напомним, как описывается излучение электромагнитных волн, возникающее при произвольном заданном движении точечного заряда e по траектории $\mathbf{r}_e(t)$ [7, 2, 1]. Фурье-компонента векторного потенциала излученной электромагнитной волны может быть записана в виде

$$\mathbf{A}_\omega(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}}{r} \mathbf{I},$$

где скорость света в вакууме, вектор \mathbf{I} , пропорциональный амплитуде расходящейся волны векторного потенциала, определяется выражением

$$\mathbf{I} = e \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{v}(t) \exp\{i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r}_e(t))\} dt, \quad (1)$$

\mathbf{k} — волновой вектор излученной волны, $k = |\mathbf{k}| = \omega/c$, $\mathbf{v}(t) = d\mathbf{r}_e(t)/dt$ — скорость заряженной частицы. Тогда магнитное и электрическое поля в излученной волне будут описываться формулами

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_\omega &= i \mathbf{k} \times \mathbf{I} = \frac{i}{c} \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}}{r} \mathbf{k} \times \mathbf{I}, \\ \mathbf{E}_\omega &= \mathbf{H}_\omega \times \frac{\mathbf{k}}{k} = \frac{i}{\omega} \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}}{r} (\mathbf{k} \times \mathbf{I}) \times \mathbf{k} = \frac{i\omega}{c^2} \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}}{r} (\mathbf{e}_k \times \mathbf{I}) \times \mathbf{e}_k = \frac{i\omega}{c^2} \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}}{r} (\mathbf{I} - (\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{I})) \end{aligned} \quad (2)$$

(где $\mathbf{e}_k = \mathbf{k}/|\mathbf{k}|$ — единичный вектор в направлении излучения; разность в последнем выражении оставляет от вектора \mathbf{I} только поперечную этому направлению компоненту, обеспечивая тем самым поперечность излученной волны), а спектрально-угловая плотность излучения будет описываться формулой

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\omega d\Omega} = \frac{1}{4\pi^2 c} |\mathbf{k} \times \mathbf{I}|^2. \quad (3)$$

Помимо просуммированной по поляризациям интенсивности излучения (3), интерес представляет также поляризации излучения, то есть ориентация вектора электрического поля излученной волны. Для исследования поляризации вводятся два единичных вектора поляризации \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 , ортогональных направлению излучения и друг другу, причем $\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_k \times \mathbf{e}_1$. Проецируя на них вектор электрического поля (2), приходим к формуле, описывающей спектрально-угловую плотность излучения с определенной поляризацией:

$$\left(\frac{d\mathcal{E}}{d\omega d\Omega} \right)_{1,2} = \frac{\omega^2}{4\pi^2 c^3} |\mathbf{e}_{1,2} \cdot \mathbf{I}|^2. \quad (4)$$

Нетрудно видеть, что суммирование по поляризациям возвращает нас к формуле (3).

3. Переходное излучение на проводящей плоскости. Простейшей задачей в теории переходного излучения является задача об излучении частицей, падающей из вакуума на бесконечную проводящую плоскость. Анализ показывает [5], что для хороших проводников (серебро, медь) приближение идеального проводника в задаче о переходном излучении будет справедливым вплоть до частот видимого света включительно. В этом случае найти решение, удовлетворяющее граничным условиям на поверхности металла, позволяет известный из электростатики метод изображений [8, 9, 10, 13]: поле, создаваемое заряженной частицей в присутствии проводящей плоскости в полупространстве, свободном

от проводника (в котором и находится частица) будет таким же, как поле, создаваемое самой частицей (реальным зарядом e) и ее зеркальным изображением в плоскости металла (фиктивным зарядом той же абсолютной величины и противоположного знака $-e$). Обращение к методу изображений позволяет воспользоваться для описания возникающего излучения формулами (3) и (4), где вектор Γ будет представлять собой сумму двух слагаемых, описывающих вклады реального и фиктивного зарядов, причем в момент соприкосновения частицы с плоскостью, принимаемый за нулевой момент времени, оба заряда исчезают.

Случай нормального падения частицы на проводящую плоскость описан во всех учебниках, затрагивающих тему переходного излучения (см., например, [8, 9, 10, 11, 13]), мы же обратимся к случаю наклонного падения.

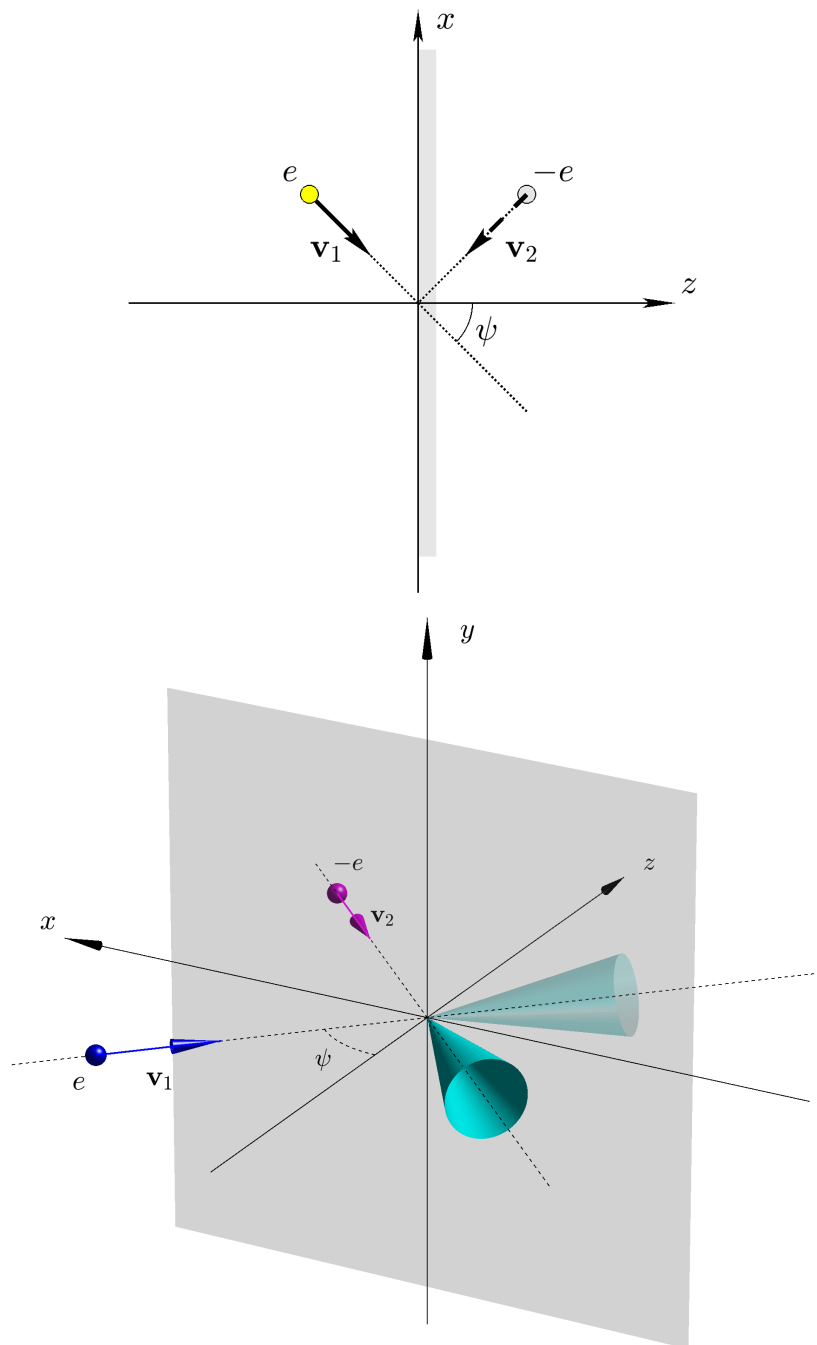


Рис. 1. Падение частицы под углом ψ к бесконечной проводящей плоскости.

Траектория частицы лежит в плоскости (x, z)

Fig. 1. The particle incidence under the angle ψ on the infinite conducting plane.

The particle's trajectory lies in the (x, z) plane

Рассмотрим ситуацию, схематически показанную на рис. 1. В этом случае возникающее излучение

будет описываться вектором \mathbf{I} , содержащим вклады от двух зарядов: реального и его изображения:

$$\mathbf{I} = e \int_{-\infty}^0 \mathbf{v}_1(t) \exp\{i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r}_1(t))\} dt - e \int_{-\infty}^0 \mathbf{v}_2(t) \exp\{i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r}_2(t))\} dt, \quad (5)$$

причем радиус-векторы этих двух зарядов

$$\mathbf{r}_1(t) = \mathbf{v}_1 t, \quad \mathbf{r}_2(t) = \mathbf{v}_2 t. \quad (6)$$

Выполняя интегрирование, получим

$$\mathbf{I} = -ie \left(\frac{\mathbf{v}_1}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}_1} - \frac{\mathbf{v}_2}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}_2} \right) = -\frac{ie}{\omega} \left(\frac{\mathbf{v}_1}{1 - \mathbf{e}_k \mathbf{v}_1/c} - \frac{\mathbf{v}_2}{1 - \mathbf{e}_k \mathbf{v}_2/c} \right) = -\frac{ie}{\omega} (I_1 \mathbf{v}_1 - I_2 \mathbf{v}_2). \quad (7)$$

Угловая зависимость интенсивности переходного излучения описывается, как мы помним, векторным произведением

$$\mathbf{k} \times \mathbf{I} = -\frac{ie}{\omega} (I_1 \mathbf{k} \times \mathbf{v}_1 - I_2 \mathbf{k} \times \mathbf{v}_2) = -\frac{ie}{c} (I_1 \mathbf{e}_k \times \mathbf{v}_1 - I_2 \mathbf{e}_k \times \mathbf{v}_2). \quad (8)$$

Уже на этом уровне удобно провести качественный анализ возникающего излучения, который иллюстрируется рисунками 2 и 3.

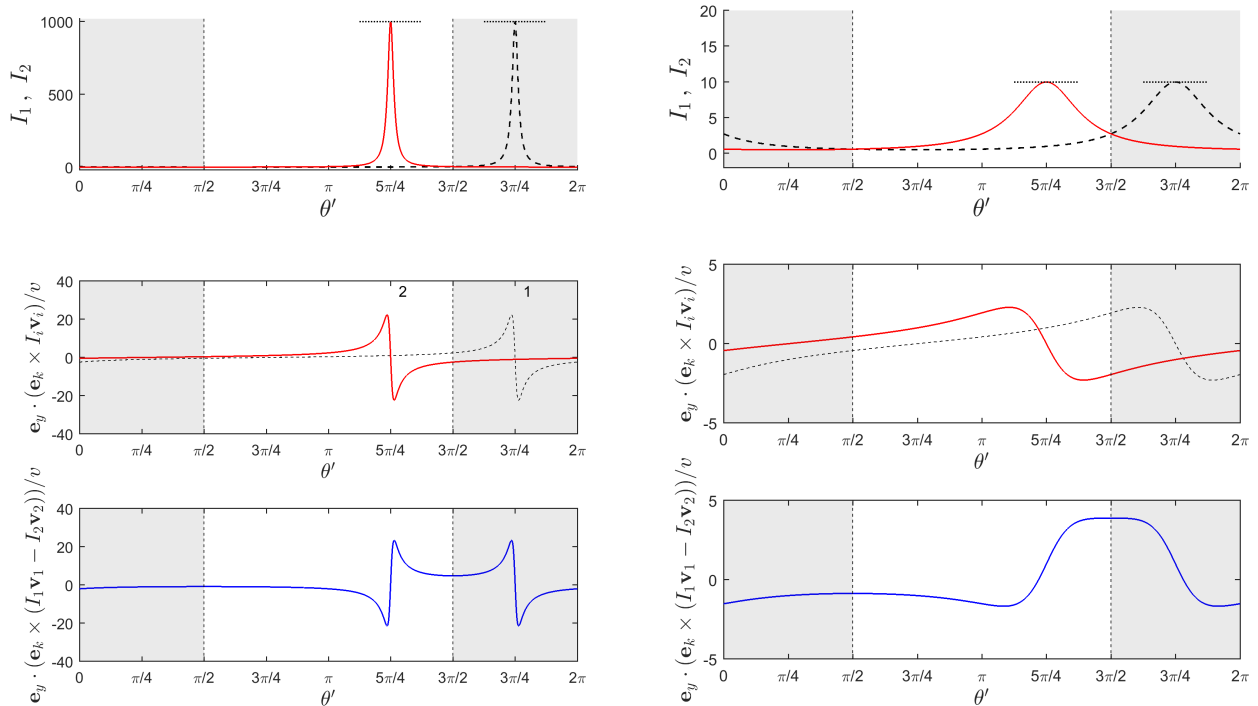


Рис. 2. Для понимания качественной картины достаточно рассмотреть излучение в плоскости (x, z) , введя в этой плоскости угол излучения θ' ($\theta' = \theta$ при $\varphi = 0$ и $\theta' = 2\pi - \theta$ при $\varphi = \pi$); светлая полоса соответствует фактической области излучения в заднее полупространство. В верхнем ряду представлены графики входящих в (7) величин I_1 (сплошная линия) и I_2 (штриховая линия), в среднем ряду – парциальные вклады в (8), в нижнем – их сумма. В левом столбце $v = 0.999c$, в правом $v = 0.9c$; угол падения выбран равным $\psi = \pi/4$

Fig. 2. For the qualitative understanding, let us intriduse the radiation angle θ' in the (x, z) plane ($\theta' = \theta$ when $\varphi = 0$ and $\theta' = 2\pi - \theta$ when $\varphi = \pi$); white band corresponds to the real range of radiation that is the backward half-space. The plots for the values I_1 (solid line) and I_2 (dashed line) in (7) are presented in the upper row for $v = 0.999c$ (left column) and $v = 0.9c$ (right column). The middle row presents the partial contributions to (8), and the lower row presents their sums.

The angle of incidence is $\psi = \pi/4$

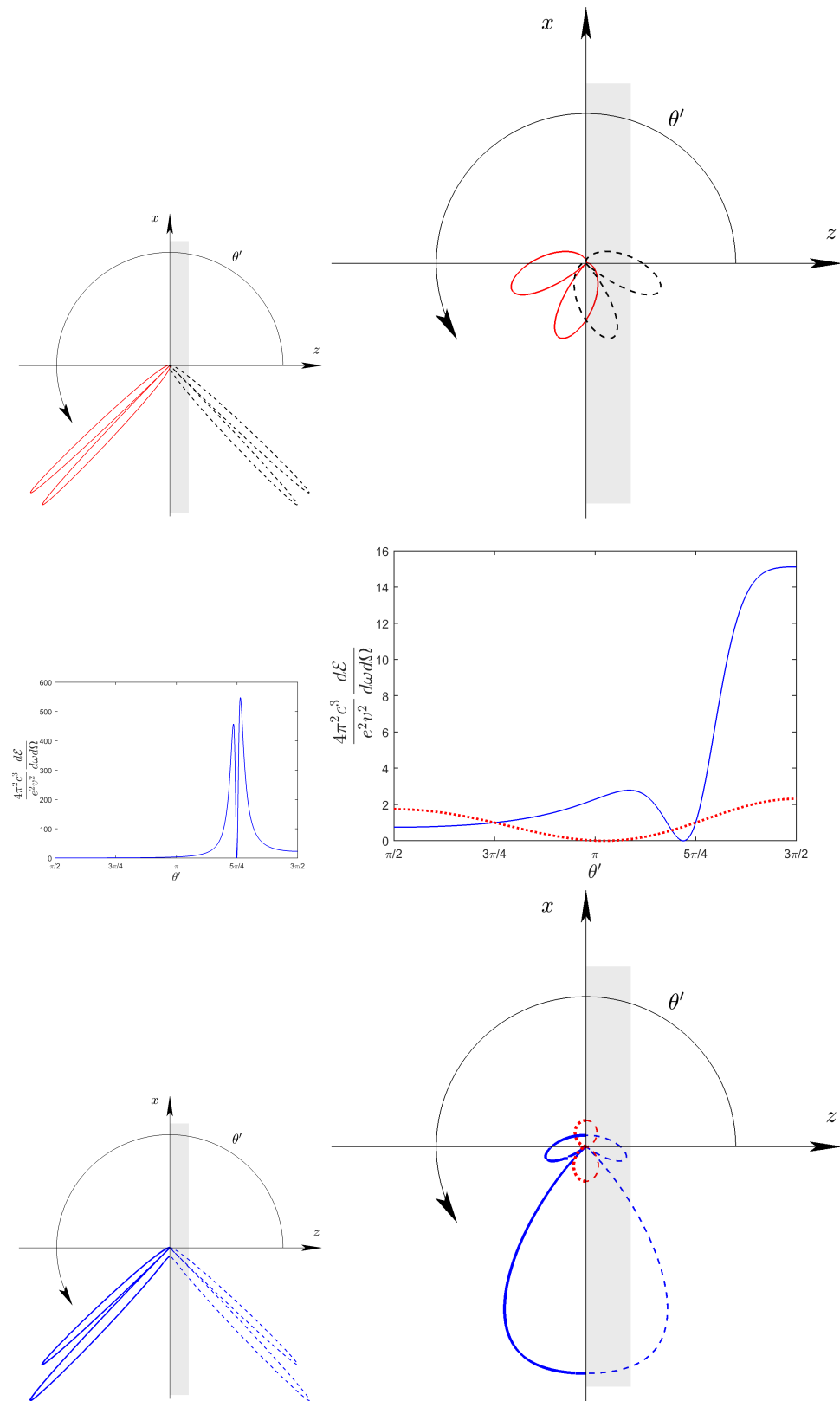


Рис. 3. Угловая зависимость интенсивности излучения в плоскости (x, z) для тех же параметров, что и на рис. 2. В верхнем ряду показаны диаграммы направленности излучения, создаваемые двумя парциальными вкладами (заряда и его изображения) порознь. В среднем ряду даны графики угловой зависимости результирующего излучения, в нижнем — его диаграммы направленности. В правом столбце красным пунктиром отмечены соответствующие результаты для случая $v = 0.1c$

Fig. 3. The angular dependence of the radiation in the (x, z) plane for the same parameters as in the Fig. 2. The upper row presents the directional diagrams from the two partial contributions (from the real charge and from its image) calculated separately. The middle row contains the plots for the resulted radiation, and the lower row contains the corresponding directional diagrams/ The red dotted lines in the right column correspond to the results for the $v = 0.1c$ case

Прежде всего, отметим, что каждая из величин I_i достигает наибольшего значения при $\mathbf{k} \uparrow \uparrow \mathbf{v}_i$, а наименьшего при $\mathbf{k} \uparrow \downarrow \mathbf{v}_i$. В ультррелятивистском ($v \rightarrow c$, где v — абсолютное значение скорости заряда) случае величина I_i будет обладать острым максимумом в направлении скорости соответствующего заряда, а вдали от этого направления будет иметь величину порядка единицы. В нерелятивистском же случае ($v \ll c$) значения I_i будут для всех направлений иметь величину порядка единицы.

Наличие векторных произведений в числителях (8) приводит к тому, что вклад каждого из слагаемых в направлении скорости соответствующего заряда обращается в нуль. В ультррелятивистском случае, когда вкладом другого слагаемого вблизи этого направления можно пренебречь, это приводит к характерной «воронкообразной» форме углового распределения переходного излучения (напомним, что в рассматриваемой задаче излучение будет иметь место только в заднее полупространство ($z < 0$, $\pi/2 < \theta \leq \pi$); мы отвлекаемся от возможности проникновения частицы сквозь пластинку с возникновением излучения в переднее ($z > 0$) полупространство).

В случае умеренно релятивистской частицы вклад «соседнего» заряда будет нарушать симметрию соответствующей «воронки». Кроме того, локальный минимум интенсивности излучения несколько сместится относительно направления скорости соответствующего заряда.

В нерелятивистском случае наличие суммы двух сравнимых по величине вкладов приведет к отсутствию локальных минимумов интенсивности излучения вблизи направлений соответствующих зарядов. Вместо этого минимум интенсивности излучения будет наблюдаться вблизи направления нормали к проводящей плоскости. Действительно, в нерелятивистском случае $I_1 \approx I_2 \approx 1$. Тогда

$$\mathbf{I} \approx -\frac{ie}{\omega}(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) = -\frac{2iev}{\omega} \cos \psi \mathbf{e}_z, \quad (9)$$

то есть вектор \mathbf{I} в нерелятивистском случае оказывается направлен вдоль оси z , то есть вдоль нормали к поверхности проводника. Соответственно, векторное произведение $\mathbf{k} \times \mathbf{I}$ будет обращаться в нуль в этом направлении, и вся угловая зависимость переходного излучения нерелятивистской частицы будет определяться величиной $|\mathbf{e}_k \times \mathbf{e}_z|^2 = \sin^2 \theta$. Таким образом, для нерелятивистской частицы

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2 v^2}{\pi^2 c^3} \cos^2 \psi \sin^2 \theta. \quad (10)$$

Рассмотрим теперь излучение вблизи проводящей плоскости, то есть при $\theta \rightarrow \pi/2 + 0$. В этом случае $\mathbf{k} \perp \mathbf{e}_z$, так что $\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_1 = \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_2$ и

$$I_1 = I_2 = \frac{1}{1 + \frac{v}{c} \cos \varphi \sin \psi}, \quad (11)$$

где φ — азимутальный угол направления излучения в плоскости проводника (x, y). Мы видим, что в релятивистском случае азимутальная зависимость вектора \mathbf{I} может быть значительной, однако, в любом случае вектор \mathbf{I} будет направлен вдоль $(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \uparrow \uparrow \mathbf{e}_z$, то есть нормально к поверхности проводника, как и следовало ожидать из граничного условия для электрического поля на поверхности проводника (равенство нулю тангенциальной компоненты), которое лежит в основе метода изображений. Мы видим также, что интенсивность излучения вблизи плоскости (x, y)

$$\left. \frac{d\mathcal{E}}{d\omega d\Omega} \right|_{\theta \rightarrow \pi/2 + 0} = \frac{e^2 v^2}{\pi^2 c^3} \frac{\cos^2 \psi}{\left(1 + \frac{v}{c} \cos \varphi \sin \psi\right)^2} \quad (12)$$

не обращается в нуль, хотя в релятивистском случае она оказывается очень малой по отношению к интенсивности в максимуме. В нерелятивистском случае она даже достигает наибольшего по сравнению с другими направлениями значения (см. также замечание в конце этого раздела).

Выпишем теперь формулу для спектрально-угловой плотности переходного излучения на металлической плоскости в общем случае:

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2 v^2}{4\pi^2 c^3} \frac{4 \cos^2 \psi (1 - (\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_z)^2) + \frac{v^2}{c^2} \sin^2 2\psi (1 - (\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_y)^2) + 4 \frac{v}{c} \cos \psi \sin 2\psi (\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_x)}{(1 - \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{v}_1/c)^2 (1 - \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{v}_2/c)^2}. \quad (13)$$

Рассмотрим излучение в плоскости (x, z). В этом случае $\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_y = 0$, а $\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_x = \pm \sin \theta$ в зависимости от азимута, $\varphi = 0$ или $\varphi = \pi$. В этом случае числитель представляет собой квадрат суммы:

$$4 \cos^2 \psi \sin^2 \theta + \frac{v^2}{c^2} \sin^2 2\psi \pm 4 \frac{v}{c} \cos \psi \sin \theta \sin 2\psi = \left(2 \cos \psi \sin \theta \pm \frac{v}{c} \sin 2\psi\right)^2.$$

Мы видим, что в нерелятивистском случае эта величина обращается в нуль при $\theta = \pi$, а в ультррелятивистском — при значениях угла θ , близких к ψ и $\pi - \psi$, но только при условии знака «минус».

что соответствует азимутальному углу $\varphi = \pi$ и дает воронкообразное распределение в ожидаемом для ультррелятивистского случая направлении вблизи v_2 .

В заключение этого раздела обратим внимание на следующее обстоятельство. В результатах, полученных в рамках развиваемого подхода, основанного на методе изображений, нет никакого указания на обращение в нуль интенсивности излучения при выполнении строгого равенства $\theta = \pi/2$. Ситуация, однако, меняется, если рассмотреть излучение на идеальном проводнике как предельный переход от случая излучения на границе вакуум-диэлектрик с устремлением диэлектрической проницаемости вещества к бесконечности, $\varepsilon \rightarrow \infty$ (см., например, формулу (116,9) в [8] и следующее за ней обсуждение). Здесь общая формула содержит множитель $\cos \theta$, сокращающийся только в пределе $\varepsilon \rightarrow \infty$. Таким образом, можно утверждать, что в случае реалистичного проводника область углов излучения, в которой интенсивность излучения изменяется от значения, определяемого выражением (12), до нуля, будет тем уже, чем ближе свойства металла к свойствам идеального проводника. Это отражено, в частности, на рис. 2 слева в [15], при этом на словах там сказано, что в случае идеального проводника максимум интенсивности достигается при $\theta = 90^\circ$.

4. Поляризация излучения. Выберем векторы поляризации в виде

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{e}_k \times \mathbf{e}_z}{|\mathbf{e}_k \times \mathbf{e}_z|} = \mathbf{e}_x \sin \varphi - \mathbf{e}_y \cos \varphi, \quad (14)$$

$$\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_k \times \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_x \cos \theta \cos \varphi + \mathbf{e}_y \cos \theta \sin \varphi - \mathbf{e}_z \sin \theta. \quad (15)$$

При таком выборе для каждого направления излучения вектор \mathbf{e}_1 будет направлен по касательной к азимутальной линии, а вектор \mathbf{e}_2 — по касательной к меридиональной линии сферической координатной сетки. Вычисляя скалярные произведения $\mathbf{e}_{1,2} \cdot \mathbf{I}$, найдем компоненты поляризационного тензора [7], из которого, в свою очередь, извлечем параметры Стокса:

$$\xi_1 = \frac{-2 \left(\frac{v}{c} \sin \psi \cos \theta \sin \varphi \right) \left(\sin \theta + \frac{v}{c} \sin \psi \cos \varphi \right)}{\left(\frac{v}{c} \sin \psi \cos \theta \sin \varphi \right)^2 + \left(\sin \theta + \frac{v}{c} \sin \psi \cos \varphi \right)^2},$$

$$\xi_2 = 0,$$

$$\xi_3 = \frac{\left(\frac{v}{c} \sin \psi \cos \theta \sin \varphi \right)^2 - \left(\sin \theta + \frac{v}{c} \sin \psi \cos \varphi \right)^2}{\left(\frac{v}{c} \sin \psi \cos \theta \sin \varphi \right)^2 + \left(\sin \theta + \frac{v}{c} \sin \psi \cos \varphi \right)^2}.$$

Мы видим, что излучение 100%-но линейно поляризовано, причем угол α между направлением поляризации и вектором \mathbf{e}_1 определяется в этом случае соотношениями $\xi_1 = \sin 2\alpha$, $\xi_3 = \cos 2\alpha$.

Нетрудно убедиться, что при $\theta = \pi/2 + 0$, что соответствует излучению вблизи плоскости (x, y) , излучение будет поляризовано в направлении \mathbf{e}_2 ($\xi_3 = -1$), то есть, в данном случае — по нормали к проводящей плоскости, как того и требует граничное условие для электрического поля. Кроме того, поскольку вектор \mathbf{I} лежит в плоскости (x, z) , излучение в этой плоскости (чему соответствуют значения азимутального угла $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$) будет также поляризовано в направлении \mathbf{e}_2 , то есть, в данном случае, в этой же плоскости. Поляризация излучения в общем случае иллюстрируется ориентацией коротких штрихов на рис. 4.

5. Заключение. В статье рассмотрено переходное излучение, возникающее при наклонном падении заряженной частицы на идеально проводящую плоскость, вычислены спектрально-угловая плотность и поляризация излучения. Выполнен подробный качественный анализ, проясняющий происхождение характерных особенностей излучения, проявляющихся в случаях излучения быстрых и медленных частиц и приводящих к существенно различным картинам излучения в этих двух случаях. В частности, обращается внимание на то обстоятельство, что угловое распределение излучения в виде узкой «воронки» с осью в направлении зеркально отраженной в проводящей плоскости скоростью частицы и равной нулю интенсивностью излучения в направлениях вблизи этой плоскости справедлива только для ультррелятивистских частиц.

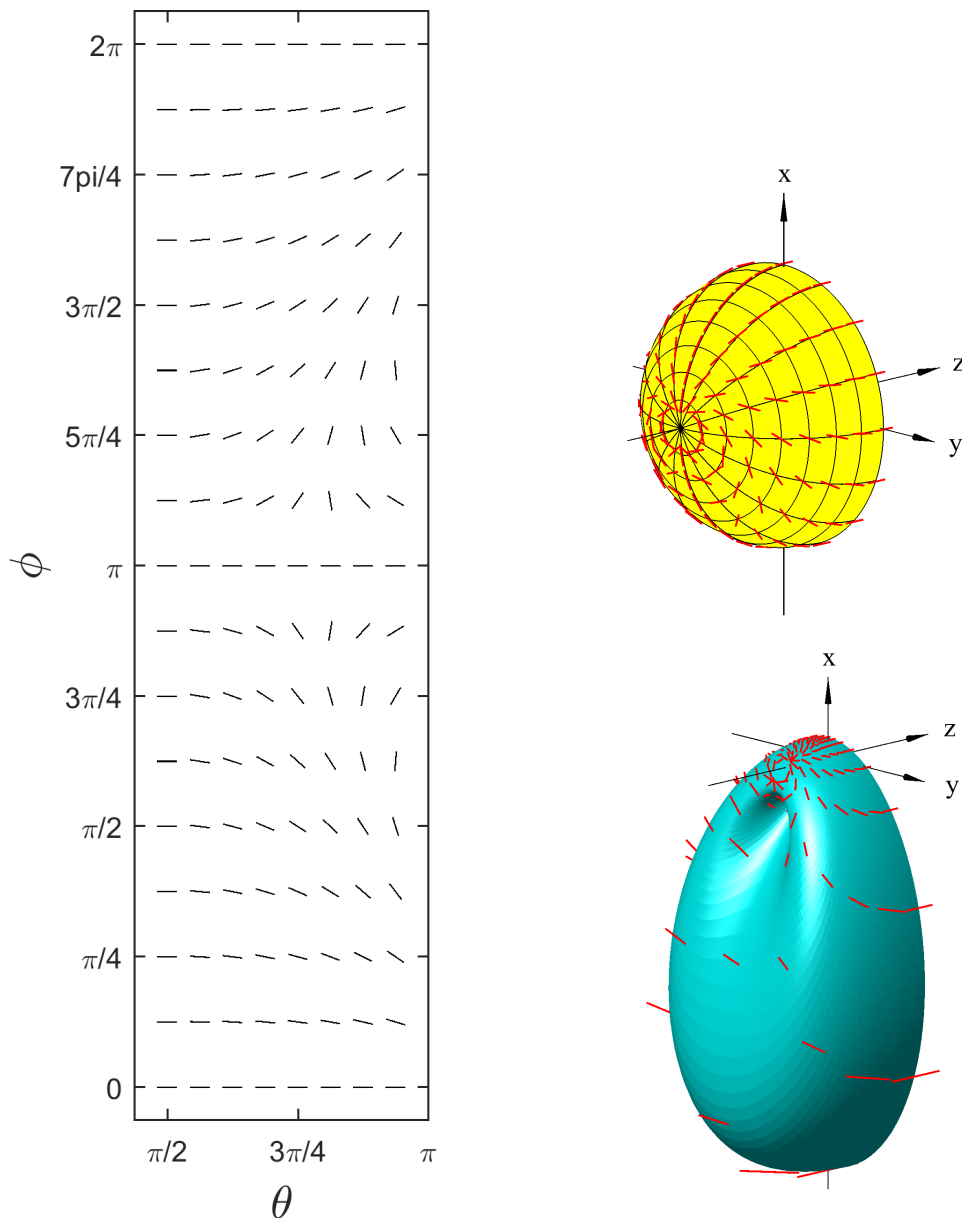


Рис. 4. Направление поляризации излучения частицы с $v = 0.9c$ в различных представлениях: на развертке сферической координатной сетки (слева), на сфере (справа сверху) и поверх диаграммы направленности излучения (справа внизу)

Fig. 4. The direction of the radiation polarisation for the $v = 0.9c$ in different representations: on the unfolded spherical coordinates grid (left), on the sphere (upper right) and on the radiation directional diagram (lower right)

Список литературы

1. Аббасов И. И., Болотовский Б. М., Давыдов В. А. 1986. Высокочастотная асимптотика спектра излучения движущихся заряженных частиц в классической электродинамике. УФН, 149(4): 709–722. DOI: 10.3367/UFNr.0149.198608f.0709
2. Ахиезер А. И., Шульга Н. Ф. 1993. Электродинамика высоких энергий в веществе. М., Наука, 344.
3. Гинзбург В. Л. 1987. Теоретическая физика и астрофизика. М., Наука, 488.
4. Гинзбург В. Л., Франк И. М. 1946. Излучение равномерно движущегося электрона, возникающее при его переходе из одной среды в другую. ЖЭТФ, 16(1): 15–28.
5. Гинзбург В. Л., Цытович В. Н. 1984. Переходное излучение и переходное рассеяние (некоторые вопросы теории). М., Наука, 360.

6. Денисов С. П. 2007. Переходное излучение: научное значение и практическое применение в физике высоких энергий. УФН, 177(4): 394–396. DOI: 10.3367/UFNr.0177.200704g.0394
7. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. 1988. Теоретическая физика. Т. 2. Теория поля. М., Наука, 512.
8. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. 1992. Теоретическая физика. Т. 8. Электродинамика сплошных сред. М., Наука, 1992, 664.
9. Левич В. Г. 1969. Курс теоретической физики. Том 1. М., Наука, 912.
10. Рязанов М. И. 1984. Электродинамика конденсированного вещества. М., Наука, 304.
11. Сыщенко В. В. 2020. Электродинамика для начинающих. М.–Ижевск, Регулярная и хаотическая динамика, 356.
12. Тер-Микаелян М. Л. 1969. Влияние среды на электромагнитные процессы при высоких энергиях. Ереван, Издательство АН АрмССР, 457.
13. Jackson J.D. 1999. Classical electrodynamics. New York, Wiley, 808.
14. Singh R., Reichert T. 2022. Longitudinal charge distribution measurement of nonrelativistic ion beams using coherent transition radiation, Phys. Rev. Accelerators and Beams 25: 032801. DOI: 10.1103/PhysRevAccelBeams.25.032801
15. Singh R., Reichert T., Walasek-Hoehne B. 2022. Optical transition radiation based transverse beam diagnostics for nonrelativistic ion beams, Phys. Rev. Accelerators and Beams 25: 072801. DOI: 10.1103/PhysRevAccelBeams.25.072801

References

1. Abbasov I. I., Bolotovskii B. M., Davydov V. A. 1986. High-frequency asymptotic behavior of radiation spectra of moving charges in classical electrodynamics. Sov. Phys. Usp., 29: 788–796 (in Russian). DOI: 10.1070/PU1986v029n08ABEH003484
2. Akhiezer A. I., Shul'ga N. F. 1996. High-Energy Electrodynamics in Matter. Gordon and Breach, 400 (in Russian).
3. Ginzburg V. L. 1989. Applications of Electrodynamics in Theoretical Physics and Astrophysics. Gordon and Breach Science Publishers (CRC Press), 488 (in Russian).
4. Ginzburg V., Frank I. 1945. Radiation of a uniformly moving electron due to its transition from one medium into another. J. Phys. USSR, 9(5): 353–362 (in Russian).
5. Ginzburg V. L., Tsytovich V. N. 1991. Transition Radiation and Transition Scattering. London, Taylor & Francis Ltd, 360 (in Russian).
6. Denisov S. P. 2007. Transition radiation: scientific implications and applications in high-energy physics. Phys. Usp., 50(4): 377–379 (in Russian). DOI: 10.1070/PU2007v050n04ABEH006238
7. Landau L. D., Lifshitz E. M. 1971. The Classical Theory of Fields, Vol. 2 of Course of Theoretical Physics. Pergamon Press, 374 (in Russian).
8. Landau L. D., Lifshitz E. M. 1984. Electrodynamics of Continuous Media, Vol. 8 of Course of Theoretical Physics. Pergamon Press, 460 (in Russian).
9. Levich V. G. 1969. Kurs teoreticheskoy fiziki [Course of theoretical physics] Vol. 1. M., Nauka Publ., 912.
10. Ryazanov M. I. 1984. Elektrodinamika kondensirovannogo veshchestva [Electrodynamics of condensed matter]. M., Nauka Publ., 304.
11. Syshchenko V. V. 2020. Elektrodinamika dlya nachinayushchih [Electrodynamics for beginners]. M.–Izhevsk, Regularnaya i haoticheskaya dinamika Publ., 356.
12. Ter-Mikaelian M. L. 1972. High energy electromagnetic processes in condensed media. Internat. Sci. Tracts Phys. Astron. New York, NY, Wiley, 457 (in Russian).
13. Jackson J.D. 1999. Classical electrodynamics. New York, Wiley, 808.

14. Singh R., Reichert T. 2022. Longitudinal charge distribution measurement of nonrelativistic ion beams using coherent transition radiation, Phys. Rev. Accelerators and Beams 25: 032801.
DOI: 10.1103/PhysRevAccelBeams.25.032801
15. Singh R., Reichert T., Walasek-Hoehne B. 2022. Optical transition radiation based transverse beam diagnostics for nonrelativistic ion beams, Phys. Rev. Accelerators and Beams 25: 072801.
DOI: 10.1103/PhysRevAccelBeams.25.072801

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 09.08.2022

Поступила после рецензирования 20.09.2022

Принята к публикации 25.09.2022

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Сыщенко Владислав Вячеславович – доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры теоретической и экспериментальной физики, Белгородский государственный национальный исследовательский университет

ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия

Кривцов Вадим Александрович – студент выпускного курса института инженерных и цифровых технологий, Белгородский государственный национальный исследовательский университет

ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Vladislav Syshchenko – PhD in Physics and Mathematics, Professor, Professor of the Department of Theoretical and Experimental Physics, Belgorod National Research University, Belgorod, Russia

Vadim Krivtsov – graduate student at the Institute of Engineering and Digital Technologies, Belgorod National Research University, Belgorod, Russia

УДК 539.3, 539.4

DOI 10.52575/2687-0959-2022-54-4-252-260

MSC 34L30

оригинальное исследование

О ПРИРОДЕ НИЗКОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ УДАРНЫМ НАГРУЗКАМ 12 % CR СТАЛЕЙ С НИЗКИМ СОДЕРЖАНИЕМ АЗОТА

Е. С. Ткачев¹ , А. С. Долженко² , А. Э. Федосеева² 

(Статья представлена членом редакционной коллегии С. В. Блажевичем)

¹ Российский государственный аграрный университет – МСХА имени К. А. Тимирязева,
Москва, 127434, Россия

² Белгородский государственный национальный исследовательский университет,
Белгород, 308015, Россия

E-mail: fedoseeva@bsu.edu.ru, alexandra_plot@mail.ru

Аннотация. 12% Cr стали с низким содержанием азота выступают в качестве перспективных материалов изготовления лопаток паровых турбин тепловых электростанций. Было обнаружено, что сопротивление ударным нагрузкам таких сталей очень низкое, при комнатной температуре значение ударной вязкости не превышало 30 Дж см^{-2} , что не отвечает требованиям, предъявляемым к материалам лопаток паровых турбин тепловых электростанций. Для определения природы такого низкого сопротивления ударным нагрузкам были проанализированы две 12% Cr стали с низким содержанием азота методами оптической металлографии, просвечивающей и растровой электронной микроскопии. Было выявлено, что в качестве источников, вызывающих хрупкое разрушение образцов, могут быть рассмотрены следующие структурные составляющие. Во-первых, крупные зерна дельта-феррита, границы которых декорированы крупными частицами, обогащенными хромом и вольфрамом. Во-вторых, крупные частицы W_2B , обогащенные вольфрамом, равномерно распределенные по объему матрицы. В-третьих, карбиды $M_{23}C_6$ образуют непрерывные цепочки частиц вдоль границ мартенситных реек и действуют как хрупкие прослойки. Совместно эти элементы затрудняют распространение пластической деформации при ударных нагрузках.

Ключевые слова: жаропрочные мартенситные стали, термическая обработка, легирование, ударная вязкость, температура хрупко-вязкого перехода, структура

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке внутривузовского гранта НИУ «БелГУ» «Молодые лидеры в науке» в рамках проекта «Наука XXI века» программы Приоритет-2030.

Для цитирования: Ткачев Е. С., Долженко А. С., Федосеева А. Э. 2022. О природе низкого сопротивления ударным нагрузкам 12% Cr сталей с низким содержанием азота. Прикладная математика & Физика. 54(4): 252–260.

DOI 10.52575/2687-0959-2022-54-4-252-260

ON ORIGIN OF LOW IMPACT TOUGHNESS FOR THE 12% CR STEELS WITH A LOW N CONTENT

Evgenii Tkachev¹ , Anastasiia Dolzhenko² , Alexandra Fedoseeva² 

(Article submitted by a member of the editorial board S. V. Blazhevich)

¹Russian State Agrarian University – Moscow Timiryazev Agricultural Academy
Moscow, 127550, Russia

²Belgorod National Research University
Belgorod, 308015, Russia

E-mail: fedoseeva@bsu.edu.ru, alexandra_plot@mail.ru

Received November, 28, 2022

Abstract .The 12% Cr steels with a low nitrogen content can be used as promising materials for the production of steam turbine blades in the thermal power plants. It was found that the resistance to impact loads of such steels is very low. Under impact load at room temperature, the value of impact toughness did not exceed 30 J cm^{-2} that didn't meet the requirements for blade materials of steam turbine thermal power plants. To determine the origin of the low value of impact resistance, two 12% Cr steels with a low N content were analyzed using optical metallography, transmission and scanning electron microscopy. The possible structural elements can be detected as the sources causing brittle fracture of the samples. First, the high fraction of delta-ferrite, the boundaries at which are covered with the secondary phase particles enriched in chromium and tungsten. Second, the large W_2B particles, enriched in tungsten, are randomly distributed over the matrix. Third, $M_{23}C_6$ carbides located along the boundaries of the martensitic laths form the continuous chains, which act as the thin brittle layers. These elements restrict the propagation of plastic deformation under impact loads.

Keywords: Heat-Resistant Martensitic Steels, Heat Treatment, Alloying, Impact Toughness, Ductile – Brittle Transition Temperature, Structure

Acknowledgements: The work is supported by the inner-university funding of the Belgorod National Research University "Young Leaders in Science" within the framework of the project "Science of the 21st century" of the Priority-2030 program

For citation: Tkachev E., Dolzhenko A., Fedoseeva A. 2022. On origin of low impact toughness for the 12% Cr steels with a low N content. *Applied Mathematics & Physics*. 54(4): 252–260. (in Russian) DOI 10.52575/2687-0959-2022-54-4-252-260

1. Введение. Создание новых жаропрочных материалов для энергетики в настоящее время определяет прогресс технико-экономических показателей тепловых электростанций, работающих на угле [1, 5, 12]. Стратегическим направлением развития теплоэнергетики, работающей на твердом топливе, является создание паротурбинных энергоблоков нового поколения, работающих на ССКП пара, имеющих совершенную проточную часть и улучшенную тепловую схему. В настоящее время угольные тепловые электростанции России, работающие при параметрах пара 545–560°C и 140–240 атмосфер, выработали свой ресурс и подлежат замене. Они имеют низкий коэффициент полезного действия (34–37%) и большие вредные выбросы в атмосферу. За счет повышения параметров пара до суперсверхкритических величин ($T = 600\text{--}620^\circ\text{C}$, $P = 250\text{--}300$ атмосфер) планируется повысить КПД до 41–44% и сократить вредные тепловые выбросы [13, 14]. В РФ на данный момент отсутствуют материалы, отвечающие требованиям для энергетического оборудования нового поколения. Основными требованиями, предъявляемыми к современным материалам для лопаток паровых турбин, работающих на ССПК пара, является предел длительной прочности при температуре 650°C не менее 100 МПа, ударная вязкость при комнатной температуре не менее 59 Дж см⁻², предел текучести и предел прочности при комнатной температуре не менее 550 МПа и 700 МПа соответственно.

На основе предыдущих работ был разработан микроструктурный дизайн 12% Cr сталей путем оптимизации аустенит- и феррит-стабилизирующих элементов [17]. Было показано, что только микроструктурный дизайн, основанный на низком содержании азота, обеспечивает высокую длительную прочность при долговременной ползучести мартенситных сталей с 10% хрома [15]. Низкое содержание азота предотвращает образование крупных частиц Z-фазы [15], что обеспечивает предел текучести и предел прочности при комнатной температуре 614 МПа и 750 МПа соответственно, а также предел длительной прочности при ползучести 12% Cr сталей около 80 МПа, что близко к уровню 9% Cr сталей [2, 14]. Высокие прочностные свойства обусловлены формированием неравновесной структуры троостита отпуска, границы которого стабилизированы частицами карбидов $M_{23}C_6$ [2, 15, 17]. Однако ударная вязкость была очень низкая и не соответствовала предъявляемым требованиям. Цель настоящего исследования – выявить взаимосвязь между параметрами структуры и сопротивлением ударной вязкости для двух 12% Cr сталей с низким содержанием азота, отличающимся содержанием тантала и ниобия.

2. Материал и методики. Выплавка изучаемых 12% Cr сталей с низким содержанием азота и различным содержанием тантала и ниобия осуществлялась в вакуумно-индукционной печи. Химический состав сталей представлен в таблице 1.

Таблица 1. Химический состав исследуемых сталей (в вес.%)

Table 1. The chemical composition of the steels studied (in wt.%)

	Fe	C	Cr	Co	Mo	W	V	Nb	Ta	Cu	B	N
12CrTaNb	bal	0.1	11.4	3.0	0.6	2.5	0.2	0.04	0.07	0.8	0.01	0.003
12CrNb	bal	0.1	11.3	3.9	0.6	2.4	0.2	0.07	-	0.8	0.01	0.003

Обе стали были подвергнуты гомогенизационному отжигу при температуре 1150°C в течение 16 часов с последующей двухсторонней ковкой при температуре 1150°C до истинной степени деформации 1, охлаждение на воздухе. Затем стали были нормализованы с температур 1050°C для 12CrNb стали и 1070°C для 12CrTaNb стали в течение 1 часа с охлаждением на воздухе и отпущены при температуре 770°C в течение 3 часов с охлаждением на воздухе. Испытания на ударную вязкость проводили при температурах от -40°C до +120°C на образцах с V-образным 2 мм вырезом и размерами поперечного сечения 10 мм на 10 мм и длиной 55 мм с использованием маятникового копра «InstronIMP460» согласно стандарту ГОСТ 9454–78. Температура хрупко-вязкого перехода определялась как температура, соответствующая среднему арифметическому значению между величинами энергий верхнего и нижнего шельфа. Структурные исследования проводили с использованием оптического микроскопа Olympus GX70, просвечивающего электронного микроскопа JEOL–2100 с энергодисперсионной приставкой INCA и растрового электронного микроскопа Quanta 600. Поверхность материала для оптической металлографии была подготовлена путем травления в водном растворе 2% азотной кислоты и 1% фтороводородной кислоты. Тонкие фольги были электролитически утонены в растворе 10% хлорной кислоты в уксусной кислоте при напряжении 23 В с использованием прибора TenuPol-5. Размер структурных составляющих был определен методом случайных секущих. Плотность дислокаций оценивалась как количество

точек выхода дислокаций на верхнюю и нижнюю поверхности фольги. Тип частиц был определен совместным анализом картин микродифракций электронов и локальным химическим составом частиц. Для определения объемных долей равновесных фаз было применено математическое моделирование с использованием программного обеспечения Thermo-Calc (Version 5.0.4 75) с термодинамической базой данных для сталей TCFE7. Больше информации о методиках можно найти в [2, 15, 17].

3. Результаты и обсуждение.

3.1 Испытания на ударную вязкость 12% Cr сталей. На рис. 1 представлена температурная зависимость величины ударной вязкости в широком температурном интервале от -40°C до $+120^{\circ}\text{C}$ для 12% Cr сталей с низким содержанием азота.

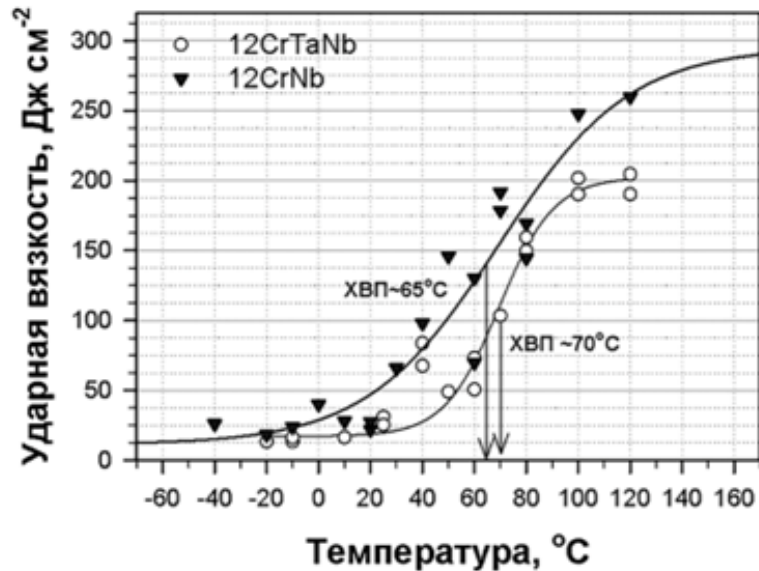


Рис. 1. Температурные зависимости ударной вязкости для 12% Cr сталей с низким содержанием азота.

ХВП означает хрупко-вязкий переход

Fig. 1. The temperature dependences of impact toughness for the 12% Cr steels with the low nitrogen content. DBT means ductile-brittle transition

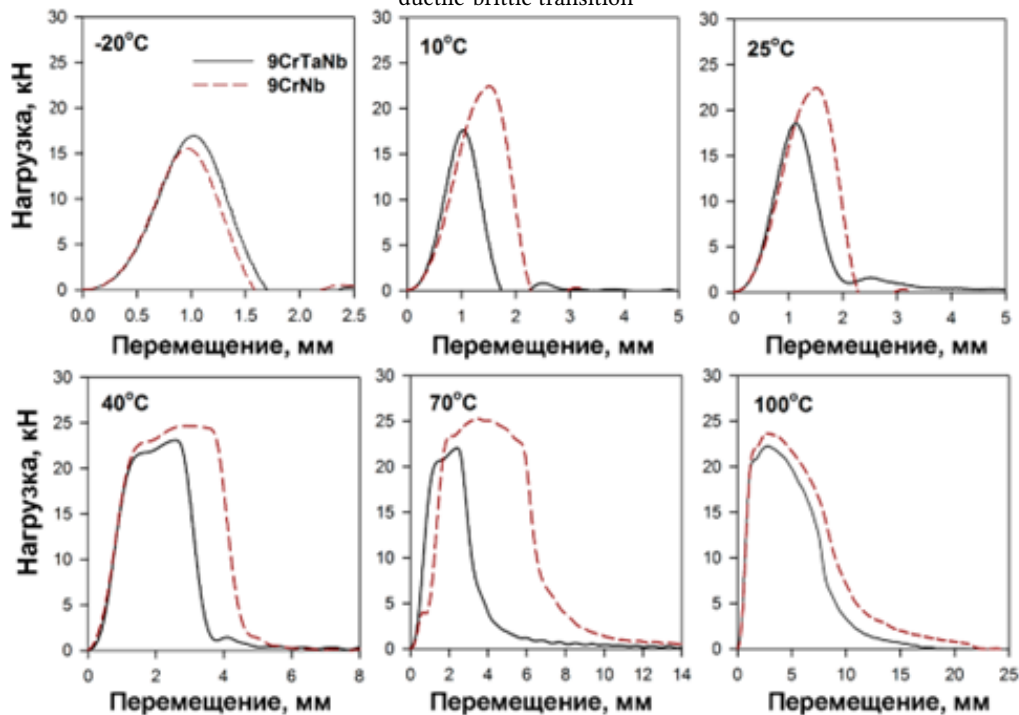


Рис. 2. Кривые зависимостей «Нагрузка – перемещение» для 12% Cr сталей с низким содержанием азота, полученные при испытаниях на ударную вязкость при различных температурах

Fig. 2. Load-displacement curves for the 12% Cr steels with the low nitrogen content obtained from impact load tests at various temperatures

Для обеих сталей нижний шельф энергии составляет $15\text{--}25 \text{ Дж см}^{-2}$ и соответствует температурам

испытания от 10°C и ниже для 12CrNb стали и от 30°C и ниже для 12CrTaNb стали. Верхний шельф энергии наступает при температурах выше 100°C для 12CrTaNb стали и выше 120°C для 12CrNb стали. Энергия, соответствующая этому региону, составляет 200 Дж см⁻² для 12CrTaNb стали и более 230 Дж см⁻² для 12CrNb стали. Температуры хрупко-вязкого перехода для обеих сталей близки и составляют 65-70°C. Однако, для 12CrNb стали температура хрупко-вязкого перехода соответствует более высокой величине ударной вязкости около 140 Дж см⁻². В целом, вся кривая температурной зависимости величины ударной вязкости для 12CrNb стали на всем температурном интервале лежит в области более высоких энергий (рис. 1).

Отметим, что обе стали при комнатной температуре имеют очень низкие значения ударной вязкости около 25-30 Дж см⁻², что не отвечает требованиям, предъявляемым к материалам для лопаток паровых турбин.

Кривые «Нагрузка - перемещение» при температурах испытания -20°C, 10°C, 25°C, 40°C, 70°C и 100°C, представленные на рис. 2, демонстрируют схожее поведение обеих 12% Cr сталей с низким содержанием азота при ударных испытаниях.

Для обеих сталей при температурах, соответствующих нижнему шельфу энергии, включая комнатную температуру, кривые зависимостей «Нагрузка-перемещение» представляют собой крутой пик, где после достижения максимальной нагрузки сразу наступает стадия нестабильного распространения трещины, что соответствует хрупкому типу разрушения. При температурах выше комнатной температуры кривые зависимостей «Нагрузка-перемещение» содержат все стадии распространения трещины, включая зону зарождения трещины, зону стабильного распространения трещины, зону нестабильного распространения трещины и зону сдерживания нестабильного распространения трещины.

Преимущественным отличием кривых для изучаемых 12% Cr сталей при температурах выше комнатной является большее количество поглощенной энергии, оцененной как площадь под кривой, образцами 12CrNb стали.

В таблице 2 приведены данные энергии зарождения трещины, оцененные как площадь под кривой «Нагрузка – перемещение» от начала до величины максимального пика, и энергии распространения трещины, оцененные как площадь под кривой «Нагрузка – перемещение» от максимального пика до разрушения образца.

Таблица 2. Величины энергии зарождения трещины E_i и энергии распространения трещины E_p для исследуемых 12% Cr сталей

Table 2. The values of the energy of crack initiation E_i and the energy of crack propagation E_p for the 12% Cr steels studied

Температура, °C	12CrTaNb			12CrNb		
	E_i , Дж	E_p , Дж	Общая, Дж	E_i , Дж	E_p , Дж	Общая, Дж
-20	6.3	5.3	11.6	15.7	3.9	19.6
0	6.2	5.5	11.7	16.0	7.1	23.1
10	7.7	5.6	13.3	16.1	6.4	22.5
25	8.9	11.5	20.4	16.2	6.5	22.7
40	40.1	14.1	54.2	49.2	35.5	84.7
60	36.4	22.4	58.8	48.6	29.2	77.8
80	42.6	76.3	118.9	47.1	87.0	134.1
100	44.6	107.9	152.5	45.5	153.0	198.5
120	45.0	122.1	167.1	47.1	161.4	208.5

Из табл. 2 видно, что для температур, соответствующих нижнему шельфу энергии, включая комнатную температуру, значения энергии зарождения трещины низкие для обеих сталей. При этом энергии зарождения трещины для 12CrNb стали в 2.5 раза выше, чем для 12CrTaNb стали. С увеличением температуры испытания энергия зарождения трещинкратно возрастает для обеих сталей и достигает близких значений 40-50 Дж см⁻² для обеих сталей (табл. 2). Энергия распространения трещины также имеет низкие значения для обеих сталей вплоть до температуры хрупко-вязкого перехода. Выше температуры хрупко-вязкого перехода величины энергии распространения трещиныкратно увеличиваются в обеих сталях. Величина энергии распространения трещины в 12CrNb стали на 20-25% выше, чем для 12CrTaNb стали.

3.2 Структура 12% Cr сталей с низким содержанием азота. На рисунке 3 представлены изображения структур 12% Cr сталей с низким содержанием азота, полученные с помощью оптической металлографии и растровой электронной микроскопии. В таблицах 3 и 4 приведены данные по структурным параметрам 12% Cr сталей с низким содержанием азота.

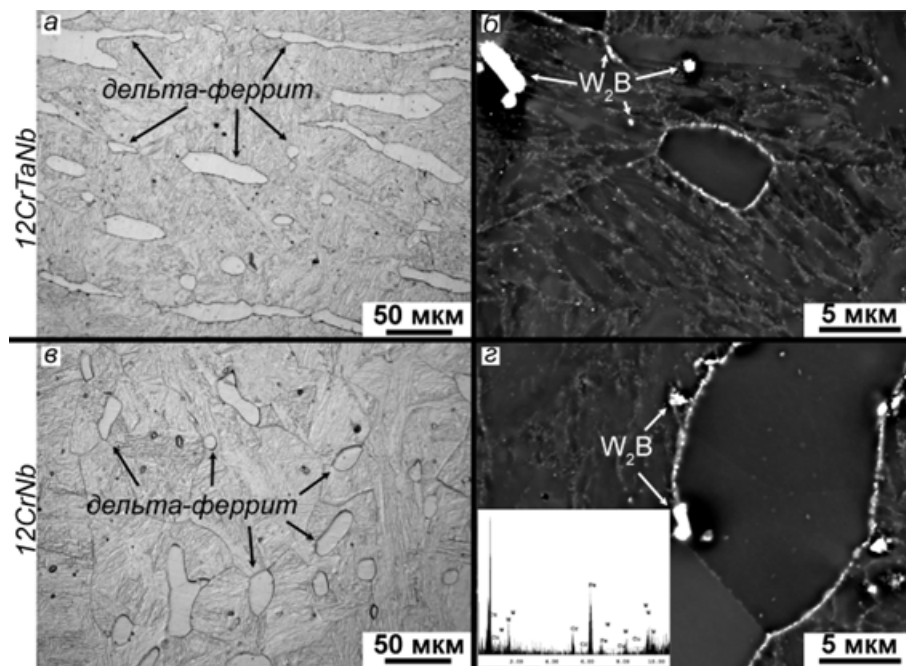


Рис. 3. Изображения структуры, полученные методами оптической металлографии (а,в) и сканирующей электронной микроскопии (б,г) для 12CrTaNb (а,б) и 12CrNb (в,г) сталей

Fig. 3. The structure images obtained by optical metallography (a, c) and scanning electron microscopy (b, d) for the 12CrTaNb (a, b) and 12CrNb (c, d) steels

Таблица 3. Структурные параметры исследуемых 12% Cr сталей

Table 3. Structural parameters of the 12% Cr steels studied

Стали	Размер ИАЗ*, мкм	Доля дельта-феррита, %	Размер дельта-феррита, мкм	Размер частиц, обог. W, мкм	Размер реек, мкм	Плотность дислокаций, E14, m^{-2}
12CrTaNb	48 ± 4	$10 \pm 0,2$	21 ± 2	$1 \pm 0,05$	$0,3 \pm 0,05$	$2 \pm 0,5$
12CrNb	51 ± 4	$6 \pm 0,2$	15 ± 2	$1 \pm 0,05$	$0,3 \pm 0,05$	$2 \pm 0,5$

* ИАЗ означает исходное аустенитное зерно

Таблица 4. Характеристики частиц вторичных фаз в исследуемых 12% Cr сталях

Table 4. Characteristics of the secondary phase particles in the 12% Cr steels studied

Стали	Размер $M_{23}C_6$, нм	Численная плотность $M_{23}C_6$, mkm^{-1}	Объемная доля**, $M_{23}C_6$, %	Размер (Ta,Nb)X или NbX, нм	Объемная доля** (Ta,Nb)X или NbX, %
12CrTaNb	50 ± 5	$2,5 \pm 0,2$	2,25	50 ± 5	0,08
12CrNb	51 ± 5	$2,3 \pm 0,2$	2,25	29 ± 5	0,08

**оценено с использованием Thermo-Calc (TCFE7)

Из рис. 3а, в видно, что в обеих сталях структура представляет собой пакетный мартенсит и дельта-феррит. Размер исходных аустенитных зерен составляет около 50 мкм для обеих сталей (табл. 3). Доля дельта-феррита в обеих сталях очень высокая, и средний размер дельта-феррита составляет 15 и 20 мкм для 12CrNb и 12CrTaNb стали соответственно (табл. 3). В работах [3, 4, 6, 7, 18]-[20] сообщалось, что присутствие дельта-феррита в сталях приводит к их сильному охрупчиванию. Однако сам по себе дельта-феррит – фаза пластичная и не должна оказывать столь негативного эффекта на сопротивление ударным нагрузкам [3, 6, 19, 20]. Отметим, что изображения, полученные с помощью сканирующей электронной микроскопии, демонстрируют образование плотных цепочек из частиц вторичных фаз,

расположенных на границах раздела дельта-феррит/мартенсит (рис. 3б, г). Энергодисперсионный анализ химических составов этих частиц показал высокое содержание хрома и вольфрама (рис. 3г). Образование вторичных фаз, обогащенных хромом и вольфрамом, на границах дельта-феррит/мартенсит возможно из-за различной растворимости этих элементов в дельта-феррите и мартенсите [8]. Именно формирование таких непрерывных цепочек частиц затрудняет деформацию дельта-феррита и делает его хрупким элементом структуры [3, 4, 6]-[9, 16, 18]-[20]. Закономерно, что 12CrTaNb сталь, содержащая большую долю дельта-феррита, демонстрирует более низкое сопротивление ударным нагрузкам (рис. 1). Другим структурным элементом, который может быть причиной низкой ударной вязкости, являются крупные частицы, обогащенные вольфрамом, предположительно, W_2B , расположенные равномерно по объему матрицы в обеих сталях (рис. 3б,г). Их средний размер составляет около 1 мкм в обеих сталях (табл. 3).

Анализ изображений, полученных методом просвечивающей электронной микроскопии, выявил, что в обеих сталях формируется троостит отпуска со средним размером мартенситных реек около 300 нм (рис. 4). Плотность дислокаций составляет $(2 \pm 0,5)E + 14 \text{ м}^{-2}$ (табл. 3).

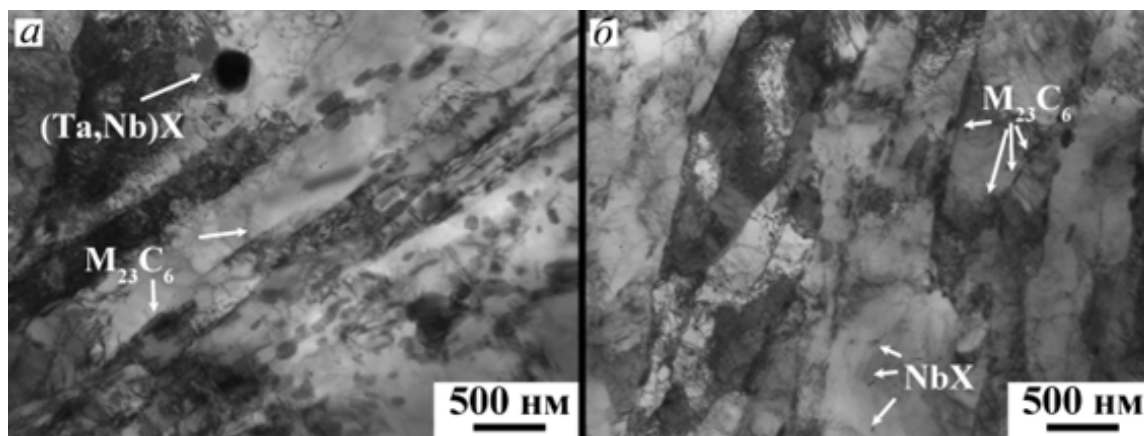


Рис. 4. Изображения структуры 12CrTaNb (а) и 12CrNb (б) сталей, полученные методом просвечивающей электронной микроскопии тонких фольг

Fig. 4. Images of the structures of the 12CrTaNb (a) and 12CrNb (b) steels obtained by transmission electron microscopy of thin foils

Внутри мартенситных реек располагаются карбонитриды $(Ta,Nb)X$ с химическим составом 80% Ta, 7% Nb, 13% $(Cr+Fe)$ в 12CrTaNb стали и NbX с химическим составом 66% Nb, 8% Nb, 25% $(Cr+Fe)$ в 12CrNb стали. Размеры этих частиц составляют 50 ± 5 и 29 ± 5 нм в 12CrTaNb и 12CrNb стали соответственно. В ряде работ [10,11] отмечалось благоприятное воздействие мелких частиц, равномерно расположенных по объему матрицы, на сопротивление ударным нагрузкам, что связано с торможением трещин об эти частицы в процессе их распространения. Более мелкие частицы NbX в 12CrNb стали могут вызывать более высокие величины энергий, требуемые для распространения трещины, при повышенных температурах испытания (табл. 2, 4).

Границы структуры троостита отпуска декорированы частицами карбидов $M_{23}C_6$, которые плотно располагаются друг к другу, фактически образуя непрерывные тонкие прослойки вдоль границ мартенситных реек (рис. 4). Размер частиц в обеих сталях одинаковый и составляет около 50 ± 5 нм (табл. 4). Была определена численная плотность частиц, располагающихся по границам мартенситных реек как отношение количества частиц на единицу длины границы мартенситной рейки. Для обеих сталей величины численной плотности частиц вдоль границ мартенситных реек очень высокие и достигают $2,5 \text{ мкм}^{-1}$ (табл. 3). Такие значения характерны для сталей с высоким содержанием бора [15]. Очевидно, что такие тонкие прослойки вдоль границ будут действовать как хрупкие элементы, препятствуя передаче деформации от одной мартенситной рейке к другой.

Таким образом, источниками хрупкой природы 12% Cr сталей с низким содержанием азота могут выступать крупные зерна дельта-феррита, окруженные крупными частицами, содержащими вольфрам и хром, крупные частицы типа W_2B , равномерно распределенные по объему матрицы, а также непрерывные цепочки частиц карбидов $M_{23}C_6$ по границам мартенситных реек.

4. Заключение. Природа низкого сопротивления ударным нагрузкам 12% Cr сталей с низким содержанием азота была установлена на примере двух плавок, отличающихся друг от друга содержанием ниобия и тантала. Обе плавки демонстрировали низкие значения ударной вязкости при комнатной температуре, что не отвечало требованиям, предъявляемым к материалам изготовления лопаток паровых турбин. Температура хрупко-вязкого перехода была высокой, 65-70°C. Источниками охрупчивания обеих 12% Cr сталей с низким содержанием азота выступают зерна дельта-феррита, декорированные

крупными частицами, крупные частицы типа W_2B , равномерно распределенные по объему матрицы, и непрерывные цепочки карбидов $M_{23}C_6$, расположенные по границам мартенситных реек. Комбинация этих факторов препятствует распространению пластической деформации при ударных испытаниях, вызывая хрупкое разрушение даже при комнатной температуре.

Список литературы

1. Кайбышев Р.О., Скоробогатых В. Н., Щенкова И. А. 2010. Новые стали мартенситного класса для тепловой энергетики. *Физика металлов и металловедение*, 109(2): 200–215.
2. Федосеева А., Никитин И., Дудова Н., Кайбышев Р. 2020. Анализ механических свойств жаропрочных Со-модифицированных 12%Cr и 9%Cr сталей. *Физика металлов и металловедение*, 121(12): 1338-1344.
3. Alkan G., Chae D., Kim S.-J. 2013. Effect of delta-ferrite on impact property of hot-rolled 12Cr–Ni steel. *Sci. Technol. Weld. Join.* 9: 377-389.
4. Anderko K., Schafer L., Materna-Morris E. 1991. Effect of the delta-ferrite phase on the impact properties of martensitic chromium steels. *J. Nucl. Mater.*, 179-181: 492-495.
5. Bladeshia H.K.D.H. 2001. Design of ferritic creep-resistant steels. *ISIJ Int.*, 41: 626-640.
6. Carrouge D., Bhadeshia H.K.D.H., Woollin P. 2004. Effect of delta-ferrite on impact properties of supermartensitic stainless steel heat affected, *Sci. Technol. Weld. Join.*, 9: 377-389.
7. Chatterjee A., Chakrabarti D., Moitra A., Mitra R., Bhaduri A. 2014. Effect of normalization temperatures on ductile–brittle transition temperature of a modified 9Cr–1Mo steel. *Mater. Sci. Eng. A.*, 618: 219–231.
8. Cui Ch., Gao X., Su G., Gao C., Liu Zh., Misra R.D.K. 2018. Effect of thermal treatment on the evolution of delta ferrite in 11Cr–3Co–2.3W steel. *Mater. Sci. Technol.*, 34: 2087-2096.
9. Hald J. 2008. Microstructure and long-term creep properties of 9–12%Cr steels. *Int. J. Press. Vessels Pip.*, 85: 30–37.
10. Harrelson K.J., Rou S.H., Wilcox R.C. 1986. Impurity element effects on the toughness of 9Cr-1Mo steel. *J. Nucl. Mater.* 141–143: 508–512.
11. Hu J., Liu K., Ma L., Misra R.D.K., Zhang W., Du H., Xu W. 2021. Significant improvement in strength and toughness of nanoscale precipitate–strengthened steel by direct quenching and tempering process. *Steel Res. Int.* 92: 2000331.
12. Kern T. U., Staubli M., Scarlin B. 2002. The European efforts in material development for 650C USC power plants – COST522. *ISIJ Int.*, 242: 1515-1519.
13. Knezevic V., Balun J., Sauthoff G., Inden G., Schneider A. 2008. Design of martensitic/ferritic heat-resistant steels for application at 923 K with supporting thermodynamic modeling. *Mater. Sci. Eng. A*, 477: 334–343.
14. Maruyama K., Sawada K., Koike J. 2001. Strengthening mechanisms of creep resistant tempered martensitic steel. *ISIJ Int.*, 41: 641-653.
15. Mishnev R., Dudova N., Fedoseeva A., Kaibyshev R. 2016. Microstructural aspects of superior creep resistance of a 10%Cr martensitic steel. *Mater.Sci. Eng. A*, 678: 178–189.
16. Niessen F., Tiedje N., Hald J. 2017. Kinetics modeling of delta-ferrite formation and retainment during casting of supermartensitic stainless steel. *Mater. Des.*, 118: 138-145.
17. Nikitin I., Fedoseeva A., Kaibyshev, R., 2020. Strengthening mechanisms of creep-resistant 12%Cr–3%Co steel with low N and high B contents. *J. Mater. Sci.*, 55(17): 7530-7545.
18. Pandey Ch., Mahapatra M., Kumar P., Saini N., Thakare J., Vidyathy R.S., Narang H.K. 2018. A brief study on delta-ferrite evolution in dissimilar P91 and P92 steel weld joint and their effect on mechanical properties. *Arch. Civ. Mech. Eng.*, 18: 713-722.
19. Schafer L. 1998. Influence of delta ferrite and dendritic carbides on the impact and tensile properties of a martensitic chromium steel. *J. Nucl. Mater.*, 262: 1336-1339.
20. Wang P., Lu S.P., Xiao N.M., Li D.Z., Li Y.Y. 2010. Effect of delta ferrite on impact properties of low carbon 13Cr–4Ni martensitic stainless steel. *Mater. Sci. Eng. A.*, 527: 3210-3216.

References

1. Kaybyshev R.O., Skorobogatykh V.N., Shchenkova I.A. 2010. New martensitic steels for fossil power plant: creep resistance, *The Physics of Metals and Metallography*, 109(2): 186-200 (in Russian).
2. Fedoseeva A.E., Nikitin, I.S. Dudova N.R., Kaibyshev R.O. 2020. Analysis of mechanical properties of heat resistant Co-modified 12%Cr and 9%Cr steels, *The Physics of Metals and Metallography*, 121(12): 1233-1239 (in Russian).
3. Alkan G., Chae D., Kim S.-J. 2013. Effect of delta-ferrite on impact property of hot-rolled 12Cr–Ni steel. *Sci. Technol. Weld. Join.*, 9: 377-389.
4. Anderko K., Schafer L., Materna-Morris E. 1991. Effect of the delta-ferrite phase on the impact properties of martensitic chromium steels. *J. Nucl. Mater.*, 179-181: 492-495.
5. Bladeshia H.K.D.H. 2001. Design of ferritic creep-resistant steels. *ISIJ Int.*, 41: 626-640.
6. Carrouge D., Bhadeshia H.K.D.H., Woollin P. 2004. Effect of delta-ferrite on impact properties of supermartensitic stainless steel heat affected, *Sci. Technol. Weld. Join.*, 9: 377-389.
7. Chatterjee A., Chakrabarti D., Moitra A., Mitra R., Bhaduri A. 2014. Effect of normalization temperatures on ductile–brittle transition temperature of a modified 9Cr–1Mo steel. *Mater. Sci. Eng. A.*, 618: 219–231.
8. Cui Ch., Gao X., Su G., Gao C., Liu Zh., Misra R.D.K. 2018. Effect of thermal treatment on the evolution of delta ferrite in 11Cr–3Co–2.3W steel. *Mater. Sci. Technol.*, 34: 2087-2096.
9. Hald J. 2008. Microstructure and long-term creep properties of 9–12% Cr steels. *Int. J. Press. Vessels Pip.*, 85: 30–37.
10. Harrelson K.J., Rou S.H., Wilcox R.C. 1986. Impurity element effects on the toughness of 9Cr-1Mo steel. *J. Nucl. Mater.* 141–143: 508–512.
11. Hu J., Liu K., Ma L., Misra R.D.K., Zhang W., Du H., Xu W. 2021. Significant improvement in strength and toughness of nanoscale precipitate–strengthened steel by direct quenching and tempering process. *Steel Res. Int.*, 92: 2000331.
12. Kern T. U., Staubli M., Scarlin B. 2002. The European efforts in material development for 650C USC power plants – COST522. *ISIJ Int*, 242: 1515-1519.
13. Knezevic V., Balun J., Sauthoff G., Inden G., Schneider A. 2008. Design of martensitic/ferritic heat-resistant steels for application at 923 K with supporting thermodynamic modeling. *Mater. Sci. Eng. A*, 477: 334–343.
14. Maruyama K., Sawada K., Koike J. 2001. Strengthening mechanisms of creep resistant tempered martensitic steel. *ISIJ Int.*, 41: 641-653.
15. Mishnev R., Dudova N., Fedoseeva A., Kaibyshev R. 2016. Microstructural aspects of superior creep resistance of a 10%Cr martensitic steel. *Mater.Sci. Eng. A*, 678: 178–189.
16. Niessen F., Tiedje N., Hald J. 2017. Kinetics modeling of delta-ferrite formation and retainment during casting of supermartensitic stainless steel. *Mater. Des.*, 118: 138-145.
17. Nikitin I., Fedoseeva A., Kaibyshev, R., 2020. Strengthening mechanisms of creep-resistant 12%Cr–3%Co steel with low N and high B contents. *J. Mater. Sci.*, 55(17): 7530-7545.
18. Pandey Ch., Mahapatra M., Kumar P., Saini N., Thakare J., Vidyathy R.S., Narang H.K. 2018. A brief study on delta-ferrite evolution in dissimilar P91 and P92 steel weld joint and their effect on mechanical properties. *Arch. Civ. Mech. Eng.*, 18: 713-722.
19. Schafer L. 1998. Influence of delta ferrite and dendritic carbides on the impact and tensile properties of a martensitic chromium steel. *J. Nucl. Mater.*, 262: 1336-1339.
20. Wang P., Lu S.P., Xiao N.M., Li D.Z., Li Y.Y. 2010. Effect of delta ferrite on impact properties of low carbon 13Cr–4Ni martensitic stainless steel. *Mater. Sci. Eng. A.*, 527: 3210-3216.

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 13.10.2022

Поступила после рецензирования 24.11.2022

Принята к публикации 28.11.2022

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Ткачев Евгений Сергеевич – старший научный сотрудник лаборатории Перспективных сталей для сельскохозяйственной техники, Российский государственный аграрный университет – МСХА имени К. А. Тимирязева

ул. Тимирязевская, 49, Москва, 127434, Россия

Долженко Анастасия Сергеевна – младший научный сотрудник лаборатории механических свойств жаропрочных и наноструктурных материалов, Белгородский государственный национальный исследовательский университет

ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия

Федосеева Александра Эдуардовна – кандидат технических наук, старший научный сотрудник лаборатории механических свойств жаропрочных и наноструктурных материалов, Белгородский государственный национальный исследовательский университет

ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Evgenii Tkachev – Senior Researcher, Russian State Agrarian University - Moscow Timiryazev Agricultural Academy, Moscow, Russia

Anastasiia Dolzhenko – Unior Researcher, Belgorod National Research University, Belgorod, Russia

Alexandra Fedoseeva – Dr., PhD, Senior Researcher, Belgorod National Research University, Belgorod, Russia

УДК 539.89 : 539.25

DOI 10.52575/2687-0959-2022-54-4-261-265

оригинальное исследование

EBSD-АНАЛИЗ МИКРОСТРУКТУРЫ AL–CU–MG СПЛАВА, ПОДВЕРГНУТОГО СВАРКЕ ТРЕНИЕМ С ПЕРЕМЕШИВАНИЕМ

М. Р. Газизов¹ , И. С. Зуйко² , С. С. Малофеев² 

(Статья представлена членом редакционной коллегии А. В. Носковым)

¹Российский государственный аграрный университет – МСХА имени К. А. Тимирязева,
Москва, 127434, Россия

²Белгородский государственный национальный исследовательский университет,
Белгород, 308015, Россия

E-mail: gazizov@rgau-msha.ru, malofeev@bsu.edu.ru, zuiiko_ivan@bsu.edu.ru

Аннотация. В данной работе исследована связь между тепловыделением во время сварки трением перемешиванием (СТП) и микроструктурой, формирующейся в зоне перемешивания современного термоупрочняемого алюминиевого сплава 2519. С помощью системы автоматической идентификации дифракции обратно-рассеянных электронов (EBSD) установлено, что микроструктура является мелкозернистой. Так же было показано что при исследованных режимах соединения размер зёрен в зоне перемешивания не превышает 2 мкм.

Ключевые слова: сварка трением с перемешиванием, дифракция обратно рассеянных электронов, аномальный рост зёрен

Для цитирования: Газизов М. Р., Малофеев С. С., Зуйко И. С. 2022. EBSD-анализ микроструктуры Al–Cu–Mg сплава, подвергнутого сварке трением с перемешиванием. Прикладная математика & Физика, 54(4): 261–265. DOI 10.52575/2687-0959-2022-54-4-261-265

EBSD-INVESTIGATION OF AL-CU-MG ALLOY MICROSTRUCTURE SUBJECTED TO FRICTION-STIR WELDING

Marat Gazizov¹ , Ivan Zuiiko² , Sergey Malopheyev² 

(Article submitted by a member of the editorial board A. V. Noskov)

¹Russian State Agrarian University - Moscow Timiryazev Agricultural Academy,
Moscow, 127434, Russia

²Belgorod National Research University,
Belgorod, 308015, Russia

E-mail: gazizov@rgau-msha.ru, malofeev@bsu.edu.ru, zuiiko_ivan@bsu.edu.ru

Received November, 28, 2022

Abstract. In this work, the relationship between heat input during friction stir welding (FSW) and the microstructure formed in the stir zone of a modern heat-treatable aluminium alloy 2519 was studied. Electron back-scatter diffraction technique (EBSD) revealed that microstructure consists of fine grains. In addition, it was found that grain size does not exceed 2 mkm.

Keywords: Friction Stir Welding, EBSD, Abnormal Grain Growth

For citation: Gazizov M. R., Malopheyev S. S., Zuiiko I. S. 2022. EBSD-investigation of Al–Cu–Mg alloy microstructure subjected to friction-stir welding. Applied Mathematics & Physics, 54(4): 261–265 (in Russian).

DOI 10.52575/2687-0959-2022-54-4-261-265

1. Введение. Благодаря низкой плотности, высокой прочности и жёсткости, термоупрочняемые Al–Cu–Mg сплавы находят применение в авиационной и транспортной промышленности. Как известно [11, 15] их главным механизмом упрочнения является дисперсионный, то есть выделение нано-размерных частиц вторых фаз (из семейства θ -Al₂Cu, S-Al₂CuMg). Для полномасштабного использования в промышленности эти сплавы должны обладать таким качеством как свариваемость [5], [6]-[9],[10].

Применение традиционных методов создания неразъемных сварных соединений (например, аргоно-дуговым или электронно-лучевым) приводит к значительной деградации механических свойств [1]-[2], [5], [8]-[10]. Однако, относительно недавно появился новый метод соединения – сварка трением с перемешиванием (СТП) позволяет получать высококачественные сварные соединения даже в материалах, которые раньше считались несвариваемыми [2], [4]-[6], [9]. Это обеспечивается за счёт особенностей самого метода – во время СТП материал остаётся в твёрдом виде, то есть не переводится в расплав [1]-[10].

Кроме того, материалы в процессе СТП подвергаются очень большим пластическим деформациям при повышенных температурах и относительно высокой скорости [7]-[9]. Формирование зёрненной микроструктуры при СТП представляет собой очень сложный физический процесс, который может включать в себя и прерывистую и непрерывную рекристаллизацию, и динамический и статический возврат, а также фрагментацию [2], [5], [8]-[9]. Вклад каждого механизма определяется свойствами соединяемых материалов, а именно структурой и энергией дефекта упаковки.

На сегодняшний день особенности микроструктуры Al–Cu–Mg сплавов после СТП изучены поверхностно. Поэтому поведение материала при вышеуказанных экстремальных условиях вызывает как академический, так и прикладной интерес. Таким образом, целью настоящей работы являлось исследование микроструктурных аспектов СТП-швов посредством современного метода характеристики структуры – EBSD-анализа.

2. Материалы и методика эксперимента. В качестве исходного материала использовали сплав AA2519 (химический состав Al–5.64Cu–0.33Mn–0.23Mg–0.15Zr–0.11Ti–0.09V–0.08Fe–0.08Zn–0.04Sn–0.01Si, весовых %), полученный методом полунепрерывного литья в НИУ «БелГУ». Из горячекатаных плит вырезали пластины, обработали на твёрдый раствор при $T=535^{\circ}\text{C}$ в течение 1 часа, закалили в холодную воду, прокатали на 20% ($\epsilon \sim 0.22$) до толщины 3 мм и состарили в течение 6 часов при 165°C (состояние максимальной прочности). Это микроструктурное состояние было обозначено как основной материал (ОМ). Размер зёрен в ОМ составлял ~ 24 мкм, а доля ВУГ 90% [15]. Листы ОМ были сварены встык вдоль направления прокатки на СТП-машине AccurStir 1004. Для соединения использовали два режима, отличающиеся тепловыделением, благодаря варьированию скоростями вращения и поступательного движения инструмента. НТ – низкое тепловыделение соответствовало скорости вращения 500 об/мин и скорости подачи 760 мм/мин, а ВТ – высокое тепловыделение соответствовало скорости вращения 1100 об/мин и скорости подачи 360 мм/мин. Учитывая сложный характер эволюции микроструктуры в ходе СТП, для дальнейшего исследования полученные сварные соединения были разделены в продольном направлении на три равных части (которые обозначены как «Верх», «Центр», и «Низ» на Рис. 1).

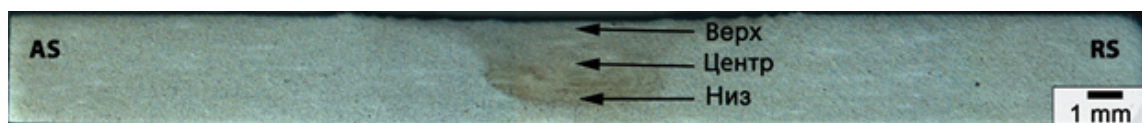


Рис. 1. Оптическое изображение поперечного сечения низкотемпературного сварного шва с обозначенными участками микроструктурных наблюдений. AS и RS соответствуют стороне набегания и стороне отвода
Fig. 1. Optical image of the weld cross-section of the low-heat-input weld with indicated areas of microstructural observations. AS and RS is advancing and retreating side, respectively

Исследования микроструктуры были сосредоточены на зёрненной структуре и проводились с использованием растрового электронного микроскопа FEI Quanta 600 FEG-SEM, работающего при напряжении 30 кВ, оснащённого системой анализа структуры кристаллических материалов методом дифракции обратно рассеянных электронов (EBSD). Во всех случаях размер карты составлял как минимум 250×250 мкм, а шаг сканирования – 0,2 мкм. Для анализа использовалось программное обеспечение TSL OIM Analysis 7. Достоверность индицирования Кикучи-картин определялась «индексом достоверности» или «confidence index». Все точки с индексом менее 0,1 не принимались во внимание и обозначены чёрным цветом на картах. Границами зёрен считали высокоугловые (ВУГ) с разориентировкой $\theta \geq 15^{\circ}$, границы с разориентировкой менее 15° рассматривали как малоугловые границы (МУГ). Мало- и большеугловые границы на EBSD-картах обозначены как белые и красные линии, соответственно. Средний размер зёрен вычислялся методом случайных секущих. Плотность границ того или иного типа (МУГ, ВУГ) определялось как соотношение общей длины границ к площади карты. Все остальные подробности эксперимента были представлены ранее [12]-[14].

3. Результаты и обсуждение. Известно, что из-за особенностей метода структура СТП-швов получается гетерогенной. Принято выделять зону перемешивания, зону термического воздействия, зону термомеханического воздействия. Текущее исследование полностью посвящено зоне перемешивания (Рис. 1).

На рисунках 2 и 3 представлены микроструктуры швов после низкотемпературного и высокотемпературного режима СТП, соответственно.

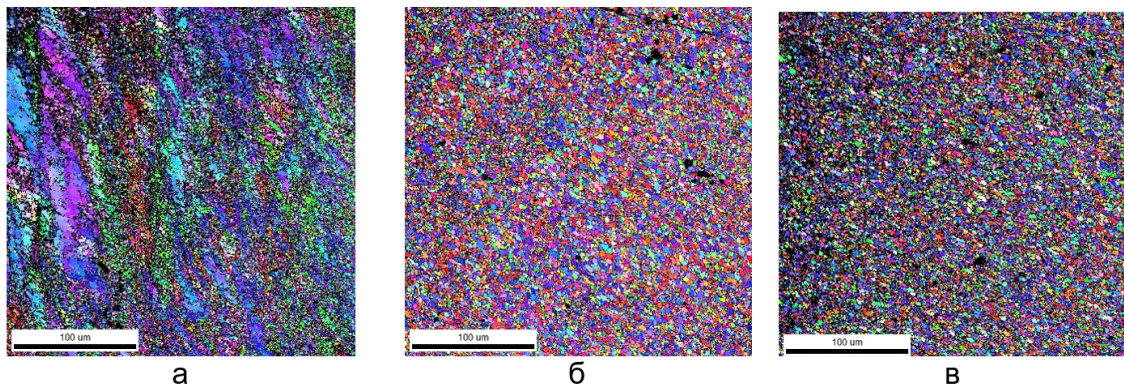


Рис. 2. EBSD-карты различных участков зоны перемешивания низкотемпературного шва:
а – «Низ», б – «Центр», в – «Верх»

Fig. 2. EBSD-maps of various sections of the stir zone of the low-temperature joint:
a-weld root, b – center, c – upper surface

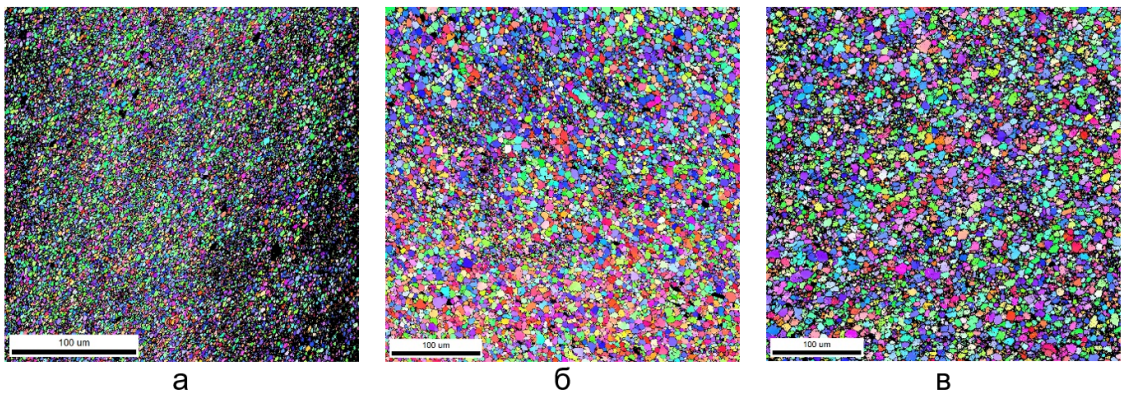


Рис. 3. EBSD-карты различных участков зоны перемешивания высокотемпературного шва:
а – «Низ», б – «Центр», в – «Верх»

Fig. 3. EBSD-maps of various sections of the stir zone of the high-temperature joint:
a-weld root, b – center, c – upper surface

Ключевые параметры сформировавшейся микроструктуры приведены в Таблице 1.

Таблица 1. Ключевые микроструктурные параметры зоны перемешивания
Table 1. Key microstructural characteristics of a stir zone

Режим	Область	Средний размер зёрен, мкм	Малоугловые границы		Высокоугловые границы	
			Доля, %	Плотность × 10 ² , мкм ⁻¹	Доля, %	Плотность × 10 ² , мкм ⁻¹
НТ	Верх	1,0	55	9.9	45	8.1
	Центр	1,4	39	9.0	61	1.4
	Низ	0,9	68	11.5	32	5.8
ВТ	Верх	1,1	92	8.1	8	0.7
	Центр	1,9	53	4.1	47	3.8
	Низ	1,0	65	4.3	35	2.3

Оба режима сварки приводят к однородной мелкозернистой структуре с развитой сеткой субграниц. Такие структуры являются типичными для СТП-швов термоупрочняемых алюминиевых сплавов [1, 3, 6]. Их формирование напрямую контролируется непрерывной динамической рекристаллизацией [2].

Важно подчеркнуть, что вне зависимости от тепловыделения средний размер зёрен не превышал 2 мкм. Это может косвенно свидетельствовать об однородности зоны перемешивания. С другой стороны, в центральной части зоны перемешивания обоих швов наблюдается уменьшение доли малоугловых границ и формирование преимущественно зёрен. Этот эффект, скорее всего, связан с активизацией возврата в условиях деформации при повышенных температурах, что способствовало снижению плотности

дислокаций и тем самым замедлило эволюцию границ деформационной природы. Примечательно, что нижняя часть зоны перемешивания так же характеризуется небольшими размерами зёрен, что не совсем характерно для СТП-швов термоупрочняемых сплавов [2],[8]-[9]. Возможно, из-за малой толщины используемых пластин происходит быстрый теплоотвод из этой области в холодную стальную подложку, что приводит к подавлению роста зёрен.

Поскольку исследованный сплав является термоупрочняемым, то эволюцию зёрненной структуры можно связать с частицами вторых фаз [2, 14]. Вероятно, сохранение объемной доли частиц в швах обеспечили повышенную термостабильность микроструктуры. Однако, это предположение требует экспериментального подтверждения.

В дальнейшем, для аттестации фазового состава и сформированной текстуры, планируется охарактеризовать изученные области с помощью рентгеноструктурного и рентгенофазового анализа, а также просвечивающей электронной микроскопии.

Заключение. Показано что сварка трением с перемешиванием приводит к существенному измельчению микроструктуры в зоне перемешивания термически упрочняемого сплава системы Al-Cu-Mg. Вне зависимости от выбранных условия процесса размер зерна не превышает 2 мкм. Термическая стабильность и тонкая структура полученных соединений требует дальнейшего изучения.

References

1. Goloborodko A. et al. 2004. Friction stir welding of a commercial 7075-T6 aluminum alloy: Grain refinement, thermal stability and tensile properties. *Mater. Trans.*, 45(8): 2503–2508.
2. Heidarzadeh A. et al. 2020. Friction stir welding/processing of metals and alloys: A comprehensive review on microstructural evolution. *Prog. Mater. Sci.*, 117: 100752.
3. Kalinenko A. et al. 2020. Microstructure-strength relationship in friction-stir welded 6061-T6 aluminum alloy. *Mater. Sci. Eng. A.*, 793: 139858.
4. Meng X. et al. 2021. Recent progress on control strategies for inherent issues in friction stir welding. *Prog. Mater. Sci.*, 115: 100706.
5. Mishra R.S., Ma Z.Y. 2005. Friction stir welding and processing. *Mater. Sci. Eng. R.*, 50(1-2): 1–78.
6. Pang Q. et al. 2019. Characterization of microstructure, mechanical properties and formability for thermomechanical treatment of friction stir welded 2024-O alloys. *Mater. Sci. Eng. A.*, 765: 138303.
7. Sato Y.S., et al. 2007. Grain growth phenomena in friction stir welded 1100 Al during post-weld heat treatment. *Sci. Tech. Weld. Join.*, 12: 318–323.
8. Shah P.H. et al. 2017. Friction stir welding of aluminium alloys: An overview of experimental findings—Process, variables, development and applications. *Proc. Inst. Mech. Eng. Part L: J. Mater. Des. Applic.*, 6: 1464420716689588.
9. Threadgill P.L. et al. 2009. Friction stir welding of aluminum alloys. *Int. Mater. Rev.*, 54: 49–93.
10. Yuan S. J., et al. 2012. Formability and microstructural stability of friction stir welded Al alloy tube during subsequent spinning and post weld heat treatment. *Mater. Sci. Eng. A.*, 558: 586–591.
11. Wang S. C., Starink M. J. 2005. Precipitates and intermetallic phases in precipitation hardening Al–Cu–Mg–(Li) based alloys. *Int. Mat. Rev.*, 50: 193–215.
12. Zuiko I. S. et al. 2022. On the Heterogeneous Distribution of Secondary Precipitates in Friction-Stir-Welded 2519 Aluminium Alloy. *Metals*, 12(4): 671.
13. Zuiko I. S. et al. 2021. Suppression of abnormal grain growth in friction-stir welded Al–Cu–Mg alloy by lowering of welding temperature. *Scr. Mater.*, 196: 113765.
14. Zuiko I. S. et al. 2020. Unusual ageing behaviour of friction-stir welded Al–Cu–Mg alloy. *Mater. Sci. Eng. A.*, 793: 139882.
15. Zuiko I.S., Kaibyshev R. 2020. Ageing response of cold-rolled Al–Cu–Mg alloy. *Mater. Sci. Eng. A.*, 781: 139148.

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 13.10.2022

Поступила после рецензирования 25.11.2022

Принята к публикации 28.11.2022

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Газизов Марат Разифович – кандидат технических наук, старший научный сотрудник Лаборатории перспективных сталей для сельскохозяйственной техники, Российский государственный аграрный университет – МСХА имени К. А. Тимирязева

ул. Тимирязевская, 49, Москва, 127434, Россия

Зуйко Иван Сергеевич – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Лаборатории механических свойств наноструктурных и жаропрочных материалов, Белгородский государственный национальный исследовательский университет

ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия

Малофеев Сергей Сергеевич – кандидат технических наук, старший научный сотрудник Лаборатории механических свойств наноструктурных и жаропрочных материалов, Белгородский государственный национальный исследовательский университет

ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия





INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Gazizov Marat – PhD, Senior Researcher of Laboratory of promising steels for agricultural machinery, Russian State Agrarian University - Moscow Timiryazev Agricultural Academy, Moscow, Russia

Zuiko Ivan – PhD, Senior Researcher of Laboratory of Mechanical Properties of Nanoscale Materials and Superalloys, Belgorod State National Research University, Belgorod, Russia

Malopheyev Sergey – PhD, Senior Researcher of Laboratory of Mechanical Properties of Nanoscale Materials and Superalloys, Belgorod State National Research University, Belgorod, Russia

МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА КОМПОЗИТА ТИ/ТИВ ПОСЛЕ ГОРЯЧЕЙ ПРОКАТКИ

М. С. Болдин¹ , М. С. Озеров² , В. С. Соколовский² , Е. А. Поголяева² 

(Статья представлена членом редакционной коллегии А. В. Носковым)

¹Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского,
Нижегород, 603950, Россия

²Белгородский государственный национальный исследовательский университет,
Белгород, 308015, Россия

E-mail: ozеров@bsu.edu.ru, sokolovskiy@bsu.edu.ru, povolyaeva@bsu.edu.ru, zherebtsov@bsu.edu.ru

Аннотация. Беспористый высокопрочный металл-матричный композит Ti/TiB был получен методом искрового плазменного спекания при температуре 1000 °С. Было установлено, что после горячей прокатки композит показал несколько повышенный предел текучести и значительно улучшенные показатели пластичности по сравнению с исходным состоянием: горячекатаный образец разрушился при степени деформации на сжатие 25 %, тогда как пластичность для исходного состояния составляла 12 %. Значения предела текучести составили 930 и 1200 МПа для исходного и горячекатаного состояний, соответственно. Показано заметное улучшение высокотемпературных механических свойств композита: при температуре растяжения 500 °С пластичность в исходном состоянии составила 3 %, горячекатаный образец показал значение относительного удлинения ~ 13%.

Ключевые слова: титановые сплавы, деформация, эволюция микроструктуры, глобуляризация

Благодарности: Исследования выполнены при финансовой поддержке внутривузовского гранта НИУ БелГУ по поддержке коллективов молодых ученых «Молодые лидеры в науке».

Для цитирования: Болдин М. С., Озеров М. С., Соколовский В. С., Поголяева Е. А., Жеребцов С. В. 2022. Механические свойства композита ТИ/ТИВ после горячей прокатки. Прикладная математика & Физика, 54(4): 266–270.

DOI 10.52575/2687-0959-2022-54-4-266-270

MECHANICAL PROPERTIES OF THE TI/TIB COMPOSITE AFTER HOT ROLLING

Maxim Boldin¹ , Maxim Ozerov² , Vitaliy Sokolovsky² , Elizaveta Povolyaeva ,
Sergey Zherebtsov² 

(Article submitted by a member of the editorial board A. V. Noskov)

¹Nizhny Novgorod State University, N. I. Lobachevsky,
Nizhny Novgorod, 603950, Russia

²Belgorod National Research University,
Belgorod, 308015, Russia

E-mail: ozеров@bsu.edu.ru, sokolovskiy@bsu.edu.ru, povolyaeva@bsu.edu.ru, zherebtsov@bsu.edu.ru u

Received November, 29, 2022

Abstract. A non-porous high-strength Ti/TiB metal-matrix composite was obtained by spark plasma sintering at a temperature of 1000°C. It was found that after hot rolling, the composite showed slightly increased yield strength and significantly improved ductility compared to the initial state: the hot-rolled sample failed at a compressive strain of 25 %, while the ductility for the initial state was 12 %. The values of the yield strength were 930 and 1200 MPa for the initial and hot-rolled states, respectively. A noticeable improvement in the high-temperature mechanical properties of the composite was shown: at a tension temperature of 500 °C, the ductility in the initial state was 3%, and the hot-rolled sample showed a relative elongation value of ~ 13%.

Keywords: Titanium Alloy, Compression, Microstructure Evolution, Globularization

Acknowledgements: The research was carried out with the financial support of the intra-university grant of the Belgorod National Research University for the support of teams of young scientists "Young Leaders in Science".

For citation: Boldin M., Ozerov M., Sokolovsky V., Povolyaeva E., Zherebtsov S. 2022. Mechanical properties of the TI/TIB composite after hot rolling. Applied Mathematics & Physics, 54(4): 266–270. (in Russian).

DOI 10.52575/2687-0959-2022-54-4-266-270

1. Введение. За счет комплекса привлекательных свойств (высокая удельная прочность, коррозионная стойкость, биосовместимость) титан и титановые сплавы широко востребованы в промышленности

и медицине [4]. Однако применение титана и низколегированных титановых сплавов часто ограничивается их недостаточно высокой абсолютной прочностью, твердостью и износостойкостью. Упрочнение титана может быть достигнуто за счет создания металл-матричных композитов (ММК) с использованием в качестве армирующего компонента таких высокотвердых соединений, как TiB, TiC, TiN [2, 5, 7, 9]. При этом, по сравнению с остальными упрочнителями, TiB имеет высокую устойчивость при температурах синтеза, близкую к титану плотность и коэффициент термического расширения, а также обладает хорошим кристаллографическим сопряжением с титановой матрицей, обеспечивая тем самым минимальные остаточные напряжения [6, 10]. На сегодняшний день плазменное спекание (ИПС) является одним из самых перспективных методов создания композиционных материалов. ИПС позволяет проводить синтез при низкой температуре и за короткое время, что, с одной стороны обеспечивает высокую производительность метода при достижении практически 100 % плотности заготовок, а с другой не ведет к существенному росту структурных элементов, позволяя получать наноструктурное состояние в композите [1]. В ходе искрового плазменного синтеза смеси порошков титана и диборида титана (TiB₂) протекает химическая реакция $Ti + TiB_2 = 2TiB$, в результате чего в титановой матрице образуется прочная нитевидная фаза TiB [3, 10]. В настоящее время для изготовления режущего инструмента применяются в основном коррозионноустойчивые стали. Титановые сплавы обладают конкурентным преимуществом перед сталями в области их применения в специальных условиях. К примеру, при работе режущего инструмента в условиях агрессивной среды (морская вода) развивается морская и контактная коррозия, стальной инструмент быстро разрушается. Для расширения области применения и увеличения требуемого баланса технологических свойств композита Ti/TiB необходимо наличие комплексных исследований по поиску повышения пластических свойств данного материала. Одним из путей повышения пластичности титана и сплавов на его основе является деформационно-термическая обработка. Прокатка – относительно простой метод пластической деформации, с помощью которого можно повысить механические свойства металла. Таким образом, данная работа направлена на исследование влияния горячей прокатки на структуру и механические свойства композита Ti/TiB.

2. Материал и методики. В данной работе композит Ti/TiB с весовым содержанием армирующего компонента TiB₂ 5 % был получен искровым плазменным спеканием при 1000 °С. Призматические образцы размером 4 × 10 × 30 мм³ вырезали из гомогенизированных цилиндров с помощью аппарата электроэрозионной резки Sodick AQ300L. Затем образцы нагревали до 1000 °С и прокатывали в неизотермических условиях до общей деформации по толщине 0,7 (уменьшение толщины на 55 %). Однонаправленную многопроходную прокатку выполняли с обжатием за проход ~ 0,25 мм с выдержкой 10 мин в печи, нагретой до 1000 °С, через каждые 2 прохода. Дальнейшая прокатка (уменьшение толщины более 55 %) привела к образованию поверхностных трещин на боковых гранях, скорее всего, из-за значительного охлаждения поверхностных слоев при неизотермическом деформировании.

Испытания на сжатие обоих состояний (исходной и после прокатки) композита проводились при комнатной температуре и номинальной скорости деформации 10⁻⁴ с⁻¹ на испытательной машине Instron 5882 с использованием образцов размером 3×3×5 мм³. Механические испытания на растяжение проводили на плоских образцах с длиной рабочей части 4 мм и поперечным сечением 1,5×3,0 мм². Перед испытаниями образцы тщательно шлифовали и полировали. Деформация образцов осуществлялась на универсальной испытательной машине Instron 5882 при комнатной и повышенных температурах (300–700 °С) и начальной скорости деформации 10–3 с⁻¹. Поверхность изломов композита исследовали с помощью растровой электронной микроскопии (СЭМ). СЭМ проводили с использованием электронного сканирующего микроскопа FEI Quanta 600 FEG при ускоряющем напряжении 30 кВ.

3. Результаты и их обсуждение. Кривые деформации композита Ti/TiB в исходном и горячекатаном состояниях, полученные после одноосного сжатия при комнатной температуре, представлены на рисунке 1. Удалось установить, что после горячей прокатки композит показал несколько повышенный предел текучести и значительно улучшенные показатели пластичности по сравнению с исходным состоянием. Так, горячекатаный образец разрушился при степени деформации на сжатие 25 %, тогда как пластичность для исходного состояния составляла существенно меньшее значение – 12 %. Показатели предела текучести составили 930 и 1200 МПа для исходного и горячекатаного состояний, соответственно. Также была измерена микротвердость двух состояний. Стоит отметить существенное повышение значений микротвердости прокатанного образца: по сравнению с исходным состоянием значения микротвердости увеличились с 480 до 550 HV.

Горячая прокатка также заметно улучшила высокотемпературные механические свойства композита (Рис. 2). Хотя при 400 °С ни в одном из состояний сплава не наблюдалось стадии пластического течения, образцы после горячей прокатки разрушались при гораздо более высоких напряжениях, чем в исходном состоянии. Повышение температуры растяжения до 500 °С привело к очень ограниченной пластичности (удлинение около 3 %) в исходном состоянии. В то же время горячекатаный образец показал выраженное относительное удлинение ~ 13 %. В то же время достаточно быстрая локализация пластического течения в композите свидетельствует об ограниченной способности материала к упрочнению. Величина предела

прочности при растяжении композита при 500 °С составила ~ 480 МПа.

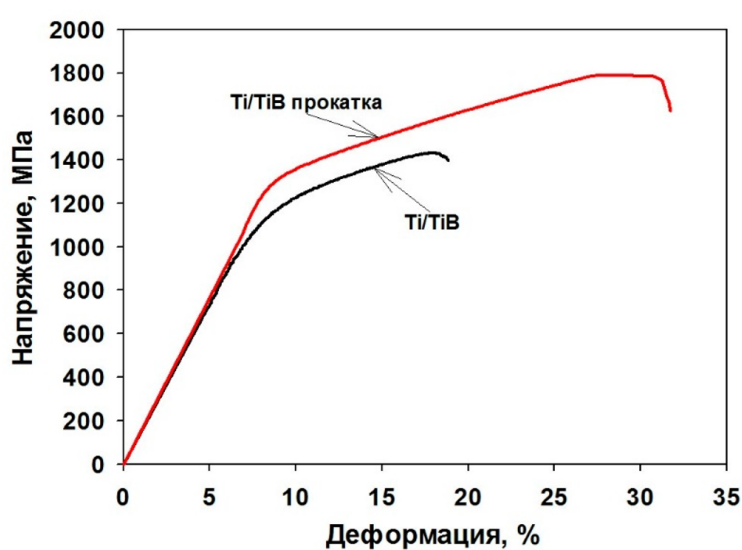


Рис. 1. Кривые напряжение-деформация, полученные после испытаний на сжатие при комнатной температуре образцов композита Ti/TiB в исходном состоянии и после прокатки
 Fig. 1. Stress-strain curves obtained after compression tests at room temperature of Ti/TiB composite specimens in the initial state and after rolling

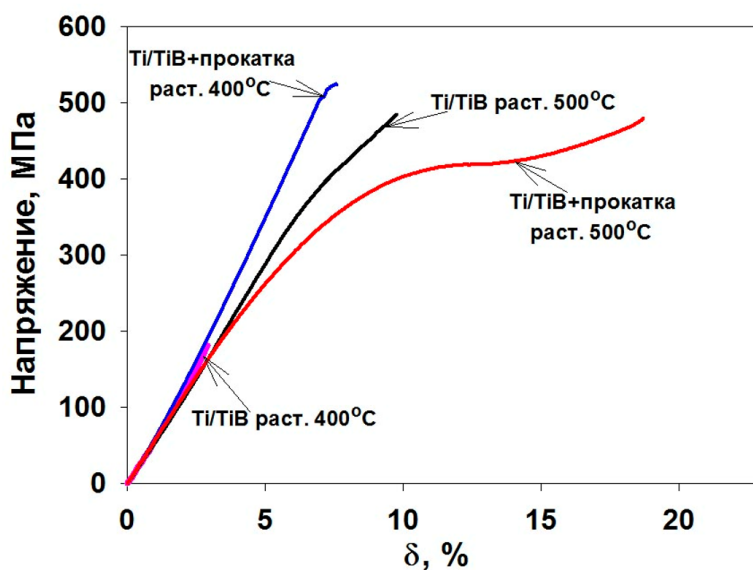


Рис. 2. Кривые напряжение-деформация композита в исходном и испытанном горячекатаном состоянии, полученные после испытаний на растяжение при 400 или 500 °С
 Fig. 2. Stress-strain curves of the composite in the initial and tested hot-rolled states, obtained after tensile tests at 400 or 500 °С

Изображения поверхностей излома образцов композита Ti/TiB в исходном состоянии (Рис. 3а) и после горячей прокатки (Рис. 3б), испытанных на растяжение при 500 °С, показали значительную разницу в механизмах разрушения. Исходное состояние продемонстрировало хрупкий характер разрушения с фасетками, а также местами, соответствующими межкристаллитному разрушению (Рис. 3а).

После горячей прокатки испытуемый образец имел явную вязкую поверхность излома с образованием типичных ямок (Рис. 3б). Анализируя данные кривых, напряжение-деформация после растяжения при 500 °С и анализа разрушения, можно предположить о незначительном снижении температуры хрупко-вязкого перехода (на ~ 100 °С) для горячекатаного композита по сравнению с исходное состояние, ранее наблюдавшееся в этих композитах после многоосной изотермической деформации [8].

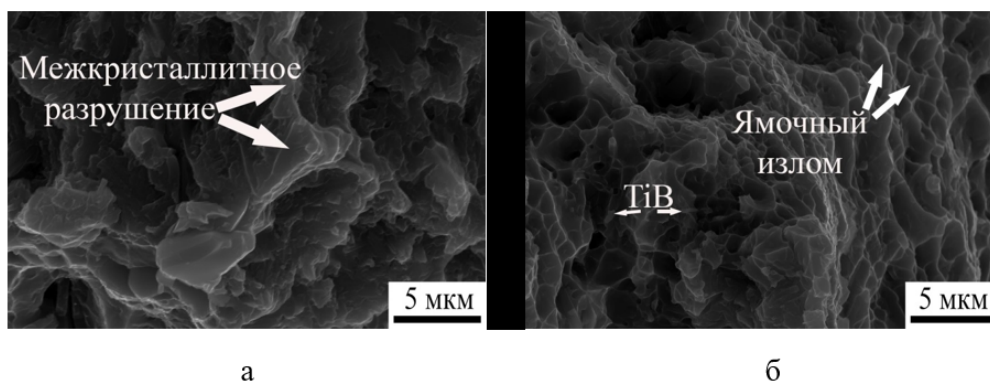


Рис. 3. Поверхности излома образцов, испытанных на растяжение при 500 °С в исходном состоянии (а) и после горячей прокатки (б); СЭМ-изображения
 Fig. 3. Fracture surfaces of tensile tested specimens at 500 °С in the initial condition (a) and after hot rolling (b); SEM images

4. Заключение. После испытаний на сжатие при комнатной температуре было установлено, что после горячей прокатки композит Ti/TiB показал повышенный предел текучести и значительно улучшенные показатели пластичности по сравнению с исходным состоянием: горячекатаный образец разрушился при степени деформации на сжатие 25 %, тогда как пластичность для исходного состояния составляла 12 %. Значения предела текучести составили 930 и 1200 МПа для исходного и горячекатаного состояний, соответственно. После высокотемпературных испытаний на растяжение показано существенное улучшение высокотемпературных механических свойств композита: при температуре растяжения 500 °С пластичность в исходном состоянии составила 3 %, тогда как горячекатаный образец показал значение относительного удлинения ~ 13 %. После растяжения при 500 °С исходное состояние композита продемонстрировало хрупкий характер разрушения, соответствующий межкристаллитному разрушению, в то время как горячекатаный ММК демонстрировал явную вязкую поверхность разрушения с образованием характерных ямок.

References

1. Feng H., Zhou Yu, Jia D., Meng Q., Rao J. 2006. Growth Mechanism of In Situ TiB Whiskers in Spark Plasma Sintered TiB/Ti Metal Matrix Composites, *Cryst. Growth Des.* 7: 1626–1630.
2. Godfrey T. M. T., Goodwin P. S., Ward-Close C. M. 2000. Titanium particulate metal matrix composites—Reinforcement, production methods, and mechanical properties, *Adv. Eng. Mater.*, 2: 85–91.
3. Huang L., Cui X., Geng L., Fu. Y. 2012. Effects of rolling deformation on microstructure and mechanical properties of network structured TiBw/Ti composites, *Trans. Nonferrous Met. Soc. China*, 22: 79–83.
4. Leyens C., Peters M. 2003. *Titanium and Titanium Alloys. Fundamentals and Applications.* – Wiley-VCH: Weinheim. 499.
5. Lindroos V. K., Talvitie M. J. J. 1995. Recent advances in metal matrix composites, *Mater. Process. Technol.*, 53: 273–284.
6. Morsi K., Patel V. V. 2007. Processing and properties of titanium–titanium boride (TiBw) matrix composites – a review, *J. Mater. Sci.*, 42: 2037–2047.
7. Ozerov M., Klimova M., Vyazmin A., Stepanov N., Zhrebtsov S. 2017. Orientation relationship in a Ti/TiB metal-matrix composite, *Mater. Lett.*, 186: 168–170.
8. Ozerov M., Klimova M., Sokolovsky V., Stepanov N., Popov A., Boldin M., Zhrebtsov S. 2019. Evolution of microstructure and mechanical properties of Ti/TiB metal matrix composite during isothermal multiaxial forging. *J. Alloys Compd.* 770, 840–848.
9. Radhakrishna Bhat B. V., Subramanyam J., Bhanu Prasad V. V. 2002. Preparation of Ti-TiB-TiC & Ti-TiB composites by in-situ reaction hot pressing, *Mater. Sci. Eng. A.*, 325: 126–130.
10. Ragulya A. V. 2010. Fundamentals of Spark Plasma Sintering, in *Encyclopedia of Materials.* – Science and Technology (Eds. K. H. Juergen Buschow et al.), 5.

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 08.10.2022

Поступила после рецензирования 19.11.2022

Принята к публикации 29.11.2022

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Болдин Максим Сергеевич – кандидат физико-математических наук, научный сотрудник Научно-исследовательского физико-технического института, ННГУ им. Н. И. Лобачевского
пр. Гагарина, 23/3, Нижний Новгород, 603950, Россия

Озеров Максим Сергеевич – кандидат технических наук, научный сотрудник лаборатории объёмных наноструктурных материалов, Белгородский государственный национальный исследовательский университет

ул. Победы, 85, г. Белгород, 308015, Россия

Соколовский Виталий Сергеевич – кандидат технических наук, научный сотрудник лаборатории объёмных наноструктурных материалов, Белгородский государственный национальный исследовательский университет

ул. Победы, 85, г. Белгород, 308015, Россия

Поволяева Елизавета Андреевна – аспирант, младший научный сотрудник лаборатории объёмных наноструктурных материалов, Белгородский государственный национальный исследовательский университет

ул. Победы, 85, г. Белгород, 308015, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Boldin Maxim Sergeevich – PhD, Researcher at the Research Institute of Physics and Technology, National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Nizhny Novgorod, Russia

Ozerov Maxim Sergeevich – PhD, Researcher, Laboratory of Bulk Nanostructured Materials, Belgorod State National Research University, Belgorod, Russia

Sokolovsky Vitaliy Sergeevich – PhD, Researcher, Laboratory of Bulk Nanostructured Materials, Belgorod State National Research University, Belgorod, Russia

Povolyaeva Elizaveta Andreevna – Postgraduate Student, Junior Researcher, Laboratory of Bulk Nanostructural Materials, Belgorod State National Research University, Belgorod, Russia

УДК 669.295; 544.022

DOI 10.52575/2687-0959-2022-54-4-271-276

оригинальное исследование

ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ПЛАСТИЧНОСТИ ВЫСОКОЭНТРОПИЙНЫХ СПЛАВОВ

О.Г. Климова – Корсмик¹, Д. Н. Клименко², М. В. Вережак², С. В. Жеребцов²

(Статья представлена членом редакционной коллегии А. В. Носковым)

¹Санкт-Петербургский государственный морской технический университет,
Санкт-Петербург, 198262, Россия

²Белгородский государственный национальный исследовательский университет,
Белгород, 308015, Россия

E-mail: klimenko@bsu.edu.ru, 1196573@bsu.edu.ru, zherebtsov@bsu.edu.ru

Аннотация. На базе данных из 153 сплавов с использованием подходов машинного обучения была обучена суррогатная модель для прогнозирования деформации до разрушения на сжатия высокоэнтропийных сплавов. В рамках работы оценивалась точность влияния архитектуры полносвязной искусственной нейронной сети (количество скрытых слоев и количество нейронов в скрытых слоях) на точность прогнозирования. Было показано, что с увеличением количества скрытых слоев абсолютная погрешность снижается – от 5,4% для односвязной нейронной сети до 4,8 % для двухслойной и 4,7% для трехслойной нейронной сети.

Ключевые слова: машинное обучение, высокоэнтропийные сплавы, пластичность, сжатие

Благодарности: Исследования выполнены при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках соглашения от «24» июня 2021г. № 075-11-2021-046 (ИГК 000000S407521QLP0002) с АО «ОЭЗ «ВладМиВа»» по комплексному проекту «Организация высокотехнологичного производства экспортноориентированных медицинских изделий на основе инновационных конструкционных материалов с целью импортозамещения на базе разработанных технологий» при участии НИУ «БелГУ» в части выполнения научно-исследовательских, опытно-конструкторских и технологических работ с использованием оборудования Центра коллективного пользования "Технологии и Материалы НИУ "БелГУ". Работа частично выполнена (машинное время) при поддержке проекта Российского фонда фундаментальных исследований № 20-53-56063.

Для цитирования: Климова – Корсмик О. Г., Клименко Д. Н., Вережак М. В., Жеребцов С. В. 2022. Прогнозирование пластичности высокоэнтропийных сплавов. Прикладная математика & Физика, 54(4): 271–276.

DOI 10.52575/2687-0959-2022-54-4-271-276

PREDICTION OF THE PLASTICITY OF HIGH-ENTROPIC ALLOYS

O. G. Klimova – Korsmik¹, D. N. Klimenko², M.V. Verezhak², S.V. Zherebtsov²

(Article submitted by a member of the editorial board A. V. Noskov)

¹St. Petersburg State Marine Technical University,
St. Petersburg, 198262, Russia

²Belgorod National Research University,
Belgorod, 308015, Russia

E-mail: klimenko@bsu.edu.ru, 1196573@bsu.edu.ru, ozarov@bsu.edu.ru, zherebtsov@bsu.edu.ru

Received November, 30, 2022

Abstract. Based on a database of 153 alloys, a surrogate model was trained using machine learning approaches to predict compressive strain-to-fracture in high-entropy alloys. As part of the work, the accuracy of the impact of the architecture of a fully connected artificial neural network (the number of hidden layers and the number of neurons in hidden layers) on the prediction accuracy was evaluated. It was shown that with an increase in the number of hidden layers, the absolute error decreases - from 5.4% for a single-connected neural network to 4.8% for a two-layer and 4.7% for a three-layer neural network.

Keywords: Machine Learning, High-Entropy Alloys, Plasticity, Compression

Acknowledgements: The research was carried out with the financial support of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation under an agreement dated June 24, 2021. No. 075-11-2021-046 (IGK 000000S407521QLP0002) with JSC "SEZ "VladMiVa" under the complex project "Organization of high-tech production of export-oriented medical devices based on innovative structural materials for the purpose of import substitution based on developed technologies" with the participation of NRU "BelGU" in part performing research, development and technological work using the equipment of the Center for Collective Use "Technologies and Materials of the National Research University" BelSU ". The work was partially performed (computer time) with the support of the Russian Foundation for Basic Research project No. 20-53-56063.

For citation: Klimova-Korsmik O., Klimenko D., Verezhak M., Zhrebtsov S. 2022. Prediction of the plasticity of high-entropic alloys. *Applied Mathematics & Physics*, 54(4): 271–276. (in Russian). DOI 10.52575/2687-0959-2022-54-4-271-276

1. Введение. Концепция высокоэнтропийных сплавов (ВЭСов) была первоначально предложена Йе [19] и Кантором [1]. В отличие от традиционных сплавов, которые образованы одним основным элементом и легирующими элементами, ВЭСы определяются как сплавы с пятью или более основными элементами в равном или почти равном атомном процентном соотношении (5–35 ат.%). ВЭСы вызвали большой исследовательский интерес [2]–[5], [10, 4] в связи с их высокой прочностью (в том числе при повышенных температурах), структурной стабильностью, твердостью и износостойкостью, а также хорошей стойкостью к коррозии и окислению [3, 4, 10]. Их превосходные свойства делают их перспективными для применения в широком спектре современных отраслей промышленности, например, в качестве высокотемпературных материалов аэрокосмических аппаратов следующего поколения.

Высокоэнтропийные сплавы обладают значительно большим композиционным пространством для проектирования новых сплавов по сравнению с традиционными сплавами. С одной стороны, огромное композиционное пространство дает более широкие возможности для получения сплавов с улучшенными свойствами. С другой стороны, разработка новых сплавов с желаемыми свойствами с помощью метода «проб и ошибок» может быть непрактичной. В связи с этим большое внимание уделяется разработке эффективных подходов для поиска сплавов с желаемыми характеристиками. Например, для прогнозирования фазового состава сплавов используются феноменологические правила [6, 13, 18], расчет фазовых диаграмм (CALPHAD) [12], алгоритмы машинного обучения [7, 20] и другие вычислительные методы, такие как *ab initio*, Монте-Карло (MC) или методом молекулярной динамики (МД) [8, 9]. Каждый из этих подходов имеет свои сильные и слабые стороны. Машинное обучение и аналитические модели (в первую очередь модели твердорастворного упрочнения) также показывают высокую точность в прогнозировании прочностных характеристик – предела текучести и микротвердости [11, 15, 17].

Например, *ab initio* и MD требуют очень много времени и вряд ли могут быть использованы для прогнозирования структуры сплавов высокопроизводительным способом. Феноменологические правила основаны на эмпирических наблюдениях и просты для расчетов, но точность их предсказаний не превышает 72% [6]. Моделирование CALPHAD может быть достаточно производительным, однако оно требует значительных вычислительных ресурсов. Кроме того, точность CALPHAD прогнозов может быть ограничена из-за отсутствия надежной базы данных для HEAs [12]. Подходы машинного обучения чувствительны к размеру и составу обучающего набора данных, но точность предсказания этого метода может достигать более 90% [17].

В рамках данной работы подходы машинного обучения были использованы для прогнозирования пластичности высокоэнтропийных сплавов.

2. Материал и методики. На основе литературных данных для данной работы была собрана база данных по пластичности высокоэнтропийных сплавов. В выборку включались данные по пластичности на сжатие при комнатной температуре сплавов в литом состоянии, так как такой набор условий позволяет сформировать наибольшую выборку, однородную по способу получения и испытания. В результирующую выборку вошли 153 сплава. Выборка случайным образом была разбита на обучающую и валидационную часть в пропорции 80/20 % соответственно.

В качестве признаков для обучения суррогатной модели были выбраны следующие 7 величин: δX_{Og} (разница в электроотрицательности по Оганову), \bar{C} (средний номер столбца в периодической таблице), \bar{X}_{abs} (средняя абсолютная электроотрицательность), dH_{mix} (энтальпия смешения), \bar{VA} (средний атомный объем), \bar{CNE} (средний эффективный ядерный заряд по Клементи), δRA (разница в атомных радиусах). Признаки были отобраны с использованием генетических алгоритмов как обеспечивающие наибольшую точность прогнозирования деформации до разрушения.

На рисунке 1 представлена схема полносвязной нейронной сети, использовавшейся для построения суррогатной модели. В рамках этой работы для подбора оптимальной архитектуры менялось количество скрытых слоев (1, 2 или 3 слоя) и количество нейронов в скрытых слоях (от 10 до 30 нейронов).

Для всех слоев, кроме выходного, использовалась функция активации Rectified Linear Unit (ReLU):

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{if } x < 0, \\ x, & \text{if } x \geq 0, \end{cases} \quad (1)$$

где x – входное значение, а $f(x)$ – выходное значение.

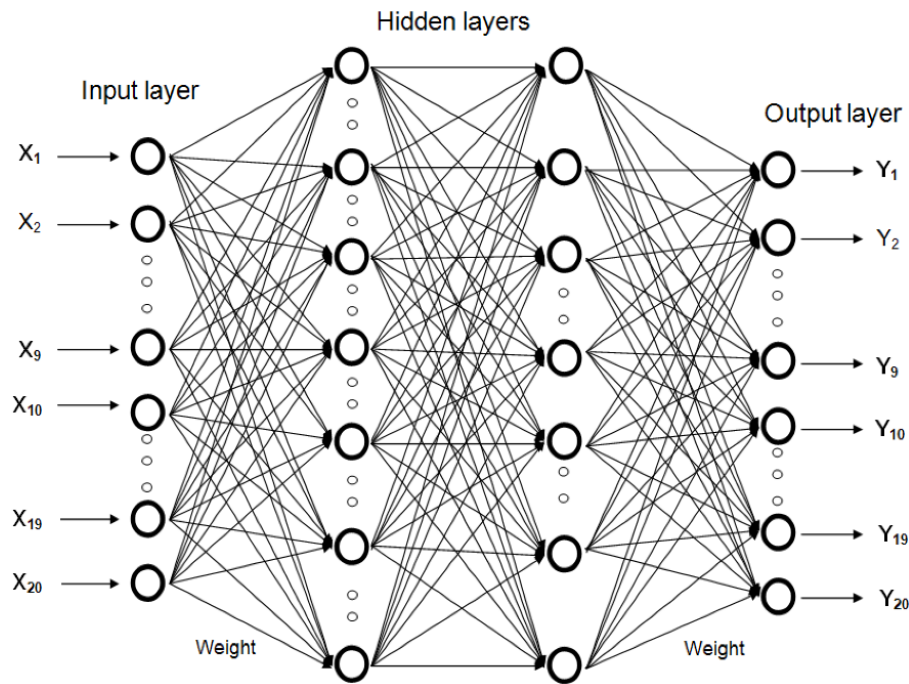


Рис. 1. Общая схема использованной полносвязной нейронной сети
 Fig. 1. General scheme of the used artificial fully connected neural network

Для выходного слоя использовалась сигмовидная функция активации:

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}, \tag{2}$$

где x – входное значение, а $f(x)$ – выходное значение.

Для уменьшения переобучения и времени обучения искусственной нейронной сети использовались методы пакетной нормализации и отсева. Нормализация партии вычисляет среднее значение и стандартное отклонение каждой входной переменной для слоя на мини-партию и использует эту статистику для выполнения стандартизации – масштабирования данных, чтобы иметь среднее значение, равное нулю, и стандартное отклонение, равное единице. Техника отсева – это отключение случайных нейронов на основе заданной вероятности p , мы использовали $p = 0,5$.

В качестве функции потерь для расчета градиента использовалась бинарная кросс-энтропийная потеря (BSELoss):

$$BSELoss = -\frac{1}{N} \sum_i^N \sum_j^M \log(p_{ij}), \tag{3}$$

где N – количество записей в наборе данных, M – количество меток, $y_{ij} = \{0, 1\}$ – двоичный индикатор правильной классификации метки класса j в наблюдении i , p_{ij} – прогнозируемая вероятность класса j в наблюдении i .

Валидационный набор данных не использовался для обучения и использовался для оценки точности прогнозирования суррогатной модели. В ходе обучения для оценки точности прогнозирования использовалась 5-кратная перекрестная проверка, т. е. обучающий набор разбивался на 5 частей и на каждую эпоху обучения искусственной нейронной сети 4 из этих наборов (сложений) использовались для обучения нейронной сети, а один оставшийся для проверки точности. На каждой эпохе обучения тренировочная складка менялась.

Каждая конфигурация нейронной сети обучалась в течении 500 эпох, на каждой эпохе обучения вычислялось среднеквадратичное отклонение на тестовой складке. Состояние с минимальной погрешностью запоминалось и в дальнейшем использовалось для вычислений. Для исключения влияния случайного распределения стартовых весов каждая конфигурация обучалась три раза, со случайной инициацией стартовых весов. Полученные после трех прогонов значения усреднялись.

3. Результаты и их обсуждение. В нашей работе мы использовали искусственные нейронные сети с 1, 2 и 3 скрытыми слоями, которые содержат либо одинаковое число нейронов в диапазоне от 10 до 30, либо неодинаковое случайное распределение (для сетей с 2 и 3 скрытыми слоями). На рисунке 2 представлены кривые обучения и зависимости предсказанных и истинных значений пластичности для конфигураций нейронных сетей, показавших наилучшую точность на валидационном наборе данных.

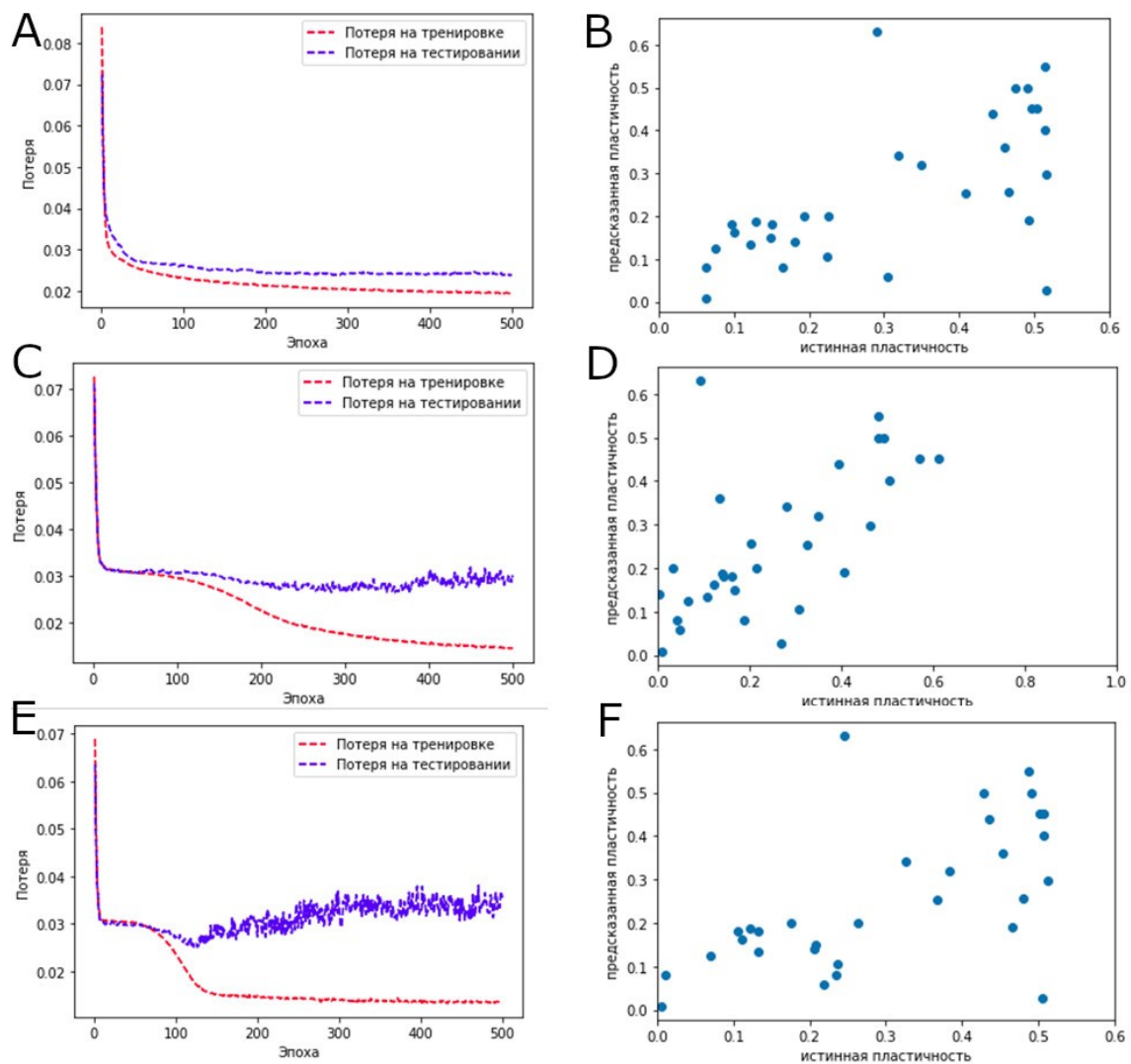


Рис. 2. Кривые обучения для одно- (А), двух- (С) и трехслойной (Е) нейронных сетей. Зависимость предсказанных и истинных значений пластичности для одно- (В), двух- (D) и трехслойной (F) нейронных сетей

Fig. 2. Learning curves for one- (A), two- (C) and three-layer (E) neural networks. Dependence of the predicted and true values of plasticity for one- (B), two- (D) and three-layer (F) neural networks

В таблице 1 приведены данные по среднеквадратичному отклонению в зависимости от количества скрытых слоев и количества нейронов в скрытых слоях. Видно, что с увеличением количества слоев точность незначительно повышается, при этом строгой зависимости между точностью и количеством нейронов в скрытых слоях не наблюдается. Для однослойной нейронной сети наилучшая точность наблюдается при 18 нейронах в скрытом слое. Архитектура сети с двумя скрытыми слоями достигает максимальной точности при числе нейронов в скрытых слоях по 14. Трехслойная нейронная сеть достигает наименьшей ошибки при прогнозировании пластичности сплавов при 10 нейронах в скрытых слоях.

Таблица 1. Среднеквадратичное отклонение для различных конфигураций нейронных сетей
Table 1. Standard deviation for various neural network configurations

Количество нейронов в скрытых слоях	10	14	18	22	28
1 скрытый слой	0.07	0.074	0.057	0.065	0.1
2 скрытых слоя	0.057	0.043	0.05	0.062	0.058
3 скрытых слоя	0.044	0.08	0.07	0.065	0.06

Для двух- и трехслойных нейронных сетей также оценивалась точность конфигураций с неодинаковым количеством нейронов в скрытых слоях. В таблице 2 приведены данные для нескольких сетей, конфигурации которых были выбраны случайным образом. Для случайных конфигураций с увеличением количества скрытых слоев среднеквадратичная ошибка уменьшается.

Таблица 2. Среднеквадратичное отклонение для двух- и трехслойных нейронных сетей со случайной конфигурацией

Table 2. Standard deviation for two- and three-layer neural networks with a random configuration

Конфигурация	10-20	15-18	30-11	25-16	18-10
Среднеквадратичное отклонение	0.048	0.066	0.05	0.048	0.082
Конфигурация	10-20-30	15-18-20	20-23-16	17-30-14	10-10-19
Среднеквадратичное отклонение	0.065	0.047	0.057	0.05	0.074

4. Заключение. Подходы машинного обучения были использованы для прогнозирования деформации до разрушения на сжатия при комнатной температуре для высокоэнтропийных сплавов. Было показано, что с увеличением числа скрытых слоев наблюдается уменьшение среднеквадратичной ошибки и для трехслойной нейронной сети была получена погрешность менее 5%. Была показана перспективность примененного подхода для прогнозирования пластичности высокоэнтропийных сплавов.

References

1. Cantor B. et al. 2004. Microstructural development in equiatomic multicomponent alloys, *Materials Science and Engineering: A.*, 375: 213–218.
2. Chuang M. H. et al. 2011. Microstructure and wear behavior of Al_xCo_{1-5x}CrFeNi_{1-5x}Ti_y high entropy alloys // *Acta Materialia*, 59(16): 6308–6317.
3. Gao Q. Zhang. 2008. Ultraviolet-B-induced oxidative stress and antioxidant defense system responses in ascorbate-deficient vtc1 mutants of *Arabidopsis thaliana*. *J Plant Physiol*, 165(2): 138–48.
4. Gludovatz B. et al. 2014. A fracture-resistant high-entropy alloy for cryogenic applications // *Science*, 345(6201): 1153–1158.
5. Gorr B. et al. 2015. Phase equilibria, microstructure, and high temperature oxidation resistance of novel refractory high-entropy alloys. *Journal of Alloys and Compounds*, 624: 270–278.
6. Guo S. 2015. Phase selection rules for cast high entropy alloys: an overview. *Materials Science and Technology*, 31(10): 1223–1230.
7. Huang W., Martin P., Zhuang H. L. 2019. Machine-learning phase prediction of high-entropy alloys. *Acta Materialia*, 169: 225–236.
8. Jiang C., Uberuaga B. P. 2016. Efficient ab initio modeling of random multicomponent alloys. *Physical review letters*, 116(10): 105501.
9. Lederer Y. et al. 2018. The search for high entropy alloys: a high-throughput ab-initio approach. *Acta Materialia*, 159: 364–383.
10. Mishra B. et al. 2013. Experimental studies on the effect of size and shape of holes on damage and microstructure of high hardness armour steel plates under ballistic impact. *Materials & Design*, 43: 17–24.
11. Ramprasad R. et al. 2017. Machine learning in materials informatics: recent applications and prospects. *npj Computational Materials* 3.
12. Senkov O. N. et al. 2015. Accelerated exploration of multi-principal element alloys for structural applications. *Calphad*, 50: 32–48.
13. Sheng G. U. O., Liu C. T. 2011. Phase stability in high entropy alloys: Formation of solid-solution phase or amorphous phase. *Progress in Natural Science: Materials International*, 21(6): 433–446.
14. Steurer W. 2020. Single-phase high-entropy alloys—A critical update. *Materials Characterization*, 162: 110179.
15. Toda-Caraballo I., Rivera-Del-Castillo P. E. J. 2015. Modelling solid solution hardening in high entropy alloys. *Acta Materialia*, 85: 14–23.

16. Tsai M. H., Yeh J. W. 2014. High-entropy alloys: a critical review. *Materials Research Letters*. 2(3): 107–123.
17. Wen C. et al. 2019. Machine learning assisted design of high entropy alloys with desired property. *Acta Materialia*, 170: 109–117.
18. Yang X., Zhang Y. 2012. Prediction of high-entropy stabilized solid-solution in multi-component alloys. *Materials Chemistry and Physics*, 132(2-3): 233–238.
19. Yeh J. W. et al. 2004. Nanostructured high-entropy alloys with multiple principal elements: novel alloy design concepts and outcomes. *Advanced engineering materials*, 6(5): 299–303.
20. Zhang Y. et al. 2020. Phase prediction in high entropy alloys with a rational selection of materials descriptors and machine learning models. *Acta Materialia*, 185: 528–539.

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 11.10.2022

Поступила после рецензирования 17.11.2022

Принята к публикации 30.11.2022

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Климова – Корсмик Ольга Геннадьевна – начальник отдела исследований материалов, Институт лазерных и сварочных технологий, Санкт-Петербургский государственный морской технический университет (ИЛИСТ СПбГМТУ)

пр. Маршала Жукова, 38-а, Санкт-Петербург, 198262, Россия

Клименко Денис Николаевич – научный сотрудник лаборатории объёмных наноструктурных материалов, Белгородский государственный национальный исследовательский университет

ул. Победы, 85, г. Белгород, 308015, Россия

Вережак Михаил Викторович – магистрант института инженерных и цифровых технологий, Белгородский государственный национальный исследовательский университет

ул. Победы, 85, г. Белгород, 308015, Россия

Жеребцов Сергей Валерьевич – доктор технических наук, ведущий научный сотрудник лаборатории объёмных наноструктурных материалов, Белгородский государственный национальный исследовательский университет

ул. Победы, 85, г. Белгород, 308015, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Klimova-Korsmik Olga Gennadievna – Head of Materials Research Department, Institute of Laser and Welding Technologies, St. Petersburg State Marine Technical University Marshal Zhukov Ave., St. Petersburg, Russia

Klimenko Denis Nikolaevich – Junior Researcher, Laboratory of Bulk Nanostructural Materials, Belgorod National Research University, Belgorod, Russia

Verezhak Mikhail Viktorovich – Graduate student, Institute of Engineering and Digital Technologies, Belgorod National Research University, Belgorod, Russia

Zherebtsov Sergey Valerievich – PhD, Professor, Leading Researcher, Laboratory of Bulk Nanostructured Materials, Belgorod National Research University, Belgorod, Russia