

Журнал включен в Перечень ВАК рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней кандидата и доктора наук (01.01.00 – математика, 01.02.00 – механика, 01.04.00 – физика).

Учредитель

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Белгородский государственный национальный исследовательский университет»

Издатель

НИУ «БелГУ»
Издательский дом «Белгород»
Адрес редакции, издателя, типографии:
308015, г. Белгород, ул. Победы, 85
Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор)

Свидетельство о регистрации средства массовой информации ПИ №ФС77-73510 от 31.08.2018

Выходит 4 раза в год

**РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ
СЕРИИ ЖУРНАЛА**

Главный редактор серии

А.В. Носков, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой теоретической и математической физики НИУ «БелГУ»

Заместитель главного редактора

Н.В. Малай, доктор физико-математических наук, профессор НИУ «БелГУ»

Ответственный секретарь

Р.А. Загороднюк, доцент НИУ «БелГУ», кандидат физико-математических наук

Члены редколлегии:

А. Ашыралыев, доктор физико-математических наук, профессор факультета математики Ближневосточного университета (Никосия, Турция); институт математики и математического моделирования (Алматы, Казахстан)

С.В. Блажевич, профессор НИУ «БелГУ», доктор физико-математических наук

А.Н. Беляков, профессор НИУ «БелГУ», доктор физико-математических наук

А.Г. Брусенцев, профессор БГТУ им. В.Г. Шухова, доктор физико-математических наук

В.Б. Васильев, заведующий кафедрой дифференциальных уравнений НИУ «БелГУ», доктор физико-математических наук

Ю.П. Вирченко, профессор НИУ «БелГУ», доктор физико-математических наук

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

Бештоков М.Х., Водахова В.А.

Сеточные методы решения нелокальных краевых задач для уравнения конвекции-диффузии дробного порядка с вырождением **347**

Вирченко Ю.П., Новосельцев А.Д. Унимодальность распределений вероятностей для максимумов выборки независимых Эрланговских случайных величин **366**

Куртова Л.Н. Число решений уравнения с квадратичными формами разных дискриминантов **374**

Струков В.Е., Струкова И.И. Теорема Винера в исследовании почти периодических на бесконечности функций **387**

Рахмелевич И.В. Двумерное неавтономное гиперболическое уравнение с квадратичным полиномом от первых производных **402**

Авилон А.В. Теорема М.Г. Крейна для разностных уравнений **417**

А.В. Глушак, профессор НИУ «БелГУ», доктор физико-математических наук

С.Б. Дабагов, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник лаборатории электронов высоких энергий ОЯФА ФИАН

им. П.Н. Лебедева РАН

Д.М. Левин, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой физики Тульского государственного университета

В.В. Меньшиц, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математики и моделирования систем ФГКОУ ВО

«Воронежский институт МВД России»

А.И. Назаров, доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В.А. Стеклова РАН

О.М. Пенкин, доктор физико-математических наук, профессор Научно-образовательного центра математики и кибернетики Казахстано-британского технического университета, Алматы, Казахстан

И.П. Половинкин, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического и прикладного анализа факультета прикладной математики, информатики и механики Воронежского государственного университета

С.М. Ситник, доктор физико-математических наук, профессор НИУ «БелГУ»

А.П. Солдатов, доктор физико-математических наук, профессор кафедры дифференциальных уравнений НИУ «БелГУ», главный научный сотрудник Вычислительного центра им. А.А. Дородницына РАН

В.Е. Федоров, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой математического анализа математического факультета Челябинского государственного университета

А.А. Шибков, доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической и экспериментальной физики Тамбовского государственного университета им. Г.Р. Державина

Выпускающий редактор *Л.П. Котенко*

Корректурa *Ю.В. Иващенко*

Компьютерная верстка *Ю.П. Вирченко*

Оригинал-макет *А.В. Носков*

E-mail: noskov_a@bsu.edu.ru

Подписано в печать 30.09.2019

Формат 60×84/8

Гарнитура Times New Roman, Impact

Усл. п. л. 14,8

Заказ 228

Цена свободная

Тираж 1000 экз.

Дата выхода 30.09.2019

Подписной индекс в Объединённом каталоге «Пресса России» – 81631

Оригинал-макет подготовлен и тиражирован в Издательском доме «Белгород»

Адрес: 308015 г. Белгород,

ул. Победы, 85

ФИЗИКА. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Винтаев В.Н. Метод возмущений физики рассеяния волн в коррекции резкости изображений при дистанционном зондировании..... **424**

Кумыков Т.С. Сублимационный рост ледяных частиц во фрактальных облаках **435**

Мохебби Фар М.Р. Измерение соотношения сигнала к шуму в обнаружении хлороформа в присутствии криптонного буферного газа лазерным фотоакустическим методом **444**

Дышаев М.М., Федоров В.Е. Сравнение временного распада для опционной стратегии «стрэддл» в случае недостаточной ликвидности или наличия транзакционных издержек **451**

Сведения об авторах **460**

Volume 51, №3
September 2019

Scientific peer-reviewed journal

Founded in 1995

The journal is included into the List of Higher Attestation Commission of peer-reviewed scientific publications where the main scientific results of dissertations for obtaining scientific degrees of a candidate and doctor of science should be published (01.01.00 – Mathematics, 01.02.00 – Mechanics, 01.04.00 – Physics)

Belgorod State University
Scientific Bulletin

Mathematics & Physics

НАУЧНЫЕ ВЕДОМОСТИ

Белгородского государственного университета

Mathematics & Physics

Founder

Federal state autonomous educational establishment of higher education «Belgorod National Research University»

Publisher

Belgorod State National Research University
Belgorod Publishing House
Address of editorial office, publisher,
letterpress plant: 85 Pobeda St., Belgorod,
308015, Russia

The journal has been registered at the Federal service for supervision of communications information technology and mass media (Roskomnadzor)

Mass media registration certificate
PIN® FS 77 - 73510 31.08.2018

Publication frequency: 4 /year

EDITORIAL BOARD OF JOURNAL SERIES

Chief editor

A.V. Noskov, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Head of the Department of Theoretical and Mathematical Physics (Belgorod National Research University)

Deputies of chief editor

N.V. Malay, Professor (Belgorod National Research University)

Editorial assistant

R.A. Zagorodnyuk, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, associated professor, (Belgorod National Research University)

Members of editorial board:

A. Ashyralyev, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of Mathematic faculty of Near East University (Nicosia, Turkey), Institute of Mathematic and Mathematical Modeling (Almaty, Kazakhstan)

S.V. Blazhevich, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor (Belgorod National Research University)

A.N. Belyakov, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor (Belgorod National Research University)

A.G. Brusentsev, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor (Belgorod Technological University named after V.G. Shukhov)

V.B. Vasiliev, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Head of the Department of Differential Equations

Yu.P. Virchenko, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor (Belgorod National Research University)

CONTENTS

MATHEMATICS

Beshtokov M.KH., Vodakhova V.A. Grid methods for solving nonlocal boundary value problems for the convection-diffusion equation of fractional order with degeneration **347**

Virchenko Yu.P., Novoseltsev A.D. Unimodality of probability distributions for sample maxima of independent Erlang random variables **366**

Kurtova L.N. A number of solutions the equation with quadratic forms of different discriminants **374**

Strukov V.E., Strukova I.I. Wiener theorem for studying almost periodic at infinity functions **387**

Rakhmelevich I.V. Two-dimensional non-autonomous hyperbolic equation with quadratic polynomial on first derivatives **402**

Avilov A.V. Krein theorem for difference equations **417**

A.V. Glushak, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor (Belgorod National Research University)

S.B. Dabagov, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Leading Researcher of the Electron Laboratory high energy of Department of Nuclear Physics and Astrophysics of Physical Institute of Russian Academy of Sciences after P.N. Lebedev

D.M. Levin, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Head of the Department of Physics (Tula State University)

V.V. Menshik, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of Department of Mathematics and Systems Modeling, Voronezh Institute of the Interior Ministry of Russian Federation

A.I. Nazarov, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, St. Petersburg Department of Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences

O.M. Penkin, National Research University, Kazakh-British Technical University, Center for Mathematics and Cybernetics, Almaty, Kazakhstan)

I.P. Polovinkin, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Department of Mathematical and Applied Analysis of the Faculty of Applied Mathematics, Informatics and Mechanics (Voronezh State University)

S.M. Sitnik, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor (Belgorod National Research University)

A.P. Soldatov, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Department of Differential Equations (Belgorod National Research University), Chief Researcher of the Computing Center after A.A. Dorodnitsyn RAS

V.E. Fedorov, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Head of the Department of Mathematical Analysis of Mathematical Faculty (Chelyabinsk State University)

A.A. Shibkov, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Department of Theoretical and Experimental Physics (Tambov State University after G.R. Derzhavin)

Commissioning Editor *L.P. Kotenko*
Proofreading *Yu.V. Ivakhnenko*
Computer imposition *Yu.P. Virchenko*

Dummy layout by *A.V. Noskov*
E-mail: noskov_a@bsu.edu.ru

Passed for printing 30.09.2019
Format 60×84/8
Typeface Times New Roman, Impact
Printer's sheets 14,8
Order 228
Circulation 1000 copies
Date of publishing: 30.09.2019

Subscription reference in The Russian Press common catalogue – 81631

Dummy layout is replicated at Publishing House «Belgorod», Belgorod National Research University
Address: 85 Pobeda St., Belgorod, 308015, Russia

PHYSICS. MATHEMATICAL MODELING

Vintaev V.N. Perturbation method of wave scattering physics in correction of sharpness of images under remote sensing **424**

Kumykov T.S. Sublimation growth of ice particles in fractality clouds **435**

Mohebbifar M.R. The signal-to-noise ratio measurement in chloroform detection in the presence of krypton buffer gas by laser photoacoustic method **444**

Dyshaev M.M., Fedorov V.E. Time decay comparison for option straddle in case of insufficient liquidity or transaction costs **451**

Information about Authors..... 460



МАТЕМАТИКА MATHEMATICS

УДК 519.63

DOI 10.18413/2075-4639-2019-51-3-347-365

СЕТОЧНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕЛОКАЛЬНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОНВЕКЦИИ-ДИФФУЗИИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА С ВЫРОЖДЕНИЕМ

GRID METHODS FOR SOLVING NONLOCAL BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR THE CONVECTION-DIFFUSION EQUATION OF FRACTIONAL ORDER WITH DEGENERATION

М.Х. Бештоков, В.А. Водахова

М.КН. Beshtokov, V.A. Vodakhova

Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН
Россия, 360000, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89А
Institute of Applied Mathematics and Automation KBSC RAS,
89-A Shortanova St., Nalchik, 360000, Russia

Кабардино-Балкарский государственный университет
Россия, 360000, г. Нальчик, ул. Чернышевского, 173.
Kabardino-Balkarian State University,
173 Chernyshevskogo St., Nalchik, 360000, Russia

E-mail: beshtokov-murat@yandex.ru, E-mail: vodakhova@yandex.ru

Аннотация

В работе исследуются нелокальные краевые задачи для уравнения конвекции-диффузии дробного порядка с вырождением. Основным результатом работы заключается в получении методом энергетических неравенств априорных оценок в дифференциальной и разностной трактовках для решения рассматриваемых задач. Из полученных оценок следуют единственность и устойчивость решения относительно начальных данных и правой части, а также сходимость приближенного решения к точному решению рассматриваемой дифференциальной задачи.

Abstract

In this paper we study nonlocal boundary value problems for the convection-diffusion equation of fractional order with degeneration. The main result of the work is to obtain by the method of energy inequalities a priori estimates in differential and difference interpretations for solving the problems under consideration. From the obtained estimates, the uniqueness and stability of the solution with respect to the initial data and the right part, as well as the convergence of the approximate solution to the exact solution of the differential problem under consideration, follow.

Ключевые слова: нелокальные краевые задачи, априорная оценка, разностная схема, уравнение конвекции-диффузии, дифференциальное уравнение дробного порядка, дробная производная Капуто.



Key words: nonlocal boundary-value problem, a priori estimate, difference scheme, the equation of convection-diffusion differential equation of fractional order, Caputo fractional derivative.

Введение

Нелокальными задачами принято называть такие задачи, в которых вместо обычных точечных («локальных») граничных условий задаются условия, связывающие значения искомого решения и (или) его производных в различных точках границы, либо же в точках границы и в каких-либо внутренних точках. К первым работам с неклассическими граничными условиями относятся, по-видимому, работы [Canon J.R. 1963], [Камынин Л.А. 1964] и [Чудновский А.Ф. 1969], [Чудновский А.Ф. 1976]. Современное естествознание, в основном физические приложения, требовали дальнейшего развития неклассических краевых задач и, в первую очередь, задач с нелокальными условиями. Различные классы нелокальных задач для дифференциальных уравнений с частными производными изучались в работах [Бицадзе А.В. 1984], [Водахова В.А. 1983], [Водахова В.А. 2008], [Гулин А.В. и др. 2001], [Ионкин Н.И. 1977], [Нахушев А.М. 1978].

Особый интерес в теории дифференциальных уравнений представляют краевые задачи с интегральными условиями, которым и посвящена данная статья. В работе [Кожанов А.И. 2004] рассматривается нелокальная краевая задача для уравнения

$$L_\nu(u) \equiv u_t - u_{xx} - \nu u_{xxt} + c(x, t)u = q(x, t)$$

с краевыми условиями

$$u(0, t) = \alpha(t)u(1, t) + \int_0^t h(t, \tau)u(1, \tau)d\tau, \quad 0 < t < T, \quad (*)$$

$$u_x(1, t) = 0, \quad 0 < t < T,$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 < x < 1.$$

Заметим, что в одной из рассматриваемых нами в данной работе нелокальной задаче содержится нелокальное граничное условие интегрального вида (*).

В настоящее время стало очевидным, что при решении многих задач в физике, биологии часто встречаются среды и системы, которые хорошо интерпретируются как фракталы, примерами которых могут служить полимерные материалы [Бэгли Р.Л., Товик П. Дж. 1984], сильно пористые среды [Динариев О.Ю. 1990]. К первым работам по теории дифференциальных уравнений дробного порядка следует отнести работы L. O'Shaughnessy, S. Mandelbrojt [O'Shaughnessy L. 1918], [Mandelbrojt S. 1925]. При решении таких задач возникла необходимость изучения краевых задач для дифференциальных уравнений с дробной производной [Мальшаков А.В. 1992], [Шефер Д., Кефер К. 1988]. В монографиях [Самко С.Г. и др. 1987], [Нахушев А.М. 2000] дан достаточно полный обзор работ, посвященных дифференциальным уравнениям дробного порядка. Уравнениям переноса в средах с фрактальной геометрией посвящены ряд интересных работ [Чукбар К.В. 1995], [Кочубей А.Н. 1990], [Нигматуллин Р.Р. 1992].

Настоящая работа посвящена численным методам решения нелокальных краевых задач для уравнения конвекции-диффузии дробного порядка с переменными коэффициентами с вырождением. Методом энергетических неравенств получены априорные



оценки в дифференциальной и разностной трактовках для решения рассматриваемых задач. Из полученных оценок следуют единственность и устойчивость решения относительно начальных данных и правой части. В силу линейности рассматриваемых задач эти неравенства позволяют утверждать, что приближенное решение сходится к точному решению рассматриваемой дифференциальной задачи.

Численным методам решения краевых задач для уравнения диффузии дробного порядка посвящены работы [Алиханов А.А. 2010], [Alikhanov A. A. 2015], [Таукенова Ф. И., Шхануков-Лафишев М. Х. 2006], [Бештоков М.Х. 2018 а], [Бештоков М.Х. 2019], [Бештоков М.Х. 2018 б]. В работе [Алиханов А.А. 2010] получены результаты, позволяющие применять метод энергетических неравенств для получения априорных оценок краевых задач для уравнения дробного порядка в дифференциальной и разностной трактовках, как и в классическом случае ($\alpha = 1$). В работе [Alikhanov A. A. 2015] предложен новый разностный аналог дробной производной Капуто, аппроксимирующий дробную производную Капуто с порядком $O(\tau^{3-\alpha})$. Работы [Бештоков М.Х. 2018 а], [Бештоков М.Х. 2019], [Бештоков М.Х. 2018 б] посвящены численным методам решения различных краевых задач для уравнения влагопереноса дробного порядка. Получены априорные оценки решений рассматриваемых задач в дифференциальной и разностной трактовках.

1. Постановка нелокальной краевой задачи А

В цилиндре $\overline{Q}_T = \{(x, t) : 0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$ рассмотрим следующую нелокальную краевую задачу

$$\partial_{0t}^\alpha u = \frac{1}{x^m} \frac{\partial}{\partial x} \left(x^m k(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + r(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} - q(x, t)u + f(x, t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leq T, \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^m k(x, t) u_x(x, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2)$$

$$-k(l, t) u_x(l, t) = \beta(t) \int_0^l x^m u(x, t) dx - \mu(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (4)$$

где

$$0 < c_0 \leq k(x, t) \leq c_1, \quad |r(x, t), r_x(x, t), k_x(x, t), q(x, t), \beta(t)| \leq c_2, \quad 0 \leq m \leq 2, \quad (5)$$

$$\partial_{0t}^\alpha u = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{u_\tau(x, \tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau, \quad - \text{дробная производная в смысле Капуто порядка } \alpha,$$

где $0 < \alpha < 1$ [Самко С.Г. и др. 1987], $c_i, i = 0, 1, 2$ — положительные числа.

При $x = 0$ ставится условие ограниченности решения $|u(0, t)| < \infty$, которое эквивалентно условию (2), равносильному в свою очередь тождеству $k(x, t) u_x(0, t) = 0$ [Самарский А.А. 1983, стр. 173], если функции $r(0, t), q(0, t), f(0, t)$ конечны.

В дальнейшем будем предполагать, что задача (1) — (4) имеет единственное решение, обладающее нужными по ходу изложения производными. Будем также считать, что коэффициенты уравнения и граничных условий удовлетворяют необходимым по ходу изложения условиям гладкости, обеспечивающим нужный порядок аппроксимации разностной схемы.



По ходу изложения будем также использовать положительные постоянные числа M_i , $i = 1, 2, \dots$, зависящие только от входных данных рассматриваемой задачи. Справедливы следующие [Алиханов А.А. 2010] утверждения.

Лемма 1. Для любой абсолютно непрерывной на $[0, T]$ функции $v(t)$ справедливо неравенство

$$v(t)\partial_{0t}^\alpha v(t) \geq \frac{1}{2}\partial_{0t}^\alpha v^2(t), \quad 0 < \alpha < 1.$$

Лемма 2. Пусть неотрицательная абсолютно непрерывная функция $y(t)$ удовлетворяет для почти всех t из $[0, T]$ неравенству

$$\partial_{0t}^\alpha y(t) \leq c_1 y(t) + c_2(t), \quad 0 \leq \alpha \leq 1,$$

где $c_1 > 0$, $c_2(t)$ – суммируемая на $[0, T]$ неотрицательная функция. Тогда

$$y(t) \leq y(0)E_\alpha(c_1 t^\alpha) + \Gamma(\alpha)E_{\alpha, \alpha}(c_1 t^\alpha)D_{0t}^{-\alpha}c_2(t),$$

где $E_\alpha(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + 1)}$, $E_{\alpha, \mu}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + \mu)}$ – функции Миттаг-Леффлера.

2. Априорная оценка в дифференциальной форме

Для получения априорной оценки решения задачи (1)-(4) в дифференциальной форме умножим уравнение (1) скалярно на $x^m u$:

$$\left(\partial_{0t}^\alpha u, x^m u\right) = \left((x^m k u_x)_x, u\right) + \left(r u_x, x^m u\right) - \left(q u, x^m u\right) + \left(f, x^m u\right), \quad (6)$$

где $(u, v) = \int_0^l u v dx$, $(u, u) = \|u\|_0^2$, где u, v – заданные на $[0, l]$ функции.

Преобразуем интегралы, входящие в тождество (6), пользуясь неравенством Коши с ε [Самарский А.А. 1983, стр. 100] и Леммой 1:

$$\left(\partial_{0t}^\alpha u, x^m u\right) \geq \frac{1}{2}\left(x^m, \partial_{0t}^\alpha u^2\right) \geq \frac{1}{2}\partial_{0t}^\alpha \|x^{\frac{m}{2}} u\|_0^2, \quad (7)$$

$$\left((x^m k u_x)_x, u\right) = \int_0^l u (x^m k u_x)_x dx = x^m u k u_x|_0^l - \int_0^l x^m k u_x^2 dx, \quad (8)$$

$$\left(r u_x, x^m u\right) \leq \frac{c_2^2}{4\varepsilon} \int_0^l (x^{\frac{m}{2}} u)^2 dx + \varepsilon \int_0^l (x^{\frac{m}{2}} u_x)^2 dx \leq \varepsilon \|x^{\frac{m}{2}} u_x\|_0^2 + \frac{c_2^2}{4\varepsilon} \|x^{\frac{m}{2}} u\|_0^2. \quad (9)$$

$$-\left(q u, x^m u\right) = - \int_0^l x^m q u^2 dx \leq c_2 \|x^{\frac{m}{2}} u\|_0^2, \quad (10)$$

$$\left(f, x^m u\right) \leq \varepsilon \|x^{\frac{m}{2}} u\|_0^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \|x^{\frac{m}{2}} f\|_0^2 \leq \frac{1}{2} \|x^{\frac{m}{2}} u\|_0^2 + \frac{1}{2} \|x^{\frac{m}{2}} f\|_0^2. \quad (11)$$

Принимая во внимание преобразования (7)-(11), из (6) находим

$$\frac{1}{2}\partial_{0t}^\alpha \|x^{\frac{m}{2}} u\|_0^2 + c_0 \|x^{\frac{m}{2}} u_x\|_0^2 \leq x^m u k u_x|_0^l + \varepsilon \|x^{\frac{m}{2}} u_x\|_0^2 + M_1^\varepsilon \|x^{\frac{m}{2}} u\|_0^2 + \frac{1}{2} \|x^{\frac{m}{2}} f\|_0^2. \quad (12)$$



Преобразуем первое слагаемое в правой части (12) с учетом (2),(3)

$$\begin{aligned} x^m u k u_x|_0^l &= l^m u(l, t) \left(\mu(t) - \beta(t) \int_0^l x^m u(x, t) dx \right) = \\ &= l^m \mu(t) u(l, t) - l^m \beta(t) u(l, t) \int_0^l x^m u(x, t) dx \leq M_2 u^2(l, t) + \frac{1}{2} \mu^2(t) + \\ &+ \frac{1}{2} \left(\int_0^l x^m u(x, t) dx \right)^2 \leq \varepsilon \|x^{\frac{m}{2}} u_x\|_0^2 + M_3^\varepsilon \|x^{\frac{m}{2}} u\|_0^2 + \frac{1}{2} \mu^2(t). \end{aligned} \quad (13)$$

С учетом (13), из (12) получаем

$$\frac{1}{2} \partial_{0t}^\alpha \|x^{\frac{m}{2}} u\|_0^2 + c_0 \|x^{\frac{m}{2}} u_x\|_0^2 \leq \varepsilon \|x^{\frac{m}{2}} u_x\|_0^2 + M_4^\varepsilon \|x^{\frac{m}{2}} u\|_0^2 + M_5 \left(\|x^{\frac{m}{2}} f\|_0^2 + \mu^2(t) \right). \quad (14)$$

При $\varepsilon = \frac{c_0}{2}$ из (14) находим

$$\partial_{0t}^\alpha \|x^{\frac{m}{2}} u\|_0^2 + \|x^{\frac{m}{2}} u_x\|_0^2 \leq M_6 \|x^{\frac{m}{2}} u\|_0^2 + M_7 \left(\|x^{\frac{m}{2}} f\|_0^2 + \mu^2(t) \right). \quad (15)$$

Тогда, применяя к обеим частям (15) оператор дробного интегрирования $D_{0t}^{-\alpha}$, получим

$$\|x^{\frac{m}{2}} u\|_0^2 + D_{0t}^{-\alpha} \|x^{\frac{m}{2}} u_x\|_0^2 \leq M_8 D_{0t}^{-\alpha} \|x^{\frac{m}{2}} u\|_0^2 + M_9 \left(D_{0t}^{-\alpha} \left(\|x^{\frac{m}{2}} f\|_0^2 + \mu^2(t) \right) + \|x^{\frac{m}{2}} u_0(x)\|_0^2 \right). \quad (16)$$

С помощью Леммы 2 из (16) получим априорную оценку

$$\|x^{\frac{m}{2}} u\|_0^2 + D_{0t}^{-\alpha} \|x^{\frac{m}{2}} u_x\|_0^2 \leq M \left(D_{0t}^{-\alpha} \left(\|x^{\frac{m}{2}} f\|_0^2 + \mu^2(t) \right) + \|x^{\frac{m}{2}} u_0(x)\|_0^2 \right), \quad (17)$$

где M – положительная постоянная, зависящая только от входных данных задачи (1)-

(4), $D_{0t}^{-\alpha} u = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{u d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}}$ – дробный интеграл Римана-Лиувилля порядка $\alpha, 0 < \alpha < 1$.

Теорема 1. Если $k(x, t) \in C^{1,0}(\overline{Q_T})$, $r(x, t), q(x, t), f(x, t) \in C(\overline{Q_T})$, $u(x, t) \in C^{2,0}(Q_T) \cap C^{1,0}(\overline{Q_T})$, $\partial_{0t}^\alpha u(x, t) \in C(\overline{Q_T})$ и выполнены условия (5), тогда для решения $u(x, t)$ задачи (1)-(4) справедлива априорная оценка (17), откуда следуют единственность и устойчивость решения по начальным данным и правой части в смысле нормы $\|x^{\frac{m}{2}} u\|_1^2 = \|x^{\frac{m}{2}} u\|_0^2 + D_{0t}^{-\alpha} \|x^{\frac{m}{2}} u_x\|_0^2$.

3. Устойчивость и сходимость разностной схемы

Для решения задачи (1)-(4) применим метод конечных разностей. Построим монотонную схему второго порядка точности, содержащую односторонние производные, учитывающие знак $r(x, t)$. Для этого рассмотрим вместо уравнения (1) следующее уравнение с возмущенными коэффициентами

$$\partial_{0t}^\alpha u = \frac{\varkappa}{x^m} \left(x^m k(x, t) u_x \right)_x + r(x, t) u_x - qu + f(x, t), \quad (18)$$

где $\varkappa = \frac{1}{1+R}$, $R = \frac{0.5h|r|}{k}$ – разностное число Рейнольдса.



На равномерной сетке $\bar{\omega}_{h\tau}$ дифференциальной задаче (1)-(4) поставим в соответствие разностную схему порядка аппроксимации $O((h^2 + \tau^2)/x)$:

$$\bar{\varkappa} \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y_i = \frac{\varkappa}{x_i^m} \left(x_{i-0.5}^m a_i^j y_{\bar{x},i}^{(\sigma)} \right)_x + \frac{b^{-j}}{x_i^m} \left(x_{i-0.5}^m a_i^j y_{\bar{x},i}^{(\sigma)} \right) + \frac{b^{+j}}{x_i^m} \left(x_{i+0.5}^m a_{i+1}^j y_{x,i}^{(\sigma)} \right) - d_i^j y_i^{(\sigma)} + \varphi_i^j, \quad (19)$$

$$\varkappa_0 a_1 y_{(x,0)}^{(\sigma)} = \frac{0.5h}{m+1} \left(\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y_0 + d_0 y_0^{(\sigma)} \right) - \mu_1, \quad t \in \bar{\omega}_\tau, \quad x = 0, \quad (20)$$

$$-\varkappa_N a_N y_{\bar{x},N}^{(\sigma)} = \tilde{\beta} \sum_{i=0}^N x_i^m y_i^{(\sigma)} \bar{h} + 0.5h d_N y_N^{(\sigma)} + 0.5h \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y_N - \mu_2, \quad x = N, \quad (21)$$

$$y(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \bar{\omega}_h, \quad t = 0, \quad (22)$$

где $\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y = \frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=0}^j c_{j-s}^{(\alpha,\sigma)} y_t^s$ - дискретный аналог дробной производной Капуто порядка $\alpha, 0 < \alpha < 1$ [Alikhanov A. A. 2015]

$$a_0^{(\alpha,\sigma)} = \sigma^{1-\alpha}, \quad a_l^{(\alpha,\sigma)} = \left(l + \sigma \right)^{1-\alpha} - \left(l - 1 + \sigma \right)^{1-\alpha}, \quad l \geq 1, \quad \sigma = 1 - \frac{\alpha}{2},$$

$$b_l^{(\alpha,\sigma)} = \frac{1}{2-\alpha} \left[(l+\sigma)^{2-\alpha} - (l-1+\sigma)^{2-\alpha} \right] - \frac{1}{2} \left[(l+\sigma)^{1-\alpha} + (l-1+\sigma)^{1-\alpha} \right], \quad l \geq 1,$$

$$\text{при } j = 0, \quad c_0^{(\alpha,\sigma)} = a_0^{(\alpha,\sigma)};$$

$$\text{при } j > 0, \quad c_s^{(\alpha,\sigma)} = \begin{cases} a_0^{(\alpha,\sigma)} + b_1^{(\alpha,\sigma)}, & s = 0, \\ a_s^{(\alpha,\sigma)} + b_{s+1}^{(\alpha,\sigma)} - b_s^{(\alpha,\sigma)}, & 1 \leq s \leq j-1, \\ a_j^{(\alpha,\sigma)} - b_j^{(\alpha,\sigma)}, & s = j, \end{cases}$$

$$c_s^{(\alpha,\sigma)} > \frac{1-\alpha}{2} (s+\sigma)^{-\alpha} > 0, \quad a_i^j = k(x_{i-0.5}, t^{j+\sigma}), \quad b_i^{\pm j} = \frac{\bar{\varkappa}_i r_i^{\pm j+\sigma}}{k_i^{j+\sigma}},$$

$$\tilde{\beta} = \tilde{\varkappa} \beta^{j+\sigma}, \quad \mu_1 = \frac{0.5h}{m+1} \varphi_0^j, \quad \mu_2 = \tilde{\varkappa} \mu^{j+\sigma} + 0.5h \varphi_N^j,$$

$$y^{(\sigma)} = \sigma y^{j+1} + (1-\sigma) y^j, \quad r_N = r(l, t) = r_N^{j+\sigma} \geq 0, \quad r = r^+ + r^-, \quad r_0 = r(0, t) = r_0^{j+\sigma} \leq 0,$$

$$\bar{\varkappa}_i = 1 + \frac{m(m-1)h^2}{24x_i^2}, \quad i = \overline{1, N-1}, \quad r^+ = 0.5(r + |r|) \geq 0, \quad r^- = 0.5(r - |r|) \leq 0,$$

$$d_i^j = \begin{cases} \bar{\varkappa}_i q_i^{j+\sigma}, & i \neq 0, N, \\ q_i^{j+\sigma}, & i = 0, N. \end{cases} \quad \varphi_i^j = \begin{cases} \bar{\varkappa}_i f_i^{j+\sigma}, & i \neq 0, N, \\ f_i^{j+\sigma}, & i = 0, N. \end{cases} \quad \bar{h} = \begin{cases} 0.5h, & i = 0, \\ h, & i \neq 0, N, \end{cases}$$

$$\varkappa_i = \frac{1}{1 + R_i}, \quad R_i = \frac{0.5h|r_i| \bar{\varkappa}_i}{k_{i-0.5}}, \quad \varkappa_0 = \frac{1}{1 + \frac{0.5h|r_0|}{(m+1)a_1}}, \quad r_0 \leq 0, \quad |r| = r^+ - r^-,$$

$$Y = \hat{y} + y, \quad \hat{y} = y^{j+1}, \quad y_t = \frac{\hat{y} - y}{\tau}, \quad y = y_i^j = y(x_i, t_j), \quad t^* = t^{j+\sigma}.$$

$$\tilde{\varkappa} = 1 + \frac{0.5hm}{l} = \frac{1}{1 - \frac{0.5hm}{l}}, \quad \varkappa_N = \frac{1}{1 + 0.5h \frac{|r_N^{j+\sigma}|}{k_{N-0.5}}}, \quad \text{если } r_N^{j+\sigma} \geq 0.$$



Перепишем задачу (19)-(22) в операторной форме

$$\begin{cases} \bar{\varkappa} \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y = \bar{\Lambda}(t^{j+\sigma})y^{(\sigma)} + \bar{\Phi}, \\ y(x, 0) = u_0(x), \end{cases} \quad (23)$$

где

$$\bar{\varkappa} = \begin{cases} \bar{\varkappa}_i, & x \in \omega_h, \\ 1, & x = 0, l; \end{cases} \quad \bar{\varkappa}_i = 1 + \frac{m(m-1)h^2}{24x_i^2}, \quad \bar{\Phi} = \begin{cases} \varphi = \varphi_i, & (x, t) \in \omega_{h\tau}, \\ \varphi^- = \frac{(m+1)}{0.5h} \mu_1, & x = 0, \\ \varphi^+ = \frac{1}{0.5h} \mu_2, & x = l; \end{cases}$$

$$t^* = t^{j+1/2},$$

$$\bar{\Lambda}(t^{j+\sigma})y^{(\sigma)} = \begin{cases} \tilde{\Lambda}(t^{j+\sigma})y_i^{(\sigma)} = \frac{\varkappa_i}{x_i^m} \left(x_{i-0.5}^m a_i^j y_{\bar{x},i}^{(\sigma)} \right)_x + \frac{b^{-j}}{x_i^m} \left(x_{i-0.5}^m a_i^j y_{\bar{x},i}^{(\sigma)} \right) + \\ \quad + \frac{b^{+j}}{x_i^m} \left(x_{i+0.5}^m a_{i+1}^j y_{x,i}^{(\sigma)} \right) - d_i^j y_i^{(\sigma)}, \\ \Lambda^- y_0^{(\sigma)} = \frac{(m+1) \left(\varkappa_0 a_1 y_{x,0}^{(\sigma)} - \frac{0.5h}{m+1} d_0 y_N^{(\sigma)} \right)}{0.5h}, \quad x = 0, \\ \Lambda^+ y_N^{(\sigma)} = - \frac{\varkappa_N a_N y_{\bar{x},N}^{(\sigma)} + \tilde{\beta} \sum_{i=0}^N y_i^{(\sigma)} \hbar + 0.5h d_N y_N^{(\sigma)}}{0.5h}, \quad x = l. \end{cases}$$

Справедливы следующие леммы.

Лемма 3 [Alikhanov A. A. 2015]. Для любой функции $y(t)$, определенной на сетке $\bar{\omega}_\tau$, справедливо неравенство

$$y^{(\sigma)} \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y \geq \frac{1}{2} \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha (y^2).$$

Лемма 4 [Бештоков М.Х. 2019]. Предположим, что неотрицательные последовательности $y^j, \varphi^j, j = 0, 1, 2, \dots$ удовлетворяют неравенству

$$\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y^j \leq \lambda_1 y^{j+1} + \lambda_2 y^j + \varphi^j, \quad j \geq 1,$$

где $\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0$ – константы, тогда существует такое τ_0 , что если $\tau \leq \tau_0$, то

$$y^{j+1} \leq 2 \left(y^0 + \frac{t_j^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \max_{0 \leq j' \leq j} \varphi^{j'} \right) E_\alpha(2\lambda t_j^\alpha), \quad 1 \leq j \leq j_0,$$

где $E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^\infty \frac{z^k}{\Gamma(1+k\alpha)}$ – функция Миттаг-Леффлера, $\lambda = \lambda_1 + \frac{\lambda_2}{2 + 2^{1-\alpha}}$.

Введем скалярное произведение и норму в следующем виде:

$$(u, v) = \sum_{i=1}^{N-1} u_i v_i \hbar, \quad (u, u) = (1, u^2) = \|u\|_0^2, \quad (u, v) = \sum_{i=1}^N u_i v_i \hbar, \quad \|u\|_0^2 = \sum_{i=1}^N u_i^2 \hbar.$$



Найдем теперь априорную оценку, для этого умножим (23) скалярно на $x^m y^{(\sigma)}$, тогда получим

$$\left(\overline{\overline{\mathcal{X}}} \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y, x^m y^{(\sigma)} \right) = \left(\overline{\Lambda}(t_{j+\sigma}) y^{(\sigma)}, x^m y^{(\sigma)} \right) + \left(\overline{\Phi}, x^m y^{(\sigma)} \right). \quad (24)$$

Оценим суммы, входящие в (24), с учетом Леммы 3:

$$\left(\overline{\overline{\mathcal{X}}} \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y, x^m y^{(\sigma)} \right) \geq \left(\frac{\overline{\overline{\mathcal{X}}}}{2}, \Delta_{0t}^\alpha \left(x^{\frac{m}{2}} y \right)^2 \right), \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \left(\overline{\Lambda}(t_{j+\sigma}) y^{(\sigma)}, x^m y^{(\sigma)} \right) &= \left(\tilde{\Lambda} y^{(\sigma)}, x^m y^{(\sigma)} \right) + 0.5 h \Lambda^+ y_N^{(\sigma)} x_N^m y_N^{(\sigma)} = \left(\varkappa \left(x_{i-0.5}^m a_i^j y_{\bar{x}}^{(\sigma)} \right)_x, y^{(\sigma)} \right) + \\ &+ \left(b^{-j} \left(x_{i-0.5}^m a_i^j y_{\bar{x}}^{(\sigma)} \right), y^{(\sigma)} \right) + \left(b^{+j} \left(x_{i+0.5}^m a_{i+1}^j y_{x,i}^{(\sigma)} \right), y^{(\sigma)} \right) - \left(d_i^j, x_i^m (y^{(\sigma)})^2 \right) - \\ &- x_n^m y_N^{(\sigma)} \left(\varkappa_N a_N y_{\bar{x},N}^{(\sigma)} + \tilde{\beta} \sum_{i=0}^N y_i^{(\sigma)} \hbar + 0.5 h d_N y_N^{(\sigma)} \right) = - \left(\overline{x}^m a_i y_{\bar{x}}^{(\sigma)}, (\varkappa y^{(\sigma)})_{\bar{x}} \right) + \\ &+ \varkappa_N a_N y_N^{(\sigma)} y_{\bar{x},N}^{(\sigma)} \left(\overline{x}_N^m - x_N^m \right) - \varkappa_0 x_{0.5}^m a_1 y_{x,0}^{(\sigma)} y_0^{(\sigma)} - x_n^m \tilde{\beta} y_N^{(\sigma)} \sum_{i=0}^N x_i^m y_i^{(\sigma)} \hbar - 0.5 h x_N^m d_N (y_N^{(\sigma)})^2 + \\ &+ \left(b^{-j} \overline{x}^m a_i, y_{\bar{x}}^{(\sigma)} y^{(\sigma)} \right) + \left(b^{+j} x_{i+0.5}^m a_{i+1}^j, y_x^{(\sigma)} y^{(\sigma)} \right) - \left(d, x_i^m (y^{(\sigma)})^2 \right). \end{aligned} \quad (26)$$

Преобразуем слагаемые в правой части (26)

$$\begin{aligned} \left(\overline{x}^m a_i y_{\bar{x}}^{(\sigma)}, (\varkappa y^{(\sigma)})_{\bar{x}} \right) &= \left(\overline{x}^m a_i y_{\bar{x}}^{(\sigma)}, \varkappa_{\bar{x}} y^{(\sigma)} \right) + \left(\overline{x}^m a_i \varkappa^{(-1)}, (y_{\bar{x}}^{(\sigma)})^2 \right) \geq \\ &\geq \left(\overline{x}^m a_i y_{\bar{x}}^{(\sigma)}, \varkappa_{\bar{x}} y^{(\sigma)} \right) + \frac{1}{1 + h M_1} \left(\overline{x}^m a_i \varkappa, (y_{\bar{x}}^{(\sigma)})^2 \right). \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} - \left(\overline{x}^m a_i y_{\bar{x}}^{(\sigma)}, \varkappa_{\bar{x}} y^{(\sigma)} \right) &+ \left(b^{-j} \overline{x}^m a_i, y^{(\sigma)} y_{\bar{x}}^{(\sigma)} \right) + \left(b^{+j} x_{i+0.5}^m a_{i+1}^j, y_x^{(\sigma)} y^{(\sigma)} \right) \leq \\ &\leq \varepsilon \|\overline{x}^{\frac{m}{2}} y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\|_0^2 + M_2^\varepsilon \|x^{\frac{m}{2}} y^{(\sigma)}\|_0^2. \end{aligned} \quad (28)$$

Учитывая (27),(28), из(26) находим

$$\begin{aligned} \left(\overline{\Lambda}(t_{j+\sigma}) y^{(\sigma)}, x^m y^{(\sigma)} \right) &\leq - \frac{1}{1 + h M_1} \left(\overline{x}^m a_i \varkappa, (y_{\bar{x}}^{(\sigma)})^2 \right) - \left(d, (x^{\frac{m}{2}} y^{(\sigma)})^2 \right) + \\ &+ \varepsilon \|\overline{x}^{\frac{m}{2}} y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\|_0^2 + M_2^\varepsilon \|x^{\frac{m}{2}} y^{(\sigma)}\|_0^2 + (\overline{x}_N^m - x_N^m) \varkappa_N a_N y_N^{(\sigma)} y_{\bar{x},N}^{(\sigma)} - \varkappa_0 x_{0.5}^m a_1 y_0^{(\sigma)} y_{x,0}^{(\sigma)} - \\ &- x_n^m \tilde{\beta} y_N^{(\sigma)} \sum_{i=0}^N x_i^m y_i^{(\sigma)} \hbar - 0.5 h x_N^m d_N (y_N^{(\sigma)})^2. \end{aligned} \quad (29)$$

$$\left(\overline{\Phi}, x^m y^{(\sigma)} \right) = \left(\varphi, x^m y^{(\sigma)} \right) + 0.5 h \varphi^+ x_N^m y_N^{(\sigma)} = \left(\varphi, x^m y^{(\sigma)} \right) + x_N^m \mu_2 y_N^{(\sigma)}. \quad (30)$$

Учитывая преобразования (25)-(30), из(24) получим

$$\left(\frac{\overline{\overline{\mathcal{X}}}}{2}, \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha \left(x^{\frac{m}{2}} y \right)^2 \right) + \frac{1}{1 + h M_1} \left(\overline{x}^m a_i \varkappa, (y_{\bar{x}}^{(\sigma)})^2 \right) \leq$$



$$\begin{aligned} &\leq \varepsilon \|\bar{x}^{\frac{m}{2}} y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\|_0^2 + M_2^\varepsilon \|x^{\frac{m}{2}} y^{(\sigma)}\|_0^2 - \left(d, x^m (y^{(\sigma)})^2\right) + \left(\bar{x}_N^m - x_N^m\right) y_N^{(\sigma)} \varkappa_N a_N y_{\bar{x}, N}^{(\sigma)} - \\ &- x_{0.5}^m y_0^{(\sigma)} \varkappa_0 a_1 y_{x, 0}^{(\sigma)} + \left(\varphi, x^m y^{(\sigma)}\right) + y_N^{(\sigma)} x_N^m \left(\mu_2 - \tilde{\beta} \sum_{i=0}^N x_i^m y_i^{(\sigma)} \hbar - 0.5 h d_N y_N^{(\sigma)}\right). \end{aligned} \quad (31)$$

Преобразуем четвертое, пятое и седьмое слагаемые в правой части (31) с учетом (20),(21):

$$\begin{aligned} &\left(\bar{x}_N^m - x_N^m\right) y_N^{(\sigma)} \varkappa_N a_N y_{\bar{x}, N}^{(\sigma)} - x_{0.5}^m y_0^{(\sigma)} \varkappa_0 a_1 y_{x, 0}^{(\sigma)} + \\ &+ x_N^m y_N^{(\sigma)} \left(\mu_2 - \tilde{\beta} \sum_{i=0}^N x_i^m y_i^{(\sigma)} \hbar - 0.5 h d_N y_N^{(\sigma)}\right) = \left(\bar{x}_N^m - x_N^m\right) y_N^{(\sigma)} \left[\mu_2 - \tilde{\beta} \sum_{i=0}^N x_i^m y_i^{(\sigma)} \hbar - 0.5 h d_N y_N^{(\sigma)} - \right. \\ &- 0.5 h \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y_N\left. \right] + x_N^m y_N^{(\sigma)} \left[\mu_2 - \tilde{\beta} \sum_{i=0}^N x_i^m y_i^{(\sigma)} \hbar - 0.5 h d_N y_N^{(\sigma)}\right] - x_{0.5}^m y_0^{(\sigma)} \left[\frac{0.5 h}{m+1} d_0 y_0^{(\sigma)} + \right. \\ &+ \frac{0.5 h}{m+1} \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y_0 - \mu_1\left. \right] = y_N^{(\sigma)} \bar{x}_N^m \left[\mu_2 - \tilde{\beta} \sum_{i=0}^N x_i^m y_i^{(\sigma)} \hbar - 0.5 h d_N y_N^{(\sigma)}\right] - 0.5 h y_N^{(\sigma)} \left(\bar{x}_N^m - x_N^m\right) \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y_N - \\ &- x_{0.5}^m y_0^{(\sigma)} \left[\frac{0.5 h}{m+1} d_0 y_0^{(\sigma)} - \mu_1\right] - \frac{0.5 h}{m+1} x_{0.5}^m y_0^{(\sigma)} \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y_0 \leq \bar{x}_N^m \mu_2 y_N^{(\sigma)} - \bar{x}_N^m \tilde{\beta} y_N^{(\sigma)} \sum_{i=0}^N x_i^m y_i^{(\sigma)} \hbar - \\ &- 0.5 h d_N \bar{x}_N^m \left(y_N^{(\sigma)}\right)^2 - x_{0.5}^m \frac{0.5 h}{m+1} d_0 \left(y_0^{(\sigma)}\right)^2 + x_{0.5}^m \mu_1 y_0^{(\sigma)} - \\ &- \frac{h}{4} \left(\bar{x}_N^m - x_N^m\right) \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y_N^2 - \frac{h}{4(m+1)} x_{0.5}^m \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y_0^2. \end{aligned} \quad (32)$$

Учитывая (32), перепишем (31):

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\bar{x}}{2}, \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha \left(x^{\frac{m}{2}} y\right)^2\right) + \frac{1}{1+hM_1} \left(\bar{x}^m a_i \varkappa, \left(y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\right)^2\right) + \\ &+ \frac{h}{4(m+1)} x_{0.5}^m \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y_0^2 + \frac{h}{4} \left(\bar{x}_N^m - x_N^m\right) \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y_N^2 \leq \varepsilon \|\bar{x}^{\frac{m}{2}} y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\|_0^2 + M_2^\varepsilon \|x^{\frac{m}{2}} y^{(\sigma)}\|_0^2 - \\ &- \left(d, \left(x^{\frac{m}{2}} y^{(\sigma)}\right)^2\right) - \bar{x}_N^m \tilde{\beta} y_N^{(\sigma)} \sum_{i=0}^N x_i^m y_i^{(\sigma)} \hbar - 0.5 h d_N \bar{x}_N^m \left(y_N^{(\sigma)}\right)^2 - x_{0.5}^m \frac{0.5 h}{m+1} d_0 \left(y_0^{(\sigma)}\right)^2 + \\ &+ \left(\varphi, x^m y^{(\sigma)}\right) + \bar{x}_N^m \mu_2 y_N^{(\sigma)} + x_{0.5}^m \mu_1 y_0^{(\sigma)}. \end{aligned} \quad (33)$$

Учитывая, что $x_{N-0.5}^m \geq \frac{1}{6} x_N^m$, преобразуем некоторые слагаемые в (33):

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\bar{x}}{2}, \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha \left(x^{\frac{m}{2}} y\right)^2\right) + \frac{h}{4} \left(\bar{x}_N^m - x_N^m\right) \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y_N^2 \geq \left(\frac{\bar{x}}{2}, \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha \left(x^{\frac{m}{2}} y\right)^2\right) + \frac{h}{4} x_{N-0.5}^m \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y_N^2 \geq \\ &\geq \frac{M_3}{2} \left(1, \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha \left(x^{\frac{m}{2}} y\right)^2\right) + \frac{0.5 h}{12} \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha \left(x_N^{\frac{m}{2}} y_N\right)^2 \geq \frac{1}{12} \left(1, \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha \left(x^{\frac{m}{2}} y\right)^2\right) + \\ &+ \frac{0.5 h}{12} \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha \left(x_N^{\frac{m}{2}} y_N\right)^2 \geq \frac{1}{12} \left(1, \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha \left(x^{\frac{m}{2}} y\right)^2\right) \geq \frac{1}{12} \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha \|x^{\frac{m}{2}} y\|_0^2, \end{aligned} \quad (34)$$



где

$$M_3 = \begin{cases} 1, & \text{если } m = 0, m \geq 1, \\ 1/2, & \text{если } m \in (0, 1), h \leq h_0 = \sqrt{\frac{12x^2}{m(1-m)}}, \end{cases}$$

$$-\left(d, (x^{\frac{m}{2}} y^{(\sigma)})^2\right) - \bar{x}_N^m \tilde{\beta} y_N^{(\sigma)} \sum_{i=0}^N x_i^m y_i^{(\sigma)} \bar{h} - 0.5hd_N \bar{x}_N^m (y_N^{(\sigma)})^2 - x_{0.5}^m \frac{0.5h}{m+1} d_0 (y_0^{(\sigma)})^2 +$$

$$+\left(\varphi, x^m y^{(\sigma)}\right) + \bar{x}_N^m \mu_2 y_N^{(\sigma)} + x_{0.5}^m \mu_1 y_0^{(\sigma)} \leq$$

$$\leq \varepsilon \|\bar{x}^{\frac{m}{2}} y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\|_0^2 + M_4^\varepsilon \left(\|x^{\frac{m}{2}} y^{(\sigma)}\|_0^2 + (x_{0.5}^{\frac{m}{2}} y_0^{(\sigma)})^2 \right) + M_5 \left(\|x^{\frac{m}{2}} \varphi\|_0^2 + \mu_1^2 + \mu_2^2 \right). \quad (35)$$

Перепишем (33) с учетом (34), (35):

$$\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha \|x^{\frac{m}{2}} y\|_1^2 + \|\bar{x}^{\frac{m}{2}} y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\|_0^2 \leq \varepsilon M_6 \|\bar{x}^{\frac{m}{2}} y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\|_0^2 + M_7^\varepsilon \|x^{\frac{m}{2}} y^{(\sigma)}\|_1^2 + M_8 \left(\|x^{\frac{m}{2}} \varphi\|_0^2 + \mu_1^2 + \mu_2^2 \right), \quad (36)$$

где $\|x^{\frac{m}{2}} y\|_1^2 = \|x^{\frac{m}{2}} y\|_0^2 + (x_{0.5}^{\frac{m}{2}} y_0)^2$.

Выбирая $\varepsilon = \frac{1}{2M_6}$, из (36) получаем:

$$\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha \|x^{\frac{m}{2}} y\|_1^2 + \|\bar{x}^{\frac{m}{2}} y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\|_0^2 \leq M_9 \|x^{\frac{m}{2}} y^{(\sigma)}\|_1^2 + M_{10} \left(\|x^{\frac{m}{2}} \varphi\|_0^2 + \mu_1^2 + \mu_2^2 \right). \quad (37)$$

Перепишем (37) в другой форме:

$$\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha \|x^{\frac{m}{2}} y\|_1^2 \leq M_{11}^\sigma \|x^{\frac{m}{2}} y^{j+1}\|_1^2 + M_{12}^\sigma \|x^{\frac{m}{2}} y^j\|_1^2 + M_{13} \left(\|x^{\frac{m}{2}} \varphi\|_0^2 + \mu_1^2 + \mu_2^2 \right). \quad (38)$$

На основании Леммы 4 из (38), получаем:

$$\|x^{\frac{m}{2}} y^{j+1}\|_1^2 \leq M \left(\|x^{\frac{m}{2}} y^0\|_1^2 + \frac{t_j^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \max_{0 \leq j' \leq j} \left(\|x^{\frac{m}{2}} \varphi\|_0^2 + \mu_1^2 + \mu_2^2 \right) \right), \quad (39)$$

где M - положительная постоянная, не зависящая от h и τ .

Справедлива следующая

Теорема 2. Пусть выполнены условия (5). Тогда существуют такие h_0, τ_0 , что если $h \leq h_0, \tau \leq \tau_0$, то для решения разностной задачи (19)-(22) справедлива априорная оценка (39), из чего следуют единственность и устойчивость решения разностной схемы (19)-(22) по начальным данным и правой части.

Пусть $u(x, t)$ - решение задачи (1)-(4), $y(x_i, t_j) = y_i^j$ - решение разностной задачи (19)-(22). Для оценки точности разностной схемы (19)-(22) рассмотрим разность $z_i^j = y_i^j - u_i^j$, где $u_i^j = u(x_i, t_j)$. Тогда, подставляя $y = z + u$ в соотношения (19)-(22), получаем задачу для функции z :

$$\bar{x} \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha z_i = \frac{\varkappa}{x_i^m} \left(x_{i-0.5}^m a_i^j z_{\bar{x}_i}^{(\sigma)} \right)_x + \frac{b^{-j}}{x_i^m} \left(x_{i-0.5}^m a_i^j z_{\bar{x}_i}^{(\sigma)} \right) + \frac{b^{+j}}{x_i^m} \left(x_{i+0.5}^m a_{i+1}^j z_{x_i}^{(\sigma)} \right) - d_i^j z_i^{(\sigma)} + \Psi_i^j, \quad (40)$$

$$\varkappa_0 a_1 z_{(x,0)}^{(\sigma)} = \frac{0.5h}{m+1} \left(\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha z_0 + d_0 z_0^{(\sigma)} \right) - \nu_1, \quad t \in \bar{\omega}_\tau, \quad x = 0, \quad (41)$$



$$-\kappa_N a_N z_{\bar{x},N}^{(\sigma)} = \tilde{\beta} \sum_{i=0}^N x_i^m z_i^{(\sigma)} \bar{h} + 0.5hd_N z_N^{(\sigma)} + 0.5h\Delta_{0t_j+\sigma}^\alpha z_N - \nu_2, \quad x = N, \quad (42)$$

$$z(x, 0) = 0, \quad x \in \bar{\omega}_h, \quad t = 0, \quad (43)$$

где $\Psi = O\left(\frac{h^2 + \tau^2}{x}\right)$, $\nu_1 = O(h^2 + \tau^2)$, $\nu_2 = O(h^2 + \tau^2)$ — погрешности аппроксимации дифференциальной задачи (1)-(4) разностной схемой (19)-(22) в классе решений $u = u(x, t)$ задачи (1)-(4).

Применяя априорную оценку (39) к решению задачи (40)-(43), получаем неравенство

$$\|x^{\frac{m}{2}} z^{j+1}\|_1^2 \leq M \max_{0 \leq j' \leq j} \left(\|x^{\frac{m}{2}} \Psi^{j'}\|_0^2 + \nu_1^2 + \nu_2^2 \right), \quad (44)$$

где M — положительная постоянная, не зависящая от h и τ .

Отсюда вытекает априорная оценка

$$\|xz^{j+1}\|_1^2 \leq \bar{M} \max_{0 \leq j' \leq j} \left(\|x\Psi^{j'}\|_0^2 + \nu_1^2 + \nu_2^2 \right), \quad (45)$$

где \bar{M} — положительная постоянная, не зависящая от h и τ .

Из априорной оценки (45) следует сходимость решения разностной задачи (19)-(22) к решению дифференциальной задачи (1)-(4) в смысле нормы $\|xz^{j+1}\|_1^2$ на каждом слое так, что если существуют такие h_0, τ_0 , то при $h \leq h_0, \tau \leq \tau_0$ справедлива априорная оценка

$$\|x(y^{j+1} - u^{j+1})\|_1 \leq \bar{M}(h^2 + \tau^2).$$

4. Постановка нелокальной краевой задачи Б и априорная оценка в дифференциальной форме

Рассмотрим следующую нелокальную краевую задачу для уравнения (1). Заменяем условие (3) условием вида

$$-k(l, t)u_x(l, t) = \beta(t)u(0, t) + \int_0^t \rho(t, \tau)u(0, \tau)d\tau - \mu(t), \quad |\beta| \leq c_2. \quad (46)$$

Для получения априорной оценки решения умножим (1) скалярно на $x^m u$. Тогда, учитывая преобразования (7)-(12), из (6) получим

$$\frac{1}{2} \partial_{0t}^\alpha \|x^{\frac{m}{2}} u\|_0^2 + c_0 \|x^{\frac{m}{2}} u_x\|_0^2 \leq x^m u k u_x \Big|_0^l + \varepsilon \|x^{\frac{m}{2}} u_x\|_0^2 + M_1^\varepsilon \|x^{\frac{m}{2}} u\|_0^2 + \frac{1}{2} \|x^{\frac{m}{2}} f\|_0^2. \quad (47)$$

Преобразуем первое слагаемое в правой части (47)

$$\begin{aligned} x^m u k u_x \Big|_0^l &= l^m u(l, t) \left(\mu(t) - \beta(t)u(0, t) - \int_0^t \rho(t, \tau)u(0, \tau)d\tau \right) = \\ &= l^m \mu(t)u(l, t) - l^m \beta(t)u(l, t)u(0, t) - \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 -l^m u(l, t) \int_0^t \rho(t, \tau) u(0, \tau) d\tau &\leq \frac{1}{2} \mu^2(t) + M_2 \left(u^2(l, t) + u^2(0, t) \right) + \frac{1}{2} \left(\int_0^t \rho(t, \tau) u(0, \tau) d\tau \right)^2 \leq \\
 &\leq \varepsilon \|x^{\frac{m}{2}} u_x\|_0^2 + M_3^\varepsilon \|x^{\frac{m}{2}} u\|_0^2 + \int_0^t \left(\varepsilon_1 \|x^{\frac{m}{2}} u_x\|_0^2 + M_4^{\varepsilon_1} \|x^{\frac{m}{2}} u\|_0^2 \right) d\tau + \frac{1}{2} \mu^2(t). \quad (48)
 \end{aligned}$$

Учитывая (48), из (47) при $\varepsilon = \frac{C_0}{4}$ получим:

$$\begin{aligned}
 \partial_{0t}^\alpha \|x^{\frac{m}{2}} u\|_0^2 + \|x^{\frac{m}{2}} u_x\|_0^2 &\leq M_5 \|x^{\frac{m}{2}} u\|_0^2 + \\
 + M_6^{\varepsilon_1} \int_0^t \|x^{\frac{m}{2}} u\|_0^2 d\tau + \varepsilon_1 M_7 \int_0^t \|x^{\frac{m}{2}} u_x\|_0^2 d\tau + M_8 \left(\|x^{\frac{m}{2}} f\|_0^2 + \mu^2(t) \right). \quad (49)
 \end{aligned}$$

Применяя к обеим частям (49) оператор дробного интегрирования $D_{0t}^{-\alpha}$, из (49) находим:

$$\begin{aligned}
 \|x^{\frac{m}{2}} u\|_0^2 + D_{0t}^{-\alpha} \|x^{\frac{m}{2}} u_x\|_0^2 &\leq M_5 D_{0t}^{-\alpha} \|x^{\frac{m}{2}} u\|_0^2 + M_6^{\varepsilon_1} D_{0t}^{-\alpha} \int_0^t \|x^{\frac{m}{2}} u\|_0^2 d\tau + \\
 + \varepsilon_1 M_7 D_{0t}^{-\alpha} \int_0^t \|x^{\frac{m}{2}} u_x\|_0^2 d\tau + M_9 \left(D_{0t}^{-\alpha} \left(\|x^{\frac{m}{2}} f\|_0^2 + \mu^2(t) \right) + \|x^{\frac{m}{2}} u_0(x)\|_0^2 \right). \quad (50)
 \end{aligned}$$

Преобразуем второе слагаемое в правой части (50) следующим образом:

$$\begin{aligned}
 D_{0t}^{-\alpha} \int_0^t \|x^{\frac{m}{2}} u\|_0^2 d\tau &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}} \int_0^\tau \|x^{\frac{m}{2}} u\|_0^2 ds = \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \|x^{\frac{m}{2}} u\|_0^2 \int_s^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \|x^{\frac{m}{2}} u\|_0^2 \left(-\frac{(t-\tau)^\alpha}{\alpha} \Big|_s^t \right) ds = \\
 &= \frac{1}{\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^\alpha \|x^{\frac{m}{2}} u\|_0^2 ds = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^t (t-\tau)^\alpha \|x^{\frac{m}{2}} u\|_0^2 d\tau \leq \\
 &\leq \frac{1}{\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{(t-\tau) \|x^{\frac{m}{2}} u\|_0^2 d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}} \leq \frac{T}{\alpha} D_{0t}^{-\alpha} \|x^{\frac{m}{2}} u\|_0^2.
 \end{aligned}$$

Итак, получаем:

$$D_{0t}^{-\alpha} \int_0^t \|x^{\frac{m}{2}} u\|_0^2 d\tau \leq \frac{T}{\alpha} D_{0t}^{-\alpha} \|x^{\frac{m}{2}} u\|_0^2. \quad (51)$$

С помощью (51) из (50) при $\varepsilon_1 = \frac{\alpha}{2TM_7}$ находим:

$$\begin{aligned}
 \|x^{\frac{m}{2}} u\|_0^2 + D_{0t}^{-\alpha} \|x^{\frac{m}{2}} u_x\|_0^2 &\leq \\
 &\leq M_{10} D_{0t}^{-\alpha} \|x^{\frac{m}{2}} u\|_0^2 + M_{11} \left(D_{0t}^{-\alpha} \left(\|x^{\frac{m}{2}} f\|_0^2 + \mu^2(t) \right) + \|x^{\frac{m}{2}} u_0(x)\|_0^2 \right). \quad (52)
 \end{aligned}$$



На основании Леммы 2 из (52) находим априорную оценку

$$\|x^{\frac{m}{2}}u\|_0^2 + D_{0t}^{-\alpha}\|x^{\frac{m}{2}}u_x\|_0^2 \leq M\left(D_{0t}^{-\alpha}\left(\|x^{\frac{m}{2}}f\|_0^2 + \mu^2(t)\right) + \|x^{\frac{m}{2}}u_0(x)\|_0^2\right), \quad (53)$$

где — положительное число, зависящее только от входных данных задачи (1), (2), (46),

(4), $D_{0t}^{-\alpha}u = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{u d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}}$ — дробный интеграл Римана-Лиувилля порядка $\alpha, 0 < \alpha < 1$.

Справедлива следующая

Теорема 3. Если $k(x, t) \in C^{1,0}(\bar{Q}_T)$, $r(x, t), q(x, t), f(x, t) \in C(\bar{Q}_T)$, $u(x, t) \in C^{2,0}(Q_T) \cap C^{1,0}(\bar{Q}_T)$, $\partial_{0t}^\alpha u(x, t) \in C(\bar{Q}_T)$ и выполнены условия (5), (46), то для решения $u(x, t)$ задачи (1), (2), (46), (4) справедлива априорная оценка (53), из чего следуют единственность и устойчивость решения по начальным данным и правой части в смысле нормы $\|x^{\frac{m}{2}}u\|_1^2 = \|x^{\frac{m}{2}}u\|_0^2 + D_{0t}^{-\alpha}\|x^{\frac{m}{2}}u_x\|_0^2$.

5. Устойчивость и сходимость разностной схемы

На равномерной сетке $\bar{\omega}_{h\tau}$ дифференциальной задаче (1), (2), (46), (4) поставим в соответствие разностную схему порядка аппроксимации $O\left(\frac{h^2 + \tau^2}{x}\right)$:

$$\bar{\varkappa}\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y_i = \frac{\varkappa}{x_i^m} \left(x_{i-0.5}^m a_i^j y_{\bar{x},i}^{(\sigma)}\right)_x + \frac{b^{-j}}{x_i^m} \left(x_{i-0.5}^m a_i^j y_{\bar{x},i}^{(\sigma)}\right) + \frac{b^{+j}}{x_i^m} \left(x_{i+0.5}^m a_{i+1}^j y_{x,i}^{(\sigma)}\right) - d_i^j y_i^{(\sigma)} + \varphi_i^j, \quad (54)$$

$$\varkappa_0 a_1 y_{x,0}^{(\sigma)} = \frac{0.5h}{m+1} \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y_0 + \frac{0.5h}{m+1} d_0^j y_0^{(\sigma)} - \mu_1, \quad t \in \bar{\omega}_\tau, \quad x = 0, \quad (55)$$

$$-\varkappa_N a_N y_{\bar{x},N}^{(\sigma)} = \tilde{\beta} y_0^{(\sigma)} + \sum_{s=0}^j \rho_s^j y_0^{s\bar{\tau}} + 0.5h d_N y_N^{(\sigma)} + 0.5h \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y_N - \mu_2, \quad x = N, \quad (56)$$

$$y(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \bar{\omega}_h, \quad t = 0. \quad (57)$$

Перепишем задачу (54)-(57) в операторной форме:

$$\begin{cases} \bar{\varkappa}\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y = \bar{\Lambda}(t^{j+\sigma})y^{(\sigma)} + \bar{\Phi}, \\ y(x, 0) = u_0(x), \end{cases} \quad (58)$$

где

$$\bar{\varkappa} = \begin{cases} \bar{\varkappa}_i, & x \in \omega_h, \\ 1, & x = 0, l, \end{cases} \quad \bar{\varkappa}_i = 1 + \frac{m(m-1)h^2}{24x_i^2}, \quad \bar{\Phi} = \begin{cases} \varphi = \varphi_i, & (x, t) \in \omega_{h\tau}; \\ \varphi^- = (0.5h)^{-1}(m+1)\mu_1, & x = 0; \\ \varphi^+ = (0.5h)^{-1}\mu_2, & x = l, \end{cases}$$

$$t^* = t^{j+1/2},$$

$$\bar{\Lambda}(t^{j+\sigma})y^{(\sigma)} = \begin{cases} \tilde{\Lambda}(t^{j+\sigma})y_i^{(\sigma)} = \frac{\varkappa_i}{x_i^m} \left(x_{i-0.5}^m a_i^j y_{\bar{x},i}^{(\sigma)}\right)_x + \\ + \frac{b^{-j}}{x_i^m} \left(x_{i-0.5}^m a_i^j y_{\bar{x},i}^{(\sigma)}\right) + \frac{b^{+j}}{x_i^m} \left(x_{i+0.5}^m a_{i+1}^j y_{x,i}^{(\sigma)}\right) - d_i^j y_i^{(\sigma)}; \\ \Lambda^- y_0^{(\sigma)} = \frac{(m+1)\left(\varkappa_0 a_1 y_{x,0}^{(\sigma)} - \frac{0.5h}{m+1} d_0 y_0^{(\sigma)}\right)}{0.5h}, \quad x = 0; \\ \Lambda^+ y_N^{(\sigma)} = -\frac{\varkappa_N a_N y_{\bar{x},N}^{(\sigma)} + \tilde{\beta} y_0^{(\sigma)} + \sum_{s=0}^j \rho_s^j y_0^{s\bar{\tau}} + 0.5h d_N y_N^{(\sigma)}}{0.5h}, \quad x = l. \end{cases}$$



Введем скалярное произведение и норму в следующем виде:

$$(u, v) = \sum_{i=1}^N u_i v_i \hbar, \quad \|u\|_0^2 = \sum_{i=1}^N u_i^2 \hbar, \quad \hbar = \begin{cases} 0.5h, & i = N, \\ h, & i \neq N. \end{cases}$$

Умножим (58) теперь скалярно на $x^m y^{(\sigma)}$, тогда получим

$$\left(\overline{\bar{x}} \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y, x^m y^{(\sigma)} \right) = \left(\overline{\Lambda}(t_{j+\sigma}) y^{(\sigma)}, x^m y^{(\sigma)} \right) + \left(\overline{\Phi}, x^m y^{(\sigma)} \right). \quad (59)$$

Повторяя рассуждения (24)-(38), из (59) после несложных преобразований получаем

$$\begin{aligned} \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha \|x^{\frac{m}{2}} y\|_1^2 + \|\bar{x}^{\frac{m}{2}} y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\|_0^2 &\leq M_1 \sum_{s=0}^j \|\bar{x}^{\frac{m}{2}} y_{\bar{x}}\|_0^2 \bar{\tau} + M_2 \|x^{\frac{m}{2}} y^{(\sigma)}\|_1^2 + \\ &+ M_3 \sum_{s=0}^j \|x^{\frac{m}{2}} y\|_0^2 \bar{\tau} + M_4 \left(\|x^{\frac{m}{2}} \varphi\|_0^2 + \mu_1^2 + \mu_2^2 \right), \end{aligned} \quad (60)$$

где

$$\|x^{\frac{m}{2}} y\|_1^2 = \|x^{\frac{m}{2}} y\|_0^2 + (x_{0.5}^{\frac{m}{2}} y_0)^2.$$

Оценим первое слагаемое в правой части (60), для этого перепишем (60) в другой форме:

$$\|\bar{x}^{\frac{m}{2}} y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\|_0^2 \leq M_1 \sum_{s=0}^j \|\bar{x}^{\frac{m}{2}} y_{\bar{x}}\|_0^2 \bar{\tau} + F, \quad (61)$$

где $F = M_2 \|x^{\frac{m}{2}} y^{(\sigma)}\|_1^2 + M_3 \sum_{s=0}^j \|x^{\frac{m}{2}} y\|_0^2 \bar{\tau} + M_4 \left(\|x^{\frac{m}{2}} \varphi\|_0^2 + \mu_1^2 + \mu_2^2 \right)$. С помощью Леммы 4 [Самарский А.А., Гулин А.В. 1973, стр.171] из (61), находим:

$$\|\bar{x}^{\frac{m}{2}} y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\|_0^2 \leq M_5 F. \quad (62)$$

Учитывая (62), из (60) находим

$$\begin{aligned} \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha \|x^{\frac{m}{2}} y\|_1^2 + \|\bar{x}^{\frac{m}{2}} y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\|_0^2 &\leq \\ &\leq M_6 \|x^{\frac{m}{2}} y^{(\sigma)}\|_1^2 + M_7 \sum_{s=0}^j \|x^{\frac{m}{2}} y\|_0^2 \bar{\tau} + M_8 \sum_{s=0}^j \left(\|x^{\frac{m}{2}} \varphi^s\|_0^2 + \mu_1^2 + \mu_2^2 \right) \bar{\tau}. \end{aligned} \quad (63)$$

На основании Леммы 4 из (60), получим:

$$\|x^{\frac{m}{2}} y^{j+1}\|_1^2 \leq M_9 \left(\|x^{\frac{m}{2}} y^0\|_1^2 + \frac{t_j^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \max_{0 \leq j' \leq j} \left(\sum_{s=0}^{j'} \|x^{\frac{m}{2}} y\|_0^2 \bar{\tau} + \sum_{s=0}^{j'} \left(\|x^{\frac{m}{2}} \varphi^s\|_0^2 + \mu_1^2 + \mu_2^2 \right) \bar{\tau} \right) \right). \quad (64)$$

Введя обозначение $g^j = \max_{0 \leq j' \leq j} \|y\|_0^2$ из (64) получим

$$g^{j+1} \leq M_9 \frac{t_j^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \sum_{s=0}^j g^s \bar{\tau} + M_{10} F_1^j, \quad (65)$$



где

$$F_1^j = \|x^{\frac{m}{2}} y^0\|_1^2 + \frac{t_j^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)} \max_{0 \leq j' \leq j} \sum_{s=0}^{j'} \left(\|x^{\frac{m}{2}} \varphi^s\|_0^2 + \mu_1^2 + \mu_2^2 \right) \bar{\tau}.$$

На основании Леммы 4 [Самарский А.А., Гулин А.В. 1973, стр.171] из (65) получаем априорную оценку

$$\|x^{\frac{m}{2}} y^{j+1}\|_0^2 \leq M \left(\|x^{\frac{m}{2}} y^0\|_1^2 + \frac{t_j^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)} \max_{0 \leq j' \leq j} \sum_{s=0}^{j'} \left(\|x^{\frac{m}{2}} \varphi^s\|_0^2 + \mu_1^2 + \mu_2^2 \right) \bar{\tau} \right), \quad (66)$$

где M — положительная постоянная, не зависящая от h и τ .

Справедлива следующая

Теорема 4. Пусть выполнены условия (5), (46) тогда существуют такие h_0, τ_0 , что если $h \leq h_0, \tau \leq \tau_0$, то для решения разностной задачи (54)-(57) справедлива априорная оценка (66), из чего следуют единственность и решения разностной схемы (54)-(57) по начальным данным и правой части.

Пусть $u(x, t)$ — решение задачи (1), (2), (46), (4) $y(x_i, t_j) = y_i^j$ — решение разностной задачи (54)-(57). Для оценки точности разностной схемы (54)-(57) рассмотрим разность $z_i^j = y_i^j - u_i^j$, где $u_i^j = u(x_i, t_j)$. Тогда, подставляя $y = z + u$ в соотношения (54)-(57), получаем задачу для функции z :

$$\bar{\kappa} \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha z_i = \frac{\kappa}{x_i^m} \left(x_{i-0.5}^m a_i^j z_{\bar{x},i}^{(\sigma)} \right)_x + \frac{b^{-j}}{x_i^m} \left(x_{i-0.5}^m a_i^j z_{\bar{x},i}^{(\sigma)} \right) + \frac{b^{+j}}{x_i^m} \left(x_{i+0.5}^m a_{i+1}^j z_{x,i}^{(\sigma)} \right) - d_i^j z_i^{(\sigma)} + \Psi_i^j, \quad (67)$$

$$\kappa_0 a_1 z_{x,0}^{(\sigma)} = \frac{0.5h}{m+1} \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha z_0 + \frac{0.5h}{m+1} d_0^j z_0^{(\sigma)} - \nu_1, \quad t \in \bar{\omega}_\tau, \quad x = 0, \quad (68)$$

$$-\kappa_N a_N z_{\bar{x},N}^{(\sigma)} = \tilde{\beta} z_0^{(\sigma)} + \sum_{s=0}^j \rho_s^j z_0^{s\bar{\tau}} + 0.5h d_N^j z_N^{(\sigma)} + 0.5h \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha z_N - \nu_2, \quad x = N, \quad (69)$$

$$(x, 0) = 0, \quad x \in \bar{\omega}_h, \quad t = 0, \quad (70)$$

где $\Psi = O\left(\frac{h^2 + \tau^2}{x}\right)$, $\nu_1 = O(h^2 + \tau^2)$, $\nu_2 = O(h^2 + \tau^2)$ — погрешности аппроксимации дифференциальной задачи (1), (2), (46), (4) разностной схемой (54)-(57) в классе решении $u = u(x, t)$ задачи (1), (2), (46), (4).

Применяя априорную оценку (66) к решению задачи (67)-(70), получаем неравенство

$$\|x^{\frac{m}{2}} z^{j+1}\|_0^2 \leq M \max_{0 \leq j' \leq j} \sum_{s=0}^{j'} \left(\|x^{\frac{m}{2}} \Psi^s\|_0^2 + \nu_1^2 + \nu_2^2 \right) \bar{\tau}, \quad (71)$$

где M — положительная постоянная, не зависящая от h и τ .

Отсюда вытекает априорная оценка

$$\|x z^{j+1}\|_0^2 \leq \bar{M} \max_{0 \leq j' \leq j} \sum_{s=0}^{j'} \left(\|x \Psi^s\|_0^2 + \nu_1^2 + \nu_2^2 \right) \bar{\tau}. \quad (72)$$

где \bar{M} — положительная постоянная, не зависящая от h и τ .



Из априорной оценки (72) следует сходимость решения разностной задачи (54)-(57) к решению дифференциальной задачи (1), (2), (46), (4) в смысле нормы $\|xz^{j+1}\|_0^2$ на каждом слое так, что если существуют такие τ_0, h_0 , то при $\tau \leq \tau_0, h \leq h_0$, справедлива априорная оценка

$$\|x(y^{j+1} - u^{j+1})\|_0^2 \leq \overline{M}(h^2 + \tau^2).$$

Замечание. Полученные в данной работе результаты справедливы и в случае, когда условие (3) заменяется условием вида:

$$\partial_{0t}^\alpha \int_0^l x^m u(x, t) dx = \mu(t), \quad 0 \leq t \leq T.$$

6. Заключение

В работе исследованы нелокальные краевые задачи для уравнения конвекции-диффузии дробного порядка с переменными коэффициентами с вырождением. Методом энергетических неравенств получены априорные оценки в дифференциальной и разностной трактовках для решения рассматриваемых задач. Из полученных оценок следуют единственность и устойчивость решения относительно начальных данных и правой части, а также сходимость решения разностной задачи к решению соответствующей дифференциальной задачи.

Список литературы References

1. Алиханов А.А. 2010. Априорные оценки решений краевых задач для уравнений дробного порядка. Дифференц. уравнения. 46(5):660–666.
Alihanov A.A. 2010. Apriornye ocenki reshenij kraevykh zadach dlya uravnenij drobnogo poriyadka [Priori Estimates for Solutions of Boundary Value Problems for Fractional-Order Equations]. Differenc. uravneniya. 46(7):949–961.
2. Бештоков М.Х. 2018. Локальные и нелокальные краевые задачи для вырождающихся и невырождающихся псевдопараболических уравнений с дробной производной Римана-Лиувилля. Дифференц. уравнения, 54(6):763–778.
Beshtokov M.H. 2018. Lokal'nye i nelokal'nye kraevye zadachi dlya vyrozhdayushchihsy i nevyrozhdayu- shchihsya psevdoparabolicheskikh uravnenij s drobnouj proizvodnoj Rimana-Liuvillya [Local and Nonlocal Boundary Value Problems for Degenerating and Nondegenerating Pseudoparabolic Equations with a Riemann-Liouville Fractional Derivative]. Differenc. uravneniya, 54(6):758–774.
3. Бештоков М.Х. 2019. Краевые задачи для нагруженных псевдопараболических уравнений дробного порядка и разностные методы их решения. Известия высших учебных заведений. Математика, Известия вузов. Математика 63(2):3–12.
Beshtokov M.H. 2019. Kraevye zadachi dlya nagruzhennykh psevdoparabolicheskikh uravnenij drobnogo poriyadka i raznostnye metody ih resheniya [Boundary-Value Problems for Loaded Pseudoparabolic Equations of Fractional Order and Difference Methods of Their Solving]. Russian Mathematics. 63(2):1–10.

4. Бештоков М.Х. 2018. К краевым задачам для вырождающихся псевдопараболических уравнений с дробной производной Герасимова – Капуто. Известия вузов. Математика, 62(10):3–16.
Beshtokov M.H. 2018. K kraevym zadacham dlya vyrozhdayushchihsvya psevdoparabolicheskikh uravnenij s drobnnoj proizvodnoj Gerasimova – Kaputo [To Boundary-Value Problems for Degenerating Pseudo-parabolic Equations With Gerasimov-Caputo Fractional Derivative]. Russian Mathematics, 62(10):1–14.
5. Бицадзе А.В. 1984. К теории нелокальных краевых задач. ДАН СССР. 277(1):17–19.
Bicadze A.V. 1984. K teorii nelokal'nyh kraevyh zadach [On the theory of nonlocal boundary value problems]. DAN SSSR. 277(1):17–19.
6. Бэгли Р.Л., Товик П. Дж. 1984. Дифференциальное исчисление, основанное на производных дробного порядка – новый подход к расчету конструкций с вязко-упругим демпфированием. Аэрокосмическая техника. 2(2):84–93.
Behgli R.L., Tovik P. Dzh. 1984. Differencial'noe ischislenie, osnovannoe na proizvodnyh drobnogo porjadka-novuj podhod k raschetu konstrukcij s vyazko-uprugim dempfirovaniem. Aehrokosmicheskaya tekhnika [Differential calculus based on fractional order derivatives a new approach to the calculation of structures with viscoelastic damping]. 2(2):84–93.
7. Водахова В.А. 1983. Задача Гурса для обобщенного уравнения влагопереноса. Сборник научных трудов (межведомственный) «САПР и АСПР в Мелиорации». Нальчик. КБГУ. 74–80.
Vodahova V.A. 1983. Zadacha Gursa dlya obobshchennogo uravneniya vlagoperenosa [The Goursat problem for a generalized equation of moisture transfer]. Sbornik nauchnyh trudov (mezhhve- domstvennyj) "SAPR i ASPR v Melioracii". Nal'chik. KBGU. 74–80.
8. Водахова В.А. 2008. Об одной нелокальной задаче типа задачи Бицадзе – Самарского для нагруженного уравнения с кратными характеристиками. Вестник КБГУ. Серия Математические науки. Нальчик: Кабардино-Балкарский Госуниверситет. 5:26–31.
Vodahova V.A. 2008. Ob odnoj nelokal'noj zadache tipa zadachi Bicadze – Samarskogo dlya nagruzhennogo uravneniya s kratnymi harakteristikami [On a non-local problem of the Bitsadze-Samaraskii type for a loaded equation with multiple characteristics]. Vestnik KBGU. Seriya Matematicheskie nauki. Nal'chik: Kabardino-Balkarskij Gosuniversitet. 5:26–31.
9. Гулин А.В., Ионкин Н.И., Морозова В.А. 2001. Об устойчивости нелокальной двумерной разностной задачи. ДУ. 37(7): 926–932.
Gulin A.V., Ionkin N.I., Morozova V.A. 2001. Ob ustojchivosti nelokal'noj dvumernoj raznostnoj zadachi [On the stability of a non-local two-dimensional difference problem]. DU. 37(7): 926–932.
10. Динариев О.Ю. 1990. Фильтрация в трещиноватой среде с фрактальной геометрией трещин. Изв. АН СССР. сер. МЖГ. 5:66–70.
Dinariev O.YU. 1990. Fil'traciya v treshchinovatoj srede s fraktal'noj geometriej treshchin [Filtration in a fissured medium with fractal geometry of cracks]. Izv. AN SSSR. ser. MZHG. 5:66–70.
11. Ионкин Н.И. 1977. Решение одной краевой задачи в теории теплопроводности с нелокальными краевыми условиями. ДУ. 13(2): 294–304.
Ionkin N.I. 1977. Reshenie odnoj kraevoj zadachi v teorii teploprovodnosti s nelokal'nymi kraevymi usloviyami [Solution of a boundary value problem in the theory of thermal conductivity with nonlocal boundary conditions]. DU. 13(2):294–304.



12. Камынин Л.А. 1964. Об одной краевой задаче теории теплопроводности с неклассическими граничными условиями. ЖВМ и МФ. 4(6):1006–1024.
Kamynin L.A. 1964. Ob odnoj kraevoj zadache teorii teploprovodnosti s neklassicheskimi granichnymi usloviyami [On a boundary value problem in the theory of thermal conductivity with non-classical boundary conditions]. ZHVM i MF. 4(6):1006-1024.
13. Кожанов А.И. 2004. Об одной нелокальной краевой задаче с переменными коэффициентами для уравнений теплопроводности и Аллера. ДУ. 40(6):763–774.
Kozhanov A.I. 2004. Ob odnoj nelokal'noj kraevoj zadache s peremennymi koehfficientami dlya uravnenij teploprovodnosti i Allera [On a nonlocal boundary value problem with variable coefficients for the heat equation and the Aller equation]. DU. 40(6):763-774.
14. Кочубей А.Н. 1990. Диффузия дробного порядка. Дифференц.уравнения. 26(4):660–670.
Kochubej A.N. 1990. Diffuziya drobnogo poryadka [Fractional order diffusion]. Differenc. uravneniya. 26(4):660-670.
15. Мальшаков А.В. 1992. Уравнения гидродинамики для пористых сред со структурой порового пространства, обладающей фрактальной геометрией. ИФЖ. 62(3):405–410.
Mal'shakov A.V. 1992. Uravneniya gidrodinamiki dlya poristyh sred so strukturoj porovogo prostranstva, obladayushchej fraktal'noj geometrije [Hydrodynamic equations for porous media with pore space structure having fractal geometry]. IFZH. 62(3):405-410.
16. Нахушев А.М. 1978. Нелокальная задача и задача Гурса для нагруженного уравнения гиперболического типа и их приложения к прогнозу почвенной влаги. ДАН СССР. 242(5):1008–1011.
Nahushev A.M. 1978. Nelokal'naya zadacha i zadacha Gursa dlya nagruzhennogo uravneniya giperboli- cheskogo tipa i ih prilozheniya k prognozu pochvennoj vlagi [Non-local problem and the Goursat problem for the loaded equation of hyperbolic type and their applications to prediction of soil moisture] DAN SSSR. 242(5):1008-1011.
17. Нахушев А.М. 2000. Элементы дробного исчисления и их применения. НИИИ ПМА КБ-НЦРАН, Нальчик, 272 с.
Nahushev A.M. 2000. Elementy drobnogo ischisleniya i ih primeneniya [Elements of fractional calculus and their applications]. NIII PMA KBNCRAN, Nal'chik, 272 s.
18. Нигматуллин Р.Р. 1992. Дробный интеграл и его физическая интерпретация. ТМФ, 90(3):354–368.
Nigmatullin R.R. 1992. Drobnuy integral i ego fizicheskaya interpretaciya [Fractional integral and its physical interpretation]. TMF, 90(3):354-368.
19. Самарский А.А. 1983. Теория разностных схем. Наука, М., 416 с.
Samarskij A.A. 1983. Teoriya raznostnyh skhem [Theory of difference schemes]. Nauka, M., 416 s.
20. Самарский А.А., Гулин А.В. 1973. Устойчивость разностных схем. М.: Наука, 1973. 415 с.
Samarskij A.A., Gulin A.V. 1973. Ustojchivost' raznostnyh skhem [Stability of difference schemes]. M.: Nauka, 415 s.
21. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. 1987. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск. 121 с.
Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. 1987. Integraly i proizvodnye drobnogo poryadka i nekotorye ih prilozheniya [Fractional Integrals and Derivatives and Some of Their Applications]. Minsk. 121 s.

22. Таукенова Ф.И., Шхануков-Лафисhev М.Х. 2006. Разностные методы решения краевых задач для дифференциальных уравнений дробного порядка. *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 46(10):1871–1881.
Taukenova F.I., Shkhanukov-Lafishev M.H. 2006. Raznostnye metody resheniya kraevykh zadach dlya differentsial'nykh uravnenij drobnogo poryadka [Difference methods for solving boundary value problems for fractional differential equations]. *Comput. Math. Math. Phys.* 46(10): 1785–1795.
23. Чудновский А.Ф. 1969. Некоторые коррективы в постановке и решении задач тепло- и влагопереноса в почве. *Сб. трудов АФИ.* 23: 41–54.
Chudnovskij A.F. 1969 Nekotorye korrekтивы v postanovke i reshenii zadach teplo- i vlagopere-nosa v pochve [Some adjustments in the formulation and solution of problems of heat and moisture transfer in the soil]. *Sb. trudov AFI.* 23:41–54.
24. Чудновский А.Ф. 1976. Теплофизика почв. М.: Наука. 352 с.
Chudnovskij A.F. 1976. Teplofizika pochv [Thermophysics of soils]. М.: Nauka. 352 s. (in Russian).
25. Чукбар К.В. 1995. Стохастический перенос и дробные производные. *ЖЭТФ.* 108. 5(11): 1875–1884.
Chukbar K.V. 1995. Stohasticheskij perenos i drobnye proizvodnye [Stochastic transfer and fractional derivatives]. *ZHENTF.* 108. 5(11):1875–1884.
26. Шефер Д., Кефер К. 1988. Фракталы в физике. Труды 6-го Междунар. симпоз. по фракталам в физике, 62–71.
Shefer D., Kefer K. 1988. Fraktaly v fizike [Fractals in physics]. *Trudy 6-go Mezhdunar. simpoz. po fraktalam v fizike,* 62–71.
27. Alikhanov A.A. 2015. A new difference scheme for the time fractional diffusion equation. *Journal of Computational Physics.* 280:424–438.
28. Canon J.R. 1963. The solution of the heat equation subject to the specification of energy. *Quart. Appl. Math.* 21(2):155–160.
29. Mandelbrojt S. 1925. Sulla generalizzazione del calcolo delle variazioni. *Atti Reale Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. sei., fis. mat. e natur. Ser.* 6(1):151–156.
30. O'Shaughnessy L. 1918. Problem 433. *Amer. Math. Month.* 25:172–173.

Ссылка для цитирования статьи
Reference to article

Бештоков М.Х., Водахова В.А. 2019. Сеточные методы решения нелокальных краевых задач для уравнения конвекции-диффузии дробного порядка с вырождением. *Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика.* 51 (3): 347–365. Doi: 10.18413/2075-4639-2019-51-3-347-365.

Beshotov M.K.H., Vodakhova V.A. 2019. Grid methods for solving nonlocal boundary value problems for the convection-diffusion equation of fractional order with degeneration. *Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics. Physics.* 51 (3): 347–365 (in Russian). Doi: 10.18413/2075-4639-2019-51-3-347-365.



УДК 517.987

DOI 10.18413/2075-4639-2019-51-3-366-373

**УНИМОДАЛЬНОСТЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
ДЛЯ МАКСИМУМОВ ВЫБОРКИ НЕЗАВИСИМЫХ ЭРЛАНГОВСКИХ
СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН****UNIMODALITY OF PROBABILITY DISTRIBUTIONS FOR SAMPLE
MAXIMA OF INDEPENDENT ERLANG RANDOM VARIABLES****Ю.П. Вирченко, А.Д. Новосельцев****Yu.P. Virchenko, A.D. Novoseltsev**

ООО Матрица

Россия, Белгород, ул. Королева 2а, Белгород, 308000, Россия

ООО Matrix,

2 Koroleva St., Belgorod, 308000, Russia

Белгородский государственный национальный исследовательский университет,

Россия, 308015, Белгород, ул. Победы 85

Belgorod National Research University,

85 Pobedy St., Belgorod, 308015, Russia

E-mail: virch@bsu.edu.ru

Аннотация

Рассматриваются выборки конечного объема $N \geq 2$ независимых одинаково распределенных случайных неотрицательных величин $\tilde{r}_1, \dots, \tilde{r}_N$. Ставится задача о нахождении достаточных условий для их общего распределения вероятностей $Q(x) = \Pr\{\tilde{r}_j < x\}$, $j = 1 \div N$, которые гарантируют унимодальность распределения вероятностей $F_N(x) = \Pr\{\tilde{r} < x\}$ их максимума $\tilde{r} = \max\{\tilde{r}_j; j = 1 \div N\}$. Доказывается, что в случае, если Q имеет непрерывно дифференцируемую плотность q , которая является плотностью Эрланга произвольного порядка $n \in \mathbb{N}$, то распределение F_N обладает непрерывно дифференцируемой унимодальной плотностью f_N .

Abstract

Finite samples of independent identically distributed nonnegative random variables $\tilde{r}_1, \dots, \tilde{r}_N$ are under consideration. It is set the problem about sufficient conditions for their common probability distribution $Q(x) = \Pr\{\tilde{r}_j < x\}$, $j = 1 \div N$ which guarantee the unimodality of the probability distribution $F_N(x) = \Pr\{\tilde{r} < x\}$ of random value $\tilde{r} = \max\{\tilde{r}_j; j = 1 \div N\}$. It is proven that in the case when Q has the continuously differentiable density q that is the Erlang density with an arbitrary order $n \in \mathbb{N}$, the distribution F_N is unimodal.

Ключевые слова: независимые случайные величины, максимум выборки, распределение вероятностей, унимодальность, плотность распределения, распределение Эрланга.

Key words: equivalent independent random values, sample maxima, probability distribution, unimodality, probability density, Erlang distribution.

Введение

Существует довольно обширное множество прикладных задач, при решении которых необходимо закладывать в конструкцию математической модели выборки независимых одинаково распределенных случайных величин $\tilde{r}_1, \dots, \tilde{r}_N$ и анализировать распределение вероятностей выборочных экстремумов (см., например, [Gnedenko, 1941; Gnedenko 1943; Gumbel 1962]). В частности, такая проблема возникает при изучении вероятностной модели электрической прочности полимерных эмаль-лаковых покрытий [Брагинский и др. 1983; Брагинский и др. 1988]. В этой модели случайные величины \tilde{r}_j , $j = 1 \div N$ являются некоторыми случайными размерами воздушных включений в материал покрытия, которые возникают в результате технологического процесса создания покрытия. В рамках этой модели локальная электрическая прочность является убывающей функцией максимума $\tilde{r} = \max\{\tilde{r}_j; j = 1 \div N\}$ случайных радиусов воздушных пузырьков. В этом случае необходимо изучить распределение вероятностей случайной величины \tilde{r} , когда \tilde{r}_j , $j = 1 \div N$ являются статистически независимыми и эквивалентно распределенными случайными положительными величинами. При этом объем выборки $N \geq 2$, по порядку величины, равен числу воздушных включений, приходящихся на 1 см^2 площади покрытия. Таким образом, это число является довольно неопределенным и не очень большим. Ввиду его относительно малой величины, нет возможности использовать при анализе модели известные предельные теоремы для распределения вероятностей выборочных максимумов [Gnedenko, 1941; Gnedenko 1943]. В условиях такой неопределенности математического моделирования приходится изучать функцию $F_N(x)$ при очень широких предположениях относительно распределения вероятностей $Q(x) = \Pr\{\tilde{r}_j < x\}$, $j = 1 \div N$ размеров воздушных пор. При этом предсказательную ценность составляют только наиболее важные качественные свойства распределения вероятностей $F_N(x) = \Pr\{\tilde{r} < x\}$, которые могут наблюдаться при статистическом анализе. Ввиду же неопределенности числа N , искомые качественные свойства не должны зависеть от его величины.

Одним из наиболее важных качественных свойств одномерных распределений вероятностей, которые просто идентифицируются в процессе обработки статистических данных, является число их мод, в частности, распределения, используемые в математической статистике (например, распределения Пирсона [Королюк и др. 1985]) являются унимодальными. Проблеме унимодальности одномерных распределений вероятностей уделено большое внимание в научной литературе по теории вероятностей (см., например, [Lukacs 1970]). С физической точки зрения нарушение унимодальности распределения означает наличие какого-то специфического физического механизма, приводящего к появлению этого эффекта. Проявление его в процессе обработки статистических данных может оказаться довольно неожиданным сюрпризом и поэтому подлежит теоретическому осмыслению. Как раз такая ситуация реализуется в статистике электрической прочности эмаль-лаковых покрытий, что и вызвало исследовательский интерес к этой проблеме в работах [Брагинский и др. 1983; Брагинский и др. 1988]. В настоящей работе мы покажем, что при использовании, в процессе вероятностного моделирования положительных случайных величин $\tilde{r}_1, \dots, \tilde{r}_N$, любого из распределений Эрланга, распределение F_N является одновершинным.



2. Постановка задачи

Обозначим посредством $Q(x)$, $x > 0$ общее распределение вероятностей случайных величин $\tilde{r}_1, \dots, \tilde{r}_N$. Будем предполагать, что $Q(x)$ имеет непрерывную на $x > 0$ плотность $q(x) = dQ(x)/dx > 0$ на $[0, \infty)$, которая имеет единственный максимум, т. е. $Q(x)$ является унимодальным распределением. Так как $\tilde{r}_1, \dots, \tilde{r}_N$ статистически независимы, то

$F_N(x) = \prod_{j=1}^N \Pr\{\tilde{r}_j < x\} = [Q(x)]^N$. В этом случае функция распределения $F_N(x)$ также

имеет непрерывную плотность $f_N(x)$ при $x > 0$, которая дается следующей формулой:

$$f_N(x) = Nq(x)Q^{N-1}(x), \quad N \geq 2, \quad (1)$$

которое определяет все экстремальные точки плотности f_N .

Необходимо проанализировать, для каких унимодальных плотностей $q(x)$ плотность (1) также является унимодальной, а в каких случаях она имеет более одного максимума. Будем предполагать, далее, что плотность q является непрерывно дифференцируемой. Вследствие непрерывной дифференцируемости q , согласно (1), плотность $f_N(x)$ также непрерывно дифференцируема, и ее производная дается формулой $\dot{f}_N(x) = NQ^{N-2}(x)(\dot{q}(x)Q(x) + (N-1)q^2(x))$, $N \geq 2$. Тогда задача об определении числа максимумов у плотности f_N сводится к определению числа решений уравнения

$$\dot{q}(x)Q(x) + (N-1)q^2(x) = 0, \quad x > 0, \quad Q(x) = \int_0^x q(y)dy. \quad (2)$$

В этой работе мы будем предполагать, что плотность q принадлежит классу плотностей распределений Эрланга, то есть представляется формулой

$$q(x) = \frac{\lambda^n x^{n-1}}{(n-1)!} \exp(-\lambda x), \quad (3)$$

где число $n \in \mathbb{N}$ – порядок распределения, а $\lambda > 0$ – размерный параметр, определяющий статистические характеристики случайных величин \tilde{r}_j , $j = 1 \div N$.

Заметим, что $Q(0) = 0$, и поэтому должно иметь место $q(0) = 0$, т. е. уравнение (2) всегда имеет решение $x = 0$. В этой точке реализуется минимум неотрицательной плотности $f_N(x)$. Таким образом, нас будут интересовать строго положительные решения уравнения (2), которые обязаны существовать, ввиду неотрицательности $f_N(x)$. Наименьшее из таких решений очевидно соответствует максимуму плотности $f_N(x)$. Наконец, заметим, что при получении уравнения (2) производится деление на выражение $(\int_0^x q(y)dy)^{N-2}$, которое равно нулю при $x = 0$, если $N > 2$. По этой причине уравнение (2) может не содержать нулевого решения. Тем не менее утверждение о том, что его наименьшее положительное решение соответствует максимуму плотности $f_n(x)$ остается в силе.

Пример 1. Пусть $n = 1$, то есть $q(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $\dot{q}(x) = -\lambda^2 e^{-\lambda x}$. Подстановка в уравнение (2) приводит к равенству

$$(1 - e^{-\lambda x}) = (N-1)e^{-\lambda x}, \quad (4)$$



которое возможно только при $1 = Ne^{-\lambda x}$, то есть имеется единственное решение $x_m = \ln N/\lambda$, которое является точкой максимума, а точка $x = 0$ выпала из рассмотрения.

Прежде чем переходить к доказательству основного результата работы, докажем следующее простое утверждение.

Теорема 1. Уравнение (2) эквивалентно уравнению для плотности $\mu q(\mu x)$ с произвольным значением $\mu > 0$.

□ При замене $q(x)$ на $\mu q(\mu x)$ имеет место $\dot{q}(x) \Rightarrow \mu^2 \dot{q}(\mu x)$ и, следовательно, уравнение (2) переходит в следующее

$$\mu^2 \dot{q}(\mu x) \cdot \mu \int_0^x q(\mu y) dy + (N - 1) \mu^2 q^2(\mu x) = 0,$$

$$\dot{q}(\mu x) \cdot \int_0^{\mu x} q(y) dy + (N - 1) q^2(\mu x) = 0.$$

После замены $\mu x \Rightarrow x$ получаем исходное уравнение (2). ■

В связи с доказанной теоремой, далее, достаточно исследовать уравнение (2) с плотностью

$$q(x) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \exp(-x). \tag{5}$$

Пример 2. Рассмотрим случай $n = 2$, $q(x) = xe^{-x}$, $\dot{q}(x) = (1-x)e^{-x}$. Так как $\int_0^x ye^{-y} dy = 1 - e^{-x} - xe^{-x}$, то уравнение (2) в этом случае принимает вид

$$(1-x)(1 - e^{-x} - xe^{-x}) + (N-1)x^2e^{-x} = 0,$$

либо, после преобразований,

$$1 - x = g(x),$$

где

$$g(x) = e^{-x}(1 - Nx^2).$$

Точка $x = 0$ является его решением, так как $g(0) = 1$. Производная функции g равна

$$\dot{g}(x) = e^{-x}(Nx^2 - 2Nx - 1),$$

и поэтому $g(x)$ убывает при $Nx^2 - 2Nx - 1 < 0$, то есть при $x < 1 + \sqrt{1 + N^{-1}}$. В точке $x = 0$ имеем $\dot{g}(0) = -1$, то есть $g(x)$ касается графика линейной функции $1 - x$. Вторая производная функции g дается формулой

$$\ddot{g}(x) = e^{-x}(Nx^2 - 4Nx + 4N - 1).$$

В точке $x = 0$ имеем $\ddot{g}(0) = -1$, то есть $g(x)$ вогнута при $Nx^2 - 4Nx + 4N - 1 < 0$, что имеет место начиная с точки $x = 0$, крайней точки ее области определения, и до точки $2 + \sqrt{4 - (4N - 1)/N^2} = 4 - N^{-1}$. Поэтому на интервале $(0, 4 - N^{-1}]$ уравнение $g(x) = 1 - x$ не имеет корней. На интервале же $[4 - N^{-1}, \infty)$, где функция g выпукла и $g(x) < 1 - x$ при $x = 4 - N^{-1}$, уравнение имеет ровно один корень. В самом деле, во-первых, в силу



выпуклости $g(x)$ уравнение имеет не более двух корней на этом интервале. Во-вторых, в случае отсутствия корней или наличия двух корней на нем, должно выполняться неравенство $g(x) < 1 - x$ на обоих концах интервала. Однако, при $x \rightarrow \infty$ функция $g(x) \rightarrow 0$, а $1 - x$ стремится к $-\infty$.

3. Основная теорема

В этом разделе мы докажем то утверждение, которому посвящено настоящее сообщение.

Теорема 2. Распределение вероятностей $F_N(x) = \Pr\{\tilde{r} < x\} = Q^N(x)$ максимума выборки N независимых одинаково распределенных неотрицательных величин $\tilde{r}_1, \dots, \tilde{r}_N$ с общим для них распределением вероятностей $Q(x)$, $x > 0$ унимодально при любом $N \in \mathbb{N}$ в том случае, когда $Q(x)$ определяется плотностью Эрланга

$$q(x) = (x^{n-1} \lambda^n / (n-1)!) \exp(-\lambda x)$$

при любых $\lambda > 0$ и $n \in \mathbb{N}$.

□ В силу теоремы 1, достаточно дать доказательство для $\lambda = 1$. Будем считать, что $N \geq 2$ и $n \geq 2$, так как при $N = 1$ утверждение тривиально, а при $n = 1$ его доказательство дается рассмотренным выше примером 1.

Доказательство состоит в вычислении, аналогичном тому, которое представлено в последнем рассмотренном выше примере. Для плотности q при $\lambda = 1$ имеем $\dot{q}(x) = x^{n-1}(n-x)e^{-x}/(n-1)!$,

$$\int_0^x q(y) dy = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x y^n e^{-y} dy = n \left(1 - e^{-x} \sum_{l=0}^n \frac{x^l}{l!} \right).$$

Подстановка в уравнение (2) дает

$$x^{n-1}(n-x)e^{-x}n! \left(1 - e^{-x} \sum_{l=0}^n \frac{x^l}{l!} \right) + (N-1)x^{2n}e^{-2x} = 0$$

или, после очевидных алгебраических преобразований без учета корня уравнения $x = 0$,

$$(n-x) \left(1 - e^{-x} \sum_{l=0}^n \frac{x^l}{l!} \right) + (N-1) \frac{x^{n+1}}{n!} e^{-x} = 0.$$

Отделяя слагаемые, пропорциональные e^{-x} , запишем это уравнение в следующей форме

$$(n-x) = e^{-x} \left(n + \sum_{l=1}^{n-1} \frac{x^l}{(l-1)!} \left[\frac{n}{l} - 1 \right] - \frac{Nx^{n+1}}{n!} \right). \quad (6)$$

Введем функцию $g(x) = e^{-x}P(x)$, где полином $P(x)$ представлен формулой

$$P(x) = n + \sum_{l=1}^{n-1} \frac{x^l}{(l-1)!} \left[\frac{n}{l} - 1 \right] - \frac{Nx^{n+1}}{n!}, \quad (7)$$



с $n \geq 2$. Таким образом, решения уравнения (6) определяются точками пересечения графиков функций $n - x$ и $g(x)$. Графики, заведомо, пересекаются в точке $x = 0$, так как $g(0) = n$. Это решение не представляет интереса, так как соответствует точке минимума плотности $f_N(x)$. Далее,

$$\dot{g}(x) = e^{-x}(\dot{P}(x) - P(x)),$$

где

$$\dot{P}(x) = \sum_{l=1}^{n-1} \frac{lx^{l-1}}{(l-1)!} \left[\frac{n}{l} - 1 \right] - \frac{(n+1)Nx^n}{n!}. \tag{8}$$

Согласно этой формуле и формуле (7),

$$\begin{aligned} & \dot{P}(x) - P(x) = \\ & = -1 + \sum_{l=1}^{n-2} \frac{x^l}{(l-1)!} \left(\frac{l+1}{l} \left[\frac{n}{l+1} - 1 \right] - \left[\frac{n}{l} - 1 \right] \right) - \frac{x^{n-1}}{(n-2)!} \left[\frac{n}{n-1} - 1 \right] + \frac{Nx^n}{n!} (x - n - 1) = \\ & = -1 - \sum_{l=1}^{n-1} \frac{x^l}{l!} + \frac{Nx^n}{n!} (x - n - 1). \end{aligned} \tag{9}$$

Следовательно, $\dot{g}(0) = \dot{P}(0) - P(0) = -1$, то есть график $g(x)$ касается графика $n - x$ в точке $x = 0$.

Вычислим вторую производную функции $g(x)$,

$$\ddot{g}(x) = e^{-x}(P(x) - 2\dot{P}(x) + \ddot{P}(x)). \tag{10}$$

Так как, на основании (9),

$$\ddot{P}(x) - \dot{P}(x) = -1 - \sum_{l=1}^{n-2} \frac{x^l}{l!} + \frac{Nx^{n-1}}{n!} (n+1)(x-n),$$

то

$$\begin{aligned} P(x) - 2\dot{P}(x) + \ddot{P}(x) &= \left\{ -1 - \sum_{l=1}^{n-2} \frac{x^l}{l!} + \frac{Nx^{n-1}}{n!} (n+1)(x-n) \right\} - \\ & - \left\{ -1 - \sum_{l=1}^{n-1} \frac{x^l}{l!} + \frac{Nx^n}{n!} (x-n-1) \right\} = \\ & = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} - \frac{Nx^{n-1}}{n!} \left[x^2 - 2x(n+1) + n(n+1) \right]. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что в точке $x = 0$ выполняется $\ddot{g}(0) = 0$, однако в любой достаточно малой окрестности этой точки $\ddot{g}(x) < 0$, то есть функция $g(x)$ вогнута в этой окрестности. Кроме того, $g(x)$ имеет одну точку перегиба $x_* > 0$, где $\ddot{g}(x_*) = 0$, так как она удовлетворяет квадратному уравнению

$$n - N \left[x^2 - 2x(n+1) + n(n+1) \right] = 0,$$



которое имеет одно положительное решение

$$x_* = n + 1 + \sqrt{n + 1 + n/N}.$$

Дальнейшее рассуждение точно такое, как в примере 2. В силу вогнутости $g(x)$ и касания ее графика прямой $n - x$ в точке $x = 0$, должно иметь место $g(x) < n - x$ всюду на интервале $[0, x_*]$. Поэтому на интервале $(0, x_*)$ уравнение $g(x) = n - x$ не имеет корней.

На интервале же $[x_*, \infty)$, где функция $g(x)$ выпукла и $g(x_*) < n - x_*$, уравнение имеет ровно один корень x_+ . Такое положение, действительно, имеет место. Во-первых, в силу выпуклости $g(x)$, уравнение имеет не более двух корней. Во-вторых, в случае отсутствия корней или наличия ровно двух корней, ввиду $g(x_*) < n - x_*$, должно выполняться неравенство $g(x) < n - x$ при всех достаточно больших значениях x . Однако при $x \rightarrow \infty$ функция $g(x) \rightarrow 0$, а $n - x$ стремится к $-\infty$. Единственный положительный корень x_+ уравнения $n - x = g(x)$ соответствует положению единственного максимума плотности q . ■

4. Заключение

В заключение работы отметим, что несмотря на то, что распределения Эрланга составляют в математической статистике класс двухпараметрических распределений и имеют применение в различных приложениях теории вероятностей, полученный результат желательно далее распространить на существенно более широкое множество распределений, характеристика которых была не чисто аналитической, а, наоборот, — качественной и могла быть обоснована как естественная с точки зрения тех приложений, где используются максимумы выборок независимых положительных случайных величин $\tilde{r}_1, \dots, \tilde{r}_N$ и где существенным является факт одновершинности (унимодальности) распределения вероятностей для $\tilde{r} = \max\{\tilde{r}_j; j = 1 \div N\}$. Более того, математический интерес представляет задача о том, в каких случаях, несмотря на унимодальность «затравочного» распределения Q , распределение вероятностей для случайной величины \tilde{r} оказывается все же неунимодальным. Что касается свойства унимодальности, то интерес для статистики случайной величины \tilde{r} представляет также исследование того случая, когда ее распределение вероятностей является *существенно унимодальным*. Понятие о таких распределениях было введено в работах [Virchenko, Mazmanishvili 1988; Virchenko, Mazmanishvili 1990; Virchenko, Mazmanishvili 1992]. Наконец, все сказанное здесь относительно свойств распределения вероятностей случайной величины \tilde{r} касается также исследования качественных свойств распределения вероятностей для случайной величины $\tilde{r}' = \min\{\tilde{r}_j; j = 1 \div N\}$.

Список литературы References

1. Брагинский Р.П., Гнеденко Б.В., Молчанов С.А., Пешков С.А., Рыбников К.А. 1983. Математические модели старения полимерных изоляционных материалов. ДАН СССР. 268;2. С. 281–284.
Braginskii R.P., Gnedenko B.V., Molchanov S.A., Peshkov S.A., Rybnikov K.A. 1983. Mathematical models of aging of polymer isolated materials. DAN SSSR. 268;2. P. 281–284.



2. Брагинский Р.П., Гнеденко Б.В., Малунов В.В., Моисеев Ю.В., Молчанов С.А. 1988. Особенности перколяционной модели старения полимеров. ДАН СССР. 303;3. С. 535–537.
Braginskii R.P., Gnedenko B.V., Malunov V.V., Moiseev Yu.V., Molchanov S.A. 1988. Peculiarities of percolation model of material aging. DAN SSSR. 303;3. P. 535–537.
3. Брагинский Р.П., Гнеденко Б.В., Зайцева Г.М., Молчанов С.А. 1988. Теоретическое и статистическое исследование дефектного множества в эмаль-лаковых электроизоляционных покрытиях. ДАН СССР. 303;2. С. 270–274.
Braginskii R.P., Gnedenko B.V., Zaitseva G.M., Molchanov S.A. 1988. Theoretical and statistical investigation of defect set in enamel-laque electrical isolated covers. DAN SSSR. 303;2. P. 270–274.
4. Гнеденко Б.В. 1941. Предельные теоремы для максимального члена вариационного ряда. ДАН УССР. 32;1. С. 101–106.
Gnedenko B.V. 1941. Limit theorems for maximal term of sample. DAN USSR. 32;1. P. 101–106.
5. Королюк В.С., Портенко Н.И., Скороход А.В., Турбин А.Ф. 1985. Справочник по теории вероятностей и математической статистике. М: Наука, 640 с.
Korolyuk V.S., Portenko N.I., Skorokhod A.V., Turbin A.F. 1985. Handbook of probability theory and mathematical statistics. Moscow: Nauka, 640 p.
6. Gnedenko B.V. 1943. Sur la distribution limite du terme maximum d'une serie aleatoire. Ann. Math. 44;3. P. 423–453.
7. Gumbel E. 1962. Statistics of Extremes. New York: Columbia University Press.
8. Lukacs E. 1970. Characteristic Functions, 2nd ed. London: Griffin.
9. Virchenko Yu.P., Mazmanishvili A.S. Unimodality of a class of distributions connected with complex Ornstein - Uhlenbeck process. Doklady Akademii nauk Ukr. SSR, ser. A. 1988. 1. P. 55–87.
10. Virchenko Yu.P., Mazmanishvili A.S. 1990. Essential unimodality of probability distributions of random quadratic functionals. Dokl. Akad. Nauk Ukrain. SSR. 12. P. 3-4.
11. Virchenko Yu.P., Mazmanishvili A.S. 1992. Essential unimodality of probabilistic distributions for random quadratic functionals. Cybernet. Systems Anal. 285;2. P. 312–315.

Ссылка для цитирования статьи
Reference to article

Вирченко Ю.П., Новосельцев А.Д. 2019. Унимодальность распределений вероятностей для максимумов выборки независимых Эрланговских случайных величин. Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика. 51 (3): 366–373. Doi: 10.18413/2075-4639-2019-51-3-366-373.

Virchenko Yu.P., Novoseltsev A.D. 2019. Unimodality of probability distributions for sample maxima of independent Erlang random variables. Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics. Physics. 51 (3): 366–373 (in Russian). Doi: 10.18413/2075-4639-2019-51-3-366-373.



УДК 511.512

DOI 10.18413/2075-4639-2019-51-3-374-386

**ЧИСЛО РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ С КВАДРАТИЧНЫМИ ФОРМАМИ
РАЗНЫХ ДИСКРИМИНАНТОВ****A NUMBER OF SOLUTIONS THE EQUATION WITH QUADRATIC
FORMS OF DIFFERENT DISCRIMINANTS****Л.Н. Куртова****L.N. Kurtova**

Белгородский государственный национальный исследовательский университет,
Россия, 308015, Белгород, ул. Победы, 85

Belgorod National Research University,
85 Pobeda St., Belgorod, 308015, Russia

E-mail: kurtova@bsu.edu.ru

Аннотация

В работе рассматривается бинарная аддитивная задача с квадратичными формами, которая является аналогом классической проблемы делителей Ингама. Получена асимптотическая формула для числа решений уравнения $Q_1(\bar{m}) - Q_2(\bar{k}) = h$, содержащего бинарные положительно определенные примитивные квадратичные формы, соответствующие классам идеалов двух мнимых квадратичных полей разных фиксированных дискриминантов. Число решений уравнения ищется с весами $\exp(-(Q_1(\bar{m}) + Q_2(\bar{k}))/n)$ при росте параметра n . Доказательство асимптотической формулы основано на круговом методе. За счет точных формул для двойных сумм Гаусса от числа, взаимно простого с дискриминантами мнимых квадратичных полей, удается применить оценку А. Вейля к полученной сумме Клоостермана.

Abstract

In this article, the problem with quadratic forms is considered. This problem is analog of the Ingam binary additive divisor problem. The asymptotical formula of the number of solution of diophantine equation $Q_1(\bar{m}) - Q_2(\bar{k}) = h$ is received. Binary positive defined primitive quadratic forms $Q_1(\bar{m})$ and $Q_2(\bar{k})$ corresponded to the ideal classes of two imaginary quadratic fields of different fixed discriminants. The number of solutions searched with weights $\exp(-(Q_1(\bar{m}) + Q_2(\bar{k}))/n)$ with the growth of the parameter n . Proof of the asymptotical formula based on circular method. Using the evident formula of Gauss sums of the number, which coprimes of discriminants of fields, this sum represented of Kloosterman's sum which estimate by A. Weil.

Ключевые слова: аддитивная задача, асимптотическая формула, число решений, двойная сумма Гаусса, сумма Клоостермана.

Key words: additive problem, asymptotic formula, number of solutions, double Gauss sum, Kloosterman sum.



Введение

В 1927 году А.Е. Ингам [Ingham, 1927] поставил и решил элементарным методом задачу получения асимптотической формулы для числа решений $J(n)$ уравнения:

$$x_1x_2 - x_3x_4 = 1, \quad x_1x_2 \leq n,$$

где $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{N}$.

Эта задача получила название неопределенной бинарной аддитивной проблемы делителей.

А.Е. Ингам доказал, что $J(n) = \frac{6}{\pi^2}n \ln^2 n + O(n \ln n)$.

Оценка остатка асимптотической формулы уточнялась многими авторами.

В 1931 году Т. Эстерман [Estermann, 1931], применив к задаче Ингама круговой метод, вывел для числа решений $J(n)$ уравнения асимптотическую формулу, остаточный член которой имеет степенное понижение по сравнению с главным. Им получен следующий результат: $J(n) = nP_2(\ln n) + R(n)$, где $P_2(x)$ – многочлен 2-ой степени, а $R(n) = O(n^{11/12} \cdot \ln^{17/3} n)$.

В 1979 году Д.И. Исмоилов [Исмоилов, 1979], дополнив элементарный метод Т. Эстермана оценками А. Вейля [Weil, 1948] суммы Kloostermana, получил следующую оценку остатка: $R(n) \ll n^{5/6+\varepsilon}$, где $\varepsilon > 0$ – сколь угодно малая постоянная.

В 1979 году другим методом ту же оценку для $R(n)$ получил Д.Р. Хиз-Браун [Heath-Brown, 1979].

В 2006 году Г.И. Архипов и В.Н. Чубариков [Архипов, Чубариков, 2006] вывели новую оценку остатка: $R(n) \ll n^{3/4} \ln^4 n$.

В 1980 году Н.В. Кузнецов [Кузнецов, 1980] представил сумму сумм Kloostermana через билинейные формы коэффициентов Фурье собственных функций оператора Лапласа и показал, что между суммами Kloostermana существует интерференция.

В 1982 году Ж.-М. Дезуйе и Х. Иванец [Deshouillers, Iwaniec, 1982], используя формулу Н.В. Кузнецова, доказали, что $R(n) \ll n^{2/3+\varepsilon}$.

Другое направление исследований, касающееся данной тематики, связано с рассмотрением различных аналогов проблемы делителей Ингама. Одним из таких аналогов являются бинарные аддитивные задачи с квадратичными формами.

В работах автора [2007], [2012], [2014] решены задачи получения асимптотических формул для числа решений уравнений $Q_1(\bar{m}) - Q_2(\bar{k}) = 1$, $Q_1(\bar{m}) - Q_2(\bar{k}) = h$, содержащих бинарные положительно определенные примитивные квадратичные формы, соответствующие классам идеалов мнимого квадратичного поля $F = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$, где d – отрицательное бесквадратное число.

Рассмотрим задачу получения асимптотической формулы для числа решений уравнения $Q_1(\bar{m}) - Q_2(\bar{k}) = h$ с весом $\exp(-(Q_1(\bar{m}) + Q_2(\bar{k}))/n)$, когда квадратичные формы соответствуют классам идеалов двух мнимых квадратичных полей разных дискриминантов.

Пусть d_1, d_2 – отрицательные бесквадратные числа, $F_1 = \mathbb{Q}(\sqrt{d_1})$, $F_2 = \mathbb{Q}(\sqrt{d_2})$ – мнимые квадратичные поля, $\delta_{F_1}, \delta_{F_2}$ – дискриминанты полей F_1 и F_2 ; $Q_i(\bar{m}) = \frac{1}{2}\bar{m}^t A_i \bar{m}$ – бинарные положительно определенные примитивные квадратичные формы с матрицами A_i , $\det A_i = -\delta_{F_i}$, $i = 1, 2$.

Пусть

$$I(n, h) = \sum_{Q_1(\bar{m}) - Q_2(\bar{k}) = h} e^{-(Q_1(\bar{m}) + Q_2(\bar{k}))/n}.$$



Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема. Пусть ε – произвольное положительное число, $\delta_{F_1}, \delta_{F_2}$ – дискриминанты полей F_1 и F_2 , $n \in \mathbb{N}$, $h \in \mathbb{N}$.

Тогда при $n \rightarrow \infty$ и $h \ll n^\varepsilon$ справедлива асимптотическая формула:

$$I(n, h) = \frac{2\pi^2 n}{\sqrt{\delta_{F_1} \delta_{F_2}}} \sum_{q=1}^{+\infty} q^{-4} \sum_{\substack{l=1, \\ (l, q)=1}}^q e^{-2\pi i \frac{hl}{q}} G_1(q, l, \bar{0}) G_2(q, -l, \bar{0}) + O(n^{3/4+\varepsilon}).$$

$G_i(q, l, \bar{0}) = \sum_{\bar{m} \pmod{q}} \exp(2\pi i l Q_i(\bar{m})/q)$ ($i = 1, 2$) – двойные суммы Гаусса. Сумма особого ряда асимптотической формулы положительна.

2. Вспомогательные леммы

Лемма 1. (Функциональное уравнение для двумерного тета-ряда.) Пусть $Im\tau > 0$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^2$, $Q(\bar{n})$ – положительно определенная квадратичная форма дискриминанта δ_F с матрицей A ,

$$\theta(\tau, \bar{x}) = \sum_{\bar{n} \in \mathbb{Z}^2} \exp(2\pi i \tau Q(\bar{n} + \bar{x})).$$

Тогда

$$\theta(\tau, \bar{x}) = \frac{i}{\tau \sqrt{\delta_F}} \sum_{\bar{n} \in \mathbb{Z}^2} \exp\left(-\frac{\pi i}{\tau} \bar{n}^t A^{-1} \bar{n} + 2\pi i \bar{n}^t \bar{x}\right).$$

Доказательство см. в [Ogg, 1969, глава VI].

Лемма 2. Пусть h – натуральное число, такое, что $h \ll n^\varepsilon$, $q, q', q'' \leq N$. Тогда справедливо равенство

$$\int_{-[q(q+q'')]^{-1}}^{[q(q+q')]^{-1}} \frac{e^{-2\pi i h x}}{n^{-2} + 4\pi^2 x^2} dx = \frac{n}{2} + O(qN).$$

Доказательство следует из [Лаврентьев, Шабат, 1958, глава VI] и условия $h \ll n^\varepsilon$.

Лемма 3. (Оценка суммы Kloostermana.) Пусть $ll^* \equiv 1 \pmod{q}$, $K(q, u, v) = \sum_{\substack{l=1, \\ (l, q)=1}}^q \exp(2\pi i (ul + vl^*)/q)$ – сумма Kloostermana. Справедлива оценка

$$K(q, u, v) \ll \tau(q) q^{1/2} (u, v, q)^{1/2}.$$

Доказательство см., например, в работах [Estermann, 1961], [Малышев, 1962].

Лемма 4. (Равенства и оценки для произведения двойных сумм Гаусса.) Пусть $D_1 = -\delta_{F_1}$, $D_2 = -\delta_{F_2}$. Пусть $Q_1(\bar{m})$, $Q_2(\bar{k})$ – бинарные положительно определенные примитивные квадратичные формы с дискриминантами D_1, D_2 ; $(l, q) = 1$. Справедливы следующие утверждения:

1. Пусть $(q, D_1) = 1$ и $(q, D_2) = 1$, $ll^* \equiv 1 \pmod{q}$, $D_1 D_1^* \equiv 1 \pmod{q}$, $D_2 D_2^* \equiv 1 \pmod{q}$, $q = 2^{\alpha_1} \dots p_s^{\alpha_s}$. Тогда

$$G_1(q, l, \bar{m}) G_2(q, -l, \bar{k}) = C(q, \delta_{F_1}, \delta_{F_2}) q^2 \exp\left(-2\pi i \frac{l^*}{q} (D_1^* Q_1'(\bar{m}) - D_2^* Q_2'(\bar{k}))\right),$$



где $C(q, \delta_{F_1}, \delta_{F_2}) = (-1)^{\frac{(2-\delta_{F_1}-\delta_{F_2})\alpha_1}{4}} \left(\frac{\delta_{F_1}\delta_{F_2}}{p_2^{\alpha_2} \dots p_s^{\alpha_s}} \right)$.

2. При любых q и D_1, D_2 справедливо неравенство:

$$G_1(q, l, \bar{m})G_2(q, -l, \bar{k}) \ll q^2.$$

□ 1. Пусть $(q, D_1) = 1$. Введем обозначения: $r_j = q/p_j^{\alpha_j}, l^* \equiv 1 \pmod{q}, r_j r_j^* \equiv 1 \pmod{p_j^{\alpha_j}}, D_1 D_{1j}^* \equiv 1 \pmod{p_j^{\alpha_j}}, (j = 1 \dots s)$. Тогда $G_1(q, l, \bar{m}) = \prod_{j=1}^s G_1(p_j^{\alpha_j}, l r_j, \bar{m})$.

Если $2|q$, то $2 \nmid D_1$, следовательно, $\delta_{F_1} \equiv 1 \pmod{4}$. Если $2|D_1$, то $\alpha_1 = 0$.

Для $G_1(p_j^{\alpha_j}, l r_j, \bar{m})$ известны точные формулы (см, например, [Гриценко, 2003], [Пачев, Дохов, 2013]). Можем утверждать, что

$$G_1(q, l, \bar{m}) = q \exp \left(-2\pi i \frac{l^*}{q} Q_1'(\bar{m})(r_1 r_1^* D_{11}^* + \dots + r_s r_s^* D_{1s}^*) \right) (-1)^{\frac{(1-\delta_{F_1})\alpha_1}{4}} \left(\frac{\delta_{F_1}}{p_2^{\alpha_2} \dots p_s^{\alpha_s}} \right).$$

Докажем сравнение

$$r_1 r_1^* D_{11}^* + \dots + r_s r_s^* D_{1s}^* \equiv D_1^* \pmod{q}.$$

Так как $(q, D_1) = 1$ и $D_1 D_{1j}^* \equiv 1 \pmod{p_j^{\alpha_j}}, (j = 1 \dots s), D_1 D_1^* \equiv 1 \pmod{q}$, то

$$D_1 (r_1 r_1^* D_{11}^* + \dots + r_s r_s^* D_{1s}^*) \equiv D_1 D_1^* \equiv 1 \pmod{q},$$

и достаточно доказать сравнение $r_1 r_1^* + \dots + r_s r_s^* \equiv 1 \pmod{q}$, которое эквивалентно системе сравнений

$$\begin{cases} r_1 r_1^* + \dots + r_s r_s^* \equiv r_1 r_1^* \equiv 1 \pmod{2^{\alpha_1}}, \\ \dots \\ r_1 r_1^* + \dots + r_s r_s^* \equiv r_s r_s^* \equiv 1 \pmod{p_s^{\alpha_s}}. \end{cases}$$

Тогда

$$G_1(q, l, \bar{m}) = (-1)^{\frac{(1-\delta_{F_1})\alpha_1}{4}} \left(\frac{\delta_{F_1}}{p_2^{\alpha_2} \dots p_s^{\alpha_s}} \right) q \exp \left(-2\pi i \frac{l^*}{q} D_1^* Q_1'(\bar{m}) \right).$$

Аналогичное равенство справедливо и для $G_2(q, -l, \bar{k})$. Запишем произведение сумм Гаусса:

$$G_1(q, l, \bar{m})G_2(q, -l, \bar{k}) = C(q, \delta_{F_1}, \delta_{F_2})q^2 \exp \left(-2\pi i \frac{l^*}{q} (D_1^* Q_1'(\bar{m}) - D_2^* Q_2'(\bar{k})) \right),$$

где $C(q, \delta_{F_1}, \delta_{F_2}) = (-1)^{\frac{(2-\delta_{F_1}-\delta_{F_2})\alpha_1}{4}} \left(\frac{\delta_{F_1}\delta_{F_2}}{p_2^{\alpha_2} \dots p_s^{\alpha_s}} \right)$.

2. В случае, когда $(q, D_1) = 1$ и $(q, D_2) = 1$, неравенство следует из полученной выше формулы для произведений сумм Гаусса. В остальных случаях требуемая оценка следует из точных формул для сумм Гаусса от степени простого числа, полученных С.А. Гриценко [2003], [2012]. ■

Лемма 5. Пусть $V(q, h, \bar{m}, \bar{k}) = \sum_{\substack{l=1, \\ (l,q)=1}}^q e^{-2\pi i h l / q} G_1(q, l, \bar{m})G_2(q, -l, \bar{k})$. Пусть $q = q_1 q_2$,

$(q_1, q_2) = 1, (q_1, D_1) = 1, (q_1, D_2) = 1; q_2$ – либо 1, либо натуральное число, все простые



делители которого делят D_1 или D_2 . Тогда справедливы оценки:

$$V(q_1 q_2, h, \bar{0}, \bar{0}) \ll q_1^2 \sum_{s|(q_1, h)} s \mu\left(\frac{q_1}{s}\right) q_2^3,$$

$$V(q_1 q_2, h, \bar{m}, \bar{k}) \ll q_1^{5/2+\varepsilon} (h, q_1)^{1/2} q_2^3.$$

□ Так как сумма Гаусса является вполне мультипликативной функцией, т. е.

$$G_1(q_1 q_2, l, \bar{m}) = G_1(q_1, l_1 q_2^2, \bar{m}) G_1(q_2, l_2 q_1^2, \bar{m}),$$

то и функция $V(q, h, \bar{m}, \bar{k})$ мультипликативна. Тогда

$$V(q_1 q_2, h, \bar{m}, \bar{k}) = V_1(q_1, h, q_2, \bar{m}, \bar{k}) V_2(q_2, h, q_1, \bar{m}, \bar{k}).$$

Оценим каждую из функций $V_1(q_1, h, q_2, \bar{m}, \bar{k})$ и $V_2(q_2, h, q_1, \bar{m}, \bar{k})$. Воспользуемся равенством и оценкой из леммы 4.

Так как $(q_1, D_1) = 1$ и $(q_1, D_2) = 1$, то из равенства для произведений сумм Гаусса имеем:

$$V_1(q_1, h, q_2, \bar{m}, \bar{k}) \ll q_1^2 \sum_{\substack{l_1=1, \\ (l_1, q_1)=1}}^{q_1} \exp\left(-2\pi i h \frac{l_1}{q_1} - 2\pi i \frac{l_1^* (q_2^2)^*}{q_1} (D_1^* Q_1'(\bar{m}) - D_2^* Q_2'(\bar{k}))\right).$$

К полученной сумме Kloostermana $K(q_1, -h, -(q_2^2)^* (D_1^* Q_1'(\bar{m}) - D_2^* Q_2'(\bar{k})))$ применим оценку из леммы 3. При любом q_1 получим: $V_1(q_1, h, q_2, \bar{m}, \bar{k}) \ll q_1^{5/2+\varepsilon} (h, q_1)^{1/2}$.

В случае, когда $\bar{m} = \bar{0}$, $\bar{k} = \bar{0}$, можем улучшить данную оценку. Имеем:

$$V_1(q_1, h, q_2, \bar{0}, \bar{0}) \ll q_1^2 \left| \sum_{\substack{l_1=1, \\ (l_1, q_1)=1}}^{q_1} e^{-2\pi i h l_1 / q_1} \right| \ll q_1^2 \sum_{s|(q_1, h)} s \mu\left(\frac{q_1}{s}\right).$$

Оценим тривиально $V_2(q_2, h, q_1, \bar{m}, \bar{k})$. Используем неравенство из леммы 4. Тогда

$$V_2(q_2, h, q_1, \bar{m}, \bar{k}) \ll q_2^2 \left| \sum_{\substack{l_2=1, \\ (l_2, q_2)=1}}^{q_2} e^{-2\pi i h l_2 / q_2} \right| \ll q_2^3. \quad \blacksquare$$

3. Доказательство теоремы

1. Запишем $I(n, h)$ в виде интеграла:

$$I(n, h) = \int_0^1 S_1(\alpha) S_2(\alpha) e^{-2\pi i \alpha h} d\alpha,$$



где

$$S_1(\alpha) = \sum_{\bar{m} \in \mathbb{Z}^2} e^{(-1/n+2\pi i\alpha)Q_1(\bar{m})}, \quad S_2(\alpha) = \sum_{\bar{k} \in \mathbb{Z}^2} e^{(-1/n-2\pi i\alpha)Q_2(\bar{k})}.$$

Пусть $N = [\sqrt{n}]$, $\xi_{0,1} = [-\frac{1}{N}, \frac{1}{N})$. Разобьем промежутки $[-\frac{1}{N}, 1 - \frac{1}{N})$ числами ряда Фарея, отвечающего параметру N (см. [Виноградов, 2004]). Пусть $\frac{l''}{q''} < \frac{l}{q} < \frac{l'}{q'}$ – соседние дроби Фарея, $1 \leq l, q \leq N$, $q' \leq N$, $q'' \leq N$.

Определим промежутки $\xi_{l,q} = [l/q - 1/q(q + q''), l/q + 1/q(q + q')]$. По построению имеем: $[-\frac{1}{N}, 1 - \frac{1}{N}) = \bigcup_{q=1}^N \bigcup_{\substack{l=0, \\ (l,q)=1}}^{q-1} \xi_{l,q}$, причем $\xi_{l,q} \cap \xi_{l',q'} = \emptyset$ при $(l, q) \neq (l', q')$. Тогда

$$\begin{aligned} I(n, h) &= \sum_{q \leq N} \sum_{\substack{l=1, \\ (l,q)=1}}^q \int_{\xi_{l,q}} S_1(\alpha) S_2(\alpha) e^{-2\pi i h \alpha} d\alpha = \\ &= \sum_{q \leq N} \sum_{\substack{l=1, \\ (l,q)=1}}^q e^{-2\pi i h l/q} \int_{-[q(q+q'')]^{-1}}^{[q(q+q')]^{-1}} S_1(l/q + x) S_2(l/q + x) e^{-2\pi i h x} dx. \end{aligned}$$

2. Преобразуем суммы $S_1(l/q + x)$ и $S_2(l/q + x)$.

$$S_1(l/q + x) = \sum_{\bar{m} \in \mathbb{Z}^2} \exp((-n^{-1} + 2\pi i l/q + 2\pi i x)Q_1(\bar{m})).$$

Разобьем сумму по \bar{m} по арифметическим прогрессиям с разностью q :

$$\begin{aligned} S_1(l/q + x) &= \sum_{\substack{\bar{s} \\ (\bar{s}, q)}} e^{2\pi i l/q Q_1(\bar{s})} \sum_{\substack{\bar{m} \in \mathbb{Z}^2, \\ \bar{m} \equiv \bar{s} \pmod{q}}} e^{(-n^{-1} + 2\pi i x)Q_1(\bar{m})} = \\ &= \sum_{\substack{\bar{s} \\ (\bar{s}, q)}} e^{2\pi i a l/q Q_1(\bar{s})} \theta\left(x + \frac{i}{2\pi n}, \bar{s}/q\right), \end{aligned}$$

где $\theta\left(x + \frac{i}{2\pi n}, \bar{s}/q\right)$ – двумерный тета-ряд.

Используем функциональное уравнение для тета-ряда из леммы 1. Будем иметь:

$$\theta\left(x + \frac{i}{2\pi n}, \frac{\bar{s}}{q}\right) = \frac{2\pi}{q^2 \sqrt{D_1}(n^{-1} - 2\pi i x)} \sum_{\bar{m} \in \mathbb{Z}^2} \exp\left(-\frac{2\pi^2 Q'_1(\bar{m})}{D_1 q^2 (n^{-1} - 2\pi i x)} + 2\pi i \frac{\bar{m}^t \bar{s}}{q}\right),$$

где $Q'_1(\bar{m}) = \frac{1}{2} \bar{m}^t D_1 A_1^{-1} \bar{m}$ – квадратичная форма с матрицей $D_1 A_1^{-1}$.

Тогда для $S_1(l/q + x)$ справедливо равенство

$$S_1\left(\frac{l}{q} + x\right) = \frac{2\pi}{q^2 \sqrt{D_1}(n^{-1} - 2\pi i x)} \sum_{\bar{m} \in \mathbb{Z}^2} \exp\left(-\frac{2\pi^2 Q'_1(\bar{m})}{D_1 q^2 (n^{-1} - 2\pi i x)}\right) G_1(q, l, \bar{m}).$$

Выделим слагаемое, которое отвечает нулевому вектору \bar{m} . Тогда $S_1(l/q + x)$ можно представить в виде суммы: $S_1(l/q + x) = \varphi_1 + \Phi_1$, где

$$\varphi_1 = \frac{2\pi}{q^2 \sqrt{D_1}(n^{-1} - 2\pi i x)} G_1(q, l, \bar{0}),$$



$$\Phi_1 = \frac{2\pi}{q^2\sqrt{D_1}(n^{-1} - 2\pi ix)} \sum_{\substack{\bar{m} \in \mathbb{Z}^2, \\ \bar{m} \neq \bar{0}}} \exp\left(-\frac{2\pi^2 Q'_1(\bar{m})}{D_1 q^2(n^{-1} - 2\pi ix)}\right) G_1(q, l, \bar{m}).$$

Аналогично получаем представление в виде суммы двух функций для $S_2(l/q + x) = \varphi_2 + \Phi_2$, где

$$\varphi_2 = \frac{2\pi}{q^2\sqrt{D_2}(n^{-1} + 2\pi ix)} G_2(q, -l, \bar{0}),$$

$$\Phi_2 = \frac{2\pi}{q^2\sqrt{D_2}(n^{-1} + 2\pi ix)} \sum_{\substack{\bar{k} \in \mathbb{Z}^2, \\ \bar{k} \neq \bar{0}}} \exp\left(-\frac{2\pi^2 Q'_2(\bar{k})}{D_2 q^2(n^{-1} + 2\pi ibx)}\right) G_2(q, -l, \bar{k}).$$

3. Подставляем полученные для функций $S_1(l/q + x)$ и $S_2(l/q + x)$ представления в виде суммы двух функций в равенство для $I(n, h)$ из пункта 1. Имеем

$$I(n, h) = I_1 + I_2 + I_3 + I_4,$$

где

$$I_1 = \frac{4\pi^2}{\sqrt{D_1 D_2}} \sum_{q \leq N} q^{-4} \sum_{\substack{l=1, \\ (l,q)=1}}^q e^{-2\pi i \frac{hl}{q}} G_1(q, l, \bar{0}) G_2(q, -l, \bar{0}) \int_{-[q(q+q'')]^{-1}}^{[q(q+q')]^{-1}} \frac{e^{-2\pi i h x} dx}{n^{-2} + 4\pi^2 x^2},$$

$$I_2 = \sum_{q \leq N} \sum_{\substack{l=1, \\ (l,q)=1}}^q e^{-2\pi i hl/q} \int_{-[q(q+q'')]^{-1}}^{[q(q+q')]^{-1}} \varphi_1 \Phi_2 e^{-2\pi i h x} dx,$$

$$I_3 = \sum_{q \leq N} \sum_{\substack{l=1, \\ (l,q)=1}}^q e^{-2\pi i hl/q} \int_{-[q(q+q'')]^{-1}}^{[q(q+q')]^{-1}} \varphi_2 \Phi_1 e^{-2\pi i h x} dx,$$

$$I_4 = \sum_{q \leq N} \sum_{\substack{l=1, \\ (l,q)=1}}^q e^{-2\pi i hl/q} \int_{-[q(q+q'')]^{-1}}^{[q(q+q')]^{-1}} \Phi_1 \Phi_2 e^{-2\pi i h x} dx.$$

Интеграл I_1 вычислим асимптотически, а интегралы I_2, I_3, I_4 оценим сверху.

4. Начнем с I_1 . Согласно равенству из леммы 2, получаем:

$$I_1 = \frac{2\pi^2 n}{\sqrt{D_1 D_2}} \sum_{q \leq N} q^{-4} \sum_{\substack{l=1, \\ (l,q)=1}}^q e^{-2\pi i hl/q} G_1(q, l, \bar{0}) G_2(q, -l, \bar{0}) + O(I_{1,1}),$$

где

$$I_{1,1} = N \sum_{q \leq N} q^{-3} \sum_{\substack{l=1, \\ (l,q)=1}}^q e^{-2\pi i hl/q} G_1(q, l, \bar{0}) G_2(q, -l, \bar{0}) = N \sum_{q \leq N} q^{-3} V(q, h, \bar{0}, \bar{0}).$$



Используя оценку для функции $V(q, h, \bar{0}, \bar{0})$ из леммы 5, будем иметь

$$I_{1,1} \ll N \sum_{q_1 q_2 \leq N} q_1^{-3} q_2^{-3} |V(q_1 q_2, h, \bar{0}, \bar{0})| \ll N \sum'_{q_2 \leq N} \sum_{q_1 \leq N/q_2} q_1^{-1} \sum_{s|(q_1, h)} s \mu\left(\frac{q_1}{s}\right) \ll \ll N \sum'_{q_2 \leq N} \sum_{s|h} \sum_{q \leq \frac{N}{q_2 s}} \mu(q) q^{-1} \ll n^{1/2+\varepsilon},$$

где ' в сумме по q_2 означает, что суммирование идет по всем не взаимно простым с D_1 или D_2 числам. Можно показать, что их количество не больше, чем n^ε . Кроме того, учли, что $h \ll n^\varepsilon$.

Оценим сумму

$$R = \frac{n}{\sqrt{D_1 D_2}} \sum_{q > N} q^{-4} \sum_{\substack{l=1, \\ (l,q)=1}}^q e^{-2\pi i h l / q} G_1(q, l, \bar{0}) G_2(q, -l, \bar{0}) = \frac{n}{\sqrt{D_1 D_2}} \sum_{q > N} q^{-4} V(q, h, \bar{0}, \bar{0}).$$

Снова используем лемму 5. Получаем, что

$$R \ll n \sum_{q_1 q_2 > N} q_1^{-4} q_2^{-4} |V(q_1 q_2, h, \bar{0}, \bar{0})| \ll n \sum'_{q_2 \leq N} q_2^{-1} \sum_{q_1 > N/q_2} q_1^{-2} \sum_{s|(q_1, h)} s \mu\left(\frac{q_1}{s}\right) \ll \ll n \sum'_{q_2 \leq N} q_2^{-1} \sum_{s|h} s^{-1} \sum_{q > \frac{N}{q_2 s}} \mu(q) q^{-2} \ll n^{1/2+\varepsilon}.$$

Таким образом,

$$I_1 = \frac{4\pi^2 n}{\sqrt{D_1 D_2}} \sum_{q=1}^{+\infty} q^{-4} \sum_{\substack{l=1, \\ (l,q)=1}}^q e^{-2\pi i h l / q} G_1(q, l, \bar{0}) G_2(q, -l, \bar{0}) + O(n^{1/2+\varepsilon}).$$

5. Оценка I_2, I_3, I_4 проводится одинаково. Приведем полное доказательство для I_4 :

$$I_4 = \sum_{q \leq N} \sum_{\substack{l=1, \\ (l,q)=1}}^q e^{-2\pi i h l / q} \int_{-[q(q+q'')]^{-1}}^{[q(q+q')]^{-1}} \Phi_1 \Phi_2 e^{-2\pi i h x} dx.$$

Вместо Φ_1, Φ_2 подставим их значения, полученные в пункте 2. В результате имеем

$$I_4 = \frac{4\pi^2}{\sqrt{D_1 D_2}} \sum_{q \leq N} q^{-4} \int_{-[q(q+q'')]^{-1}}^{[q(q+q')]^{-1}} \frac{e^{2\pi i h x} dx}{n^{-2} + 4\pi^2 x^2} \times \times \sum_{\substack{\bar{m} \in \mathbf{Z}^2 \\ \bar{m} \neq \bar{0}}} \exp\left(-\frac{2\pi^2 Q'_1(\bar{m})}{q^2 D_1 (n^{-1} - 2\pi i x)}\right) \sum_{\substack{\bar{k} \in \mathbf{Z}^2 \\ \bar{k} \neq \bar{0}}} \exp\left(-\frac{2\pi^2 Q'_2(\bar{k})}{q^2 D_2 (n^{-1} + 2\pi i x)}\right) V(q, h, \bar{m}, \bar{k}).$$



Пусть θ – сколь угодно малое положительное число. Разобьем интеграл на сумму интегралов:

$$\int_{-[q(q+q'')]^{-1}}^{[q(q+q')]^{-1}} = \int_{-[q(q+q'')]^{-1}}^{-[qn^{1/2+\theta}]^{-1}} + \int_{-[qn^{1/2+\theta}]^{-1}}^{[qn^{1/2+\theta}]^{-1}} + \int_{[qn^{1/2+\theta}]^{-1}}^{[q(q+q')]^{-1}}.$$

Соответственно этому разбиению получаем $I_4 = I_{4,1} + I_{4,2} + I_{4,3}$.

6. Оценим $I_{4,2}$. Используя оценку $V(q_1q_2, h, \bar{m}, \bar{k})$ из леммы 5, будем иметь:

$$I_{4,2} \ll \sum_{\substack{q \leq N, \\ q = q_1q_2}} q_1^{-3/2+\varepsilon} (h, q_1)^{1/2} q_2^{-1} \int_0^{[qn^{1/2+\theta}]^{-1}} \frac{dx}{n^{-2} + 4\pi^2 x^2} \times \\ \times \sum_{\substack{\bar{m} \in \mathbf{Z}^2, \\ \bar{m} \neq 0}} \exp\left(-\frac{2\pi^2 Q'_1(\bar{m})}{q^2 D_1(n^{-1} + 4\pi^2 x^2 n)}\right) \sum_{\substack{\bar{k} \in \mathbf{Z}^2, \\ \bar{k} \neq 0}} \exp\left(-\frac{2\pi^2 Q'_2(\bar{k})}{q^2 D_2(n^{-1} + 4\pi^2 x^2 n)}\right).$$

Проведем разбиение суммы по q :

$$I_{4,2} \ll \sum_{q \leq n^{1/2-\theta}} \int_0^{[qn^{1/2+\theta}]^{-1}} + \sum_{n^{1/2-\theta} < q \leq N} \int_0^{[qn^{1/2+\theta}]^{-1}} = \sum_{41} + \sum_{42}.$$

Рассмотрим сумму \sum_{41} . Так как $q \leq n^{1/2-\theta}$ и $0 \leq x \leq [qn^{1/2+\theta}]^{-1}$, то

$$\exp\left(-\frac{2\pi^2 Q'_i(\bar{m})}{q^2 D_i(n^{-1} + 4\pi^2 x^2 n)}\right) \ll \exp(-cn^{2\theta}),$$

где c – постоянная, $i = 1, 2$. Тогда

$$\sum_{\substack{\bar{m} \in \mathbf{Z}^2, \\ \bar{m} \neq 0}} \exp\left(-\frac{2\pi^2 Q'_1(\bar{m})}{q^2 D_1(n^{-1} + 4\pi^2 x^2 n)}\right) \sum_{\substack{\bar{k} \in \mathbf{Z}^2, \\ \bar{k} \neq 0}} \exp\left(-\frac{2\pi^2 Q'_2(\bar{k})}{q^2 D_2(n^{-1} + 4\pi^2 x^2 n)}\right) \ll \exp(-cn^{2\theta}).$$

Учтем также, что при тех же ограничениях на q :

$$\int_0^{[qn^{1/2+\theta}]^{-1}} \frac{dx}{n^{-2} + 4\pi^2 x^2} \ll \int_0^{2\pi[qn^{1/2+\theta}]^{-1}} \frac{dt}{n^{-2} + t^2} \ll n^{3/2-\theta} q^{-1}.$$

После проведенных рассуждений получаем оценку:

$$\sum_{41} \ll n^{3/2-\theta} \exp(-cn^{2\theta}) \sum_{q_1q_2 \leq n^{1/2-\theta}} q_1^{-5/2+\varepsilon} (h, q_1)^{1/2} q_2^{-2} \ll n^{3/4+\varepsilon}.$$

Перейдем к оценке \sum_{42} . Так как $q \leq N$ и $0 \leq x \leq [qn^{1/2+\theta}]^{-1}$, то

$$\exp\left(-\frac{2\pi^2 Q'_i(\bar{m})}{q^2 D_i(n^{-1} + 4\pi^2 x^2 n)}\right) \ll \exp(-cQ'_i(\bar{m})),$$



где c – постоянная, $i = 1, 2$. Тогда

$$\sum_{\substack{\bar{m} \in \mathbb{Z}^2 \\ \bar{m} \neq \bar{0}}} \exp\left(-\frac{2\pi^2 Q'_1(\bar{m})}{q^2 D_1(n^{-1} + 4\pi^2 x^2 n)}\right) \sum_{\substack{\bar{k} \in \mathbb{Z}^2 \\ \bar{k} \neq \bar{0}}} \exp\left(-\frac{2\pi^2 Q'_2(\bar{k})}{q^2 D_2(n^{-1} + 4\pi^2 x^2 n)}\right) \ll 1.$$

Интеграл оценим тривиально:

$$\int_0^{[qn^{1/2+\theta}]^{-1}} \frac{dx}{n^{-2} + 4\pi^2 x^2} \ll n \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} \ll n.$$

В итоге получаем следующую оценку для суммы \sum_{42} :

$$\begin{aligned} \sum_{42} &\ll n^{1+2\epsilon} \sum_{n^{1/2-\theta} < q_1 q_2 \leq N} q_1^{-3/2} (h, q_1)^{1/2} q_2^{-1} \ll \\ &\ll n^{1+\epsilon} \sum'_{q_2 \leq N} q_2^{-1} \sum_{s|h} s^{-1} \sum_{q_1 > \frac{n^{1/2-\theta}}{q_2 s}} q_1^{-3/2} \ll n^{3/4+\epsilon}, \end{aligned}$$

где $'$ в сумме по q_2 означает, что суммирование идет по всем не взаимно простым с D_1 или D_2 числам. Таким образом, доказана оценка: $I_{4,2} = O(n^{3/4+\epsilon})$.

7. Интегралы $I_{4,1}$ и $I_{4,3}$ оцениваются одинаково. Все рассуждения проведем для $I_{4,3}$. Используем оценку $V(q_1 q_2, h, \bar{m}, \bar{k}) \ll q_1^{5/2+\epsilon} (h, q_1)^{1/2} q_2^3$, полученную в лемме 5. Так как $q \leq N$ и $[qn^{1/2+\theta}]^{-1} \leq x \leq [q(q+q')]^{-1}$, то

$$\left| \sum_{\substack{\bar{m} \in \mathbb{Z}^2 \\ \bar{m} \neq \bar{0}}} \exp\left(-\frac{2\pi^2 Q'_1(\bar{m})}{q^2 D_1(n^{-1} - 2\pi i x)}\right) \right| = O(1), \quad \left| \sum_{\substack{\bar{k} \in \mathbb{Z}^2 \\ \bar{k} \neq \bar{0}}} \exp\left(-\frac{2\pi^2 Q'_2(\bar{k})}{q^2 D_2(n^{-1} + 2\pi i x)}\right) \right| = O(1).$$

Кроме того, при тех же ограничениях на q можем оценить интеграл:

$$\int_{[qn^{1/2+\theta}]^{-1}}^{[q(q+q')]^{-1}} \frac{e^{-2\pi i h x} dx}{n^{-2} + 4\pi^2 x^2} \ll \int_{[qn^{1/2+\theta}]^{-1}}^{+\infty} \frac{dx}{x^2} \ll qn^{1/2+\theta}.$$

После проведенных рассуждений получаем, что

$$I_{4,3} \ll n^{1/2+\theta+\epsilon} \sum_{q_1 q_2 \leq N} q_1^{-1/2} (h, q_1)^{1/2} \ll n^{1/2+\theta+\epsilon} \sum'_{q_2 \leq N} \sum_{s|h} \sum_{q_1 \leq N/q_2} q_1^{-1/2} \ll n^{3/4+\epsilon}.$$

Объединяя оценки, получаем $I_4 = O(n^{3/4+\epsilon})$, и доказательство теоремы завершено.

4. Заключение

Получена асимптотическая формула для числа решений уравнения $Q_1(\bar{m}) - Q_2(\bar{k}) = h$, содержащего бинарные положительно определенные примитивные квадратичные формы, соответствующие классам идеалов двух мнимых квадратичных полей разных фиксированных дискриминантов. Число решений уравнения ищется с весами $\exp(-(Q_1(\bar{m}) + Q_2(\bar{k}))/n)$ при росте параметра n . Данная задача является продолжением работ, касающихся бинарных аддитивных задач с квадратичными формами.



Список литературы References

1. Архипов Г.И., Чубариков В.Н. 2006. Об аддитивной проблеме делителей Ингама. Вестник Московского университета. Сер. 1. Математика. Механика. № 5: 32–35.
Arhipov G.I., Chubarikov V.N. 2006. Ob additivnoj probleme delitelej Ingama. Vestnik Moskovskogo universiteta. Ser. 1. Matematika. Mehanika. № 5: 32–35.
2. Виноградов И.М. 2004. Основы теории чисел. СПб-М., Лань, 167 с.
Vinogradov I.M. 2004. Osnovy teorii chisel. SPb-M., Lan', 167 p.
3. Гриценко С.А. 2003. О функциональном уравнении одного арифметического ряда Дирихле. Чебышевский сборник. Т. 4. Вып. 2: 53–67.
Gritsenko S.A. 2003. O funkcional'nom uravnenii odnogo arifmeticheskogo rjada Dirihle. Chebyshevskij sbornik. T. 4. Vyp. 2: 53–67.
4. Гриценко С.А. 2012. Об одной аддитивной задаче и ее приложении к проблеме распределения нулей линейных комбинаций L-функций Гекке на критической прямой. Тр. МИАН. 276: 96–108.
Gritsenko S.A. 2012. On an additive problem and its application to the problem of distribution of zeros of linear combinations of Hecke L-functions on the critical line. Proc. Steklov Inst. Math. 276: 90–102. (in Russian).
5. Исмоилов Д.И. 1979. Об асимптотике представления чисел как разности двух произведений. Докл. АН Тадж. ССР. Т. 22, № 2: 75–79.
Ismoilov D.I. 1979. Ob asimptotike predstavlenija chisel kak raznosti dvuh proizvedenij. Dokl. AN Tadz. SSR. T. 22, № 2: 75–79.
6. Кузнецов Н.В. 1980. Гипотеза Петерсона для параболических форм веса нуль и гипотеза Линника. Суммы сумм Kloostermana. Матем. сб. Т. 111(153). № 3: 334–383.
Kuznetsov N.V. 1981. Petersson's conjecture for cusp forms of weight zero and Linnik's conjecture. Sums of Kloosterman sums. Math. USSR-Sb. 39:3: 299–342. (in Russian).
7. Куртова Л.Н. 2007. Об одной бинарной аддитивной задаче с квадратичными формами. Вестник Самарского государственного университета. Естественнонаучная серия. Математика. № 7(57): 107–121.
Kurtova L.N. 2007. On a binary additive problem with quadratic forms. Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta. Estestvennonauchnaja serija. Matematika. № 7(57): 107–121. (in Russian).
8. Куртова Л.Н. 2013. О числе решений одного определенного уравнения с квадратичными формами. Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика Физика: Научный рецензируемый журнал. Белгород: Изд-во "БелГУ". № 19 (162). Вып. 32: 67–77.
Kurtova L.N. 2013. About the number of solutions of one definite equation with quadratic forms. Nauchnye vedomosti Belgorodskogo gosudarstvennogo universiteta. Serija: Matematika Fizika: Nauchnyj recenziruemyj zhurnal. Belgorod: Izd-vo "BelGU". № 19 (162). Vyp. 32: 67–77. (in Russian).
9. Куртова Л.Н. 2014 а. Об одном аналоге аддитивной проблемы делителей с квадратичными формами. Чебышевский сборник. Т. 15, № 2: 33–49.



- Kurtova L.N. 2014 a. About one analog of the additive divisor problem with quadratic forms. *Chebyshevskij sbornik*. Т. 15, № 2: 33–49. (in Russian).
10. Куртова Л.Н. 2014 б. Бинарные аддитивные задачи с квадратичными формами. Автореф. дис. канд. физ.-мат. наук, Ульяновск, 18 с.
Kurtova L.N. 2014 b. Binarnye additivnye zadachi s kvadraticnymi formami. Avtoref. dis. kand. fiz.-mat. nauk, Ul'janovsk, 18 p.
11. Лаврентьев М.А. Шабат Б.В. 1958. Методы теории функций комплексного переменного. М., Физматлит, 678 с.
Lavrent'ev M.A. Shabat B.V. 1958. Metody teorii funkcij kompleksnogo peremennogo. M., Fizmatlit, 678 p.
12. Малышев А.В. 1962. О представлении целых чисел положительными квадратичными формами. Труды математического института им. В.А. Стеклова АН СССР. Т. 65: 3–212.
Malyshev A.V. 1962. O predstavlenii celyh chisel polozhitel'nymi kvadraticnymi formami. Trudy matematicheskogo instituta im. V.A. Steklova AN SSSR. Т. 65: 3–212.
13. Пачев У.М., Дохов Р.А. 2013. О двойных суммах Гаусса, соответствующих классам идеалов мнимого квадратичного поля. Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика. № 19(162). Вып. 32: 108–119.
Pachev U.M., Dohov R.A. 2013. About Gauss's double sums corresponding to classes of ideals of imaginary quadratic field. Nauchnye vedomosti Belgorodskogo gosudarstvennogo universiteta. Serija: Matematika. Fizika. № 19(162). Вып. 32: 108–119. (in Russian).
14. Deshouillers J.-M., Iwaniec H. 1982. An additive divisor problem. *J. London Math. Soc.* V. 26(2): 1–14.
Deshouillers J.-M., Iwaniec H. 1982. An additive divisor problem. *J. London Math. Soc.* V. 26(2): 1–14.
15. Estermann T. 1931. Über die Darstellung einer Zahl als Differenz von zwei Produkten. *J. Reine Angew. Math.* V. 164: 173–182.
Estermann T. 1931. Über die Darstellung einer Zahl als Differenz von zwei Produkten. *J. Reine Angew. Math.* V. 164: 173–182.
16. Estermann T. 1961. On Klostermann's sum. *Mathematika*. 8: 83–86.
Estermann T. 1961. On Klostermann's sum. *Mathematika*. 8: 83–86.
17. Heath-Brown D.R. 1979. The fourth power moment of the Riemann zeta-function. *Proc. London Math. Soc.* V. 38. № 3: 385–422.
Heath-Brown D.R. 1979. The fourth power moment of the Riemann zeta-function. *Proc. London Math. Soc.* V. 38. № 3: 385–422.
18. Ingham A.E. 1927. Some asymptotic formulae in the theory of numbers. *J. London Math. Soc.* V. 2(7): 202–208.
Ingham A.E. 1927. Some asymptotic formulae in the theory of numbers. *J. London Math. Soc.* V. 2(7): 202–208.
19. Ogg A.P. 1969. *Modular Forms and Dirichlet Series*. N.-Y., W.A. Benjamin Inc., 211 p.
Ogg A.P. 1969. *Modular Forms and Dirichlet Series*. N.-Y., W.A. Benjamin Inc., 211 p.
20. Weil A. 1948. On some exponential sums. *Proc. Nat. Acad. Of Sci.* 34: 204–207.
Weil A. 1948. On some exponential sums. *Proc. Nat. Acad. Of Sci.* 34: 204–207.



Ссылка для цитирования статьи
Reference to article

Куртова Л.Н. 2019. Число решений уравнения с квадратичными формами разных дискриминантов. Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика. 51 (3): 374–386. Doi: 10.18413/2075-4639-2019-51-3-374-386.

Kurtova L.N. 2019. A number of solutions the equation with quadratic forms of different discriminants. Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics. Physics. 51 (3): 374–386 (in Russian). Doi: 10.18413/2075-4639-2019-51-3-374-386.

УДК 517.9

DOI 10.18413/2075-4639-2019-51-3-387-401

**ТЕОРЕМА ВИНЕРА В ИССЛЕДОВАНИИ
ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ ФУНКЦИЙ****WIENER THEOREM FOR STUDYING
ALMOST PERIODIC AT INFINITY FUNCTIONS****В.Е. Струков, И.И. Струкова****V.E. Strukov, I.I. Strukova**

Воронежский государственный университет,
Россия, 394006, г. Воронеж, Университетская пл., 1
Voronezh State University,

1 Universitetskaya sq., Voronezh, 394006, Russia

E-mail: sv.post.of.chaos@gmail.com, irina.k.post@yandex.ru

Аннотация

Статья посвящена некоторым избранным вопросам гармонического анализа непрерывных медленно меняющихся и почти периодических на бесконечности функций. На основе знаменитой теоремы Винера вводится понятие множества, удовлетворяющего условию Винера. Рассматриваются различные подпространства непрерывных исчезающих на бесконечности (в различных смыслах) функций, не обязательно стремящихся к нулю на бесконечности. Например, функции, интегрально исчезающие на бесконечности, и функции, которые в свертке с любой функцией из множества, удовлетворяющего условию Винера, дают стремящуюся к нулю функцию. Вводятся пространства медленно меняющихся и почти периодических на бесконечности функций относительно введенных подпространств. Доказывается, что все такие пространства совпадают с пространствами обычных медленно меняющихся и почти периодических на бесконечности функций соответственно (вне зависимости от выбора подпространства исчезающих на бесконечности функций). Для почти периодических на бесконечности функций (относительно подпространства) приводятся четыре различных определения и доказывается их эквивалентность. Полученные результаты применены к исследованию свойств решений дифференциальных уравнений. Результаты статьи получены с существенным использованием теорий изометрических представлений и банаховых модулей.

Abstract

The article under consideration is devoted to some problems of harmonic analysis of continuous slowly varying and almost periodic at infinity functions. We consider a number of various subspaces of continuous functions disappearing at infinity. On the basis of the well-known Wiener theorem we introduce a concept of a set satisfying Wiener condition. We consider various subspaces of continuous functions vanishing at infinity in different senses, not necessarily tending to zero at infinity. For example, integrally vanishing at infinity functions and functions whose convolution with any function from the set satisfying Wiener condition give a function tending to zero at infinity. Then we construct the spaces of slowly varying and periodic at infinity functions with respect to any of those subspaces. The constructed spaces are proved to coincide with the ordinary spaces of slowly varying and periodic at infinity functions respectively (regardless of the choice of a subspace). For functions, almost periodic at infinity (with respect to a subspace) four various definitions are



given and their equivalence is proved. The results are applied to the research of the properties of differential equations solutions. The results of the article are received with essential use of methods of isometric representations and Banach modules theories.

Ключевые слова: почти периодическая на бесконечности функция, медленно меняющаяся на бесконечности функция, исчезающая на бесконечности функция, теорема Винера, дифференциальное уравнение, банахов модуль.

Key words: almost periodic at infinity function, slowly varying at infinity function, vanishing at infinity function, Wiener theorem, differential equation, Banach module.

1. Медленно меняющиеся на бесконечности функции относительно подпространства $C_0(\mathbb{R}, X; \mathcal{M})$

Пусть $L^1(\mathbb{R})$ — банахова алгебра определенных на \mathbb{R} измеримых по Лебегу и суммируемых комплекснозначных (классов эквивалентности) функций со сверткой функций в качестве умножения $(f_1 * f_2)(t) = \int_{\mathbb{R}} f_1(t-s)f_2(s)ds$, $t \in \mathbb{R}$, $f_1, f_2 \in L^1(\mathbb{R})$. Символом $\widehat{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ обозначается преобразование Фурье $\widehat{f}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-i\lambda t}dt$, $\lambda \in \mathbb{R}$, функции $f \in L^1(\mathbb{R})$.

В данной статье существенно используется следующая теорема Винера (см. [Гельфанд и др., 1946]):

Теорема 1. Пусть \mathcal{J} — идеал алгебры $L^1(\mathbb{R})$. Он совпадает со всей алгеброй $L^1(\mathbb{R})$, если функции $\widehat{\varphi}$, $\varphi \in \mathcal{J}$, разделяют точки из \mathbb{R} , т. е. для любых чисел $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R}$ найдется функция $\varphi \in \mathcal{J}$ такая, что $\widehat{\varphi}(\lambda_1) \neq \widehat{\varphi}(\lambda_2)$.

Будем говорить, что подмножество \mathcal{M} функций из алгебры $L^1(\mathbb{R})$ удовлетворяет условию Винера, если их преобразования Фурье разделяют точки из \mathbb{R} .

Лемма 1. Наименьший замкнутый идеал алгебры $L^1(\mathbb{R})$, содержащий множество \mathcal{M} , удовлетворяющее условию Винера, совпадает со всей алгеброй $L^1(\mathbb{R})$.

□ Пусть $\mathcal{J}(\mathcal{M})$ — наименьший замкнутый идеал из алгебры $L^1(\mathbb{R})$, содержащий \mathcal{M} , т.е. $\mathcal{J}(\mathcal{M}) = \{f * g, f \in L^1(\mathbb{R}), g \in \mathcal{M}\}$. Покажем, что множество $\mathcal{J}(\mathcal{M})$ удовлетворяет условию Винера. Возьмем произвольные числа $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R}$. В силу того, что множество \mathcal{M} удовлетворяет условию Винера, найдется функция $g \in \mathcal{M}$ такая, что $\widehat{g}(\lambda_1) \neq \widehat{g}(\lambda_2)$. Тогда для функции $\varphi \in \mathcal{J}(\mathcal{M})$ вида $\varphi = f * g$, где g — указанная функция из \mathcal{M} , а f — произвольная функция из $L^1(\mathbb{R})$, выполняется условие $\widehat{\varphi}(\lambda_1) \neq \widehat{\varphi}(\lambda_2)$. Тогда из теоремы следует, что $\mathcal{J}(\mathcal{M}) = L^1(\mathbb{R})$. ■

Пусть X — комплексное банахово пространство, $\text{End } X$ — банахова алгебра линейных ограниченных операторов (эндоморфизмов), действующих в X .

Рассматривается банахово пространство $C_b = C_b(\mathbb{R}, X)$ непрерывных и ограниченных на \mathbb{R} функций со значениями в X и нормой $\|x\|_{\infty} = \sup_{t \in \mathbb{R}} \|x(t)\|$, $C_{b,u} = C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ — замкнутое подпространство равномерно непрерывных функций из $C_b(\mathbb{R}, X)$, $C_0(\mathbb{R}, X) = \{x \in C_b(\mathbb{R}, X) : \lim_{|t| \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 0\}$ — подпространство исчезающих на бесконечности функций из $C_b(\mathbb{R}, X)$.

В банаховом пространстве $C_b(\mathbb{R}, X)$ рассмотрим группу $S : \mathbb{R} \rightarrow \text{End } C_b(\mathbb{R}, X)$ операторов, действующих по правилу

$$(S(t)x)(\tau) = x(t + \tau), \quad x \in C_b(\mathbb{R}, X), \quad t, \tau \in \mathbb{R}. \quad (1)$$



Определение 1. Функция $x \in C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ называется *медленно меняющейся на бесконечности*, если $S(\alpha)x - x \in C_0(\mathbb{R}, X)$ для любого $\alpha \in \mathbb{R}$.

Множество медленно меняющихся на бесконечности функций обозначим символом $C_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$. Такие функции изучались в работах [Baskakov, Strukova, 2016; Баскаков, 2013; Баскаков, 2015; Баскаков, Калужина, 2012; Струкова, 2015; Струкова, 2016]. В частности, в [Баскаков, Калужина, 2012] установлено, что решения уравнения теплопроводности являются медленно меняющимися на бесконечности (по времени) функциями. В работах [Струков, Струкова, 2018а; Струков, Струкова, 2018б; Струкова, 2017] изучались медленно меняющиеся и периодические на бесконечности функции из однородных пространств (например, пространств Степанова, Гельдера, Лебега).

Примерами медленно меняющихся на бесконечности функций являются:

1) $x_1(t) = \sin \ln(1 + |t|)$, $t \in \mathbb{R}$; 2) $x_2(t) = \operatorname{arctg} t$, $t \in \mathbb{R}$;

3) любая непрерывно дифференцируемая функция $x \in C_b(\mathbb{R})$ со свойством $\lim_{|t| \rightarrow \infty} \dot{x}(t) = 0$.

Наряду с $C_0(\mathbb{R}, X)$ рассмотрим подпространство функций из $C_b(\mathbb{R}, X)$ вида $C_0(\mathbb{R}, X; \mathcal{M}) = \{x \in C_b(\mathbb{R}, X) : f * x \in C_0(\mathbb{R}, X) \text{ для всех } f \in \mathcal{M}\}$, где множество $\mathcal{M} \subset L^1(\mathbb{R})$ удовлетворяет условию Винера. Такие функции также будем называть *исчезающими на бесконечности*.

Во всех рассматриваемых подпространствах из $C_b(\mathbb{R}, X)$ символ X опускается, если $X = \mathbb{C}$ (например, $C_0(\mathbb{R}, \mathbb{C}) = C_0(\mathbb{R})$, $C_0(\mathbb{R}, \mathbb{C}; \mathcal{M}) = C_0(\mathbb{R}; \mathcal{M})$).

Пример 1. Рассмотрим множество функций $\{f_\alpha, \alpha > 0\}$ из алгебры $L^1(\mathbb{R})$ вида

$$f_\alpha(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t}, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Их преобразования Фурье имеют вид $\widehat{f}_\alpha(\lambda) = \frac{1}{\alpha + i\lambda}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$. Тогда для любого $\alpha > 0$ множество $\mathcal{M}_\alpha = \{f_\alpha\}$ удовлетворяет условию Винера.

Следующие функции принадлежат пространству $C_0(\mathbb{R}; \mathcal{M}_\alpha)$:

1) $x_1(t) = e^{it^2}$;

2) $x_2(t) = \sin at^2$; 3) $x_3(t) = \cos at^2$, $t \in \mathbb{R}$, $a > 0$.

Выберем произвольное $\alpha > 0$ и покажем, что $x_1 \in C_0(\mathbb{R}; \mathcal{M}_\alpha)$, т.е. что $f_\alpha * x_1 \in C_0(\mathbb{R})$.

Действительно, $(f_\alpha * x_1)(t) = \int_0^\infty e^{-\alpha(t-\tau)} e^{i\tau^2} d\tau = e^{\frac{i\alpha^2}{4}} e^{-\alpha t} \int_{-\frac{i\alpha}{2}}^\infty e^{i\tau^2} d\tau$.

Вычислим последний интеграл отдельно: $\int_{-\frac{i\alpha}{2}}^\infty e^{i\tau^2} d\tau = \int_{-\frac{i\alpha}{2}}^0 e^{i\tau^2} d\tau + \int_0^\infty e^{i\tau^2} d\tau =$

$\frac{(1+i)\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} \operatorname{erf}\left(\frac{\alpha(i+1)}{2\sqrt{2}}\right) + \sqrt{\frac{\pi}{8}} + i\sqrt{\frac{\pi}{8}}$, где символом erf обозначена функция ошибок,

задаваемая формулой $\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\tau^2} d\tau$, $z \in \mathbb{C}$. Отсюда получаем, что

$(f_\alpha * x_1)(t) = e^{-\alpha t} e^{\frac{i\alpha^2}{4}} \left(\frac{(1+i)\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} \operatorname{erf}\left(\frac{\alpha(i+1)}{2\sqrt{2}}\right) + \sqrt{\frac{\pi}{8}} + i\sqrt{\frac{\pi}{8}} \right)$, $t \in \mathbb{R}$, т.е. $f_\alpha * x_1 \in C_0(\mathbb{R})$.

Пример 2. Если в качестве множества \mathcal{M} взять всю алгебру $L^1(\mathbb{R})$, то множество $C_0(\mathbb{R}, X; \mathcal{M})$ будет иметь вид $C_0(\mathbb{R}, X; \mathcal{M}) = \{x \in C_b(\mathbb{R}, X) : \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \|\frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha x(s+t) ds\| = 0 \text{ равномерно относительно } t \in \mathbb{R}\}$.



Покажем это, т.е. для любой функции $x \in C_b(\mathbb{R}, X)$ докажем эквивалентность следующих двух условий:

- 1) $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left\| \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha x(s+t) ds \right\| = 0$ равномерно относительно $t \in \mathbb{R}$;
- 2) $f * x \in C_0(\mathbb{R}, X)$ для любой функции f из алгебры $L^1(\mathbb{R})$.

Рассмотрим множество $\mathcal{M} = \{f_\alpha, \alpha > 0\}$ функций из алгебры $L^1(\mathbb{R})$ вида

$$f_\alpha(t) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha}, & t \in [0, \alpha], \\ 0, & t \notin [0, \alpha], \end{cases}$$

каждая из которых имеет преобразование Фурье вида $\widehat{f}_\alpha(\lambda) = \frac{1}{i\lambda\alpha}(1 - e^{-i\lambda\alpha})$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Тогда условие 1) можно записать в виде $f_\alpha * x \in C_0(\mathbb{R}, X)$ для любого $\alpha > 0$.

Поскольку преобразования Фурье \widehat{f}_α функций f_α , $\alpha > 0$, разделяют точки из \mathbb{R} , то множество \mathcal{M} удовлетворяет условию Винера. Следовательно, из леммы вытекает, что $f * x \in C_0(\mathbb{R}, X)$ для любой функции f из алгебры $L^1(\mathbb{R})$.

Если выполнено свойство 2), то $g_\alpha * x \in C_0(\mathbb{R}, X)$ для любой направленности $(g_\alpha, \alpha > 0)$ из алгебры $L^1(\mathbb{R})$, в частности, для $(f_\alpha, \alpha > 0)$, т.е. выполнено свойство 1).

Определение 2. Далее символом $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$ обозначим замкнутое (с нормой из C_b) подпространство функций из $C_b(\mathbb{R}, X)$, обладающих свойствами:

- 1) $S(t)x \in \mathcal{C}_0$ для любого $t \in \mathbb{R}$ и любой функции $x \in \mathcal{C}_0$;
- 2) $C_0(\mathbb{R}, X) \subset \mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X) \subset C_0(\mathbb{R}, X; \mathcal{M})$, где множество $\mathcal{M} \subset L^1(\mathbb{R})$ удовлетворяет условию Винера;
- 3) $e_\lambda x \in \mathcal{C}_0$ для любого $\lambda \in \mathbb{R}$, где $e_\lambda(t) = e^{i\lambda t}$, $t \in \mathbb{R}$.

Каждое такое подпространство будем называть подпространством *исчезающих на бесконечности функций*.

Примерами таких подпространств являются определенные ниже подпространства $C_{0,int}(\mathbb{R}, X)$ и $C_{0,p}(\mathbb{R}, X)$, $p \in [1, \infty)$.

Функцию x из $C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ назовем *интегрально исчезающей на бесконечности*, если

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha} \sup_{t \in \mathbb{R}} \int_0^\alpha \|x(t+s)\| ds = 0.$$

Множество интегрально исчезающих на бесконечности функций будем обозначать символом $C_{0,int} = C_{0,int}(\mathbb{R}, X)$. Отметим, что $C_{0,int}(\mathbb{R}, X)$ является замкнутым подпространством из $C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$. В работе [Баскаков и др., 2018] были введены почти периодические на бесконечности функции относительно подпространства $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$, удовлетворяющего условию $C_0(\mathbb{R}, X) \subset \mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X) \subset C_{0,int}(\mathbb{R}, X)$.

Рассмотрим также семейство замкнутых в $C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ подпространств

$$C_{0,p} = C_{0,p}(\mathbb{R}, X) = \{x \in C_{b,u}(\mathbb{R}, X) : \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha} \sup_{t \in \mathbb{R}} \int_0^\alpha \|x(s+t)\|^p ds = 0\},$$

где $p \in [1, \infty)$. Таким образом, $C_{0,1}(\mathbb{R}, X) = C_{0,int}(\mathbb{R}, X)$ — подпространство интегрально исчезающих на бесконечности функций.

Пусть $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$ — одно из подпространств исчезающих на бесконечности функций, удовлетворяющее всем условиям определения 2.



Определение 3. Функцию $x \in C_b(\mathbb{R}, X)$ будем называть *медленно меняющейся на бесконечности относительно подпространства* $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$, если $S(\alpha)x - x \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$ для любого $\alpha \in \mathbb{R}$.

Множество медленно меняющихся на бесконечности функций относительно подпространства $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$ обозначим символом $\mathcal{C}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X; \mathcal{C}_0)$. Непосредственно из определения следует, что любое пространство $\mathcal{C}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X; \mathcal{C}_0)$ является замкнутым подпространством в $C_b(\mathbb{R}, X)$.

Рассмотрим множество $C_{sl,\infty}(\mathcal{M}) = \{x \in C_b(\mathbb{R}, X) : S(\alpha)x - x \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X; \mathcal{M}) \text{ для любого } \alpha \in \mathbb{R}\}$, где множество $\mathcal{M} \subset L^1(\mathbb{R})$ удовлетворяет условию Винера. Из определений 2 и 3 следует, что $\mathcal{C}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X; \mathcal{C}_0) \subset C_{sl,\infty}(\mathcal{M})$ для любого подпространства $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$, удовлетворяющего условиям определения 2.

Далее нам потребуется определение ограниченной аппроксимативной единицы [Баскаков, Криштал, 2005] алгебры $L^1(\mathbb{R})$.

Определение 4. Ограниченная последовательность $(e_n, n \geq 1)$ функций из алгебры $L^1(\mathbb{R})$ называется *ограниченной аппроксимативной единицей (о.а.е.)* алгебры $L^1(\mathbb{R})$, если выполняются два свойства:

- 1) $\widehat{e}_n(0) = 1$ для всех $n \geq 1$;
- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} e_n * f = f$ для всех f из $L^1(\mathbb{R})$.

Справедлива следующая

Теорема 2. Пусть $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$ — одно из подпространств исчезающих на бесконечности функций, удовлетворяющее всем условиям определения 2. Тогда $\mathcal{C}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X; \mathcal{C}_0) = C_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$.

□ Достаточно доказать равенство $C_{sl,\infty}(\mathcal{M}) = C_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$. Включение $C_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X) \subset C_{sl,\infty}(\mathcal{M})$ очевидно. Покажем обратное включение. Пусть $x \in C_{sl,\infty}(\mathcal{M})$, тогда $\psi = S(\alpha)x - x \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X; \mathcal{M})$, т.е. $f * \psi \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$ для всех $f \in \mathcal{M}$. Пусть $(e_n, n \geq 1)$ — произвольная о.а.е. алгебры $L^1(\mathbb{R})$. Из леммы следует, что

$$e_n * \psi = e_n * (S(\alpha)x - x) = S(\alpha)(e_n * x) - (e_n * x) \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X),$$

откуда получаем, что $y = e_n * x \in \mathcal{C}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$, а, значит, и $x \in \mathcal{C}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$. ■

2. Банаховы $L^1(\mathbb{R})$ -модули и спектр Берлинга. Почти периодические векторы

В данном разделе будут приведены некоторые определения и факты из теории банаховых модулей, существенно используемые в дальнейшем.

Пусть \mathcal{X} — комплексное банахово пространство и $\text{End } \mathcal{X}$ — банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в \mathcal{X} .

Будем считать, что \mathcal{X} является невырожденным банаховым $L^1(\mathbb{R})$ -модулем [Баскаков, Криштал, 2005; Хьюитт, Росс, 1975], структура которого ассоциирована с некоторым ограниченным изометрическим представлением $T : \mathbb{R} \rightarrow \text{End } \mathcal{X}$. Это означает, что выполняются два свойства следующего предложения:

Предположение 1. Для банахова $L^1(\mathbb{R})$ -модуля \mathcal{X} выполняются следующие условия:



1) из равенства $fx = 0$, справедливого для любой функции $f \in L^1(\mathbb{R})$, следует, что вектор $x \in \mathcal{X}$ — нулевой (свойство невырожденности банахова модуля \mathcal{X});

2) для всех $x \in \mathcal{X}$ имеют место равенства (свойство ассоциированности модульной структуры на \mathcal{X} с представлением $T : \mathbb{R} \rightarrow \text{End } \mathcal{X}$):

$$T(t)(fx) = (T(t)f)x = f(T(t)x), \quad t \in \mathbb{R}, \quad f \in L^1(\mathbb{R}).$$

Если $T : \mathbb{R} \rightarrow \text{End } \mathcal{X}$ — сильно непрерывное ограниченное представление, то формула

$$T(f)x = fx = \int_{\mathbb{R}} f(t)T(-t)x dt, \quad f \in L^1(\mathbb{R}), \quad x \in \mathcal{X} \quad (2)$$

определяет на \mathcal{X} структуру банахова $L^1(\mathbb{R})$ -модуля, удовлетворяющего условиям предположения 2, причем эта модульная структура будет ассоциирована с представлением T .

Замечание 1. С каждым невырожденным банаховым $L^1(\mathbb{R})$ -модулем \mathcal{X} ассоциировано единственное представление $T : \mathbb{R} \rightarrow \text{End } \mathcal{X}$ [Баскаков, Криштал, 2005]. Чтобы это подчеркнуть, иногда будет использоваться обозначение (\mathcal{X}, T) .

Теория банаховых $L^1(\mathbb{R})$ -модулей изложена в [Baskakov, Krishtal, 2016; Баскаков, 1978; Баскаков, 2004; Баскаков, 2016; Баскаков, Криштал, 2005; Хьюитт, Росс, 1975].

Определение 5. Вектор из банахова $L^1(\mathbb{R})$ -модуля \mathcal{X} назовем *непрерывным* (относительно представления T) или *T -непрерывным*, если функция $\varphi_x : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{X}$, $\varphi_x(t) = T(t)x$, $t \in \mathbb{R}$, непрерывна в нуле (и, значит, непрерывна на \mathbb{R}).

Совокупность всех T -непрерывных векторов из банахова $L^1(\mathbb{R})$ -модуля \mathcal{X} обозначим через \mathcal{X}_c или $(\mathcal{X}, T)_c$. Оно образует замкнутый *подмодуль* из \mathcal{X} , т. е. \mathcal{X}_c — замкнутое линейное подпространство из \mathcal{X} , инвариантное относительно всех операторов $T(f)$, $T(t)$, $f \in L^1(\mathbb{R})$, $t \in \mathbb{R}$.

Пространство $C_b(\mathbb{R}, X)$ является банаховым $L^1(\mathbb{R})$ -модулем с модульной структурой, определяемой равенствами (2), и эта структура ассоциирована с представлением (группой сдвигов функций) $S : \mathbb{R} \rightarrow \text{End } C_b(\mathbb{R}, X)$.

Далее символом \mathcal{Y} обозначим фактор-пространство $C_b(\mathbb{R}, X)/\mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$, являющееся банаховым пространством с нормой $\|\tilde{x}\| = \inf_{y \in x + \mathcal{C}_0} \|y\|$, где $\tilde{x} = x + \mathcal{C}_0$ — класс эквивалентности, содержащий функцию $x \in C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$. В пространстве \mathcal{Y} действует сильно непрерывная группа изометрий $\tilde{S} : \mathbb{R} \rightarrow \text{End } \mathcal{Y}$ вида $\tilde{S}(t)\tilde{x} = \widetilde{S(t)x}$, $t \in \mathbb{R}$, $\tilde{x} \in \mathcal{Y}$.

Тогда структура банахова $L^1(\mathbb{R})$ -модуля на \mathcal{Y} [Баскаков, 2013; Баскаков, Криштал, 2005; Баскаков и др., 2018] определяется с помощью представления \tilde{S} и задается формулой $f\tilde{x} = \int_{\mathbb{R}} f(\tau)\tilde{S}(-\tau)\tilde{x} d\tau$, $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\tilde{x} \in \mathcal{Y}$.

Определение 6. *Спектром Берлинга* вектора $x \in \mathcal{X}$ называется множество чисел $\Lambda(x)$ из \mathbb{R} вида

$$\Lambda(x) = \{\lambda_0 \in \mathbb{R} : fx \neq 0 \text{ для любой функции } f \in L^1(\mathbb{R}) \text{ с } \widehat{f}(\lambda_0) \neq 0\}.$$



Из определения следует, что $\Lambda(x) = \mathbb{R} \setminus \{\mu_0 \in \mathbb{R} : \text{существует функция } f \in L^1(\mathbb{R}) \text{ такая, что } \widehat{f}(\mu_0) \neq 0 \text{ и } fx = 0\}$.

Справедливы следующие свойства спектра Берлинга векторов из банахова пространства X [Баскаков, 2004; Баскаков, Криштал, 2005]:

Лемма 2. Для любых $f \in L^1(\mathbb{R})$ и $x \in X$ справедливы свойства:

1) из условия $fx = 0$ для любой функции $f \in L^1(\mathbb{R})$ следует, что $x = 0$ (т. е. $L^1(\mathbb{R})$ -модуль X невырожден);

2) $\Lambda(x)$ — замкнутое подмножество из \mathbb{R} , причем $\Lambda(x) = \emptyset$ тогда и только тогда, когда $x = 0$;

3) $\Lambda(fx) \subset (\text{supp } \widehat{f}) \cap \Lambda(x)$;

4) $fx = 0$, если $(\text{supp } \widehat{f}) \cap \Lambda(x) = \emptyset$, и $fx = x$, если множество $\Lambda(x)$ компактно и $\widehat{f} = 1$ в некоторой его окрестности;

5) $\Lambda(x) = \{\lambda_0\}$ — одноточечное множество тогда и только тогда, когда вектор $x \neq 0$ удовлетворяет равенствам $T(t)x = e^{i\lambda_0 t}x$, $t \in \mathbb{R}$, т.е. x — собственный вектор банахова $L^1(\mathbb{R})$ -модуля (X, T) ;

6) если вектор $x \in X$ имеет компактный спектр Берлинга $\Lambda(x)$ со спектральным радиусом $r(x) = \max_{\lambda \in \Lambda(x)} |\lambda|$, то функция $\varphi_x : \mathbb{R} \rightarrow X$ вида $\varphi_x(t) = T(t)x$, $t \in \mathbb{R}$, допускает расширение на \mathbb{C} до целой функции экспоненциального типа, равного $r(x)$ (т.е. $\overline{\lim}_{|z| \rightarrow \infty} \frac{\ln \|\varphi_x(z)\|}{|z|} = r(x)$).

Определение 7. Вектор x_0 из банахова $L^1(\mathbb{R})$ -модуля (X, T) называется *почти периодическим* (относительно представления T), если выполнено одно из следующих эквивалентных условий:

1) для любого $\varepsilon > 0$ множество $\Omega(x_0, \varepsilon) = \{\omega \in \mathbb{R} : \|T(\omega)x_0 - x_0\| < \varepsilon\}$, называемое множеством ε -периодов вектора x_0 , относительно плотно на \mathbb{R} (множество $\Omega \subset \mathbb{R}$ называется *относительно плотным на \mathbb{R}* , если существует число $l > 0$ такое, что любой промежуток $[t, t + l]$, $t \in \mathbb{R}$, содержит хотя бы одну точку множества Ω);

2) орбита $\{T(t)x_0, t \in \mathbb{R}\}$ вектора x_0 предкомпактна в X ;

3) функция $t \mapsto \varphi(t) = T(t)x_0$, $t \in \mathbb{R}$, — непрерывная почти периодическая функция, т. е. $\varphi \in AP(\mathbb{R}, X)$ [Баскаков, 2004; Левитан, Жиков, 1978];

4) для любого $\varepsilon > 0$ существуют вещественные числа $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ и собственные векторы x_1, \dots, x_N представления T , соответствующие этим числам (т. е. $T(t)x_k = e^{i\lambda_k t}x_k$, $t \in \mathbb{R}$, $1 \leq k \leq N$) такие, что $\|x_0 - \sum_{k=1}^N x_k\| < \varepsilon$.

Множество $AP(X) = AP(X, T)$ почти периодических векторов из X образует замкнутое подпространство в X и является замкнутым подмодулем из банахова $L^1(\mathbb{R})$ -модуля X . Кроме того, имеет место включение $AP(X) \subset X_c$. Приводимые понятия и результаты содержатся в работах [Баскаков, 2004; Баскаков, 2013; Баскаков, 2015].

3. Почти периодические на бесконечности функции относительно подпространства $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$

Сформулируем определения почти периодической на бесконечности функции и определения почти периодической на бесконечности функции относительно подпространства $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$ исчезающих на бесконечности функций, удовлетворяющего всем условиям определения 2.



Первое определение, используемое в данной работе, основано на понятии ε -периода на бесконечности. Оно соответствует классическому определению Бора почти периодической функции (см. [Левитан, Жиков, 1978]).

Определение 8. Пусть $\varepsilon > 0$. Число $\omega \in \mathbb{R}_+$ называется ε -периодом функции $x \in C_b(\mathbb{R}, X)$ на бесконечности, если существует число $\alpha(\varepsilon) \geq 0$ такое, что $\sup_{|t| \geq \alpha(\varepsilon)} \|x(t + \omega) - x(t)\| < \varepsilon$.

Множество ε -периодов функции $x \in C_b(\mathbb{R}, X)$ на бесконечности обозначим символом $\Omega_\infty(x; \varepsilon)$.

Определение 9. Множество Ω из \mathbb{R} называется *относительно плотным* на \mathbb{R} , если существует такое $l > 0$, что $[t, t + l] \cap \Omega \neq \emptyset$ для любого $t \in \mathbb{R}$.

Определение 10. Функция x из $C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ называется *почти периодической на бесконечности*, если для любого $\varepsilon > 0$ множество $\Omega_\infty(x; \varepsilon)$ ее ε -периодов относительно плотно на \mathbb{R} .

Из определений 8, 10 следует, что каждая непрерывная функция $x \in C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ почти периодическая по Бору (в обычном смысле; см. [Левитан, Жиков, 1978]) является почти периодической на бесконечности. Множество классических почти периодических функций обозначим символом $AP(\mathbb{R}, X)$, а множество почти периодических на бесконечности — символом $AP_\infty(\mathbb{R}, X)$.

Приведем второе (эквивалентное; см. [Баскаков и др., 2018]) определение почти периодической на бесконечности функции:

Определение 11. Функция $x \in C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ называется *почти периодической на бесконечности*, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать конечное число вещественных чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ и функции x_1, \dots, x_N из $\mathcal{C}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$ такие, что

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \|x(t) - \sum_{k=1}^N x_k(t) e^{i\lambda_k t}\| < \varepsilon.$$

В работе [Баскаков и др., 2018] изучались почти периодические на бесконечности функции относительно подпространств $C_0(\mathbb{R}, X) \subset \mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X) \subset C_{0,int}(\mathbb{R}, X)$. В этой работе были введены четыре определения таких функций и доказана их эквивалентность. Для $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X) = C_0(\mathbb{R}, X)$ определения 10 и 11 совпадают с определениями 7 и 10 из [Баскаков и др., 2018] соответственно.

В данной работе мы приведем аналогичные им определения почти периодической на бесконечности функции относительно более широкого набора подпространств $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$, удовлетворяющих определению 2, докажем их эквивалентность и покажем, что все эти пространства совпадают с пространством $AP_\infty(\mathbb{R}, X)$.

Определение 12. Пусть $\varepsilon > 0$. Число $\omega \in \mathbb{R}_+$ называется ε -периодом функции $x \in C_b(\mathbb{R}, X)$ на бесконечности относительно подпространства $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$, если существует функция $x_0 \in \mathcal{C}_0$ такая, что $\|S(\omega)x - x - x_0\| < \varepsilon$.

Множество ε -периодов функции $x \in C_b(\mathbb{R}, X)$ на бесконечности относительно подпространства $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$ обозначим символом $\Omega_\infty(x; \mathcal{C}_0; \varepsilon)$. Если $\mathcal{C}_0 = C_0(\mathbb{R}, X)$, то определение 12 эквивалентно определению 8.



Определение 13. Функция x из $C_b(\mathbb{R}, X)$ называется *почти периодической на бесконечности относительно подпространства* $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$, если для любого $\varepsilon > 0$ множество $\Omega_\infty(x; \mathcal{C}_0; \varepsilon)$ ее ε -периодов относительно плотно на \mathbb{R} .

Множество почти периодических на бесконечности функций относительно подпространства $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$ обозначим символом $AP_\infty(\mathbb{R}, X; \mathcal{C}_0)$. Непосредственно из определения 3 следует, что если $\Omega_\infty(x; \mathcal{C}_0; \varepsilon) = \mathbb{R}$ для любого $\varepsilon > 0$, то $x \in \mathcal{C}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X; \mathcal{C}_0)$. Таким образом, имеет место включение $\mathcal{C}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X; \mathcal{C}_0) \subset AP_\infty(\mathbb{R}, X; \mathcal{C}_0)$.

Определение 14. Множество функций $\mathcal{M} \subset C_b(\mathbb{R}, X)$ называется *предкомпактным на бесконечности относительно подпространства* $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$ исчезающих на бесконечности функций, если для любого $\varepsilon > 0$ существует конечное число функций b_1, \dots, b_N (ε -сеть на бесконечности) из \mathcal{M} таких, что для любой функции $x \in \mathcal{M}$ существует функция $b_k, k \in \{1, \dots, N\}$, и функция $\alpha_\varepsilon \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$, для которых имеет место оценка $\|x - b_k - \alpha_\varepsilon\| < \varepsilon$.

Определение 15. Функция $x \in C_b(\mathbb{R}, X)$ называется *почти периодической на бесконечности относительно подпространства* $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$ исчезающих на бесконечности функций, если множество ее сдвигов $S(t)x, t \in \mathbb{R}$, является предкомпактным на бесконечности относительно подпространства $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$.

Заметим, что функции вида $x(t) = \sum_{k=1}^N x_k(t)e^{i\lambda_k t}, x_1, \dots, x_N \in \mathcal{C}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X; \mathcal{C}_0), \lambda_1, \dots, \lambda_N \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}$, (обобщенные тригонометрические полиномы) почти периодичны на бесконечности в смысле определения 15.

Определение 16. Функция $x \in C_b(\mathbb{R}, X)$ называется *почти периодической на бесконечности относительно подпространства* $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$ исчезающих на бесконечности функций, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать конечное число вещественных чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ и функции x_1, \dots, x_N из пространства $\mathcal{C}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X; \mathcal{C}_0)$ такие, что

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \|x(t) - \sum_{k=1}^N x_k(t)e^{i\lambda_k t}\| < \varepsilon.$$

Определение 17. Функция $x \in C_b(\mathbb{R}, X)$ называется *почти периодической на бесконечности относительно подпространства* $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$, если класс эквивалентности $\tilde{x} = x + \mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X) \in \mathcal{X}$ является почти периодическим вектором в $\mathcal{X} = C_b(\mathbb{R}, X)/\mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$ относительно изометрического представления $\tilde{S} : \mathbb{R} \rightarrow \text{End } \mathcal{X}$.

Почти периодические на бесконечности функции (относительно подпространства $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$) впервые были введены в рассмотрение в статьях [Баскаков, 2013; Баскаков, 2015]. При этом использовалось определение, аналогичное определению 17. Основные результаты этих статей были связаны с асимптотическим поведением ограниченных полугрупп операторов. В работах [Baskakov, Strukova, 2016; Струкова, 2015; Струкова, 2016] изучались периодические на бесконечности функции (относительно подпространства $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$). В [Струков, Струкова, 2018б] изучались почти периодические на бесконечности функции из однородных пространств.

Теорема 3. Все определения почти периодической на бесконечности функции относительно подпространства $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$ (определения 13, 15, 16, 17) эквивалентны.



□ Рассмотрим фактор-пространство $\mathcal{X} = C_{b,u}(\mathbb{R}, X)/\mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$ и определенную выше группу изометрий $T = \tilde{S} : \mathbb{R} \rightarrow \text{End } \mathcal{X}$. Для этого представления определение 16 соответствует свойству 4) из определения 7. Поскольку все свойства из определения 7 эквивалентны, достаточно показать, что первые три его свойства эквивалентны определениям 13, 15 и 16 соответственно.

Пусть $x \in C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ и \tilde{x} — класс эквивалентности в \mathcal{X} , построенный по функции x . Тогда для любого $\varepsilon > 0$ множество $\Omega_\infty(x; \mathcal{C}_0; \varepsilon) \cup (-\Omega_\infty(x; \mathcal{C}_0; \varepsilon))$ совпадает с множеством $\Omega(\tilde{x}, \varepsilon)$ ε -периодов класса \tilde{x} . Следовательно, соответствующие определения эквивалентны.

Эквивалентность определения 15 и свойства 2) определения 7 непосредственно следует из определения фактор-модуля $\mathcal{X} = C_{b,u}(\mathbb{R}, X)/\mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$.

Докажем эквивалентность аппроксимационного определения 16 и свойства 3) из определения 7. Для доказательства достаточно установить, что спектр Берлинга $\Lambda(\tilde{y})$ класса эквивалентности $\tilde{y} \in \mathcal{X}$, $\tilde{y} = y + \mathcal{C}_0$, является одноточечным множеством ($\Lambda(\tilde{y}) = \{\lambda_0\}$) тогда и только тогда, когда функция $y \in C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ представима в виде $y(t) = y_0(t)e^{i\lambda_0 t}$, $t \in \mathbb{R}$, где $y_0 \in \mathcal{C}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X; \mathcal{C}_0)$.

Если $\Lambda(\tilde{y}) = \{\lambda_0\}$, то $\tilde{S}(t)\tilde{y} = e^{i\lambda_0 t}\tilde{y}$ для любого $t \in \mathbb{R}$ (см. свойство 5) из леммы). Следовательно, $\Lambda(\tilde{y}_0) = \{0\}$, где $y_0(s) = y(s)e^{-i\lambda_0 s}$, $s \in \mathbb{R}$, и поэтому $\tilde{S}(t)\tilde{y}_0 = \tilde{y}_0$ для любого $t \in \mathbb{R}$. Таким образом, $S(t)y_0 - y_0 \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$, $t \in \mathbb{R}$, т. е. $y_0 \in \mathcal{C}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X; \mathcal{C}_0)$.

И обратно: если $y(t) = y_0(t)e^{i\lambda_0 t}$, $t \in \mathbb{R}$, где $y_0 \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$, то $\tilde{S}(t)\tilde{y} = e^{i\lambda_0 t}\tilde{y}$, $t \in \mathbb{R}$, и поэтому в силу свойства 5) из леммы получим, что $\Lambda(\tilde{y}) = \{\lambda_0\}$. ■

Теорема 4. Пусть $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$ — одно из подпространств исчезающих на бесконечности функций, удовлетворяющее всем условиям определения 2. Тогда $AP_\infty(\mathbb{R}, X; \mathcal{C}_0) = AP_\infty(\mathbb{R}, X)$.

□ В силу эквивалентности всех четырех определений почти периодической на бесконечности функции относительно подпространства $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$ для доказательства можно взять любое из них. Пусть функция $x \in C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ удовлетворяет определению 16, т. е. $x \in AP_\infty(\mathbb{R}, X; \mathcal{C}_0)$. Тогда в силу теоремы она удовлетворяет и определению 11, т. е. $x \in AP_\infty(\mathbb{R}, X)$. ■

4. Почти периодические на бесконечности решения дифференциальных уравнений

Пусть $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ — линейный ограниченный оператор с областью определения $D(A)$, являющийся генератором сильно непрерывной полугруппы операторов $U : \mathbb{R}_+ \rightarrow \text{End } X$. Рассматривается дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = Ax + \psi, \quad (3)$$

где $\psi \in C_b(\mathbb{R}, X)$. Классическим решением дифференциального уравнения (3) называется дифференцируемая функция $x : \mathbb{R} \rightarrow X$ такая, что $x(t) \in D(A)$ для любого $t \in \mathbb{R}$, и удовлетворяющая уравнению (3) для всех $t \in \mathbb{R}$.

Сформулируем два определения слабого решения (mild solution) дифференциального уравнения (3), где $\psi \in C_b(\mathbb{R}, X)$.



Определение 18. Непрерывная функция $x : \mathbb{R} \rightarrow X$ называется *слабым решением* дифференциального уравнения (3), если функция $z : \mathbb{R} \rightarrow X$, $z(t) = \int_0^t x(s) ds$, $t \in \mathbb{R}$,

обладает следующими свойствами:

- 1) $z(t) \in D(A)$ для любого $t \in \mathbb{R}$;
- 2) $x(t) - x(0) = Az(t) + \int_0^t \psi(s) ds$, $t \in \mathbb{R}$.

Определение 19. Непрерывная функция $x : \mathbb{R} \rightarrow X$ называется *слабым решением* дифференциального уравнения (3), если для всех $s, t \in \mathbb{R}$, $s \leq t$, имеют место равенства

$$x(t) = U(t-s)x(s) + \int_s^t U(t-\tau)\psi(\tau) d\tau. \tag{4}$$

Оба определения слабого решения уравнения (3) эквивалентны [Arendt и др. 2011]. В банаховом пространстве $C_{b,u} = C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ рассмотрим линейный оператор

$$\mathcal{L} = \frac{d}{dt} - A : D(\mathcal{L}) \subset C_{b,u} \rightarrow C_{b,u}. \tag{5}$$

Определение 20. Функцию $x \in C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ отнесем к *области определения* $D(\mathcal{L})$ оператора \mathcal{L} , если существует функция $\psi \in C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ такая, что для всех $s \leq t$ из \mathbb{R} имеют место равенства (5).

Для $x \in D(\mathcal{L})$ мы положим $\mathcal{L}x = \psi$, если x и ψ удовлетворяют равенствам (5). Такое определение оператора \mathcal{L} использовалось в работах [Baskakov, Krishtal, 2016; Баскаков, 1978; Баскаков, 2013].

Далее символом $S(f) : C_{b,u}(\mathbb{R}, X) \rightarrow C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ обозначим оператор свертки

$$S(f)x = f * x$$

функции $x \in C_{b,u}$ с функцией f из алгебры $L^1(\mathbb{R})$.

В [Baskakov, Krishtal, 2016] установлена следующая теорема о перестановочности операторов $S(f)$, $f \in L^1(\mathbb{R})$, с оператором \mathcal{L} .

Теорема 5. Для любой функции f из алгебры $L^1(\mathbb{R})$ и любой функции x из $D(\mathcal{L})$ функция $S(f)x$ принадлежит $D(\mathcal{L})$ и имеет место равенство $\mathcal{L}S(f)x = S(f)\mathcal{L}x$.

В дальнейшем будет использоваться следующая

Теорема 6. (Баскаков и др., 2018) Пусть функция ψ из уравнения (3) принадлежит пространству $C_0(\mathbb{R}, X)$ и множество $\sigma(A) \cap (i\mathbb{R})$ не имеет предельных точек на $i\mathbb{R}$. Тогда каждое ограниченное слабое решение $x \in C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ дифференциального уравнения (3) принадлежит $AP_\infty(\mathbb{R}, X)$ и для любого $\varepsilon > 0$ можно указать числа $i\lambda_1, \dots, i\lambda_m \in \sigma(A) \cap (i\mathbb{R})$ и функции x_1, \dots, x_m из $C_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$ такие, что

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \|x(t) - \sum_{k=1}^m x_k(t)e^{i\lambda_k t}\| < \varepsilon,$$

причем $x(t) = \sum_{k=1}^m x_k(t)e^{i\lambda_k t}$, $t \in \mathbb{R}$, если $\sigma(A) \cap (i\mathbb{R}) = \{i\lambda_1, \dots, i\lambda_m\}$ — конечное множество.



Следствие 1 (Баскаков и др., 2018). Пусть X — конечномерное банахово пространство, A — оператор из $\text{End } X$ и $\psi \in C_0(\mathbb{R}, X)$. Тогда каждое ограниченное решение $x : \mathbb{R} \rightarrow X$ дифференциального уравнения (3) принадлежит $AP_\infty(\mathbb{R}, X)$ и допускает представление вида

$$x(t) = \sum_{k=1}^m x_k(t) e^{i\lambda_k t}, \quad x_k \in C_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X), \quad t \in \mathbb{R},$$

если $\sigma(A) \cap (i\mathbb{R}) = \{i\lambda_1, \dots, i\lambda_m\}$.

На основе указанных выше результатов была получена следующая

Лемма 3. Пусть X — конечномерное банахово пространство, A — оператор из $\text{End } X$ и $\psi \in C_0(\mathbb{R}, X; \mathcal{M})$. Тогда для любого ограниченного решения $x : \mathbb{R} \rightarrow X$ дифференциального уравнения (3) и любой функции $f \in \mathcal{M}$ функция $y = f * x$ принадлежит $AP_\infty(\mathbb{R}, X)$ и допускает представление вида

$$y(t) = \sum_{k=1}^m y_k(t) e^{i\lambda_k t}, \quad y_k \in C_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X), \quad t \in \mathbb{R},$$

если $\sigma(A) \cap (i\mathbb{R}) = \{i\lambda_1, \dots, i\lambda_m\}$.

□ Пусть $x \in C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ — ограниченное решение дифференциального уравнения (3) с функцией $\psi \in C_0(\mathbb{R}, X; \mathcal{M})$. Тогда в силу теоремы для любой функции $f \in \mathcal{M}$ справедливо равенство

$$f * \dot{x} = A(f * x) + f * \psi.$$

Из условия $\psi \in C_0(\mathbb{R}, X; \mathcal{M})$ следует, что функция $\varphi = f * \psi$ принадлежит $C_0(\mathbb{R}, X)$. Тогда из следствия 1 вытекает, что при условии $\sigma(A) \cap (i\mathbb{R}) = \{i\lambda_1, \dots, i\lambda_m\}$ функция $y = f * x$ принадлежит пространству $AP_\infty(\mathbb{R}, X)$. ■

Из теоремы и леммы следует

Теорема 7. Пусть X — конечномерное банахово пространство, A — оператор из $\text{End } X$ и $\psi \in C_0(\mathbb{R}, X; \mathcal{M})$. Тогда каждое ограниченное решение $x : \mathbb{R} \rightarrow X$ дифференциального уравнения (3) принадлежит пространству $AP_\infty(\mathbb{R}, X)$ и допускает представление вида

$$x(t) = \sum_{k=1}^m x_k(t) e^{i\lambda_k t}, \quad x_k \in C_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X), \quad t \in \mathbb{R},$$

если $\sigma(A) \cap (i\mathbb{R}) = \{i\lambda_1, \dots, i\lambda_m\}$.

□ Пусть $x \in C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ — ограниченное решение дифференциального уравнения (3) с функцией $\psi \in C_0(\mathbb{R}, X; \mathcal{M})$. Тогда в силу леммы для любой функции $f \in \mathcal{M}$ функция $y = f * x$ принадлежит $AP_\infty(\mathbb{R}, X)$. Пусть $(e_n, n \in \mathbb{N})$ — произвольная о.а.е. алгебры $L^1(\mathbb{R})$. Из леммы следует, что $e_n * x \in AP_\infty(\mathbb{R}, X)$, а, значит, и $x \in AP_\infty(\mathbb{R}, X)$. ■

Аналогичным образом [Баскаков и др., 2018] доказывается следующая

Теорема 8. Пусть функция ψ из уравнения (3) принадлежит пространству $C_0(\mathbb{R}, X; \mathcal{M})$ и множество $\sigma(A) \cap (i\mathbb{R})$ не имеет предельных точек на $i\mathbb{R}$. Тогда каждое ограниченное слабое решение $x \in C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ дифференциального уравнения (3) принадлежит $AP_\infty(\mathbb{R}, X)$ и для любого $\varepsilon > 0$ можно указать числа $i\lambda_1, \dots, i\lambda_m \in \sigma(A) \cap (i\mathbb{R})$ и функции x_1, \dots, x_m из $C_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$ такие, что

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \|x(t) - \sum_{k=1}^m x_k(t) e^{i\lambda_k t}\| < \varepsilon,$$



причем $x(t) = \sum_{k=1}^m x_k(t)e^{i\lambda_k t}$, $t \in \mathbb{R}$, если $\sigma(A) \cap (i\mathbb{R}) = \{i\lambda_1, \dots, i\lambda_m\}$ — конечное множество.

Непосредственно из определения 2 следует, что теоремы 1 и 2 остаются справедливыми, если функция ψ принадлежит любому из подпространств $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$, удовлетворяющих условиям определения 2.

Работа первого автора выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-31-00097, работа второго автора выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-01-00732 А.

The first author was supported by RFBR according to the research project no. 18-31-00097 and the second author was supported by RFBR according to the research project no. 19-01-00732 A.

Список литературы References

1. Баскаков А.Г. 1978. Спектральные критерии почти периодичности решений функциональных уравнений. Матем. заметки. 24(2) : 195–206.
Baskakov A. G. 1978. Spectral tests for the almost periodicity of the solutions of functional equations. Math. Notes. 24(1–2) : 606–612. (in Russian).
2. Баскаков А.Г. 2004. Теория представлений банаховых алгебр, абелевых групп и полугрупп в спектральном анализе линейных операторов. СМФН. 9 : 3–151.
Baskakov A.G. 2006. Theory of representations of Banach algebras, and abelian groups and semigroups in the spectral analysis of linear operators. J. Math. Sci. (N. Y.) 137(4) : 4885–5036.
3. Баскаков А.Г. 2013. Исследование линейных дифференциальных уравнений методами спектральной теории разностных операторов и линейных отношений. УМН. 68(1) : 77–128.
Baskakov A.G. 2013. Analysis of linear differential equations by methods of the spectral theory of difference operators and linear relations. Russian Mathematical Surveys. 68(1) : 69–116.
4. Баскаков А.Г. 2015. Гармонический и спектральный анализ операторов с ограниченными степенями и ограниченных полугрупп операторов на банаховом пространстве. Матем. заметки. 97(2) : 174–190.
Baskakov A.G. 2015. Harmonic and spectral analysis of power bounded operators and bounded semigroups of operators on Banach spaces. Math. Notes. 97(2) : 164–178.
5. Баскаков А.Г. 2016. Гармонический анализ в банаховых модулях и спектральная теория линейных операторов. Воронеж: Изд. дом ВГУ, 152.
Baskakov A.G. 2016. Harmonic analysis in Banach modules and linear operators spectral theory. Voronezh: VSU, 152.
6. Баскаков А.Г., Калужина Н.С. 2012. Теорема Берлинга для функций с существенным спектром из однородных пространств и стабилизация решений параболических уравнений. Матем. заметки. 92(5) : 643–661.
Baskakov A.G., Kaluzhina N.S. 2012. Beurling's Theorem for Functions with Essential Spectrum from Homogeneous Spaces and Stabilization of Solutions of Parabolic Equations. Math. Notes. 92(5) : 587–605.



7. Баскаков А.Г., Криштал И.А. 2005. Гармонический анализ каузальных операторов и их спектральные свойства. Изв. РАН. Серия матем. 69(3) : 3–54.
Baskakov A.G., Krishtal I.A. 2005. Harmonic analysis of causal operators and their spectral properties. Izv. Math. 69(3) : 439–486.
8. Баскаков А.Г., Струкова И.И., Тришина И.А. 2018. Почти периодические на бесконечности решения дифференциальных уравнений с неограниченными операторными коэффициентами. Сиб. матем. журн. 59(2) : 293–308.
Baskakov A.G., Strukova I.I., Trishina I.A. 2018. Solutions almost periodic at infinity to differential equations with unbounded operator coefficients. Siberian Math. J. 59(2) : 231–242.
9. Гельфанд И.М., Райков Д.А., Шилов Г.Е. 1946. Коммутативные нормированные кольца. УМН. 1(2) : 48–146.
Gelfand I.M., Raikov D.A., Shilov G.E. 1946. Commutative Normed Rings. UMN. 1(2) : 48–146. (in Russian).
10. Левитан Б.М., Жиков В.В. 1978. Почти-периодические функции и дифференциальные уравнения. М.: МГУ, 206.
Levitan B.M., Zhikov V.V. 1978. Almost periodic functions and differential equations. Cambridge University Press, 224.
11. Струков В.Е., Струкова И.И. 2018 а. О медленно меняющихся и периодических на бесконечности функциях из однородных пространств и гармоничных распределениях. Вестн. ВГУ. Серия: Физика. Математика. № 4 : 195–205.
Strukov V. E., Strukova I. I. 2018 a. About slowly varying and periodic at infinity functions from homogeneous spaces and harmonic distributions. Vestnik VSU. Ser. Physica. Matematika. № 4 : 195–205. (in Russian).
12. Струков В.Е., Струкова И.И. 2018 б. О четырех определениях почти периодической на бесконечности функции из однородного пространства. Научные ведомости Белгородского государственного университета. Сер. Математика. Физика. 50(3) : 254–264.
Strukov V.E., Strukova I.I. 2018 b. About four definitions of almost periodic at infinity functions from homogeneous space. Nauchnye vedomosti Belgorodskogo gosudarstvennogo universiteta. 50(3) : 254–264. (in Russian).
13. Струкова И.И. 2015. Спектры алгебр медленно меняющихся и периодических на бесконечности функций и банаховы пределы. Вестн. ВГУ. Серия: Физика. Математика. № 3 : 161–165.
Strukova I.I. 2015. Spectra of algebras of slowly varying and periodic at infinity functions and Banach limits. Vestnik VSU. Ser. Physica. Matematika. № 3 : 161–165. (in Russian).
14. Струкова И.И. 2016. О теореме Винера для периодических на бесконечности функций. Сиб. матем. журн. 57(1) : 186–198.
Strukova I.I. 2016. About Wiener theorem for periodic at infinity functions. Siberian Math. J. 57(1) : 186–198. (in Russian).
15. Струкова И.И. 2017. Гармонический анализ периодических на бесконечности функций в однородных пространствах. Вестник ВолГУ. Сер. 1. Математика. Физика. № 2(39) : 29–38.
Strukova I.I. 2017. Harmonic analysis of periodic at infinity functions in homogeneous spaces. Vestnik VolGU. Ser. 1. Matematika. Fizika. № 2(39) : 29–38. (in Russian).



16. Хьюитт Э., Росс К.А. 1975. Абстрактный гармонический анализ. Т. 2. М.: Мир, 899.
Hewitt E., Ross K.A. 1963. Abstract harmonic analysis. Vol. 2. Springer, 771.
17. Arendt W., Batty C.J.K., Hieber M., Neubrander F. 2011. Vector-valued Laplace transforms and Cauchy problems. Birkhäuser, Monographs in Mathematics. Vol. 96. 553 p.
Arendt W., Batty C.J.K., Hieber M., Neubrander F. 2011. Vector-valued Laplace transforms and Cauchy problems. Birkhäuser, Monographs in Mathematics. Vol. 96. 553 p.
18. Baskakov A.G., Krishtal I.A. 2016. Spectral Analysis of Abstract Parabolic Operators in Homogeneous Function Spaces. Mediterranean Journal of Mathematics. 13(5) : 2443–2462.
Baskakov A.G., Krishtal I.A. 2016. Spectral Analysis of Abstract Parabolic Operators in Homogeneous Function Spaces. Mediterranean Journal of Mathematics. 13(5) : 2443–2462.
19. Baskakov A., Strukova I. 2016. Harmonic analysis of functions periodic at infinity. Eurasian Math. J. 7(4) : 9–29.
Baskakov A., Strukova I. 2016. Harmonic analysis of functions periodic at infinity. Eurasian Math. J. 7(4) : 9–29.

Ссылка для цитирования статьи
Reference to article

Струков В.Е., Струкова И.И. 2019. Теорема Винера в исследовании почти периодических на бесконечности функций. Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика. 51 (3): 387–401. Doi: 10.18413/2075-4639-2019-51-3-387-401.

Strukov V. E., Strukova I.I. 2019. Wiener theorem for studying almost periodic at infinity functions. Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics. Physics. 51 (3): 387–401 (in Russian). Doi: 10.18413/2075-4639-2019-51-3-387-401.



УДК 517.952

DOI 10.18413/2075-4639-2019-51-3-402-416

**ДВУМЕРНОЕ НЕАВТОНОМНОЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ
С КВАДРАТИЧНЫМ ПОЛИНОМОМ ОТ ПЕРВЫХ ПРОИЗВОДНЫХ**
**TWO-DIMENSIONAL NON-AUTONOMOUS HYPERBOLIC EQUATION
WITH QUADRATIC POLYNOMIAL ON FIRST DERIVATIVES**

И.В. Рахмелевич**I.V. Rakhmelevich**

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского,
пр. Гагарина, д.23, г. Нижний Новгород, Россия, 603950

Nizhny Novgorod State University,
23 Gagarin av., Nizhny Novgorod, 603950, Russia

E-mail: igor-kitpd@yandex.ru

Аннотация

Исследовано двумерное неавтономное гиперболическое уравнение, правая часть которого содержит произвольную нелинейность от искомой функции и квадратичный полином от ее первых производных. Получены решения этого уравнения в явном виде для простейших нелинейностей с помощью методов мультипликативного и функционального разделения переменных. Показано, что при определенных условиях на коэффициенты уравнения оно может быть сведено к квадратному уравнению относительно некоторой вспомогательной переменной. Найдено решение в виде квадратичной формы от функций одной переменной, а также решение в виде произведения степеней от независимых переменных для случая, когда коэффициенты уравнения представляют собой степенные функции. С помощью метода Кларксона – Крускала показано, что исходное уравнение может быть сведено к уравнению Риккати с постоянными коэффициентами в случае, когда коэффициенты исходного уравнения выражаются через отношение функций одной переменной; найдены соответствующие точные решения в явном виде. Получено точное решение в неявном виде для случая произвольной нелинейности от неизвестной функции и сформулировано условие его существования.

Abstract

There is investigated two-dimensional non-autonomous hyperbolic equation, the right side of which contains arbitrary non-linearity on unknown function and the quadratic polynomial on its first derivatives. The solutions of this equation are received in explicit form for the simplest nonlinearities with the help of the methods of multiplicative and functional separation of variables. It is showed that under certain conditions the initial equation can be reduced to the quadratic equation with respect to some auxiliary variable. There is received the solution as a quadratic form on some functions of one variable, and also the solution in the form of the production of powers on independent variables for the case when the coefficients of initial equation are the power functions. It is showed by means of Clarkson – Kruskal method, that the initial equation can be reduced to the Riccati equation with constant coefficients in the case when the coefficients of initial equation are expressed through the relation of functions of one variable. The corresponding exact solutions in explicit form are received. There is received the exact solution in implicit form for the case of arbitrary non-linearity on unknown function and the condition of its existence is formulated.

Ключевые слова: нелинейность, гиперболическое уравнение, мультипликативное разделение переменных, функциональное разделение переменных, решение типа бегущей волны, метод Кларксона-Крускала, уравнение Риккати.

Key words: nonlinearity, hyperbolic equation, multiplicative separation of variables, functional separation of variables, solution of travelling wave type, Clarkson-Kruskal's method, Riccati's equation.

Введение

В современной математической физике существенное место занимает анализ нелинейных гиперболических уравнений и методов их точного интегрирования [Жиббер, Соколов, 2001], [Кудряшов, 2010], [Кузнецова, 2012], [Полянин, Зайцев, 2002], [Рахмелевич, 2015, 2017], [Grundland, Infeld, 1992], [Zhdanov, 1994]. С точки зрения общности результатов серьезный интерес представляют исследования классов нелинейных уравнений, содержащих произвольные функции [Полянин, Зайцев, 2002], [Зайцев, Полянин, 2003], в том числе уравнений с переменными коэффициентами. Одними из наиболее эффективных методов исследования нелинейных уравнений остаются методы, основанные на редукции исходного уравнения в частных производных к обыкновенному дифференциальному уравнению или их системе (метод разделения переменных, метод Кларксона – Крускала и др.). В работах [Полянин, Журов, 2002], [Полянин и др., 2005] подробно изложены основы метода разделения переменных и его современные варианты (обобщенное и функциональное разделение переменных). В настоящее время опубликовано достаточно много работ, посвященных исследованию нелинейных уравнений указанным методом. Так, методом разделения переменных исследованы некоторые многомерные уравнения, содержащие однородные и мультиоднородные функции от частных производных [Рахмелевич, 2013, 2014], получены точные решения ряда нелинейных уравнений, встречающихся в прикладных задачах [Полянин, Зайцев, 2002], [Полянин и др., 2005], [Miller, Rubel, 1993], [Zhdanov, 1994], [Polyanin, 2019]. Для нахождения точных решений более сложной структуры используется метод Кларксона – Крускала [Полянин и др., 2005], [Clarkson, Kruskal, 1989]. В настоящей работе метод разделения переменных и метод Кларксона – Крускала применяются для построения решений двумерного гиперболического уравнения, содержащего квадратичный полином от первых производных и нелинейность произвольного вида от неизвестной функции.

1. Простейшие решения

Двумерное нелинейное гиперболическое уравнение второго порядка с квадратичным полиномом от первых производных имеет вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = g(u) \left(A(x, y) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + B(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + C(x, y) \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right). \quad (1.1)$$

Здесь $A(x, y), B(x, y), C(x, y), g(u)$ – заданные функции.

Вначале рассмотрим случай $g(u) = 1/u$, для которого уравнение (1.1) можно переписать в виде:

$$u \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = A(x, y) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + B(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + C(x, y) \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2. \quad (1.2)$$



Найдем решения уравнения (1.2), которые могут быть получены методом разделения переменных.

Теорема 1.1. 1. Если коэффициенты уравнения (1.2) удовлетворяют условиям:

$$\frac{B(x, y) - 1}{2A(x, y)} = \frac{p(x)}{q(y)}, \quad \frac{4A(x, y)C(x, y)}{(B(x, y) - 1)^2} = \alpha \leq 1, \quad (1.3)$$

где $p(x), q(y)$ – некоторые заданные функции, α – параметр, то уравнение (1.2) имеет решения следующего вида:

$$u(x, y) = D \exp \left(\lambda \int p(x) dx + \mu \int q(y) dy \right), \quad (1.4)$$

где D, λ – произвольные постоянные, а λ, μ связаны соотношением:

$$\frac{\lambda}{\mu} = -1 \pm (1 - \alpha)^{1/2}. \quad (1.4a)$$

2. Если коэффициенты уравнения (1.2) удовлетворяют условиям:

$$B(x, y) \equiv 1, \quad \frac{C(x, y)}{A(x, y)} = - \left(\frac{p(x)}{q(y)} \right)^2, \quad (1.5)$$

то уравнение (1.2) имеет решения следующего вида:

$$u(x, y) = D \exp \left(\lambda \left(\int p(x) dx \pm \int q(y) dy \right) \right). \quad (1.6)$$

□ Будем искать решение уравнения (1.2) в виде:

$$u(x, y) = \varphi(x)\psi(y), \quad (1.7)$$

где $\varphi(x), \psi(y)$ – неизвестные функции, подлежащие определению. Подставив (1.7) в уравнение (1.2), получаем:

$$A(x, y) [\varphi'(x)\psi(y)]^2 + (B(x, y) - 1)\varphi'(x)\psi'(y)\varphi(x)\psi(y) + C(x, y) [\varphi(x)\psi'(y)]^2 = 0. \quad (1.8)$$

Разделив уравнение (1.8) почленно на $[\varphi(x)\psi'(y)]^2$, получаем квадратное уравнение:

$$A\eta^2 + \tilde{B}\eta + C = 0, \quad (1.9)$$

где $\tilde{B} = B - 1$, величина η определяется выражением:

$$\eta = \frac{\varphi'(x)\psi(y)}{\varphi(x)\psi'(y)}. \quad (1.10)$$

Корни квадратного уравнения (1.9):

$$\eta_{1,2} = -\frac{\tilde{B}}{2A} \pm \left(\left(\frac{\tilde{B}}{2A} \right)^2 - \frac{C}{A} \right)^{1/2}. \quad (1.11)$$



Пусть выполнены условия первой части теоремы, т. е. коэффициенты уравнения (1.2) удовлетворяют условиям (1.3). Тогда выражение (1.11) можно переписать в виде:

$$\eta_{1,2} = -\frac{\tilde{B}}{2A} (-1 \pm (1 - \alpha)^{1/2}). \quad (1.12)$$

Разделим переменные в выражении (1.10), учитывая (1.3) и (1.12), откуда получаем уравнения для функций $\varphi(x), \psi(y)$:

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \lambda p(x), \quad \frac{\psi'(y)}{\psi(y)} = \mu q(y), \quad (1.13)$$

причем постоянные λ, μ должны удовлетворять соотношению (1.4а). Находя решения уравнений (1.13) и подставляя их в (1.7), получаем выражение (1.4).

Пусть теперь выполнены условия второй части теоремы, т.е. коэффициенты уравнения (1.2) удовлетворяют условиям (1.5). Тогда из (1.11) получаем следующее выражение:

$$\eta_{1,2} = \pm \left(-\frac{C}{A} \right)^{1/2}. \quad (1.14)$$

Разделим переменные в выражении (1.10), учитывая (1.5) и (1.14), откуда получаем уравнения для функций $\varphi(x), \psi(y)$ в виде (1.13), причем постоянные λ, μ должны удовлетворять соотношению:

$$\frac{\lambda}{\mu} = \pm 1. \quad (1.14a)$$

Тогда, рассуждая аналогично первой части теоремы и учитывая (1.14а), получаем решение (1.6). ■

Теорема 1.2. Пусть $\varphi(x), \psi(y)$ – дифференцируемые функции своих аргументов, удовлетворяющие условию:

$$A(x, y) \frac{\varphi'(x)}{\psi'(y)} + B(x, y) + C(x, y) \frac{\psi'(y)}{\varphi'(x)} = \Phi \{ \varphi(x) + \psi(y) \}, \quad (1.15)$$

где $\Phi(z)$ – некоторая произвольная функция. Тогда уравнение (1.2) имеет решение вида:

$$u(x, y) = U_0 \exp \left\{ \int_0^z \frac{dz}{D - \int_0^z (\Phi(\zeta) - 2) d\zeta} \right\}, \quad z = \varphi(x) + \psi(y). \quad (1.16)$$

□ В соответствии с известным методом функционального разделения переменных [Полянин и др., 2005], [Полянин, Журов, 2002] решение уравнения (1.2) ищем в виде:

$$u(x, y) = U(z), \quad z = \varphi(x) + \psi(y). \quad (1.17)$$

Подставляя (1.17) в уравнение (1.2), находим:

$$\frac{U(z)U''(z)}{[U'(z)]^2} = A(x, y) \frac{\varphi'(x)}{\psi'(y)} + B(x, y) - 1 + C(x, y) \frac{\psi'(y)}{\varphi'(x)}. \quad (1.18)$$



Уравнение (1.18) удовлетворяется только в том случае, если выражение в правой части может быть представлено в виде некоторой функции от переменной z . Тогда, в силу условия (1.15), уравнение (1.18) можно записать в виде:

$$U(z)U''(z) - (\Phi(z) - 1)[U'(z)]^2 = 0. \quad (1.19)$$

Уравнение (1.19) допускает понижение порядка с помощью замены переменной $v(z) = U'(z)/U(z)$, в результате которой получаем уравнение первого порядка:

$$v'(z) - (\Phi(z) - 2)[v(z)]^2 = 0. \quad (1.20)$$

Решение уравнения (1.20) имеет вид:

$$v(z) = \frac{1}{D - \int_0^z \Phi_1(\zeta) d\zeta}, \quad \Phi_1(\zeta) = \Phi(\zeta) - 2, \quad (1.21)$$

где D – произвольная постоянная. Используя выражение (1.21) и возвращаясь к функции $U(z)$, получаем решение в виде (1.16). ■

Следствие. Если для некоторой функции $\Phi(z)$ и действительных постоянных k_1, k_2 коэффициенты уравнения (1.2) удовлетворяют условию

$$k_1^2 A(x, y) + k_1 k_2 B(x, y) + k_2^2 C(x, y) = \Phi(k_1 x + k_2 y), \quad (1.22)$$

то уравнение (1.2) имеет решение типа бегущей волны, определяемое формулой (1.16), где $z = k_1 x + k_2 y$.

Данное утверждение является частным случаем теоремы 1.2 при $\varphi(x) = k_1 x$, $\psi(y) = k_2 y$.

Рассмотрим теперь решение уравнения (1.2) в виде квадратичной формы от неизвестных функций $\varphi(x), \psi(y)$:

$$u(x, y) = a_{11}[\varphi(x)]^2 + a_{12}\varphi(x)\psi(y) + a_{22}[\psi(y)]^2, \quad (1.23)$$

где a_{11}, a_{12}, a_{22} – неизвестные коэффициенты.

Подставив функцию (1.23) в уравнение (1.2) и разделив уравнение почленно на $\varphi'(x)\psi'(y)$, после элементарных преобразований получаем:

$$a_{12} (a_{11}[\varphi(x)]^2 + a_{12}\varphi(x)\psi(y) + a_{22}[\psi(y)]^2) = P_{11}[\varphi(x)]^2 + P_{12}\varphi(x)\psi(y) + P_{22}[\psi(y)]^2, \quad (1.24)$$

где:

$$P_{11} = 4a_{11}^2 A(x, y) \frac{\varphi'(x)}{\psi'(y)} + 2a_{11}a_{12}B(x, y) + a_{12}^2 C(x, y) \frac{\psi'(y)}{\varphi'(x)}, \quad (1.24a)$$

$$P_{12} = 4a_{11}a_{12}A(x, y) \frac{\varphi'(x)}{\psi'(y)} + (4a_{11}a_{22} + a_{12}^2)B(x, y) + 4a_{22}a_{12}C(x, y) \frac{\psi'(y)}{\varphi'(x)}, \quad (1.24b)$$

$$P_{22} = a_{12}^2 A(x, y) \frac{\varphi'(x)}{\psi'(y)} + 2a_{22}a_{12}B(x, y) + 4a_{22}^2 C(x, y) \frac{\psi'(y)}{\varphi'(x)}. \quad (1.24v)$$

Пусть функции $A(x, y), B(x, y), C(x, y)$ имеют вид:

$$A(x, y) = A_0 \frac{f_2(y)}{f_1(x)}, \quad B(x, y) = B_0, \quad C(x, y) = C_0 \frac{f_1(x)}{f_2(y)}, \quad (1.25)$$



где $f_1(x), f_2(y)$ – заданные функции, A_0, B_0, C_0 – заданные константы. Пусть также функции $\varphi(x), \psi(y)$ удовлетворяют уравнениям:

$$\varphi'(x) = f_1(x), \quad \psi'(y) = f_2(y). \quad (1.26)$$

Тогда выражения (1.24а,б,в) преобразуются так:

$$P_{11} = 4A_0a_{11}^2 + 2B_0a_{11}a_{12} + C_0a_{12}^2, \quad (1.27а)$$

$$P_{12} = 4A_0a_{11}a_{12} + B_0(4a_{11}a_{22} + a_{12}^2) + 4C_0a_{22}a_{12}, \quad (1.27б)$$

$$P_{22} = A_0a_{12}^2 + 2B_0a_{22}a_{12} + 4C_0a_{22}^2. \quad (1.27в)$$

Далее, подставим выражения (1.27а,б,в) в (1.24). Приравнивая коэффициенты при $[\varphi(x)]^2, \varphi(x)\psi(y), [\psi(y)]^2$ в левой и правой частях полученного уравнения, получаем систему уравнений относительно неизвестных $\alpha_1 = a_{11}/a_{12}, \alpha_2 = a_{22}/a_{12}$:

$$4A_0\alpha_1^2 + (2B_0 - 1)\alpha_1 + C_0 = 0, \quad (1.28а)$$

$$4(A_0\alpha_1 + C_0\alpha_2 + B_0\alpha_1\alpha_2) + B_0 - 1 = 0, \quad (1.28б)$$

$$4C_0\alpha_2^2 + (2B_0 - 1)\alpha_2 + A_0 = 0. \quad (1.28в)$$

Решая квадратные уравнения (1.28а), (1.28в), находим:

$$\alpha_1 = \frac{1 - 2B_0 \pm \sqrt{D}}{8A_0}, \quad \alpha_2 = \frac{1 - 2B_0 \mp \sqrt{D}}{8C_0}, \quad D = (1 - 2B_0)^2 - 16A_0C_0. \quad (1.29)$$

Подставив найденные α_1, α_2 из (1.29) в (1.28б), нетрудно убедиться, что при данном выборе знаков в (1.29) уравнение (1.28б) удовлетворяется автоматически при произвольных A_0, B_0, C_0 . Таким образом, в результате проведенных выше рассуждений доказана следующая теорема:

Теорема 1.3. Пусть коэффициенты уравнения (1.2) определяются выражениями (1.25), причем $D = (1 - 2B_0)^2 - 16A_0C_0 \geq 0$. Тогда это уравнение имеет решение вида:

$$u(x, y) = a (\alpha_1[\varphi(x)]^2 + \varphi(x)\psi(y) + \alpha_2[\psi(y)]^2), \quad (1.30)$$

где

$$\varphi(x) = \int f_1(x)dx + c_1, \quad \psi(y) = \int f_2(y)dy + c_2, \quad (1.31)$$

причем α_1, α_2 определяются выражениями (1.29); a, c_1, c_2 – произвольные постоянные.

Рассмотрим теперь случай, когда уравнение (1.1) содержит степенную нелинейность по искомой функции с произвольным показателем.

Теорема 1.4. 1. Пусть $g(u) = u^\gamma, \quad \gamma \neq -1$, а коэффициенты уравнения (1.1) определяются выражениями:

$$A(x, y) = A_0x^{\alpha+1}y^{\beta-1}, \quad B(x, y) = B_0x^\alpha y^\beta, \quad C(x, y) = C_0x^{\alpha-1}y^{\beta+1}, \quad (1.32)$$

где $A_0, B_0, C_0, \alpha, \beta$ – заданные параметры. Тогда уравнение (1.1) имеет решение вида:

$$u(x, y) = U_0x^\lambda y^\mu, \quad (1.33)$$



где

$$\lambda = -\frac{\alpha}{1+\gamma}, \quad \mu = -\frac{\beta}{1+\gamma}, \quad U_0 = \left(A_0 \frac{\alpha}{\beta} + B_0 + C_0 \frac{\beta}{\alpha} \right)^{-\frac{1}{1+\gamma}}. \quad (1.33a)$$

2. Если $g(u) = 1/u$, а коэффициенты уравнения (1.1) определяются выражениями:

$$A(x, y) = A_0 \frac{x}{y}, \quad B(x, y) = B_0, \quad C(x, y) = C_0 \frac{y}{x}, \quad (1.34)$$

где параметры A_0, B_0, C_0 удовлетворяют условию:

$$(B_0 - 1)^2 - 4A_0C_0 \geq 0, \quad (1.34)$$

то уравнение (1.1) имеет решение вида (1.33), причем U_0 – произвольная постоянная, а показатели λ, μ связаны соотношением:

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{1 - B_0 \pm \sqrt{D_0}}{2A_0}, \quad D_0 = (B_0 - 1)^2 - 4A_0C_0. \quad (1.35)$$

□ Пусть в уравнении (1.1) $g(u) = u^\gamma$, а коэффициенты уравнения имеют вид:

$$A(x, y) = A_0 x^{\alpha_{11}} y^{\beta_{11}}, \quad B(x, y) = B_0 x^{\alpha_{12}} y^{\beta_{12}}, \quad C(x, y) = C_0 x^{\alpha_{22}} y^{\beta_{22}}. \quad (1.36)$$

Подставляя (1.36) и (1.33) в (1.1), после элементарных преобразований приводим это уравнение к виду:

$$U_0^{-1-\gamma} = \frac{\lambda}{\mu} A_0 x^{\rho_{11}} y^{\sigma_{11}} + B_0 x^{\rho_{12}} y^{\sigma_{12}} + \frac{\mu}{\lambda} C_0 x^{\rho_{12}} y^{\sigma_{12}}, \quad (1.37)$$

где показатели степеней определяются выражениями:

$$\rho_{11} = \alpha_{11} - 1 + \lambda(1 + \gamma), \quad \rho_{12} = \alpha_{12} + \lambda(1 + \gamma), \quad \rho_{22} = \alpha_{22} + 1 + \lambda(1 + \gamma), \quad (1.37a)$$

$$\sigma_{11} = \beta_{11} + 1 + \mu(1 + \gamma), \quad \sigma_{12} = \beta_{12} + \mu(1 + \gamma), \quad \sigma_{22} = \beta_{22} - 1 + \mu(1 + \gamma). \quad (1.37b)$$

Очевидно, уравнение (1.37) можно удовлетворить только в том случае, если показатели степеней при x, y во всех слагаемых в правой части этого уравнения равны 0. Тогда из (1.37a,б) получаем две системы уравнений:

$$\alpha_{11} - 1 + \lambda(1 + \gamma) = 0, \quad \alpha_{12} + \lambda(1 + \gamma) = 0, \quad \alpha_{22} + 1 + \lambda(1 + \gamma) = 0, \quad (1.38a)$$

$$\beta_{11} + 1 + \mu(1 + \gamma) = 0, \quad \beta_{12} + \mu(1 + \gamma) = 0, \quad \beta_{22} - 1 + \mu(1 + \gamma) = 0. \quad (1.38b)$$

Рассмотрим решение для каждого из случаев, перечисленных в условии теоремы.

1. Если $\gamma \neq -1$, то из систем (1.38a,б) находим:

$$\alpha_{11} = \alpha + 1, \quad \alpha_{22} = \alpha - 1, \quad \lambda = -\frac{\alpha}{1 + \gamma}, \quad (1.39a)$$

$$\beta_{11} = \beta - 1, \quad \beta_{22} = \beta + 1, \quad \mu = -\frac{\beta}{1 + \gamma}. \quad (1.39b)$$

В (1.39a,б) введены обозначения $\alpha_{12} = \alpha$, $\beta_{12} = \beta$. Подставив (1.39a,б) в (1.37), получаем выражение (1.33a) для постоянной U_0 . Таким образом, из (1.39a,б) следует, что



в случае $\gamma \neq -1$ решение вида (1.33) существует, если коэффициенты уравнения (1.1) определяются выражениями (1.32), при этом постоянные λ, μ, U_0 , входящие в решение, определяются выражениями (1.33а).

2. Если $\gamma = -1$, т. е. $g(u) = 1/u$, то из систем (1.38а,б) получаем:

$$\alpha_{11} = 1, \quad \alpha_{12} = 0, \quad \alpha_{22} = -1, \quad \beta_{11} = -1, \quad \beta_{12} = 0, \quad \beta_{22} = 1. \quad (1.40)$$

Из уравнения (1.37) в этом случае следует:

$$A_0 \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^2 + (B_0 - 1) \frac{\lambda}{\mu} + C_0 = 0. \quad (1.41)$$

Решая (1.41) как квадратное уравнение относительно λ/μ , получаем соотношение (1.35). Таким образом, из (1.40) следует, что в случае $\gamma = -1$ решение вида (1.33) существует, если коэффициенты уравнения (1.1) определяются выражениями (1.34), показатели степеней λ, μ должны удовлетворять соотношению (1.35), а постоянная U_0 является произвольной, так как она не входит в уравнение (1.41). ■

2. Метод Кларксона-Крускала.

Случай произвольной нелинейности по искомой функции

Данный параграф посвящен нахождению более сложных решений уравнения (1.1) с помощью метода Кларксона – Крускала [Полянин и др., 2005], [Clarkson, Kruskal, 1989], в соответствии с которым решение этого уравнения ищем в виде:

$$u(x, y) = F(x, y)U(z(x, y)) + G(x, y). \quad (2.1)$$

При этом функции $F(x, y), z(x, y), G(x, y)$ должны быть подобраны так, чтобы исходное уравнение (1.2) сводилось к обыкновенному дифференциальному уравнению (ОДУ) относительно функции $U(z)$. Будем предполагать, что функции $A(x, y), B(x, y), C(x, y)$ определяются выражениями (1.25). Далее для упрощения анализа рассмотрим некоторые частные случаи, в которых наложены дополнительные ограничения на функции $F(x, y), z(x, y), G(x, y)$.

Случай 1. $g(u) \equiv 1$.

$$F(x, y) \equiv 1, \quad z(x, y) = \varphi(x) + \psi(y), \quad G(x, y) = \varphi_1(x) + \psi_1(y). \quad (2.2)$$

Подставляя в уравнение (1.1) функцию (2.1) с учетом условий (2.2), после некоторых преобразований получим:

$$U''(z) = P_2(x, y)[U'(z)]^2 + P_1(x, y)U'(z) + P_0(x, y). \quad (2.3)$$

Здесь введены обозначения:

$$P_2(x, y) = A(x, y) \frac{\varphi'(x)}{\psi'(y)} + B(x, y) + C(x, y) \frac{\psi'(y)}{\varphi'(x)}, \quad (2.4a)$$

$$P_1(x, y) = 2A(x, y) \frac{\varphi_1'(x)}{\psi'(y)} + B(x, y) \left(\frac{\psi_1'(y)}{\psi'(y)} + \frac{\varphi_1'(x)}{\varphi'(x)} \right) + 2C(x, y) \frac{\psi_1'(y)}{\varphi'(x)}, \quad (2.4b)$$



$$P_0(x, y) = A(x, y)[\varphi_1'(x)]^2 + B(x, y)\varphi_1'(x)\psi_1'(y) + 2C(x, y)[\psi_1'(y)]^2. \quad (2.4\text{в})$$

Предположим, что функции $\varphi(x)$, $\psi(y)$, $\varphi_1(x)$, $\psi_1(y)$ выбраны так, что:

$$\varphi_1(x) = \alpha_1\varphi(x), \quad \psi_1(y) = \beta_1\psi(y), \quad \varphi'(x) = f_1(x), \quad \psi'(y) = f_2(y). \quad (2.5)$$

Учитывая выражения (1.25) для коэффициентов $A(x, y)$, $B(x, y)$, $C(x, y)$ и соотношения (2.5), получаем:

$$P_2(x, y) = p_2 \equiv A_0 + B_0 + C_0, \quad (2.6\text{а})$$

$$P_1(x, y) = p_1 \equiv 2A_0\alpha_1 + B_0(\alpha_1 + \beta_1) + 2C_0\beta_1, \quad (2.6\text{б})$$

$$P_0(x, y) = p_0 \equiv A_0\alpha_1^2 + B_0\alpha_1\beta_1 + C_0\beta_1^2. \quad (2.6\text{в})$$

Вводя новую неизвестную функцию $v(z) = U'(z)$, преобразуем уравнение (2.3) к уравнению Риккати с постоянными коэффициентами:

$$v'(z) = p_2[v(z)]^2 + p_1v(z) + p_0, \quad (2.7)$$

В случае $p_2 = 0$ (2.7) сводится к линейному уравнению:

$$v'(z) = p_1v(z) + p_0. \quad (2.8)$$

Решая уравнение (2.8) и возвращаясь к функции $U(z)$, находим:

$$U(z) = V_0 \exp(p_1z) - \frac{p_0}{p_1}z + U_0. \quad (2.9)$$

Учитывая (2.1), (2.2) и (2.5), получаем решение уравнения (1.1) при $p_2 = 0$:

$$u(x, y) = V_0 \exp\{p_1(\varphi(x) + \psi(y))\} + \left(\alpha_1 - \frac{p_0}{p_1}\right)\varphi(x) + \left(\beta_1 - \frac{p_0}{p_1}\right)\psi(y) + U_0, \quad (2.10)$$

$$\varphi(x) = \int f_1(x)dx, \quad \psi(y) = \int f_2(y)dy. \quad (2.10\text{а})$$

Рассмотрим теперь случай, когда $p_2 \neq 0$ – произвольное. Решая (2.7) как уравнение с разделяющимися переменными, возвращаясь к функции $u(x, y)$, с учетом (2.1), (2.2) и (2.5), находим:

$$u(x, y) = U_0 - \frac{1}{p_2} \ln \operatorname{ch} \left(\frac{\sqrt{D}}{2} (\varphi(x) + \psi(y) - z_0) \right) + R(x, y), \quad (2.11\text{а})$$

$$u(x, y) = U_0 - \frac{1}{p_2} \ln \left| \cos \left(\frac{\sqrt{-D}}{2} (\varphi(x) + \psi(y) - z_0) \right) \right| + R(x, y), \quad (2.11\text{б})$$

$$u(x, y) = U_0 - \frac{1}{p_2} \ln |\varphi(x) + \psi(y) - z_0| + R(x, y), \quad (2.11\text{в})$$

где

$$R(x, y) = \left(\alpha_1 - \frac{p_1}{2p_2}\right)\varphi(x) + \left(\beta_1 - \frac{p_1}{2p_2}\right)\psi(y).$$



Выражения (2.11а, б, в) справедливы для случаев $D > 0, D < 0, D = 0$ соответственно, $D = p_1^2 - 4p_0p_2$.

Случай 2. $g(u) = 1/u$.

$$F(x, y) = \exp(\varphi_2(x) + \psi_2(y)), \quad z(x, y) = \varphi(x) + \psi(y), \quad G(x, y) \equiv 0. \quad (2.12)$$

Тогда уравнение (1.1) после некоторых преобразований приводится к виду:

$$\frac{U''(z)}{U(z)} = P_2(x, y) \left(\frac{U'(z)}{U(z)} \right)^2 + P_1(x, y) \frac{U'(z)}{U(z)} + P_0(x, y). \quad (2.13)$$

Коэффициенты в правой части уравнения (2.13) определяются выражениями:

$$P_2(x, y) = A(x, y) \frac{\varphi'(x)}{\psi'(y)} + B(x, y) + C(x, y) \frac{\psi'(y)}{\varphi'(x)}, \quad (2.14а)$$

$$P_1(x, y) = 2A(x, y) \frac{\varphi_2'(x)}{\psi'(y)} + (B(x, y) - 1) \left(\frac{\psi_2'(y)}{\psi'(y)} + \frac{\varphi_2'(x)}{\varphi'(x)} \right) + 2C(x, y) \frac{\psi_2'(y)}{\varphi'(x)}, \quad (2.14б)$$

$$P_0(x, y) = \frac{A(x, y)[\varphi_2'(x)]^2 + (B(x, y) - 1)\varphi_2'(x)\psi_2'(y) + 2C(x, y)[\psi_2'(y)]^2}{\varphi'(x)\psi'(y)}. \quad (2.14в)$$

Предположим, что функции $\varphi(x), \psi(y), \varphi_2(x), \psi_2(y)$ выбраны так, что:

$$\varphi_2(x) = \alpha_2\varphi(x), \quad \psi_2(y) = \beta_2\psi(y), \quad \varphi'(x) = f_1(x), \quad \psi'(y) = f_2(y). \quad (2.15)$$

Тогда, аналогично соотношениям (2.6а,б,в), находим:

$$P_2(x, y) = p_2 \equiv A_0 + B_0 - 1 + C_0, \quad (2.16а)$$

$$P_1(x, y) = p_1 \equiv 2A_0\alpha_2 + (B_0 - 1)(\alpha_2 + \beta_2) + 2C_0\beta_2, \quad (2.16б)$$

$$P_0(x, y) = p_0 \equiv A_0\alpha_2^2 + (B_0 - 1)\alpha_2\beta_2 + C_0\beta_2^2. \quad (2.16в)$$

Вводя новую неизвестную функцию $v(z) = U'(z)/U(z)$, аналогично случаю 1, получаем уравнение Риккати в виде (2.7) с постоянными коэффициентами, которые определяются выражениями (2.16 а,б,в). В случае $p_2 = 0$ (2.7) сводится к линейному уравнению (2.8). Решая уравнение (2.8) и возвращаясь к функции $U(z)$, находим:

$$U(z) = U_0 \exp \left(\int v(z) dz \right) = U_0 \exp \left(V_0 \exp(p_1 z) - \frac{p_0}{p_1} z \right). \quad (2.17)$$

Учитывая (2.1), (2.12) и (2.17), получаем для случая $p_2 = 0$ решение уравнения (1.1):

$$u(x, y) = U_0 \exp \left\{ V_0 \exp \{ p_1 (\varphi(x) + \psi(y)) \} + \left(\alpha_2 - \frac{p_0}{p_1} \right) \varphi(x) + \left(\beta_2 - \frac{p_0}{p_1} \right) \psi(y) \right\}, \quad (2.18)$$

$$\varphi(x) = \int f_1(x) dx, \quad \psi(y) = \int f_2(y) dy. \quad (2.18а)$$



Для случая произвольного $p_2 \neq 0$, решая (2.7) как уравнение с разделяющимися переменными, возвращаясь к функции $u(x, y)$, с учетом (2.1), (2.12) и (2.15) находим:

$$u(x, y) = U_0 \left[\operatorname{ch} \left(\frac{\sqrt{D}}{2} (\varphi(x) + \psi(y) - z_0) \right) \right]^{-1/p_2} S(x, y), \quad (2.19a)$$

$$u(x, y) = U_0 \left[\cos \left(\frac{\sqrt{-D}}{2} (\varphi(x) + \psi(y) - z_0) \right) \right]^{-1/p_2} S(x, y), \quad (2.19б)$$

$$u(x, y) = U_0 ((\varphi(x) + \psi(y) - z_0))^{-1/p_2} S(x, y), \quad (2.19в)$$

где

$$S(x, y) = \exp \left\{ \left(\alpha_1 - \frac{p_1}{2p_2} \right) \varphi(x) + \left(\beta_1 - \frac{p_1}{2p_2} \right) \psi(y) \right\}.$$

Выражения (2.19а, б, в) справедливы для случаев $D > 0$, $D < 0$, $D = 0$ соответственно, $D = p_1^2 - 4p_0p_2$; $\varphi(x)$, $\psi(y)$ определяются выражениями (2.18а).

Таким образом, в результате проведенных выше рассуждений доказана следующая теорема:

Теорема 2.1. Пусть функции $A(x, y)$, $B(x, y)$, $C(x, y)$ определяются выражениями (1.25).

1. Если $g(u) \equiv 1$, то уравнение (1.1) имеет решения, определяемые следующими выражениями:

при $A_0 + B_0 + C_0 = 0$ – выражением (2.10);

при $A_0 + B_0 + C_0 \neq 0$ – выражениями (2.11а, б, в) для случаев $D > 0$, $D < 0$, $D = 0$ соответственно.

2. Если $g(u) = 1/u$, то уравнение (1.1) имеет решения, определяемые следующими выражениями:

при $A_0 + B_0 + C_0 = 1$ – выражением (2.18);

при $A_0 + B_0 + C_0 \neq 1$ – выражениями (2.19а, б, в) для случаев $D > 0$, $D < 0$, $D = 0$ соответственно.

Далее рассмотрим точные решения уравнения (1.1) в случае произвольной нелинейности $g(u)$.

Теорема 2.2. Пусть существуют дифференцируемые функции $\varphi(x)$, $\psi(y)$, удовлетворяющие условию:

$$A(x, y) \frac{\varphi'(x)}{\psi'(y)} + B(x, y) + C(x, y) \frac{\psi'(y)}{\varphi'(x)} = K = \text{const}. \quad (2.20)$$

Тогда уравнение (1.1) имеет следующее решение:

$$\varphi(x) + \psi(y) - z_0 = V_0 \int \exp(-KG(u)) du, \quad (2.21)$$

где z_0, V_0 – произвольные постоянные, а $G(u)$ определяется выражением:

$$G(u) = \int g(u) du. \quad (2.21a)$$



□ Используя метод функционального разделения переменных аналогично теореме 1.2, решение уравнения (1.1) будем искать в виде (1.17). Подставляя выражение (1.17) в уравнение (1.1), преобразуем это уравнение к виду:

$$U''(z) = g(u)[U'(z)]^2 \left(A(x, y) \frac{\varphi'(x)}{\psi'(y)} + B(x, y) + C(x, y) \frac{\psi'(y)}{\varphi'(x)} \right). \quad (2.22)$$

Учитывая далее условие (2.20), уравнение (2.22) сводится к ОДУ относительно функции $U(z)$:

$$U''(z) = Kg(u)[U'(z)]^2. \quad (2.23)$$

Разделив почленно (2.23) на $U'(z)$, нетрудно привести это уравнение к виду:

$$\frac{d}{dz} (\ln U'(z) - KG(U)) = 0, \quad (2.24)$$

где $G(U)$ определяется выражением (2.21a).

Интегрируя уравнение (2.24), получаем:

$$\ln U'(z) - KG(U) = -\ln V_0. \quad (2.25)$$

Из (2.25) получаем уравнение первого порядка с разделяющимися переменными относительно $U(z)$:

$$\frac{dU}{dz} = \frac{1}{V_0} \exp(KG(U)). \quad (2.26)$$

Интегрируя уравнение (2.26), находим решение в неявном виде:

$$z - z_0 = V_0 \int \exp(-KG(U)) dU, \quad (2.27)$$

где z_0 – произвольная постоянная. Учитывая выражение для z из (1.17) и возвращаясь к переменной u , из (2.27) получаем решение уравнения (1.1) в виде (2.21). ■

Следствие. Пусть коэффициенты уравнения (1.1) имеют вид (1.25). Тогда уравнение (1.1) имеет решение следующего вида:

$$\int f_1(x)dx + \int f_2(y)dy = V_0 \int \exp(-KG(u)) du, \quad (2.28)$$

где V_0 – произвольная постоянная,

$$K = A_0 + B_0 + C_0. \quad (2.28a)$$

□ Сформулированное утверждение является частным случаем теоремы 2.2, если функции $\varphi(x), \psi(y)$ выбрать в виде:

$$\varphi(x) = \int f_1(x)dx, \quad \psi(y) = \int f_2(y)dy. \quad \blacksquare$$



Заключение

Таким образом, в данной работе найдены точные решения двумерного неавтономного гиперболического уравнения, содержащего произвольную нелинейность от искомой функции и квадратичную форму от ее первых производных с переменными коэффициентами. В качестве методов исследования использованы метод разделения переменных и метод Кларксона-Крускала. Для простейших нелинейностей типа $g(u) \equiv 1$, $g(u) = 1/u$, при определенных условиях на коэффициенты, исходное уравнение сведено к уравнению Риккати с постоянными коэффициентами, в результате чего получены решения в явном виде. Найдены решения в виде квадратичной формы от функций одной переменной, а также решение в виде произведения степеней независимых переменных. Для случая произвольной нелинейности от искомой функции получено решение в неявном виде. Результаты работы могут быть обобщены на нелинейные неавтономные гиперболические уравнения с правыми частями более общего вида.

Список литературы References

1. Жибер А.В., Соколов В.В. 2001. Точно интегрируемые гиперболические уравнения лиувилевского типа. Успехи математических наук. 56(1): 63-106.
Zhiber A.V., Sokolov V.V. 2001. Tochno integriruemye giperbolicheskie uravneniya liuvillevskogo tipa [Exactly integrated hyperbolic equations of Liouville's type] Uspekhi matematicheskikh nauk. 56(1): 63-106.
2. Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. 2003. Справочник по дифференциальным уравнениям с частными производными первого порядка. М.: Физматлит, 416 с.
Zaytsev V. F., Polyinin A. D. 2003. Spravochnik po differentsialnym uravneniyam s chastnymi proizvodnymi pervogo poryadka [Handbook on the partial differential equations of the first order] M: Fizmatlit, 416 p.
3. Кудряшов Н.А. 2010. Методы нелинейной математической физики. Долгопрудный: Изд-во «Интеллект», 368 с.
Kudryashov N.A. 2010. Metody nelineynoy matematicheskoy fiziki [Methods of nonlinear mathematical physics]. Dolgoprudny: Publishing house "Intellect", 368 p.
4. Кузнецова М.Н. 2012. О нелинейных гиперболических уравнениях, связанных дифференциальными подстановками с уравнением Клейна-Гордона. Уфимский математический журнал. 4(3): 86-103.
Kuznetsova M.N. 2012. O nelineynykh giperbolicheskikh uravneniyakh, svyazannykh differentsialnymi podstanovkami s uravneniem Kleina-Gordona [On nonlinear hyperbolic equations connected with Klein – Gordon equation by differential substitutes]. Ufimskiy matematicheskiy zhurnal. 4(3): 86-103.
5. Полянин А.Д., Зайцев В.Ф. 2002. Справочник по нелинейным уравнениям математической физики: точные решения. М.: Физматлит, 432 с.
Polyinin A.D., Zaytsev V. F. 2002. Spravochnik po nelineynym uravneniyam matematicheskoy fiziki: tochnye resheniya [Handbook on the nonlinear equations of mathematical physics: exact solutions]. M: Fizmatlit, 432 p.

6. Полянин А.Д., Зайцев В.Ф., Журов А.И. 2005. Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики. М.: Физматлит, 256 с.
Polyanin A.D., Zaytsev V.F., Zhurov A.I. 2005. Metody resheniya nelineynykh uravneniy matematicheskoy fiziki i mekhaniki [Methods of solving of nonlinear equations of mathematical physics and mechanics] M: Fizmatlit, 256 p.
7. Полянин А.Д., Журов А.И. 2002. Обобщенное и функциональное разделение переменных в математической физике и механике. Доклады РАН, 382(5): 606–611.
Polyanin A.D., Zhurov A.I. 2002. Obobshhennoe i funktsionalnoe razdelenie peremennykh v matematicheskoy fizike i mekhanike [Generalized and functional separation of variables in mathematical physics and mechanics]. Doklady RAN, 382(5): 606–611.
8. Рахмелевич И.В. 2013. О применении метода разделения переменных к уравнениям математической физики, содержащим однородные функции от производных. Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 3(23): 37–44.
Rakhmelevich I.V. 2013. O primeneniі metoda razdeleniya peremennykh k uravneniyam matematicheskoy fiziki, sodержashim odnorodnye funktsii ot proizvodnykh [On application of variable separation method to mathematical physics equations containing homogeneous functions of derivatives] Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika. 3(23): 37–44.
9. Рахмелевич И.В. 2014. Об уравнениях математической физики, содержащих мультиоднородные функции от производных. Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 1(27): 42–50.
Rakhmelevich I.V. 2014. Ob uravneniyakh matematicheskoy fiziki, sodержashikh multiodnorodnye funktsii ot proizvodnykh [On equations of mathematical physics containing multi-homogeneous functions of derivatives]. Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika. 1(27): 42–50.
10. Рахмелевич И.В. 2015. О двумерных гиперболических уравнениях со степенной нелинейностью по производным. Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 1(33): 12–19.
Rakhmelevich I.V. 2015. O dvumernykh giperbolicheskikh uravneniyakh so stepennoy nelineynostiyo po proizvodnym [On two-dimensional hyperbolic equation with power non-linearity on the derivatives]. Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika. 1(33): 12–19.
11. Рахмелевич И.В. 2017. Двумерное неавтономное гиперболическое уравнение второго порядка со степенными нелинейностями. Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 49: 52–60.
Rakhmelevich I.V. 2017. Dvumernoe neavtonomnoe giperbolicheskoe uravnenie vtorogo por-yadka so stepennymi nelineynostyami [Two-dimensional non-autonomous hyperbolic equation of the second order with power non-linearities]. Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo univer-siteta. Matematika i mekhanika. 49: 52-60.
12. Clarkson P. A., Kruskal M. D. 1989. New similarity reductions of the Boussinesq equation. Journal of Mathematical Physics, V. 30, No 10: 2201–2213.
13. Grundland A.M., Infeld E. 1992. A family of non-linear Klein – Gordon equations and their solutions. Journal of Mathematical Physics, V. 33, No 7: 2498–2503.



14. Miller J. (Jr.), Rubel L.A. 1993. Functional separation of variables for Laplace equations in two dimensions. *Journal of Physics A*, V. 26: 1901–1913.
15. Polyanin A.D. 2019. Construction of exact solutions in implicit form for PDEs: New functional separable solutions of non-linear reaction-diffusion equations with variable coefficients. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, V. 111: 95–105.
16. Zhdanov R.Z. 1994. Separation of variables in the non-linear wave equation. *Journal of Physics A*, V. 27: L291-L297.

Ссылка для цитирования статьи
Reference to article

Рахмелевич И.В. 2019. Двумерное неавтономное гиперболическое уравнение с квадратичным полиномом от первых производных. *Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика*. 51 (3): 402–416. Doi: 10.18413/2075-4639-2019-51-3-402-416.

Rakhmelevich I.V. 2019. Two-dimensional non-autonomous hyperbolic equation with quadratic polynomial on first derivatives. *Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics. Physics*. 51 (3): 402–416 (in Russian). Doi: 10.18413/2075-4639-2019-51-3-402-416.



УДК 517.984

DOI 10.18413/2075-4639-2019-51-3-417-423

ТЕОРЕМА М.Г. КРЕЙНА ДЛЯ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ KREIN THEOREM FOR DIFFERENCE EQUATIONS

А.В. Авилов**A.V. Avilov**

Воронежский государственный университет,
Россия, 394018, г. Воронеж, Университетская площадь, 1
Voronezh State University,
1 Universitetskaya Sq., Voronezh, 394018, Russia
E-mail: wiplash96gmail.com

Аннотация

В рамках данной статьи рассматривается теорема М.Г. Крейна об устойчивости семейства эволюционных операторов, построенного для однородного дифференциального уравнения с непрерывными ограниченными коэффициентами. Формулируются определения устойчивого семейства операторов, устойчивого, неустойчивого и асимптотически устойчивого линейного ограниченного оператора. Сформулирован и доказан дискретный аналог теоремы М.Г. Крейна для векторных разностных уравнений, коэффициентами которых являются линейные ограниченные операторы. Помимо этого, основным результатом является теорема об асимптотической устойчивости линейного ограниченного оператора, рассматриваемого в качестве коэффициента векторного разностного уравнения.

Abstract

The article under consideration reviews M.G. Krein theorem about stability of family of evolutionary operators, constructed for homogeneous differential equation with continuous bounded coefficients. Basic definitions of Cauchy's operator function, a stable family of operators, spectral radius of linear bounded operator, stable linear bounded operator, unstable linear bounded operator and asymptotically stable linear bounded operator are formulated. Main results of the work are presented as two proved theorems. The first theorem is the discrete analogue of M.G. Krein theorem for difference vector equations with coefficients presented as linear bounded operators. The second theorem is an enhanced variant of the first theorem. It contains the conditions for asymptotical stability of the linear bounded operators that are coefficients of difference vector equations. Such difference vector equations with linear bounded operators as coefficients occur during discretization of linear differential equations in Banach's spaces. Special attention is paid to Gelfand's theorem about spectral radius of operator, which is closely related to asymptotical stability of linear bounded operator.

Ключевые слова: векторное разностное уравнение, линейный ограниченный оператор, устойчивость, асимптотическая устойчивость, спектральный радиус.

Keywords: difference vector equation, linear bounded operator, stability, asymptotical stability, spectral radius.



1. Теорема М. Г. Крейна об устойчивости семейства эволюционных операторов

Пусть X – комплексное банахово пространство и $\text{End } X$ – банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в X . Символом $C_b(\mathbb{R}_+, X)$ обозначим банахово пространство непрерывных ограниченных на \mathbb{R}_+ функций со значениями в X и нормой

$$\|x\|_\infty = \sup_{t \in \mathbb{R}_+} \|x(t)\|_X.$$

Рассмотрим однородное дифференциальное уравнение с переменным операторным коэффициентом вида

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t), \quad t \geq 0, \quad (1)$$

где $A \in C_b(\mathbb{R}_+, X)$.

Определение 1. Сильно непрерывная дифференцируемая операторная функция $U : \mathbb{R}_+ \rightarrow \text{End } X$ называется *операторной функцией Коши* для уравнения (1), если $U(0) = I$ и для любого $t \in \mathbb{R}_+$ выполняется равенство

$$\dot{U}(t)x(t) = (A(t)U(t))x(t), \quad t \geq 0.$$

Операторная функция Коши $U(t)$ позволяет записать любое решение задачи Коши для уравнения (1) с начальным условием $x(0) = x_0 \in X$ в виде

$$x(t) = U(t)x_0, \quad t \geq 0, \quad x(0) = x_0.$$

Рассмотрим также семейство эволюционных операторов (пропагатор) $\mathcal{U} = \{\mathcal{U}(t, s)\} : \Delta = \{(t, s) \in \mathbb{R}_+^2 : s \leq t\} \rightarrow \text{End } X$, для которого выполняются следующие свойства:

- 1) Семейство \mathcal{U} сильно непрерывно на Δ ;
- 2) $\mathcal{U}(t, s)\mathcal{U}(s, \tau) = \mathcal{U}(t, \tau)$, $0 \leq \tau \leq s \leq t < \infty$;
- 3) $\mathcal{U}(t, t) = I$ для любого $t \in \mathbb{R}_+$;
- 4) $\sup_{0 \leq t-s \leq 1} \|\mathcal{U}(t, s)\| = K < \infty$.

В частности, если $A(t) = A \in \text{End } X$, то $U(t) = e^{At}$ и $\mathcal{U}(t, s) = U(t)U^{-1}(s)$, $t, s \in \Delta$, где $U : \mathbb{R}_+ \rightarrow \text{End } X$ – операторная функция Коши для уравнения (1).

Определение 2. Семейство операторов \mathcal{U} называется *устойчивым*, если существует константа $\tilde{M}_c \geq 0$ и такая, что

$$\sup_{s, t \in \Delta} \|\mathcal{U}(t, s)\| = \tilde{M}_c < \infty.$$

Теорема 1. Пусть неоднородное дифференциальное уравнение

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + f(t), \quad t \in \mathbb{R}_+$$

с начальным условием $x(0) = 0$ имеет решение из $C_b(\mathbb{R}_+, X)$ для любой функции $f \in C_b(\mathbb{R}_+, X)$, тогда семейство эволюционных операторов $\mathcal{U}(t, s)$, построенное для однородного дифференциального уравнения

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t),$$



будет являться устойчивым.

Базовым случаем этой теоремы является теорема об устойчивости решений однородного дифференциального уравнения с непрерывными ограниченными коэффициентами (см. [Крейн, 1948; Далецкий, Крейн, 1970]). Баскаковым [1996] позднее был получен соответствующий результат для уравнений, операторные коэффициенты которых являются замкнутыми операторами.

2. Теоремы об устойчивости и асимптотической устойчивости операторов в разностных уравнениях

Пусть X – комплексное банахово пространство и $\text{End } X$ – банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в X . Символом $l_\infty = l_\infty(X, \mathbb{Z}_+)$ обозначим банахово пространство ограниченных последовательностей векторов $x : \mathbb{Z}_+ \rightarrow X$ с нормой

$$\|x\|_\infty = \sup_{k \in \mathbb{Z}_+} \|x(k)\|_X.$$

В рамках данной работы рассматривается разностное уравнение вида

$$x(k+1) = Bx(k) + f(k), \quad k \in \mathbb{Z}_+. \quad (2)$$

где $x \in l_\infty, B \in \text{End } X, f \in l_\infty$.

Отметим, что разностные уравнения (2) возникают при дискретизации линейных дифференциальных уравнений в банаховых пространствах. Такой подход был использован в работах многих авторов (см. [Баскаков, 1990; Баскаков, 1992; Баскаков, 1994; Баскаков, 1997; Баскаков, 2000; Баскаков, 2001; Баскаков, Пастухов, 2001; Баскаков, Чернышов, 2001а; Баскаков, Чернышов, 2001б; Баскаков, 2009; Баскаков, Синтяев, 2010; Баскаков и др. 2011; Баскаков, 2013; Баскаков, Дуплищева, 2015; Бичегкуев, 2008; Бичегкуев, 2009]).

Определение 3. Оператор $B \in \text{End } X$ назовем *устойчивым*, если существует константа $\tilde{M}_d \geq 0$ такая, что

$$\sup_{n \in \mathbb{Z}_+} \|B^n\| = \tilde{M}_d < \infty, \quad (3)$$

т.е. все его степени равномерно ограничены.

Определение 4. Оператор $B \in \text{End } X$ назовем *асимптотически устойчивым*, если для него выполняется условие

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|B^n\| = 0. \quad (4)$$

Определение 5. *Спектральным радиусом* оператора B называется число $r(B) = \max_{\lambda \in \sigma(B)} |\lambda|$, где $\sigma(B)$ – спектр оператора B .

По теореме Гельфанда о спектральном радиусе оператора (см. [Гельфанд, Шилов, 1958]) из условия (3) следует условие

$$r(B) \leq 1,$$

а условие (4) эквивалентно условию



$$r(B) < 1 \quad (5)$$

для спектрального радиуса оператора B .

В данной работе доказывается следующий результат.

Теорема 2. Пусть уравнение (2) с начальным условием $x(0) = 0$ разрешимо для любой последовательности $f \in l_\infty$, тогда оператор B является устойчивым.

□ Рассмотрим уравнение (2) для $f(k) = 0$ при $k \neq 0$ и $f(0) = y$, где y — произвольный вектор из X . Последовательно распишем цепочку разностных уравнений

$$\begin{aligned} x(1) &= Bx(0) + y \Rightarrow x(1) = y, \\ x(2) &= Bx(1) + f(1) \Rightarrow x(2) = By, \\ x(3) &= Bx(2) + f(2) \Rightarrow x(3) = B(By) = B^2y, \\ &\dots \\ x(k) &= Bx(k-1) + f(k-1) \Rightarrow x(k) = B^{k-1}y, \\ x(k+1) &= Bx(k) + f(k) \Rightarrow x(k+1) = B^k y. \end{aligned}$$

Так как последовательность $x : \mathbb{Z}_+ \rightarrow X$ является ограниченной, то имеем

$$\sup_{k \in \mathbb{Z}_+} \|x(k+1)\| = \sup_{k \in \mathbb{Z}_+} \|B^k f(0)\| = \sup_{k \in \mathbb{Z}_+} \|B^k y\| < \infty,$$

откуда согласно принципу равномерной ограниченности получаем, что $\sup_{k \in \mathbb{Z}_+} \|B^k\| < \infty$.

По определению 3 получаем, что оператор B является устойчивым. ■

При доказательстве теоремы был использован принцип равномерной ограниченности, который фигурирует во многих работах по функциональному анализу [Данфорд, Шварц, 1958; Рудин, 1973].

Определение 6. Оператор $B \in \text{End } X$ называется *неустойчивым*, если он обратим, а оператор B^{-1} является устойчивым.

Теорема 2 может быть существенно усилена без добавления каких-либо дополнительных условий.

Теорема 3. Если уравнение (2) с начальным условием $x(0) = 0$ разрешимо для любой последовательности $f \in l_\infty$, тогда оператор B является асимптотически устойчивым.

□ Рассмотрим уравнение (2) вида

$$x(k+1) = (1 + \alpha)Bx(k) + f(k),$$

где $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Очевидно, что оператор $(1 + \alpha)B \in \text{End } X$ и для него будут выполняться условия теоремы 2, то есть он будет являться устойчивым. Тогда для произвольного $\tilde{M}_d > 0$ имеем равенство

$$\sup_{k \in \mathbb{Z}_+} \|(1 + \alpha)^n B^n\| = \tilde{M}_d < \infty,$$

откуда получаем неравенство

$$\|(1 + \alpha)^n B^n\| \leq \tilde{M}_d,$$

а из него

$$|1 + \alpha|^n \|B^n\| \leq \tilde{M}_d.$$

Данное неравенство преобразуется в

$$\|B^n\| \leq \frac{\tilde{M}_d}{(1 + \alpha)^n},$$

правая часть которого обладает свойством

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tilde{M}_d}{(1 + \alpha)^n} = 0.$$

Отсюда имеем $\lim_{n \rightarrow \infty} \|B^n\| = 0$, что и означает асимптотическую устойчивость оператора B по определению 4. ■

Следствие. Если выполняются условия теоремы 3, то спектральный радиус оператора B удовлетворяет неравенству

$$r(B) < 1.$$

Данное утверждение непосредственно вытекает из эквивалентности условий (4) и (5).

Список литературы References

1. Баскаков А.Г. 1990. Теорема Винера и асимптотические оценки элементов обратных матриц. М., Функц. анализ и его прил., 24 (3): 64–65.
Baskakov A.G. 1990. Wiener's theorem and the asymptotic estimates of the elements of inverse matrices. Moscow, Funct. Anal. Appl., 24 (3): 222–224.
2. Баскаков А.Г. 1992. Абстрактный гармонический анализ и асимптотические оценки элементов обратных матриц. М., Матем. заметки, 52 (2): 17–26.
Baskakov A.G. 1992. Abstract harmonic analysis and asymptotic estimates of elements of inverse matrices. Moscow, Math. Notes, 52 (2): 764–771.
3. Баскаков А.Г. 1994. Спектральный анализ возмущенных неквазианалитических и спектральных операторов. М., Изв. РАН. Сер. матем., 58 (4): 3–32.
Baskakov A.G. 1995. Spectral analysis of perturbed nonquasianalytic and spectral operators. Moscow, Russian Acad. Sci. Izv. Math., 45(1): 1–31.
4. Баскаков А.Г. 1996. Полугруппы разностных операторов в спектральном анализе линейных дифференциальных операторов. М., Функц. анализ и его прил., 30 (3): 1–11.
Baskakov A.G. 1996. Semigroups of Difference Operators in Spectral Analysis of Linear Differential Operators. Moscow, Func. analysis and its app., 30 (3): 149–157.
5. Баскаков А.Г. 1997. Оценки элементов обратных матриц и спектральный анализ линейных операторов. М., Изв. РАН. Сер. матем., 61(6): 3–26.
Baskakov A.G. 1997. Estimates for the entries of inverse matrices and the spectral analysis of linear operators. Moscow, Izv. Math., 61(6): 1113–1135.



6. Баскаков А.Г. 2000. Об обратимости и фредгольмовости разностных операторов. М., Матем. заметки, 67 (6): 816–827.
Baskakov A.G. 2000. Invertibility and the Fredholm property of difference operators. Moscow, Math. Notes, 67 (6): 690–698.
7. Баскаков А.Г. 2001. Об обратимости линейных разностных операторов с постоянными коэффициентами. Казань, Изв. вузов. Матем., 45 (5):3–11.
Baskakov A.G. 2001. On the invertibility of linear difference operators with constant coefficients. Kazan, Russian Math. (Iz. VUZ), 45 (5): 1–9.
8. Баскаков А.Г., Пастухов А.И. 2001. Спектральный анализ оператора взвешенного сдвига с неограниченными операторными коэффициентами. Новосибирск, Сиб. матем. журн., 42 (6): 1231–1243.
Baskakov A.G., Pastukhov A.I. 2001. Spectral analysis of a weighted shift operator with unbounded operator coefficients. Novosibirsk, Siberian Math. J., 42 (6): 1026–1035.
9. Баскаков А.Г., Чернышов К.И. 2002. Линейные отношения, дифференциальные включения и вырожденные полугруппы. М., Функциональный анализ и его прил., 36(4): 65–70.
Baskakov A.G., Chernyshov K.I. 2002. Linear Relations, Differential Inclusions, and Degenerate Semigroups. Moscow, Funct. Anal. Appl., 36(4): 306–310.
10. Баскаков А.Г., Чернышов К.И. 2002. Спектральный анализ линейных отношений и вырожденные полугруппы операторов. М., Матем. сб., 193(11): 3–42.
Baskakov A.G., Chernyshov K.I. 2002. Spectral analysis of linear relations and degenerate operator semigroups. Moscow, Sb. Math., 193 (11): 1573–1610.
11. Баскаков А.Г. 2009. Спектральный анализ дифференциальных операторов с неограниченными операторными коэффициентами, разностные отношения и полугруппы разностных отношений. М., Изв. РАН. Сер. матем., 73 (2): 3–68.
Baskakov A.G. 2009. Spectral analysis of differential operators with unbounded operator-valued coefficients, difference relations and semigroups of difference relations. Moscow, Izv. Math., 73 (2): 215–278.
12. Баскаков А.Г., Синтяев Ю.Н. 2010. Разностные операторы в исследовании дифференциальных операторов: оценки решений. М., Дифференц. уравнения, 46 (2): 210–219.
Baskakov A.G., Sintyayev Yu.N. 2010. Finite-difference operators in the study of differential operators: Solution estimates. Moscow, Differ. Equ., 46 (2): 214–223.
13. Баскаков А.Г., Воробьев А.А., Романова М.Ю. 2011. Гиперболические полугруппы операторов и уравнение Ляпунова. М., Матем. заметки, 89 (2): 190–203.
Baskakov A.G., Vorobjev A.A., Romanova M.Yu. 2011. Hyperbolic Operator Semigroups and Lyapunov's Equation. Moscow, Math. Notes, 89 (2): 194–205.
14. Баскаков А.Г. 2013. Исследование линейных дифференциальных уравнений методами спектральной теории разностных операторов и линейных отношений. М., УМН, 68 (1(409)): 77–128.
Baskakov A.G. 2013. Analysis of linear differential equations by methods of the spectral theory of difference operators and linear relations. Moscow, Russian Math. Surveys, 68 (1): 69–116.
15. Баскаков А.Г., Дуплищева А.Ю. 2015. Разностные операторы и операторные матрицы второго порядка. М., Изв. РАН. Сер. матем., 79 (2) (2015): 3–20.
Baskakov A.G., Duplishcheva A.Yu. 2015. Difference operators and operator-valued matrices of the second order. Moscow, Izv. Math., 79 (2): 217–232.



16. Бичегкуев М.С. 2008. Об ограниченных решениях разностных включений. Казань, Изв. вузов. Матем, 52 (8): 16–24.
Bichegkuev M.S. 2008. On bounded solutions of difference inclusions. Kazan, Russian Math. (Izv. VUZ), 52 (8): 12–19.
17. Бичегкуев М.С. 2009. Линейные разностные и дифференциальные операторы с неограниченными операторными коэффициентами в весовых пространствах. М., Матем. заметки, 86 (5): 673–680.
Bichegkuev M.S. 2009. Linear difference and differential operators with unbounded operator coefficients in weight spaces. Moscow, Math. Notes, 86 (5-6): 637–644.
18. Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. 1958. Обобщенные функции. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. Вып. 3. М., Физматлит, 274.
Gelfand I.M., Shilov G.E. 1958. Obobshennie funkicii. Nekotorie voprosi teorii differentsialnyh uravnenii. Вып. 3 [Generalized Functions, Vol. 3: Theory of Differential Equations]. Moscow, Fizmailit, 274.
19. Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г. 1970. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М., Наука, 534.
Daletskii Y.L., Krein M.G. 1970. Ustoichivost reshenii differentsialnyh uravnenii v banahovom prostranstve [Stability of solutions of differential equations in a Banach space]. Moscow, Nauka, 534.
20. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. 1962. Линейные операторы. Т. I. Общая теория, ИЛ, М. 896 с.
Danford N., Shwartz J. T. 1958. Linear operators Part I: General theory, Interscience Publishers. 896 pp.
21. Крейн М.Г. 1948. О некоторых вопросах, связанных с кругом идей Ляпунова в теории устойчивости. М., УМН, 3 (3(25)): 166–169.
Krein M.G. 1948. O nekotorykh voprosakh, svazannykh s krugom idei Lyapunova v teorii ustoi-chivosti [On some issues related to Lyapunov's ideas in stability theory]. Moscow, UMN, 3 (3(25)): 166–169.
22. Рудин У. 1975. Функциональный анализ. М., Мир, 443.
Rudin W. 1973. Functional analysis. New York-Dusseldorf-Johannesburg, McGraw-Hill Ser. Higher Math., xiii+397.

Ссылка для цитирования статьи
Reference to article

Авилов А.В. 2019. Теорема М.Г. Крейна для разностных уравнений. Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика. 51 (3): 417–423. Doi: 10.18413/2075-4639-2019-51-3-417-423.

Avilov A.V. 2019. Krein theorem for difference equations. Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics. Physics. 51 (3): 417–423 (in Russian). Doi: 10.18413/2075-4639-2019-51-3-417-423.



**ФИЗИКА.
МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
PHYSICS.
MATHEMATICAL MODELING**

УДК 528.72;629.7

DOI 10.18413/2075-4639-2019-51-3-424-434

**МЕТОД ВОЗМУЩЕНИЙ ФИЗИКИ РАССЕЙЯНИЯ ВОЛН
В КОРРЕКЦИИ РЕЗКОСТИ ИЗОБРАЖЕНИЙ
ПРИ ДИСТАНЦИОННОМ ЗОНДИРОВАНИИ**

**PERTURBATION METHOD OF WAVE SCATTERING PHYSICS
IN CORRECTION OF SHARPNESS OF IMAGES UNDER REMOTE
SENSING**

В.Н. Винтаев

V.N. Vintaev

Белгородский университет кооперации, экономики и права,
Россия, 308023, Белгород, ул. Садовая, 116а

Belgorod University of Cooperation, Economics and Law,
116a Sadovaya St., Belgorod, 308023, Russia

E-mail: viktor.vn2010@yandex.ru

Аннотация

При формировании космического изображения высокого разрешения и коррекции резкости на нем целесообразно для улучшения резкости на изображении подключать процессы обработки изображений, построенные с учетом физики рассеяния световых потоков на исследуемых ареалах. В работе представлены технология и результаты соответствующей коррекции резкости для фрагментов отображения ареалов, порождающих физику рассеяния световых потоков, позволяющую использовать преимущественно метод возмущений для рассеяния падающего излучения на статистически неровных поверхностях.

Abstract

When forming a high-resolution space image and correcting sharpness on it, it is advisable to enhance image sharpness in the image to connect image processing processes built with consideration of the physics of light scattering in the studied areas. The paper presents the technology and the results of the corresponding sharpness correction for fragments of the display areas, generating physics of light flux scattering, which allows using mainly the method of perturbations to scatter the incident radiation on statistically uneven surfaces.

Ключевые слова: деконволюция, зона Фраунгофера, метод возмущений, конечно-разностная миграция волн, космическое изображение, пространственно-частотный спектр, рекурсивное продолжение пространственно-частотного спектра.

Key words: deconvolution, Fraunhofer zone, perturbation method, finite-difference wave migration, space image, spatial-frequency spectrum, recursive continuation of the spatial-frequency spectrum.

Введение

Для большинства космических изображений и представленного в работе исследуемого космического изображения можно отметить следующее: в объектив телескопа космического аппарата (КА) при способе наблюдения в надир и при боковом облучении солнцем объектов на ареале попадает рассеянное на статистически неровной поверхности излучение. Расчеты прогнозируемых и/или согласуемых с возможностями оптики интенсивностей засветок пикселей чувствительных транспарантов (приборов с зарядовой связью – ПЗС) на КА для формирования цифровых изображений исследуемых ареалов в оптическом диапазоне излучения при этом реализуются основными тремя методами — методом возмущений и продолжения (миграции) или дифракции поля в конечных разностях (в верхнее полупространство) при малых пологих неровностях, методом Кирхгофа (методом нахождения отраженных лучей) при больших, гладких и пологих неровностях и методом двухмасштабного представления неровностей в случае совершенно произвольных по параметрам статистических неровностях [Басс, Фукс, 1972; Прэтт, 1982; Тихонов, 1966]. Все три метода при синтезе изображения только приближенно соответствуют предельным требованиям объективности отображения ареалов, однако следует учесть, что сам факт наличия на изображении при его формировании пространственного разрешения с неравным нулю параметром Рэлея (минимумом апертуры функции рассеяния точки (ФРТ) на изображении), соответствующего на ареале $0,3\text{--}2\text{ м}$ (в некоторых случаях $0,15\text{--}2\text{ м}$) для снимков, квалифицируемых как снимки высокого и сверхвысокого разрешения с высочайшими достижениями по их формированию нарушает все идеальные пожелания по разрешению (и, соответственно, резкости на изображении). На современном этапе обсуждаемая объективность отображения регулируется некоторыми подогнанными под реализуемость требованиями по отношению к гипотетическим идеальным пределам [Park и др., 2003; Константинов и др., 2014; Кочанов и др., 2010]. Набор таких требований квалифицирует так называемую валидность изображения — соответствие параметров изображения требованиям по резкости, геометрическим [Бобков, Роньшин, 2010; Жиленев, Винтаев, 2011; Москвитин, 2003], яркостным характеристикам и т. д. Однако при моделировании процессов рассеяния в верхнее полупространство при всем сказанном на основании [Басс, Фукс, 1972] принципов суперпозиции волн можно начинать экспериментировать в численных расчетах с излучениями с масштабируемыми длинами волн в моделях, соответствующими уровню получаемого реального разрешения по Рэлею на ареале. Такие длины волн будут гораздо выше длин волн реального облучения поверхности в $380\text{--}780\text{ нм}$, что существенно снижает объемы вычислительных затрат. Очевидно, что в модели на базе основополагающего принципа о достижении некоторого или заданного разрешения при зондировании волновым процессом необходимо работать с длиной волны, которая будет не выше ожидаемого пространственного разрешения, и для метода возмущений это дает возможность оценки среднеквадратичных размеров неоднородностей, участвующих продуктивно в рассеянии излучения [Остриков, 2012]. При выборе длины волны, согласованной в модели рассеяния с ожидаемым при обработке исходного изображения новым уровнем пространственного разрешения, должно обеспечиваться выполнение по теории рассеяния на малых неровностях (шероховатостях) [Басс, Фукс, 1972] требование $KQ < 1$ (здесь K – волновой вектор с модельной длиной волны λ , соответствующей ожидаемому разрешению, а Q – среднеквадратичные размеры малых неровностей,



не нарушающих приведенного условия при подстановке в неравенство их среднеквадратичного значения). Это позволяет получить оценку среднеквадратичных размеров неровностей, участвующих в процессе рассеяния излучения в сторону оптики KA .

В данной работе предпринята попытка построить коррекцию резкости на изображении, формируемом в модели рассеяния зондирующего излучения на исследуемом ареале с последующей дообработкой методом, который строится на положениях, совершенно не связанных с фактурой рассеивающей зондируемой поверхности, а именно: дообработка сформированного изображения строится так, чтобы частотно-контрастная характеристика (ЧКХ) сложившегося в данный момент тракта зондирования приближалась по огибающей к квазипрямоугольной форме окна пропускания пространственных мод, и довести которую до желаемого состояния прямоугольности при выполняемых дообработках корректируемых изображений не всегда возможно [Грузман и др., 2002], т. к. начинает мешать процесс контрастирования изображения, в который перерождается коррекция резкости [Бейтс, Мак-Доннел, 1989; Винтаев и др., 2014; Винтаев, Ушакова, 2018а; Винтаев, Ушакова, 2018б]. К этому приводит, как правило, неучитываемый или некорректно идентифицируемый рост амплитуд верхних мод пространственно-частотного спектра (ПЧС) на некоторых выделенных участках корректируемого изображения [Ращупкин, 2010]. Соответствующих «волновых» цифровых моделей рассеяния зондирующего излучения для космических платформ пока не выявлено в литературных источниках, в связи с чем ставится эксперимент по коррекции резкости постфактум сформированного изображения, как модели исследуемого ареала, задающего стартовые (граничные) значения волновых амплитуд рассеиваемого поля, изображения, населенного в большей мере маломасштабными гладкими и пологими статистическими неоднородностями яркости, трактуемых как модели малых неровностей, для которых подбор длин модельных волн позволяет сформулировать соотношение « $KQ < 1$ », являющееся критерием использования при моделировании метода миграции (продолжения) поля в рамках соответствующей теории возмущений [Басс, Фукс, 1972].

2. Метод исследования

Исходя из вышесказанного, строим предположение о достижении на методе возмущений поддержки пространственного разрешения втрое лучшего, чем на исходном снимке, т. е. будем реализовывать миграцию рассеянного поля с длиной волны в модели $\lambda=0,3$ м. Для волнового вектора с длиной волны $\Lambda=0,3$ м соотношение $KQ < 1$ выполняется для статистических неровностей со среднеквадратичным размером Q , меньшим $(20,9)^{-1}$ м, т. е. меньшим 4,7 см. Физика, поддерживающая исследования, следующая: на изображении с разрешением в 1 м стохастические детали в 4,7 см высотой по правилу трех σ (трех сигм) могут быть представлены как имеющие гауссоподобную форму с апертурой пятки 14,1 см, т. е. в 7 раз меньше критерия Рэлея при заданном разрешении. В паллиативе и в первом приближении можно считать, что на приведенном изображении такие детали подавлены по яркости примерно в 7 раз и увеличение резкости в ожидаемые три раза по аналогичным рассуждениям позволит констатировать присутствие выявленных деталей в 4,7 см с подавлением их яркости примерно в 2,3 раза относительно среднего значения яркости на полученном изображении. Это свидетельствует о возможном увеличении степени детальности на изображении с использованием метода миграции поля на длине волны $\lambda = 0,3$ м.

Как правило, практически на всех снимках и на предъявленном снимке имеются кроме малых неоднородностей и крупномасштабные (гладкие) неровности, дающие повод для расчета рассеяния по правилам Кирхгофа, но практика расчетов интенсивностей засветок пикселей ПЗС [Шовенгердт, 2010] показывает, что применение и к таким участкам ареалов метода возмущений для углов попадания в оптику КА с учетом суммирования в точках приема по правилам суперпозиции волн со случайной фазой не меняет картину интенсивностей для формирования изображения, добавляя лишь некоторый объем вычислений для углов рассеяния, близких к углам отражения от спрямляемых площадок (по Кирхгофу). В целом практика расчетов засветок пикселей не идентична практике формирования полного изображения изучаемого участка местности за счет высокого различия объема суммируемых со случайной фазой волн [Удод, 2002; Ушакова, 2004; Ушакова, Винтаев, 2017] для зоны Фраунгофера (высота орбиты более 200 км) учитываемых участков рассеяния в методе миграции для расчета засветок и для формирования полного изображения.

Используем утилиты построения изображения сред пакета FINES, предназначенного для обработки и анализа профилей в сейсморазведке и являющегося свободно распространяемым программным продуктом из сейсмического комплекса SPS [Программный комплекс SPS-PC (SeismicProcessingSystem), 2004]: селекцию волн методом РНП (регулируемым направленным приемом) и утилиту конечно-разностной миграции волн и учетом при составлении задания комплексу SPS, что количество границ раздела сред для построения модели рассеяния равно единице (с высокой степенью прозрачности среды передачи излучения и отсутствием рефракций и объемных рассеяний, чего нельзя с уверенностью сказать при особых погодных условиях в атмосфере, представимых так называемыми капельными моделями [Шовенгердт, 2010]).

Т. к. мы не можем воспользоваться высокоэффективной утилитой когерентной фильтрации из комплекса SPS из-за замены в модели процесса интерференции волн в лучах на суммирование яркостей в лучах в режиме случайной фазы, то столкнувшись при этом с высокоэнергетической среднеквадратичной составляющей на изображении при накоплении сигнала на каждом формируемом пикселе, имеющей «низкочастотный» ПЧС с оцененным выше уровнем подавления яркости малых деталей, будем вынуждены выполнять для подавления возникающей среднеквадратичной составляющей яркости изображения описанную выше не связанную с физикой рассеяния лучей деконволюцию изображения полученного на методе возмущений при построении миграции поля.

Для выполнения деконволюции и повышения резкости и разрешения, что эквивалентно снижению или подавлению почти постоянного среднеквадратичного фона целесообразно осуществить продолжение ПЧС изображения в сторону расположения вышних мод после его синтеза методом миграции волнового поля на длине волны $\lambda = 0,3$ м.

Эксперименты показывают, что аналитическое продолжение спектра за дифракционный предел $KQ = 1$ (что соответствует максимальному радиусу ЧКХ сформированного тракта зондирования) возможно с восстановлением всего нескольких пространственных частот, если энергетическое отношение вида сигнал/шум на изображении было не ниже 1000/1 [Прэтт, 1982]. Для снимков высокого разрешения это условие является практически нижней границей. Альтернативно методам аналитического продолжения спектров разработанный метод деконволюции в виде рекурсивного продолжения ПЧС приводит к эффекту продолжения спектров с расширением полос спектров (уве-



личением радиусов ПЧС) [Винтаев, Ушакова, 2018а; Винтаев, Ушакова, 2018б] до 2–4 раз.

Решение задачи коррекции резкости изображений без учета физики рассеяния волн на ареалах в дистанционном зондировании целесообразно начинать с построения ЧКХ сложившегося для данного изображения тракта зондирования с последующей ее оптимизацией под квазипрямоугольное по форме огибающей окно пропускания ПЧС гипотетических изображений. Стартовая для последующей оптимизации ЧКХ определяется как частное от деления ПЧС регистрируемого изображения и ПЧС возмущенного достаточно мало в сторону усиления высших мод ПЧС зарегистрированного изображения.

Оптимизация ЧКХ проводится минимизацией функционалов, сформулированных на требованиях:

- минимизации тенденции спада и роста аппликат ЧКХ вплоть до приближения к высшим спектральным модам в заданных пределах;
- максимально возможной гладкости огибающей поверхности ЧКХ;
- наиболее крутого спада ЧКХ в области высшей спектральной моды тракта;
- мажорирования огибающей ЧКХ⁻¹ огибающую спектрального представления оператора деконволюции (СПОД) даже с возмущающей добавкой;
- вписывания огибающей спектрального представления наблюдаемого на изображении опорного ориентира (ОО) в огибающую ЧКХ;
- не превышения значением порядка обобщенного градиентного оператора порога (порядок оператора 0,25 [Винтаев, Ушакова, 2018а; Винтаев, Ушакова, 2018б], при котором резидентно могут присутствовать глобальное контрастирование и далее выделение контуров в первом шаге коррекции – аддитивной коррекции, выполняемой в виде соотношения

$$S_H = S_R + a \operatorname{grad}_\alpha(S_R), \quad (1)$$

где S_R – формируемое (наблюдаемое) изображение; S_H – восстанавливаемое изображение, a – варьируемый при оптимизации ЧКХ коэффициент аддитивной коррекции резкости, при использовании обобщенного градиентного оператора $\operatorname{grad}_{\alpha\beta}(S)$ в виде $\operatorname{grad}_{\alpha\alpha}(S) = \operatorname{grad}_\alpha(S)$, где градиентный оператор конструируется в виде нормы вектора $(D_x^\alpha S(x, y), D_y^\alpha S(x, y))$, т. е.

$$\operatorname{grad}_{\alpha\beta}(S) = ((D_x^\alpha S)^2 + (D_y^\beta S)^2)^{1/2}, \quad (2)$$

а операция D^α имеет нецелый неотрицательный порядок.

Ввиду того, что восстанавливаемое изображение мы можем и не знать принципиально, то, учитывая предстоящий последующий процесс оптимизации ЧКХ с практически достоверной независимостью этого процесса от начальной формы огибающей ЧКХ, целесообразно гипотетическое изображение получить из наблюдаемого, слабо возмущая его в сторону улучшения резкости соотношением (1).

В терминах теории операторов – оператор $(\operatorname{grad}_\alpha)$ имеет порядок α , а для оператора $(1 + a(\operatorname{grad}_\alpha))$, т. к. он имеет тенденцию к росту амплитуд гармоник в высших модах спектра, можно подобрать эффективный порядок. Это будет порядок обобщенного градиентного оператора, спектр которого аппроксимирует спектр оператора $(1 + a \operatorname{grad}_\alpha)$ по методу наименьших квадратов с минимальным значением невязки.

В соответствии с упоминаемой выше возможностью компенсации провала в верхних модах ЧКХ тракта, используя $\operatorname{grad}_{\alpha\beta}(S)$ в виде $\operatorname{grad}_{\alpha\alpha}(S) = \operatorname{grad}_\alpha(S)$ целесообразно



реализовать коррекцию S_R в виде (1) с рекурсивным использованием оператора $(1 + a \text{grad}_\alpha)$, отслеживая и предотвращая преобразование процесса коррекции резкости в контрастирование.

Производные нецелого порядка реализуем на базе прямого продолжения на вещественные значения порядка спектрального представления операции дифференцирования – D_x^α, D_y^α ($0 \leq \alpha, \beta \leq 1$), определяемого для допускающих Фурье-представление функций виде:

$$D_x^\alpha, D_y^\alpha S(x, y) = \int (J\omega_x)^\alpha (J\omega_y)^\beta F_S(\omega_x, \omega_y) e^{J(x\omega_x + y\omega_y)} d\omega_x d\omega_y. \quad (3)$$

Первичная стартовая коррекция (а priori выполняемая с явной недостаточностью восстановления или увеличения резкости (без резидентного контрастирования)) в виде аддитивной коррекции с дальнейшими манипуляциями по технологии продолжения ПЧС изображения при выполнении условий отсутствия «чрезмерного» усиления высших мод ПЧС реализуется при достаточно малых значениях a и альфа в соотношении (1), не вызывающих эффектов контрастирования изображения.

Для получения стартового изображения с коррекцией соотношением (1) выбирается последовательно методом половинного деления интервала 0,01-0,5 ряд значений коэффициента аддитивной коррекции a с условием отсутствия признаков контрастирования при минимальном значении порядка α градиентного оператора. Минимальное значение при наборе в повторной коррекции эффективного порядка оператора значения не более 0,25 выбирается при использовании аддитивной коррекции с первоначальным порядком $(0,25)^{0,5}$ и т. д. Очевидно, что при увеличении длины рекурсии в L раз необходимо выбирать стартовое значение a порядка оператора аддитивной коррекции $(0,25)^{0,5/L}$. Очевидно, что с увеличением стартового значения a и α уменьшается число L , ограничиваемое явными признаками контрастирования изображения, но растет риск пропуска лучшего результата по резкости. Для слишком малых стартовых значений параметров формулы аддитивной коррекции резкости рекурсивный процесс плавно с малым шагом дискретности при вычислениях приближается по результату к изображению с лучшей резкостью, но цена этого подхода – высокий или слишком высокий объем вычислений. Так как сюжеты и дисперсия их преобразования на изображениях псевдослучайны, то вывести некую оптимальную формулу по числу рекурсий нет возможности, т. к. все оценки операторов деконволюции можно строить на уровне вычисления их норм, которые могут быть одинаковыми кроме того и для разных сюжетов на изображениях [Коллатц, 1969; Цибанов, 2008]. Однако в интерактивном режиме процесс коррекции резкости достаточно легко оценивается, главным образом в перспективе, т.е. в направлении, куда он движется – к повышению резкости или к почти неконтролируемому повышению верхних мод ПЧС. Таким образом организуется рекурсивное продолжение пространственно-частотного спектра изображения.

3. Результаты исследования

На рисунке 1 приведен фрагмент космического изображения высокого разрешения (Ikonos_sandiego_usa_1m) со спутника Ikonos (1 м разрешения на местности) территории г. Сан-Диего в США, штат Калифорния и его ПЧС. Видно, что фактура зондируемой поверхности на 80 % по площади изображения заселена маломасштабными

и пологими неровностями. Угол места солнца соответствует отклонению вектора облучения от вертикали примерно на 30 градусов (по оценке размеров теней от объектов с приблизительно известной высотой).

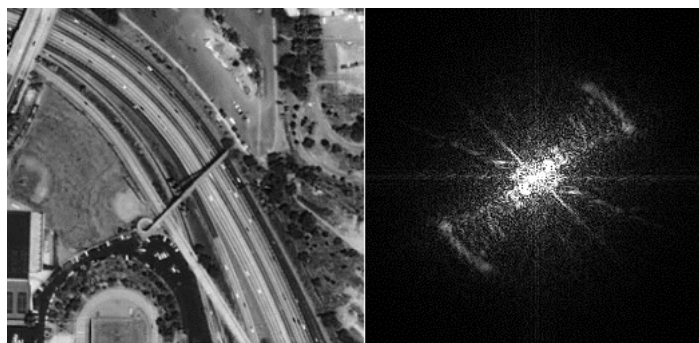


Рис. 1. Исходное изображение Ikonos_sandiego_usa_1m и его ПЧС
Fig. 1. Original Image Ikonos_sandiego_usa_1m and its PСP

На рисунке 2 (Ikonos_sandiego_usa_1m) приведен вариант рекурсивного продолжения спектра на изображении с целью улучшения резкости (продолжения ПЧС) изображения на формуле аддитивной коррекции резкости с остановом процесса при появлении признаков перерождения коррекции резкости в контрастирование. Получен заметный результат в расширении радиуса ПЧС изображения.

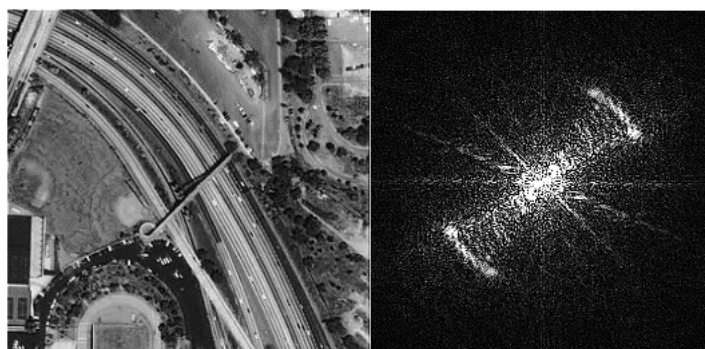


Рис. 2. Ikonos_sandiego_usa_1m и его ПЧС: результат адаптивной деконволюции изображения на варианте рекурсивного продолжения спектра (продолжения ПЧС) изображения на формуле аддитивной коррекции резкости

Fig. 2. Ikonos_sandiego_usa_1m and its PNP: the result of adaptive deconvolution of the image on the variant of the recursive continuation of the spectrum (continuation of PNP) of the image on the formula of additive sharpness correction

Наиболее успешное расширение радиуса ПЧС приведено на рисунке 3 при использовании метода возмущений в модели миграции рассеянного поля с модификацией метода возмущений и вычисления результатов миграции поля в используемом пакете на накопление сигналов, представленных со случайной фазой с длиной волны 0,3 м, с выполнением последующей дообработки изображения оператором деконволюции построенном на основе оптимизированной ЧКХ тракта зондирования.



Рис. 3. Ikonos_sandiego_usa_1m и его ПЧС при использовании метода возмущений и миграции поля для коррекции операции улучшения резкости с выполнением необходимой дообработки оператором деконволюции

Fig. 3. Ikonos_sandiego_usa_1m and its PNP using the perturbation method and field migration to correct the sharpness improvement operation with the necessary additional processing by the deconvolution operator

4. Заключение

Применение метода возмущений при расчете в модели рассеяния на малых статистических неровностях, зондирующего ареал излучения с моделируемой длиной волны в 0,3 м для подстилающей поверхности, сформированной как изображение с разрешением, соответствующим 1 м на ареале с последующей адаптивной деконволюцией формируемого изображения методом рекурсивного продолжения спектра, реализует изменение детальности и фактуры полученного изображения (Рис. 3), отличающиеся в лучшую сторону от детальности и фактуры изображений при формально объективных методах поддержки квазипрямоугольности ЧКХ тракта зондирования (Рис. 2).

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта №18-07-00201 «Разработка фундаментальных основ мягкого системного анализа и моделирования систем формирования и верификации космических изображений высокого и сверхвысокого разрешения по данным с группировок орбитальных аппаратов в неопределенных и предельно допустимых условиях орбитальных съемок» и научного проекта №19-07-00697 «Разработка основ системного анализа и моделирования коррекции резкости космических изображений сверхвысокого разрешения на базе модернизации теоретико-типовых математических и семантических подходов для прогноза и реализации максимально возможных характеристик по пространственному разрешению».

Список литературы References

1. Басс Ф.Г., Фукс И.М. 1972. Рассеяние волн на статистически неровной поверхности. М.: Наука, 409.
Bass F.G., Fuks I.M. 1972. Rasseyanie voln na statisticheski nerovnoy poverkhnosti. M.: Nauka, 409.



2. Бейтс Р., Мак-Доннел М. 1989. Восстановление и реконструкция изображений. М.: Мир, 336.
Bejts R., Mak-Donnel M. 1989. Vosstanovlenie i rekonstrukcija izobrazhenij. M.: Mir, 336.
3. Бобков В.А., Роньшин Ю.И. 2010. Автоматическое сопоставление линий на калиброванных изображениях. Информационные технологии и вычислительные системы, (4): 16–24.
Bobkov V.A., Ron'shin Ju.I. 2010. Avtomaticheskoe sopostavlenie linij na kalibrovannyh izobrazhenijah. Informacionnye tehnologii i vychislitel'nye sistemy, (4): 16–24.
4. Винтаев В.Н., Жиленев М.Ю., Маторин С.И., Ушакова Н.Н., Щербинина Н.В. 2014. Адаптивное восстановление резкости на цифровых космических изображениях. Информационные технологии и вычислительные системы, (4):33–43.
Vintaev V.N., Zhilenev M.J., Matorin S.I., Ushakova N.N., Scherbinina N.V. 2014. Adaptive restoration of sharpness on digital space images. Information technologies and computing systems, (4): 33–43.
5. Винтаев В.Н., Ушакова Н.Н. 2018 а. Методы повышения детальности на материалах дистанционного зондирования для территориальных информационных систем. Белгород, ООО «ГиК», 187.
Vintaev V.N., Ushakova N.N. 2018 a. Metody povysheniya detalnosti na materialakh distancionnogo zondirovaniya dlya territorialnykh informacionnykh system. Belgorod, ООО «GiK», 187.
6. Винтаев В.Н., Ушакова Н.Н. 2018 б. Нетривиальная коррекция космических изображений высокого разрешения. Саарбрюккен, Германия, Lambert Academic Publishing, 208.
Vintaev V.N., Ushakova N.N. 2018 b. Netrivial'naja korrekcija kosmicheskikh izobrazhenij vysokogo razresheniya. Saarbrjukken, Germanija, Lambert Academic Publishing, 208.
7. Грузман И.С., Киричук В.С., Косых В.П., Перетягин Г.И., Спектор А.А. 2002. Цифровая обработка изображений в информационных системах. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 352.
Gruzman I.S., Kirichuk V.S., Kosyh V.P., Peretjagin G.I., Spektor A.A. 2002. Cifrovaja obrabotka izobrazhenij v informacionnyh sistemah. Novosibirsk: Izd-vo NGTU, 352.
8. Жиленев М.Ю., Винтаев В.Н. 2011. Формула расчета движения изображения при орбитальной съемке планет оптико-электронной аппаратурой. Телекоммуникации (TELECOMMUNICATIONS AND RADIOENGINEERING). (7):2–7.
Zhilenev M.Yu., Vintaev V.N. 2011. Formula rascheta dvizheniya izobrazheniya pri orbital'noy s'emke planet optiko-elektronnoy apparaturoy. Telekommunikatsii (TELECOMMUNICATIONS AND RADIOENGINEERING). (7):2–7.
9. Коллатц Л. 1969. Функциональный анализ и вычислительная математика. Пер. с нем. М., Мир, 447 с.
Kollatc L. 1969. Funkcional'nyj analiz i vychislitel'naja matematika. Per. s. nem. M., Mir, 447 s.
10. Константинов И.С., Щербинина Н.В., Жиленев М.Ю., Винтаев В.Н., Ушакова Н.Н. 2014. Специальная коррекция в процедурах регуляризации и итеративных процессах уменьшения размеров пятна функции рассеяния точки на космических изображениях. Научные ведомости Белгородского государственного университета. 15 (186): 166–175.
Konstantinov I.S., Shherbinina N.V., Zhilenev M.Ju., Vintaev V.N., Ushakova N.N. 2014. Special'naja korrekcija v procedurah reguljarizacii i iterativnyh processah umen'sheniya razmerov pjatna funkicii rassejanija tochki na kosmicheskikh izobrazhenijah. Nauchnye vedomosti Belgorodskogo gosudarstvennogo universiteta. 15 (186): 166–175.

11. Кочанов А.А., Обухов А.Г., Просовецкий Д.В. 2010. Методы восстановления изображений и распознавание образов в радиоастрономии. *Солнечно-земная физика*, (16): 154–161.
Kochanov A.A., Obuhov A.G., Prosoveckij D.V. 2010. *Metody vosstanovlenija izobrazhenij i raspoznavanie obrazov v radioastronomii. Solnechno-zemnaja fizika*, (16): 154–161.
12. Москвитин А.Э. 2003. Технологии и алгоритмы повышения качества изображений земной поверхности на основе комплексирования спектрозональной информации. Диссертация на соискание уч. степени кандидата технических наук по специальности 05.13.01. Рязань, 130.
Moskvitin A.Е. 2003. *Tehnologii i algoritmy povyshenija kachestva izobrazhenij zemnoj poverhnosti na osnove kompleksirovanija spektrozonal'noj informacii. Dissertacija na soiskanie uch. stepeni kandidata tehniceskikh nauk po special'nosti 05.13.01. Rjazan'*, 130.
13. Остриков В.Н. 2012. Оценка функции рассеяния точки на произвольном снимке посредством слепого восстановления. В кн.: *Техническое зрение в системах управления 2011. Материалы научно-технической конференции (Москва, 15–17 марта 2011 г.)*. Москва: Изд-во Института космических исследований РАН: т. 38: 16–21.
Ostrikov V.N. 2012. *Ocenka funkcii rasseyanija toчки na proizvol'nom snimke posredstvom slepogo vosstanovleniya. V kn.: Tekhnicheskoe zrenie v sistemah upravleniya 2011. Materialy nauchno-tehniceskoi konferencii (Moskva, 15–17 marta 2011 g.)*. Moskva: Izd-vo Instituta kosmicheskikh issledovanij RAN: t. 38: 16–21.
14. Программный комплекс SPS-PC (Seismic Processing System). 2004. URL: <http://www.sps-pc.ru/> (дата обращения: 15 мая 2019).
Programmnyj kompleks SPS-PC (Seismic Processing System). 2004. Available at: <http://www.sps-pc.ru/> (data obrashhenija: 15 maja 2019).
15. Прэтт У. 1982. Цифровая обработка изображений. М.: Мир. Ч.4, 115.
Prett U. 1982. *Cifrovaya obrabotka izobrazhenij*. M.: Mir. ch.4, 115.
16. Ращупкин А.В. 2010. Технологии обработки видеoinформации, обеспечивающие качество аэрокосмических изображений. *Вестник Самарского государственного аэрокосмического университета*. (2):42–48.
Rashchupkin A.V. 2010. *Tehnologii obrabotki videoinformacii, obespechivajushchie kachestvo ajerokosmicheskikh izobrazhenij. Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo ajerokosmicheskogo universiteta*. (2):42–48.
17. Тихонов В.И. 1966. Статистическая радиотехника. М.: Советское радио, 677.
Tihonov V.I. 1966. *Statisticheskaja radiotehnika*. M.: Sovetskoe radio, 677.
18. Удод В.А. 2002. Оптимальная по разрешающей способности линейная фильтрация изображений. Дисс. на соискание ученой степени доктора техн. наук. Томск, 338.
Udod V.A. 2002. *Optimal'naja po razreshajushchej sposobnosti linejnaja fil'tracija izobrazhenij. Diss. na soiskanie uchenoj stepeni doktora tehn. nauk. Tomsk*, 338.
19. Ушакова Н.Н. 2004. Коррекция цифровых космических изображений на основе верифицирующего моделирования. Дисс. на соискание ученой степени канд. техн. наук. Белгород, 255.
Ushakova N.N. 2004. *Korrekcija cifrovых kosmicheskikh izobrazhenij na osnove verificirujuščego modelirovanija. Diss. na soiskanie uchenoj stepeni kand. tehn. nauk. Belgorod*, 255.



20. Ушакова Н.Н., Винтаев В.Н. 2017. Итеративный оператор деконволюции в вариантах модели формирования изображения со сверхразрешением в группировке космических аппаратов. Научные ведомости Белгородского государственного университета, 20(269)/48: 131–145.
Ushakova N.N., Vintaev V.N. 2017. Iterativnyj operator dekonvoljucii v variantah modeli formirovanija izobrazhenija so sverhrazresheniem v gruppirovke kosmicheskikh apparatov. Nauchnye vedomosti Belgorodskogo gosudarstvennogo universiteta, 20(269)/48: 131-145.
21. Цибанов В.Н. 2008. Регуляризирующие методы фильтрации и восстановления изображений: Дисс. на соискание ученой степени канд. физ. мат. наук. Москва, 113.
Cibanov V.N. 2008. Regularization Methods of Filtering and Image Restoration: Diss. na soiskanie uchenoj stepeni kand. fiz. mat. nauk. Moskva, 113.
22. Шовенгердт Р.А. 2010. Дистанционное зондирование. Методы и модели обработки изображений. Москва: Техносфера, 560.
Shovengerdt R.A. 2010. Distancionnoe zondirovanie. Metody i modeli obrabotki izobrazhenij. Moskva: Tehnosfera, 560.
23. Park S.C., Park M.K., Kang M.G. 2003. Super-resolution image reconstruction: A technical overview. IEEE Signal Processing Magazine. 20(3): 21–36.

Ссылка для цитирования статьи
Reference to article

Винтаев В.Н. 2019. Метод возмущений физики рассеяния волн в коррекции резкости изображений при дистанционном зондировании. Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика. 51 (3): 424–434. Doi: 10.18413/2075-4639-2019-51-3-424-434.

Vintaev V.N. 2019. Perturbation method of wave scattering physics in correction of sharpness of images under remote sensing. Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics. Physics. 51 (3): 424–434 (in Russian). Doi: 10.18413/2075-4639-2019-51-3-424-434.



УДК 517.958 [550.3 + 551.5]

DOI 10.18413/2075-4639-2019-51-3-435-443

**СУБЛИМАЦИОННЫЙ РОСТ ЛЕДЯНЫХ ЧАСТИЦ ВО
ФРАКТАЛЬНЫХ ОБЛАКАХ**
**SUBLIMATION GROWTH OF ICE PARTICLES IN FRACTALITY
CLOUDS**

Т.С. Кумыков

T.S. Kumukov

Институт прикладной математики и автоматизации – филиал Федерального
государственного бюджетного научного учреждения «Федеральный научный центр
Кабардино-Балкарский научный центр Российской академии наук»
Россия, КБР, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89 А

Institute of Applied Mathematics and Automation of Kabardin-Balkar Scientific Centre of RAS,
89 A Shortanova St., Nalchik, 360004, Russia

E-mail: macist20@mail.ru

Аннотация

В работе на основе дифференциального уравнения дробного порядка рассмотрено влияние фрактальности среды на сублимационный рост облачных ледяных частиц. Проведены численные эксперименты для оценки влияния фрактальности среды на рост облачных частиц при различных сочетаниях микрофизических параметров. Определена общая зависимость роста облачных ледяных частиц от различных параметров фрактальности среды. Обнаружены зоны проявления фрактального эффекта в процессе сублимации ледяных частиц.

Abstract

On the basis of differential equations of fractional order are considered, the influence of fractality of the environment on the sublimation growth of cloud ice particles. Numerical experiments are performed to assess the impact of the fractality of the medium on the growth of cloud particles at different combinations of microphysical parameters. Determined the General dependence of the growth of cloud ice particles on various parameters of fractality of the environment.

Ключевые слова: сублимация, ледяная частица, фрактальная размерность, математическая модель, облако.

Key words: sublimation, ice particle, fractal dimension, mathematical model, cloud.

Введение

В последние годы исследователи, работающие в области физики облаков, проявляют значительный интерес к вопросу формирования и степени влияния фрактальности облачной среды на различные геопроцессы [Iudin и др. 2003]. Одним из таких процессов является сублимационный рост ледяных частиц, который играет существенную роль в возникновении грозных облаков, когда влажность облачной среды велика и протекает процесс перекачки водяного пара с облачных капелек на ледяные частицы [Мучник,



1974]. Известно также, что кристаллики льда играют важную роль в распространении солнечной и земной радиации, которая оказывает большое влияние на погодные условия и климат Земли. Поэтому получение более полной информации о свойствах ледяных частиц с использованием фрактального анализа позволит наиболее точно осуществить моделирование различных процессов в атмосфере.

Исследованием сублимационного роста ледяных частиц для полидисперсного облака занимались многие ученые, в числе которых Шифрин К.С., Перельман А.Я., решением задачи перегонки водяного пара с льдинок на сферические ледяные частицы для полидисперсного облака занимался Буйков М.В., над вопросом кристаллизации полидисперсного переохлажденного облака благодаря замерзанию льдинок работали Колесников А.Г. и Беляев В.И., из зарубежных – Фольмер М., Хаутон Х., Мейсон Дж. и др. Все эти исследования велись без учета фрактальности облачной среды.

В настоящей работе проводится исследование особенностей сублимационного роста облачных ледяных частиц исходя из фрактальности среды.

2. Постановка и решение задачи

Область возникновения ледяных частиц в облачной среде заключена между упругостью насыщения над водой и упругостью насыщения над льдом и описание изменения геометрических размеров кристаллов вследствие сублимации водяного пара весьма затруднено. Поэтому обычно ограничиваются описанием диффузионного роста массы ледяной частицы, используя электростатическую аналогию [Шишкин, 1964]. Сублимационный процесс существенно зависит от соотношения количества и размеров льдинок. В случае различных размеров направление перегонки водяного пара зависит от размеров плотностей насыщающего пара над поверхностями частиц.

Рассмотрим ледяную частицу сферической формы, рост которой осуществляется по упрощенной схеме в условиях водяного насыщения. Воспользовавшись аналогией между уравнением диффузии водяного пара к частице и уравнением электрического потенциала заряженной частицы в однородном диэлектрике и выражая массу льдинки через радиус, можем записать

$$\frac{dr}{dt} = \frac{3Dcf(q_w - q)}{r^2\rho}, \quad (1)$$

где r – радиус частицы, $(q_w - q)$ – разность плотностей водяного пара в окружающем пространстве и у поверхности льдинки, f – ветровой множитель, A – емкость, D – коэффициент диффузии водяного пара в воздухе.

По схеме Мейсона [Шишкин, 1964], учитывая, что плотность водяного пара q связана с его упругостью p

$$q = \frac{pM}{RT}, \quad (2)$$

где M – молекулярный вес воды, R – универсальная газовая постоянная, T – температура среды, для скорости роста радиуса частицы (1) запишем

$$\frac{dr}{dt} \frac{r^2\rho}{3Dcf} \frac{RT}{M} = p_w(T) - p(T_i), \quad (3)$$

где T_i – температура поверхности льдинки.



Принимая во внимание уравнение баланса теплоты, в которой выделение скрытой теплоты сублимации должно компенсироваться теплоотдачей в окружающую среду запишем

$$L \frac{dr}{dt} = \frac{3ckf}{r^2\rho} (T_i - T). \quad (4)$$

Зависимость упругости пара, насыщенного над льдом, от температуры получаем из формулы Клайперона-Клаузиуса

$$\frac{1}{p} \frac{dp}{dT} = \frac{LM}{RT^2}. \quad (5)$$

Интегрируя (5), получим:

$$\ln \frac{p(T_i)}{p(T)} = \frac{LM}{R} \frac{T_i - T}{TT_i}. \quad (6)$$

Принимая $T \approx T_i$

$$\frac{p(T_i) - p(T)}{p(T)} = \frac{LM}{R} \frac{T_i - T}{T^2}. \quad (7)$$

С учетом (4), (7) примет вид

$$p(T_i) - p(T) = \frac{LM}{R} \frac{p(T)}{T^2} \frac{Lr^2\rho}{3ckf} \frac{dr}{dt}. \quad (8)$$

Складывая (3) и (8) с учетом, что $\frac{p_w(T) - p(T)}{p(T)} = \varepsilon$ – относительное пересыщение по отношению ко льдинке при температуре T , получаем:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{3cf\varepsilon}{r^2\rho \left(\frac{RT}{DMp(T)} + \frac{L^2M}{RT^2k} \right)}. \quad (9)$$

В (9) выражение

$$\frac{\varepsilon}{\frac{RT}{DMp(T)} + \frac{L^2M}{RT^2k}} = B, \quad (10)$$

было вычислено Б.Дж. Мейсоном, при влажности воздуха, соответствующей насыщенности над водой.

Уравнение (1) с учетом вышесказанного можно привести к виду

$$\frac{dr}{dt} = \frac{3cfB}{r^2\rho}, \quad (11)$$

где $B = \varepsilon / \left(\frac{RT}{DMp(T)} + \frac{L^2M}{RT^2k} \right)$ – показатель Мейсона (вычислено Б. Дж. Мейсоном), $\varepsilon = \frac{p_w(T) - p(T)}{p(T)}$ – относительное пересыщение по отношению ко льдинке при температуре T .

Уравнение движения (11) не учитывает, что облако, как правило имеет фрактальную структуру [Feder, 1988; Rys, Waldvogel, 1985]. Учет этого фактора принципиально меняет уравнение (11), превращая его в дифференциальное уравнение сублимационного роста дробного порядка.



По аналогии с работами [Кумыков, 2016] введем эффективную скорость изменения радиуса частицы с использованием аппарата теории дробного дифференцирования, учитывающую фрактальность среды

$$\left\langle \frac{dr(t)}{dt} \right\rangle = \frac{1}{\tau} D_{0t}^{\alpha-1} \frac{dr(t)}{dt} = \frac{1}{\tau} \partial_{0t}^{\alpha} r(t), \quad 0 < \alpha < 1, \quad (12)$$

где D_{at}^{α} – оператор дробного интегро-дифференцирования Римана-Лиувилля, которая определяется следующим образом:

$$D_{at}^{\alpha} r(t) = \begin{cases} \frac{\text{sign}(t-a)}{\Gamma(-\alpha)} \int_a^t \frac{r(s) ds}{|t-s|^{\alpha+1}}, & \alpha < 0, \\ r(t), & \alpha = 0, \\ \text{sign}^n(t-a) \frac{\partial^n}{\partial t^n} D_{at}^{\alpha-n} r(t), & n-1 < \alpha \leq n, n \in N, \end{cases}$$

, где $\Gamma(z)$ – гамма-функция Эйлера, $\partial_{0t}^{\alpha} r(t)$ – дробная производная по Капуто ($\partial_{at}^{\alpha} r(t) = \text{sign}^n(a-t) D_{at}^{\alpha-n} \frac{\partial^n r(t)}{\partial t^n}$, $n-1 < \alpha \leq n$, $n \in N$), α – феноменологический параметр (в нашем случае – показатель фрактальности среды), τ – характерное время процесса, а также заменяя в (10) D на D_f – коэффициент фрактальной диффузии, при котором B переходит в B_f – фрактальный показатель Мейсона, (11) принимает вид

$$\partial_{0t}^{\alpha} r(t) = \frac{3cf\tau B_f}{\rho r^2(t)}, \quad 0 < \alpha < 1. \quad (13)$$

Запишем общую схему, эквивалентную уравнению (13), которая позволит определить более эффективную модель роста частицы при различных усреднениях в виде

$$\partial_{0t}^{\alpha} r^n(t) = n r^{n-3}(t) \gamma, \quad (14)$$

где n – степень усреднения.

При $n = 1$ относительно схемы (14) уравнение (13) перепишем в виде

$$\partial_{0t}^{\alpha} r(t) = r^{-2}(t) \gamma, \quad 0 < \alpha < 1, \quad (15)$$

где $\gamma = \frac{3cf\tau B_f}{\rho}$.

Рассмотрим задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка (15) с начальными условиями

$$r(0) = r_0. \quad (16)$$

Задача типа Коши для дифференциальных уравнений с дробной производной Римана-Лиувилля исследована в работе [Самко и др. 1987].

Для нахождения приближенного решения данной задачи воспользуемся разностным методом, предложенным в работе [Shkhanukov-Lafishev, 2006]. С этой целью на отрезке $[0, T]$ введем сетку $\bar{\omega}_h = \{jh, j = 0, 1, 2, \dots, N\}$ с шагом $h = T/N$ по времени, где N – натуральное число.

Дифференциальной задаче (15)–(16) поставим в соответствие следующую разностную схему:

$$\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=0}^j (t_{j-s+1}^{1-\alpha} - t_{j-s}^{1-\alpha}) y_{t,s} = f(t_j, y_j), \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (17)$$



$$y_0 = r_0, \tag{18}$$

где $\Delta_{0t_j}^\alpha y = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=0}^j (t_{j-s+1}^{1-\alpha} - t_{j-s}^{1-\alpha}) y_{t,s}$ – дискретный аналог дробной производной, $y_{t,s} = \frac{y_{s+1} - y_s}{h}$ – правая разностная производная, $f(t_j, y_j) = \frac{3Af\tau B_f}{\rho y_j^2}$.

Схема (17) – (18) является явной:

$$y_{j+1} = y_j + h^\alpha \Gamma(2 - \alpha) \left[f(t_j, y_j) - \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=0}^{j-1} (t_{j-s+1}^{1-\alpha} - t_{j-s}^{1-\alpha}) y_{t,s} \right], \tag{19}$$

$$j = 0, 1, 2, \dots, N - 1.$$

Решение разностной задачи y сходится к решению r соответствующей дифференциальной задачи со скоростью $O(h^\alpha)$.

Исходя из того, что процессы и системы, описываемые с помощью производных дробного порядка, являются фрактальными, рассматриваемый в данной работе процесс сублимационного роста ледяных частиц тоже является фрактальным. Такие процессы рассмотрены в работах [Кумыков, 2015; Кумыков, Паровик, 2015], в которых проводилось моделирование изменения заряда облачных капель во фрактальной облачной среде с использованием аппарата дробного исчисления.

При $n = 2$ относительно схемы (14) уравнение (13) примет следующий вид

$$\partial_{0t}^\alpha r^2(t) = \frac{2\gamma}{r(t)}, 0 < \alpha < 1. \tag{20}$$

Обозначим $r^2(t) = y$. Тогда уравнение (20) примет вид:

$$\partial_{0t}^\alpha C = \frac{2\gamma}{\sqrt{C}}, 0 < \alpha < 1. \tag{21}$$

С использованием оператора Римана – Лиувилля уравнение (21) примет вид

$$D_{0t}^{\alpha-1} C' = \frac{2\gamma}{\sqrt{C}}, 0 < \alpha < 1. \tag{22}$$

Подействуем на (22) обратным оператором $D_{0t}^{1-\alpha}$. Тогда получаем

$$C' = 2\gamma D_{0t}^{1-\alpha} C^{-\frac{1}{2}}, 0 < \alpha < 1. \tag{23}$$

При помощи формулы дробного дифференцирования для степенных функций [Псху, 2005] уравнение (23) принимает вид

$$C' = 2\gamma \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\alpha - \frac{1}{2})} C^{\alpha - \frac{3}{2}}, 0 < \alpha < 1. \tag{24}$$

Перепишем последнее в следующем виде:

$$\frac{\Gamma(\alpha - \frac{1}{2})}{2\gamma\sqrt{\pi}} C^{-\alpha + \frac{3}{2}} dy = dt, 0 < \alpha < 1. \tag{25}$$

Возьмем интеграл от обеих частей последнего равенства:

$$\Gamma\left(\alpha - \frac{1}{2}\right) \frac{1}{2\gamma\sqrt{\pi}} \int C^{-\alpha + \frac{3}{2}} dy = \int dt, 0 < \alpha < 1. \tag{26}$$



Общее решение (26) имеет вид

$$y = \sqrt[\frac{5}{2}-\alpha]{\frac{\gamma\sqrt{\pi}(5-2\alpha)t}{\Gamma(\alpha-\frac{1}{2})}} + C_2, \quad (27)$$

где $C_2 = \frac{C_1\gamma\sqrt{\pi}(5-2\alpha)}{\Gamma(\alpha-\frac{1}{2})}$, $C_1 = \text{const}$.

С учетом (27) решение задачи Коши для уравнения (20) с начальным условием

$$r(0) = r_0 \quad (28)$$

имеет вид

$$r(t) = \sqrt[5-2\alpha]{\frac{\gamma\sqrt{\pi}(5-2\alpha)}{\Gamma(\alpha-\frac{1}{2})}}(t + C_1). \quad (29)$$

При $n = 3$ относительно схемы (14) уравнение (13) принимает следующий вид:

$$\partial_{0t}^\alpha r^3(t) = 3\gamma, \quad 0 < \alpha < 1. \quad (30)$$

Решение задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка (30) с начальным условием

$$r(0) = r_0. \quad (31)$$

имеет вид

$$r(t) = \sqrt[3]{3\gamma \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}} + r_0. \quad (32)$$

Полученные результаты позволяют провести сравнительный анализ поведения сублимационного роста льдинок во фрактальной облачной среде по сравнению со сплошной средой. Видно, что графики решений задачи (31)–(32) при различных α развиваются медленнее, чем с аналогичным процессом в сплошной среде. Зона фрактального эффекта находится ниже и более сконцентрирована в отличие от результатов задачи (15)–(16).

Видно, что при изменении степени усреднения n графики сублимационного роста льдинок при одинаковых показателях параметра α ведут себя аномально. При $\alpha = 1$ и $\alpha = 0,9$ графики практически идентичные, а при $\alpha = 0,6$ и $\alpha = 0,3$ наблюдается резкий скачок и дальнейшее замедление в динамике роста частицы.

3. Результаты моделирования

Численное моделирование проводилось с помощью программы Maple 18. На рис. 1 показаны графики приближенных решений задачи (15)–(16) при различных значениях показателя фрактальности α . При этом функции были приведены к безразмерному виду, где в качестве характерной длины взято начальное значение r_0 .

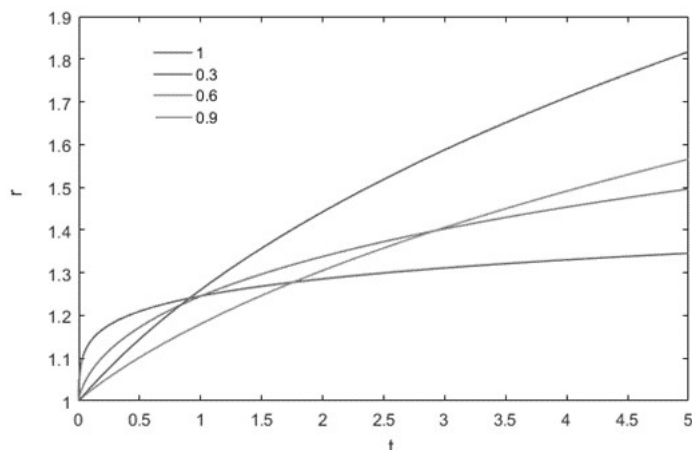


Рис. 1. Графики решений задачи (15)–(16) при различных α
 Fig. 1. Graphs of solutions to the problem (15)–(16) for different α

Из рисунка видно, что при малых значениях параметра α происходит резкий скачок радиуса ледяных частиц, а затем, после перехода через зону действия фрактального эффекта, замедляется. Под зоной фрактального эффекта понимаем область, в которых графики, лежащие в области $0 < \alpha < 1$, пересекаются с графиком при $\alpha = 1$. Это область, в которой начинается проявление фрактальных свойств. Исходя из этого, можно сделать предположение, что процессы во фрактальных облачных средах протекают значительно медленнее, нежели в сплошных. Отметим, что аналогичные результаты можно получить с помощью приближенной формулы для дробной производной, полученной в работе [Sweilam и др. 2012].

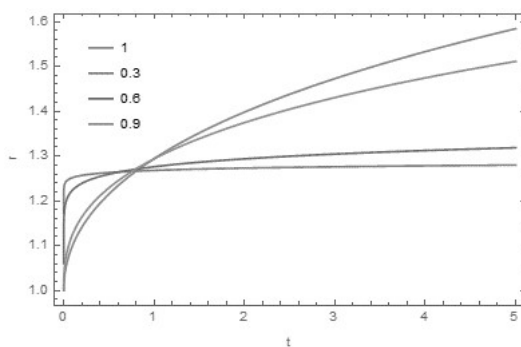


Рис. 2. Графики решений задачи (20)–(28) при различных α
 Fig. 2. Graphs of solutions to the problem (20)–(28) for different α

На рисунке 2 представлены графики численного решения задачи для разных значений α ($\alpha = 0,3$; $\alpha = 0,6$; $\alpha = 0,9$; $\alpha = 1$) с использованием Matlab 2017.

Из рисунка видно, что при малых значениях параметра α происходит резкий скачок радиуса льдинок, а затем, после перехода через зону действия фрактального эффекта, замедляется. Из результатов, представленных на рисунке 2, можно сделать вывод, что предложенная модель находится в хорошем согласии с точным решением.

На рис. 3 показаны графики приближенных решений задачи (31)–(32) при различных значениях показателя фрактальности α . Видно, что при изменении показателя

параметра α графики идентичны графикам, полученным выше. Также можно заметить на рисунках 1–3, что при различных показателях n зоны действия фрактального эффекта лежат на разных уровнях (чем больше n , тем ниже уровень зоны).

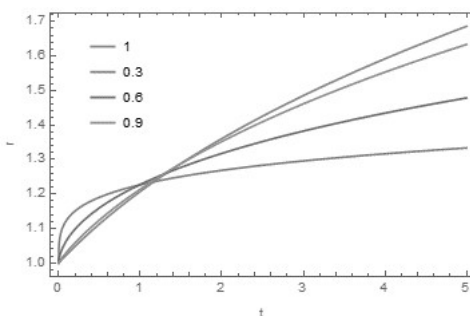


Рис. 3. Графики решений задачи (31)–(32) при различных α
 Fig. 3. Graphs of solutions to the problem (31)–(32) for different α

Полученные результаты позволяют провести сравнительный анализ поведения сублимационного роста льдинок во фрактальной облачной среде по сравнению со сплошной средой. Видно, что графики решений задачи (31)–(32) при различных α развиваются медленнее, чем с аналогичным процессом в сплошной среде. Зона фрактального эффекта находится ниже и более сконцентрирована в отличие от результатов задачи (15)–(16).

4. Заключение

В работе с помощью численных методов был исследован процесс сублимационного роста ледяных частиц с учетом фрактальности облачной среды. Сублимационный рост ледяных частиц играет существенную роль при зарождении грозовых облаков, а фрактальность самой среды непосредственно оказывает влияние на процесс сублимации.

Можно отметить, что полученные численные результаты при сублимационном росте ледяных частиц находятся в хорошем согласии с точным решением. Представленные формулы могут быть использованы для расчета изменения радиуса частиц облака под влиянием процесса сублимации льдинок с заданными параметрами с учетом фрактальности среды. Проведенные численные эксперименты для оценки влияния фрактальности среды на рост ледяных частиц при различных сочетаниях микрофизических параметров показали общую зависимость роста льдинок от параметра фрактальности среды, выражающуюся в резком скачке, а затем в уменьшении скорости роста при различных значениях параметра фрактальности. При различных значениях фрактальности среды выявлены зоны начала действия фрактального эффекта на величину ледяных частиц.

Список литературы References

1. Кумыков Т.С. 2016. Динамика заряда облачных льдинок во фрактальной среде. Математическое моделирование. 12:56–62.
 Kumukov T.S. 2016. Dinamika zarjada oblachnyh l'dinok vo fraktal'noj srede. Matematicheskoe modelirovanie. 12:56–62.
2. Кумыков Т.С. 2015. Моделирование динамики заряда пузырьков во фрактальных облачных каплях. Известия КБНЦ РАН, 1(6):23–27.



- Kumykov T.S. 2015. Modelirovanie dinamiki zarjada puzyr'kov vo fraktal'nyh oblachnyh kapljah. *Izvestija KBNC RAN*, 1(6):23–27.
3. Кумыков Т.С., Паровик Р.И. 2015. Математическое моделирование закона изменения заряда облачных капель во фрактальной среде. *Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки*. 10(1): 12–17.
Kumykov T.S., Parovik R.I. 2015. Matematicheskoe modelirovanie zakona izmeneniya zarjada oblachnyh kapel' vo fraktal'noj srede. *Vestnik KRAUNC. Fiziko-matematicheskie nauki*. 10(1): 12–17.
4. Мучник В.М. 1974. Физика грозы. Издательство: Гидрометеиздат, 352 с.
Muchnik V.M. 1974. Fizika grozy [Physics of thunderstorms]. *Izdatel'stvo: Gidrometeoizdat*, 352 s.
5. Псху А.В. 2005. Краевые задачи для дифференциальных уравнений с частными производными дробного и континуального порядка. Нальчик: Издательство КБНЦ РАН. 185 с.
Pshu A.V. 2005. Kraevye zadachi dlja differencial'nyh uravnenij s chastnymi proizvodnymi drobnogo i kontinual'nogo porjadka. *Nal'chik: Izdatel'stvo KBNC RAN*. 185 s.
6. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. 1987. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника. 688 с.
Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. 1987. Integraly i proizvodnye drobnogo porjadka i nekotorye ih prilozhenija. *Minsk: Nauka i tehnika*. 688 s.
7. Шишкин Н.С. 1964. Облака, осадки и грозовое электричество. Л: Гидрометеиздат, 402 с.
Shishkin N.S. 1964. Oblaka, osadki i grozovoe jelektrichestvo. *L: Gidrometeoizdat*, 402 s.
8. Feder J. 1988. *Fractals*. New York: Plenum Press. 312.
9. Iudin D.I., Trakhtengerts V.Y., Hayakawa M. 2003. Fractal dynamics of electric discharges in a thundercloud. *Phys. Rev. E*. V. 68. P. 016601.
10. Rys F., Waldfogel A. 1985. Analysis of the fractal dimension in clouds with powerful convective currents. *Fractals in Physics Proceedings of the VI International Symposium on Fractals in Physics*. ICTP, Trieste, Italy, 644–649.
11. Shkhanukov-Lafishev M.Kh., Taukenova F.I. 2006. Difference methods for solving boundary value problems for fractional differential equations *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 46 (10): 1785–1795.
12. Sweilam N.H., Khader M.M., Mahdy A.M.-S. 2012. Numerical studies for solving fractional-order logistic equation, *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 78 (8): 1199–1210.

Ссылка для цитирования статьи

Reference to article

Кумыков Т.С. 2019. Сублимационный рост ледяных частиц во фрактальных облаках. *Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика*. 51 (3): 435–443. Doi: 10.18413/2075-4639-2019-51-3-435-443.

Kumykov T.S. 2019. Sublimation growth of ice particles in fractality clouds. *Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics. Physics*. 51 (3): 435–443 (in Russian). Doi: 10.18413/2075-4639-2019-51-3-435-443.



УДК 535.3; 548.75

DOI 10.18413/2075-4639-2019-51-3-444-450

**THE SIGNAL-TO-NOISE RATIO MEASUREMENT IN CHLOROFORM
DETECTION IN THE PRESENCE OF KRYPTON BUFFER GAS BY
LASER PHOTOACOUSTIC METHOD**

**ИЗМЕРЕНИЕ СООТНОШЕНИЯ СИГНАЛА К ШУМУ В
ОБНАРУЖЕНИИ ХЛОРОФОРМА В ПРИСУТСТВИИ КРИПТОННОГО
БУФЕРНОГО ГАЗА ЛАЗЕРНЫМ ФОТОАКУСТИЧЕСКИМ МЕТОДОМ**

M.R. Mohebbifar

М.Р. Мохебби Фар

Department of Physics, Faculty of Science, Malayer University,
Malayer 65719-95863, Iran

Кафедра Физики, Факультет Науки, Университет Малайера,
Малайер 65719-95863, Иран

E-mail: mmohebbifar@gmail.com

Abstract

The signal-to-noise ratio is a measure used in engineering and science that compares the level of a desired signal to the level of background noise. This parameter is one of the main features of the spectrometer devices. In this experimental study, a homemade photoacoustic layout used to detect chloroform vapour in the presence of krypton buffer gas. The system limit of detection for detecting chloroform was measured 475ppb at the 0.49W carbon dioxide laser power, 605Hz resonant frequency and in the presence of 1bar krypton gas. Also the system signal-to-noise ratio variations for 690 mTorr chloroform vapours in the presence of three buffer gases (krypton, N_2 and He) at the various laser power and barometric pressure was measured. Results show that signal-to-noise ratio increase, when the carbon dioxide laser power increases. Also when He used as buffer gas, signal-to-noise ratio is the lowest.

Аннотация

Отношение сигнал/шум является мерой, используемой в технике и науке, которая сравнивает уровень полезного сигнала с уровнем фонового шума. Этот параметр является одной из основных особенностей приборов спектрометра. В этом экспериментальном исследовании использовалась самодельная фотоакустическая схема, используемая для обнаружения паров хлороформа в присутствии буферного газа криптона. Системный предел обнаружения для обнаружения хлороформа был измерен в 475 частей на миллиард при мощности лазера на углекислом газе мощностью 0,49 Вт, резонансной частоте 605 Гц и в присутствии 1 бар криптонового газа. Также были измерены изменения отношения сигнал/шум системы для паров хлороформа 690 мТорр в присутствии трех буферных газов (криптон, азот и гелий) при различной мощности лазера и барометрическом давлении. Результаты показывают, что отношение сигнал/шум увеличивается, когда увеличивается мощность лазера на углекислом газе. Также, когда гелий используется в качестве буферного газа, отношение сигнал/шум является самым низким.

Key words: Laser photoacoustic method, Signal-to-noise ratio, Krypton gas, Chloroform, Carbon dioxide laser power.



Ключевые слова: Лазерный фотоакустический метод, отношение сигнал/шум, криптон-газ, хлороформ, мощность лазера на углекислом газе.

Introduction

The photoacoustic effect was discovered by A. G. Bell in 1880 [Bell, 1880]. Bell focused intensity-modulated light (by chopped sunlight) falling on an optically absorbing solid substance produced an audible acoustic [Dumitras et.al., 2007]. Then in 1881, light absorption was detected with its acoustic effect in gases, solids and liquids by A. G. Bell [Bell, 1881] and other researchers such as J. Tyndall [Tyndall, 1881], W. C. Rontgen [Rontgen, 1881], and W. H. Preece [Preece, 1881]. After these scientists, a wide range of scientists studied the various aspects of this method [Kaiser, 1881; Dibae et. al. 2015; Kreuzer, 1971; Xiong et. al., 2018; Mohebbifar et. al., 2014, Dewey et. al., 1973, Bruce and Pinnick, 1977; Terhune and Anderson, 1977]. The high selectivity and sensitivity, high accuracy and precision, large dynamic range, good temporal resolution, ease of use, versatility, reliability, robustness, and multicomponent capability are the most important features for a gas sensor. Gas chromatographs are neither fast enough nor sensitive. Although there is no ideal instrument that would fulfill all the requirements mentioned above, a spectroscopic method and particularly the simple setup of LPAS provide several unique advantages, notably the multicomponent capability, high sensitivity and selectivity, immunity to electromagnetic interferences, wide dynamic range, convenient real time data analysis, relative portability, operational simplicity, easy calibration, relatively low cost per unit, and generally no need for sample preparation. LPAS is primarily a calorimetric technique and, as such, differs completely from other previous techniques, as the absorbed energy can be determined directly, instead of via measurement of the intensity of the transmitted or backscattered radiation. This method has a ppb (parts per billion)-grade or even ppt (parts per trillion)-grade sensitivity. For this reason, this technique is used to detect partial leakage in various industries, especially advanced industries. One of the most important features of a spectrometer is the signal-to-noise ratio. The signal-to-noise ratio is a measure used in engineering and science that compares the level of a desired signal to the level of background noise. Signal-to-noise ratio is defined as the ratio of signal power to the noise power, often expressed in decibels. The ability of the spectrometer to make accurate measurements depends on the quality of the signal obtained from the detector and the subsequent electrical circuits. The signal-to-noise ratio provides a measure of the signal quality. The signal-to-noise ratio compares the average power available in the signal to the average power contained in the noise, which includes any signal from sources other than the target signal source. Chloroform is one of the most serious pollutants in the environment. Prolonged exposure to chloroform vapors could cause severe health effects such as headache, eyesight disturbance, kidney damage, lung congestion, cancer, and so on. Therefore, accurate and sensitive detection of chloroform is very important in different environments. One of the most sensitive methods to detect chloroform vapors is laser photoacoustic spectroscopy method [Mohebbifar, 2014]. In this paper the system limit of detection for detecting chloroform was measured. Then the system signal-to-noise ratio variations for chloroform vapours in the presence krypton, N_2 and He as buffer gas at the various carbon dioxide laser powers at atmospheric pressure and room temperature was measured.

Theory

The photoacoustic process is mainly the consequences of the modulated light interaction with gas species to generate acoustic signal. A molecule that absorbs laser radiation is excited to a higher quantum state (electronic, vibrational or rotational state). The excited state loses its energy by radiation processes, such as spontaneous emission or stimulated emission, and by collisional relaxation, in which energy is converted into translational energy. In this technique, radiative emission and chemical reactions do not play an important role in the case of vibrational excitation, because the radiative lifetimes of the vibrational levels are long compared with the time needed for collisional deactivation at pressures used in photoacoustics, and the photon energy is too small to induce chemical reactions. Thus, in practice the absorbed energy is completely released via either fluorescence or collisions. The latter give rise to a gas temperature increase due to energy transfer to translation as heat, appearing as translational energy of the gas molecules. The deposited heat power density is proportional to the absorption coefficient and incident light intensity. As shows in the figure (1) the modulated laser beam leads to produce acoustic waves which in turn can be detected by a sensitive microphone in the center of photoacoustic cell. It gives us a measure of gas concentration.

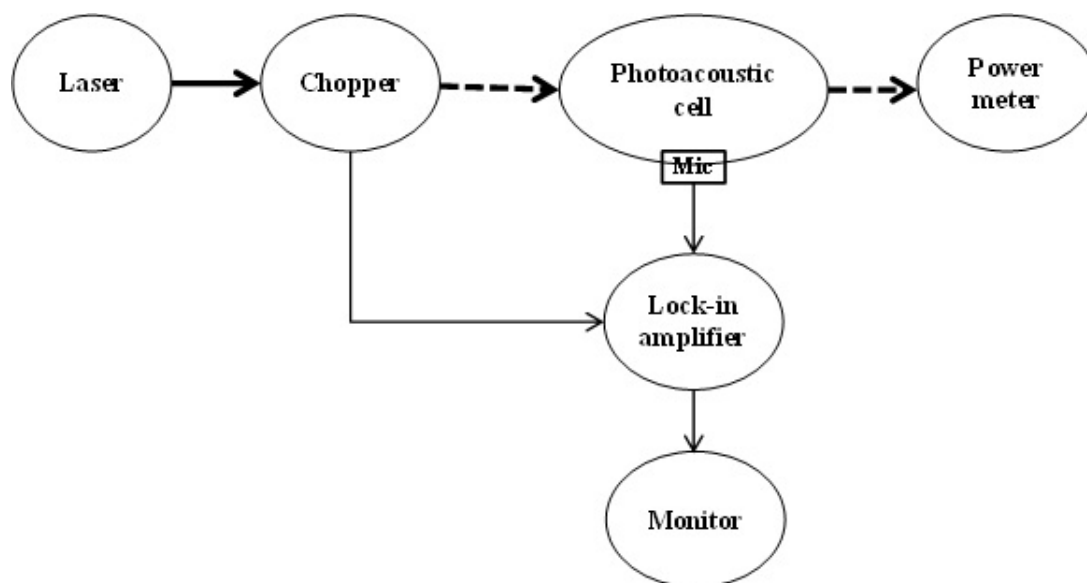


Fig. 1. A common block diagram of the laser photoacoustic spectrometer

In the laser photoacoustic spectroscopy method, the heat generation rate in the gas sample which irradiated by modulated laser, is given by Equation (1) [Dibaee et. al., 2015]:

$$d\dot{N}/dt = \sigma\phi(N - \dot{N}) - \dot{N}/\tau. \quad (1)$$

Where in the two levels atomic model, N , σ , ϕ and τ are the atomic energy density of atomic level, cross section, incident flux and relaxation time of atomic levels respectively. After modulation of incident flux ϕ is given by Equation (2) and finally the heat generation rate will be as Equation (3):



$$\phi = \phi_0[1 + \exp(i\omega t)], \quad (2)$$

$$dN/dt = N\sigma\phi_0[1 + \exp(i\omega t)] - N/\tau. \quad (3)$$

In the resonance spectroscopic systems, the laser is modulated by a chopper at the resonance frequency of acoustic resonator, and a phase-sensitive amplifier is locked at the chopper frequency and finally pressure changes (acoustic wave) measured by a sensitive microphone. This signal is called photoacoustic signal (Equation (4)) [Mohebbifar et. al., 2014]:

$$S = [\alpha C_j(\omega_j) P_0 F \exp(i\omega t)] / [\sqrt{(1 + \omega^2 \tau^2)}]. \quad (4)$$

Where $C_j(\omega_j)$ is the cell constant in the resonant frequency of acoustic resonator, is the microphone responsivity, is laser power and is the absorption coefficient.

Results and discussion

In order to design an optimum acoustic resonator, the resonant frequency and the cell dimensions were well chosen at first [Mohebbifar, 2019]. After simulation and optimization, 160mm for resonator length and 3mm for resonator radius was found as optimal acoustic resonator size and eventually home-made acoustic cell was fabricated. This resonator was made of stainless steel such that a couple of ZnSe windows were located at the both ends of the buffer volumes in order to suppress noise, coupled with the acoustic resonator. The resonator is connected to the buffer volumes to suppress the noise. The experimental setup including a continues wave carbon dioxide laser at the wave length of $10.6\mu\text{m}$ and different power from 0.05 to 1 watt, Knowles EK-3024 microphone, mechanical chopper with frequency up to 10 kHz, continues wave power meter and rotary pump. The photoacoustic signal is measured in time and frequency domain by TDS3034 Tektronix oscilloscope and the SR850 Stanford Research Systems Company lock-in amplifier [Mohebbifar, 2019]. As the first step, system limit of detection to detect chloroform was measured by using Equation (5):

$$C_{min} = C / \text{signal} - \text{to} - \text{noise} - \text{ratio}. \quad (5)$$

Where C is the concentration of incoming gas sample and signal-to-noise ratio is given by Equation (6):

$$\text{signal} - \text{to} - \text{noise} - \text{ratio} = \text{Photoacoustic} - \text{signal} / \text{Noise} - \text{signal}. \quad (6)$$

The system limit of detection for detecting chloroform was measured 475ppb at 0.49W carbon dioxide laser power with $10.6\mu\text{m}$ wavelength, 605Hz resonant frequency of mechanical chopper and 1 bar krypton as buffer gas. All measurements were performed at room temperature. In the next step of experiments, the system signal-to-noise ratio variations for chloroform vapour in terms of carbon dioxide laser power were performed. For this purpose system signal-to-noise ratio variations for 690 mTorr chloroform vapours in the presence of 1bar pressure of three buffer gases (krypton, N_2 and He) at the carbon dioxide laser power from 0.05W to 1W was measured (figures 2-4). The carbon dioxide laser output power was continuously measured by continues wave power meter (EPM300 model-Coherent Company).

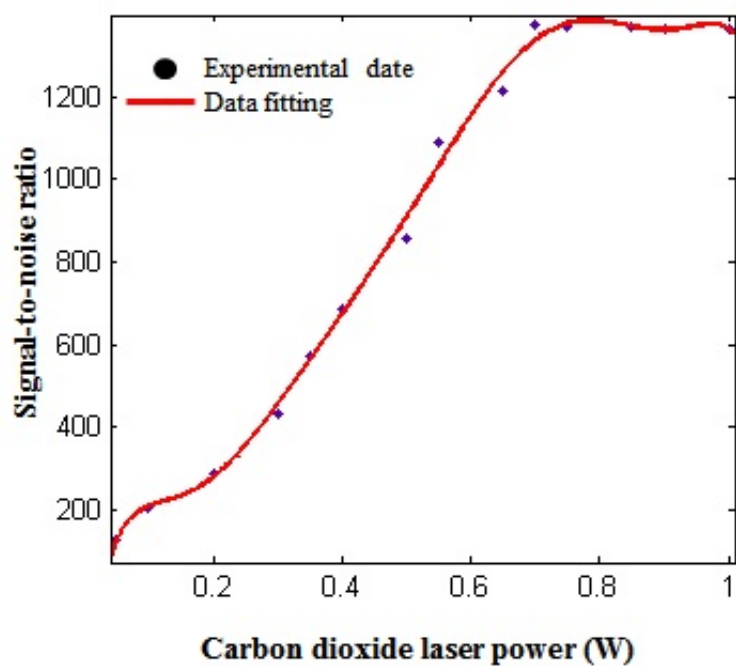


Fig. 2. Variation of the Signal-to-noise ratio of Chloroform + krypton in terms of various carbon dioxide laser powers

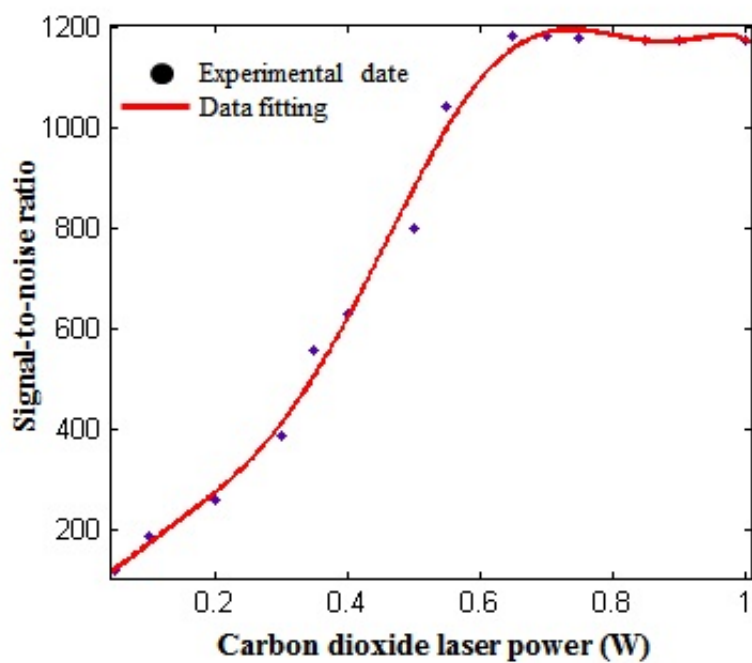


Fig. 3. Variation of the Signal-to-noise ratio of Chloroform + N_2 in terms of various carbon dioxide laser powers

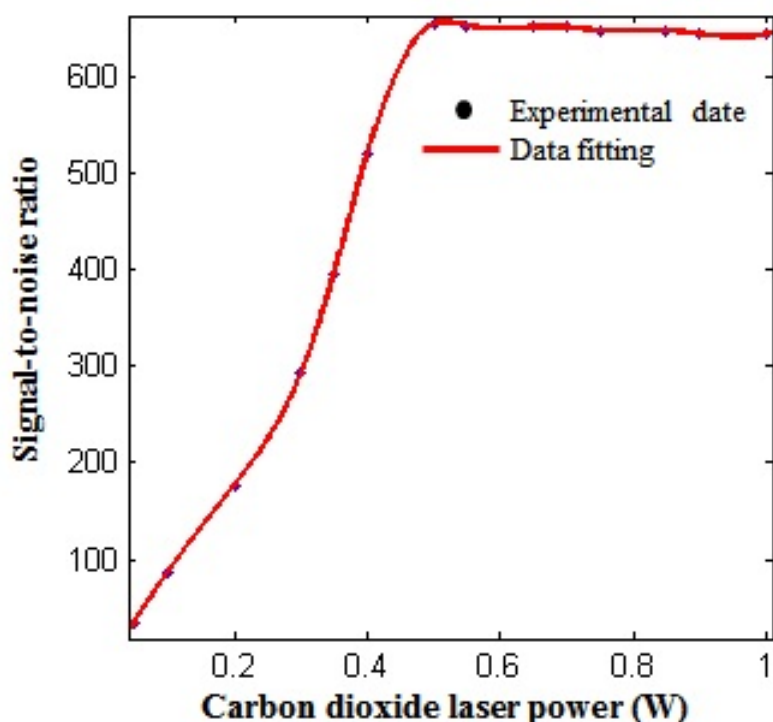


Fig. 4. Variation of the Signal-to-noise ratio of Chloroform + *He* in terms of various carbon dioxide laser powers

These results show that signal-to-noise ratio increases, when the carbon dioxide laser power increases. These experimental data were in agreement with the theory of laser photo-acoustic spectroscopy method. Actually increasing laser power leads to an increase collisional non-radiative processes, and thus increase photo-acoustic signal and signal-to-noise ratio. Moreover results show that when *He* used as buffer gas, signal-to-noise ratio of chloroform is the lowest. The different behaviour of *He* is because, firstly Molar mass of *He* is less than other buffer gases and secondly thermal diffusion of *He* is much faster than the other buffer gases.

Conclusion

This experimental study describes an experimental setup to detect chloroform vapor. For 0.49 watts of carbon dioxide laser power, 605Hz resonant frequency and in the presence of 1bar krypton as buffer gas system limit of detection to detect chloroform vapor was measured 475ppb. Also the system signal-to-noise ratio variations for 690 mTorr chloroform vapors in the presence of krypton, N_2 and *He* buffer gases at the various carbon dioxide laser power and barometric pressure was measured. Results show that signal-to-noise ratio increase, when the carbon dioxide laser power increases. Furthermore, increasing laser power leads to an increase collision non-radiative processes, and thus increase photo-acoustic signal and signal-to-noise ratio. Also when *He* used as buffer gas, signal-to-noise ratio is the lowest. The different behaviour of *He* is because, firstly Molar mass of *He* is less than other buffer gases and secondly thermal diffusion of *He* is much faster than the other buffer gases.



References

1. Bell A.G., Am.J. Sci. XX, P.305–324 (1880).
Bell A.G., Phil. Mag.J. Sci. XI, P.510–528 (1881).
2. Bruce C.W., R.G. Pinnick, Appl. Opt. 16, P.1762–1765 (1977).
3. Dewey C.F. Jr., R.D. Kamm, C.E. Hackett, Appl. Phys. Lett. 23, P.633–635 (1973).
4. Dibae B., P. Parvin, A. Bavali, V. Daneshafrooz, and M.R. Mohebbifar, Applied Optics, 54(30), P.8971–8981 (2015).
5. Dumitras D.C., D.C. Dutu, C. Matei, A.M. Magureanu, M. Petrus, C. Popa. 2007. Journal Of Optoelectronics and Advanced Materials. 9 (12):3655–3701.
6. Kaiser R., Can. J. Phys. 37, 1499–1513. 1959.
7. Kreuzer L.B., J. Appl. Phys. 42, P.2934–2943 (1971).
8. Mohebbifar M.R., Khalilzadeh J., Dibae B., Parvin P., Infrared Physics and Technology, 65(1), P.61–66 (2014).
Mohebbifar M.R., Microwave and Optical Technology Letters, P.1–8, (2019)
9. Preece W.H., Proc. R. Soc. 31, P.506–520 (1881).
10. Rontgen W.C., Ann. der Phys. und Chem. 1, P.155–159 (1881).
11. Terhune R.W., J.E. Anderson, Opt. Lett. 1, P.70–72 (1977)
12. Tyndall J., Proc. R. Soc. 31, P.307–317 (1881).
13. Xiong G, Li S, D. Tse S, Spectrochimica Acta Part B: Atomic Spectroscopy, 140(1), P.13–21 (2018).

Reference to article

Ссылка для цитирования статьи

Мохеббифар М.Р. 2019. Измерение соотношения сигнала к шуму в обнаружении хлороформа в присутствии криптонового буферного газа лазерным фотоакустическим методом Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика. 51 (3): 444–450. Doi: 10.18413/2075-4639-2019-51-3-444-450.

Mohebbifar M.R. 2019. The signal-to-noise ratio measurement in chloroform detection in the presence of krypton buffer gas by laser photoacoustic method. Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics. Physics. 51 (3): 444–450 (in Russian). Doi: 10.18413/2075-4639-2019-51-3-444-450.

УДК 517.957, 336.76

DOI 10.18413/2075-4639-2019-51-3-451-459

СРАВНЕНИЕ ВРЕМЕННОГО РАСПАДА
ДЛЯ ОПЦИОННОЙ СТРАТЕГИИ «СТРЭДДЛ»
В СЛУЧАЕ НЕДОСТАТОЧНОЙ ЛИКВИДНОСТИ
ИЛИ НАЛИЧИЯ ТРАНЗАКЦИОННЫХ ИЗДЕЖЕК¹⁾

TIME DECAY COMPARISON FOR OPTION STRADDLE
IN CASE OF INSUFFICIENT LIQUIDITY OR TRANSACTION COSTS

М.М. Дышаев, В.Е. Федоров

M.M. Dyshaev, V.E. Fedorov

Челябинский государственный университет,
ул. Братьев Кашириных, 129, Челябинск, 454001, Россия

Chelyabinsk State University,
129 Kashyrin's Br. St., Chelyabinsk, 454001, Russia

E-mail: Mikhail.Dyshaev@gmail.com

Аннотация

В статье анализируется временной распад для опционной стратегии стрэддл (straddle). Моделирование осуществляется на примере двух моделей: Sircar-Papanicolaou (1998) и Jandačka-Ševčovič (2005). Первая модель учитывает эффекты обратной связи от операций крупных трейдеров, вторая учитывает наличие транзакционных издержек. Построены графики, показывающие отличие в ценах и в скорости временного распада для исследуемых нелинейных моделей от классической линейной модели Блэка-Шоулза при использовании стратегии straddle.

Abstract

The article analyzes time decay for the option strategy «straddle». The simulation is carried out on the example of two models: the model of R.K. Sircar and G. Papanicolaou (1998) and the model of M. Jandačka and D. Ševčovič (2005). The first model takes into account the feedback effects of the operations of large traders, the second model takes into account the transaction costs. The results are presented in the form of graphs, showing the difference in prices of and time decay for the nonlinear models under study from the classical linear model of Black-Scholes, when using the strategy straddle.

Ключевые слова: транзакционные издержки; нелинейные уравнения типа Блэка-Шоулза; ценообразование опционов; стрэддл.

Key words: transaction costs; nonlinear Black — Scholes equations; option pricing; straddle.

Введение

Классическая линейная модель ценообразования Блэка-Шоулза с постоянной (так называемой исторической) волатильностью была предложена в работе [5]. Модель была выведена с использованием нескольких ограничений, таких как непрерывная торговля,

¹⁾ Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта 19-01-00244.



отсутствие транзакционных издержек и абсолютная ликвидность. Согласно этой теории ценообразования опционов цена $u(x, t)$ условного требования, где цена базового актива $x > 0$ и момент времени $t \in [0, T]$, является решением линейного параболического уравнения:

$$u_t + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 u_{xx} + rxu_x - ru = 0, \quad (1)$$

где $r > 0$ — безрисковая процентная ставка, а σ — постоянная историческая волатильность базового актива.

Однако практический анализ рыночных данных показывает необходимость построения более реалистичных моделей, которые учитывают вышеупомянутые недостатки классической теории Блэка-Шоулза. Это стимулировало разработку различных нелинейных моделей ценообразования опционов, в которых функция волатильности больше не является постоянной.

Наиболее общей моделью, учитывающей недостаточную ликвидность, является модель Сиркара-Папаниколау [16]. В данной модели для описания ценообразования опционов используется понятие совокупного дохода «реферальных» трейдеров. Авторами получено семейство нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, в случае отсутствия программных трейдеров ($\rho \rightarrow 0$, ρ — доля крупных трейдеров) сводящееся к классическому уравнению Блэка-Шоулза:

$$u_t + \frac{1}{2} \left[\frac{V(1 - \rho u_x) U'(V(1 - \rho u_x))}{V(1 - \rho u_x) U'(V(1 - \rho u_x)) - \rho x u_{xx}} \right]^2 \sigma^2 x^2 u_{xx} + r(xu_x - u) = 0. \quad (2)$$

Здесь $V(\cdot) = U^{-1}(\cdot)$, а $U(\cdot)$ — функция относительного спроса реферальных трейдеров. Авторы модели, Р. Сиркар и Г. Папаниколау, подробно рассматривали случай линейной функции $U(z) = \beta z$, $\beta > 0$, в этом случае уравнение имеет вид

$$u_t + \frac{1}{2} \left[\frac{1 - \rho u_x}{1 - \rho u_x - \rho x u_{xx}} \right]^2 \sigma^2 x^2 u_{xx} + r(xu_x - u) = 0, \quad (3)$$

и провели численное исследование поведения модели в моменты, близкие к экспирации опционов.

Замечание. Проведенная групповая классификация уравнения (2) (см. [7, 10]) позволила выделить две спецификации, которым соответствуют логарифмическая функция спроса реферальных трейдеров $U(z) = \frac{1}{\beta} \ln z + A$ и степенная функция спроса $U(z) = Az^{1/\beta}$, где A — константа интегрирования. В этом случае модель выглядит как

$$u_t + \frac{1}{2} [1 - xv(u_x)u_{xx}]^{-2} \sigma^2 x^2 u_{xx} + r(xu_x - u) = 0.$$

При этом свободный элемент $v(u_x)$ принимает значения $v(u_x) = \beta$ (логарифмическая функция спроса) или $v(u_x) = \beta/u_x$ для степенной функции спроса. Здесь β — постоянная. В случае, когда $v(u_x) = 0$, получается линейная модель Блэка-Шоулза, которая, заметим, методами симметричного анализа была исследована в работе [11].

Методология ценообразования с поправкой на риск (risk adjusted pricing methodology, сокращенно RAPM), учитывающая не только транзакционные издержки, но и



риск, возникающий из-за недостаточной частоты балансировки портфеля при дельта-хеджировании, была обобщена в [14]. В этой модели уравнение имеет вид

$$u_t + \frac{1}{2} \left[1 - \mu (xu_{xx})^{\frac{1}{3}} \right] \sigma^2 x^2 u_{xx} + r(xu_x - u) = 0, \quad (4)$$

где $\mu = 3(C_0^2 R / 2\pi)^{\frac{1}{3}}$, $C_0, R \geq 0$ — неотрицательные постоянные, представляющие показатель стоимости транзакции и показатель премии за риск соответственно. В численных расчетах авторы брали показатель $\mu = 0.2$.

Существует много различных опционных стратегий, направленных на решение задач максимизации прибыли, страхования портфеля или управления риском [4]. Одна из них, часто используемая на практике, получила название straddle («стеллаж»). Она состоит в одновременной покупке или продаже опциона колл (call) и опциона пут (put), на одну дату исполнения (дата экспирации, *expire date*) и с одной ценой исполнения (страйк, *strike price*). Если ожидается, что цена базового актива существенно вырастет или упадет, покупаются два опциона, колл и пут. И наоборот, если ожидается, что цена базового актива останется на месте, трейдер продает два опциона, колл и пут, с одними страйком и датой экспирации.

Так как цена опциона в соответствии с моделью Блэка-Шоулза зависит помимо прочего от времени, оставшегося до истечения опциона, уменьшение цены называется *временным распадом* цены опциона. Во многом доходность операций с опционами зависит от скорости, с какой уменьшается цена опциона при сохраняющихся остальных параметрах. Показателем, характеризующим временной распад, является частная производная цены опциона u по времени t :

$$\text{Theta} = -\frac{\partial u}{\partial t}. \quad (5)$$

Знак минус перед производной ставят, чтобы подчеркнуть уменьшение стоимости со временем. В рыночном сообществе этот и подобные показатели получили общее название «греки» или «показатели чувствительности» (Greeks, sensitivities). На практике используется около 30 таких показателей. Наиболее подробное, по-видимому, их описание и анализ для линейной модели приведены в книге [13, Табл 2.1, стр 22]. Для некоторых нелинейных моделей подобные результаты приведены в [8, 9].

1. Численное решение

1.1. Начально-краевая задача. Первоначальной целью данной работы является нахождение численного решения краевой задачи для уравнения

$$u_t + \frac{1}{2} \hat{\sigma}^2 x^2 u_{xx} + r(xu_x - u) = 0, \quad (x, t) \in [0, +\infty) \times [0, T], \quad (6)$$

при различных модифицированных волатильностях $\hat{\sigma}$ и граничных условиях для стратегии straddle.

Так как граничные условия для стратегии являются суммой граничных условий для входящих в нее опционов, в случае, например, «длинного стрэддла» (long straddle),



состоящего из двух купленных опционов колл и пут, получаем следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} \text{longcall :} \quad & u(0, t) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{u(x, t)}{x - Ke^{-r(T-t)}} = 1, \quad u(x, T) = \max\{x - K, 0\}, \\ \text{longput :} \quad & u(0, t) = Ke^{-r(T-t)}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} u(x, t) = 0, \quad u(x, T) = \max\{K - x, 0\}, \\ \text{longstraddle :} \quad & u(0, t) = Ke^{-r(T-t)}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{u(x, t)}{x - Ke^{-r(T-t)}} = 1, \quad u(x, T) = |x - K|, \end{aligned}$$

где цена страйк для опционов $K > 0$, историческая волатильность базового актива $\sigma > 0$ и безрисковая процентная ставка $r \geq 0$.

В данной работе была выполнена замена направления времени $t' = T - t$ и усечение области определения справа. Усечение области определения x было сделано в соответствии с методом, изложенном в [15]. В результате получаем начально-краевую задачу (обозначив новое время снова как t)

$$u_t - \frac{1}{2} \hat{\sigma}^2 x^2 u_{xx} - r(xu_x - u) = 0, \quad (x, t) \in [0, 1] \times [0, 1], \quad (7)$$

$$u(0, t) = Ke^{-rt}, \quad u(1, t) = 1 - Ke^{-rt}, \quad t \in [0, 1], \quad (8)$$

$$u(x, 0) = |x - K|, \quad x \in [0, 1]. \quad (9)$$

1.2. Выбор шаблона. Численные решения получены для трех моделей:

$$\hat{\sigma}^2 = \begin{cases} \hat{\sigma}_{BS}^2 = \sigma^2, & \text{линейная модель Блэка-Шоулза;} \\ \hat{\sigma}_{SP}^2 = \sigma^2 \left(\frac{1 - \rho u_x}{1 - \rho u_x - \rho x u_{xx}} \right)^2, & \text{нелинейная модель Sircar-Papanicolaou;} \\ \hat{\sigma}_{JS}^2 = \sigma^2 \left(1 - \mu (x u_{xx})^{\frac{1}{3}} \right), & \text{нелинейная модель Jandačka-Ševčovič.} \end{cases} \quad (10)$$

Известная устойчивость неявных схем и наличие ограничений на величину шага τ по времени t в явных схемах для параболических уравнений предполагали выполнение расчетов с использованием только неявной схемы. Однако явная схема обладает тем преимуществом, что помимо относительно быстрого счета все величины в (10) могут быть выражены через значения с одного и того же временного слоя и нет необходимости прибегать к дополнительным допущениям при вычислениях.

В то же время использование чисто неявной схемы и последующее применение метода прогонки, являющегося частным случаем метода исключения Гаусса, как раз затруднено из-за наличия нелинейных членов в уравнении (7). Поэтому было принято решение брать значения $u(x, t)$ для нелинейных членов уравнений с предыдущего временного слоя. В силу нелинейности уравнений отметим также необходимость установления ограничений на шаг по времени τ .

В данной ситуации удобно воспользоваться двухслойным неявно-явным шеститочечным шаблоном с весами (см. [3, с. 193], [1, с. 370–372], [12]), когда значения искомой функции u_n^{m+1} на $(m + 1)$ -м слое имеют вес ω , а значения с предыдущего m -го слоя учитываются с весом $1 - \omega$. Получаемая с его помощью разностной схемой называется неявно-явной разностной схемой с весами и в случае, когда $\omega = 1/2$, получила название схемы Кранка-Никольсон [6].



Для линейного уравнения параболического типа с постоянным коэффициентом $u_t = au_{xx}$, $a > 0$, такая схема безусловно устойчива при $1/2 \leq \omega \leq 1$. При $0 \leq \omega < 1/2$ схема устойчива, если шаг по времени выбран таким, чтобы $\tau \leq \frac{h^2}{2a(1-2\omega)}$. В работе [12] проведено исследование ошибок аппроксимации, устойчивости и сходимости данной конечно-разностной схемы для линейного уравнения Блэка-Шоулза.

Для нахождения приближенного решения уравнения (7) использовались следующие разностные представления функции $u(x, t)$ и ее производных:

$$\begin{aligned} u &\sim \omega u_n^{m+1} + (1 - \omega) u_n^m, & u_t &\sim \frac{u_n^{m+1} - u_n^m}{\tau}, \\ u_x &\sim \omega \frac{u_{n+1}^{m+1} - u_n^{m+1}}{h} + (1 - \omega) \frac{u_{n+1}^m - u_n^m}{h}, \\ u_{xx} &\sim \omega \frac{u_{n+1}^{m+1} - 2u_n^{m+1} + u_{n-1}^{m+1}}{h^2} + (1 - \omega) \frac{u_{n+1}^m - 2u_n^m + u_{n-1}^m}{h^2}, \end{aligned} \tag{11}$$

где τ — шаг по переменной t , h — шаг по переменной x .

Общим для всех расчетов является тот факт, что первоначально выбирался шаг τ , не превышающий шага, необходимого для устойчивой работы явной схемы для линейного уравнения параболического типа $u_t = u_{xx}$, т.е. $\tau \leq \tau_{\max}$. В случае переменной величины шага τ предусмотрено, что в процессе счета τ не может превысить этой величины. Следующий шаг по времени выбирался как

$$\tau_{m+1} = \min \left\{ \tau_{\max}, \frac{h^2}{2 \max_k (A_k^m)} \right\}, \quad A_n^m = \frac{1}{2} (\hat{\sigma}_n^m)^2 h^2 n^2,$$

где A_k^m рассчитывается для каждой исследуемой модели (10) в узле k в слое m .

1.3. Решение системы линейных уравнений. Подставив в уравнение (7) соответствующие разностные представления (11), получим следующую систему линейных уравнений:

$$a_n u_{n-1}^{m+1} - b_n u_n^{m+1} + c_n u_{n+1}^{m+1} = d_n, \quad n = 1, 2, \dots, N - 1, \quad m = 1, 2, \dots, M - 1,$$

где

$$\begin{aligned} a_n &= -\frac{1}{2} \omega (\hat{\sigma}_n^m)^2 n^2 h^2, \\ b_n &= -\left[\frac{1}{\tau} + \omega (\hat{\sigma}_n^m)^2 n^2 h^2 + \omega r n + r \omega \right], \\ c_n &= -\frac{1}{2} \omega (\hat{\sigma}_n^m)^2 n^2 h^2 - \omega r n, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_n &= \frac{1}{\tau} u_n^m + (1 - \omega) (\hat{\sigma}_n^m)^2 n^2 h^2 (u_{n+1}^m - 2u_n^m + u_{n-1}^m) - \\ &\quad - r (1 - \omega) u_n^m + r (1 - \omega) n (u_{n+1}^m - u_n^m), \end{aligned}$$

и $(\hat{\sigma}_n^m)^2$ является модифицированной волатильностью для каждой модели из (10). Напомним, что в формулах для волатильности используются значения с предыдущего временного слоя.

Полученная система решалась методом прогонки. Метод прогонки применим в данном случае, поскольку выполняется (причем строго) условие преобладания диагональных элементов $|b_n| \geq |a_n| + |c_n|$ (нет деления на ноль).

1.4. Параметры для расчетов. Для выполнения расчетов необходимо выбрать коэффициенты разностной схемы и задать несколько параметров моделей.

Для двухслойного неявно-явного шеститочечного шаблона весовой коэффициент для задания веса верхнего слоя в шаблоне выбран как $\omega = 0,9$. Количество узлов по оси x принято равным $N = 200$. Следовательно, шаг по оси x , учитывая выполненное усечение области до $[0, 1]$, равен $h = 1/N$.

Для нелинейной модели Сиркара-Папаниколау необходимо задать долю крупных (программных) трейдеров в операциях ρ . Следуя авторам модели, полагаем $\rho = 0,1$. Для расчетов в нелинейной модели Яндачки-Шевчовича воспользуемся значением коэффициента $\mu = 0,2$, которое также было использовано авторами модели.

Для приближения результатов моделирования к фактическим данным полагаем при моделировании $\sigma = \sigma_{BS} = 0,299688$. Данное числовое значение получено для волатильности фьючерса BR-8.19 на нефть сорта Brent [2]. За волатильность принято стандартное отклонение цен закрытия за период с 13.03.2016 по 20.06.2019 (69 торговых дней), приведенное к годовому исчислению (250 торговых дней). Время, оставшееся до погашения опционов (они истекают 26.07.2019), фактически составляет 26 рабочих дней или $t = 26/250 = 0,104$.

Чтобы наглядно продемонстрировать эффекты от временного распада, учтем цены приобретения или продажи опционов в стратегии. Цены получены из модели Блэка-Шоулза и рассчитаны для фактической волатильности и оставшегося времени до исполнения. В модели цена опциона call составила 0,015612, а для опциона put — 0,015237.

Поскольку базовым активом в исследовании выступает фьючерс, а не акция, и опционы являются маржируемыми (futures-style options), то безрисковая процентная ставка должна быть принята для расчетов как $r = 0,0$.

2. Результаты

Ниже на рисунках представлены полученные результаты расчетов. На рисунке 1 представлены временные срезы для цены сформированной стратегии long straddle и временные срезы скорости изменения цены со временем для различных цен базового актива в модели Яндачки-Шевчовича. Для модели Сиркара-Папаниколау результаты представлены на рисунке 2.

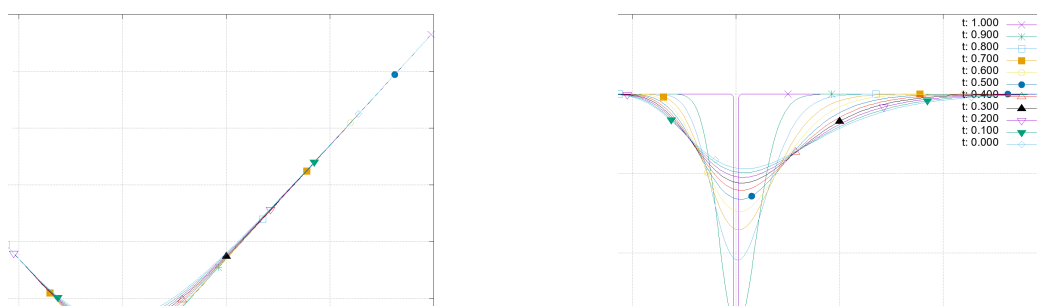


Рис. 1. Временные срезы цены купленного straddle (слева) и для Theta (справа) в модели Яндачки-Шевчовича

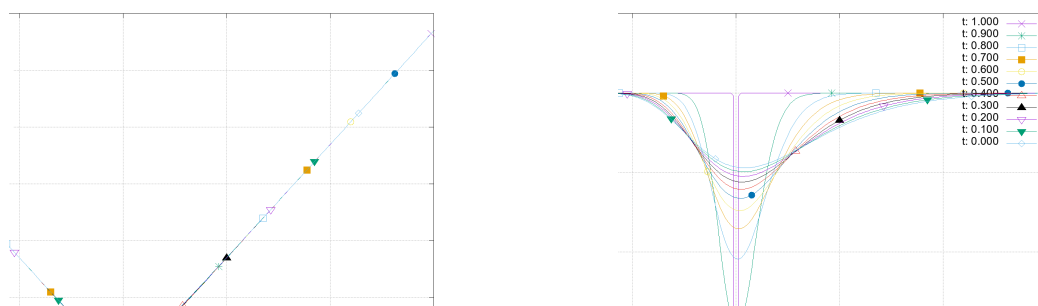


Рис. 2. Временные срезы цены купленного straddle (слева) и для Theta (справа) в модели Сиркара-Папаниколау

Из графиков видно, что в полном соответствии с теорией и практикой временной распад почти отсутствует при цене базового актива x , отстоящей далеко ²⁾ от страйка $K = 0,4$, по которой сформирован straddle. Расстояние между линиями на рисунках соответствует примерно одному календарному месяцу. Согласно графикам за последний месяц цена из-за временного распада сильно убывает и делает стратегию убыточной для купленного straddle, сформированного близко к центральному страйку.

На рисунке 3 представлено сравнение показателя Theta для рассматриваемых в работе моделей за один год до истечения опционов ($t = 0$). Видно, что из-за эффектов недостаточной ликвидности, учитываемых моделью Сиркара-Папаниколау, временной распад существенно меньше, чем в классической линейной модели Блэка-Шоулза и модели Яндачки-Шевчовича, учитывающей транзакционные издержки.

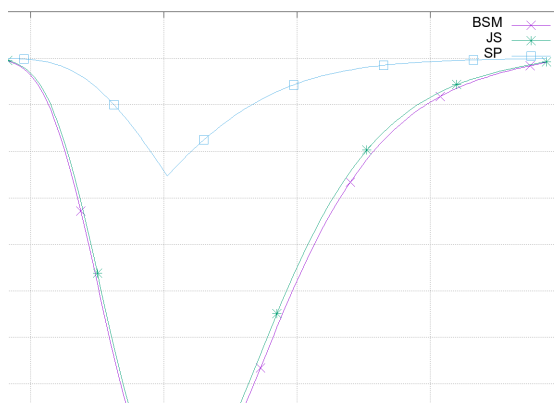


Рис. 3. Сравнение Theta для моделей Яндачки-Шевчовича (JS), Сиркара-Папаниколау (SP) и модели Блэка-Шоулза (BSM) в момент $t = 0$

²⁾ $x < 0,2$ или $x > 0,8$, т. е. опционы находятся либо глубоко «вне денег» (out of the money, OTM), либо глубоко «в деньгах» (in the money, ITM).



3. Заключение

В работе рассмотрены две модели, отличные от модели Блэка-Шоулза, одна из которых учитывает эффекты недостаточной ликвидности, а другая — наличие транзакционных издержек. Для каждой из моделей построены графики, представляющие изменение скорости, с которой цена опционной стратегии straddle меняется по мере приближения срока истечения опциона. Также представлен график, наглядно демонстрирующий разницу в скорости временного распада для разных моделей в сравнении с классической линейной моделью Блэка-Шоулза.

Список литературы References

1. Калиткин Н.Н. 1978. Численные методы. М.: Гл. редакция физ.-мат. лит. изд-ва «Наука». Kalitkin N.N. 1978. Chislennyye metody. M.: Nauka.
2. Московская Биржа: Итоги торгов по фьючерсным контрактам и опционам. URL: <https://www.moex.com/ru/derivatives/contractresults.aspx?code=BR-8.19>. (дата обращения 22.06.2019).
Moskovskaja Birzha: Itogi torgov po f'juchersnym kontraktam i opcionam.
Available at: <https://www.moex.com/ru/derivatives/contractresults.aspx?code=BR-8.19>. (accessed 22.06.2019).
3. Рихтмайер Р.Д., Мортон К.В. Разностные методы решения краевых задач: пер. с англ. М.: Мир, 1972.
4. Халл Джон К. Опционы, фьючерсы и другие производные финансовые инструменты: пер. с англ. 8-е изд. М.: ООО «И.Д.Вильямс», 8 издание, 2014.
5. Black F., Scholes M. 1973. The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, 81(3):637–654.
6. Crank J., Nicolson P. 1947. A practical method for numerical evaluation of solutions of partial differential equations of the heat-conduction type. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 43(1):50–67.
7. Dyshaev M.M., Fedorov V.E. 2016. Symmetry analysis and exact solutions for a nonlinear model of the financial markets theory. *Mathematical Notes of North-Eastern Federal University*, 23(1):28-45.
8. Dyshaev M.M., Fedorov V.E. 2019. Comparing of some sensitivities (Greeks) for nonlinear models of option pricing with market illiquidity. *Mathematical notes of NEFU*, 26(2):94–108.
9. Dyshaev M.M., Fedorov V.E. The Sensitivities (Greeks) for some models of option pricing with market illiquidity. DOI:10.13140/RG.2.2.27157.58083.
10. Fedorov V.E., Dyshaev M.M. Invariant solutions for nonlinear models of illiquid markets. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 41(18):8963–8972, January 2018.
11. Gazizov R.K., Ibragimov N.H. Lie symmetry analysis of differential equations in finance. *Nonlinear Dynamics*, 17(4):387–407, December 1998.

12. Geske R., Shastri K. 1985. Valuation by approximation: a comparison of alternative option valuation techniques. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 20(1):45–71.
13. Haug E.G. 2007. *The complete guide to option pricing formulas*. McGraw-Hill, New York, second edition.
14. Jandačka M., Ševčovič D. 2005. On the risk-adjusted pricing-methodology-based valuation of vanilla options and explanation of the volatility smile. *Journal of Applied Mathematics*, 2005(3):235–258.
15. Kangro R., Nicolaides R. 2000. Far field boundary conditions for Black-Scholes equations. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 38(4):1357–1368.
16. Sircar R.K., Papanicolaou G. 1998. General Black-Scholes models accounting for increased market volatility from hedging strategies. *Applied Mathematical Finance*, 5(1):45–82.

Ссылка для цитирования статьи

Reference to article

Дышаев М.М., Федоров В.Е. 2019. Сравнение временного распада для опционной стратегии «стрэддл» в случае недостаточной ликвидности или наличия транзакционных издержек. *Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика*. 51 (3): 451–459. Doi: 10.18413/2075-4639-2019-51-3-451-459.

Dyshaev M.M., Fedorov V.E. 2019. Time decay comparison for option straddle in case of insufficient liquidity or transaction costs. *Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics. Physics*. 51 (3): 451–459 (in Russian). Doi: 10.18413/2075-4639-2019-51-3-451-459.



**СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ
INFORMATION ABOUT AUTHORS**

- Авилов А.В.** – Воронежский государственный университет
- Бештоков М.Х.** – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Института прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН
- Вадахова В.А.** – кандидат физико-математических наук, доцент Кабардино-Балкарского государственного университета
- Винтаев В.Н.** – кандидат технических наук, доцент Белгородского университета кооперации, экономики и права
- Вирченко Ю.П.** – доктор физико-математических наук, профессор Белгородского государственного национального исследовательского университета
- Дышаев М.М.** – кандидат физико-математических наук, младший научный сотрудник Челябинского государственного университета
- Кумыков Т.С.** – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Института прикладной математики и автоматизации Кабардино-Балкарского научного центра Российской академии наук
- Куртова Л.Н.** – кандидат физико-математических наук, доцент Белгородского государственного национального исследовательского университета
- Mohebbifar M.R.** – Department of Physics, Faculty of Science, Malayer University, Iran
- Новосельцев А.Д.** – аспирант Белгородского государственного национального исследовательского университета
- Рахмелевич И.В.** – кандидат технических наук, доцент Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского
- Струков В.Е.** – кандидат физико-математических наук, научный сотрудник Воронежского государственного университета
- Струкова И.И.** – кандидат физико-математических наук, научный сотрудник Воронежского государственного университета
- Федоров В.Е.** – доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой математического анализа Челябинского государственного университета

Подписной купон

Прошу оформить подписку на журнал «Научные ведомости Белгородского государственного университета» Серия _____ на следующие номера за 201_ год

1 квартал	2 квартал	3 квартал	4 квартал

(Отметьте, пожалуйста, требуемые номера в таблице)

комплект(ов)

Стоимость редакционной подписки в 2017 г.

(включает стоимость почтовой доставки заказной бандеролью по России):
на 1 месяц (1 номер) – 1100 руб.; на 12 месяцев (4 номера) – 3800 руб.;

ФИО _____
 Индекс _____
 Республика/Край/Область _____
 Город/Село _____
 Улица _____ дом _____ кв. _____
 Телефон _____ E-mail _____
 Дата _____

Квитанция

ИЗВЕЩЕНИЕ	Форма № ПД-4						
	НИУ «БелГУ»						
	Наименование получателя платежа ИНН 3123035312; КПП 312301001; ОКАТО 14401365000; Р/с 40503810207004000002 в Белгородском отделении № 8592 ПАО Сбербанк БИК 041403633 К/счет 30101810100000000633 Вид платежа КОД 07430201010010000130 за что Подписку на журнал «Научные ведомости БелГУ. Серия « _____ » (наименование банка, другие банковские реквизиты)						
	(Фамилия, И., О., адрес плательщика)						
	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <th style="width: 60%;">Вид платежа</th> <th style="width: 20%;">Дата</th> <th style="width: 20%;">Сумма</th> </tr> <tr> <td>Подписка на журнал «Научные ведомости БелГУ» Серия _____ на _____ 20__ года</td> <td></td> <td></td> </tr> </table> Плательщик _____	Вид платежа	Дата	Сумма	Подписка на журнал «Научные ведомости БелГУ» Серия _____ на _____ 20__ года		
Вид платежа	Дата	Сумма					
Подписка на журнал «Научные ведомости БелГУ» Серия _____ на _____ 20__ года							
Кассир							
	Форма № ПД-4						
	НИУ «БелГУ»						
	Наименование получателя платежа ИНН 3123035312; КПП 312301001; ОКАТО 14401365000; Р/с 40503810207004000002 в Белгородском отделении № 8592 ПАО Сбербанк БИК 041403633 К/счет 30101810100000000633 Вид платежа КОД 07430201010010000130 за что Подписку на журнал «Научные ведомости БелГУ. Серия « _____ » (наименование банка, другие банковские реквизиты)						
	(Фамилия, И., О., адрес плательщика)						
	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <th style="width: 60%;">Вид платежа</th> <th style="width: 20%;">Дата</th> <th style="width: 20%;">Сумма</th> </tr> <tr> <td>Подписка на журнал «Научные ведомости БелГУ» Серия _____ на _____ 20__ года</td> <td></td> <td></td> </tr> </table> Плательщик _____	Вид платежа	Дата	Сумма	Подписка на журнал «Научные ведомости БелГУ» Серия _____ на _____ 20__ года		
Вид платежа	Дата	Сумма					
Подписка на журнал «Научные ведомости БелГУ» Серия _____ на _____ 20__ года							
КВИТАНЦИЯ Кассир							