НИУ БелГУ
BELGOROD STATE UNIVERSITY (BSU)

ISSN 2687-0959(online)

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА & ФИЗИКА

APPLIED MATHEMATICS & PHYSICS

2023. Том 55, № 1

Прикладная математика & Физика

2023. Том 55, № 1

Основан в 1995 г. Журнал принимает к публикации оригинальные и обзорные статьи отечественных и зарубежных авторов по всем разделам современной математики и физики, и их приложений, исторические обзоры научной деятельности выдающихся учёных и краткие сообщения о научной жизни и научных мероприятиях в России и за рубежом. Журнал включен в Перечень ВАК рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней кандидата и доктора наук (1.1.1 – вещественный, комплексный и функциональный анализ, 1.1.2 – дифференциальные уравнения и математическая физика, 1.3.8 – физика конденсированного состояния). До 2020 г. журнал издавался под названием «Научные ведомости Белгородского государственного университета. Математика. Физика».

УЧРЕДИТЕЛЬ:

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Белгородский государственный национальный исследовательский университет».

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор). Выходит 4 раза в год.

Выпускающий редактор: Ю. В. Ивахненко
Корректура Ю. В. Ивахненко
Компьютерная верстка: О. В. Чернова
Оригинал-макет: В. Б. Васильев
E-mail: vasilyev_v@bsu.edu.ru

Гарнитура Times. Уч. изд. л. 12,6
Дата выхода 30.03.2023.
Оригинал-макет подготовлен отделом объединенной редакции научных журналов НИУ «БелГУ»
308015, г. Белгород, ул. Победы, 85.

Свидетельство о регистрации средства массовой информации
ЭЛ № ФС 77-77959 от 19.02.2020.

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

ФИЗИКА. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

ПЕРСОНАЛИИ

Applied Mathematics & Physics

2023. Volume 55, No 1

Founded in 1995. The journal accepts for publication original and review articles by domestic and foreign authors on all areas of modern mathematics and physics and their applications, historical reviews of the scientific activities of prominent scientists and brief reports on scientific life and scientific events in Russia and abroad.The journal is included into the List of Higher Attestation Commission of peer-reviewed scientific publications where the main scientific results of dissertations for obtaining scientific degrees of a candidate and doctor of science should be published (1.1.1 – material, complex and functional analysis, 1.1.2 – differential equations and mathematical physics, 1.3.8 – condensed matter physics). Until 2020, the journal was published with the name «Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics. Physics».

FOUNDER:

Federal state autonomous educational establishment of higher education
«Belgorod National Research University».

The journal has been registered at the Federal service for supervision of communications information technology and mass media (Roskomnadzor). Publication frequency: 4 /year.

Commissioning Editor Yu. V. Ivakhnenko
Proofreading Yu. V. Ivakhnenko
Computer imposition O. V. Chernova
Dummy layout by V. B. Vasilyev
E-mail: vasilyev_v@bsu.edu.ru

Typeface Times. Publisher's signature 12,6
Date of publishing 30.03.2023.
The layout is presented by Department of the united Editorial Board of Scientific Journals Belgorod National Research University
Address: 85 Pobeda St., Belgorod, 308015, Russia

Mass media registration certificate
EL № FS 77-77959 dd 19.02.2020.

CONTENTS

MATHEMATICS

PHYSICS. MATHEMATICAL MODELING

PERSONNEL

Прикладная математика & Физика, 2023, том 55, № 1. С. 5–11.
Applied Mathematics & Physics, 2023, Volume 55, No 1. P. 5–11.

МАТЕМАТИКА
MATHEMATICS

УДК 514.764.2
MSC 53C20
оригинальное исследование

DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-1-5-11

ПСЕВДОПОЛНЫЕ РИМАНОВЫ АНАЛИТИЧЕСКИЕ МНОГООБРАЗИЯ

В. А. Попов

(*Статья представлена членом редакционной коллегии С. М. Ситником*)

Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации,
Москва, 115054, Россия

E-mail: vlapopov@gmail.com

Аннотация. Изучается аналитическое продолжение локально заданной римановой аналитической метрики до метрики непродолжаемых многообразий. Исследуются различные классы локально изометричных римановых аналитических многообразий. В каждом таком классе определятся понятие так называемого псевдополного многообразия, обобщающее понятие полноты многообразия. Риманово аналитическое односвязное ориентированное многообразие, называется псевдополным, если непродолжаемо, а также не существует локально изометрического сохраняющего ориентацию накрывающего отображения с односвязным римановым многобразием. Среди псевдополных многообразий выделим «наиболее симметричные» правильные псевдополные многообразия.

Ключевые слова: риманово аналитическое многобразие, аналитическое продолжение, алгебра Ли и группа Ли, векторное поле Киллинга

Для цитирования: Попов В. А. 2023. Псевдополные римановы аналитические многообразия. Прикладная математика & Физика, 55(1): 5–11. DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-1-5-11

Original Research

PSEUDOCOMPLEET RUMANIAN ANALYTIC MANIFOLD

Vladimir Popov

(*Article submitted by a member of the editorial board S. M. Sitnik*)

Financial University under the Government of the Russian Federation,
Moscow, 115054, Russia

E-mail: vlapopov@gmail.com

Abstract. We study the analytic extension of a locally given Riemannian analytic metric to the metric of non-extendable manifolds. Various classes of locally isometric Riemannian analytic manifolds are studied. In each such class, the notion of the so-called pseudocomplete manifold is defined, which generalizes the notion of the completeness of a manifold. Riemannian analytic simply connected oriented manifold M is called pseudocomplete if it has the following properties. M is unextendable. There is no locally isometric orientation-preserving covering map $f : M \to N$, where N is a simply connected oriented Riemannian analytic manifold and $f(M)$ is an open subset of N not equal to N. Among the pseudocomplete manifolds, we single out the "most symmetric" regular pseudocomplete manifolds.

Keywords: Riemannian Analytic Manifold, Analytic Extension, Lie Algebra and Lie Group, Killing Vector Field

For citation: Popov Vladimir. 2023. Pseudocompleet Romanian Analytic Manifolds. Applied Mathematics & Physics, 55(1): 5–11. (in Russian) DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-1-5-11

1. Введение. Уже достаточно давно была научно обоснована «криволинейность» нашего пространства. Геометрия нашего пространства не подчиняется законам евклидовой геометрии, а определяется общим понятием римановой метрики. Однако, если мы можем определить локальные свойства окружающего пространства, глобальное устройство вселенной в целом представить очень сложно. Преобладает мнение, высказанное великим ученым А. Пуанкаре, что по аналогии с поверхностью земли, вселенная представляет из себя замкнутое (компактное) пространство, обладающее свойством односвязности (т. е. любая (криволинейная) окружность ограничивает «криволинейный» круг на этом пространстве. А. Пуанкаре выдвинул гипотезу, согласно которой замкнутое односвязное трехмерное пространство топологически эквивалентно трехмерной сфере, что приводит к некоторой аналогии строения вселенной со строением поверхности земли. В недавнее время чисто математическая гипотеза Пуанкаре была окончательно доказана российским математиком Г. Я. Перельманом.

Помимо топологического подхода возможен аналитический подход к изучению глобальных свойств риманова пространства. Этот подход связан с тем, что риманов тензор задается аналитическими функциями, которые имеют свойство однозначного аналитического продолжения. Рассмотрим риманово аналитическое многообразие M и шар $U \subset M$ малого радиуса с центром в некоторой точке $x_0 \in M$. Под аналитическим продолжением локально заданной метрики будем подразумевать любое риманово аналитическое многообразие N такое, что существует аналитическая изометрия $\varphi : U \to M$. Поставим задачу найти наиболее естественное аналитическое продолжение данной метрики. Естественным требованием является свойство непродолжаемости искомого многообразия, введённого ещё в классических монографиях Хелгасона [1] и С. Кобояси, Ш. Номидзу [2]. Однако непродолжаемые многообразия могут быть весьма неестественными. Например, односвязная накрывающая правой полуплоскости выколотыми точками $\left(\frac{1}{n}; \frac{k}{n}\right)$, $k, n \in N$.

В исследованиях по геометрии римановых пространств в целом, как правило, существенным требованием является полнота рассматриваемого многообразия. Для полного односвязного риманова аналитического многообразия любая изометрия $\varphi : U \to V$ между двумя связными открытыми подмножествами $U \subset M$, $V \subset M$ аналитически продолжается до изометрии $\varphi : M \to M$ [1].

Однако, в общем случае шар U риманова аналитического многообразия нельзя изометрически вложить в полное риманово аналитическое многообразие, т. е., вообще говоря, локально заданная риманова метрика аналитически не продолжается до метрики полного риманова многообразия. Возникает вопрос об обобщении понятия полноты. Естественным обобщением такого рода является непродолжаемость риманова аналитического многообразия. Однако непродолжаемые многообразия могут быть весьма неестественными.

Зададимся вопросом, можно ли по заданным локальным свойствам римановой аналитической метрики, т. е. метрики, заданной на малом шаре U, построить риманово аналитическое многообразие M, содержащее U в качестве открытого подмножества, и допускающего аналитическое продолжение локальных изометрий до изометрий всего многообразия. Т. е. любая изометрия $\varphi : U \to V$ между двумя связными открытыми подмножествами $U \subset M$, $V \subset M$ аналитически продолжается до изометрии $\varphi : M \to M$. Непреодолимым препятствием для такого продолжения является следующий факт. Пусть $\mathfrak{g}$ – алгебра Ли всех векторных полей Киллинга на римановом аналитическом многообразии M и $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ – её стационарная подалгебра, для фиксированной точки $p \in M$ $X \in \mathfrak{h}$ $X(p) = 0$. Пусть G – односвязная подгруппа, порождённая алгеброй $\mathfrak{g}$, и H – её подгруппа, порождённая подалгеброй $\mathfrak{h}$. Пусть G действует на односвязном многообразии M, тогда орбита фиксированной точки $p \in M$ является подмногообразием изометричным фактор группе G/H. Но фактор группа G/H является многообразием лишь в случае замкнутости подгруппы H в G, а это выполняется не всегда.

Целью данной работы является определение псевдополного многообразия, являющееся «наиболее полным» аналитическим продолжением произвольной локально заданной римановой аналитической метрики. Изучается аналитическое продолжение локально заданной римановой метрики. Рассмотрим случаи вполне неоднородной метрики и метрики, для которой алгебра Ли всех векторных полей Киллинга не имеет центра. В этих случаях дадим определение квазиполного многообразия M, обладающего свойством единственности и продолжаемости всех локальных изометрий $f : U \to V$, где U, V – связные открытые подмножества многообразия M, до изометрии $f : M \to M$. Ориентированное риманово аналитическое многообразие, алгебра векторных полей которого имеет нулевой центр, называется квазиполным, если оно непродолжаемо и не допускает нетривиальных сохраняющих ориентацию и все векторные поля Киллинга локальных изометрий в себя.

Приведем определение псевдополного многообразия, приводящее к «наиболее полному» продолжению локально заданной метрики и применимое к произвольной локально заданной метрике. Риманово аналитическое односвязное ориентированное многообразие M называется псевдополным, если оно обладает следующими свойствами. M непродолжаемо. Не существует локально изометрического сохраняющего ориентацию накрывающего отображения $f : M \to N$, где N – односвязное риманово аналитическое многообразие, а $f(M)$ открытое подмножество в N, не равное N. Среди псевдополных многообразий выделим «наиболее симметричные» правильные псевдополные многообразия.

Понятие аналитического продолжения римановой аналитической метрики присутствовало в классических монографиях Хелгасона [1] и С. Кобояси, Ш. Номидзу [2], но развития не получило.

Принципиальным является исследование случая вполне неоднородной римановой метрики, т. е. метрики не допускающей никаких движений (полей Киллинга). В этом случае удаётся определить так называемое квазиполное многообразие, обладающее свойством непродолжаемости и единственности для каждой локально заданной вполне неоднородной метрики [3, 4, 5]. Аналитическое продолжение вполне неоднородной римановой метрики изучалось также в диссертации Д. Х. Смита [6]. Определение квазиполного многообразия удаётся обобщить на случай, когда алгебра Ли всех векторных полей Киллинга для заданной локально определённой римановой аналитической метрики не имеет центра, [3, 4, 5]. Такое многообразие M обладает свойством максимально возможной симметрии, т. е. любая изометрия $f : U \to V$ между связными открытыми подмножествами многообразия M аналитически продолжается до изометрии $f : M \to M$. Однако квазиполное многообразие обладает не только тем недостатком, что оно определено не для произвольной локально заданной метрики, но оно в определённом смысле не является «самым полным». Поэтому далее для произвольной локально заданной римановой метрики мы приведём понятие псевдополного многообразия, исследуем его свойства и связь с квазиполным многообразием.

2. Аналитическое продолжение римановых многообразий и обобщение понятия полноты. Класс всех локально изометричных римановых аналитических многообразий будем называть также классом многообразий, происходящих из данного ростка риманова аналитического многообразия, а конкретное многообразие из этого класса будем называть аналитическим продолжением данного ростка. Естественным требованием к аналитическому продолжению ростка является непродолжаемость полученного многообразия. Перейдем к точным определениям и формулировкам.

Определение 1. *Аналитическим продолжением риманова аналитического многообразия M назовём риманово аналитическое многообразие N такое, что существует аналитическое вложение M в N как собственного открытого подмножества. Многообразие, не допускающее аналитического продолжения, называется непродолжаемым.*

Определение 2. *Локальной изометрией между двумя римановыми аналитическими многообразиями M и N называется изометрия $\varphi : U \to V$ между открытыми подмножествами $U \subset M$, $V \subset N$. Многообразия, между которыми существует локальная изометрия, назовём локально изометричными.*

Любое векторное поле $X \in \mathfrak{g}$ аналитически продолжается вдоль любой кривой на многобразии M, и, тем самым, алгебра Ли $\mathfrak{g}$ определяет алгебру Ли $\mathfrak{g}$ векторных полей Киллинга на любом односвязном многобразии N локально изометричном M. Этот факт верен также для многообразий аффинной связности. Сформулируем этот факт в виде леммы, доказательство которой приведено в [5].

Лемма 1. *Пусть M – аналитическое многообразие аффинной связности, X – инфинитеземальное аффинное преобразование, заданное в области $U \subset M$, и пусть $\gamma(t)$, $0 \leq t \leq 1$, непрерывная кривая в M такая, что $\gamma(t) \in U$. Тогда векторное поле аналитически продолжаемо вдоль $\gamma(t)$. Если кривые $\gamma(t)$ и $\delta(t)$, $0 \leq t \leq 1$, $\gamma(0) = \delta(0)$, $\gamma(1) = \delta(1) = x_1$ гомотопны, то продолжения векторных полей в точку x_1 вдоль этих кривых совпадают.*

Принципиальным является исследование случая вполне неоднородной римановой метрики, т. е. метрики без векторных полей Киллинга. В этом случае удаётся определить квазиполное многообразие, обладающее свойством непродолжаемости и единственности для каждой локально заданной вполне неоднородной метрики, [6].

Определение 3. *Риманово аналитическое многообразие называется вполне неоднородным многообразием, если на нём не существует векторных полей Киллинга. Риманову метрику вполне неоднородного многообразия назовём вполне неоднородной метрикой.*

По лемме 1 все многообразия локально изометричные вполне неоднородному многообразию являются вполне неоднородными.

Определение 4. *Вполне неоднородное ориентированное риманово аналитическое многообразие называется квазиполным, если оно непродолжаемо и не допускает нетривиальных сохраняющих ориентацию локальных изометрий в себя.*

Приведём основные свойства вполне неоднородных квазиполных многообразий, доказательство которых содержится в [5]. Для произвольного вполне неоднородного многообразия M рассмотрим множество $S \subset M$ всех всевозможных неподвижных точек сохраняющих ориентацию локальных изометрий многобразия в себя.

Теорема 1. *Для произвольного вполне неоднородного риманова аналитического многообразия множество $S \subset M$ является аналитическим подмножеством коразмерности не меньше, чем 2. Следовательно, $M \setminus S$ является связным многообразием.*

Теорема 2. *Для любого вполне неоднородного риманова аналитического многообразия M' существует локально изометричное ему квазиполное многобразие M и локально изометричекое накрывающее отображение $f : M' \setminus S \to M$. Таким образом, квазиполное многообразие обладает свойством единственности для каждой вполне неоднородной локально заданной римановой аналитической метрики.*

Определение квазиполного многообразия удаётся обобщить на случай, когда алгебра Ли всех векторных полей Киллинга для заданной локально определённой римановой аналитической метрики не имеет центра, [5]. Таковыми являются и многие локально однородные многообразия, в частности все локально симметрические пространства.

Определение 5. *Риманово аналитическое многообразие M называется локально однородным, если в* *любой точке $p \in M$ векторные поля Киллинга образуют базис касательного пространства T_pM .*

Эквивалентное определение локально однородного многообразия M состоит в том, что любых точек $p, q \in M$ существует локальная изометрия φ многообразия M такая, что $\varphi(p) = q$

Определение 6. *Ориентированное риманово аналитическое многообразие, алгебра Ли всех векторных полей которого имеет нулевой центр, называется квазиполным, если оно непродолжаемо и не допускает нетривиальных сохраняющих ориентацию и все векторные поля Киллинга локальных изометрий в себя.*

Исследуем ориентированные римановы аналитические многообразия, алгебра Ли всех векторных полей Киллинга которых не имеет центра, с целью доказать, что каждое такое многобразие локально изометрично квазиполному многообразию, а локально однородное квазиполное многообразие является полным однородным многообразием.

Обозначим через $Z(M)$ псевдогруппу всех сохраняющих ориентацию и векторные поля Киллинга, локальных изометрий риманова аналитического многобразия M, $\varphi \in Z(M)$ если $\forall X \in \mathfrak{g}\ \varphi(X) = X$.

Лемма 2. *Пусть M – риманово аналитическое многообразие, удовлетворяющее свойству однозначного продолжения векторных полей Киллинга и алгебра Ли всех векторных полей Киллинга которого не имеет центра. Тогда множество $S \subset M$, состоящее из неподвижных точек всевозможных изометрий $\varphi \in Z(M)$, является аналитическим подмножеством коразмерности не меньше, чем 2.*

В силу леммы 2 многобразие $M \setminus S$ связно. Доказательство леммы 2 и последующих утверждений можно найти в [2].

Лемма 3. *Пусть M – риманово аналитическое многобразие, удовлетворяющее свойству однозначного продолжения векторных полей Киллинга и алгебра Ли всех векторных полей Киллинга которого не имеет центра. Тогда существует локально изометрическое накрывающее отображение из $M \setminus S$ в риманово аналитическое многобразие M_1, также удовлетворяющее свойству однозначного продолжения векторных полей Киллинга и псевдогруппа $Z(M_1)$ которого состоит только из тождественного преобразования.*

Теорема 3. *Произвольное риманово аналитическое многобразие M, алгебра Ли векторных полей Киллинга не имеет центра локально изометрично квазиполному многообразию.*

Теорема 4. *Пусть φ – локальная изометрия из квазиполного многообразия M в квазиполное многобразие N. Тогда φ продолжается до изометрии $\varphi : M \to N$.*

Следствие 1. *Произвольное риманово аналитическое многобразие, алгебра Ли всех векторных полей Киллинга которого не имеет центра, локально изометрично единственному квазиполному многообразию. То есть локально заданная риманова аналитическая метрика, алгебра Ли векторных полей Киллинга которой не имеет центра, единственным образом продолжается до квазиполного многообразия.*

Следствие 2. *Пусть $\mathfrak{g}$ – алгебра Ли всех векторных полей Киллинга в римановом аналитическом многообразии M', диффеоморфном шару, а $\mathfrak{h}$ – ее стационарная подалгебра. Пусть G – односвязная группа, порождённая алгеброй $\mathfrak{g}$ и H – её подгруппа, порождённая подалгеброй $\mathfrak{h}$. Если $\mathfrak{g}$ не имеет центра, то H замкнута в G.*

Отметим, что квазиполное многообразие является наиболее сжатым, то есть универсально притягивающим объектом в категории всех локально изометричных многобразий. Для любого риманова аналитического многообразия M', алгебра векторных полей Киллинга которого не имеет центра, существует локально изометрическое отображение из $M' \setminus S'$ в квазиполное многобразие M, определенное на всем $M' \setminus S'$, где S' – множество неподвижных точек всех сохраняющих ориентацию и векторные поля Киллинга локальных изометрий многобразия M'.

Квазиполное многообразие единственно в классе всех аналитических продолжений данного ростка и обладает рядом замечательных свойств [5]. Прежде всего, свойством максимальной симметрии, т. е. любая локальная изометрия $f : U \to V$ из квазиполного многообразия M в себя аналитически продолжается до изометрии $f : M \to M$. Однако понятие квазиполного многообразия обладает не только тем недостатком, что оно определено не для всех локально заданных римановых аналитических метрик, но оно также не является в определённом смысле «самым полным». А именно, существует росток риманова аналитического многообразия, допускающий продолжение до полного многообразия, каноническое продолжение которого до квазиполного не является полным многообразием.

Пример 1. *Рассмотрим эллипсоид в трёхмерном пространстве, заданный уравнением $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. Для того, чтобы получить квазиполное многообразие в классе всех римановых аналитических многобразий локально изометричных эллипсоиду, необходимо выбросить из эллипсоида 6 точек пересечения с осями координат и профакторизовать полученное многообразие по группе вращений на 180 градусов вокруг всех осей координат.*

3. Псевдополные многообразия. Дать обобщение понятия полноты, приводящее к «самому полному» многообразию для произвольного ростка риманова аналитического многообразия, оказывается возможным.

Определение 7. *Риманово аналитическое односвязное многобразие M называется псевдополным, если оно обладает следующими свойствами:*

M непродолжаемо.

Не существует локально изометрического накрывающего отображения $f; M \to N$, где N – односвязное риманово аналитическое многобразие, а $f(M)$ – открытое подмножество в N, не равное N.

Исследуем аналитическое продолжение до псевдополного многообразия для различных классов ростков римановых аналитических многообразий. Прежде всего следует установить тот факт, что аналитическое продолжение до псевдополного многообразия существует для любого ростка риманова аналитического многобразия. Вместе с тем в общем случае это продолжение не единственно, однако, различные аналитические продолжения одного и того же ростка различаются не очень значительно.

Теорема 5. *Любое локально заданное риманово аналитическое многообразие допускает аналитическое продолжение до псевдополного многообразия. Если в классе локально изометричных римановых аналитических многообразий имеется полное многообразие, то это многообразие является единственным псевдополным многообразием в этом классе.*

Доказательство. На множестве всех односвязных аналитических продолжений данного ростка риманова аналитического многообразия введём следующее отношение порядка. Многообразие M больше или равно многообразия N, $M \geq N$, если существует локально изометрическое отображение $f; N \to M$. Тем самым, множество односвязных локально изометричных друг другу римановых аналитических многообразий превращается в частично упорядоченное множество. По лемме Цорна это множество содержит максимальный элемент. Этот элемент по определению и будет псевдополным многообразием.

Рассмотрим полное риманово аналитическое многобразие M. Если предположить, что M не является псевдополным, то существует локально изометрическое отображение $f; M \to N$ такое, что что некоторая точка $x \in N$, $x \notin f(M)$. Пусть $\gamma(t)$, $0 \leq t \leq 1$, геодезическая, соединяющая точку $\gamma \in f(M)$ с точкой x. Тогда прообраз этой геодезической при $0 \leq t \leq \delta$ не продолжается до геодезической при всех t на многообразии M, что противоречит полноте этого многообразия.

Псевдополное многообразие не единственно в классе всех локально изометричных римановых аналитических многообразий.

Пример 2. *Рассмотрим росток A двумерного риманова аналитического многообразия, носителем которого является сфера с метрикой $ds^2 = \frac{f(z,\overline{z})}{\sqrt{1+|z|^2}} dz d\overline{z}$, где $f(z, |z|)$ – аналитическая функция на сфере, удовлетворяющая условию $f(z, |z|) \neq |A'(z)|^2 f(A(z), A(\overline{z}))$ для любого дробно линейного преобразования $A(z)$. Такая метрика имеет особенность в точке $z = \infty$. Сфера с данной метрикой является псевдополным многообразием. Устраним особенность в точке $z = \infty$ при помощи преобразования $z = w^2 + a$, $a \in C$. В результате, получим сферу, двулистно накрывающую первоначальную и имеющую метрику $ds^2 = \frac{4|w|^2 f(w^2+a, \overline{w}^2+\overline{a})}{(1+|w^2+a|^2)} dw d\overline{w}$. Эта метрика имеет особенность в точке $w = 0$, что является естественным, так как сфера w ветвится над сферой z в точке $z = a$, соответствующей точке $w = 0$. При различных a получаем различные псевдополные многообразия с координатой w.*

Как показывает пример 2, имеется большое множество не очень естественных псевдополных многообразий. С целью избежать разветвления над регулярными точками сузим понятие псевдополного многообразия.

Определение 8. *Риманово аналитическое односвязное многобразие M называется правильным псевдополным многообразием, если не существует накрывающего локально изометрического отображения $f : M \setminus S \to N$ в другое псевдополное многобразие N локально изометричное многообразию M.*

Теорема 6. *Локальная изометрия из правильного псевдополного многообразия M в правильное псевдополное многообразие N аналитически продолжается вдоль непрерывных кривых в любую точку M за исключением аналитического подмножества S коразмерности не меньше, чем 2.*

Доказательство. Доказательство приведём для случая, когда алгебра Ли всех векторных полей Киллинга не имеет центра. Рассмотрим подмножества $S \subset M$ и $S' \subset N$, состоящие из всех неподвижных точек локальных изометрий, сохраняющих ориентацию векторных полей Киллинга. Множества S и S' являются аналитическими подмножествами многообразий M и N коразмерности не меньшей, чем 2. Пусть M_0 – квазиполное многообразие, локально изометричное многообразиям M и N. Тогда существуют накрывающие локально изометрические отображения $f : M \setminus S \to M_0$ и $g : N \setminus S' \to M_0$. При этом из определения правильного псевдополного многообразия следует, что $f(M \setminus S) = M_0$ и $g(N \setminus S') = M_0$. Рассмотрим произвольную кривую $\gamma(t) \subset M \setminus S$ такую, что область определения первоначально заданной локальной изометрии φ между многообразиями M и N содержит точку $\gamma(0)$, её образ $\delta(t) = f(\gamma(t)) \subset M_0$ и связную компоненту $\beta(t)$ прообраза $g^{-1}(\delta(t)) \subset N \setminus S'$, содержащую точку $\varphi(\gamma(0))$. Тогда первоначально заданная локальная изометрия φ аналитически продолжается до изометрии некоторой окрестности кривой $\gamma(t)$, $0 \leq t \leq 1$, на некоторую окрестность кривой $\beta(t)$, $0 \leq t \leq 1$, принадлежащую $N \setminus S'$.

Пусть M – правильное псевдополное риманово аналитическое многообразие, алгебра Ли всех векторных полей которого не имеет центра, S – множество неподвижных точек всех сохраняющих ориентацию и векторные поля Киллинга локальных изометрий многообразия M, M_0 – квазиполное многобразие локально изометричное M, $\tilde{M}_0 S$ – односвязная накрывающая многобразия M_0. Тогда имеют место аналитические локально изометрические накрытия $\tilde{M}_0 \to M \setminus S \to M_0$.

Для произвольного ориентированного риманова аналитического многообразия M обозначим через

$Z(M)$ псевдогруппу, состоящую из всех локальных изометрий многообразия M, сохраняющих ориентацию и все векторные поля Киллинга. Рассмотрим фактор многообразие K_M многообразия $M \setminus S$ по псевдогруппе $Z(M)$. Определим объединение многообразий K_M и K_N, склеивая их по множеству $K_{M \cap N}$. Под пересечением $M \cap N$ подразумевается отождествление максимальных подмножеств, на которые продолжается первоначально заданная локальная изометрия между односвязными накрывающими $\tilde{M}$ и $\tilde{N}$ многообразий M и N. На многообразии $M \setminus S$ рассмотрим распределение $\mathfrak{z}^{\perp}$, состоящее из векторов, перпендикулярных центру $\mathfrak{z}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ всех векторных полей Киллинга.

Теорема 7. *Пусть M – псевдополное риманово аналитическое многообразие, $\mathfrak{z}^{\perp}$ – распределение касательных векторов, перпендикулярных центру $\mathfrak{z}$ алгебры всех векторных полей Киллинга, S – множество неподвижных точек, сохраняющих ориентацию и все векторные поля Киллинга локальных изометрий. Если $\mathfrak{z}^{\perp}$ инволютивно, то односвязная накрывающая $\widetilde{M \setminus S}$ многообразия $M \setminus S$ изометрична прямому произведению евклидова пространства и односвязной накрывающей $\tilde{K}$ вполне геодезического подмногообразия $K \subset M$ касательного к $\mathfrak{z}^{\perp}$. $\widetilde{M \setminus S} \approx \mathbf{R}^k \times \tilde{K}$.*

Доказательство. Ввиду инволютивности распределений $\mathfrak{z}$ и $\mathfrak{z}^{\perp}$ некоторая окрестность U отмеченной точки $p \in M$ имеет вид $U = V \times W$, где V – открытое подмножество интегрального подмногообразия распределения $\mathfrak{z}$, а W – открытое подмножество интегрального подмногообразия распределения $\mathfrak{z}^{\perp}$. Пусть $x^1; x^2; \ldots; x^k$ – координаты на V, а $y^1; y^2; \ldots; y^m$ – координаты на W. Тогда в координатах $x^1; x^2; \ldots; x^k; y^1; y^2; \ldots; y^m$ компоненты g_{ij} не зависят от $x^1; x^2; \ldots; x^k$, и так как подмногообразия V и W перпендикулярны, то компоненты при $dx^i dy^j$ равны 0. Поэтому метрика на U имеет вид $ds^2 = ds_1^2(y) + f_{ij}(y)dx^i dx^j$. Вследствие непродолжаемости псевдополного многообразия $M \setminus S$ содержит полные интегральные подмногообразия распределения $\mathfrak{z}$, т. е. прямые произведения евклидова пространства и тора $\mathbf{R}^k \times T^l$. Поэтому $M \setminus S$ является расслоением над $K' \subset K$ со слоями $\mathbf{R}^k \times T^l$. Так как распределение $\mathfrak{z}^{\perp}$ инволютивно, это расслоение содержит сечение K', и поэтому тривиально, $M \setminus S = \mathbf{R}^k \times T^l \times K'$. Так как M непродолжаемо, то $K' = K$. Следовательно, односвязная накрывающая многобразия $M \setminus S$ изометрична прямому произведению односвязных пространств, $\widetilde{M \setminus S} \approx \mathbf{R}^k \times \tilde{K}$.

Следствие. *Рассмотрим риманово аналитическое многообразие M' размерности n, алгебра Ли $\mathfrak{g}$ которого коммутативна, то есть совпадает со своим центром $\mathfrak{z}$, и $dim\mathfrak{g} = dim\mathfrak{z} = n - 1$. Тогда существует не более двух псевдополных многообразий локально изометричных M' .*

Доказательство. Так как $codim\mathfrak{z} = 1$, то $dim\mathfrak{z}^{\perp} = 1$, и $\mathfrak{z}^{\perp}$ инволютивно. По теореме 5 для псевдополного многообразия M локально изометричного многообразию M' имеет место разложение $M \setminus S = \mathbf{R}^s \times T^l \times K$. Вполне геодезическое подмногообразие K изометрично прямой $\mathbf{R}$ или окружности S^1 или лучу $(a; \infty)$ или интервалу $(a; b)$. Рассмотрим фактор множество $\overline{K} = M/Z(M)$. Если $K = \mathbf{R}$ или $K = S^1$, то $\overline{K} = K$. Если $K = (a; \infty)$, то $\overline{K} = [a; \infty)$ или $\overline{K} = K = (a; \infty)$. Если $K = (a; b)$, то $\overline{K} = [a; b)$ или $\overline{K} = (a; b]$ или $\overline{K} = [a; b]$ или $\overline{K} = K = (a; b)$. В случае, если $K = \mathbf{R}$ или $K = S^1$, то соответствующий росток риманова аналитического многобразия имеет единственное продолжение до псевдополного многобразия, и это многобразие изометрично евклидовому пространству. Продолжение ростка до псевдополного многобразия будет единственным в случае $S = \varnothing$, т. е. $\overline{K} = K$.

Пусть $K = (a; \infty)$, а $\overline{K} = [a; \infty)$. Тогда точки подмножества $S \subset M$ отображаются при факторизации $\overline{K} = M/Z(M)$ в точку $a \in \overline{K}$. Точка $x \in S$ является особой точкой некоторого поля $X \in \mathfrak{z}$, $X(x) = 0$, а любая изометрия φ из M в себя такая, что $\varphi(x) = x$, имеет вид $\varphi = ExpY$, $Y \in \mathfrak{z}$. Рассмотрим подалгебру $\mathfrak{z}_0 \subset \mathfrak{z}$, состоящую из векторных полей Киллинга $X \in \mathfrak{z}$, обращающихся в ноль в точке x, $X(x) = 0$. Тогда $\mathfrak{z}_0$ порождает группу изометрий некоторого шара B, аналитически продолжающуюся до группы изометрий многообразия M и изоморфную фактор группе группы $\mathfrak{z}_0 = \mathbf{R}^s$ по некоторой решётке Γ, действующей на многообразии M. Тогда M является полным многообразием изометричным пространству $\mathbf{R}^s \times T^l$. Аналогичная конструкция применима к случаю, когда $K = (a; b)$, а $\overline{K} = [a; b)$ или $\overline{K} = (a; b]$, т. е. когда $\overline{K}$ получается из K присоединением одной точки a или b. В этом случае псевдополное многобразие также единственно и изометрично многобразию $\mathbf{R}^s \times T^l \times \overline{K}$; однако это многобразие уже не является полным.

Наконец, рассмотрим случай $K = (a; b)$, $\overline{K} = [a; b]$, т. е. когда $\overline{K}$ получается из K присоединением двух точек a и b. Рассмотрим псевдополное многобразие M_1 и точки множества $S_1 \subset M_1$, проектирующиеся в точку $a \in \overline{K}$. Тогда так же, как и при рассмотрении предыдущих случаев, рассмотрим многобразие M_1', получающееся присоединением множества S_1 к фактор-многообразию многообразия $M \subset S$ по некоторой решетке $\Gamma_1 \subset \mathfrak{z} = \mathbf{R}^{n-1}$ так, что $M_1' = \mathbf{R}^s \times T^l \times \overline{K_1})$, где $\overline{K_1} = [a; b)$. Аналогично, рассмотрим псевдополное многобразие M_2 и точки множества $S_2 \subset M_2$, проектирующиеся в точку $b \in \mathbf{K}$. Многобразие M_2' получается присоединением множества S_2 к фактор-многообразию многообразия $M \setminus S$ по некоторой решетке $\Gamma_2 \subset z = \mathbf{R}^{n-1}$ так, что $M_2' = \mathbf{R}^s \times T^l \times \overline{K}_2$, где $K_2 = (a; b]$. Если решётки Γ_1 и Γ_2 не совпадают, то многобразия $M_1 = M_1'$ и $M_2 = M_2'$ являются двумя различными псевдополными многобразиями. Если же решетки Γ_1 и Γ_2 совпадают, то многобразия M_1 и M_2 изометричны и определяют полное многобразие $M = M_1 = M_2$.

4. Заключение. Укажем на возможное развитие теории аналитического продолжения ростков римановых аналитических многообразий.

Понятие квазиполного многообразия не обобщается на многообразия аффинной связности, но может быть обобщено на псевдоримановы многообразия.

Условие замкнутости подгуппы Ли, соответствующей стационарной подалгебре Ли, в односвязной группе Ли, соотвествующей алгебры Ли все векторных полей Килилинга, может быть уточнено и распространено на алгебру Ли всех инфинитезимальных преобрзований проства аналитческой аффинноой связности.

Псевдополные многообразия в классе всех локально изометричных многообразий заслуживают более полного описания. Для малых размерностей возможна полная классификация псевдополных многообразий.

References

1. Helgason S. 1978. Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces; Academic Press, Inc., Harcourt Brace Jovanovich, Publishers: Boston, San Diego, New York, USA, 596.

2. Kobayashi S., Nomidzu K. 1969. Foundations of Differential Geometry; Interscience Publisher, a division of John Wiley and Sons; New York, USA. 487.

3. Popov V. A. 2016. On the Extendability of Locally Defined isometries of a Pseudo-Riemannian Manifolds. – Journal of Mathematical sciences. Vol. 217, №5, September, 2016, p. 624 – 627.

4. Popov V. A. 2017. V.A. On Closeness of Stationary Subgroup of Affine Transformation Groups. Lobachevskii Journal of Mathematics. V. 38, №4, 2017, pp. 724 – 729.

5. Popov V. A. 2020. V. A. Popov, Analytic Extension of Riemannian Manifolds and Local Isometries. Mathematics, 2020. V. 8, № 11, pp. 1-17.

6. Smith G. H. 1978/ Analytic extension of Riemannian manifolds. BULL. AUSTRAL. MATH. SOC. Vol. 18 (1978), pp. 147-148.

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.
Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 17.11.2022
Поступила после рецензирования 28.11.2022
Принята к публикации 01.12.2022

Received 17.11.2022
Revised 28.11.2022
Accepted 01.12.2022

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Попов Владимир Александрович – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент департамента математики финансового университета при Правительстве Российской Федерации
Ленинградский пр., 49, Москва, 115054, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Vladimir Popov – PhD, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Mathematics of Finacial University under the Govenmtent of the Russian Federation, Moscow, Russia

Прикладная математика & Физика, 2023, том 55, №1. С. 12–28.
Applied Mathematics & Physics, 2023, Volume 55, No 1. P. 12–28.

УДК 517.95 DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-1-12-28
MSC 35Q93
Original Reseach

INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR TWO DIMENSIONAL KAWAHARA EQUATION

Martynov E. V.

(*Article submitted by a member of the editorial board E. Yu. Panov*)

Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University),
Moscow, 117198, Russian
E-mail: e.martynov@inbox.ru

Abstract. In this paper we study initial-boundary value problems on a half-strip with different types of boundary conditions for the generalized two-dimensional Kawahara equation with nonlinearity of higher order. The solutions are considered in weighted at infinity Sobolev spaces. The use of weighted spaces is crucial for the study. We establish results on global existence and uniqueness in classes of weak and strong solutions, as well as large-time decay of week and strong solutions under small input data.

Keywords: Two-Dimensional Kawahara Equation, Solvability of the Initial Bundary Value Problem, Dissipation of Solutions at Infinity

Acknowledgements: The work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of Russian Federation: agreement no 075-03-2020-223/3 (FSSF-2020-0018).

For citation: Martynov Egor. 2023. Initial-boundary value problems for two dimensional Kawahara equation. Applied Mathematics & Physics, 55(1): 12–28 (in Russian). DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-1-12-28

оригинальное исследование

НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДВУХМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ КАВАХАРЫ

Мартынов Е. В.

(*Статья представлена членом редакционной коллегии Е. Ю. Пановым*)

Российский университет дружбы народов (РУДН),
Москва, 117198, Россия

E-mail: e.martynov@inbox.ru

Аннотация. В работе были изучены начально-краевые задачи с разными типами граничных условий для двухмерной модификации уравнения Кавахары с высокой нелинейностью. Уравнение рассматривалось на полу-полосе конечной ширины. Были получены результаты о существовании и единственности сильных и слабых решений поставленных задач и о диссипации решений на бесконечности. Решения рассматривались в весовых пространствах Соболева.

Ключевые слова: двухмерное уравнение Кавахары, разрешимость начально-краевой задачи, диссипация решений на бесконечности

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России в рамках государственного задания: соглашение no 075-03-2020-223/3 (FSSF-2020-0018).

Для цитирования: Мартынов Е. В. 2023. Начально-краевые задачи для двухмерного уравнения Кавахары. Прикладная математика & Физика, 55(1): 12–28. DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-1-12-28

---

1. Introduction. In the following paper we consider initial-boundary value problems for two dimensional Kawahara equation:

$$u_t - (u_{xxxx} + u_{yyyy})_x + b(u_{xx} + u_{yy})_x + au_x + (g(u))_x = f(t, x, y), \tag{1}$$

posed on a domain $\Pi_T^+ = (0, T) \times \Sigma_+$, where $\Sigma_+ = \mathbb{R}_+ \times (0, L) = \{(x, y) : x > 0, 0 < y < L\}$ is a half-strip of a given width L and $T > 0$ is arbitrary for equation (1), with the initial condition:

$$u(0, x, y) = u_0(x, y), \quad (x, y) \in \Sigma_+, \tag{2}$$

and boundary conditions:

$$u(t,0,y) = u_x(t,0,y) = 0, \quad (t,y) \in B_T = (0,T) \times (0,L), \tag{3}$$

and boundary conditions for $(t,x) \in \Omega_{T,+} = (0,T) \times \mathbb{R}_+$ of one of the following two types:

$$\begin{aligned} a).\ & u(t,x,0) = u(t,x,L) = u_{yy}(t,x,0) = u_{yy}(t,x,L) = 0, \\ b).\ & u_y(t,x,0) = u_y(t,x,L) = u_{yyy}(t,x,0) = u_{yyy}(t,x,L) = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

The assumptions on the function $g(u)$ are specified later; a, b are arbitrary real constants. Results on global existence are bases on estimates which are the analogues of the following conservation laws for the initial value problem

$$\iint_{\mathbb{R}^2} u^2 dxdy = const, \quad \iint_{\mathbb{R}^2} (u_{xx}^2 + u_{yy}^2 + bu_x^2 + bu_y^2 - 2g^*(u))dxdy = const,$$

where

$$g^*(u) \equiv \int_0^u g(\theta)d\theta.$$

The equation (1) is a two-dimensional version of the Kawahara equation:

$$u_t - u_{xxxxx} + bu_{xxx} + au_x + uu_x = 0.$$

Obtained in [10], it describes the propagation of long nonlinear waves in weakly dispersive media. Kawahara equation (also known as fifth-order Korteweg–de Vries equation) is a modification of the well-known Korteweg–de Vries equation (KdV):

$$u_t + u_{xxx} + au_x + uu_x = 0,$$

which also has the two-dimensional form, so called Zakharov – Kuznetsov equation:

$$u_t + u_{xxx} + u_{xyy} + au_x + u^2 u_x = 0.$$

In this paper we establish global existence and uniqueness of solutions to initial-boundary value problems (1) – (4) and large-time decay under small input data.

Through the years there was a wide variety of investigations dedicated to various aspects of the Kawahara equation and some of its modifications. The initial value problem and initial-boundary value problems are considered, for instance, in [5, 11, 1, 9]. However, two-dimensional modifications of Kawahara equation are studied considerably less. Kawahara equation has a another two-dimensional modification known as Kawahara – Zakharov – Kuznetsov:

$$u_t - u_{xxxxx} + u_{xxx} + u_{xyy} + au_x + uu_x = 0.$$

For the first time an initial-boundary value problem for this equation was considered in [12]. The author obtained global existence, uniqueness of regular solutions and large-time decay for the small initial data. Those results were extended for the three-dimensional case of the Kawahara equation in [13]. Recently, in [14] author studied smoothness properties of solutions of a two-dimensional Kawahara equation.

Our methods are similar to those given in [3], where the author studied the initial-boundary value problems for the Kawahara – Zakharov – Kuznetsov equation on a half-strip. Previously, the author also obtained similar results for Zakharov – Kuznetsov equation in [6, 7, 8]. However, in our case we studied a different form of two-dimensional Kawahara equation given by (1).

Introduce function spaces $\widetilde{H}_+^k$ taking into account boundary conditions (4). For any multi-index $\nu = (\nu_1, \nu_2)$, let $\partial^\nu = \partial_x^{\nu_1}\partial_y^{\nu_2}$ and $\widetilde{H}_+^0 = L_{2,+}$ for $k \geq 1$ the space $\widetilde{H}_+^k$ consists of functions $\varphi(x)$ such that $\partial^\nu\varphi \in L_{2,+}$ if $\nu_1 + \nu_2 \leq k$ and in case (a)

$$\partial_y^{2m}\varphi\big|_{y=0} = \partial_y^{2m}\varphi\big|_{y=L} = 0, \quad \forall m \in [0, k/2),$$

and in case (b)

$$\partial_y^{2m+1}\varphi\big|_{y=0} = \partial_y^{2m+1}\varphi\big|_{y=L} = 0, \quad \forall m \in [0, (k-1)/2).$$

Now, let us give the definition of the admissible weight function.

Definition 1.1. *The function $\psi(x)$ is called admissible weight function if φ is an infinitely smooth positive function on $\overline{\mathbb{R}}_+$, such that for each $j \in \mathbb{N}$ and $\forall x \geq 0$*

$$|\psi^{(j)}(x)| \leq c(j)\psi(x).$$

Introduce the following

$$\lambda^+(u;T) = \sup_{x_0 \geq 0} \int_0^T \int_{x_0}^{x_0+1} \int_0^L u^2 dydxdt. \tag{5}$$

We construct solutions to the considered problems in space $X_\omega^{k,\psi(x)}(\Pi_T^+)$ for two cases for $k=0$ (weak solutions), $k=2$ (strong solutions) and for admissible weight $\psi(x)$, such that $\psi'(x)$ are also admissible weight functions, consisting of functions $u(t,x,y)$, such that

$$u \in C_\omega([0,T];\widetilde{H}_+^{k,\psi(x)}) \cap L_2(0,T;\widetilde{H}_+^{k+2,\psi'(x)}).$$

Further, we denote $X_\omega^{0,\psi(x)}(\Pi_T^+)$ as $X_\omega^{\psi(x)}(\Pi_T^+)$. Introduce the notion of weak solutions to the considered problems, define special function spaces of smooth functions. Let $\widetilde{S}(\overline{\Sigma}_+)$ be a space of infinitely smooth on $\overline{\Sigma}_+$ function $\varphi(x,y)$ such that $(1+x)^n|\partial^\alpha\varphi(x,y)| \le c(n,\alpha)$ for any n, multi-index $\alpha,(x,y)\in\overline{\Sigma}_+$ and $\partial_y^{2m}\varphi\big|_{y=0} = \partial_y^{2m}\varphi\big|_{y=L}=0$ for case (a) and $\partial_y^{2m+1}\varphi\big|_{y=0}=\partial_y^{2m+1}\varphi\big|_{y=L}=0$ for case (b) for any m.

Definition 1.2. *Let $u_0\in L_{2,+}$, $f\in L_1(0,T;L_{2,+})$. The function $u\in L_\infty(0,T;L_{2,+})$ is called a weak solution of problem (1) – (4), if for any $\varphi\in C^\infty([0,T];\widetilde{S}(\overline{\Sigma}))$, such that $\varphi\big|_{t=T}=\varphi\big|_{x=0}=\varphi_x\big|_{x=0}=\varphi_{xx}\big|_{x=0}=0$, the following relation is satisfied:*

$$\iiint_{\Pi_T^+}(u\varphi_t - u\varphi_{xxxxx} - u\varphi_{yyyyx} + bu\varphi_{xxx} + bu\varphi_{yyx} + au\varphi_x + g(u)\varphi_x + f\varphi)dtdxdy + \iint_{\Sigma_+} u_0\varphi\big|_{t=0}dxdy = 0. \quad (6)$$

Now let us introduce the main results. The first two theorems establish global existence and uniqueness of weak and strong solutions respectably.

Theorem 1.1. *Let $u_0\in L_{2,+}^{\psi(x)}$, $f\in L_1(0,T;L_{2,+}^{\psi(x)})$ for certain admissible weight function $\psi(x)$, such that $\psi'(x)$ is also an admissible weight function. Let $g\in C^1(\mathbb{R})$ and for certain constants $p\in[0,4)$ and $c>0$*

$$|g'(u)| \le c|u|^p \quad \forall u\in\mathbb{R}, \quad (7)$$

and if $p>1$ the function ψ for certain constants n and $c>0$ satisfies an inequality $\psi(x)\le c(1+x)^n\psi'(x)$. Then there exists a weak solution to problem (1) – (4) $u\in X_\omega^{\psi(x)}(\Pi_T^+)$; moreover $\lambda^+(u_{xx};T)+\lambda^+(u_{yy};T)<+\infty$. In addition, if $p\le 3$ in (7) and for certain positive c_0

$$(\psi'(x))^{p+1}\psi^{p-1}(x) \ge c_0 \quad \forall x\ge 0, \quad (8)$$

then this solution is unique in $X_\omega^{\psi(x)}(\Pi_T^+)$.

Remark 1.1. *The exponential weight $\psi(x)\equiv e^{2\alpha x}$ $\forall\alpha>0$ and the power weight $\psi(x)\equiv(1+x)^{2\alpha x}$ $\forall\alpha\ge\frac{1}{4}(1+\frac{1}{p})$, $p>0$, satisfy the hypothesis of the Theorem 1.1 (including uniqueness). If $u_0\in L_{2,+}$, $f\in L_1(0,T;L_{2,+})$, there exists a weak solution $u\in C_\omega([0,T];L_{2,+})$, $\lambda^+(u_{xx})+\lambda^+(u_{yy})<+\infty$.*

Theorem 1.2. *Let $u_0\in\widetilde{H}_+^{2,\psi(x)}$, $f\in L_2(0,T;\widetilde{H}_+^{2,\psi(x)})$ for certain admissible weight function $\psi(x)$, such that $\psi'(x)$ is also an admissible weight function, $u_0(0,y)\equiv u_{0x}(0,y)\equiv 0$. Let $g\in C^2(\mathbb{R})$ and verifies condition (8) for $p\in[0,4)$. Then there exists a strong solution to problem (1) – (4) $u\in X_\omega^{1,\psi(x)}(\Pi_T^+)$; moreover $\lambda^+(u_{xxxx};T)+\lambda^+(u_{yyyy};T)+\lambda^+(u_{xxyy};T')<+\infty$. In addition, if for certain constants $q\ge 0$ and $c>0$*

$$|g''(u)| \le c|u|^q \quad \forall u\in\mathbb{R}, \quad (9)$$

and for certain positive c_0 and $r\in(2,4]$

$$\psi'(x)^{r-2}\psi^{rq+2}(x) \ge c_0 \quad \forall x\ge 0, \quad (10)$$

then this solution is unique in $X_\omega^{2,\psi(x)}(\Pi_T^+)$.

Remark 1.2. *The exponential weight $\psi(x)\equiv e^{2\alpha x}$ $\forall\alpha>0$ and the power weight $\psi(x)\equiv(1+x)^{2\alpha x}$ $\forall\alpha>0$, satisfy the hypothesis of the Theorem 1.2 (including uniqueness). If $u_0\in\widetilde{H}_+^2$, $u_0(0,y)\equiv u_{0x}(0,y)\equiv 0$, $f\in L_2(0,T;\widetilde{H}_+^2)$, there exists a weak solution $u\in C_\omega([0,T];\widetilde{H}_+^2)$, $\lambda^+(u_{xxxx})+\lambda^+(u_{yyyy})+\lambda^+(u_{xxyy};T')<+\infty$.*

Next, we introduce two theorems on large-time decay of weak and strong solutions.

Theorem 1.3. *Let the function $g\in C^1(\mathbb{R})$ satisfies inequality (7) for $p\in(0,3]$. Then there exists $L_0>0$, $\alpha_0>0$ and $\epsilon_0>0$ such that for any $L\in(0,L_0]$, $\alpha\in(0,\alpha_0]$ and $\beta=\pi^4/(8L^4)$, such that if $u_0\in L_{2,+}^{e^{2\alpha x}}$, $\|u_0\|_{L_{2,+}}\le\epsilon_0$, $f\equiv 0$, the corresponding unique solution $u(t,x,y)$ to problem (1) – (4) in the case a). from the space $X_\omega^{e^{2\alpha x}}(\Pi_T^+)$ $\forall T>0$ satisfies an inequality:*

$$\|e^{\alpha x}u(t,\cdot,\cdot)\|_{L_{2,+}}^2 \le e^{-\alpha\beta t}\|e^{\alpha x}u_0\|_{L_{2,+}}^2 \quad \forall t\ge 0. \quad (11)$$

Theorem 1.4. *Let the function $g\in C^2(\mathbb{R})$ satisfies inequality (7) for $p\in[1,4]$ and inequality (9) for $q=p-1$. Then there exists $L_0>0$, $\alpha_0>0$ and $\epsilon_0>0$, such that for any $L\in(0,L_0]$, $\alpha\in(0,\alpha_0]$ and $\beta=\pi^4/(8L^4)$, such that if $u_0\in\widetilde{H}^{1,e_+^{2\alpha x}}$ for $\alpha\in(0,\alpha_0]$, $\|u_0\|_{L_{2,+}}\le\epsilon_0$, $u_0(0,y)\equiv u_{x0}(0,y)\equiv 0$, $f\equiv 0$ the corresponding unique solution $u(t,x,y)$ to problem (1) – (4) in the case a). from the space $X_\omega^{1,e^{2\alpha x}}(\Pi_T^+)$,$\forall T>0$ satisfies an inequality*

$$\|e^{\alpha x}u(t,\cdot,\cdot)\|_{\widetilde{H}_+^1}^2 \le c(\|u_0\|_{\widetilde{H}_+^{2,e^{2\alpha x}}},\alpha,\beta)e^{-\alpha\beta t} \quad \forall t\ge 0. \quad (12)$$

2. Preparations. In this section we establish some preliminary results. First, introduce the following notations: let $\eta(x)$ be a cutoff function, η is an infinitely smooth non-decreasing function on $\mathbb{R}$ such that $\eta(x) = 0$ for $x \le 0$, $\eta(x) = 1$ for $x \ge 1$, $\eta(x) + \eta(1-x) \equiv 1$; let $S_{exp}(\overline{\Sigma}_+)$ be a space of infinitely smooth functions $\varphi(x,y)$ on $\overline{\Sigma}_+$, such that $e^{nx}|\partial^\nu \varphi(x,y)| \le c(n,\nu)$ for any n, multi-index ν,$(x,y) \in \overline{\Sigma}_+$; let $\widetilde{S}_{exp}(\overline{\Sigma}_+)$ be a subspace of $S_{exp}(\overline{\Sigma}_+)$, consisting of functions, on the boundaries $y = 0$,$y = L$ verifying the same conditions as in the definition of the space $\widetilde{S}_{exp}(\overline{\Sigma}_+)$. This space is dense in $\widetilde{H}^k_+$.

Further, we drop limits of integration in integrals with respect to x and y over the whole half-strip Σ_+ and and with respect to x over the half-line $\mathbb{R}_+$. The following interpolating inequalities are very important for our next steps.

Lemma 2.1. *Let $\psi_1(x)$,$\psi_2(x)$ be two admissible weight functions, $q \in [2,+\infty]$*

$$s = s_0(q) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2q},$$

then for every function satisfying $(|\varphi_{xx}| + |\varphi_{yy}| + |\varphi|)\psi_1^{1/2}(x) \in L_{2,+}$, $\varphi\psi_2^{1/2}(x) \in L_{2,+}$, $\varphi(0,y) \equiv 0$, $\varphi(x,0)\varphi_y(x,0) = \varphi(x,L)\varphi_y(x,L) \equiv 0$, the following inequality holds:

$$\|\varphi\psi_1^s\psi_2^{1/2-s}\|_{L_{q,+}} \le c\|(|\varphi_{xx}| + |\varphi_{yy}| + |\varphi|)\varphi_1^{1/2}\|^{2s}_{L_{2,+}}\|\varphi\psi_2\|^{1-2s}_{L_{2,+}}, \tag{13}$$

where the constant c depends on L, q and the properties of the functions ψ_i; if, in addition, $\varphi\big|_{y=0} = 0$ or $\varphi\big|_{y=L} = 0$ then this constant is uniform with respect to L.

Proof. Without loss of generality, assume that φ is a smooth, decaying at $+\infty$ function (for example $\varphi \in S_{exp}(\overline{\Sigma}_+)$).

First, uniformly with respect to L we establish the following:

$$\iint (\varphi_x^2 + \varphi_y^2)\psi_1^{1/2}\psi_2^{1/2}dxdy \le c(\iint (\varphi_{xx}^2 + \varphi_{yy}^2 + \varphi^2)\psi_1 dxdy)^{1/2}(\iint \varphi^2\psi_2 dxdy)^{1/2}. \tag{14}$$

In fact, boundary conditions on the function φ yield that

$$\iint (\varphi_x^2 + \varphi_y^2)\psi_1^{1/2}\psi_2^{1/2}dxdy = -\iint (\varphi_{xx} + \varphi_{yy})\psi_1^{1/2}\varphi\psi_2^{1/2}dxdy - \iint \psi\varphi_x(\psi_1^{1/2}\psi_2^{1/2})'dxdy.$$

Since ψ_i are admissible weight functions, we get

$$\iint (\varphi_x^2 + \varphi_y^2)\psi_1^{1/2}\psi_2^{1/2}dxdy \le \sqrt{2}(\iint (\varphi_{xx}^2 + \varphi_{yy}^2)\psi_1 dxdy)^{1/2}(\iint \varphi^2\psi_2 dxdy)^{1/2}$$
$$+c(\iint \varphi_x^2\psi_1^{1/2}\psi_2^{1/2}dxdy)^{1/2}(\iint \varphi^2\psi_1 dxdy)^{1/4}(\iint \varphi^2\psi_2 dxdy)^{1/4},$$

whence (14) follows.

Next, we use the following interpolating inequality from [1] in the case of the domain $\Omega = \Sigma_+$

$$\|f\|_{L_\infty(\Omega)} \le c(\|f_{xx}\|_{L_1(\Omega)} + \|f_{yy}\|_{L_1(\Omega)} + \|f\|_{L_1(\Omega)}), \tag{15}$$

and apply it to the function $f \equiv \varphi^2\psi_1^{1/2}\psi_2^{1/2}$, then

$$\|\varphi\psi_1^{1/4}\psi_2^{1/4}\|^2_{L_\infty(\Sigma_+)} \le c\iint [|(\varphi^2\psi_1^{1/2}\psi_2^{1/2})_{xx}| + |(\varphi^2\psi_1^{1/2}\psi_2^{1/2})_{yy}| + \varphi^2\psi_1^{1/2}\psi_2^{1/2}]dxdy. \tag{16}$$

Here,

$$(\varphi^2\psi_1^{1/2}\psi_2^{1/2})_{xx} = 2(\varphi\varphi_{xx} + \varphi_x^2)\psi_1^{1/2}\psi_2^{1/2} + 4\varphi\varphi_x(\psi_1^{1/2}\psi_2^{1/2})' + \varphi^2(\psi_1^{1/2}\psi_2^{1/2})'',$$
$$\iint |\varphi\varphi_{xx}|\psi_1^{1/2}\psi_2^{1/2}dxdy \le (\iint \varphi_{xx}^2\psi_1 dxdy)^{1/2}(\iint \varphi^2\psi_2 dxdy)^{1/2},$$

and since ψ_i are admissible weight functions

$$\iint |\varphi\varphi_x(\psi_1^{1/2}\psi_2^{1/2})'|dxdy \le c(\iint \varphi_x^2\psi_1^{1/2}\psi_2^{1/2}dxdy)^{1/2}(\iint \varphi^2\psi_1 dxdy)^{1/4}$$
$$(\iint \varphi^2\psi_2 dxdy)^{1/4},$$
$$\iint \varphi^2|(\psi_1^{1/2}\psi_2^{1/2})''|dxdy \le c\iint \varphi^2\psi_1^{1/2}\psi_2^{1/2} \le c(\iint \varphi^2\psi_1 dxdy)^{1/2}$$

$$\Big(\iint \varphi^2\psi_2 dxdy\Big)^{1/2}.$$

Other terms in the right-hand side of (16) are estimated in a similar way and with the use of (14) inequality (13) in the case $q = +\infty$ follows.

If $q \in (2, +\infty)$, then with the use of the (14) for $q = +\infty$

$$\|\varphi\psi_1^s\psi_2^{1/2-s}\|_{L_{q,+}} = \Big(\iint |\varphi|^{q-2}\psi_1^{\frac{q-2}{4}}\psi_2^{\frac{q-2}{4}}\varphi^2\psi_2 dxdy\Big)^{1/q} \le \|\varphi\psi_1^{1/4}\psi_2^{1/4}\|_{L_{q,+}}^{(q-2)/q}\|\varphi\psi_2^{1/2}\|_{L_{2,+}}^{2/q}$$
$$\le c\|(|\varphi_{xx}| + |\varphi_{yy}| + |\varphi|)\psi_1^{1/2}\|_{L_{2,+}}^{2s}\|\varphi\psi_2^{1/2}\|_{L_{2,+}}^{1-2s}.$$

Finlay, if, for instance, $\varphi\big|_{y=L} = \varphi\big|_{y=0} = 0$, extend the function φ by zero to the quarter–plate $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ and carry out the same argument with the use of (15) for $\Omega = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ and (14) for $L = +\infty$, then estimate (13) becomes uniform with respect to L.□

Further we also use an interpolating inequality, following from the one in [4].

Lemma 2.2. *Let $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$ be two admissible weight functions, such that $\psi_1(x) \le c_0\psi_2(x)$, $\forall x \ge 0$ for certain constant $c_0 > 0$, $q \in [2, +\infty)$*

$$s = s_1(q) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2q}, \tag{17}$$

then there exists a constant $c > 0$, such that for any function $\varphi(x, y)$ verifying $\varphi_{xx}\psi_1^{1/2}(x)$, $\varphi_{yy}\psi_1^{1/2}(x) \in L_2(\Sigma_+)$, $\varphi\psi_2^{1/2}(x) \in L_2(\Sigma_+)$, if $|\nu| = 1$ the following inequality holds:

$$\|\partial^\nu\varphi\psi_1^s\psi_2^{1/2-s}\|_{L_{2,+}} \le c\|(|\varphi_{xx}| + |\varphi_{yy}|)\psi_1^{1/2}\|_{L_{2,+}}^{2s} \times \|\varphi\psi_2^{1/2}\|_{L_{2,+}}^{1-2s} + c\|\varphi\psi_2^{1/2}\|_{L_{2,+}}. \tag{18}$$

We use next two lemmas from [3].

Lemma 2.3. *Let $\psi(x)$ be an admissible weight function, then there exists a constant c depending on the properties of the function ψ, such that for any function $\varphi(x, y)$ verifying $\varphi_{xx}, \varphi \in L_{2,+}^{\psi(x)}$ the following inequalities hold:*

$$\iint \varphi_x^2\psi dxdy \le c\Big[\iint \varphi_{xx}^2\psi dxdy\Big]^{1/2}\Big[\iint \varphi^2\psi dxdy\Big]^{1/2} + c\iint \varphi^2\psi dxdy, \tag{19}$$

$$\int_0^L \varphi_x^2\big|_{x=0} dxdy \le c\Big[\iint \varphi_{xx}^2\psi dxdy\Big]^{3/4}\Big[\iint \varphi^2\psi dxdy\Big]^{1/4} + c\iint \varphi^2\psi dxdy. \tag{20}$$

Introduce anisotropic Sobolev spaces with smoothness properties only with respect to x. Let $H_+^{(k,0)}$ be a space of functions $\varphi(x, y) \in L_{2,+}$ such that $\partial_x^j\varphi \in L_{2,+}$ for $j \le k$ endowed with the natural norm $\|\varphi\|_{H_+^{(k,0)}} = (\sum_{j=0}^k \|\partial_x^j\varphi\|_{L_{2,+}}^2)^{1/2}$. Let $H_+^{(-m,0)} = \{\varphi(x, y) = \sum_{j=0}^m \varphi_j(x, y) : \forall\varphi_j \in L_{2,+}\}$, endowed with the natural norm $\|\varphi\|_{H_+^{(-m,0)}} = (\sum_{j=0}^m \|\varphi_j\|_{L_{2,+}}^2)^{1/2}$.

Lemma 2.4. *If $\varphi \in H_+^{(k,0)}$, $\partial_x^n\varphi \in H_+^{(-m,0)}$ for $n \ge k + m$, $\partial_x^{k+1\varphi\in L_{2,+}}$ and for certain constant $c = c(k, m, n)$*

$$\|\partial_x^{k+1}\varphi\|_{L_{2,+}} \le c(\|\partial_x^n\varphi\|_{H_+^{(-m,0)}} + \|\varphi\|_{H_+^{(k,0)}}). \tag{21}$$

For the large-time decay results we need the Steklov inequality in the following form:

$$\int_0^L f^2(y)dy \le \frac{L^2}{\pi^2}\int_0^L (f'(u))^2 dy. \tag{22}$$

where $f \in H_0^1(0, L)$.

Let $\psi_l(y)$, $l \in \mathbb{N}$, be the orthonormal in $L_2(0, L)$ system of the eigenfunctions for the operator $(-\psi'')$ on the segment $[0, L]$ with corresponding boundary conditions $\psi(0) = \psi(L) = 0$ in the case (a) and $\psi'(0) = \psi'(L) = 0$ in the case (b), λ_l be the corresponding eigenvalues. Such systems are well known and can be written in trigonometric functions.

Besides equation (1) we consider a linear equation:

$$u_t - (u_{xxxx} + u_{yyyy})_x + b(u_{xx} + u_{yy})_x + au_x = f(t, x, y), \tag{23}$$

with initial and boundary conditions (2) – (4). Weak solutions to this problem are understood similarly to Definition 1.2.

Lemma 2.5. *Let $u_0 \in \widetilde{S}_{exp}(\overline{\Sigma}_+)$, $f \in C^\infty([0, T]; \widetilde{S}_{exp}(\overline{\Sigma}_+))$. Set $\widetilde{\Phi}_0(x, y) \equiv u_0(x, y)$ and for $j \ge 1$*

$$\widetilde{\Phi}_j \equiv \partial_t^{j-1} f(0, x, y) + (\partial_x^5 + \partial_x\partial_y^4 - b\partial_x^3 - b\partial_x\partial_y^2 - a\partial_x)\widetilde{\Phi}_{j-1}(x, y), \tag{24}$$

and let $\widetilde{\Phi}_j(0,y) = \widetilde{\Phi}_{jx}(0,y) = 0$ for any j.Then there exists a unique solution to problem (23), (2) – (4) $u \in C^\infty([0,T];\widetilde{S}_{exp}(\overline{\Sigma}_+))$.

Proof. Consider the corresponding initial value problem. Let $\Sigma = \mathbb{R}\times(0,L)$ and $\widetilde{S}(\overline{\Sigma}))$ be a space of infinitely smooth on $\overline{\Sigma}$ functions $\phi(x,y)$ such that $(1+|x|)^n|\partial^\alpha\varphi(x,y)| \le c(n,\alpha)$ for any n, multi-index α, $(x,y)\in\overline{\Sigma}$ and on the boundaries $y=0$, $y=L$ verifying the same conditions as in the definition if the space $\widetilde{S}(\overline{\Sigma}_+)$. Extend the functions u_0 and f to the whole strip such that $u_0 \in \widetilde{S}(\overline{\Sigma})$, $f \in C([0,T];\widetilde{S}(\overline{\Sigma}))$ and consider problem (23) (in $\Pi_T = (0,T)\times\Sigma$), (2) (in Σ), (4) (in $\Omega_T = (0,T)\times\mathbb{R}$). Then with the use of the Fourier transform for the variable x and the Fourier series for the variable y a solution to problem (23), (2) – (4) can be written as the following:

$$u(t,x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\sum_{l=1}^{+\infty} e^{i\xi x}\psi_l(y)\hat{u}(t,\xi,l)d\xi,$$

where

$$\begin{aligned} \hat{u}(t,\xi,l) &= \hat{u_0}(\xi,l)e^{i(\xi^5+\xi\lambda_l^2+b\xi^3+b\xi\lambda_l-a\xi)t} + \int_0^t \hat{f}(\tau,\xi,l)e^{i(\xi^5+\xi\lambda_l^2+b\xi^3+b\xi\lambda_l-a\xi)(t-\tau)}d\tau,\\ \hat{u_0}(\xi,l) &\equiv \iint_\Sigma e^{-i\xi x}\psi_l(y)u_0(x,y)dxdy,\\ \hat{f}(t,\xi,l) &\equiv \iint_\Sigma e^{-i\xi x}\psi_l(y)f(t,x,y)dxdy. \end{aligned} \tag{25}$$

According to the properties of the u_0 and f this solution $u \in C^\infty([0,T];\widetilde{S}(\overline{\Sigma}))$.

Next, let $v \equiv \partial_x^k\partial_y^l u$ for some k, l. Then the function v satisfies an equation of (23) type, where f is replaced by $\partial_x^k\partial_y^l f$. Let $m\ge 5$, $\psi(x)\equiv x^m$ (note that this function is not an admissible weight function). Multiplying this equation by $2v(t,x,y)\psi(x)$ and integrating over Σ_+, we get

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\int v^2\psi dxdy + \iint (5v_{xx}^2+v_{yy}^2)\psi' dxdy + b\iint (3v_x^2+v_y^2)\psi' dxdy\\ &= \iint 5v_x^2\psi''' dxdy + \iint(-\psi^{(5)}+b\psi'''+a\psi')v^2dxdy + 2\iint \partial_x^k\partial_y^l f v\psi dxdy, \end{aligned} \tag{26}$$

where

$$\iint v_x^2\psi' dxdy = -\iint v_{xx}v\psi' dxdy + \frac{1}{2}\iint v^2\psi''' dxdy,$$

$$\iint v_y^2\psi' dxdy = -\iint v_{yy}v\psi' dxdy,$$

$$\iint v_x^2\psi''' dxdy = -\iint v_{xx}v\psi''' dxdy - \iint v_x v\psi^{(4)} dxdy.$$

Note, that $\psi''' \le \sqrt{6\psi'\psi^{(5)}}$, $\psi^4 \le \sqrt{2\psi'\psi^{(5)}}$.

From the equality above we get

$$-3b\iint v_x^2\psi' dxdy \le \iint v_{xx}^2\psi' dxdy + \frac{9b^2}{4}\iint v^2\psi' dxdy + \frac{3b}{2}\iint v^2\psi''' dxdy,$$

$$-b\iint v_y^2\psi' dxdy \le \iint v_{yy}^2\psi' dxdy + \frac{b^2}{4}\iint v^2\psi' dxdy,$$

$$\iint v_x^2\psi''' dxdy \le \iint v_{xx}^2\psi' dxdy + 8\iint v^2\psi^{(5)} dxdy.$$

Equally (26) yields

$$\frac{d}{dt}\int v^2\psi dxdy \le c(a,b)\iint(\psi^{(5)}+\psi'''+\psi')v^2dxdy + 2\iint\partial_x^k\partial_y^l f v\psi dxdy. \tag{27}$$

Fix $\alpha>0$ and let $n\ge 5$. For any $m\in[5,n]$ multiplying the corresponding inequality (27) by $(2\alpha)^m/(m!)$ and summing by m we obtain that for

$$z_n \equiv \iint\sum_{m=0}^n \frac{(2\alpha x)^m}{m!}v^2(t,x,y)dxdy,$$

due to the special choice of the function ψ, inequalities

$$z_n'(t) \le cz_n(t) + c, \quad z_n(0)\le c,$$

hold uniformly with respect to n, whence it follows that

$$\sup_{t\in[0,T]} \iint e^{2\alpha x} v^2 dxdy < \infty.$$

Thus, $u \in C^\infty([0,T];\widetilde{S}_{exp}(\overline{\Sigma}_+))$. We will use the following notation $\omega(t,x,y)$ for the constructed solution of the initial value problem.

Let $\mu_0(t,y) \equiv -\omega(t,0,y)$, $\mu_1(t,y) \equiv -\omega_x(t,0,y)$. Note that the functions $\mu_j \in C^\infty(\overline{B}_T)$ and satisfy boundary conditions (4), and the compatibility conditions from the hypothesis of the lemma ensure that $\partial_t^l \mu_j(0,y) \equiv 0$, $\forall l$. Consider in Π_T^+ an initial-boundary value problem:

$$u_t - (u_{xxxx} + u_{yyyy})_x + b(u_{xx} + u_{yy})_x + au_x = 0, \tag{28}$$

$$u\big|_{t=0} = 0, u\big|_{x=0} = \mu_0(t,y), u_x\big|_{x=0} = \mu_1(t,y), \tag{29}$$

with boundary conditions (4).

Let $\Psi(t,x,y) \equiv \mu_0(t,y)\eta(1-x)+\mu_1(t,y)x\eta(1-x)$, $F(t,x,y) \equiv -\Psi_t+(\Psi_{xxxx}+\Psi_{yyyy})_x-b(\Psi_{xx}+\Psi_{yy})_x-a\Psi_x = 0$, $U(t,x,y) \equiv u(t,x,y) - \Psi(t,x,y)$, then the problem (28), (29), (4) is equivalent to problem (23), (2) – (4) for the function U, $u_0 \equiv 0$, $f \equiv F$. It is obvious, that $F \in C^\infty([0,T];\widetilde{S}_{exp}(\overline{\Sigma}_+))$ and $\partial_t^l F(0,x,y) \equiv 0$, $\forall l$.

Apply the Galerkin method. Let $\{\varphi_j(x) : j = 1,2,3...\}$ be a set of linearly independent functions complete in the space $\{\varphi \in H^5(\mathbb{R}_+) : \varphi(0) = \varphi'(0) = 0\}$. Seek an approximate solution of the last problem in the form $U_k(t,x,y) = \sum_{j,l=1}^k c_{kjl}(t)\varphi_j(x)\psi_l(y)$ via conditions:

$$\begin{gathered}\iint (U_{kt} - (U_{kxxxx} + U_{kyyyy})_x + b(U_{kxx} + U_{kyy})_x + aU_{kx})\varphi_i(x)\psi_m(y)dxdy \\ - \iint F\varphi_i\psi_m dxdy = 0, \quad i,m = 1,...,k, \quad t \in [0,T], c_{kjl}(0) = 0.\end{gathered} \tag{30}$$

Multiplying (30) by $2c_{kim}(t)$ and summing with respect to i,m, we find that

$$\frac{d}{dt}\iint U_k^2 dxdy + \int_0^L U_{kxx}^2\big|_{x=0} dy = 2\iint FU_k dxdy, \tag{31}$$

thus

$$\|U_k\|_{L_\infty(0,T;L_{2,+})} \leq \|F\|_{L_1(0,T;L_{2,+})}. \tag{32}$$

Multiplying (30) by $c'_{kim}(0)$, putting $t = 0$ and summing with respect to i,m, we obtain that $U_{kt}\big|_{t=0}$. Then differentiating (30) with respect to t, multiplying by $2c'_{kim}(t)$ and summing with respect to i,m, we find (similar to (32)) that

$$\|U_{tk}\|_{L_\infty(0,T;L_{2,+})} \leq \|F\|_{L_1(0,T;L_{2,+})}. \tag{33}$$

Since $\psi_m^{(2n)}(y) = (-\lambda_m)^n\psi_m(y)$ it follows from (30) that for any n and l similary to (32) and (33)

$$\|\partial_t^l\partial_y^n U_k\|_{L_\infty(0,T;L_{2,+})} \leq \|\partial_t^l\partial_y^n F\|_{L_1(0,T;L_{2,+})}. \tag{34}$$

Estimate (34) provides existence of a weak solution $U(t,x,y)$ to the considered problem such that $\partial_t^l\partial_y^n U \in C([0,T];L_{2,+})$, for all l,n in the sense of the corresponding integral equality of the corresponding integral equality of (6) type for $g \equiv 0$, $f \equiv F$, $u_0 \equiv 0$. Note, that the traces of the function U satisfy conditions (2) for $u_0 \equiv 0$ and (4).

It follows from the corresponding equality of (6) type that since

$$U_{xxxxx} = U_t - U_{yyyyx} + b(U_{xx} + U_{yy})_x + aU_x - F, \tag{35}$$

$\partial_t^l\partial_y^n U_{xxxxx} \in C([0,T];H_+^{(-3,0)})$ $\forall l,n$ therefore, the application of inequality (21) (for $\varphi \equiv \partial_t^l\partial_y^n U$, $k = 0$, $m = 3$) yields that $\partial_t^l\partial_y^n U_x \in C([0,T];L_{2,+})$, $\forall l,n$ then the application twice of (35) and (21) (for $k = 1, m = 2$ and $k = 2, m = 1$) yields that $\partial_t^l\partial_y^n U_{xxx} \in C([0,T];L_{2,+})$, $\forall l,n$. And again from (35) follows that $\partial_t^l\partial_y^n U_{xxxxx} \in C([0,T];L_{2,+})$, $\forall l,n$, the function U satisfies (23) in Π_T^+ and its traces satisfy (2). For any natural m differentiating corresponding equation (23) $5(m-1)$ times and using induction with respect to m, we derive that $\partial_t^l\partial_x^{5m}\partial_y^n U \in C([0,T];L_{2,+})$.

As a result, the solution to the problem (28), (29), (4) is constructed such that $\partial_t^l\partial_x^m\partial_y^n u \in C([0,T];L_{2,+})$, $\forall l,m,n$. From now on in the proof we use notation $v(t,x,y)$ for this solution.

The function $u(t,x,y) + v(t,x,y)$ is the solution to problem (23), (2) – (4) such that $\partial_t^l\partial_x^m\partial_y^n u \in C([0,T];L_{2,+})$, $\forall l,m,n$. Let $\widetilde{u}(t,x,y)\eta(x-1)$. The function $\widetilde{u}$ solves an initial value problem in the strip Σ of (23), (2), (4) type, where the functions f, u_0 are substituted by corresponding functions $\widetilde{f}$, $\widetilde{u}_0$ from the same classes and the obtained result at the beginning of the proof for the initial value problem together with the obvious uniqueness provide that $\widetilde{u} \in C^\infty([0,T];\widetilde{S}_{exp}(\overline{\Sigma}_+))$ and so $u \in C^\infty([0,T];\widetilde{S}_{exp}(\overline{\Sigma}_+))$.□

Lemma 2.6. *A generalized solution to problem (23), (2) – (4) is unique in the space* $L_2(\Pi_T^+)$.
Proof. This lemma is a corollary of the following result on existence of smooth solutions to the corresponding adjoint problem. □

In Π_T^+ consider an initial-boundary value problem for an equation:

$$u_t + (u_{xxxx} + u_{yyyy})_x - b(u_{xx} + u_{yy})_x - au_x = f(t, x, y), \tag{36}$$

with initial condition (2), boundary conditions: (4) and boundary conditions

$$u\big|_{x=0} = u_x\big|_{x=0} = u_{xx}\big|_{x=0} = 0. \tag{37}$$

Lemma 2.7. *Let* $u_0 \in \widetilde{S}(\overline{\Sigma}_+)$, $f \in C^\infty([0,T]; \widetilde{S}(\overline{\Sigma}_+))$ *and* $\widetilde{\Phi}_j(0,y) = \widetilde{\Phi}_{jx}(0,y) \equiv 0$ *for any* j, *where here in the definition of the corresponding functions* $\widetilde{\Phi}_j$ *in comparison with (24) the sign before the second term in the right-hand side is changed. Then there exists a unique solution to problem (36), (2), (37), (4),* $u \in C^\infty([0,T]; \widetilde{S}(\overline{\Sigma}_+))$.
Proof. Extend the functions u_0 and f to the whole strip and consider problem (36), (2), (4), construct its solution $\omega \in C^\infty([0,T]; \widetilde{S}(\overline{\Sigma}_+))$ in a similar way with the only obvious difference in (25).

Let $\mu_0(t,y) \equiv -\omega(t,0,y)$, $\mu_1 \equiv -\omega_x(t,0,y)$, $\mu_2 \equiv -\omega_{xx}(t,0,y)$. Note that the functions $\mu_j \in C^\infty(\overline{B}_T)$ and satisfy boundary conditions (4). Moreover,the compatibility conditions form the hypothesis of the lemma ensure that $\partial_t^l \mu_j(0,y) \equiv 0$, $\forall l$. In Π_T^+. Consider an initial-boundary value problem:

$$u_t + (u_{xxxx} + u_{yyyy})_x - b(u_{xx} + u_{yy})_x - au_x = 0, \tag{38}$$

$$u\big|_{t=0} = 0, u\big|_{x=0} = \mu_0(t,y), u_x\big|_{x=0} = \mu_1(t,y), u_{xx}\big|_{x=0} = \mu_2(t,y), \tag{39}$$

and with boundary conditions (4).

Let $\Psi(t,x,y) \equiv \mu_0(t,y)\eta(1-x) + \mu_1(t,y)x\eta(1-x) + \mu_2(t,y)x^2\eta(1-x)/2$, $F(t,x,y) \equiv -\Psi_{xxxxx} - \Psi_{xxxxy} + b\Psi_{xxx} + b\Psi_{xyy} + a\Psi_x - \Psi_t$, $U(t,x,y) \equiv u(t,x,y) - \Psi(t,x,y)$, then problem (38), (39), (4) is equivalent to problem (36), (2), (37), (4) for the function U, $u_0 \equiv 0$, $f \equiv F$. Obviously $F \in C^\infty([0,T]; \widetilde{S}(\overline{\Sigma}_+))$ and $\partial_t^l F(0,x,y) \equiv 0$, $\forall l$.

Let $\{\varphi_j(x) : j = 1,2,3,...\}$ be the same set of functions as in the proof of Lemma 2.5. Seek an approximate solution in the form $U_k(t,x,y) = \sum_{j,l=1}^k c_{kjl}(t)\varphi_j(x)\psi_l(y)$ via conditions:

$$\begin{aligned} &\iint [U_{tk}\varphi_i\psi_m - U_k(\varphi_i^{(5)}\psi_m + \varphi_i^{(4)}\psi_m' - b\varphi_i'''\psi_m - b\varphi_i''\psi_m' - a\varphi_i\psi_m])dxdy \\ &\quad - \iint F\varphi_i\psi_m dxdy = 0, i, m = 1,2,3,...,k, t \in [0,T], \end{aligned} \tag{40}$$

$c_{kjl}(0) = 0$. Multiplying (40) by $2c_{kim}(t)$ and summing with respect to i, m, we derive equality (31), which implies estimate (32). Similarly we get (34), which provide existence of a weak solution $U(t,x,y)$ to the considered problem such that $\partial_t^l \partial_y^n U \in C([0,T]; L_{2,+})$, $\forall l, n \geq 0$ in the following sense: for any function $\phi \in L_\infty(0,T; \widetilde{H}_+^4)$, such that ϕ_t, ϕ_{xxxxx}, $\phi_{yyyyx} \in L_\infty(0,T; L_{2,+})$, $\phi\big|_{t=T} = \phi\big|_{x=0} = \phi_x\big|_{x=0} = 0$ the following equality is satisfied:

$$\iiint_{\Pi_T^+} [U(\phi_t + (\phi_{xxxx} + \phi_{yyyy})_x - b(\phi_{xx} + \phi_{yy})_x - a\phi_x) + F\phi] dxdydt = 0.$$

Then also similarly to the proof of Lemma 2.5 we obtain a solution to problem (38), (39), (4) v such that $\partial_t^l \partial_x^m \partial_y^n v C([0,T]; L_{2,+})$, $\forall l$, m, n.

Similar to Lemma 2.5 we show that the function $u \equiv w + v$ is the desired solution. □

Remark 2.1. *In further lemmas of this section we first consider smooth solutions constructed in Lemma 2.5 and then pass to the limit on the basis of obtained estimates.*

Lemma 2.8. *Let* $\psi(x)$ *be admissible weight function, such that* $\psi'(x)$ *is also an admissible weight function,* $u_0 \in L_{2,+}^{\psi(x)}$, $f \equiv f_0 + f_{1x}$, *where* $f_0 \in L_1(0,T; L_{2,+}^{\psi(x)})$, $f_1 \in L_{4/3}(0,T; L_{2,+}^{\psi^{3/2}(x)(\psi'(x))^{-1/2}})$. *Then there exist a unique weak solution to problem (23), (2) – (4) form the space* $X^{\psi(x)}(\Pi_T^+)$ *and a function* $\mu_2 \in L_2(B_T)$ *such that for any function* $\phi \in L_\infty(0,T; \widetilde{H}_+^4)$, ϕ_t, ϕ_{xxxxx}, $\phi_{yyyyx} \in L_\infty(0,T; L_{2,+})$ $\phi\big|_{t=T} = \phi\big|_{x=0} = \phi_x\big|_{x=0} = 0$ *the following equality holds:*

$$\begin{aligned} &\iiint_{\Pi_T^+} (u\phi_t - u\phi_{xxxxx} - u\phi_{yyyyx} + bu\phi_{xxx} + bu\phi_{yyx} + au\phi_x + f_0\phi - f_1\phi_x) dtdxdy \\ &\quad + \iint_{\Sigma_+} u_0\phi\big|_{t=0} dxdy - \iint_{B_T} \mu_2\phi_{xx}\big|_{x=0} dydt = 0. \end{aligned} \tag{41}$$

Moreover, for a.e. $t \in (0;T]$

$$\|u\|_{X^{\phi(x)}(\Pi_t^+)} + \|\mu_2\|_{L_2(B_t)} \leq c(T), \tag{42}$$

and for a. e. $t \in (0;T]$

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}\iint u^2\psi dxdy + \psi(0)\int_0^L \mu_2^2\big|_{x=0}dy + \iint [5u_{xx}^2 + u_{yy}^2 + 3bu_x^2 + bu_y^2 - au^2]\psi' dxdy \\ - \iint [5u_x^2 + bu^2]\psi^{(3)}dxdy + \iint u^2\psi^{(5)}dxdy = 2\iint f_0 u\psi dxdy - \iint 2f_1(u\psi)_x dxdy,\end{gathered} \tag{43}$$

if $f_1 \equiv 0$*, then in equality (43) one can put* $\psi \equiv 1$*.*

Proof. Multiplying (23) by $2u(x,y,t)\psi(x)$ and integrating over Σ_+, thus we obtain (43) with $\mu_2 \equiv u_{xx}\big|_{x=0}$. According to (20) for arbitrary $\varepsilon > 0$

$$\begin{gathered}|\iint f_1(u\psi)_x dxdy| \le c\|(|u_x| + |u|)(\psi')^{1/4}\psi^{1/4}\|_{L_{2,+}}\|f_1\psi^{3/4}(\psi')^{-1/4}\|_{L_{2,+}} \\ \le c_1\big[\|(|u_{xx} + u_{yy}|)(\psi')^{1/2}\|_{L_{2,+}}^{1/2}\|u\psi^{1/2}\|_{L_{2,+}}^{1/2} + \|u\psi^{1/2}\|_{L_{2,+}}\big]\|f_1\psi^{3/4}(\psi')^{-1/4}\|_{L_{2,+}} \\ \le \varepsilon\iint (u_{xx}^2 + u_{yy}^2)\psi' dxdy + c(\varepsilon)\|f_1\|^{4/3}_{L_{2,+}^{\psi^{3/2}(x)(\psi'(x))^{-1/2}}}(\iint u^2\psi dxdy)^{1/3} \\ +c_1\|f_1\|_{L_{2,+}^{\psi^{3/2}(x)(\psi'(x))^{-1/2}}}(\iint u^2\psi dxdy)^{1/2},\end{gathered} \tag{44}$$

and according to (19)

$$\iint u_x^2(\psi' + |\psi'''|)dxdy \le \varepsilon\iint u_{xx}^2\psi' dxdy + c(\varepsilon)\iint u^2\psi dxdy. \tag{45}$$

Moreover,

$$\iint u_y^2\psi' dxdy = -\iint uu_{yy}\psi' dxdy \le \varepsilon\iint u_{yy}^2\psi' dxdy + c(\varepsilon)\iint u^2\psi dxdy. \tag{46}$$

It follows from (43) – (45), that for smooth solutions

$$\|u\|_{X^{\psi(x)}(\Pi_T^+)} + \|u_{xx}\big|_{x=0}\|_{L_2(B_T)} \le c. \tag{47}$$

The end of the proof is standard. □

Lemma 2.9. *Let* $\psi(x)$ *be admissible weight function, such that* $\psi'(x)$ *is also an admissible weight function,* $u_0 \in \widetilde{H}_+^{2,\psi(x)}$, $u_0(0,y) \equiv u_{0x}(0,y) \equiv 0$, $f \equiv f_0 + f_1$*, where* $f_0 \in \widetilde{H}_+^{2,\psi(x)}$, $f_1 \in L_2(0,T;L_{2,+}^{\psi^2(x)/\psi'(x)})$*. Then there exist a strong solution* $u \in X^{2,\psi(x)}(\Pi_+^T)$ *to problem (23), (2) – (4) and a function* $\mu_4 \in L_2(B_T)$ *such that for any* $t \in (0,T)$

$$\|u\|_{X^{2,\psi(x)}(\Pi_t^+)} + \|\mu_4\|_{L_2(B_t)} \le c(T)\big(\|u_0\|_{\widetilde{H}_+^{2,\psi(x)}} + \|f_0\|_{L_2(0,t;\widetilde{H}_+^{2,\psi(x)})} + \|f_1\|_{L_2(0,t;L_{2,+}^{\psi^2(x)/\psi'(x)})}\big),$$

and for a. e. $t \in (0,T)$

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}\iint (u_{xx}^2 + u_{yy}^2 + bu_x^2 + bu_y^2)\psi dxdy + \int (u_{xxxx}^2\psi + 4u_{xxxx}u_{xxx}\psi' + 2u_{xxxx}u_{xx}\psi'' - 2bu_{xxxx}u_{xx}\psi \\ -3u_{xxx}^2\psi'' - 2u_{xxx}u_{xx}\psi''' + 4bu_{xxx}u_{xx}\psi' + u_{xx}^2\psi^{(4)} - 4bu_{xx}^2\psi'' + (b^2+a)u_{xx}^2\psi)\big|_{x=0}dy \\ + \iint (5u_{xxxx}^2 + 6u_{xxyy}^2 + 8bu_{xxx}^2 + 6bu_{xxy}^2 + u_{yyyy}^2 + 4bu_{xyy}^2 + 2bu_{yyy}^2 + \\ +(3b^2 - a)u_{xx}^2 + 4b^2u_{xy}^2 - abu_x^2 + (b^2 - a)u_{yy}^2)\psi' dxdy \\ + \iint (-5u_{xxx}^2 - 6bu_{xx}^2 - 5u_{xyy}^2 - bu_{yy}^2 - b^2u_x^2 - 5bu_{xy}^2 - b^2u_y^2)\psi''' dxdy \\ + \iint (u_{xx}^2 + u_{yy}^2 + bu_x^2 + bu_y^2)\psi^{(5)}dxdy \\ = 2\iint (f_{0xx}u_{xx} + f_{0yy}u_{yy} + bf_{0x}u_x + bf_{0y}u_y)\psi dxdy \\ -2\int (f_0(u_{xx}\psi)_x - f_{0x}u_{xx}\psi)\big|_{x=0}dy \\ +2\iint (f_1[(u_{xx}\psi)_{xx} + u_{yyyy}\psi - b(u_x\psi)_x - bu_{yy}\psi])dxdy,\end{gathered} \tag{48}$$

if $f_1 \equiv 0$ *then in equality (48) one can put* $\psi(x) = 1$*.*

Proof. Multiplying (23) by $2(u_{xx}\rho(x))_{xx} + 2u_{yyyy}\rho(x) - 2b(u_x\rho(x))_x - 2bu_{yy}\rho(x)$ where either $\rho \equiv \psi(x)$ or $\rho(x) \equiv 1$ and integrating over Σ_+ we get equality (48) for $\mu_4 \equiv u_{xxxx}|_{x=0}$, where ψ is substituted by ρ. Here according to (20) for an arbitrary $\varepsilon > 0$

$$\int_0^L u_{xxx}^2\big|_{x=0}dy \le \varepsilon \iint u_{xxxx}^2\psi' dxdy + c(\varepsilon)\iint u_{xx}^2\psi dxdy, \tag{49}$$

similarly to (45) and (46)

$$\iint (u_{xxx}^2 + u_{yyy}^2 + u_{xyy}^2 + u_{xxy}^2)\psi' dxdy \le \varepsilon \iint (u_{xxxx}^2 + u_{yyyy}^2 + u_{xxyy}^2)\psi' dxdy + c(\varepsilon)\iint (u_{xx}^2 + u_{yy}^2)\psi dxdy, \tag{50}$$

and

$$|\iint f_1[(u_{xx}\psi)_{xx} + u_{yyyy}\psi]dxdy| \le \varepsilon \iint (u_{xxxx}^2 + u_{yyyy}^2 + u_{xx}^2)\psi' dxdy + c(\varepsilon)\iint f_1^2\psi^2(\psi')^{-1}dxdy. \tag{51}$$

Inequalities (47), (49) – (51) and equality (48) imply that for smooth solutions

$$\|u\|_{X^{2,\psi(x)}(\Pi_T^+)} + \|u_{xxxx}\big|_{x=0}\|_{L_2(B_T)} \le c(T)\big(\|u_0\|_{\widetilde{H}_+^{2,\psi(x)}} + \|f_0\|_{L_2(0,t;\widetilde{H}_+^{2,\psi(x)})} + \|f_1\|_{L_2(0,t;L_{2,+}^{\psi^2(x)/\psi'(x)})}\big). \tag{52}$$

□

Lemma 2.10. *Let the hypothesis of Lemma 2.9 be satisfied for $\psi(x) \equiv e^{2\alpha x}$ for certain $\alpha > 0$. Let $g \in C^1(\mathbb{R})$, $g(0) = 0$. Consider the strong solution $u \in X^{2,\psi(x)}(\Pi_T^+)$ to problem (23), (2) – (4). Then for a.e. $t \in (0,T)$*

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}\iint g^*(u)\rho dxdy + \iint g'(u)u_x(u_{xxxx} - bu_{xx} + u_{yyyy} - bu_{yy})\rho dxdy + \\ \iint g(u)(u_{xxxx} - bu_{xx} + u_{yyyy} - bu_{yy})\rho' dxdy - a\iint g^*(u)\rho' dxdy = \iint g(u)f\rho dxdy.\end{gathered} \tag{53}$$

where either $\rho(x) = 1$ or $\rho(x)$ is an admissible weight function such that $\rho(x) \le c\psi(x)$ $\forall x \ge 0$.

Proof. In the smooth case equality (53) is obtained via multiplication of (23) by $g(u(t,x,y))\rho(x)$ and subsequent integration and in the general case via closure, which here is easily justified since $X^{2,\psi(x)}(\Pi_T^+) \in L_\infty(\Pi_T^+)$ and $\psi \sim \psi'$. □

3. Existence of solutions. The following is the appropriate text. In this section we proof of the existence of the solutions in the first two theorems.

Lemma 3.1. *Let $g \in C^1(\mathbb{R})$, $g(0) = 0$. $|g'(u)| \le c$ $\forall u \in \mathbb{R}$. $\psi(x) \equiv e^{2\alpha x}$ for certain $\alpha > 0$, $u_0 \in L_{2,+}^{\psi(x)}$, $f \in L_1(0,T;L_{2,+}^{\psi(x)})$. Then problem (1) – (4) has a unique weak solution $u \in X^{\psi(x)}(\Pi_T^+)$.*

Proof . We apply the contraction principle. For $t_0 \in (0,T]$ define a mapping Λ on $X^{\psi(x)}(\Pi_T^+)$ as follows: $u = \Lambda v \in X^{\psi(x)}(\Pi_{t_0}^+)$ is a weak solution to a linear problem:

$$u_t - (u_{xxxx} + u_{yyyy})_x + b(u_{xx} + u_{yy})_x + au_x = f(t,x,y) - (g(v))_x,$$

in $\Pi_{t_0}^+$ and boundary conditions (2) – (4).

Note that $\psi^{3/2}(\psi')^{-1/2} \le c\psi$, $|g(v)| \le c|v|$ thus, Lemma 3.1 provides that the mapping Λ exists. Moreover, for functions $v, \widetilde{v} \in X^{\psi(x)}(\Pi_{t_0}^+)$ according to inequality (42)

$$\begin{gathered}\|\Lambda v\|_{X^{\psi(x)}(\Pi_{t_0}^+)} \le c(T)(\|u_0\|_{L_{2,+}^{\psi(x)}} + \|f\|_{L_1(0,T;L_{2,+}^{\psi(x)})} + t_0^{3/4}\|v\|_{X^{\psi(x)}(\Pi_{t_0}^+)}), \\ \|\Lambda v - \Lambda\widetilde{v}\|_{X^{\psi(x)}(\Pi_{t_0}^+)} \le c(T)t_0^{3/4}\|v - \widetilde{v}\|_{X^{\psi(x)}(\Pi_{t_0}^+)}.\end{gathered} \tag{54}$$

whence first the local result succeeds. Next, since the constant in the right-hand side in the above inequalities is uniform with respect to u_0 and f, one can extend the solution to the whole time segment $[0,T]$ by the standard argument.□

Proof of Existence Part of Theorem 1.1. For $h \in (0;1]$ consider a set of initial-boundary value problems:

$$u_t - (u_{xxxx} + u_{yyyy})_x + b(u_{xx} + u_{yy})_x + au_x + g_h'(u)u_x = f(t,x,y), \tag{55}$$

with an initial condition:

$$u\big|_{t=0} = u_{0h}(x), \tag{56}$$

with boundary conditions (3) and (4), where

$$f_h(t,x,y) \equiv f(t,x,y)\eta(1/h - x), \quad u_{0h}(x,y) \equiv u_0(x)\eta(1/h - x),$$

$$g_h'(u) \equiv g'(u)\eta(2-h|u|), \quad g_h(u) \equiv \int_0^u g_h'(\theta)d\theta.$$

Note, that $g_h(u) = g(u)$ if $|u| \le 1/h$, $g_h'(u) = 0$ if $|u| \ge 2/h$, $|g_h'(u)| \le c(h)$ $\forall u$ and the function g_h satisfy inequality (7) uniformly with respect to h.

Lemma 3.1 implies that there exists a unique solution to this problem $u_h \in X^{e^{2\alpha x}}(\Pi_T^+)$ for any $\alpha > 0$.

Next, establish appropriate estimates for functions u_h uniform with respect to h (we drop the subscript h in intermediate steps for simplicity). First, note that $g'(u)u_x \in L_1(0,T;L_{2,+}^{\psi(x)})$ and so the hypothesis of Lemma 3.1 is satisfied (for $f_1 = f_2 \equiv 0$). Then equality (43) provides that for both for $\rho(x) \equiv 1$ and $\rho(x) \equiv \psi$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\iint u^2\rho dxdy + \rho(0)\int_0^L \mu_2^2\big|_{x=0}dy + \iint [5u_{xx}^2 + u_{yy}^2 + 3bu_x^2 + bu_y^2 - au^2]\rho' dxdy \\ - \iint [5u_x^2 + bu^2]\rho^{(3)}dxdy + \iint u^2\rho^{(5)}dxdy = 2\iint fu\rho dxdy + \iint (g'(u)u)^*\rho' dxdy. \end{aligned} \tag{57}$$

Choosing $\rho \equiv 1$ with respect to h and to L we get

$$\|u_h\|_{C([0,T];L_{2,+})} \le c. \tag{58}$$

Let $\rho \equiv \psi$. Note that uniformly with respect to h

$$|(g_h'(u)u)^*| \le c|u|^{p+2}. \tag{59}$$

Let $q = p+2$, $s = s_0(q)$ from (17), $\psi_1(x) \equiv \psi'(x)$, $\psi_2(x) \equiv (\psi'(x))^{\frac{2(1-qs)}{q(1-2s)}}$ $(qs = p/4 < 1)$. Applying (18), we obtain that

$$\begin{aligned} \iint |u|^{p+2}\psi' dxdy &= \iint |u|^{p+2}\psi_1^{qs}\psi_2^{q(1/2-s)}dxdy \\ &\le c\Big(\iint (u_{xx}^2 + u_{yy}^2 + u^2)\psi_1 dxdy\Big)^{qs}\Big(\iint u^2\psi_2 dxdy\Big)^{q(1/2-s)} \\ &= c\Big(\iint (u_{xx}^2 + u_{yy}^2 + u^2)\psi_1 dxdy\Big)^{qs}\Big(\iint (u^2\psi')^{\frac{2(1-qs)}{q(1-2s)}}u^{\frac{2(q-2)}{q(1-2s)}}dxdy\Big)^{q(1/2-s)} \\ &\le c\Big(\iint (u_{xx}^2 + u_{yy}^2 + u^2)\psi_1 dxdy\Big)^{p/4}\Big(\iint u^2\psi' dxdy\Big)^{(4-p)/4}\Big(\iint u^2 dxdy\Big)^{p/2}. \end{aligned} \tag{60}$$

Since the norm of the functions u_h in the space $L_{2,+}$ is already estimated in (58) it follows from (57), (59) and (60), that uniformly with respect to h

$$\|u_h\|_{X^{\psi(x)}(\Pi_T^+)} \le c. \tag{61}$$

Write the analogue of (55) where ρ is substituted by $\rho_0(x-x_0)$ for any $x_0 \ge 0$ Then it easily follows (5), that

$$\lambda^+(u_{hxx};T) + \lambda^+(u_{hyy}) \le c. \tag{62}$$

Let $\Sigma_n = (0,n)\times(0,L)$. It follows from (62) and interpolating inequality from [1] (where $Q_n = (n,n+1)\times(0,L)$):

$$\|f\|_{L_\infty(Q_n)} \le c(L)\Big(\iint_{Q_n}(f_{xx}^2 + f_{yy}^2 + f^2)dxdy\Big)^{1/4}\Big(\iint_{Q_n} f^2 dxdy\Big)^{1/4},$$

that uniformly with respect to h

$$\|u_h\|_{L_4(0,T;L_\infty(\Sigma_n))} \le c,$$

and

$$\|g_h(u_h)\|_{L_{4/p}(0,T;L_2(\Sigma_n))} \le c.$$

Then from equation (1) itself it follows, that uniformly with respect to h

$$\|u_{ht}\|_{L_1(0,T;H^{-5}(\Sigma_n))} \le c. \tag{63}$$

Since the embedding $H^1(\Sigma_n) \subset L_2(\Sigma_n)$ is compact, it follows from [15] that the set u_h is relatively compact in $L_q(0,T;L_2(\Sigma_n))$ for $q < +\infty$.

Extract a sub-sequence of the functions u_h, again denoted as u_h, such that as $h \to +0$

$u_h \to u$ *-weakly in $L_\infty(0,T;L_{2,+}^{\psi(x)})$;

$u_{hxx}, u_{hyy} \to u_{xx}, u_{yy}$ weakly in $L_2(0,T;L_{2,+}^{\psi'(x)})$;

$u_h \to u$ strongly in $L_{max(2,4/(4-p))}(0,T;L_2(\Sigma_n))$ $\forall n$.

Let ϕ is a test function from Definition 1.2 with $supp\phi \in \overline{\Sigma}_n$. Then, since

$$|g_h(u_h) - g_h(u)| \le c(|u_h|^p + |u|^p)|u_h - u|,$$

with the use of (63), we obtain, that the limit function u verifies (6).

Now, note that $g(u)\phi_x \in L_\infty(0,T;L_{1,+})$ if $p \le 1$. In case $p > 1$

$$\begin{aligned}\|g(u)\phi\|_{L_1(\Pi_T^+)} &\le c\int_0^T \|u(\psi')^{1/4}\psi^{1/4}\|^p_{L_{\infty,+}} \iint |u\phi_x|(\psi')^{-p/4}\psi^{-p/4}dxdydt\\ &\le c_1\int_0^T \big[\big(\iint (u_{xx}^2+u_{yy}^2+u^2)\psi' dxdy\big)^{p/4}\big(\iint u^2\psi dxdy\big)^{(p+2)/4}\\ &\qquad \big(\iint \phi_x^2(\psi')^{-p/2}\psi^{-(1+p)/2}dxdy\big)^{1/2}\big]dt < \infty.\end{aligned} \tag{64}$$

since $(\psi')^{-p/2}\psi^{-(1+p)/2} \le c(1+x)^{pn/4}$ by virtue of the additional property of the function ψ. Approximating any test function from Definition 1.2 by the compactly supported ones and passing to the limit we obtain equality (1) in the general case. □

Lemma 3.2. *Let $g \in C^2(\mathbb{R})$, $g(0)=0$, $|g'(u)|, |g''(u)| \le c\ \forall u \in \mathbb{R}$. $\psi(x) \equiv e^{2\alpha x}$ for certain $\alpha > 0$, $u_0 \in \widetilde{H}_+^{2,\psi(x)}$, $u_0(0,y) = u_{0y}(0,y) = 0$, $f \in L_2(0,T;\widetilde{H}_+^{2,\psi(x)})$. Then there exists $t_0 \in (0,T)$ such that the problem (1) – (4) has a unique strong solution $u \in X^{2,\psi(x)}(\Pi_{t_0}^+)$.*

Proof. Similarly to the proof of Lemma 3.1 we construct the desired solution as a fixed point of the map Λ but defined on the space $X^{2,\psi(x)}(\Pi_{t_0}^+)$. Here $\psi^2/\psi' \sim \psi$ and Lemma 2.9 where $f_0 \equiv f$, $f_1 \equiv g'(v)v_x$ ensures that such a map exists. Moreover, for functions $v, \in X^{2,\psi(x)}(\Pi_{t_0}^+)$ according to inequality (48)

$$\|\Lambda v\|_{X^{2,\psi(x)}} \le c(T)\big(\|u_0\|_{\widetilde{H}_+^{2,\psi(x)}} + \|f\|_{L_2(0,T;\widetilde{H}_+^{2,\psi(x)})} + t_0^{1/2}\|v\|_{X^{2,\psi(x)}}\big),$$

and, since $|g'(v)v_x - g'(\widetilde{v})\widetilde{v_x}| \le c(|v_x| + |\widetilde{v_x}|)|v-\widetilde{v}| + c|v_x - \widetilde{v_x}|$,

$$\|\Lambda v - \Lambda\widetilde{v}\|_{X^{2,\psi(x)}} \le c(T)t_0^{1/2}\big(\|v\|_{X^{2,\psi(x)}} + \|\widetilde{v}\|_{X^{2,\psi(x)}}\big)\|v-\widetilde{v}\|_{X^{2,\psi(x)}},$$

whence the assertion of the lemma succeeds. Here for convenience we denoted $X^{2,\psi(x)}(\Pi_{t_0}^+)$ as $X^{2,\psi(x)}$. □

Proof of Existence Part of Theorem 1.2. We will proof, that if $X^{2,e^{2\alpha x}}(\Pi_T^+)$, $\alpha > 0$ is a solution to problem (1) – (4) for some $T' \in (0,T]$, where the function $g \in C^2(\mathbb{R})$ verifies (7), then for any admissible function $\psi(x)$, such that ψ' is also admissible and $\psi(x) \le ce^{2\alpha x}$, $\forall x \ge 0$,

$$\|u\|_{X^{2,\psi(x)}(\Pi_{T'}^+)} \le c\big(T, \|u_0\|_{\widetilde{H}_+^{2,\psi(x)}}, \|f\|_{L_2(0,T;\widetilde{H}_+^{2,\psi(x)})}\big). \tag{65}$$

Using (57), where $\mu_2 = u_{xx}|_{x=0}$ we obtain

$$\|u\|_{X^{\psi(x)}(\Pi_{T'}^+)} + \|u_{xx}|_{x=0}\|_{L_2(B_{T'})} \le c. \tag{66}$$

Next, since the hypotheses of Lemma 2.9 and Lemma 2.10 are satisfied, write down the corresponding analogues of equalities (48) and (53) and subtract from the first one the doubled second one, then with the use of (49) and (50) for sufficiently small ε we get

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\iint (u_{xx}^2 + u_{yy}^2 + bu_x^2 + bu_y^2 - 2g^*(u))\rho dxdy + \int (u_{xxxx}^2\rho)\big|_{x=0}dy + \iint (5u_{xxxx}^2 + 6u_{xxyy}^2 + u_{yyyy}^2)\rho' dxdy\\ \le \iint 2g(u)(u_{xxxx} - bu_{xx} + u_{yyyy} - bu_{yy})\rho' dxdy - 2a\iint g^*(u)\rho' dxdy\\ +\varepsilon\int u_{xxxx}^2\big|_{x=0}dy + c(\varepsilon)\int u_{xx}^2\big|_{x=0}dy + \varepsilon\iint (u_{xxxx}^2 + u_{xxyy}^2 + u_{yyyy}^2)\rho' dxdy\\ +c(\varepsilon)\iint (u_{xx}^2 + u_{yy}^2)\rho dxdy + c\iint (f_{xx}^2 + f_{yy}^2 + f^2)\rho dxdy\\ +2\iint (g'(u)u_x[2u_{xxx}\rho' + u_{xx}\rho'' - bu_x\rho'])dxdy - 2\iint g(u)f\rho dxdy - 2\iint (g'(u)g(u))^*\rho' dxdy.\end{aligned} \tag{67}$$

Choose $\rho \equiv 1$. Note, that (7) with (66) imply that

$$\iint |g^*(u)|dxdy \le c\|u\|^p_{L_{\infty,+}}\|u\|_{L_{2,+}} \le c_1\big(\iint (u_{xx}^2 + u_{yy}^2 + u^2)dxdy\big)^{p/4}, \tag{68}$$

$$\iint g(u)fdxdy \le c\|u\|^p_{L_{\infty,+}}\|u\|_{L_{2,+}}\|f\|_{L_{2,+}}.$$

Thus, from (67) we get

$$\|u_{xx}\|_{L_\infty(0,T';L_{2,+})} + \|u_{yy}\|_{L_\infty(0,T';L_{2,+})} \le c.$$

In particular

$$\|u_{xx}\|_{L_\infty(\Pi^+_{T'})} \le c. \tag{69}$$

Now, in (67) chose $\rho(x) \equiv \psi(x)$. By virtue of (69) $|g(u)| \le c|u|$ and then estimate (65) easily follows.

Note, that from (67) (where $\rho(x) \equiv \rho_0(x - x_0)$ for any $x_0 \ge 0$) follows

$$\lambda^+(u_{xxxx}; T') + \lambda^+(u_{xxyy}; T') + \lambda^+(u_{yyyy}; T') \le c.$$

To finish the proof consider the set of initial-boundary value problems (55), (56), (3), (4). Lemma 3.2 imply that for any $h \in (0, 1]$ there exists a solution to such a problem $u_h \in X^{2,\psi(x)}(\Pi^+_{t_0(h)})$. Then with the use of estimate (65) we first extend this solution to the whole time segment $[0, T]$ and then similarly to the end of the proof of the previous theorem pass to the limit as $h \to +\infty$ and construct the desired solution. Note, that here due to (69) $g(u)\phi_x \in L_1(\Pi^+_T)$ $\forall p$ without any additional assumptions on the weight function ψ.□

4. Uniqueness of solutions. The following is the appropriate text. In the following section we give proof of the uniqueness of the solutions in the first two theorems.

Theorem 4.1. *Let $p \in [0, 3]$ in (7), $\psi(x)$ be an admissible weight function, such that $\psi'(x)$ is also an admissible weight function and inequality (8) be verified. Then for any $T > 0$ and $M > 0$ there exists a constant $c = c(T, M)$, such that for any two weak solutions $u(t, x, y)$ and $\widetilde{u}(t, x, y)$ to problem (1) – (4), satisfying $\|u\|_{X^{\psi(x)}_\omega}, \|\widetilde{u}\|_{X^{\psi(x)}_\omega} \le M$ with corresponding data $u_0, \widetilde{u}_0 \in L^{\psi(x)}_{2,+}$, $f, \widetilde{f} \in L_1(0, T; L^{\psi(x)}_{2,+})$ the following inequality holds:*

$$\|u - \widetilde{u}\|_{X^{\psi(x)}_\omega} \le c(\|u_0 - \widetilde{u}_0\|_{L^{\psi(x)}_{2,+}} + \|f - \widetilde{f}\|_{L_1(0,T;L^{\psi(x)}_{2,+})}). \tag{70}$$

Proof . Let $\omega \equiv u - \widetilde{u}$, $\omega_0 \equiv u_0 - \widetilde{u}_0$, $F \equiv f - \widetilde{f}$. For the function ω apply Lemma 3.1, where $f_1 \equiv 0$. Note that inequality (8) implies that $(\psi/\psi')^{1/4} \le c(\psi')^{p/4}\psi^{p/4}$, thus

$$\begin{aligned} (\iint |u|^{2p}u_x^2\psi\,dxdy)^{1/2} &\le \||u|^p(\psi/\psi')^{1/4}\|_{L_{\infty,+}}[\iint u_x^2(\psi'\psi)^{1/2}dxdy]^{1/2} \\ &\le c\|u(\psi')^{1/4}\psi^{1/4}\|^p_{L_{\infty,+}}\|u(\psi')^{1/4}\psi^{1/4}\|^2_{L_{2,+}} \\ &\le c_1(\iint(u_{xx}^2 + u_{yy}^2 + u^2)\psi'dxdy)^{p/4+1/4}(\iint u^2\psi\,dxdy)^{p/4+1/4}, \end{aligned} \tag{71}$$

so $g'(u)u_x \in L_1(0, T; L^{\psi(x)}_{2,+})$, since $p \le 3$.

As a result, we derive from (43) that for $t \in (0, T]$

$$\begin{aligned} &\iint \omega^2\psi\,dxdy + \psi(0)\int_0^L \mu_2^2\big|_{x=0}dy + \int_0^t \iint [5\omega_{xx}^2 + \omega_{yy}^2 + 3b\omega_x^2 + \omega_y^2 - a\omega^2]\psi'dxdyd\tau \\ &\le \iint \omega_0^2\psi\,dxdy + c\int_0^t \iint \omega^2\psi\,dxdyd\tau + 2\int_0^t \iint (F - (g'(u)u_x - g'(\widetilde{u})\widetilde{u}_x))\omega\psi\,dxdtd\tau. \end{aligned} \tag{72}$$

Where

$$2|\int_0^t \iint (g'(u) - g'(\widetilde{u})\widetilde{u}_x)\omega\psi\,dxdt| = 2|\int_0^t \iint (g(u) - g(\widetilde{u})(\omega\psi)_x dxdt| \le c\iint (|u|^p + |\widetilde{u}|^p)|\omega(\omega\psi)_x|dxdy, \tag{73}$$

where similarly to (71)

$$\begin{aligned} \iint |u|^p|\omega\omega_x|\psi'dxdy &\le \||u|^p(\psi/\psi')^{1/4}\|_{L_{\infty,+}}(\iint \omega_x^2(\psi')^{1/2}\psi^{1/2}dxdy)^{1/2}(\iint \omega^2\psi\,dxdy)^{1/2} \\ \le c(\iint (u_{xx}^2 + u_{yy}^2 + u^2)\psi'dxdy)^{p/4}&(\iint u^2\psi\,dxdy)^{p/4}(\iint(\omega_{xx}^2 + \omega_{yy}^2 + \omega^2)\psi'dxdy)^{1/4}(\iint \omega^2\psi\,dxdy)^{3/4} \\ &\le \varepsilon\iint(\omega_{xx}^2 + \omega_{yy}^2 + \omega^2)\psi'dxdy \\ &+c(\varepsilon)(\iint(u_{xx}^2 + u_{yy}^2 + u^2)\psi'dxdy)^{p/3}\iint \omega^2\psi\,dxdy, \end{aligned} \tag{74}$$

where $\varepsilon > 0$ can be chosen arbitrarily small. Then inequalities (72), (74) provide the desired result.□

The next theorem provides the uniqueness part of Theorem 1.2.

Theorem 4.2. *Let the function $g \in C^2(\mathbb{R})$ verifies condition (9). Let $\psi(x)$ be an admissible weight function, such that $\psi'(x)$ is also an admissible weight function and condition (10) holds. Then for any $T > 0$ and $M > 0$ there exists a constant $c = c(T, M)$, such that for any two strong solutions $u(t, x, y)$ and $\widetilde{u}(t, x, y)$ to problem (1) – (4), satisfying*

$\|u\|_{X_{\omega}^{2,\psi(x)}(\Pi_T^+)}$, $\|\widetilde{u}\|_{X_{\omega}^{2,\psi(x)}(\Pi_T^+)} \le M$, *with the corresponding data* u_0, $\widetilde{u_0} \in L_{2,+}^{\psi(x)}$, $f, \widetilde{f} \in L_1(0,T; L_{2,+}^{\psi(x)})$ *inequality (70) holds.*

Proof. The proof mostly repeats the proof of Theorem 4.1. Note that here obviously $g'(\widetilde{u})u_x$, $g'(\widetilde{u})\widetilde{u}_x \in L_\infty(0,T; L_{2,+}^{\psi(x)})$, thus equality (72) holds. The difference is related only to the nonlinear term. In comparison with (73) we estimate it in the following way: since

$$g'(u)u_x - g'(\widetilde{u})\widetilde{u}_x = (g'(u) - g(\widetilde{u}))u_x + g'(\widetilde{u})\omega_x, 2|\iint (g'(u)u_x - g'(\widetilde{u})\widetilde{u}_x)\omega\psi dxdy|$$
$$= |2\iint (g'(u) - g'(\widetilde{u}))u_x\omega\psi dxdy - \iint g''(\widetilde{u})\widetilde{u}_x\omega^2\psi dxdy - \iint g'(\widetilde{u})\omega^2\psi' dxd| \tag{75}$$
$$\le c\iint (|u|^q + |\widetilde{u}|^q)(|u_x|^q + |\widetilde{u}_x|^q)\omega^2\psi dxdy + c\iint \omega^2\psi dxdy.$$

By virtue of (10) $\psi \le c\psi^{(q+1)/2}(\psi')^{(r-2)/(2r)}\psi^{(r+2)/(2r)}$

$$\iint |u|^q|u_x|\omega^2\psi dxdy \le c\iint |u|^q\psi^{q/2}|u_x|\psi^{1/2}\omega^2(\psi')^{2s_0}\psi^{1-2s_0}dxdy$$
$$\le \|u\psi^{1/2}\|^q_{L_{\infty,+}}\|u_x\psi^{1/2}\|_{L_{\frac{r}{r-2},+}}\|\omega(\psi')^{s_0}\psi^{1/2-s_0}\|^2_{L_{r,+}}$$
$$\le c\|u\|^{q+1}_{\widetilde{H}_+^{2,\psi(x)}}\Big(\iint (\omega_{xx}^2 + \omega_{yy}^2 + \omega^2)\psi' dxdy\Big)^{2s_0}\Big(\iint \omega^2\psi dxdy\Big)^{1-2s_0}$$
$$\le \varepsilon\iint (\omega_{xx}^2 + \omega_{yy}^2 + \omega^2)\psi' dxdy + c(\varepsilon)\iint \omega^2\psi dxdy,$$

where $s_0(r) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2r} \le \frac{1}{2}$ and $2 \le \frac{r}{r-2} < +\infty$. The desired result obtained from (72) and (75). □

Theorem 4.3. *Let the function $g \in C^2(\mathbb{R})$ verifies condition (9). Let $\psi(x)$ be an admissible weight function, such that $\psi'(x)$ is also an admissible weight function and for certain positive constant*

$$\psi'(x)\psi^q(x) \ge c_0 \quad \forall x \ge 0. \tag{76}$$

Then for any $T > 0$ and $M > 0$ there exists constant $c = c(T,M)$ such that for any two strong solutions $u(t,x,y)$ and $\widetilde{u}(t,x,y)$ to problem (1) – (4), satisfying $\|u\|_{X_{\omega}^{2,\psi(x)}}, \|\widetilde{u}\|_{X_{\omega}^{2,\psi(x)}} \le M$, with corresponding data u_0, $\widetilde{u}_0 \in H_+^{1,\psi(x)}$, $f, \widetilde{f} \in L_2(0,T; \widetilde{H}_+^{2\psi(x)})$, $u_0(0,y) = \widetilde{u}_0(0,y) \equiv 0$, the following inequality holds:

$$\|u - \widetilde{u}\|_{X_{\omega}^{2\psi(x)}(\Pi_T^+)} \le c(\|u_0 - \widetilde{u}_0\|_{H_+^{2,\psi(x)}} + \|f - \widetilde{f}\|_{L_2(0,T;H_+^{2,\psi(x)})}).$$

Proof. First of all note that the hypothesis of Theorem 4.2 is satisfied and, consequently, inequality (70) holds.

Let $g_1'(u) \equiv g'(u) - g'(0)$, then according to (9)

$$|g_1'(u)| \le c|u|^{q+1}. \tag{77}$$

Adjoin the term $g'(0)u_x$ to the linear term au_x and consider an equation of (1) type, where g' is substituted by g_1'. Condition (76) implies that

$$\frac{\psi^2(x)}{\psi'(x)} \le c\psi^{q+2}(x). \tag{78}$$

In particular it means that $g_1'(u)u_x, g_1'(\widetilde{u})\widetilde{u}_x \in L_\infty(0,T; L_{2,+}^{\psi^2/\psi'(x)})$. Write corresponding analog of (48) for $\omega \equiv u - \widetilde{u}$ and $f_1 \equiv g_1'(u)u_x - g_1'(\widetilde{u})\widetilde{u}_x$, then

$$\iint (\omega_{xx}^2 + \omega_{yy}^2 + b\omega_x^2 + b\omega_y^2)\psi dxdy + \int_0^t\iint (5u_{xxxx}^2 + 6u_{xxyy}^2 + u_{yyyy}^2)\psi' dxdyd\tau$$
$$\le \iint (\omega_{0xx}^2 + \omega_{0yy}^2 + b\omega_{0x}^2 + b\omega_{0y}^2)\psi dxdy + c\int_0^t\iint (g_1'(u)u_x - g_1'(\widetilde{u})\widetilde{u}_x)^2\frac{\psi^2}{\psi'}dxdyd\tau$$
$$\varepsilon\int_0^t\iint (\omega_{xxxx}^2 + \omega_{xxyy}^2 + \omega_{yyyy}^2)\psi' dxdyd\tau + c(\varepsilon)\int_0^t\iint (\omega_{xx}^2 + \omega_{yy}^2 + \omega^2)\psi dxdyd\tau$$
$$+c\int_0^t\iint (F_{xx}^2 + F_{yy}^2 + F^2)\psi dxdyd\tau,$$

To estimate the integral with the nonlinear term apply (77), (78) and the corresponding analogue of (75)

$$\iint (g_1'(u)u_x - g_1'(\widetilde{u})\widetilde{u}_x)^2\frac{\psi^2}{\psi'})dxdyd \le c\iint (|u|^{2q} + |\widetilde{u}|^{2q})u_x^2\omega^2\psi^{q+2}dxdy + c\iint |\widetilde{u}|^{2q+2}\omega_x^2\psi^{q+2}dxdy, \tag{79}$$

where

$$\iint |u|^{2q}u_x^2\omega^2\psi^{q+2}dxdy \le \|u\psi^{1/2}\|_{L_{\infty,+}}\|u_x\psi^{1/2}\|_{L_{6,+}}\|\omega\psi^{1/2}\|_{L_{3,+}}$$
$$\le c\|u\|^{2q+2}_{\widetilde{H}_+^{2,\psi(x)}}\iint(\omega_{xx}^2+\omega_{yy}^2+b\omega_x^2+b\omega_y^2)dxdy, \iint |\widetilde{u}|^{2q+2}\omega_x^2\omega^2\psi^{q+2}dxdy$$
$$\le \|u\psi^{1/2}\|^{2q+2}_{L_{\infty,+}}\iint \omega_x^2\psi dxdy.$$

The statement of the theorem follows from inequality (79). □

5. Large-time decay of solutions. Now, we proof last two theorems and establish large-time decay of solutions.

Proof of Theorem 1.3. Let $\psi(x)\equiv e^{2\alpha x}$ for $\alpha\in(0,\alpha_0]$, will be specified later, $u_0\in L_{2,+}^{\psi(x)}$, $f\equiv 0$. Consider the unique solution to problem (1) – (4) from the space $X_\omega^{\psi(x)}(\Pi_T^+)$ $\forall T$.

Note that according to (71) $g'(u)u_x\in L_1(0,T;L_{2,+}^{\psi(x)})$.

Apply Lemma 3.1, where $f_0\equiv g'(u)u_x$, $f_1\equiv 0$, then equality (57) for $\rho\equiv 1$ provides, that

$$\|u(t,\cdot,\cdot)\|_{L_{2,+}}\le\|u_0\|_{L_{2,+}}\quad \forall t\ge 0.$$

Equality (57) for $\rho=\psi$ implies that

$$\frac{d}{dt}\iint u^2\psi dxdy+\int_0^L\mu_2^2dy+2\alpha\iint[5u_{xx}^2+u_{yy}^2+(3b+4\alpha^2)u_x^2+bu_y^2+(4\alpha^2b+16\alpha^4-a)u^2]\psi dxdy$$
$$=2\alpha\iint(g'(u)u)^*\psi dxdy \tag{80}$$

With the use of inequalities (59) and (60) we derive that uniformly with respect to L for certain constant c^* depending on the properties of the function g,

$$2\iint(g'(u)u)^*\psi dxd\le c\Big(\iint(u_{xx}^2+u_{yy}^2+u^2)\psi dxdy\Big)^{p/4}\Big(\iint u^2\psi dxdy\Big)^{(4-p)/4}\|u_0\|^p_{L_{2,+}}$$
$$\le\frac14\iint(u_{xx}^2+u_{yy}^2)\psi dxdy+c^*(\|u_0\|^{(4p)/(4-p)}_{L_{2,+}}+\|u_0\|^p_{L_{2,+}})\iint u^2\psi dxdy. \tag{81}$$

It follows from (22) that

$$\iint u^2\psi dxdy\le\frac{L^2}{\pi^2}\iint u_y^2\psi dxdy\le\frac{L^2}{\pi^2}\Big(\iint u^2\psi dxdy\Big)^{1/2}\Big(\iint u_{yy}^2\psi dxdy\Big)^{1/2},$$

and, so

$$\frac{\pi^4}{L^4}\iint u^2\psi dxdy\le\iint u_{yy}^2\psi dxdy. \tag{82}$$

In particular

$$2\alpha\iint u_{yy}^2\psi dxdy\ge\frac{\pi^4\alpha}{4L^4}\iint u^2\psi dxdy+\frac{7\alpha}{4}\iint u_{yy}^2dxdy. \tag{83}$$

Moreover,

$$|3b+4\alpha^2|\iint u_x^2\psi dxdy\le\iint u_{xx}^2\psi dxdy+c(b,\alpha_0)\iint u^2\psi dxdy, \tag{84}$$

$$2|b|\iint u_y^2\psi dxdy\le\frac14\iint u_{yy}^2\psi dxdy+c(b)\iint u^2\psi dxdt \tag{85}$$

Combining (80) – (85) we find that

$$\frac{d}{dt}\iint u^2\psi dxdy+\int_0^L\mu_2^2dy$$
$$+\alpha\iint(u_{xx}^2+u_{yy}^2)\psi dxdy+\alpha\Big[\frac{\pi^4}{4L^4}-c(b,a,\alpha_0)-c^*(\|u_0\|^{4p/(4-p)}_{L_{2,+}}+\|u_0\|^p_{L_{2,+}})\Big]\iint u^2\psi dxdy\le 0. \tag{86}$$

Choose L_0, α_0 and ϵ_0, such that $\frac{\pi^4}{16L_0^4}\ge c^*(\epsilon_0^{4p/(4-p)}+\epsilon_0^p)$, $\frac{\pi^4}{16L_0^4}\ge c(b,a,\alpha_0)$. Then it follows from (86) that

$$\frac{d}{dt}\iint u^2\psi dxdy+\int_0^L\mu_2^2dy+\alpha\iint(u_{xx}^2+u_{yy}^2)dxdy+\alpha\beta\iint u^2dxdy\le 0. \tag{87}$$

where $\beta = \frac{\pi^4}{8L^4}$. □

Proof of Theorem 1.4. Let the values L_0, α_0, ϵ_0, β be the same as as in the proof of the previous theorem, $\psi(x) \equiv e^{2\alpha x}$ for certain $\alpha \in (0;\alpha_0]$, $u_0 \in \widetilde{H}_+^{2,\psi(x)}$, $u_0(0,y) \equiv u_{0x}(0,y) \equiv 0$, $\|u_0\|_{L_{2,+}} \le \epsilon_0$. Consider the unique solution to problem (1) – (4) $u \in X_\omega^{2,\psi(x)}(\Pi_T^+)$, $\forall T$. Since $g'(u)u_x \in L_\infty(0,T;L_{2,+}^{\psi(x)})$. Repeat the proof of Theorem 1.3 and obtain (86). Besides (11), it follows from (87) that

$$\int_0^{+\infty} e^{\alpha\beta\tau}\Big[\int_0^L u_{xx}^2\big|_{x=0}dy + \alpha\iint [u_{xx}^2 + \beta u_{yy}^2]\psi dxdy\Big]d\tau \le \|u_0\|_{L_{2,+}^{\psi(x)}}. \tag{88}$$

Similarly to (67), from (48) and (53) we get (for $\rho \equiv 0$)

$$\frac{d}{dt}\iint (u_{xx}^2 + u_{yy}^2 + bu_x^2 + bu_y^2 - 2g^*(u))\rho dxdy \le c\int_0^L u_{xx}^2\big|_{x=0}dy,$$

whence with the use of (68) and (88) follows that uniformly with respect to $t \ge 0$

$$\|u_{xx}\|_{L_{2,+}} + \|u_{yy}\|_{L_{2,+}} \le c,$$

and

$$\|u\|_{L_\infty(\Pi_\infty^+)} \le c. \tag{89}$$

In (67) let $\rho \equiv \psi$

$$\begin{gathered}
\frac{d}{dt}\iint (u_{xx}^2 + u_{yy}^2 + bu_x^2 + bu_y^2 - 2g^*(u))\psi dxdy + \int (u_{xxxx}^2)\big|_{x=0}dy \\
+2\alpha\iint (5u_{xxxx}^2 + 6u_{xxyy}^2 + u_{yyyy}^2)\psi dxdy \\
\le 2\alpha\iint 2g(u)(u_{xxxx} - bu_{xx} + u_{yyyy} - bu_{yy})\psi dxdy - 4a\alpha\iint g^*(u)\psi dxdy \\
+\varepsilon\int u_{xxxx}^2\big|_{x=0}dy + c(\varepsilon)\int u_{xx}^2\big|_{x=0}dy + 2\varepsilon\alpha\iint (u_{xxxx}^2 + u_{xxyy}^2 + u_{yyyy}^2)\psi dxdy \\
+\alpha c(\varepsilon)\iint (u_{xx}^2 + u_{yy}^2)\psi dxdy + 2\iint (g'(u)u_x[4\alpha u_{xxx} + 4\alpha^2 u_{xx} - 2\alpha bu_x]\psi)dxdy \\
-4\alpha\iint (g'(u)g(u))^*\psi dxdy.
\end{gathered}$$

Inequality (12) follows from (88) and (89). □

Thanks. *The author thanks professor A. V. Faminskii for his guidance and suggestions.*

References

1. Agarwal P., Hyder A., Zakarya M. 2020. Well-posedness of stochastic modified Kawahara equation. Advances in Difference Equations, 18: 1–20.

2. Besov O.V., Il'in V.P., Nikolskii S.M. 1978. Integral Representation of Functions and Embedding Theorems. Hoboken: Wiley, 480.

3. Faminskii A. V. 2022. Initial-boundary value problems on a half-strip for the generalized Kawahara – Zakharov – Kuznetsov equation. Appl. Z. Angew. Math. Optim, 73: 1–27.

4. Faminskii A. V. 2015. An Initial-Boundary Value Problem in a Strip for Two-Dimensional Equations of Zakharov – Kuznetsov Type. Contemporary Mathematics, 653: 137–162.

5. Faminskii A. V., Martynov E. V. 2021. Large-time decay of solutions of the damped Kawahara equation on the half-line. Differential Equations on Manifolds and Mathematical Physics. Trends in Mathematics, 1: 130–141.

6. Faminskii A. V. 2018. Initial-boundary value problems in a half-strip for two-dimensional Zakharov – Kuznetsov equation. Ann. Inst. H. Poincare (C) Anal. Non Lineaire, 35: 1235 – 1265.

7. Faminskii A. V. 2020. Regular solutions to initial-boundary value problems in a half-strip for two-dimensional Zakharov – Kuznetsov equation. Nonlinear Anal. Real World Appl., 51: 1029–1251.

8. Faminskii A. V. 2021. Initial-boundary value problems on a half-strip for the modified Zakharov – Kuznetsov equation. J. Evol. Equ., 21: 1263–1298.

9. Faminskii A. V., Opritova M. A. 2015. On the initial-boundary-value problem in a half-strip for a generalized Kawahara equation. J. Math. Sci., 206: 17–38.

10. Kawahara T. 1972. Oscillatory solitary waves in dispersive media. J. Phys. Soc. Japan, 180: 260–264.

11. Khanal N., Wu J., Yuan J. 2009. The Kawahara equation in weighted Sobolev spaces. IOP Publishing Ltd and London Mathematical Society, 21: 1489–1505.

12. Larkin N. A. 2014. The 2D Kawahara equation on a half-strip. Appl. Z. Angew. Math. Optim, 70: 443–468.

13. Larkin N. A., Simoes M.H. 2016. Global regular solutions for the 3D Kawahara equation posed on unbounded domains. Math. Phys, 67: 1–21.

14. Levandosky J. L. 2022. Smoothing properties for a two-dimensional Kawahara equation. Journal of Differential Equations, 316: 158–196.

15. Simon J. 1987. Compact sets in the space Lp(0, T ; B). Ann. Mat. Pura Appl, 146: 65–96.

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.
Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 15.12.2022
Поступила после рецензирования 27.01.2023
Принята к публикации 31.01.2023

Received 15.12.2022
Revised 27.01.2023
Accepted 31.01.2023

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Egor Martynov – postgraduate, Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University)
6 Miklukho-Maklaya Street, Moscow, 117198, Russian

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Мартынов Егор – аспирант, Российский университет дружбы народов (РУДН), Москва, Россия

Прикладная математика & Физика, 2023, том 55, № 1. С. 29–38.
Applied Mathematics & Physics, 2023, Volume 55, No 1. P. 29–38.

УДК 517.9
MSC 35J25
оригинальное исследование

DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-1-29-38

ОБ ИНДЕКСЕ ДЛЯ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

В. А. Полунин[1], **Л. А. Ковалева**[2]

(*Статья представлена членом редакционной коллегии О. В. Черновой*)

[1] Белгородский государственный технологический университет имени В. Г. Шухова,
Белгород, 308012, Россия

[2] Белгородский государственный национальный исследовательский университет,
Белгород, 308015, Россия

E-mail: polunin@bsu.edu.ru, Kovaleva_L@bsu.edu.ru

Аннотация. В трехмерном пространстве рассматривается краевая задача для эллиптического уравнения на двумерном комплексе. На границе двумерного комплекса задается условие Дирихле. В рамках теоретико-функционального подхода данная задача сводится к нелокальной краевой задаче Римана. Решение задачи ищется в пространствах Гельдера с весом. В статье доказана фредгольмова разрешимость задачи Дирихле на двумерном комплексе. Вычислен индекс для сформулированной задачи.

Ключевые слова: задача Дирихле, двумерный комплекс, задача Римана, индекс задачи, пространство Гельдера с весом

Для цитирования: Полунин В. А., Ковалева Л. А. 2023. Об индексе для одной краевой задачи. Прикладная математика & Физика, 55(1): 29–38. DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-1-29-38

Original Research

ABOUT THE INDEX FOR ONE BOUNDARY VALUE PROBLEM

Victor Polunin[1], **Lidiya Kovaleva**[2]

(*Article submitted by a member of the editorial board O. V. Chernova*)

Belgorod State Technological University named after V. G. Shukhov,
Belgorod, 308012, Russia

Belgorod State National Research University,
Belgorod, 308015, Russia

E-mail: polunin@bsu.edu.ru, Kovaleva_L@bsu.edu.ru

Abstract. In the 3D space, a boundary value problem for an elliptic equation on a two-dimensional complex is considered. The Dirichlet condition is set on the boundary of a two-dimensional complex. Within the framework of the functional-theoretic approach, this problem is reduced to a non-local Riemann boundary value problem. The solution of the problem is sought in Helder spaces with weight. The Fredholm solvability of the Dirichlet problem on a two-dimensional complex is proved in the article. The index for the formulated problem is calculated.

Keywords: Dirichlet Problem, Two-Dimensional Complex, Riemann Problem, Index of the Problem, Helder Space with Weight

For citation: Kovaleva Lidiya, Polunin Victor. 2023. About the index for one boundary value problem. Applied Mathematics & Physics, 55(1): 29–38 (in Russian). DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-1-29-38

---

1. Введение. На сегодняшний день задача Дирихле является одной из самых востребованных задач. Она возникает не только на плоскости, но и на многообразиях. Моделируя различные физические процессы, ученые получают набор уравнений с краевыми условиями Дирихле. Так, например, рассматривая колебания мембран, диффузию в неоднородных средах или в среде со сложным геометрическим устройством получается задача Дирихле на многообразиях разной размерности или так называемых стратифицированных множествах. Этим задачам посвящены работы Ю. В. Покорного [4], G. Lumer'a [8], О. М. Пенкина [9] и др.

В работах И. А. Лукьянчук, Ю. Н. Овчинникова [3] сформулирована задача о распределении поля и проводимости многокомпонентной системы, составленной из правильных треугольников. Эта задача может быть исследована в рамках теории, связанной с задачей Римана, описанной в работах Солдатова А. П. [7]. Именно эта задача легла в основу настоящей работы.

2. Постановка задачи. В пространстве $\mathbb{R}^3$ рассмотрим комплекс K, полученный из четырехугольной пирамиды путем выбрасывания основания. Общую вершину всех граней обозначим τ_0, остальные вершины τ_j, $j = 1, 2, 3, 4$ распределим таким образом, чтобы $M_1 = \{\tau_0\tau_1\tau_2\}, M_2 = \{\tau_0\tau_2\tau_3\}, M_3 = \{\tau_0\tau_3\tau_4\}$ и $M_4 = \{\tau_0\tau_4\tau_1\}$. Множество F_j, $j = 1, 2, 3, 4$ состоит из точек τ, соответствующих вершинам M_j, а их объединение $F = \bigcup_{j=1}^n F_j$. Будем считать, что грани M_1, M_3 и M_2, M_4 попарно имеют равные углы при вершине τ_0, которые обозначим соответственно θ_1 и θ_2. Также нам необходимо обозначить стороны граней, которые в дальнейшем будем называть ребрами комплекса, следующим образом $L_l = \{\tau_0\tau_l\}, l = 1, .., 4$, $L_5 = \{\tau_1\tau_2\}$,$L_6 = \{\tau_2\tau_3\}$, $L_7 = \{\tau_3\tau_4\}$ и $L_8 = \{\tau_4\tau_1\}$.

Задача D состоит в определении семейства из четырех гармонических функций $u^j \in C(\overline{M_j} \setminus F_j)$, удовлетворяющих на ребрах $L_l, l = 1, 2, 3, 4$ следующим контактным условиям

$$u^4 = u^1, \ \ \nu_1\frac{\partial u^4}{\partial n} + \nu_2\frac{\partial u^1}{\partial n} = 0 \ \text{ на } \ L_1, \quad u^1 = u^2, \ \ \nu_1\frac{\partial u^1}{\partial n} + \nu_2\frac{\partial u^2}{\partial n} = 0 \ \text{ на } \ L_2,$$

$$u^2 = u^3, \ \ \nu_2\frac{\partial u^2}{\partial n} + \nu_1\frac{\partial u^3}{\partial n} = 0 \ \text{ на } \ L_3, \quad u^3 = u^4, \ \ \nu_1\frac{\partial u^3}{\partial n} + \nu_2\frac{\partial u^4}{\partial n} = 0 \ \text{ на } \ L_4.$$

Здесь n – нормаль, направленная внутрь грани M.

На ребрах $L_l, l = 5, 6, 7, 8$ выполнено условие Дирихле

$$u^j\big|_{L_l} = f_l, \ \ l = 5, 6, 7, 8 \ \ j = 1, 2, 3, 4.$$

Поставленную задачу рассмотрим в весовом классе Гельдера, здесь мы напомним только основные определения, подробно эти классы описаны в [2], [5].

Пространство всех непрерывных функций φ, удовлетворяющих условию Гельдера с показателем μ, обозначим $C^\mu(\overline{K})$, $0 < \mu < 1$.

Исходя из весовой функции

$$\rho_\lambda(z) = |x - \tau_0|^\lambda \cdots |x - \tau_4|^\lambda, \ \ \lambda = (\lambda_{\tau_j, j=1,\dots,4}, \tau \in F),$$

пространство $C^\mu_\lambda(K; F)$ определяется как класс функций φ, для которых справедливо $\varphi = \rho_{\lambda-\mu}\psi$, $\psi \in C^\mu(K)$, $\psi\big|_F = 0$, где весовой порядок $\lambda - \mu = (\lambda_\tau - \mu, \ \tau \in F)$.

Если $\lambda < 0$, то функции $\varphi \in C^\mu_\lambda$ удовлетворяют условию Гельдера с показателем μ и в точках $\tau \in F$ допускают логарифмические особенности.

Если $\lambda > 0$, то функция $\varphi \in C^\mu_\lambda$ удовлетворяет условию Гельдера на K с показателем $\nu = \min(\mu, \lambda_\tau, \tau \in F)$ и обращается в нуль в точках $\tau \in F$.

С возрастанием μ и λ семейство пространств C^μ_λ монотонно убывает в смысле вложений:

$$C^{\mu+\varepsilon}_\lambda \subseteq C^\mu_\lambda, \quad C^\mu_{\lambda+\varepsilon} \subseteq C^\mu_\lambda, \quad \varepsilon > 0.$$

Тогда рассмотрим классы

$$C^\mu_{\lambda+0} = \bigcup_{\varepsilon>0} C^\mu_{\lambda+\varepsilon}, \quad C^\mu_{\lambda-0} = \bigcap_{\varepsilon>0} C^\mu_{\lambda-\varepsilon}.$$

При $\lambda = 0$ пространство $C^\mu_{\lambda+0}$ удобно записывать как C^μ_{+0}, и соответственно $C^\mu_{\lambda-0}$ как C^μ_{-0}.

Таким образом, функции $\varphi \in C^\mu_{+0}(K, F)$ удовлетворяют условию Гельдера на всем множестве K с некоторым показателем и обращаются в нуль в точках $\tau \in F$, а класс $C^\mu_{-0}(K, F)$ состоит из всех функций, которые после умножения на весовую функцию ρ_ε с любым $\varepsilon > 0$ принадлежат C^μ_{+0}. В этом смысле данные функции в точках $\tau \in F$ допускают особенности логарифмического характера.

Весовое пространство $C^{1,\mu}_\lambda(K, F)$ дифференцируемых функций φ определяется условиями

$$\varphi \in C^\mu_\lambda(K, F), \quad \varphi'\big|_M = \left(\frac{\partial\varphi_M}{\partial x}, \frac{\partial\varphi_M}{\partial y}\right) \in C^\mu_{\lambda-1}(M, F), \quad \varphi_M = \varphi\big|_M,$$

здесь φ' обозначает вектор-градиент рассматриваемый по отношению к некоторой декартовой системе координат в плоскости M.

Все перечисленные пространства совершенно аналогично вводятся и для правых частей f в краевом условии Дирихле.

3. Редукция задачи к нелокальной задаче Римана. Эту задачу можно переформулировать по отношению к аналитическим функциям ϕ^j, реальные части которых совпадают с гармоническими функциями u^j. Так как мнимые части функции ϕ^j определены с точностью до константы, с учетом соотношений Коши – Римана предыдущие краевые условия переходят соответственно в

$$\begin{array}{lll} \mathrm{Re}\,(\phi^1-\phi^2)=0, & \mathrm{Im}\,(\nu_1\phi^1+\nu_2\phi^2)=C_1, & \text{на}\, L_2 \\ \mathrm{Re}\,(\phi^2-\phi^3)=0, & \mathrm{Im}\,(\nu_2\phi^2+\nu_1\phi^3)=C_2, & \text{на}\, L_3 \\ \mathrm{Re}\,(\phi^3-\phi^4)=0, & \mathrm{Im}\,(\nu_1\phi^3+\nu_2\phi^4)=C_3, & \text{на}\, L_4 \\ \mathrm{Re}\,(\phi^4-\phi^1)=0, & \mathrm{Im}\,(\nu_2\phi^4+\nu_1\phi^1)=C_4, & \text{на}\, L_1 \end{array} \tag{1}$$

$$\mathrm{Re}\,\phi^j\big|_{L_l}=f_l, \quad ,5\le l\le 8, j=1,..4, \tag{2}$$

здесь $C_l, l=1,..4$ некоторые константы.

Введем нумерацию Γ_n ребер комплекса K, учитывая, что каждое ребро $L_l, l=1,..,4$ состоит из двух сторон граней пирамиды M_j, принадлежность ребра к грани укажем верхним индексом. В явном виде эта нумерация выглядит следующим образом:

$$\begin{pmatrix} L_1^1 & L_1^4 & L_2^1 & L_2^2 & L_3^2 & L_3^3 & L_4^3 & L_4^4 & L_5^1 & L_6^2 & L_7^3 & L_8^4 \\ \Gamma_1 & \Gamma_3 & \Gamma_5 & \Gamma_7 & \Gamma_2 & \Gamma_4 & \Gamma_6 & \Gamma_8 & \Gamma_9 & \Gamma_{10} & \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \end{pmatrix}.$$

Каждую сторону Γ_n, $n=1,..,12$ ориентируем так, чтобы при обходе соответствующей грани M_j, $j=1,..,4$, она оставалась слева.

Выберем гладкие параметризации $\gamma_i:[0,1]\to\Gamma_i$, согласованные с ориентацией дуг Γ_i.

Сужение функции φ^j на отрезок Γ_i, принадлежащий соответствующей грани M_j, дает граничное значение функции φ^j, которое обозначим φ_i^+. Семейство всех граничных значений обозначим $\varphi^+=(\varphi_i^+)_1^{12}$. Тогда с помощью введенных параметризаций семейство φ^+ «снесем» на интервал $(0,1)$ и получим вектор φ_γ^+ с компонентами $\varphi_{\gamma,i}^+=\varphi_i^+\circ\gamma_i,\ 1\le i\le 12$. В этих обозначениях краевые условия (1)-(2) запишутся в виде

$$\mathrm{Re}\,a\varphi_\gamma^+=f \tag{3}$$

с блочно диагональной матрицей $a=\mathrm{diag}(a_1,a_2,a_1,a_2,a_3)\in\mathbb{C}^{12\times 12}$

$$a_2=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -i\nu_1 & -i\nu_2 \end{pmatrix},\quad a_1=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -i\nu_2 & -i\nu_1 \end{pmatrix},$$

$$a_3=1,\in C^{4\times 4}.$$

и 12-вектор-функцией f, заданной на интервале $(0,1)$.

Заметим, что в такой постановке задача D относится к типу нелокальных краевых задач Римана, подробно изученных в работах [6], [7].

4. Основные результаты. В настоящей статье основным результатом является следующая теорема.

Теорема. *Неоднородная задача D всегда разрешима в классе C_0^μ, а пространство решений однородной задачи одномерно. Кроме того, если правая часть f принадлежит классу C_{+0}^μ, то ее решение $\phi\in C_{(+0)}^\mu$.*

Прежде чем перейти к доказательству теоремы, нам нужно провести дополнительные вычисления, будем следовать схеме исследования краевой задачи, описанной автором в работе [1].

Составим матрицу

$$b=a^{-1}\overline{a}=\mathrm{diag}(b_1,b_2,b_1,b_2,b_3),$$

$$b_2=\tfrac{1}{\nu_1+\nu_2}\begin{pmatrix} -\nu_1+\nu_2 & -2\nu_2 \\ -2\nu_1 & \nu_1-\nu_2 \end{pmatrix},\quad b_1=\tfrac{1}{\nu_1+\nu_2}\begin{pmatrix} \nu_1-\nu_2 & -2\nu_1 \\ -2\nu_2 & -\nu_1+\nu_2 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

$$b_3=1\in C^{4\times 4}.$$

Рассмотрим пересечение шара $B(\tau,\varepsilon)$, радиусом ε, с каждой гранью M_j комплекса K для всех его вершин. Здесь радиус ε выбран так, чтобы выполнялось $B(\tau_i,\varepsilon)\cap B(\tau_j,\varepsilon)=\emptyset$. В результате получим 12 секторов $S_j(\tau)$, $j=1,2,3,4$, боковые стороны которых обозначим $\partial^\pm S_j(\tau)$, предполагая, что поворот от $\partial^+S_j(\tau)$ к $\partial^-S_j(\tau)$ вокруг вершины τ внутри этого сектора осуществляется против часовой стрелки.

Все 24 боковые стороны секторов занумеруем единым образом $\Gamma_{(j)},\ j=0,..24$.

Для точки τ_0

$$\begin{pmatrix} \partial^+S_1(\tau_0) & \partial^-S_1(\tau_0) & \partial^+S_2(\tau_0) & \partial^-S_2(\tau_0) & \partial^+S_3(\tau_0) & \partial^-S_3(\tau_0) & \partial^+S_4(\tau_0) & \partial^+S_4(\tau_0) \\ \Gamma_{(2)} & \Gamma_{(7)} & \Gamma_{(8)} & \Gamma_{(4)} & \Gamma_{(3)} & \Gamma_{(6)} & \Gamma_{(5)} & \Gamma_{(1)} \end{pmatrix}$$

Обозначим полученное множество дуг $E_0(\tau_0)=\{\Gamma_{(1)},..,\Gamma_{(8)}\}$.

Для точки τ_1

$$\begin{pmatrix} \partial^+ S_1(\tau_1) & \partial^- S_1(\tau_1) & \partial^+ S_4(\tau_1) & \partial^- S_4(\tau_1) \\ \Gamma_{(11)} & \Gamma_{(9)} & \Gamma_{(10)} & \Gamma_{(12)} \end{pmatrix}, \quad E_1(\tau_1) = \{\Gamma_{(9)}, .., \Gamma_{(12)}\}.$$

Для точки τ_2

$$\begin{pmatrix} \partial^+ S_1(\tau_2) & \partial^- S_1(\tau_2) & \partial^+ S_2(\tau_2) & \partial^- S_2(\tau_2) \\ \Gamma_{(13)} & \Gamma_{(15)} & \Gamma_{(16)} & \Gamma_{(14)} \end{pmatrix}, \quad E_2(\tau_2) = \{\Gamma_{(13)}, .., \Gamma_{(16)}\}.$$

Для точки τ_3

$$\begin{pmatrix} \partial^+ S_2(\tau_3) & \partial^- S_2(\tau_3) & \partial^+ S_3(\tau_3) & \partial^- S_3(\tau_3) \\ \Gamma_{(17)} & \Gamma_{(19)} & \Gamma_{(20)} & \Gamma_{(18)} \end{pmatrix}, \quad E_3(\tau_3) = \{\Gamma_{(17)}, .., \Gamma_{(20)}\}.$$

Для точки τ_4

$$\begin{pmatrix} \partial^+ S_3(\tau_4) & \partial^- S_3(\tau_4) & \partial^+ S_4(\tau_4) & \partial^- S_4(\tau_4) \\ \Gamma_{(21)} & \Gamma_{(23)} & \Gamma_{(24)} & \Gamma_{(22)} \end{pmatrix}, \quad E_4(\tau_4) = \{\Gamma_{(21)}, .., \Gamma_{(24)}\}.$$

Пусть $\theta_j(\tau)$ – раствор сектора $S_j(\tau)$, в дальнейшем будем предполагать, что все они положительны: $0 < \theta_j(\tau) < 2\pi$.

Согласно [1], 24×24 матрица $v(\zeta), \zeta \in C$ состоит из следующих элементов:

$$v_{kr}(\zeta) = \begin{cases} e^{i\theta_j(\tau)}, & \{\Gamma_{(k)}, \Gamma_{(r)}\} = \{\partial^+ S_j(\tau), \partial^- S_j(\tau)\}, \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases} \tag{5}$$

Эта матрица целиком зависит от геометрии рассматриваемого множества.

Очевидно, что τ является концом отрезка Γ_i, $1 \le i \le 12$ и пересечение шара $B(\tau, \varepsilon)$ с Γ_i дает отрезок $\Gamma_i(\tau)$ с концом τ. Удобно положить

$$\Gamma_i(\tau) = \begin{cases} \Gamma_i^0, & \text{если } \tau \text{ есть левый конец } \Gamma_i, \\ \Gamma_i^1, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Согласно [1], введем 24×24 матрицу $\widehat{b}$ с элементами:

$$\widehat{b}_{kr} = \begin{cases} \overline{b_{ij}(0)}, & \text{если}\Gamma_{(k)} = \Gamma_i^0, \Gamma_{(r)} = \Gamma_j^0, \\ b_{ij}(1), & \text{если}\Gamma_{(k)} = \Gamma_i^1, \Gamma_{(r)} = \Gamma_j^1, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{6}$$

Рассмотрим множество пар $P_i(\tau)$, которые образуют угол при вершине τ и составлены из элементов $\{\Gamma_i^k, i = 1, ..12, k = 0, 1\}$:

$$\begin{array}{llll} P_1(\tau_0) = \{\Gamma_1^0, \Gamma_5^1\}, & P_2(\tau_0) = \{\Gamma_7^0, \Gamma_2^1\}, & P_3(\tau_0) = \{\Gamma_4^0, \Gamma_6^1\}, & P_4(\tau_0) = \{\Gamma_8^0, \Gamma_3^1\}, \\ P_5(\tau_1) = \{\Gamma_9^0, \Gamma_1^1\}, & P_6(\tau_1) = \{\Gamma_3^0, \Gamma_{12}^1\}, & P_7(\tau_2) = \{\Gamma_{10}^0, \Gamma_7^1\}, & P_8(\tau_2) = \{\Gamma_5^0, \Gamma_9^1\}, \\ P_9(\tau_3) = \{\Gamma_2^0, \Gamma_{10}^1\}, & P_{10}(\tau_3) = \{\Gamma_{11}^0, \Gamma_4^1\}, & P_{11}(\tau_4) = \{\Gamma_6^0, \Gamma_{11}^1\}, & P_{12}(\tau_4) = \{\Gamma_{12}^0, \Gamma_8^1\}. \end{array}$$

Заметим, что совокупность $\Gamma_{(j)}$ боковых сторон всех секторов $S_j(\tau), \tau \in F$ совпадает с множеством пар $P_i(\tau) = \{\Gamma_i^k, 1 \le i \le 12,\ k = 0, 1\}$, таким образом имеем:

$$\begin{array}{ll} P_1(\tau_0) = \{\Gamma_{(2)}, \Gamma_{(7)}\}, & P_2(\tau_0) = \{\Gamma_{(8)}, \Gamma_{(4)}\}, \\ P_3(\tau_0) = \{\Gamma_{(3)}, \Gamma_{(6)}\}, & P_4(\tau_0) = \{\Gamma_{(5)}, \Gamma_{(1)}\}, \\ P_5(\tau_1) = \{\Gamma_{(9)}, \Gamma_{(11)}\}, & P_6(\tau_1) = \{\Gamma_{(10)}, \Gamma_{(12)}\}, \\ P_7(\tau_2) = \{\Gamma_{(13)}, \Gamma_{(15)}\}, & P_8(\tau_2) = \{\Gamma_{(14)}, \Gamma_{(16)}\}, \\ P_9(\tau_3) = \{\Gamma_{(17)}, \Gamma_{(19)}\}, & P_{10}(\tau_3) = \{\Gamma_{(18)}, \Gamma_{(20)}\}, \\ P_{11}(\tau_4) = \{\Gamma_{(21)}, \Gamma_{(23)}\}, & P_{12}(\tau_4) = \{\Gamma_{(22)}, \Gamma_{(24)}\}. \end{array}$$

Множества $E_j(\tau)$ можно описать как объединение элементов множества пар $P_i(\tau)$, а именно

$$E_0 = \{P_1 \cup P_2 \cup P_3 \cup P_4\}, \quad E_1 = \{P_5 \cup P_6\}, \quad E_2 = \{P_7 \cup P_8\},$$

$$E_3 = \{P_9 \cup P_{10}\}, \quad E_4 = \{P_{11} \cup P_{12}\}.$$

В общем случае условимся говорить, что 24×24 матрица $x = (x_{kr})_1^{24}$ блочно-диагональна относительно некоторого разбиения $E = (E_i)_1^n$ множества $\{\Gamma_{(1)}...\Gamma_{(24)}\}$, если ее элементы $x_{kr} = 0$ при $\Gamma_{(k)} \in E_i$, $\Gamma_{(r)} \in E_j$, $i \ne j$. Умножение таких матриц сводится к поблочному умножению их диагональных блоков $x(E_i) = \{x_{kr}, \Gamma_{(k)}, \Gamma_{(r)} \in E_i\}$.

Применительно к определениям (5) и (6) можем заключить, что матрица v блочно-диагональна относительно разбиения множества $\{\Gamma_{(1)},\ldots,\Gamma_{(24)}\}$ на пары $P_i(\tau)=\{\partial^+S_j(\tau),\partial^-S_j(\tau)\}$, $j=1,\ldots,4$, $\tau\in F$ с диагональными блоками

$$v(\zeta,P_i(\tau))=e^{i\theta_j\zeta}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}.$$

Аналогично матрица $\widehat{b}$ блочно-диагональна относительно разбиения на два множества $I^0=\{\Gamma_i^0, 1\le i\le 12\}$, $I^1=\{\Gamma_i^1, 1\le i\le 12\}$

$$\widehat{b}(I^0)=\overline{b(0)},\quad \widehat{b}(I^1)=b(1).$$

В нашей нумерации матрица $\widehat{b}$ блочно-диагональна относительно разбиения множества $\{\Gamma_(1),..,\Gamma_{(24)}\}$ на множества $E_j(\tau)$, которые в свою очередь составлены из элементов множества $P_i(\tau)$.

Поэтому каждая матрица $v(\zeta)$ и $\widehat{b}$ блочно-диагональны относительно разбиения $E_j(\tau)$, а значит этим свойством обладает и их сумма $v(\zeta)+\widehat{b}$.

Согласно [2], матрица-функция $v(\zeta)+\widehat{b}$ называется концевым символом задачи. Мероморфная функция

$$\frac{\det[v(\zeta)+\widehat{b}]}{\det[v(\zeta)+1]}$$

при $\operatorname{Im}\zeta\to\pm\infty$, $\operatorname{Re}\zeta=const$ стремится к ненулевым пределам, так что проекция нулей функции $\det[v(\zeta)+\widehat{b}]$ на действительную ось является дискретным множеством. Пусть $\alpha>0$ выбрано столь малым, что эти нули отсутствуют в полосе $-\alpha\le\operatorname{Re}\zeta<0$. Тогда справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть матрица-функция $a(t)\in C^{\mu+0}[0,1]$ и $\det a\ne 0, 0\le t\le 1$. Тогда задача Дирихле фредгольмова в классе C^{μ}_{-0} и ее индекс $æ_\lambda$, при $\lambda=-\varepsilon$, $\varepsilon>0$ и достаточно мало, вычисляется по формуле*

$$æ_{-\varepsilon}=æ_0+4 \tag{7}$$

где величина

$$æ_0=\frac{1}{2\pi i}\left[\ln\det b(t)\right]\Big|_0^1-\frac{1}{2\pi i}\left[\ln\frac{\det(v+\widehat{b})(\zeta)}{\det(v+1)(\zeta)}\right]\Bigg|_{-\alpha-i\infty}^{-\alpha+i\infty}, \tag{8}$$

выражения в квадратных скобках определяются непрерывными ветвями логарифма, а вертикальная черта означает приращение в соответствующих пределах.

В выбранной нумерации матрицы $v(\zeta)$ и b представимы в виде:

$$v(\zeta,E_0)=\begin{pmatrix}0&v_0(\zeta)\\v_0(\zeta)&0\end{pmatrix}\in\mathbb{C}^{8\times8},\ v_0(\zeta)=\begin{pmatrix}e^{i\theta_2\zeta}&0&0&0\\0&0&e^{i\theta_1\zeta}&0\\0&e^{i\theta_1\zeta}&0&0\\0&0&0&e^{i\theta_2\zeta}\end{pmatrix};$$

$$\widehat{b}(\zeta,E_0)=\begin{pmatrix}b_1&0&0&0\\0&b_2&0&0\\0&0&b_1&0\\0&0&0&b_2\end{pmatrix}\in\mathbb{C}^{8\times8}. \tag{9}$$

где b_1,b_2 из (4). Диагональные блоки $4\times4-$ для вершин τ_j, $j=\overline{1,4}$ имеют вид

$$v(\zeta,E_j)=\begin{pmatrix}0&v_j(\zeta)\\v_j(\zeta)&0\end{pmatrix},\quad\text{где}$$

$$v_1(\zeta)=\begin{pmatrix}e^{i\theta_1(\tau_1)\zeta}&0\\0&e^{i\theta_4(\tau_1)\zeta}\end{pmatrix},\quad v_2(\zeta)=\begin{pmatrix}e^{i\theta_1(\tau_2)\zeta}&0\\0&e^{i\theta_2(\tau_2)\zeta}\end{pmatrix},$$
$$v_3(\zeta)=\begin{pmatrix}e^{i\theta_2(\tau_3)\zeta}&0\\0&e^{i\theta_3(\tau_3)\zeta}\end{pmatrix},\quad v_4(\zeta)=\begin{pmatrix}e^{i\theta_3(\tau_4)\zeta}&0\\0&e^{i\theta_4(\tau_4)\zeta}\end{pmatrix}, \tag{10}$$

$$\widehat{b}(E_j)=\begin{pmatrix}b_1&0\\0&1\end{pmatrix},\ j=1,3,\quad \widehat{b}(E_j)=\begin{pmatrix}b_2&0\\0&1\end{pmatrix},\ j=2,4.$$

Согласно теореме 1, характер разрешимости задачи (D) в классе C^{μ}_{-0} определяется нулями определителя $\det\,(v(\zeta)+\hat{b})(\zeta)$ на прямой $\operatorname{Re}\zeta=0$, причем важную роль играет и порядок полюса точки $\zeta=0$ обратной матрицы- функции $(v+\hat{b})^{-1}$. В силу блочно-диагональной структуры матриц соответствующие свойства достаточно выяснить для их диагональных блоков.

Введем обозначение $z = e^{i\theta_1(\tau)\zeta}, y = e^{i\theta_2(\tau)\zeta}$ и $t = \frac{v_1}{v_2}$, тогда

$$\det(v+\widehat{b})(\zeta,E_0) = \frac{1}{(t+1)^4} \big(-2(t^2-1)^2y^2z^2(y^2+z^2)+(t+1)^4y^2z^2+4(t^4-10t^2+1)y^2z^2+ (t-1)^4(z^4+y^4)-2(t^2-1)^2(y^2-z^2)+(t+1)^4\big). \quad (11)$$

Обратная матрица $(v+\widehat{b})^{-1}(\zeta,E_0)$ в явном виде имеет громоздкое представление, поэтому выпишем ее элементы отдельно,

$$(v+\widehat{b})^{-1}(\zeta,E_0) = \frac{1}{(1+t)^3\det(v+\widehat{b})}\begin{pmatrix} A & B \\ B & A\end{pmatrix}, \quad A,B\in C^{4\times 4}.$$

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & ta_2 & ta_3 & a_4 \\ a_5 & a_6 & a_7 & a_8 \\ a_8 & a_7 & a_6 & a_5 \\ a_4 & ta_3 & ta_2 & a_1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a_7 & ta_8 & ta_9 & a_{10} \\ a_8 & a_{10} & a_7 & a_9 \\ a_9 & a_7 & a_{10} & a_8 \\ a_{10} & ta_9 & ta_8 & a_7 \end{pmatrix}$$

$$a_1 = -(t-1)(z^2-1)((y^2-1)(z^2-1)+t^2(y^2-1)(z^2-1)+2t(1+y^2)(1+z^2))$$

$$a_2 = -2(1+t^2)(y^2-1)(z^2-1)-4t(1+z^2+y^2(1-3z^2))$$

$$a_3 = 2yz((y^2-1)(z^2-1)(1+t^2)+2t(-3+z^2+y^2(1+z^2)))$$

$$a_4 = -8tyz(t-1)(z^2-1)$$

$$a_5 = (t-1)(y^2-1)((y^2-1)(z^2-1)+2t(y^2+1)(z^2+1))$$

$$a_6 = 8tyz(t-1)(y^2-1)$$

$$a_7 = y(-(t^2-1)^2+(t-1)^4y^2-2z^2((t^2-1)^2y^2-t^4+10t^2-1)+$$

$$(1+t)^2z^4(1|y+t(y-1))(t(y+1)+y-1))/(t+1)$$

$$a_8 = 2y(t-1)((y^2-1)(z^2-1)(t^2+1)+2t(1+y^2+(-3+y^2)z^2))/(t+1)$$

$$a_9 = 2z(t-1)(t(6+t)y^2+y^2+(t-2)tz^2+z^2-(t+1)^2y^2z^2-t(t+2)-1)/(t+1)$$

$$a_{10} = -4t((t+1)^2z(1+4tz^2y^2)+(t-1)^2z(y^2=4tz^2))/(t+1)$$

Далее введем обозначение в соответствии с (10), элементы $z_m = (v_{mn})^2$, $m=n, m=1,2$, учитывая соответствие рассматриваемого множества E_j и матрицы $v_j(\zeta)$, тогда

$$\det(v+\widehat{b})(\zeta,E_1) = \frac{(t+1)(z_1^2z_2^2-1)+(t-1)(z_1^2-z_2^2)}{t+1}, \quad (12)$$

$$(v+\widehat{b})^{-1}(\zeta,E_1) = \frac{1}{(t+1)\det(v+\widehat{b})(\zeta,E_1)} *$$

$$\begin{pmatrix} -(z_2^2t+z_2^2+t-1) & 2t & (z_2^2t+z_2^2+t-1)z_1 & -2tz_2 \\ 2 & -(z_1^2t+z_1^2-t+1) & -2tz_1 & (z_1^2t+z_1^2-t+1)z_2 \\ (z_2^2t+z_2^2+t-1)z_1 & -2tz_1 & -(z_2^2t-z_2^2+t+1) & 2tz_2z_1 \\ -2z_2 & (z_1^2t+z_1^2-t+1)z_2 & 2z_2z_1 & (z_1^2t-z_1^2-t-1) \end{pmatrix}.$$

Вычисления для множества E_3 дают аналогичные результаты.

Для множества E_2 справедливы следующие равенства:

$$\det(v+\widehat{b})(\zeta,E_2)=\frac{(t+1)(z_1^2z_2^2-1)+(t-1)(z_1^2-z_2^2)}{t+1},$$

$$(v+\widehat{b})^{-1}(\zeta,E_2)=\frac{1}{(t+1)\det(v+\widehat{b})(\zeta,E_2)}*$$

$$\begin{pmatrix} -(z_2^2t+z_2^2-t+1) & 2 & (z_2^2t+z_2^2-t+1)z_1 & -2z_2 \\ 2t & -(z_1^2t+z_1^2+t-1) & -2tz_1 & (z_1^2t+z_1^2+t-1)z_2 \\ (z_2^2t+z_2^2-t+1)z_1 & -2z_1 & z_2^2t-z_2^2-t-1 & 2z_2z_1 \\ -2z_2t & (z_1^2t+z_1^2+t-1)z_2 & 2tz_2z_1 & -(z_1^2t-z_1^2+t+1) \end{pmatrix}.$$

Вычисления для множества E_4 дают аналогичные результаты.
Из (9) и (10) следует

$$\det(v+1)(\zeta,E_0)=(y^2-1)^2(z^2-1)^2$$

$$(v+1)^{-1}(\zeta,E_0)=\frac{1}{(1-y^2)(1-z^2)}$$
$$\begin{pmatrix} 1-z^2 & 0 & 0 & 0 & -y(1-z^2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-y^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -z(1-y^2) & 0 \\ 0 & 0 & 1-y^2 & 0 & 0 & -z(1-y^2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-z^2 & 0 & 0 & 0 & -y(1-z^2) \\ -y(1-z^2) & 0 & 0 & 0 & 1-z^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -z(1-y^2) & 0 & 0 & (1-y^2) & 0 & 0 \\ 0 & -z(1-y^2) & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-y^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -y(1-z^2) & 0 & 0 & 0 & 1-z^2 \end{pmatrix},$$

$$\det(v+1)(\zeta,E_j)=(z_1^2-1)(z_2^2-1)$$

$$(v+1)^{-1}(\zeta,E_j)=\frac{1}{\det(v+1)(\zeta,E_j)}\begin{pmatrix} 1-z^2 & 0 & -y(1-z^2) & 0 \\ 0 & 1-y^2 & 0 & -z(1-y^2) \\ -y(1-z^2) & 0 & 1-z^2 & 0 \\ 0 & -z(1-y^2) & 0 & 1-y^2 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим поведение на мнимой оси функций $\det(v+\hat{b})(\zeta,E_0)$ и $\det(v+\hat{b})(\zeta,E_j)$. Обозначим s порядок нуля функции.

Лемма 1. *Функции* $\det(v+\hat{b})(\zeta,E_0)$ *и* $\det(v+\hat{b})(\zeta,E_j)$, $j=1,\dots,4$ *на мнимой оси имеют единственный нуль в точке* $\xi=0$ *и его порядок равен* $s(E_0)=2$ *и* $s(E_j)=1$.

Доказательство. Согласно (11), определитель матрицы $(v+\widehat{b})(\zeta,E_0)$, который обозначим $f(y,z)$, дается выражением

$$f(y,z)=\frac{1}{(t+1)^4}\Big((-2t^4+4t^2-2)y^2z^4+(-2t^4+4t^2-2)y^4z^2+(t+1)^4y^4z^4+$$
$$(4t^4-40t^2+4)y^2z^2+(t-1)^4y^4+(t-1)^4z^4-$$
$$(2(t-1)^2y^2+2(t-1)^2z^2-(t+1)^2)(t+1)^2\Big). \quad (13)$$

Согласно введенному выше обозначению $z=e^{i\theta_1(\tau)\zeta}, y=e^{i\theta_2(\tau)\zeta}$, очевидно, что функции y и z – вещественны и положительны при $\mathrm{Re}\xi=0$, более того одновременно либо больше 1, либо меньше 1, либо равны 1.

Из (12) видно, что при $y=z=1$ функция обращается в нуль и справедливо соотношение

$$f(\frac{1}{y},\frac{1}{z})=-\frac{f(y,z)}{yz}.$$

Теперь убедимся, что в квадрате $K=\{0<y,z<1\}$ функция $f(y,z)$ нигде не принимает значения нуль. На границе квадрата функция $f(y,z)$ не положительная и обращается в нуль только в точке $(1,1)$. Градиент функции $\mathrm{grad} f(y,z) \neq 0$, $y, z \in K$, поэтому $f(y,z) < 0$ во всем квадрате. Определим порядок нуля функции $\det(v+\widehat{b})(\zeta, E_0)$ в точке $\xi = 0$. Согласно (13)

$$(1+t)^4[\det(v+\widehat{b})]'(0,E_0) = (-2t^4+4t^2-2)(2i\theta_2+4i\theta_1)+(-2t^4+4t^2-2)(4i\theta_2+2i\theta_1)+ (t+1)^4(4i\theta_2+4i\theta_1)+(4t^4-40t^2+4)(2i\theta_2+2i\theta_1)+4(t-1)^4 i\theta_2+4(t-1)^4 i\theta_1- 2(t+1)^2(2(t-1)^2 i\theta_2+2(t-1)^2 i\theta_1)=0$$

$$(1+t)^4[\det(v+\widehat{b})]''(0,E_0) = 128t(it\theta_2+i\theta_1)(it\theta_1+i\theta_2) \neq 0$$

Следовательно порядок нуля равен $s(E_0) = 2$. Посчитаем порядок нуля для функции $det(v+\hat{b})(\zeta, E_j)$ в точке $\zeta = 0$.

$$(t+1)[\det(v+\hat{b})(0,E_1)]' = 4i(t\theta_1(\tau_1)+\theta_4(\tau_1)) \neq 0.$$

Аналогично, для всех остальных множеств E_j, $j = 2,3,4$ порядок нуля равен $s(E_j) = 1$.

Перейдем к основному результату.

Теорема 2. *Неоднородная задача D всегда разрешима в классе C_0^μ, а пространство решений однородной задачи одномерно. Кроме того, если правая часть f принадлежит классу C_{+0}^μ, то ее решение $\phi \in C_{(+0)}^\mu$.*

Доказательство. Согласно теореме 1, нам необходимо вычислить индекс задачи $æ_0$. В силу блочно-диагональной структуры матриц $\det(V+\hat{b})(\zeta,E)$ и $\det(V+1)(\zeta,E)$, формулу (8) можно переписать в виде

$$æ_0 = -\frac{1}{2\pi i}\left[\ln\frac{\det(v+\widehat{b})(\zeta,E_0)}{\det(v+1)(\zeta,E_0)}\right]\Bigg|_{-\alpha-i\infty}^{-\alpha+i\infty} - \sum_{j=1}^{4}\frac{1}{2\pi i}\left[\ln\frac{\det(v+\widehat{b})(\zeta,E_j)}{\det(v+1)(\zeta,E_j)}\right]\Bigg|_{-\alpha-i\infty}^{-\alpha+i\infty}.$$

Согласно принципу аргумента для аналитических функций, имеет место следующее равенство:

$$\frac{1}{2\pi i}\ln h(\zeta)\Big|_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} - \frac{1}{2\pi i}\ln h(\zeta)\Big|_{-\alpha-i\infty}^{-\alpha+i\infty} = m, \tag{14}$$

где $m = s - p$.

Заметим, что в нашем случае $h(\zeta)$ представима в виде частного двух функций

$$f(\zeta) = \det(v+\widehat{b})(\zeta,E_0) = f(y,z),$$

$$g(\zeta) = \det(v+1)(\zeta,E_0) = (y^2-1)^2(z^2-1)^2.$$

Исследуем функцию $h(\zeta)$ на четность и нечетность. Очевидно, что

$$f(\frac{1}{y},\frac{1}{z}) = -\frac{1}{yz}f(y,z),$$

$$g(\frac{1}{y},\frac{1}{z}) = \frac{1}{yz}g(y,z).$$

Тогда функция $h(\zeta)$ нечетная и для нее справедливо равенство

$$\frac{1}{2\pi i}\ln h(\zeta)\Big|_{-\alpha-i\infty}^{-\alpha+i\infty} = -\frac{1}{2\pi i}\ln h(\zeta)\Big|_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}.$$

Поставив последнее равенство в (14), получаем

$$\frac{1}{2\pi i}\ln h(\zeta)\Big|_{-\alpha-i\infty}^{-\alpha+i\infty} = \frac{m}{2}.$$

Отсюда легко видеть, что первое слагаемое в формуле индекса равно

$$\frac{m}{2} = \frac{2-4-1+1}{2} = -1.$$

Перейдем ко второму слагаемому.

Для множества E_1.

$$f(z_1,z_2) = \det(v+\widehat{b})(\zeta,E_1) = \frac{(t+1)(z_1^2z_2^2-1)+(t-1)(z_1^2z_2^2-1)}{t+1},$$

$$g(z_1,z_2)\det(v+1)(\zeta,E_1) = (z_1^2-1)(z_2^2-1).$$

Проделав исследование, аналогичное вышеуказанному, получим, что функция $h(\zeta) = \frac{f}{g}$ нечетная, и, следовательно,

$$\frac{m}{2} = \frac{1+1-1-2}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Нетрудно показать, что для остальных номеров $j = 2, 3, 4$ значение $\frac{m}{2} = -\frac{1}{2}$. Таким образом, индекс задачи

$$æ = 4 - (1 + 4 * \frac{1}{2}) = 1.$$

Для доказательства второго утверждения теоремы вспомним теорему 2, сформулированную в [1], в которой говорится следующее.

Пусть выполнены условия теоремы 1: матрица-функция $\zeta(v + \hat{b})^{-1}(\zeta)$ не имеет полюсов на мнимой оси. Тогда любое решение $\phi \in C^{\mu}_{-0}$ задачи (3) с правой частью $f \in C^{\mu}_{+0}$ принадлежит классу $C^{\mu}_{(+0)}$. В частности, æ является индексом задачи и в классе $C^{\mu}_{(+0)}$.

Докажем сначала вспомогательную лемму.

Лемма 2. *Обозначим p − порядок полюса функции, считая кратности. Для матриц-функций*

$$(v + \hat{b})^{-1}(\zeta, E_0) \quad \text{и} \quad (v + \hat{b})^{-1}(\zeta, E_j),\ j = 1, \dots, 4$$

в точке $\xi = 0$ *порядок полюса* $p = 1$.

Доказательство. Согласно вычислениям выше, элементы матрицы $(v+1)^{-1}(\zeta, E_0)$ при $\zeta = 0$ обращаются в нуль. А так как $\det(v + \hat{b})(\zeta, E_0)$ имеет нуль второго порядка в точке $\zeta = 0$, то матрица $(v + 1)^{-1}(0, E_0)$ имеет полюс первого порядка.

Что касается множеств E_j, $j = 1, \dots, 4$, то очевидно, что элементы матрицы не обращаются в нуль при $\zeta = 0$, и следовательно, полюс матрицы равен порядку нуля матрицы $det(v + \hat{b})(0, E_j)$, то есть $p = 1$.

Теперь вернемся к рассмотрению выполнения условий теоремы 2 из [1]. Согласно лемме 2, из второго утверждения следует, что матрицы-функции $\zeta(v + \hat{b})^{-1}(\zeta, E_0)$ и $\zeta(v + \hat{b})^{-1}(\zeta, E_j)$, $j = 1, \dots, 4$ не имеют полюсов на мнимой оси. Следовательно, условия теоремы выполнены. Таким образом, мы получили, что любое решение $\phi \in C^{\mu}_{-0}$ задачи (3) с правой частью $f \in C^{\mu}_{+0}$ принадлежит классу $C^{\mu}_{(+0)}$. Индекс рассматриваемой задачи в классе $C^{\mu}_{(+0)}$ равен 1.

Что касается единственности решения задачи, то она следует из принципа максимума.

Список литературы

1. Ковалева Л. А., Солдатов А. П. 2007. Об одной задаче теории функций. Доклады Адыгской (Черкесской) международной академии наук, 9(2): 30–38.

2. Ковалева Л. А., Солдатов А. П. 2015. Задача Дирихле на двумерных стратифицированных множествах. Изв. РАН, сер. Матем., 79(1): 77–114.

3. Овчинников Ю. Н., Лукьянчук И. А. 2002. Проводимость и распределение токов в двухкомпонентной системе состоящей из правильных треугольников. ЖЭТФ, 121(1): 239–252.

4. Покорный Ю. В. 2004. Дифференциальные уравнения на геометрических графах. М.: Физматлит, 272с.

5. Солдатов А. П. 2005. Элементы функционального анализа и теории функций. Изд-во БелГУ, 140 с.

6. Солдатов А. П. 1992. Метод теории функций в эллиптических краевых задачах на плоскости. II. Кусочно-гладкий случай. Изв. АН СССР, 56(3): 566–604.

7. Солдатов А. П. 1998. Обобщенная задача Римана на римановой поверхности. Докл. РАН, 362(6): 735–738.

8. Lumer G. 1980. Espases ramifes et diffusion sur les reseaux topologiques. C. R. Acad. Sc. Paris. Serie A. 291: 219–234.

9. Penkin O. M. 2004. Second-order elliptic equations on a stratified set. Differential equations on networks. J. Math. Sci. (N. Y.). 119(6): 836–867.

References

1. Kovaleva L. A., Soldatov A. P. 2007. Ob odnoj zadache teorii funkcij [About a problem in the theory of functions]. Doklady Adygskoj (Cherkesskoj) mezhdunarodnoj akademii nauk 9(2): 30–38.

2. Kovaleva L. A., Soldatov A. P. 2015.The dirichlet problem on two-dimensional stratified sets. Izv. RAN, Mathematics. 79(1): 77–114 (in Russian).
3. Ovchinnikov Yu. N., Luk'yanchuk I. A. 2002. Provodimost' i raspredelenie tokov v dvukhkomponentnoi sisteme sostoyashchei iz pravil'nykh treugol'nikov [Conductivity and current distribution in a two-component system consisting of regular triangles]. ZhETF, 121(1): 239–252.
4. Pokorny Yu. V. 2004. Differentsial'nyye uravneniya na geometricheskikh grafakh [Differential equations on geometric graphs] M.: Fizmatlit, 272 s.
5. Soldatov A. P. 2005. Elementy funktsional'nogo analiza i teorii funktsii [Elements of functional analysis and theory of functions]. Izd-vo BelGU, 140 s.
6. Soldatov A. P. 1992. Metod teopii funktsii v ellipt. kpaevykh zadachakh na ploskosti. II. Kusochno-gladkii sluchai Izv. AH SSSR [A method of the theory of functions in an ellipt. boundary value problems on the plane. II. Piecewise smooth case]. Izv. AN USSR. 56(3): 566–604.
7. Soldatov A. P. 1998. Obobshchennaya zadacha Rimana na rimanovoi poverkhnosti [Generalized Riemann problem on a Riemann surface]. Dokl. RAH. 362(6): 735–738.
8. Lumer G. 1980. Espases ramifes et diffusion sur les reseaux topologiques. C. R. Acad. Sc. Paris. Serie A. 291: 219–234.
9. Penkin O. M. 2004. Second-order elliptic equations on a stratified set. Differential equations on networks. J. Math. Sci. (N. Y.). 119(6): 836–867.

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.
Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 21.11.2022
Поступила после рецензирования 05.01.2023
Принята к публикации 09.01.2023

Received 21.11.2022
Revised 05.01.2023
Accepted 09.01.2023

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Полунин Виктор Александрович – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры высшей математики института экономики и менеджмента Белгородского государственного технологического университета имени В. Г. Шухова

ул. Костюкова, 46, Белгород, 308012, Россия

Ковалева Лидия Александровна – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры прикладной математики и компьютерного моделирования института инженерных и цифровых технологий Белгородского государственного национального исследовательского университета

ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Victor Polunin – PhD, Associate Professor, Associate Professor of the Department of of Higher Mathematics, Institute of Economics and Management, Belgorod State Technological University named after V. G. Shukhov, Belgorod, Russia

Lidiya Kovaleva – PhD , Associate Professor of the Department of Applied Mathematics and Computer Modeling of the Institute of Engineering and Digital Technologies of the Belgorod State National Research University, Belgorod, Russia

Прикладная математика & Физика, 2023, том 55, № 1. С. 39–48.
Applied Mathematics & Physics, 2023, Volume 55, No 1. P. 39–48.

УДК 517.3
MSC 31B15; 47G10; 44A15; 46E30
оригинальное исследование

DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-1-39-48

ОБ ОБОБЩЕННЫХ ПОТЕНЦИАЛАХ БЕССЕЛЯ В ВЕСОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ ЛЕБЕГА

А. Л. Джабраилов

(*Статья представлена членом редакционной коллегии Э. Л. Шишкиной*)

Чеченский государственный университет им. А. А. Кадырова,
Грозный, 364024, Россия

E-mail: ahmed_0065@mail.ru

Аннотация. В статье рассматривается оператор типа свертки, представленный обобщенным потенциалом Бесселя. Изучается действие обобщенного потенциала Бесселя в специальном лебеговом классе функций со степенным весом. Доказана теорема об ограниченности обобщенного потенциала Бесселя в весовом классе Лебега. Также показано, что обобщенный потенциал Бесселя в весовом лебеговом классе функций является оператором слабого типа в смысле нормы, построенной при помощи весовой функции распределения. Эти результаты являются распространением теории Харди – Литтлвуда – Соболева о дробном интегрировании на случай обобщенного потенциала Бесселя.

Ключевые слова: обобщенный потенциал Бесселя, ограниченность оператора, оператор слабого типа

Благодарности: Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ по гос.заданию FEGS-2020-0001.

Для цитирования: Джабраилов А. Л. 2023. Об обобщенных потенциалах Бесселя в весовом пространстве Лебега. Прикладная математика & Физика, 55(1): 39–48. DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-1-39-48

Original Research

ON GENERALISED BESSEL POTENTIALS IN WEIGHTED LEBESGUE SPACE

Akhmed Dzhabrailov

(*Article submitted by a member of the editorial board E. L. Shishkina*)

Kadyrov Chechen State University,
Grozny, 36402, Russia

E-mail: ahmed_0065@mail.ru

Abstract. The article considers the convolution type operator represented by the generalized Bessel potential. The action of the generalized Bessel potential in a special Lebesgue class of functions with power weight is studied. A theorem on the boundedness of the generalized Bessel potential in the weighed Lebesgue class is proved. It is also shown that the generalized Bessel potential in the weighted Lebesgue class of functions is a weak type operator in the sense of a norm constructed using a weighted distribution function. These results are an extension of the Hardy – Littlewood – Sobolev theory of fractional integration to the case of a generalized Bessel potential.

Keywords: Generalized Bessel Potential, Bounded Operator, Operator of Weak Type

Acknowledgements: The work is supported of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation on a state assignment FEGS-2020-0001.

For citation: Dzhabrailov Akhmed. 2023. On generalised Bessel potentials in weighted Lebesgue space. Applied Mathematics & Physics, 55(1): 39–48 (in Russian). DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-1-39-48

---

1. Введение. Дробные степени многомерных дифференциальных операторов находят широкое применение при решении аналитических задач в евклидовых пространствах, неоднородных уравнениях и при исследовании граничных значений функций из различных функциональных пространств. Дробные отрицательные степени многомерных дифференциальных операторов называются потенциалами. Они принимают существенное участие и в ряде вероятностных задач, в частности в марковских процессах.

Наиболее изученной является дробная степень оператора Лапласа $(-\Delta)^{-\frac{\alpha}{2}}$, $\alpha > 0$, называемая потенциалом Рисса (см. [20]). Однако, операторы $(-\Delta)^{-\frac{\alpha}{2}}$ демонстрируют рост своего ядра на бесконечности при значениях α, больших размерности пространства. Поэтому в теориях, где важно поведение оператора на бесконечности, предпочтение отдается дробным степеням оператора $(I-\Delta)^{-\frac{\alpha}{2}}$, $\alpha > 0$, где I —

тождественный оператор. Операторы $(I-\Delta)^{-\frac{\alpha}{2}}$, $\alpha>0$ называются потенциалами Бесселя. Потенциалы Бесселя благодаря своим хорошим аналитическим свойствам оказываются более удобными, а значит, и предпочтительными при построении классов дробной гладкости, кроме того, они принимают существенное участие и в ряде вероятностных задач, в частности в марковских процессах. Подробное изложение теории потенциала Бесселя в конечномерных пространствах содержится в [12]. Для аналитических целей они введены и изучены в [21].

В этой статье изучается обобщение оператора $(I-\Delta)^{-\frac{\alpha}{2}}$, $\alpha>0$ на случай, когда вместо Δ рассматривается оператор Лапласа – Бесселя $\Delta_\gamma=\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}+\frac{\gamma}{x_k}\frac{\partial}{\partial x_k}\right)$, $\gamma_i>0$, $i=1,\ldots,n$. Оператор $(I-\Delta_\gamma)^{-\frac{\alpha}{2}}$, $\alpha>0$ носит название «обобщенный потенциал Бесселя» [13, 2, 3]. Наша задача в этой статье – описать действие оператора $(I-\Delta_\gamma)^{-\frac{\alpha}{2}}$, $\alpha>0$ в специальном лебеговом классе функций со степенным весом, докажем его ограниченность в таком классе функций и покажем, что он является оператором слабого типа в смысле нормы, построенной при помощи весовой функции распределения.

2. Обобщенный потенциал Бесселя. Рассмотрим многомерное преобразование Ханкеля функции f вида

$$\mathbf{F}_\gamma[f](\xi)=\mathbf{F}_\gamma[f(x)](\xi)=\widehat{f}(\xi)=\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}f(x)\,\mathbf{j}_\gamma(x,\xi)x^\gamma dx,\qquad x\in\mathbb{R}^n,\qquad x^\gamma=\prod_{i=1}^{n}x_i^{\gamma_i},$$

где γ=$(\gamma_1,\ldots,\gamma_n)$ – мультииндекс, составленный из положительных фиксированных вещественных чисел $\gamma_i\geq 0$, i=1, ..., n, $\mathbb{R}^n_+$=$\{x$=$(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n,\ \ x_1>0,\ldots,x_n>0\}$,

$$\mathbf{j}_\gamma(x,\xi)=\prod_{i=1}^{n}j_{\frac{\gamma_i-1}{2}}(x_i\xi_i),\qquad \mathbf{j}_\gamma(0,\xi)=1,$$

а j_ν задается формулой (см. [4], стр. 10 и [5])

$$j_\nu(x)=\frac{2^\nu\Gamma(\nu+1)}{x^\nu}\,J_\nu(x),\tag{1}$$

J_ν — функция Бесселя первого рода. Функция j_ν называется нормированной функцией Бесселя первого рода, поскольку $j_\nu(0)=1$.

Формула обращения $\mathbf{F}_\gamma$ имеет вид

$$\mathbf{F}^{-1}_\gamma[\widehat{f}(\xi)](x)=f(x)=\frac{2^{n-|\gamma|}}{\prod\limits_{j=1}^{n}\Gamma^2\left(\frac{\gamma_j+1}{2}\right)}\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\mathbf{j}_\gamma(x,\xi)\widehat{f}(\xi)\xi^\gamma\,d\xi,$$

где $|\gamma|=\gamma_1+\ldots+\gamma_n$.

В этой работе мы будем рассматривать дифференциальный сингулярный оператор Бесселя, обозначаемый B_γ (см. [4], стр. 5):

$$(B_\gamma)_t=\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\frac{\gamma}{t}\frac{\partial}{\partial t}=\frac{1}{t^\gamma}\frac{\partial}{\partial t}t^\gamma\frac{\partial}{\partial t},\qquad t>0,\qquad \gamma\in\mathbb{R}.\tag{2}$$

Пусть

$$\Delta_\gamma=(\triangle_\gamma)_x=\sum_{k=1}^{n}(B_{\gamma_k})_{x_k},\tag{3}$$

а $f=f(x)$ — достаточно гладкая функция, достаточно быстро убывающая на бесконечности и такая, что все существующие производные от нее нечетного порядка обращаются в нуль при $x=0$, тогда преобразование Ханкеля от примененного к ней оператора $-\Delta_\gamma$ есть [11]

$$\mathbf{F}_\gamma[-\Delta_\gamma f](\xi)=|\xi|^2\mathbf{F}_\gamma[f](\xi).$$

Таким образом, чтобы определить (хотя бы формально) дробную степень оператора $-\Delta_\gamma$, нужно записать равенство

$$(-\Delta_\gamma)^{\frac{\alpha}{2}}f=\mathbf{F}^{-1}_\gamma(|\xi|^\alpha\mathbf{F}_\gamma[f](\xi)).$$

Особое значение имеют отрицательные степени α в диапазоне $-(n+|\gamma|)<\alpha<0$. Отрицательная степень оператора $-\Delta_\gamma$ вида $(-\Delta_\gamma)^{-\frac{\alpha}{2}}$, $\alpha>0$ называется B-потенциалом Рисса. Такой потенциал имеет ядро вида $|x|^{\alpha-n-\gamma|}$. B-потенциал Рисса изучен Л. Н. Ляховым [6, 7, 8], В. С. Гулиевым и др. в [17, 18].

Пусть $|\gamma|=\gamma_1+\ldots+\gamma_n$. Ядро $|x|^{\alpha-n-\gamma|}$ при $\alpha>n+|\gamma|$ растет на бесконечности. Можно скорректировать B-потенциалы Рисса таким образом, чтобы сохранить их поведение вблизи нуля, но добавить экспоненциальное затухание на бесконечности. Простейший способ добиться этого заключается в том, чтобы заменить оператор $-\Delta_\gamma$ на оператор $I-\Delta_\gamma$, где I — тождественный оператор, и рассмотреть дробную степень оператора $(I-\Delta_\gamma)^{-\alpha/2}$, $\alpha>0$. При помощи преобразования Ханкеля дробная степень $(I-\Delta_\gamma)^{-\alpha/2}$ сводится к умножению на степень $(1+|\xi|^2)^{-\alpha/2}$. А именно, дробную степень $(I-\Delta_\gamma)^{-\alpha/2}$ можно записать в виде:

$$(I-\Delta_\gamma)^{-\frac{\alpha}{2}}f=\mathbf{F}_\gamma^{-1}((1+|\xi|^2)^{-\frac{\alpha}{2}}\mathbf{F}_\gamma[f](\xi)).$$

Кроме того, дробная степень $(I-\Delta_\gamma)^{-\alpha/2}$ может быть записана как обобщенная свертка прообраза преобразования Ханкеля функции $(1+|x|^2)^{-\alpha/2}$ и некоторой функции.

Обобщенная свертка, подходящая для работы с оператором и Δ_γ имеет вид

$$(f*g)_\gamma(x)=(f*g)_\gamma=\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} f(y)({}^\gamma\mathbf{T}^y_x g)(x)y^\gamma\,dy, \tag{4}$$

где ${}^\gamma\mathbf{T}^y_x$ — многомерный обобщенный сдвиг вида

$$({}^\gamma\mathbf{T}^y_x f)(x)={}^\gamma\mathbf{T}^y_x f(x)=({}^{\gamma_1}T^{y_1}_{x_1}\dots{}^{\gamma_n}T^{y_n}_{x_n}f)(x), \tag{5}$$

где ${}^{\gamma_i}T^{y_i}_{x_i}$ – одномерный обобщенный сдвиг – для i=1, . . ., n действует по формуле (см. [5])

$$({}^{\gamma_i}T^{y_i}_{x_i}f)(x)=\frac{\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{\gamma_i}{2}\right)}$$

$$\times\int\limits_0^\pi f\left(x_1,\dots,x_{i-1},\sqrt{x_i^2+y_i^2-2x_iy_i\cos\varphi_i},x_{i+1},\dots,x_n\right)\ \sin^{\gamma_i-1}\varphi_i\,d\varphi_i,\qquad \gamma_i>0.$$

Для $\gamma_i=0$ обобщенный сдвиг ${}^{\gamma_i}T^{y_i}_{x_i}$ имеет вид

$${}^0T^{y_i}_{x_i}=\frac{f(x+y)-f(x-y)}{2}.$$

Пусть функция $K_\alpha(x)$ — это модифицированная функция Бесселя второго рода (см. [16, 22]). Используя (4), определим $(I-\Delta_\gamma)^{-\alpha/2}$ при $\alpha>0$ соотношением

$$(\mathbf{G}^\alpha_\gamma\varphi)(x)=(G^\gamma_\alpha(x)*\varphi(x))_\gamma=\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}G^\gamma_\alpha(y)({}^\gamma\mathbf{T}^y_x\varphi(x))y^\gamma dy, \tag{6}$$

где

$$G^\gamma_\alpha(x)=\frac{2^{\frac{n-|\gamma|-\alpha}{2}+1}}{|x|^{\frac{n+|\gamma|-\alpha}{2}}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\prod\limits_{i=1}^n\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}K_{\frac{n+|\gamma|-\alpha}{2}}(|x|) \tag{7}$$

есть обобщенное ядро типа Бесселя. Оператор (6) будем называть *обобщенным потенциалом Бесселя*. Его также можем записать

$$(\mathbf{G}^\alpha_\gamma\varphi)(x)=\frac{2^{\frac{n-|\gamma|-\alpha}{2}+1}}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\prod\limits_{i=1}^n\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}|y|^{\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}}K_{\frac{n+|\gamma|-\alpha}{2}}(|y|)({}^\gamma\mathbf{T}^y_x\varphi(x))y^\gamma dy. \tag{8}$$

Обращение оператора (8) построено в [13]. Представление интеграла (8) в простом виде при помощи ядра Гаусса – Вейерштрасса было получено в [2]. Нормы на основе весовых интегралов Дирихле в пространстве обобщенных бесселевых потенциалов были введены в работе [3]. Свойства (8) и его приложение к решению уравнения Пуассона были рассмотрены в [15]. Пространство обобщенных потенциалов Бесселя $\mathbf{B}^\alpha_\gamma$ с использованием подхода Стейна – Лизоркина было сконструировано Л. Н. Ляховым и М. В. Половинкиной с использованием преобразования Ханкеля в [10]. В [10] введенные ранее Л. Н. Ляховым в [6, 7] B-гиперсингулярные интегралы и B-потенциалы Рисса были применены для построения нормы в $\mathbf{B}^\alpha_\gamma$.

3. Теорема об ограниченности обобщенного потенциала Бесселя в весовом лебеговом классе функций.

Пусть $L^\gamma_p(\mathbb{R}^n_+)=L^\gamma_p$, $1\leq p<\infty$ — пространство всех измеримых на $\mathbb{R}^n_+$ функций, четных по каждой из переменных x_i, $i=1,...,n$, таких, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}|f(x)|^p x^\gamma dx<\infty,\qquad x^\gamma=\prod_{i=1}^n x_i^{\gamma_i}.$$

Норма в L_p^γ функции f для вещественных чисел $p \geq 1$ определяется равенством

$$||f||_{L_p^\gamma(\mathbb{R}_+^n)} = ||f||_{p,\gamma} = \left(\int\limits_{\mathbb{R}_+^n} |f(x)|^p x^\gamma dx \right)^{1/p}.$$

Известно (см. [4]), что L_p^γ — банахово пространство.

Для обобщенной свертки (4) известно неравенство Юнга. Пусть $p, q, r \in [1, \infty]$ и

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}. \tag{9}$$

Обобщенная свертка $(f * g)_\gamma$ ограничена почти всюду при $f \in L_p^\gamma$, $g \in L_q^\gamma$. Кроме того, справедливо неравенство (неравенство Юнга)

$$||(f * g)_\gamma||_{r,\gamma} \leq ||f||_{p,\gamma}||g||_{q,\gamma}. \tag{10}$$

Если $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, то

$$||(f * g)_\gamma||_{\infty,\gamma} \leq ||f||_{p,\gamma}|||g||_{q,\gamma}. \tag{11}$$

Пусть $\Omega^+ \subset \overline{\mathbb{R}_+^n}$ — указанная выше частично замкнутая область и пусть $\text{mes}_\gamma(\Omega^+)$ — *весовая мера* множества Ω^+ вида

$$\text{mes}_\gamma(\Omega) = \int\limits_\Omega x^\gamma dx.$$

Для любой измеримой функции $f(x)$, определенной на $\mathbb{R}_n^+$, введем обозначение

$$\mu_\gamma(f, t) = \text{mes}_\gamma\{x \in \mathbb{R}_n^+ : |f(x)| > t\} = \int\limits_{\{x:\, |f(x)|>t\}^+} x^\gamma dx\,.$$

Функцию $\mu_\gamma = \mu_\gamma(f, t)$ будем называть *весовой функцией распределения* $|f(x)|$ (см. [9], с. 51). Очевидно, что это убывающая функция.

Пусть $\varphi \in L_1^\gamma(\mathbb{R}_+^n)$. Весовая функция распределения

$$\mu_\gamma(\mathbf{G}_\gamma^\alpha \varphi, t) = \text{mes}_\gamma\{x \in \mathbb{R}_+^n : |(\mathbf{G}_\gamma^\alpha \varphi)(x)| > t\}$$

характеризует поведение обобщенного потенциала Бесселя.

Обозначим через $sL_p^\gamma(\mathbb{R}_n^+) = sL_p^\gamma$ совокупность всех функций, четных по каждой из переменных $x_1, ..., x_n$, для которых конечна норма

$$||f||_{SL_p^\gamma(\mathbb{R}_n^+)} = \sup_{0<t<\infty} t(\mu_\gamma(f, t))^{1/p}, \qquad 1 \leq p < \infty.$$

Оператор A, действующий из одного функционального пространства в другое, называется *квазилинейным* (см. [1], стр. 41), если область его определения вместе с каждыми двумя функциями f_1, f_2 содержит и их сумму $f_1 + f_2$ и выполнено неравенство

$$|A(f_1 + f_2)| \leq \kappa(|Af_1| + |Af_2|),$$

где κ — постоянная, не зависящая от f_1 и f_2. Если $\kappa = 1$, то оператор A называется *сублинейным.*

Квазилинейный оператор A имеет *сильный тип* $(p, q)_\gamma$, если он определен на $L_p^\gamma(\mathbb{R}_n^+)$, имеет значения из $L_q^\gamma(\mathbb{R}_+^n)$ и выполняется неравенство

$$||Af||_{q,\gamma} \leq K||f||_{p,\gamma}, \quad \forall f \in L_p^\gamma \tag{12}$$

с постоянной K, не зависящей от f.

Если вместо (12) выполняется более слабое неравенство

$$||Af||_{SL_q^\gamma(\mathbb{R}_+^n)} \leq K||f||_{p,\gamma}, \quad \forall f \in L_p^\gamma(\mathbb{R}_+^n),$$

то оператор A будем называть оператором *слабого типа* $(p, q)_\gamma$. Наименьшее значение из множества таких K назовем *слабой* $(p, q)_\gamma$*-нормой* оператора A.

Теорема 2.1.

(1) Для всех $\alpha > 0$ оператор $\mathbf{G}_\gamma^\alpha$ отображает $L_p^\gamma(\mathbb{R}_+^n)$ в себя с нормой $|| \cdot ||_{1,\gamma}$.

(2) *Для всякой функции* $\varphi \in L_p^\gamma(\mathbb{R}_+^n)$, $1 < p < q < \infty$, *где* $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n+|\gamma|}$, $0 < \alpha < n + |\gamma|$ *существует константа* $C = C(n, \gamma, \alpha, p) < \infty$, *такая, что*

$$||\mathbf{G}_\gamma^\alpha \varphi||_{q,\gamma} \leq C||\varphi||_{p,\gamma}.$$

(3) *Если* $\varphi \in L_1^\gamma(\mathbb{R}_+^n)$, *то*

$$\mu_\gamma(\mathbf{G}_\gamma^\alpha \varphi, \beta) \leq A_{n,\gamma,\alpha} \left(\frac{||\varphi||_{1,\gamma}}{\beta} \right)^q, \tag{13}$$

для всех $\beta > 0$. *Другими словами, отображение* $\varphi \longrightarrow \mathbf{G}_\gamma^\alpha \varphi$ *имеет слабый* $(1, q)_\gamma$ *тип при* $\frac{1}{q} = 1 - \frac{\alpha}{n+|\gamma|}$.

Доказательство.

(1) Применяя неравенство (10), получим

$$||\mathbf{G}_\gamma^\alpha \varphi||_{r,\gamma} = ||(G_\alpha^\gamma(x) * \varphi(x))_\gamma||_{r,\gamma} \leq ||G_\alpha^\gamma(x)||_{1,\gamma} \cdot ||\varphi(x)||_{r,\gamma}. \tag{14}$$

Имеем

$$||G_\alpha^\gamma(x)||_{1,\gamma} = \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} |G_\alpha^\gamma(x)| x^\gamma dx = \frac{2^{\frac{n-|\gamma|-\alpha}{2}+1}}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) \prod\limits_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)} \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} |x|^{\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}} K_{\frac{n+|\gamma|-\alpha}{2}}(|x|) x^\gamma dx = \{x = r\theta\} =$$

$$= \frac{2^{\frac{n-|\gamma|-\alpha}{2}+1}}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) \prod\limits_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)} \int\limits_0^\infty r^{\frac{\alpha+n+|\gamma|}{2}-1} K_{\frac{n+|\gamma|-\alpha}{2}}(r) dr \int\limits_{S_1^+(n)} \theta^\gamma dS.$$

Справедлива следующая формула (см. [11], формула 2.174)

$$|S_1^+(n)|_\gamma = \int\limits_{S_1^+(n)} x^\gamma dS = \frac{\prod\limits_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{2^{n-1}\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)}, \tag{15}$$

следовательно,

$$||G_\alpha^\gamma(x)||_{1,\gamma} = \frac{\prod\limits_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{2^{n-1}\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)} \frac{2^{\frac{n-|\gamma|-\alpha}{2}+1}}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) \prod\limits_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)} \int\limits_0^\infty r^{\frac{\alpha+n+|\gamma|}{2}-1} K_{\frac{n+|\gamma|-\alpha}{2}}(r) dr.$$

Применяя формулу 2.16.2.2 из [19], получим

$$||G_\alpha^\gamma(x)||_{1,\gamma} = \frac{2^{2-\frac{n+|\gamma|+\alpha}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \int\limits_0^\infty r^{\frac{\alpha+n+|\gamma|}{2}-1} K_{\frac{n+|\gamma|-\alpha}{2}}(r) dr = 1.$$

Тогда из последнего равенства и (14) получаем утверждение (1).

(2) Пусть $\varphi \in L_p^\gamma(\mathbb{R}_+^n)$, $1 < p < q < \infty$, где $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n+|\gamma|}$, $0 < \alpha < n + |\gamma|$. В частном случае $0 < \alpha < \frac{n+|\gamma|}{p} \leq n + |\gamma|$ из (7), из поведения модифицированной функции Бесселя второго рода при малых значениях аргумента $0 < |x| \ll \sqrt{\frac{n+|\gamma|-\alpha}{2} + 1}$ вида (см. [22])

$$K_{\frac{n+|\gamma|-\alpha}{2}}(|x|) \sim \begin{cases} \frac{\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|-\alpha}{2}\right)}{2^{1-\frac{n+|\gamma|-\alpha}{2}}} |x|^{\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}}, & \text{при } 0 < \alpha < n + |\gamma|; \\ -\ln\left(\frac{|x|}{2}\right) - \vartheta, & \text{при } \alpha = n + |\gamma|; \\ \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}\right)}{2^{1-\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}}} |x|^{\frac{n+|\gamma|-\alpha}{2}}, & \text{при } n + |\gamma| < \alpha \end{cases}$$

и из поведения модифицированной функции Бесселя второго рода при больших значениях аргумента $|x| \longrightarrow +\infty$ вида (см. [22])

$$K_{\frac{n+|\gamma|-\alpha}{2}}(|x|) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2|x|}} e^{-|x|},$$

получим, что ядро $G^{\gamma}_{\alpha}(x)$ оператора $\mathbf{G}^{\alpha}_{\gamma}$ удовлетворяет условию

$$G^{\gamma}_{\alpha}(x) \sim C_1 \begin{cases} |x|^{\alpha-n-|\gamma|}, & \text{при } |x| \leq 2; \\ e^{-\frac{|x|}{2}}, & \text{при } |x| \geq 2. \end{cases}$$

Тогда запишем

$$(\mathbf{G}^{\alpha}_{\gamma}\varphi)(x) = \int\limits_{\{y\in\mathbb{R}^n_+,|y|\leq 2\}} G^{\gamma}_{\alpha}(y)(\,^{\gamma}\mathbf{T}^y_x\varphi(x))y^{\gamma}dy + \int\limits_{\{y\in\mathbb{R}^n_+,|y|>2\}} G^{\gamma}_{\alpha}(y)(\,^{\gamma}\mathbf{T}^y_x\varphi(x))y^{\gamma}dy \leq$$

$$\leq C_1\left(\int\limits_{\{y\in\mathbb{R}^n_+,|y|\leq 2\}} |y|^{\alpha-n-|\gamma|}|\,^{\gamma}\mathbf{T}^y_x\varphi(x)|y^{\gamma}dy + \int\limits_{\{y\in\mathbb{R}^n_+,|y|>2\}} e^{-\frac{|y|}{2}}|\,^{\gamma}\mathbf{T}^y_x\varphi(x)|y^{\gamma}dy\right) \leq$$

$$\leq C_1\left(|(U^{\alpha}_{\gamma}\varphi)(x)| + \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} e^{-\frac{|y|}{2}}|\,^{\gamma}\mathbf{T}^y_x\varphi(x)|y^{\gamma}dy\right), \tag{16}$$

где $(U^{\alpha}_{\gamma}\varphi)(x)$ — B-потенциал Рисса, для которого справедливо утверждение из [6]. А именно, при $0<\alpha<\frac{n+|\gamma|}{p}$ и $\varphi \in L^{\gamma}_p$ имеем $||U^{\alpha}_{\gamma}\varphi||_{q,\gamma} \leq ||\varphi||_{p,\gamma}$, где $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n+|\gamma|}$. Для второго интеграла по неравенству (10) и в силу неравенства для обобщенного сдвига из [5], получим

$$\left\|\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} e^{-\frac{|y|}{2}}|(\,^{\gamma}\mathbf{T}^y_x\varphi(x))|y^{\gamma}dy\right\|_{q,\gamma} \leq ||\,^{\gamma}\mathbf{T}^y_x\varphi(x)||_{p,\gamma}||e^{-\frac{|x|}{2}}||_{\frac{n+|\gamma|}{n+|\gamma|-\alpha},\gamma} \leq C_2||\varphi||_{p,\gamma}.$$

Таким образом,

$$||\mathbf{G}^{\alpha}_{\gamma}\varphi||_{q,\gamma} \leq C||\varphi||_{p,\gamma}.$$

(3) Возьмем $0 < \delta < 1$. Рассмотрим операторы

$$(\mathcal{U}^{\alpha}_{+,\gamma,\delta}\varphi)(x) = \int\limits_{\{y\in\mathbb{R}^n_+,|y|\leq\delta\}} |y|^{\alpha-n-|\gamma|}(\,^{\gamma}\mathbf{T}^y_x\varphi)(y)\,y^{\gamma}dy,$$

$$(\mathcal{U}^{\alpha}_{-,\gamma,\delta}\varphi)(x) = \int\limits_{\{y\in\mathbb{R}^n_+,|y|>\delta\}} |y|^{\alpha-n-|\gamma|}(\,^{\gamma}\mathbf{T}^y_x\varphi)(y)\,y^{\gamma}dy.$$

Тогда для B-потенциала Рисса справедливо

$$(U^{\alpha}_{\gamma}\varphi)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} |y|^{\alpha-n-|\gamma|}(\,^{\gamma}\mathbf{T}^y_x\varphi)(y)\,y^{\gamma}dy = (\mathcal{U}^{\alpha}_{+,\gamma,\delta}\varphi)(x) + (\mathcal{U}^{\alpha}_{-,\gamma,\delta}\varphi)(x). \tag{17}$$

Получим оценку для

$$\sup_{0<\beta<\infty} \beta(\mu_{\gamma}((U^{\alpha}_{\gamma}\varphi)(x),\beta))^{1/q} =$$

$$= \sup_{0<\beta<\infty} \beta\left(\mathrm{mes}_{\gamma}\{x \in \mathbb{R}^n_+ : |(U^{\alpha}_{\gamma}\varphi)(x)| > \beta\}\right).$$

Учитывая (17), достаточно оценить

$$\mathrm{mes}_{\gamma}\{x \in \mathbb{R}^n_+ : |(\mathcal{U}^{\alpha}_{+,\gamma,\delta}\varphi)(x)| > \beta\},$$

$$\mathrm{mes}_{\gamma}\{x \in \mathbb{R}^n_+ : |(\mathcal{U}^{\alpha}_{-,\gamma,\delta}\varphi)(x)| > \beta\}$$

и применить неравенство

$$\mathrm{mes}_{\gamma}\{x \in \mathbb{R}^n_+ : |A+B| > \beta\} \leq \mathrm{mes}_{\gamma}\{x \in \mathbb{R}^n_+ : |A| > \beta\} + \mathrm{mes}_{\gamma}\{x \in \mathbb{R}^n_+ : |B| > \beta\}.$$

Для оценки обобщенной свертки будем использовать неравенство Юнга (10).

В интеграле $(\mathcal{U}^{\alpha}_{+,\gamma,\delta}\varphi)(x)$ перейдем к координатам

$$\begin{aligned} \widetilde{y}_1 &= y_1 \cos\varphi_1, & \widetilde{y}_2 &= y_1 \sin\varphi_1, \\ \widetilde{y}_3 &= y_2 \cos\varphi_2, & \widetilde{y}_4 &= y_2 \sin\varphi_2, \ldots, \\ \widetilde{y}_{2n-1} &= y_n \cos\varphi_n, & \widetilde{y}_{2n} &= y_n \sin\varphi_n, \end{aligned} \tag{18}$$

получим

$$(\mathcal{U}^{\alpha}_{+,\gamma,\delta}\varphi)(x) = \int\limits_{\{y\in\mathbb{R}^n_+, |y|\le\delta\}} |y|^{\alpha-n-|\gamma|} ({}^{\gamma}\mathbf{T}^y_x\varphi)(y)\, y^{\gamma} dy =$$

$$= \int\limits_{\{\widetilde{y}\in\mathbb{R}^{2n}_+, |\widetilde{y}|\le\delta\}} |\widetilde{y}|^{\alpha-n-|\gamma|}\ \varphi\left(\sqrt{(x_1-\widetilde{y}_1)^2+\widetilde{y}_2^2}, ..., \sqrt{(x_n-\widetilde{y}_{2n-1})^2+\widetilde{y}_{2n}^2}\right) \prod_{i=1}^n y_{2i}^{\gamma_i-1} d\widetilde{y}.$$

Произведем замену $x_1-\widetilde{y}_1 = z_1$,...,$x_n-\widetilde{y}_{2n-1} = z_n$, будем иметь

$$(\mathcal{U}^{\alpha}_{+,\gamma,\delta}\varphi)(x) =$$

$$= \int\limits_{\{y_{2i}>0, \sqrt{(x_1-z_1)^2+\widetilde{y}_2^2+...+(x_1-z_1)^2+\widetilde{y}_{2n}^2}\le\delta\}} \left((x_1-z_1)^2+\widetilde{y}_2^2+...+(x_1-z_1)^2+\widetilde{y}_{2n}^2\right)^{\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}} \times$$

$$\times\varphi\left(\sqrt{z_1^2+\widetilde{y}_2^2}, ..., \sqrt{z_n^2+\widetilde{y}_{2n}^2}\right) \prod_{i=1}^n y_{2i}^{\gamma_i-1} d\widetilde{y}'' dz.$$

Пусть $B^+_n(x,r) = \{x \in \mathbb{R}^n_+ : \sqrt{(x_1-z_1)^2+\widetilde{y}_2^2+...+(x_1-z_1)^2+\widetilde{y}_{2n}^2} \le r\}$, $E^+_j = B^+_n\left(x, \frac{\delta}{2^j}\right) \setminus B^+_n\left(x, \frac{\delta}{2^{j+1}}\right)$, $j = 0, 1, 2, \ldots$. Тогда

$$|(\mathcal{U}^{\alpha}_{+,\gamma,\delta}\varphi)(x)| = \left|\sum_{j=0}^{\infty}\int\limits_{E^+_j} \left((x_1-z_1)^2+\widetilde{y}_2^2+...+(x_1-z_1)^2+\widetilde{y}_{2n}^2\right)^{\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}} \times\right.$$

$$\left.\times\varphi\left(\sqrt{z_1^2+\widetilde{y}_2^2}, ..., \sqrt{z_n^2+\widetilde{y}_{2n}^2}\right) \prod_{i=1}^n y_{2i}^{\gamma_i-1} d\widetilde{y}'' dz\right| \le$$

$$\le \sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{\delta}{2^{j+1}}\right)^{\alpha-n-|\gamma|} \int\limits_{E^+_j} \left|\varphi\left(\sqrt{z_1^2+\widetilde{y}_2^2}, ..., \sqrt{z_n^2+\widetilde{y}_{2n}^2}\right)\right| \prod_{i=1}^n y_{2i}^{\gamma_i-1} d\widetilde{y}'' dz.$$

Возвращаясь к переменным $y_1, ..., y_n$ по формулам $z_1 = x_1-\widetilde{y}_1$,...,$z_n = x_n-\widetilde{y}_{2n-1}$ и (18), получим

$$|(\mathcal{U}^{\alpha}_{+,\gamma,\delta}\varphi)(x)| \le \sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{\delta}{2^{j+1}}\right)^{\alpha-n-|\gamma|} \int\limits_{B^+_n\left(0,\frac{\delta}{2^j}\right)} |({}^{\gamma}\mathbf{T}^y_x\varphi)(y)|\, y^{\gamma} dy \le$$

$$\le |B^+_1(n)|\delta^{\alpha}2^{n+|\gamma|-\alpha}\mathbf{M}^{\gamma}\varphi)(x)\sum_{j=0}^{\infty}2^{-\alpha j} = \frac{\delta^{\alpha}2^{n+|\gamma|}}{|2^{\alpha}-1|}|B^+_1(n)|(\mathbf{M}^{\gamma}\varphi)(x) = C(n,\gamma,\alpha)\delta^{\alpha}(\mathbf{M}^{\gamma}\varphi)(x),$$

где (см. [11])

$$|B^+_1(n)| = \int\limits_{B^+_1(n)} x^{\gamma} dx = \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma_1+1}{2}\right)...\Gamma\left(\frac{\gamma_n+1}{2}\right)}{2^n\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}+1\right)},$$

$C(n,\gamma,\alpha) = \frac{2^{n+|\gamma|}}{|2^{\alpha}-1|}|B^+_1(n)|$, а $(\mathbf{M}^{\gamma}\varphi)(x)$ — весовая максимальная функция (см. [14]).

Применяя неравенство Гельдера, получим

$$|(\mathcal{U}^{\alpha}_{-,\gamma,\delta}\varphi)(x)| \le H(n,\gamma,\alpha,p)\delta^{\alpha-\frac{n+|\gamma|}{p}} \cdot ||\varphi||_{p,\gamma},$$

где $\frac{1}{p} > \frac{\alpha}{n+|\gamma|}$, $H(n,\gamma,\alpha,p)$ — некоторая постоянная. При $\alpha < n+|\gamma|$ можем записать, что

$$|(\mathcal{U}^{\alpha}_{-,\gamma,\delta}\varphi)(x)| \le H(n,\gamma,\alpha,1)\delta^{\alpha-n-|\gamma|} \cdot ||\varphi||_{1,\gamma}.$$

Возьмем $\delta = \left(\frac{H(n,\gamma,\alpha,1)||\varphi||_{1,\gamma}}{\beta}\right)^{\frac{1}{n+|\gamma|-\alpha}}$, тогда $|(\mathcal{U}^{\alpha}_{-,\gamma,\delta}\varphi)(x)| \leq \beta$ и

$$\mathrm{mes}_\gamma\{x \in \mathbb{R}^n_+ : |(\mathcal{U}^{\alpha}_{-,\gamma,\delta}\varphi)(x)| > \beta\} = 0.$$

Следовательно,

$$\mathrm{mes}_\gamma\{x \in \mathbb{R}^n_+ : |(U^{\alpha}_{\gamma}\varphi)(x)| > \beta\} \leq \mathrm{mes}_\gamma\{x \in \mathbb{R}^n_+ : |(\mathcal{U}^{\alpha}_{+,\gamma,\delta}\varphi)(x)| > \beta\} \leq$$

$$\leq \mathrm{mes}_\gamma\{x \in \mathbb{R}^n_+ : |C(n,\gamma,\alpha)\delta^\alpha(\mathbf{M}^\gamma\varphi)(x)| > \beta\} \leq \frac{C(n,\gamma,\alpha)}{\beta}\delta^\alpha||\varphi||_{1,\gamma} =$$

$$= \frac{C(n,\gamma,\alpha)}{\beta}\left(\frac{H(n,\gamma,\alpha,1)||\varphi||_{1,\gamma}}{\beta}\right)^{\frac{\alpha}{n+|\gamma|-\alpha}}||\varphi||_{1,\gamma} = C\left(\frac{||\varphi||_{1,\gamma}}{\beta}\right)^{\frac{n+|\gamma|}{n+|\gamma|-\alpha}} = C\left(\frac{||\varphi||_{1,\gamma}}{\beta}\right)^{q}.$$

Здесь $C_{n,\gamma,\alpha} = C(n,\gamma,\alpha)\cdot H(n,\gamma,\alpha,1)^{\frac{\alpha}{n+|\gamma|-\alpha}}$. Отсюда следует, что отображение $\varphi \to U^{\alpha}_{\gamma}\varphi$ имеет слабый $(1,q)_\gamma$ тип при $\frac{1}{q} = 1 - \frac{\alpha}{n+|\gamma|}$. Из этого и из (16) получаем (13). Доказательство закончено.

4. Заключение. В данной работе мы изучили действие обобщенного потенциала Бесселя $\mathbf{G}^{\alpha}_{\gamma}$ в классе L^{γ}_{p}. Наши результаты включают утверждение о том, что для всех $\alpha > 0$ обобщенный потенциал Бесселя $\mathbf{G}^{\alpha}_{\gamma}$ отображает $L^{\gamma}_{p}(\mathbb{R}^n_+)$ в себя с нормой $||\cdot||_{1,\gamma}$ и справедлива оценка $||\mathbf{G}^{\alpha}_{\gamma}\varphi||_{q,\gamma} \leq C||\varphi||_{p,\gamma}$, где $1 < p < q < \infty$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n+|\gamma|}$, $0 < \alpha < n + |\gamma|$. Кроме того показано, что если $\varphi \in L^{\gamma}_{1}(\mathbb{R}^n_+)$, то отображение $\varphi \to \mathbf{G}^{\alpha}_{\gamma}\varphi$ имеет слабый $(1,q)_\gamma$ тип при $\frac{1}{q} = 1 - \frac{\alpha}{n+|\gamma|}$. Эти результаты являются распространением теории Харди – Литтлвуда – Соболева о дробном интегрировании на случай обобщенного потенциала Бесселя.

Список литературы

1. Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М. 1975. Интегральные представления функций и теоремы вложения. М., Наука, 482.

2. Джабраилов А. Л., Шишкина Э. Л. 2022. Связь обобщенных потенциалов Бесселя и решения сингулярного уравнения теплопроводности. Прикладная математика & Физика, 54(2): 89–97.

3. Джабраилов А. Л., Шишкина Э. Л. 2022. К теории пространств обобщенных потенциалов Бесселя. Владикавказский математический журнал, 24(3): 62–77.

4. Киприянов И. А. 1997. Сингулярные эллиптические краевые задачи. М., Наука-Физматлит, 204.

5. Левитан Б. М. 1951. Разложения по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье. М., УМН, 6:2 (42): 102–143.

6. Ляхов Л. Н. 1991. Обращение B-потенциалов Рисса. Докл. АН СССР, 321(3): 466–469.

7. Ляхов Л. Н. 1990. Об одном классе гиперсингулярных интегралов. Докл. АН СССР. 315(2): 291–296.

8. Ляхов Л. Н. 1994. Пространства B-потенциалов Рисса. Докл. РАН, 334(3): 278–280.

9. Ляхов Л. Н. 2007. B-гиперсингулярные интегралы и их приложения к описанию пространств Киприянова дробной B-гладкости и интегральным уравнениям с B-потенциальными ядрами. Липецк: Издательство ЛГПУ, 234.

10. Ляхов Л. Н., Половинкина М. В. 2005. Пространство весовых потенциалов Бесселя. Дифференциальные уравнения и динамические системы, Сборник статей, Труды МИАН. – М.: Наука, МАИК «Наука/Интерпериодика», 250: 192–197.

11. Ситник С. М., Шишкина Э. Л. 2019. Метод операторов преобразования для дифференциальных уравнений с операторами Бесселя. М., Физматлит, 224.

12. Aronszajn N., Smith K. T. 1961. Theory of Bessel potentials, I. Ibid. 11: 365–475.

13. Dzhabrailov A., Luchko Y., Shishkina E. 2021. Two Forms of An Inverse Operator to the Generalized Bessel Potential. Axioms, 10(3): 232.

14. Ekincioglu I., Guliyev V. S., Shishkina E. L. 2023. Fractional weighted spherical mean and maximal inequality for the weighted spherical mean and its application to singular PDE. Math. Sci. J., 269(3): 1–21.

15. Ekincioglu I., Shishkina E. L., Keskin C. 2021. Generalized Bessel potential and its application to non-homogeneous singular screened Poisson equation. Integral Transforms and Special Functions, 32(12): 932–947.

16. Erdelyi A., Magnus W., Oberhettinger F., Tricomi F. G. 1953. Higher Transcendental Functions. Vol. 2. New York: McGraw-Hill Book Co, 308.

17. Guliev V. S., Safarov Z. V. 2001. $B_{k,n}$-Bessel potentials and certain imbedding theorems in $B_{k,n}$-Sobolev – Liouville spaces. Proc. Inst. Math. Mech. Natl. Acad. Sci. Azerb., 15: 68–80.

18. Guliyev V. S., Serbetci A., AkbulutA., Mammadov Y. Y. 2011. Nikol'skii–Besov and Lizorkin–Triebel spaces constructed on the base of the multidimensional Fourier–Bessel transform. Eurasian Math. J., 2(3): 42–66.

19. Prudnikov A. P., Brychkov Yu. A., Marichev O. I. 1992. Integrals and Series. Vol. 2, Special Functions. New York (NY): Gordon & Breach Sci. Publ., 756.

20. Rubin B. 1996. Fractional Integrals and Potentials. Essex: Addison-Wesley, 424.

21. Stein E. M. 1970. Singular integrals and differentiability properties of functions. Princeton: Princeton univ. Press, N. J., 304.

22. Watson G. N. 1922. A Treatise on the Theory of Bessel Functions. Cambridge: University Press, 804.

References

1. Besov O. V., Ilyin V. P., Nikolsky S. M. 1975. Integral representations of functions and embedding theorems. M.: Nauka, 482.

2. Dzhabrailov A. L., Shishkina E. L. 2022. Connection between generalized Bessel potentials and solutions to the singular heat equation. Applied Mathematics & Physics. 54(2): 89–97.

3. Dzhabrailov A. L., Shishkina E. L. 2022. On the theory of spaces of generalized Bessel potentials. Vladikavkaz mathematical journal. 24(3): 62–77.

4. Kipriyanov I. A. 1997. Singular Elliptic Boundary Value Problems. M.: Nauka-Fizmtlit, 1997.

5. Levitan B. M. 1951. Expansion in Fourier series and integrals with Bessel functions. UMN, 6:2(42): 102–143.

6. Lyakhov L. N. 1992. Inversion of Riesz B-potentials. Dokl. Math., 44 (3): 717–720.

7. Lyakhov L. N. 1991. A class of hypersingular integrals. Dokl. Math., 42 (3): 765–769.

8. Lyakhov L. N. 1994. Spaces of Riesz B-potentials. Dokl. Math. 49 (1): 83–87.

9. Lyakhov L. N. 2007. B-hypersingular integrals and their applications to the description of Kipriyanov spaces of fractional B-smoothness and integral equations with B-potential kernels. Publishing house LGPU, Lipetsk, 234.

10. Lyakhov L. N., Polovinkina M. V. 2005. The Space of Weighted Bessel Potentials. Proc. Steklov Inst. Math. 250: 192–197.

11. Sitnik S. M., Shishkina E. L., 2019. Transmutation operators method for differential equations with Bessel operator. Moscow.. Fizmathlit, 224.

12. Aronszajn N., Smith K. T. 1961. Theory of Bessel potentials, I. Ibid. 11: 365–475.

13. Dzhabrailov A., Luchko Y., Shishkina E. 2021. Two Forms of An Inverse Operator to the Generalized Bessel Potential. Axioms, 10(3): 232.

14. Ekincioglu I., Guliyev V.S., Shishkina E. L. 2023. Fractional weighted spherical mean and maximal inequality for the weighted spherical mean and its application to singular PDE. Math. Sci. J., 269(3): 1–21.

15. Ekincioglu I., Shishkina E. L., Keskin C. 2021. Generalized Bessel potential and its application to non-homogeneous singular screened Poisson equation. Integral Transforms and Special Functions, 32(12): 932–947.

16. Erdelyi A., Magnus W., Oberhettinger F., Tricomi F. G. 1953. Higher Transcendental Functions. Vol. 2. New York: McGraw-Hill Book Co, 308.

17. Guliev V. S., Safarov Z. V. 2001. $B_{k,n}$-Bessel potentials and certain imbedding theorems in $B_{k,n}$-Sobolev–Liouville spaces. Proc. Inst. Math. Mech. Natl. Acad. Sci. Azerb., 15: 68–80.

18. Guliyev V. S., Serbetci A., Akbulut A., Mammadov Y. Y. 2011. Nikol'skii–Besov and Lizorkin–Triebel spaces constructed on the base of the multidimensional Fourier–Bessel transform. Eurasian Math. J., 2(3): 42–66.

19. Prudnikov A. P., Brychkov Yu. A., Marichev O. I. 1992. Integrals and Series. Vol. 2, Special Functions. New York (NY): Gordon & Breach Sci. Publ., 756.

20. Rubin B. 1996. Fractional Integrals and Potentials. Essex: Addison-Wesley, 424.

21. Stein E. M. 1970. Singular integrals and differentiability properties of functions. Princeton: Princeton univ. Press, N. J., 304.

22. Watson G. N. 1922. A Treatise on the Theory of Bessel Functions. Cambridge: University Press, 804.

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.
Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 12.11.2023
Поступила после рецензирования 20.02.2023
Принята к публикации 25.02.2023

Received 12.11.2023
Revised 20.02.2023
Accepted 25.02.2023

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Джабраилов Ахмед Лечаевич – старший преподаватель, Чеченский государственный университет им. А. А. Кадырова
ул. А. Шерипова, 32, Грозный, 36402, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Akhmed Dzhabrailov – Senior Lecturer, Kadyrov Chechen State University, Grozny, Russia

Прикладная математика & Физика, 2023, том 55, № 1. С. 49–56.
Applied Mathematics & Physics, 2023, Volume 55, No 1. P. 49–56.

ФИЗИКА. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
PHYSICS. MATHEMATICAL MODELING

УДК 530.182
MSC 37N05, 37N20
краткое сообщение

DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-1-49-56

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ ПОЗИТРОНОВ ВБЛИЗИ НАПРАВЛЕНИЯ [111] КРИСТАЛЛА КРЕМНИЯ

А. Ю. Исупов[1], **В. В. Сыщенко**[2], **А. С. Парахин**[2]

(*Статья представлена членом редакционной коллегии Ю. П. Вирченко*)

[1] Лаборатория физики высоких энергий имени В. И. Векслера и А. М. Балдина
Международная межправительственная организация
Объединенный институт ядерных исследований,
Дубна, 141980, Россия

[2] Белгородский государственный национальный исследовательский университет,
Белгород, 308015, Россия

E-mail: syshch@yandex.ru

Аннотация. Движение быстрой заряженной частицы в кристалле под малым углом к одной из плотно упакованных атомами кристаллографических осей с хорошей точностью описывается как движение в непрерывных потенциалах параллельных атомных цепочек, при котором сохраняется параллельная оси цепочки компонента импульса частицы. При этом финитное движение частицы в поперечной плоскости называется аксиальным каналированием. Известно, что такое движение может быть как регулярным (устойчивым), так и хаотическим (неустойчивым), в зависимости от наличия либо отсутствия второго (наряду с энергией поперечного движения) интеграла движения. В поле уединенной цепочки таким интегралом движения является проекция момента импульса частицы на ось цепочки. В отсутствие аксиальной симметрии потенциала наличие либо отсутствие второго интеграла движения можно определить методом сечений Пуанкаре. В статье исследуется характер движения позитрона, движущегося в режиме аксиального каналирования в направлении [111] кристалла кремния.

Ключевые слова: каналирование, быстрые частицы, высокие энергии, хаос, регулярная динамика, сечение Пуанкаре, кремний

Для цитирования: Исупов А. Ю., Сыщенко В. В., Парахин А. С. 2023. Об устойчивости движения позитронов вблизи направления [111] кристалла кремния. Прикладная математика & Физика, 55(1): 49–56.
DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-1-49-56

Short Message

ON THE STABILITY OF THE POSITRON'S MOTION NEAR ⟨111⟩ DIRECTION OF THE SILICON CRYSTAL

Alexander Isupov[1], **Vladislav Syshchenko**[2], **Alexander Parakhin**[2]

(*Article submitted by a member of the editorial board Yu. P. Virchenko*)

[1] Laboratory of High Energy Physics named after V. I. Veksler and A. M. Baldina
International intergovernmental organization
Joint Institute for Nuclear Research,
Dubna, 141980 Russia

[2] Belgorod National Research University,
Belgorod, 308015, Russia
E-mail: syshch@yandex.ru

Abstract. The fast charged particle's motion in the crystal under small angle to one of the crystallographic axes densely packed with atoms can be described with high accuracy as the motion in the uniform potentials of the parallel atomic strings that conserves the particle's momentum component parallel to the string axis. The finite motion in the transverse plane in this case is called as the axial channeling. This motion can be both regular (stable) and chaotic (unstable), depending on the presence or absence of the second (in addition to the transverse motion energy) integral of motion. The motion in the axially symmetrical field of the single atomic string conserves the particle's angular momentum projection on the string axis, so the problem has two integrals of motion and hence the particle's motion is regular, periodic or quasiperiodic. The presence or absence of the seconf integral of motion in the absence of the potential's axial symmetry can be found using the Poincaré sections method. This paper studies the character of motion of the positron channeling in the [111] direction of the Silicon crystal.

Keywords: Channeling, Fast Particles, High Energy, Chaosy, Regular Dynamics, Poincaré Section, Silicon

For citation: Isupov Alexander, Syshchenko Vladislav, Parakhin Alexander. 2023. On the stability of the positron's motion near [111] direction of the Silicon crystal. Applied Mathematics & Physics, 55(1): 49–56. (in Russian)
DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-1-49-56

1. Введение. Быстрая заряженная частица, движущаяся в кристалле вблизи одной из плотно упакованных атомами кристаллографических осей или плоскостей, может захватываться в образованную этими осями или плоскостями потенциальную яму, совершая финитное движение в плоскости, перпендикулярной соответствующей оси (плоскости) и аномально глубоко проникая в кристалл. Такое явление называется, соответственно, аксиальным или плоскостным каналированием. Оно было предсказано на основе численного моделирования в [16]; последующие теоретические и экспериментальные исследования отражены в многочисленных монографиях и обзорах (см., например, [1, 2, 13, 22]). Движение частицы в режиме аксиального каналирования с хорошей точностью может быть описано как вижение в непрерывном потенциале атомной цепочки, то есть в потенциале, усредненном вдоль оси цепочки [6]. В таком потенциале сохраняется продольная компонента импульса частицы $p_\parallel$, и задача о движении частицы сводится к двумерной задаче о движении в поперечной плоскости. Характер динамики (регулярная либо хаотическая) в этом случае особенно удобно и наглядно исследовать с помощью метода сечений Пуанкаре. Знание характера движения каналированной частицы (регулярное либо хаотическое) важно во многих задачах при выборе приближенных аналитических методов их решения, в частности, при исследовании испускаемого такой частицей излучения [1] и управления пучками частиц с помощью прямых и изогнутых кристаллов [2].

2. Каналирование положительно заряженных частиц в направлении ⟨111⟩ кристалла кремния. Классическое уравнение движения релятивистской частицы можно преобразовать к виду [1, 5]

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{c^2}{E}\left(\mathbf{F} - \frac{1}{c^2}\,\mathbf{v}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{F})\right), \tag{1}$$

где $E = mc^2/\sqrt{1-v^2/c^2}$ — энергия релятивистской частицы, $\mathbf{F}$ — сумма действующих на частицу сил; в дальнейшем мы будм пренебрегать излучением заряженной частицей электромагнитных волн и связанной с этим силой лучистого трения.

При движении частицы под малым углом $\psi \ll 1$ к оси атомной цепочки (так что $|\mathbf{v}_\perp| \ll v_\parallel \approx c$) и сохранении продольной оси цепочки компоненты импульса в непрерывном потенциале цепочки U_s уравнение движения в поперечной плоскости с хорошей точностью можно записать в виде

$$\frac{d\mathbf{v}_\perp}{dt} \approx \frac{c^2}{E_\parallel}\,\mathbf{F} = -\frac{c^2}{E_\parallel}\,\nabla U_s\,. \tag{2}$$

Мы видим, что это уравнение аналогично двумерному уравнению движения нерелятивистской частицы с точностью до замены

$$m \to \frac{E_\parallel}{c^2}\,, \tag{3}$$

где $E_\parallel = \sqrt{m^2c^4 + p_\parallel^2c^2} = \mathrm{const} \approx E$.

Отсюда сразу видно, что при движении частицы в непрерывном потенциале цепочки будет сохраняться величина

$$E_\perp = \frac{E_\parallel}{c^2}\,\frac{v_\perp^2(0)}{2} + U_s(x_i, y_i) \tag{4}$$

(где $v_\perp(0) = v\psi$ — поперечная частицы электрона на входе в кристалл, x_i, y_i — координаты точки входа в кристалл), которую называют энергией поперечного движения [1, 2, 22, 8].

Непрерывный потенциал уединенной атомной цепочки может быть описан простой модификацией потенциала Линдхарда [1]

$$U^{(1)}(x,y) = U_0 \ln\left[1 + \frac{\beta R^2}{x^2+y^2+\alpha R^2}\right], \tag{5}$$

где в случае цепочки ⟨111⟩ кристалла кремния $U_0 = 58.8$ эВ, $\alpha = 0.37$, $\beta = 2.0$, $R = 0.194$ Å (радиус Томаса–Ферми). Такие цепочки образуют в поперечной им плоскости (111) гексагональную центрированную решетку. Для электронов потенциал (5) является притягивающим, поэтому каналирование электрона будет происходить в потенциале одной цепочки, слабо возмущенной потенциалами шести ближайших соседей, то есть поле будет обладать осью симметрии шестого порядка. Иная ситуация возникает при движении в кристалле положительно заряженной частицы, например, позитрона или протона (в дальнейшем, для определенности, мы будем говорить о позитроне). Для них потенциалы отдельных цепочек будут отталкивающими, однако между тремя ближайшими соседними цепочками (чьи оси расположены в вешинах равностороннего треуголькика со стороной $a = a_z/\sqrt{6} \approx 2.217$ Å, где a_z — основной период кристалла кремния, то есть период цепочки $\langle 100 \rangle$) возникает небольшая потенциальная ямка с осью симметрии третьего порядка, в которой возможно финитное в поперечной плоскости движение частицы. Таким образом, потенциальная энергия позитрона в поле трех ближайших атомных цепочек будет описываться формулой

$$U_s^{(+)}(x,y) = U^{(1)}(x, y - a/\sqrt{3}) + U^{(1)}(x + a/2, y + a/2\sqrt{3}) + U^{(1)}(x - a/2, y + a/2\sqrt{3}) - 7.8571 \text{ eV}, \qquad (6)$$

где константа выбрана таким образом, чтобы потенциал в центре треугольника был равен нулю. Глубина центральной ямки (или высота седловой точки потенциала) составляет приблизительно

$$U_0 = 0.3276 \text{ эВ}. \qquad (7)$$

Интегрирование уравнения движения (2) с потенциалом (6) возможно только численно; нами использован для этой цели так называемый алгоритм Верле в скоростной форме (velocity Verlet algorythm) [3].

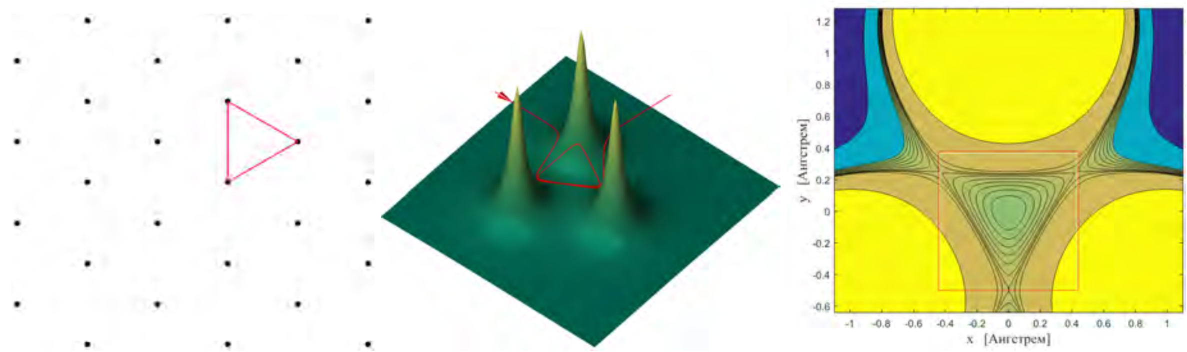

Рис. 1. *Слева:* проекция решетки кристалла типа алмаза на плоскость (111). *В центре:* Потенциал (6) и пример инфинитной траектории, возникающей, когда энергия поперечного движения $E_\perp$ немного превышает величину (7). *Справа:* линии уровня потенциала (6); вблизи начала координат видна потенциальная ямка

Fig. 1. *Left:* Rojection of the dimond-like lattice on the (111) plane. *Center:* The potential (6) and the sample infinite trajectory that arizes while the transverse motion energy $E_\perp$ slightly exceeds the value (7). *Right:* equipotentials of (6); the small potential pit is seen near the origin of coordinates

3. Регулярное и хаотическое движение каналированных позитронов. Движение частицы в заданном внешнем поле может быть как регулярным, так и хаотическим [1, 7, 14]. Оказывается, что характер динамики частицы тесно связан с интегрируемостью уравнения движения в квадратурах, а последнее, в свою очередь, связано с количеством интегралов движения рассматриваемой системы. Уравнение движения инегрируемо, если число интегралов движения совпадает с числом степеней свободы системы. В частности, регулярным оказывается движение частицы в центральном поле. В этом случае, помимо энергии, сохраняющейся величиной является момент импульса частицы относительно центра поля. Таким образом, задача о движении в центральном поле оказывается двумерной задачей с двумя интегралами движения. Как следствие, динамика частицы оказывается регулярной и, если говорить о финитном движении, то оно будет периодическим (в исключительных случаях) или квазипериодическим, когда траектория частицы не замыкается, а всюду плотно покрывает разрешенную для движения область [4].

Аналогичным образом, регулярный характер будет носить движение частицы в непрерывном потенциале уединенной атомной цепочки (5): движение в поперечной плоскости двумерно и обладает двумя интегралами движения: энергией поперечного движения (4) и проекцией момента импульса частицы на ось цепочки.

Иная ситуация имеет место в отсутствие аксиальной симметрии потенциала, например, в потенциале (6), когда сохранение момента импульса не имеет места. В общем случае движение может носить как регулярный, так и хаотический характер. Выяснить наличие либо отсутствие второго (наряду с энергией поперечного движения) интеграла движения можно с помощью метода сечений Пуанкаре [1, 7, 14]. Напомним, в чем он состоит.

Наличие одного интеграла движения — энергии поперечного движения — означает, что фазовая траектория лежит на трёхмерной гиперповерхности

$$\mathrm{const} = E_{\perp} = E_{\perp}(x, p_x, y, p_y)\,.$$

Рассмотрим точки пересечения траектории с осью y (что соответствует точкам пересечения фазовой траектории с плоскостью (y, p_y)), то есть положим $x = 0$. Тогда, если существует второй интеграл движения

$$J = J(x, p_x, y, p_y),$$

то, исключая p_x из уравнений

$$E_{\perp} = E_{\perp}(0, p_x, y, p_y)\,,$$

$$J = J(0, p_x, y, p_y)\,,$$

получаем, что точки пересечения фазовой траектории с секущей плоскостью будут удовлетворять уравнению

$$y = y(p_y; E_{\perp}, J)\,,$$

представляющему собой уравнение некоторой кривой в плоскости (y, p_y). Таким образом, если мы численно интегрируем двумерное уравнение движения (2) при заданной энергии поперечного движения, то, если точки пересечения фазовой траектории с плоскостью (y, p_y) лежат на какой-то линии в этой плоскости (как на рис. 2 (a, b, c)), то, значит, второй интеграл движения существует. В противном случае все точки будут случайным образом лежать в некоторой области (рис. 2 (d)).

На рис. 2 (a, b, c) представлены типичные регулярные траектории финитного поперечного движения позитрона в потенциале (6) и соответствующие им сечения Пуанкаре, а на рис. 2 (d) — хаотическая траектория. Траектории найдены для позитрона с энергией $E_{\parallel} = 1$ ГэВ, причем энергия поперечного движения выбрана равной $E_{\perp} = 0.1839$ эВ. Такой выбор $E_{\perp}$ обусловлен тем обстоятельством, что это энергия единственного связанного состояния поперечного движения позитрона с таким значением $E_{\parallel}$ в потенциальной яме (6), возникающим при квантовом описании такого движения. Мы видим, что при данном значении энергии поперечного движения в фазовом пространстве каналирующего позитрона сосуществуют области регулярного и хаотического движения, причем движение оказывается регулярным для подавляющего большинства начальных условий.

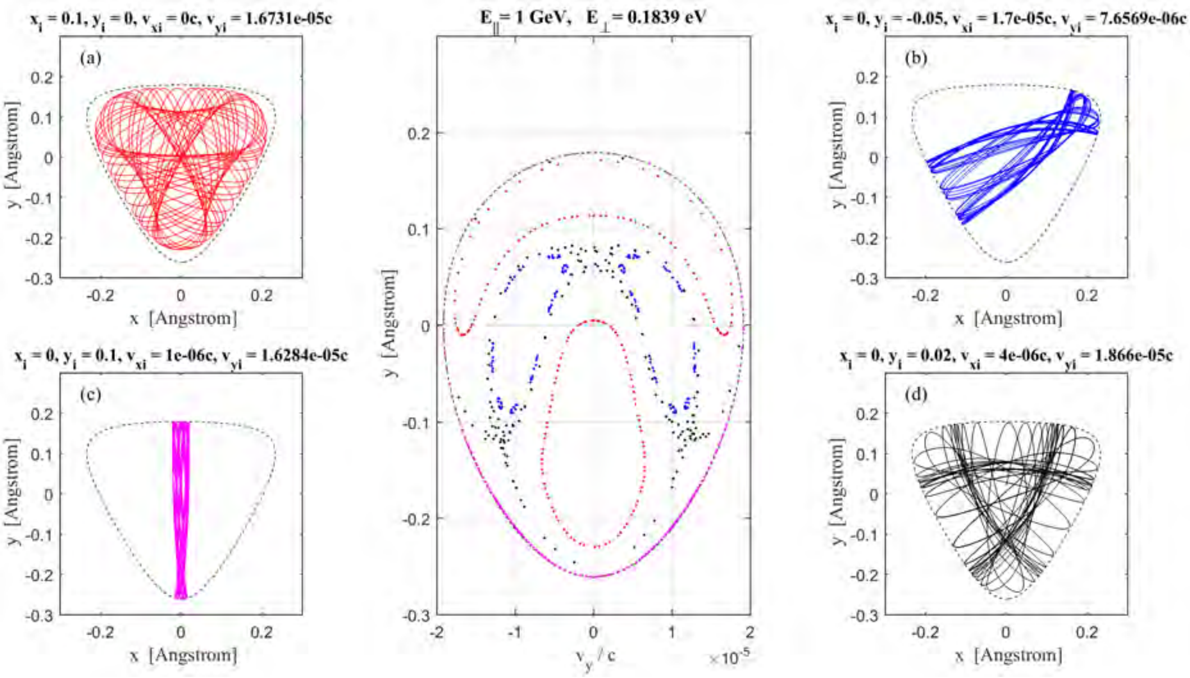

Рис. 2. Примеры траекторий и соответствующие им сечения Пуанкаре для поперечного движения позитрона в потенциале (6). $E_{\parallel} = 1$ ГэВ, $E_{\perp} = 0.1839$ эВ

Fig. 2. Sample trajectories of the positron's motion in the potential (6) and the corresponding Poincaré sections. $E_{\parallel} = 1$ GeV, $E_{\perp} = 0.1839$ eV

С ростом величины $E_{\parallel}$ количество уровней в потенциальной ямке будет возрастать, как это следует из квазиклассических соображений в квантовой механике, причем в двумерном случае число уровней в яме возрастает пропорционально первой степени $E_{\parallel}$ (см., например, [1]). Поэтому более интересная ситуация возникает уже в случае каналирования позитрона с энергией $E_{\parallel} = 1.5$ ГэВ. В этом случае решение уравнения Шрёдингера с потенциалом (6) предсказывает существование двух уровней энергии финитного поперечного движения: $E_{\perp} = 0.1503$ эВ и $E_{\perp} = 0.2928$ эВ. Результаты построения сечений Пуанкаре, представленные на рис. 3, показывают, что на нижнем уровне энергии классическая динамика системы будет полностью регулярной, а на верхнем — хаотической для подавляющей части начальных условий.

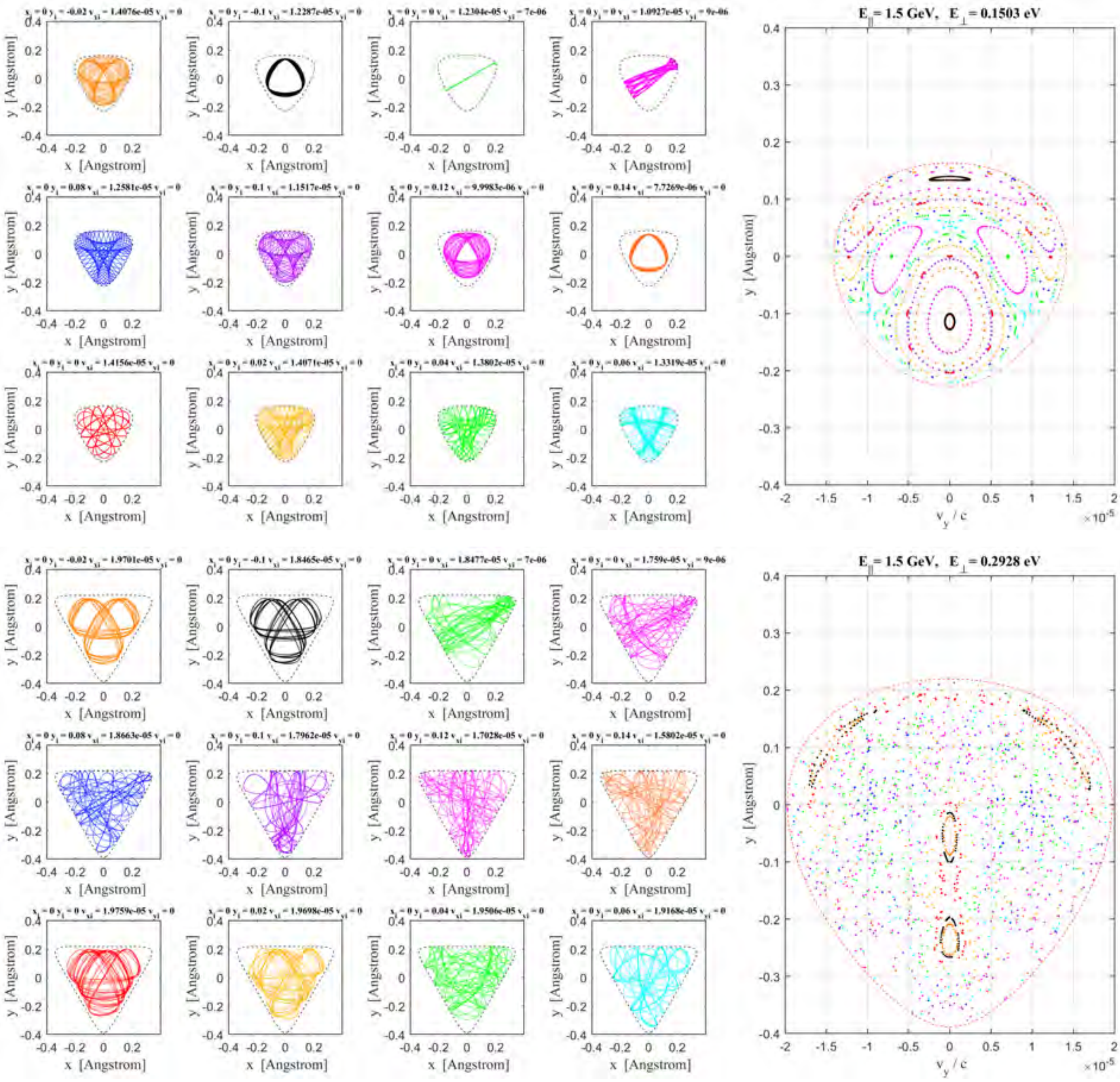

Рис. 3. Примеры траекторий и соответствующие им сечения Пуанкаре для поперечного движения позитрона в потенциале (6). $E_{\parallel} = 1.5$ ГэВ, $E_{\perp} = 0.1503$ эВ (верхняя панель) и $E_{\perp} = 0.2928$ эВ (нижняя панель)

Fig. 3. Sample trajectories of the positron's motion in the potential (6) and the corresponding Poincaré sections. $E_{\parallel} = 1.5$ GeV, $E_{\perp} = 0.1503$ eV (upper panel) and $E_{\perp} = 0.2928$ eV (lower panel)

По мере дальнейшего увеличения $E_{\parallel}$ уровни энергии будут все плотнее заполнять всю глубину потенциальной ямы, и мы увидим как случаи полностью регулярного движения вблизи дна ямы, так и случаи полного хаоса вблизи верха ямы и случаи сосуществования в фазовом пространстве значительных областей регулярной и хаотической динамики.

4. Заключение. В статье в рамках классической механики исследована динамика положительно заряженной частицы в потенциальной яме, образованной непрерывными потенциалами трех соседних атомных цепочек ⟨111⟩ кристалла кремния. Потенциальная яма в этом случае обладает симметрией равностороннего треугольника, подобно потенциалу Хенона – Хейлса [15], рассмотренного в одной из пионерских работ, посвященных проблематике динамического хаоса. И хотя аналогия рассмотренного здесь случая со случаем [15] отмечалась еще в обзоре [2], исследование устойчивости движения положительно заряженной частицы в потенциальной ямке вблизи направления ⟨111⟩ кристалла типа алмаза ранее проведено не было.

Установлено, что вблизи дна потенциальной ямы движение частицы является полностью регулярным. По мере увеличения энергии поперечного движения частицы в ее фазовом пространстве появляется область хаотической динамики. Вблизи верхнего края потенциальной ямы (точнее, вблизи седловой точки потенциала (6)) динамика частицы постепенно становится полностью хаотической.

Эти результаты будут использованы в дальнейшем при исследовании квантового хаоса в данной системе. Проблематика квантового хаоса (см., например, [7, 14]) означает поиск отличий в поведении квантовых систем, чей классический аналог обладает хаотической динамикой, от поведения систем, чей классический аналог обладает регулярной динамикой. Проявления квантового хаоса в аксиальном каналировании электронов в кристалле кремния в направлении $\langle 110 \rangle$ исследовались ранее в работах [10, 12, 17, 18], при каналировании электронов внаправлении $\langle 100 \rangle$ — в работах [9, 19, 20], при каналировании позитронов в направлении $\langle 100 \rangle$ — в работах [20, 11, 21].

Список литературы

1. Ахиезер А. И., Шульга Н. Ф. 1993. Электродинамика высоких энергий в веществе. М., Наука, 344.

2. Ахиезер А. И., Шульга Н. Ф., Трутень В. И., Гриненко А. А., Сыщенко В. В. 1995. Динамика заряженных частиц высоких энергий в прямых и изогнутых кристаллах. УФН, 165 (10): 1165–1192. DOI: 10.3367/UFNr.0165.199510c.1165

3. Гулд Х., Тобочник Я. 1990. Компьютерное моделирование в физике. Часть 1. М., Мир, 349.

4. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. 1988. Теоретическая физика. Т. 1. Механика. М., Наука, 216.

5. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. 1988. Теоретическая физика. Т. 2. Теория поля. М., Наука, 512.

6. Линдхард Й. 1969. Влияние кристаллической решетки на движение быстрых заряженных частиц. УФН, 99: 249–296. DOI: 10.3367/UFNr.0099.196910c.0249

7. Райхл Л. Е. 2008. Переход к хаосу в консервативных классических и квантовых системах. М.-Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 756.

8. Сыщенко В. В., Сыщенко В. Г. 2022. Теория твердого тела для начинающих. М.–Ижевск, Регулярная и хаотическая динамика, 260.

9. Сыщенко В. В., Тарновский А. И., Исупов А. Ю., Соловьев И. И. 2020. Структура областей регулярного движения в фазовом пространстве каналированных электронов. Поверхность. Рентген., синхротр. и нейтрон. исслед., 3: 103–108. DOI: 10.31857/S1028096020030188

10. Сыщенко В. В., Тарновский А. И. 2021. Статистические свойства уровней энергии поперечного движения при каналировании электронов в кристалле кремния. Поверхность. Рентген., синхротр. и нейтрон. исслед., 7: 84–88. DOI: 10.31857/S1028096021070207

11. Сыщенко В. В., Тарновский А. И., Дроник В. И., Исупов А. Ю. 2022. Расщепление уровней энергии поперечного движения позитронов при каналировании в направлении [100] кристалла кремния. Поверхность. Рентген., синхротр. и нейтрон. исслед., 3: 79–88. DOI: 10.31857/S1028096022030207

12. Шульга Н. Ф., Сыщенко В. В., Тарновский А. И., Исупов А. Ю. 2015. Проявления квантового хаоса в аксиальном каналировании электронов. Поверхность. Рентген., синхротр. и нейтрон. исслед., 7: 72–76. DOI: 10.7868/S0207352815070197

13. Gemmel D. S. 1974. Channeling and related effects in the motion of charged particles through crystalsl, Rev. Mod. Phys. 46 (1): 129–227. DOI: 10.1103/RevModPhys.46.129

14. Gutzwiller M.C. 1990. Chaos in Classical and Quantum Mechanics, New York, Springer-Verlag, 432.

15. Hénon M., Heiles C. 1964. The applicability of the third integral of motion: Some numerical experiments. Astronomical Journal, 69: 73. DOI: 10.1086/109234

16. Robinson M. T., Oen O. S. 1963. Computer Studies of the Slowing Down of Energetic Atoms in Crystals. Phys. Rev., 132 (6): 2385–2398. DOI: 0.1103/PhysRev.132.2385

17. Shul'ga N. F., Syshchenko V. V., Tarnovsky A. I., Isupov A. Yu. 2016. Structure of the channeling electrons wave functions under dynamical chaos conditions. Nuclear Instrum. Methods B., 370: 1–9. DOI: doi.org/10.1016/j.nimb.2015.12.040

18. Shul'ga N. F., Syshchenko V. V., Tarnovsky A. I., Isupov A. Yu. 2016. Wave functions of channeling electrons in regular and chaotic cases. Journal of Physics: Conference Series, 732: 012028. DOI: 10.1088/1742-6596/732/1/012028

19. Shul'ga N. F., Syshchenko V. V., Tarnovsky A. I., Solovyev I. I., Isupov A. Yu. 2018. Positrons vs electrons channeling in silicon crystal: energy levels, wave functions and quantum chaos manifestations. Journal of Instrumentation, 13: C01017. DOI: 10.1088/1748-0221/13/01/C01017

20. Shul'ga N. F., Syshchenko V. V., Tarnovsky A. I., Dronik V. I., Isupov A. Yu. 2019. Regular and chaotic motion domains in the channeling electron's phase space and mean level density for its transverse motion energy. Journal of Instrumentation, 14: C12022. DOI: 10.1088/1748-0221/14/12/C12022

21. Syshchenko V. V., Tarnovsky A. I., Dronik V. I. 2022. Channeling in crystals and quantum chaos. Partial differential equations and related topics (PDERT'22): collection of materials of the International Conference. Belgorod, Publishing house "BelSU" NRU "BelSU": 188–190.

22. Uggerhøj U. I. 2005. The interaction of relativistic particles with strong crystalline fields, Rev. Mod. Phys., 77(4): 1131–1171. DOI: 10.1103/RevModPhys.77.1131

References

1. Akhiezer A. I., Shul'ga N. F. 1996. High-Energy Electrodynamics in Matter. Gordon and Breach, 400 (in Russian).

2. Akhiezer A. I., Shul'ga N. F.,. Truten' V. I,. Grinenko A. A, Syshchenko V.V. 1995. Dynamics of high-energy charged particles in straight and bent crystals. Physics-Uspekhi, 38: 1119–1145. DOI: 10.1070/PU1995v038n10ABEH000114 (in Russian).

3. Gould H., Tobochnik J., Christian W. 2006. An Introduction to Computer Simulation Methods: Applications to Physical Systems (third edition). San Francisco, M., Addison Wesley, 796.

4. Landau L. D., Lifshitz E. M. 1969. Mechanics, Vol. 1 of Course of Theoretical Physics. Pergamon Press, Oxford, 165.

5. Landau L. D., Lifshitz E. M. 1971. The Classical Theory of Fields, Vol. 2 of Course of Theoretical Physics. Pergamon Press, Oxford, 374.

6. Lindhard J. 1965. Influence of Crystal Lattice on Motion of Energetic Charged Particles.Kongel. Dan. Vidensk. Selsk., Mat.-Fys. Medd, 34 (14): 1–64.

7. Reichl L. E. 2004. The Transition to Chaos: Conservative Classical Systems and Quantum Manifestations, 2nd ed. Springer, New York, 675.

8. Syshchenko V. V., Syshchenko V. G. 2022. Teoriya tvyordogo tela dlya nachinayushchih [Solid state theory for beginners]. M.–Izhevsk, Regularnaya i haoticheskaya dinamika Publ., 260.

9. Syshchenko V. V., Tarnovsky A. I., Isupov A. Yu., Solovyev I. I. 2020. Structure of Regions of Regular Motion in the Phase Space of Channeled Electrons. Journal of Surface Investigation: X-ray, Synchrotron and Neutron Techniques, 14 (2): 306–311. DOI: 10.1134/S1027451020020354 (in Russian).

10. Syshchenko V. V., Tarnovsky A. I. 2021. Statistical Properties of the Transverse-Motion Energy Levels for Channeling Electrons in a Silicon Crystal under Dynamical Chaos Conditions. Journal of Surface Investigation: X-ray, Synchrotron and Neutron Techniques, 15 (7): 84–88. DOI: 10.1134/S1027451021040200 (in Russian).

11. Shul'ga N. F., Syshchenko V. V., Tarnovsky A. I., Dronik V. I., Isupov A. Yu. 2021. Splitting of the Transverse-Motion Energy Levels of Positrons during Channeling in the [100] Direction of a Silicon Crystal. Journal of Surface Investigation: X-ray, Synchrotron and Neutron Techniques, 15, Suppl. 1: 79–88. DOI: 10.1134/S1027451022020203

12. Shul'ga N. F., Syshchenko V. V., Tarnovsky A. I., Isupov A. Yu. 2015. Quantum Chaos Effects in the Axial Channeling of Electrons. Journal of Surface Investigation: X-ray, Synchrotron and Neutron Techniques, 9 (4): 721–725. DOI: 10.7868/S0207352815070197

13. Gemmel D. S. 1974. Channeling and related effects in the motion of charged particles through crystalsl, Rev. Mod. Phys. 46 (1): 129–227. DOI: 10.1103/RevModPhys.46.129

14. Gutzwiller M. C. 1990. Chaos in Classical and Quantum Mechanics, New York, Springer-Verlag, 432.
15. Hénon M., Heiles C. 1964. The applicability of the third integral of motion: Some numerical experiments. Astronomical Journal, 69: 73. DOI: 10.1086/109234
16. Robinson M. T., Oen O. S. 1963. Computer Studies of the Slowing Down of Energetic Atoms in Crystals. Phys. Rev., 132(6): 2385–2398. DOI: 0.1103/PhysRev.132.2385
17. Shul'ga N. F., Syshchenko V. V., Tarnovsky A. I., Isupov A. Yu. 2016. Structure of the channeling electrons wave functions under dynamical chaos conditions. Nuclear Instrum. Methods B., 370: 1–9. DOI: doi.org/10.1016/j.nimb.2015.12.040
18. Shul'ga N. F., Syshchenko V. V., Tarnovsky A. I., Isupov A. Yu. 2016. Wave functions of channeling electrons in regular and chaotic cases. Journal of Physics: Conference Series, 732: 012028. DOI: 10.1088/1742-6596/732/1/012028
19. Shul'ga N. F., Syshchenko V. V., Tarnovsky A. I., Solovyev I. I., Isupov A. Yu. 2018. Positrons vs electrons channeling in silicon crystal: energy levels, wave functions and quantum chaos manifestations. Journal of Instrumentation, 13: C01017. DOI: 10.1088/1748-0221/13/01/C01017
20. Shul'ga N. F., Syshchenko V. V., Tarnovsky A. I., Dronik V. I., Isupov A. Yu. 2019. Regular and chaotic motion domains in the channeling electron's phase space and mean level density for its transverse motion energy. Journal of Instrumentation, 14: C12022. DOI: 10.1088/1748-0221/14/12/C12022
21. Syshchenko V. V., Tarnovsky A. I., Dronik V. I. 2022. Channeling in crystals and quantum chaos. Partial differential equations and related topics (PDERT'22): collection of materials of the International Conference. Belgorod, Publishing house "BelSU" NRU "BelSU": 188–190.
22. Uggerhøj U. I. 2005. The interaction of relativistic particles with strong crystalline fields, Rev. Mod. Phys., 77(4): 1131–1171. DOI: 10.1103/RevModPhys.77.1131

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.
Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 19.09.2022
Поступила после рецензирования 02.11.2022
Принята к публикации 05.11.2022

Received 19.09.2022
Revised 02.11.2022
Accepted 05.11.2022

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Исупов Александр Юрьевич – кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Лаборатории физики высоких энергий Лаборатории физики высоких энергий имени В. И. Векслера и А. М. Балдина, Международная межправительственная организация Объединенный институт ядерных исследований
ул. Академика Балдина, 4, Дубна, 141980, Россия

Сыщенко Владислав Вячеславович – доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры теоретической и экспериментальной физики, Белгородский государственный национальный исследовательский университет
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия

Парахин Александр Сергеевич – студент выпускного курса магистратуры института инженерных и цифровых технологий, Белгородский государственный национальный исследовательский университет
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Alexander Isupov – PhD in Physics and Mathematics, leading research associate of the Laboratory of High Energy Physics, Joint Institute for Nuclear Research, Dubna, Russia

Vladislav Syshchenko – PhD in Physics and Mathematics, Professor, Professor of the Department of Theoretiacal and Experimental Physics, Belgorod National Research University, Belgorod, Russia

Alexander Parakhin – graduate student at the Institute of Engineering and Digital Technologies, Belgorod National Research University, Belgorod, Russia

Прикладная математика & Физика, 2023, том 55, №1. С. 57–69.
Applied Mathematics & Physics, 2023, Volume 55, No 1. P. 57–69.

УДК 51.73
MSC 35K35
Original Reseach

DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-1-57-69

QUASICLASSICAL APPROXIMATION OF SOLUTIONS OF BOUNDARY CONVECTIVE-TYPE PROBLEMS OF HEAT AND MASS TRANSFER

G. V. Averin[1], **M. V. Shevtsova**[2], **M. V. Bronnikova**[2]

(*Article submitted by a member of the editorial board N. V. Malay*)

[1] Donetsk National University,
Donetsk, 283001, DNR

[2] Belgorod State National Research University,
Belgorod, 308015, Russian Federation

E-mail: averin.gennadiy@gmail.com, shevtsova_m@bsu.edu.ru, bronnikova@bsu.edu.ru

Abstract. The development of theoretical methods of analysis of heat and mass transfer processes requires involvement of mathematical physics apparatus first of all. And here there are some problems. In first, heat and mass transfer processes are described by very difficult differential equations. In second, practical difficulties are appeared with definition of parameters and calculation of turbulent heat and mass transfer. In this paper we suggest the approximate method of solving the internal convective heat and mass transfer problems based on the combined use of the Laplace transform and quasiclassical approximation. As an example of the method implementation, the boundary value turbulent heat and mass transfer problem under Dirichlet boundary condition for the motion of medium in a cylindrical channel is considered. The results of numerical analysis of the obtained solutions in smooth and rough channels are presented. The examples of determining the eigenvalues, eigenfunctions and solution constants are given.

Keywords: Boundary Value Problems, Convective Heat and Mass Transfer, Laplace Transform, Quasiclassical Approximation
For citation: Averin Gennadiy, Shevtsova Maria, Bronnikova Marina. 2023. Quassiclassical approximation of solutions of boundary convective-type problems of heat and mass transfer. Applied Mathematics & Physics, 55(1): 57–69.
DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-1-57-69

оригинальное исследование

КВАЗИКЛАССИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ РЕШЕНИЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ КОНВЕКТИВНОГО ТЕПЛО- И МАССОПЕРЕНОСА

Г. В. Аверин[1], **М. В. Шевцова**[2], **М. В. Бронникова**[2]

(*Статья представлена членом редакционной коллегии Н. В. Малай*)

[1] Донецкий национальный университет,
Донецк, 283001, ДНР

[2] Белгородский государственный национальный исследовательский университет,
Белгород, 308015, Россия

E-mail: averin.gennadiy@gmail.com, shevtsova_m@bsu.edu.ru, bronnikova@bsu.edu.ru

Аннотация. Предложен приближенный метод решения внутренних задач конвективного тепло- и массопереноса, основанный на совместном применении интегрального преобразования Лапласа и квазиклассического приближения. В качестве примера реализации метода рассмотрено решение краевой задачи турбулентного тепло- и массопереноса для случая движения среды в цилиндрическом канале при граничном условии первого рода. Приведены результаты численного анализа полученных решений для гладких и шероховатых каналов. Даны примеры определения собственных значений, собственных функций и постоянных решений краевой задачи.

Ключевые слова: краевые задачи, конвективный тепло- и массоперенос, преобразование Лапласа, квазиклассическое приближение

Для цитирования: Аверин Г. В., Шевцова М. В., Бронникова М. В. 2023. Квазиклассическое приближение решений краевых задач конвективного тепло- и массопереноса. Прикладная математика & Физика, 55(1): 57-69. DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-1-57-69

1. Introduction. The processes of heat and mass transfer in turbulent motion are interconnected. At the same time, the main transfer equations have an identical basis since the differential equations, which are used to describe these phenomena, relate to the general diffusion equation [7, 8].

At present, the processes of heat and mass transfer and hydrodynamics are rather fully studied in turbulent motion of the medium in smooth and rough channels. Turbulent flow characteristics were investigated by Reynolds, Prandtl, Launder, Ryhardtom, Deysler, Kolmogorov, Spalding, Kutateladze and many other authors [9, 13, 18, 22, 24, 25, 27]. Analytical methods of solving of heat and mass transfer problems are quite diverse [7, 8, 9, 12, 13, 14, 15, 17, 25]. However, they relate to the narrow class of simple tasks.

Recently, much attention in the problem of turbulent heat and mass transfer in the channels has been paid to researching the transfer phenomena and improving models of turbulence in the boundary layer [11, 12, 19, 23, 25, 26], as well as to the numerical solving the boundary problems of convective heat and mass transfer [4, 5, 25, 26]. The absence of widely accepted models in many cases and the application of many different models of turbulence require effective methods of analytical solving the boundary problems, when the functions characterizing turbulent transfer are defined in general form.

In turn, modern numerical methods allow to solve many boundary value problems of heat and mass transfer. But at the same time, there is a certain loss of presentation and universality of solutions is observed. Also, there is a very important requirement for the researcher to have sufficient experience and practice with complicated numerical models.

For this reason, the specialists are interested in use of approximate analytical methods of solving convective heat and mass transfer problems [2, 10, 21, 25]. These methods have a number of advantages, because they allow to effectively construct the solutions of many boundary problems of heat and mass transfer. In this case, various modifications of the approximate Galerkin method [2, 21] are fairly used. They allow to obtain solutions that are presented in finite series using coordinate functions.

The disadvantages of this method are the significant increase of analytical and computational complexity with an increase in number of terms of the series in the approximate solution and also the problem of choosing the satisfactory coordinate functions. To our mind, there is insufficient attention has been paid to the approximate analytical methods of solving the boundary problems of heat and mass transfer, which allow to present general solutions in the form of infinite series, and to the methods of justification of coordinate functions, which correspond to the particularity of the solved problem.

The purpose of this work is to present an analytical method for solving boundary value problems of heat and mass transfer based on the Laplace transform and asymptotic decomposition of the images with the subsequent constructing of the general approximate solution. This method allows to receive solutions of rather wide class of heat and mass transfer problems in an approximate analytical form.

2. Approximate analytical method for solving boundary value problems of heat and mass transfer. Approximate analytical method for solving boundary value problems of heat and mass transfer. The boundary value problem of a stationary convective heat and mass transfer at the motion of various particles in the channels of any geometrical form leads to the integration of differential equation, which can be presented in the form:

$$\overline{W}(M)\frac{\partial\theta}{\partial z} = a\ div[\overline{f}(M)\ grad\ \theta(M,z)] + V_*(M,z), \tag{1}$$

under boundary conditions

$$\ell_s[\theta(M,z)]_{\tilde{s}} = \varphi(M_s,z), \tag{2}$$

and initial conditions

$$[\theta(M,z)]_{z=0} = \varphi_0(M), \tag{3}$$

where $\tilde{s}$ is the contour of surface Ω; Ω is the surface of the cross-section removed by the distance z from the entrance of the channel; $M = M(x,y)$ is the current point of the surface Ω ($M \in \Omega$); M_s is the point on the contour $\tilde{s}$; ℓ_s is the linear differentiation operator defined on the contour $\tilde{s}$; $\ell_s[\theta(M,z)]_{\tilde{s}} = \alpha\theta + \beta\frac{\partial\theta}{\partial\vec{n}}|_{\tilde{s}}$; $\theta(x,y,z)$ is the heat or mass transfer potential; $\overline{W}(M)$, $\overline{f}(M)$ are the velocity of the motion of the medium and parameters of turbulent transfer in the cross-section z of the channel; a is the coefficient of thermal diffusivity (diffusion) of the medium; $V_*(M,z)$ is the function describing sources or drains; α, β are the constants.

The condition (2) can be represented in the form of Dirichlet or Neumann boundary conditions. In the first case, the zero-order differentiation operator has a form:

$$\ell_s[\theta]_{\tilde{s}} = [\theta(M,z)]_{\tilde{s}},$$

In the second case, the differentiation operator of the fist order can be represented as: $\ell_s[\theta]_{\tilde{s}} = \left[\lambda(M)\frac{\partial\theta}{\partial\vec{n}}\right]_{\tilde{s}}$, where $\lambda(M)$ is the function characterizing heat or mass transfer on the channel wall; $\vec{n}$ is the external normal to a contour $\tilde{s}$.

After applying the Laplace transform on coordinate z the boundary value problem (1) – (3) is reduced to:

$$L[\overline{\theta}(M,p)] + \frac{1}{a}\overline{R}(M,p) = 0; \tag{4}$$

$$\ell_s[\overline{\theta}(M,p)]_{\tilde{s}} = \overline{\varphi}(M_s,p), \tag{5}$$

where $\overline{\theta}(M,p) = \int_0^\infty \theta(M,z)\exp(-pz)dz$ is the Laplace transform of the function $\theta(M,z)$ on coordinate z; p is the Laplace transform parameter; $L[\overline{\theta}(M,p)] = div[\overline{f}(M)\ grad\overline{\theta}] - p\overline{W}(M)\overline{\theta}$ is the differentiation operator; $\overline{V_*}(M,p) = \int_0^\infty V_*(M,z)\exp(-pz)dz$; $\overline{\varphi}(M_s,p) = \int_0^\infty \varphi(M_s,z)\exp(-pz)dz$; $\overline{R}(M,p) = \overline{V_*}(M,p) + \overline{W}(M)\varphi_0(M)$.

In most cases, it is rather difficult or simply impossible to obtain an exact solution of the problem (4)–(5). Therefore, development of approximate analytical methods for solving such problems is of considerable interest. The approximate method [21] is based on combined use of the Laplace transform and Ritz method or the orthogonal Bubnov-Galerkin method. It has great opportunities for solving the number of transfer problems. This method allows to reduce a study of heat and mass transfer problems to solving the algebraic systems and to receive approximate analytical dependences. However, at constructing the solutions there is a problem to choose the optimal system of coordinate functions on which the solution depends. In particular, at solving the boundary value problems of convective heat and mass exchange in turbulent flows the correct accounting of the boundary layer is of great importance. In this case, it is almost impossible to select the optimal system of coordinate functions in advance. Additional difficulties, when using Ritz or Bubnov-Galerkin methods, are associated with the fact that with an increase in number of coordinate functions up to three or more the volume of computational work increases dramatically. Therefore, the method [21] did not gain wide distribution in solving the transfer problems for turbulent flows.

We propose a new method of an approximate solution of boundary value problems. It is based on the preliminary analysis of the solution in the Laplace transform domain and asymptotic decomposition of the image for a great value of transform parameter [3, 14]. After transition to the original domain the distribution of potentials for an initial stage of heat and mass transfer process is determined. For the preliminary analysis of the solution in the Laplace transform domain the quasiclassical approximation is used [20, 16]. This method allows to obtain the solutions of wide class of heat and mass transfer problems in an approximate analytical form.

Consider a technique of method's application. Suppose that in the Laplace transform domain the approximate solution of the problem (4)–(5) by means of a quasiclassical approximation method is obtained at $p \to \infty$. By asymptotically expanding the obtained solution into rapidly converging series for the great values p and the subsequent transition to the original domain the distribution of potential for the initial stage of heat or mass transfer process can be found by the Lykov method for small values z [14].

If the asymptotic approximation $\overline{\Phi}(M,p)$ of the function $\overline{\theta}(M,p)$ at $p \to \infty$ and the corresponding original $\Phi(M,z)$ of $\theta(M,z)$ at $z \to 0$ are found, then it is possible to compose the residual of the equation (1) in the original domain.

There is a general solution of the mixed problem (1)–(2) for the equation of parabolic type, which, accoording to [7], in some cases at $\varphi = 0$ and $V_* = 0$ can be presented by Fourier expansion on eigenfunctions χ_n of operator $L[\theta]$ as:

$$\theta(M,z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n\chi_n(M)\exp(-p_n z),$$

where p_n are the eigenvalues; A_n are the constants. These values can be determined from the condition of equality of functions $\Phi(M,z)$ and $\theta(M,z)$ for $z = 0$ and small values z:

$$\theta(M,z)|_{z=0} = \Phi(M,z)|_{z=0} = \varphi_0(M); \tag{6}$$

$$\lim_{z\to\delta_*}[\theta(M,z) - \Phi(M,z)] = 0, \tag{7}$$

where δ_* is a value close to zero.

Let coordinate functions $\psi_n(M)$, which are approximated eigenfunctions $\chi_n(M)$, be found and satisfy boundary conditions (2). When applying one of residual's minimization methods, one can obtain a system of the linear algebraic equations for finding of the constants A_n and a system of linear or nonlinear algebraic equations for finding of the eigenvalues. The best approximation of the coordinate functions $\psi_n(M)$ is determined from the asymptotic solution $\Phi(M,z)$. Let us construct an approximate solution of the equation (1) in a form:

$$\theta_n(M,z) = \sum_{n=0}^{N} A_n\Psi_n(M)\exp(-p_n z), \tag{8}$$

and we will reduce the process of solving the boundary value problem (1)–(3) to aproximation of function $\Phi(M,z)$ by the series (8) for small values z.

To determine the coefficients A_n on the basis of equation (6), we construct the residual:

$$\varepsilon(M,A_n) = \left[\varphi_0(M) - \sum_{n=0}^{N} A_n\Psi_n(M)\right]^2$$

and select the coefficients A_n from the condition of minimum $\varepsilon(M, A_n)$. Thus, we will receive the algebraic system of equations on coefficients A_n:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial\varepsilon}{\partial A_1} = \iint_\Omega \left[\varphi_0(M) - \sum_{n=0}^{N} A_n\Psi_n(M)\right]\Psi_1(M)dw = 0; \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \ldots \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial\varepsilon}{\partial A_n} = \iint_\Omega \left[\varphi_0(M) - \sum_{n=0}^{N} A_n\Psi_n(M)\right]\Psi_n(M)dw = 0, \end{cases}$$

whence the coefficients A_n are determined by known methods.

If $\Psi_n(M)$ is taken to be an orthogonal system of coordinate functions in the domain Ω with respect to a weight function $\rho(M)$, then the coefficients A_n are determined from the equations:

$$A_n = \frac{\iint_\Omega \rho(M)\varphi_0(M)\Psi_n(M)dw}{\iint_\Omega \rho(M)\Psi_n^2(M)dw}.$$

To determine the eigenvalues p_n from the equation (7), we take the residual in a form:

$$\varepsilon(p_n, M, z) = \left[\Phi(M, z) - \sum_{n=0}^{N} A_n\Psi_n(M)\exp(-p_n z)\right]^2$$

and choose the eigenvalues p_n in such a way that the residual has its smallest value at $z \to 0$. By expanding exponents into a series and limiting to two terms of a series, we obtain the algebraic system of equations:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial\varepsilon}{\partial p_1} = \displaystyle\int_0^{\delta_*}\iint_\Omega \left[\Phi(M, z) - \sum_{n=0}^{N}\left[A_n\Psi_n(M) - A_n\Psi_n(M)p_n z\right]\right] \times A_1\Psi_1(M)zdwdz = 0; \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \ldots \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial\varepsilon}{\partial p_n} = \displaystyle\int_0^{\delta_*}\iint_\Omega \left[\Phi(M, z) - \sum_{n=0}^{N}\left[A_n\Psi_n(M) - A_n\Psi_n(M)p_n z\right]\right] \times A_n\Psi_n(M)zdwdz = 0; \end{cases}$$

If we take $\Psi_n(M)$ as an orthogonal system of coordinate functions in a domain Ω with respect to a weight function $\rho(M)$, then the eigenvalues p_n are determined from the equations:

$$p_n = \frac{\int_0^{\delta_*}\iint_\Omega \left[A_n\Psi_n(M) - \Phi(M, z)\right]\rho(M)\Psi_n(M)dwdz}{\int_0^{\delta_*}\iint_\Omega A_n\rho(M)\varphi_n^2(M)zdwdz}.$$

Thus, the search procedure for an approximate solution of the boundary value problem (1)—(3) consists of the following stages:

1) using the Laplace transform, the initial convective heat and mass transfer problem is reduced to the boundary value problem for the differential equation of the second order;
2) using the method of quasiclassical approximation, we determine the asymptotic solution $\overline{\Phi}(M, p)$ of the differential equation in the Laplace transform domain for large values p;
3) by analyzing the image $\overline{\Phi}(M, p)$ for great values of parameter p, we receive the original $\Phi(M, z)$ for small values z;
4) based on the form of the function $\Phi(M, z)$, the basic coordinate functions $\psi_n(M)$ are determined. Thus, we obtain an asymptotic approximation of the corresponding eigenfunc- tions $\chi_n(M)$ in the space, in which the approximate solution of the boundary value problem is found;
5) the approximate solution of the problem is complicated in the form (8);
6) approximation of the function $\Phi(M, z)$ by functions $\theta_n(M, z)$, using residual's minimization in the domain Ω, is found for small values z;
7) the system of algebraic equations for determining of the constants A_n and the eigenvalues p_n is being formed and solved.

The proposed method of obtaining approximate solutions can be used to solve the problems of non-stationary heat conductivity and diffusion, convective heat and mass exchange in pipes and channels under various boundary conditions and also the problems of heat and mass transfer in various bodies at variable coefficients of heat conductivity and diffusion. The method allows to receive approximate analytical solutions of boundary value problems in a simple way that are currently being solved numerically. The received solutions satisfy the boundary conditions and asymptotically coincide with the exact solution for an initial stage of heat and mass exchange. An advantage of the method is the possibility of determining the asymptotic approximations of coordinate functions (basis) and constructing a residual for determining the constants and eigenvalues in the original domain. Apart from that, we can obtain the approximate solution in the form of infinite series on the obtained approximations of the basis. The disadvantage of this method is the possibility of an error in the approximation compared to the exact solution for the last stages of the heat and mass exchange process (at great values z).

3. Scheme for receiving a quasiclassical approximation of solutions of internal convective heat and mass transfer problems. Consider the internal problem of convective heat and mass transfer, when a homogeneous liquid or gas enters a fairly long channel of rectangular or circular cross-section.

At the initial region of the channel ($z \leq 0$) the steady flow is formed in such way that the velocity field at the entrance of the liquid into the channel ($z \geq 0$) becomes stationary. The boundary condition of heat and mass exchange with the external environment on the wall of a pipe is specified. This condition is described by homogeneous Dirichlet and Neumann boundary conditions. The internal problem of convective heat and mass transfer is reduced to determining the tranfer potentials θ.

Distribution of potentials of heat and mass transfer for the steady liquid flow in the flat channel ($n = 0$) or cylindrical channel ($n = 1$) satisfies the following equation:

$$Pe\ w(\xi)\xi^n \frac{\partial\theta}{\partial\eta} = \frac{\partial}{\partial\xi}\left((1 + f(\xi))\xi^n \frac{\partial\theta}{\partial\xi}\right), 0 \leq \xi \leq 1, 0 \leq \eta \leq \infty. \tag{9}$$

Under boundary conditions

$$\theta(\xi,\eta) = 1,\ \eta = 0 \tag{10}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial\xi} = 0,\ \xi = 0 \tag{11}$$

where $f(\xi)$ is the function, which is characterizing the parameters of turbulent heat and mass transfer, having continuous derivatives of the second order and $f(\xi) \geq 0, 0 \leq \xi \leq 1$. Here $\xi = y/y_0$, $\eta = z/z_0$ are dimensionless spatial coordinates, Pe is the heat or diffusion Peclet number.

In addition to the conditions (10)–(11), for solving the equation (9) it will be necessary to set a boundary condition on the channel wall. Under Dirichlet boundary conditions for $\xi = 1$ we have $\theta(\xi,\eta) = 0$, and under Neumann boundary conditions at $\xi = 1$: $\dfrac{\partial\theta(\xi,\eta)}{\partial\xi} = 1$.

Using integral Laplace transfom for the equation (9) on the variable η, we obtain equation:

$$\frac{d}{d\xi}\left(k(\xi)\frac{d\overline{\theta}}{d\xi}\right) - p \cdot Pe \cdot r(\xi)\overline{\theta} = 0, \tag{12}$$

where $k(\xi)$ and $r(\xi)$ are anywhere positive functions, having continuous derivatives of the second order in the range $0 \leq \xi \leq 1$.

We construct a quasiclassical approximation of solutions of the equation (12) at $p \to \infty$ [16, 20]. By replacing $\overline{\theta}(\xi) = \varphi(\xi)U(S)$, $S = S(\xi)$, we lead equation (12) to a form:

$$U''(S) - [p + g(S)]\, U(S) = 0, \tag{13}$$

where $S(\xi) = \int_{\xi_0}^{\xi}\sqrt{\frac{r(t)}{k(t)}}dt$, $\varphi(\xi) = [k(\xi)r(\xi)]^{-1/4}$, $0 < \xi_0 < 1$.

It is known [20, 16], that the solutions of the equation (13) at $p \to \infty$ asymptotically approximate to the solutions of the equation $U''(S) - pU = 0$, which, in turn, have a form: $U(S) = A\exp(\mu S) + B\exp(-\mu S)$, where $\mu = \sqrt{p}$, A, B are the constants. Returning to the previous variables in a given equation, we receive that the solutions of the equation (12) for $p \to \infty$ is as follows:

$$\overline{\theta}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{k(\xi)r(\xi)}}[A\exp(\varsigma(\xi)) + B\exp(-\varsigma(\xi))], \rho(\xi) = \sqrt{p\left|\frac{r(\xi)}{k(\xi)}\right|}, \varsigma(\xi) = \int_{\xi_0}^{\xi}\rho(t)dt. \tag{14}$$

Also, the solving the equation (12) is of practical interest at $p \to \infty$, when functions $k(\xi)$ and $r(\xi)$ have the expressions: $k(\xi) = \xi^m\overline{k}(\xi); r(\xi) = \xi^n\overline{r}(\xi)$, and functions $\overline{k}(\xi)$ and $\overline{r}(\xi)$ are strictly positive in the range $0 \leq \xi \leq 1$.

As shown in [16], quasiclassical approximation of solutions of the equation (12) in this case can be presented in the form:

$$\overline{\theta}(\xi) = \sqrt{\frac{\varsigma(\xi)}{k(\xi)\rho(\xi)}}[AI_\nu(\varsigma(\xi)) + BK_\nu(\varsigma(\xi))],$$

where $\rho(\xi) = \sqrt{p\left|\frac{r(\xi)}{k(\xi)}\right|}$, $\varsigma(\xi) = \int_0^{\xi}\rho(t)dt$, $\nu = \frac{|m-1|}{n-m+2}$, $I_\nu(z), K_\nu(z)$ are the modified Bessel functions, $n - m + 2 > 0$.

Taking into account the corresponding boundary conditions on cross coordinate, it is possible to receive asymptotic approximations of solutions of the equation (12) in the Laplace transform domain for great values p. If it is possible to determine the original of the corresponding image, the approximate solution of this equation can be obtained by the method described in the previous section.

4. Heat and mass transfer in a cylindrical channel under Dirichlet boundary conditions and variable flow rate. We define the solution of the boundary value problem (9)–(11) under Dirichlet boundary conditions in the case of variable flow rate. Applying the Laplace transform to the system of equations on the longitudinal coordinate η, we obtain:

$$\frac{d}{d\xi}\left((1+f(\xi))\xi\frac{d\overline{\theta}}{d\xi}\right)-Pe\cdot p\cdot\xi\cdot W(\xi)\left(\overline{\theta}-\frac{1}{p}\right)=0,\ (\overline{\theta})_{\xi=1}=0;\left(\frac{\partial\overline{\theta}}{\partial\xi}\right)_{\xi=0}=0. \tag{15}$$

Let us determine the solution of the equation (15) for the main area of a turbulent flow and for very thin parietal section. In the first case, the solution of the equation (15), taking into account (14) and boundary condition for $\xi=0$, can be approximately presented at $p\to\infty$, $0\le\xi\le 1-\delta$, in the form:

$$\overline{\theta}_+-\frac{1}{p}=c_1\frac{F^{1/2}(\xi)I_0(F(\xi)\sqrt{Pe\cdot p})}{\sqrt{\xi}[(1+f(\xi))W(\xi)]^{1/4}}, \tag{16}$$

δ is the thickness of the boundary layer near the wall; c_1 is a constant, $F(\xi)=\int_0^{\xi}\left(\frac{W(t)}{1+f(t)}\right)^{1/2}dt$.

In this case, potential of heat and mass transfer will be described by two functions: $\theta_+(\xi,\eta)$ – in the main area of turbulent flow for $0\le\xi\le1-\delta$ and $\theta_-(\xi,\eta)$ – in thin parietal section for $1-\delta<\xi\le1$. This is explained by the fact that the equation (15) has a singularity at $\xi=1$. In this regard, the solution of (15) cannot be extended to the boundary layer zone for $1-\delta\le\xi\le1$. In the boundary layer $f(\xi)=0$ and the velocity $W(\xi)$ and thickness of the boundary layer are equal to $W(\xi)=\dfrac{\lambda_*Re}{16}(1-\xi)$; $\delta=5\left(Re\sqrt{\frac{\lambda_*}{32}}\right)^{-1}$. According to this, the equation (15) for the boundary layer at $1-\delta\le\xi\le1$ has an approximate form:

$$\frac{d^2\overline{\theta}_-}{d\xi^2}-Pe\cdot p\cdot r_*(1-\xi)\left(\overline{\theta}_--\frac{1}{p}\right)=0;r_*=\frac{\lambda_*Re}{16}.$$

The solution of this equation is as follows [11]:

$$\overline{\theta}_-(\xi,p)-\frac{1}{p}=\sqrt{1-\xi}c_1I_{1/3}\left(\frac{2}{3}\sqrt{Pe\cdot p\cdot r_*}(1-\xi)^{3/2}\right)+$$

$$+\sqrt{1-\xi}c_2K_{1/3}\left(\frac{2}{3}\sqrt{Pe\cdot p\cdot r_*}(1-\xi)^{3/2}\right).$$

For the thin boundary layer at $\xi\to1$ we replace the functions $I_{1/3}(z)$ and $K_{1/3}(z)$ for small values z by their limits [16, 1]: $I_{1/3}(z)\approx\frac{1}{\Gamma(4/3)}\left(\frac{z}{2}\right)^{1/3}$; $K_{1/3}(z)\approx\frac{1}{2}\Gamma(1/3)\left(\frac{z}{2}\right)^{-1/3}$. Therefore, the solution of (15) in a very thin boundary layer can be approximated by linear function: $\overline{\theta}_-(\xi,p)-\frac{1}{p}=c_2(1-\xi)+const$. Considering a boundary condition on the wall, we receive:

$$\overline{\theta}_-(\xi,p)=c_2(1-\xi). \tag{17}$$

Coefficients c_1 and c_2 from (16) and (17) can be found from the conjugation condition of the functions $\overline{\theta}_+(\xi,p)$ and $\overline{\theta}_-(\xi,p)$ on a border of the boundary layer for $\xi=1-\delta$: $\overline{\theta}_+=\overline{\theta}_-$; $\frac{\partial\theta_+}{\partial\xi}=\frac{\partial\theta_-}{\partial\xi}$.

Determining the constants c_1 and c_2 from these conditions and passing into the original domain, we will obtain the solutions $\overline{\theta}_+(\xi,\eta)$ and $\overline{\theta}_-(\xi,\eta)$ for small values η:

$$\overline{\theta}_+(\xi,\eta)=1-\frac{F^{1/2}(\xi)W^{-1/4}(\xi)}{\sqrt{\xi}(1+f(\xi))^{1/4}}\left(1-\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{A}_nJ_0\left(F(\xi)\frac{\mu_n}{m}\right)\exp\left(-\frac{\mu_n^2\eta}{m^2Pe}\right)\right);$$

$$\overline{\theta}_-(\xi,\eta)=\frac{1-\xi}{\delta}-a_1n\frac{1-\xi}{\delta}\left(1-\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{A}_nJ_0\left(\mu_n\right)\exp\left(-\frac{\mu_n^2\eta}{m^2Pe}\right)\right),$$

where

$$\tilde{A}_n=\frac{2\beta}{J_0(\mu_n)(\mu_n^2+\beta^2)};\beta=\frac{a_1+b_1\delta}{b_2\delta}m;n=\frac{1}{a_1+b_1\delta};a_1=\left(\frac{F^{1/2}(\xi)}{\sqrt{\xi}[W(\xi)(1+f(\xi))]^{1/4}}\right)_{\xi=1-\delta};$$

$$b_2 = \left(\frac{F^{1/2}(\xi) W^{1/4}(\xi)}{\sqrt{\xi}[(1+f(\xi))]^{3/4}} \right)_{\xi=1-\delta}; m = \int_0^{1-\delta} \sqrt{\frac{W(\xi)}{1+f(\xi)}} d\xi; b_1 = \left(\frac{F^{1/2}(\xi)}{\sqrt{\xi}[W(\xi)(1+f(\xi))]^{1/4}} \right)_{\xi=1-\delta};$$

μ_n are the roots of the equation $\beta J_0(\mu) = \mu J_1(\mu)$; $f(\xi) = 0$ at $1-\delta \le \xi \le 1$.

Determine the general solution of the equation (9) in the range $0 \le \xi \le 1$ in a form:

$$\overline{\theta}_+(\xi,\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \Psi_n(\xi) \exp\left(-p_n^2 \frac{\eta}{Pe}\right). \tag{18}$$

Denote by $\Psi_n(\xi) = \frac{F^{1/2}(\xi)}{\sqrt{\xi}[(1+f(\xi))W(\xi)]^{1/4}} J_0\left(F(\xi)\frac{\mu_n}{m}\right)$ the eigenfunctions. These functions satisfy boundary conditions. They are asymptotic approximations of eigenfunctions for $\eta \to 0$ in the range $1-\delta \ge \xi \ge 0$. Functions $\Psi_n(\xi)$ are orthogonal in the range $0 \le \xi \le 1-\delta$ with the weight $\xi W(\xi)$ as:

$$\int_{-1+\delta}^{1-\delta} \xi W(\xi) \Psi_n(\xi) \Psi_k(\xi) d\xi = \begin{cases} 0, n \ne k; \\ m + \frac{m}{2\mu_n} sin(2\mu_n), n = k. \end{cases}$$

In the equation (18) the coefficients A_n and eigenvalues p_n are determined by the previously specified method and are equal to

$$A_n = \frac{2R_n}{m^2(J_0^2(\mu_n) + J_1^2(\mu_n))};$$

$$p_n^2 = \frac{nJ_1(\mu_n)\mu_n}{R_n}, R_n = \int_0^{1-\delta} \frac{\sqrt{F(\xi)\xi} W^{3/4}(\xi)}{(1+f(\xi))^{1/4}} J_0\left(F(\xi)\frac{\mu_n}{m}\right) d\xi.$$

In the range $1-\delta \le \xi \le 1$ the solution of the equation (15) is:

$$\overline{\theta}_-(\xi,\eta) = \frac{1-\delta}{\delta} \sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{\sqrt{m} J_0(\mu_n)}{[W(1-\delta)(1+f(1-\delta))]^{1/4}} \exp\left(-p_n^2 \frac{\eta}{Pe}\right). \tag{19}$$

The approximate solutions (18) and (19) of the equation (9) satisfy boundary conditions and tend to zero for great values η, while the functions $f(\xi)$ and $W(\xi)$ are given in general form. The dependence of the potential value θ_m on the average cross-section of the channel on η is as follows:

$$\theta_m(\eta) = 2\int_0^1 fW(\xi)\theta(\xi,\eta) d\xi = 2\sum_{n=0}^{\infty} A_n R_n \exp\left(-p_n^2 \frac{\eta}{Pe}\right).$$

The influence of the change of the value $\theta(\xi,\eta)$ in the boundary layer of thickness δ can be neglected.

Local Nusselt number $Nu(\eta)$ is equal to:

$$Nu(\eta) = -\frac{2}{\theta_m(\eta)} \left(\frac{\partial\theta_-}{\partial\xi}\right)_{\xi=1} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} A_n \sqrt{m} J_0(\mu_n) \exp\left(-p_n^2 \frac{\eta}{Pe}\right)}{\delta[W(1-\delta)]^{1/4} \sum_{n=0}^{\infty} A_n R_n \exp\left(-p_n^2 \frac{\eta}{Pe}\right)}.$$

In the cross-sections of a cylindrical pipe, which are remoted from its entry, the Nusselt number is close to the following constant value $Nu_\infty = \frac{\sqrt{m} J_0(\mu_0)}{\delta[W(1-\delta)]^{1/4} R_0} = p_o^2$. In that special case, when the flow velocity in the channel is constant, the solution of the boundary problem (9) has a form:

$$\theta(\xi,\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \Psi_n(\xi) \exp\left(-p_n^2 \frac{\eta}{Pe}\right),$$

where

$$\Psi_n(\xi) = \frac{F^{1/2}(\xi)}{\sqrt{\xi}\,(1+f(\xi))^{1/4}} J_0\left(\frac{\mu_n}{m}F(\xi)\right); F(\xi) = \int_0^1 ((1+f(t))^{-1/2} dt,$$

$$p_n^2 = \frac{J_1(\mu)\mu_n\,(1+f(\xi))^{1/4}}{R_n\sqrt{m}}; A_n = \frac{2R_n}{m^2 J_1^2(\mu_n)}; R_n = \int_0^1 \frac{\sqrt{\xi F(\xi)}}{(1+f(\xi))^{1/4}} J_0\left(\frac{\mu_n}{m}F(\xi)\right) d\xi,$$

μ_n are the roots of Bessel function of the first kind $J_0(\mu)$; $m = F(1)$.

And the Nusselt number is equal to $Nu_\infty = \frac{\mu_0 J_1(\mu_0)}{\sqrt{m} R_0} = p_o^2$.

5. Heat and mass transfer in smooth and rough channels. 5.1. Smooth channels. The numerical analysis of the received solutions was carried out for different types of functions $f(\xi)$ and $w(\xi)$ for the motion of gas medium in flat and cylindrical channels. In the calculations the Prandtl number or Schmidt number varied

Table 1. Smooth channel. The eigenvalues and constants of solutions of heat and mass transfer problem under Dirichlet boundary condition, the constant flow rate $w(\xi) = 1$ and function $f(\xi)$ specified by Martinelli's equations

Таблица 1. Гладкий канал. Собственные значения и постоянные решения задачи о тепло- и массопереносе при граничном условии первого рода, постоянной скорости потока $w(\xi) = 1$ и задании функции $f(\xi)$ уравнениями Мартинелли

Order	Pr or Sc	Re	m	R_n	A_n	Eigenvalues p_n^2
0	0.7	10000	0.3093	0.07187	5.5750	31.24
1				-0.02144	-3.8720	157.20
2				0.00264	0.7479	1602.00
3				-0.00270	-1.0450	1825.00
4				0.00112	0.5491	4949.00
5				-0.00141	-0.8347	4335.00
0	0.7	50000	0.1594	0.03651	10.6600	85.65
1				-0.01211	-8.2330	388.40
2				0.00159	1.7020	3692.00
3				-0.00159	-2.3160	4317.00
4				0.00057	1.0430	13660.00
5				-0.00056	-1.2540	15130.00
0	0.7	100000	0.1191	0.02714	14.1900	133.30
1				-0.00925	-11.2550	588.40
2				0.00122	2.3410	5560.00
3				-0.00124	-3.2220	6426.00
4				0.00046	1.1540	19490.00
5				-0.00045	-1.8080	21730.00

from 0.1 to 1.6, and the Reynolds number – from $5 \cdot 10^3$ to 10^6, and the Prandtl and Schmidt turbulent numbers were assumed to be 1.0.

In the process of calculations the function $f(\xi)$, characterizing turbulent thermal conductivity or diffusion, was given as: $\frac{\lambda_T}{\lambda} = \frac{Pr}{Pr_T} \cdot \frac{\nu_T}{\nu}$, $\frac{D_T}{D} = \frac{Sc}{Sc_T} \cdot \frac{\nu_T}{\nu}$, where Pr_T and Sc_T are the Prandtl and Schmidt turbulent numbers. The turbulent kinematic viscosity $\nu_T(\xi)$ for smooth channels was set in the form of Martinelli's equations [22] (the three-layer scheme of a turbulent flow):
a) for laminar layer: $0 \le y^+ < 5; u^+ = y^+; f(\xi) = 0$;
b) for buffer (intermediate) layer: $5 \le y^+ < 30; u^+ = -3.05 + 5.00 \ln y^+; f(\xi) = 0.2y^+ - 1$;
c) for turbulent kernel (logarithm layer): $y^+ \ge 30; u^+ = 5.5 + 2.5 \ln y^+; f(\xi) = 0.4y^+\xi$,
where $y^+ = Re\sqrt{\frac{\lambda_*}{32}}\,(1-\xi)\,; u^+ = w(\xi)\sqrt{\frac{8}{\lambda_*}}$;
Raykhardt's equations (two-layer flow scheme): $f(\xi) = 0.4\left(y^+ - 11th\left(\frac{y^+}{11}\right)\right); 0 \le y^+ \le 50$;
$f(\xi) = 0.133y^+(0.5+\xi^2)(1+\xi); 50 < y^+ \le y_0^+$, where $y_0^+ = Re\sqrt{\frac{\lambda_*}{32}}$ is the dimensionless pipe radius;
and Spalding's equations (single-layer scheme):
$y^+ = u^+ + \frac{1}{E}\left[\exp(ku^+) - 1 - ku^+ - \frac{(ku^+)^2}{2!} - \frac{(ku^+)^3}{3!} - \frac{(ku^+)^4}{4!}\right]$;
$f(\xi) = \frac{k}{E}\left[\exp(ku^+) - 1 - ku^+ - \frac{(ku^+)^2}{2!} - \frac{(ku^+)^3}{3!}\right]$, where $k = 0.407$, $E = 10$.

The function $w(\xi)$, characterizing the flow velocity in the channel, was taken in the form of the equations of rod profile and the equations of logarithm profile of velocity. As an example, the eigenvalues and constants of solutions of the boundary value problem of heat and mass transfer for cylindrical channel at constant flow rate in the cross-section are given in Table 1. The made analysis showed that the type of function $f(\xi)$ affects the eigenvalues and constants of the received solutions. Numerical results coincide well with the available data for the eigenvalues and constants of solutions of heat transfer problem in turbulent flow of the medium at the thermally initial site [6]. Heat exchange problems in turbulent flow in a cylindrical channel in this case are solved by separating of variables and numerically determining the eigenvalues and eigenfunctions.

5.2. Rough channels. For this case, as well as for smooth channels, the numerical analysis was carried out at different types of functions $f(\xi)$ and $w(\xi)$, characteristic for the describing of the motion of the medium in a cylindrical channel. At calculating the Prandtl and Schmidt numbers varied from 0.1 to 1.6, the Reynolds number – from $5 \cdot 10^3$ to 10^6, and the Prandtl and Schmidt turbulent numbers were taken to be 1.0. The roughness value varied within $\Delta_s = R_0/k_s = 15 - 500$ (k_s is the roughness height), and the analysis was carried out mainly for homogeneous sand roughness as the most studied. In calculations the function, characterizing turbulent thermal

Table 2. Rough channel. The eigenvalues and constants of solutions of heat and mass transfer problem under Dirichlet boundary condition, the constant flow rate $w(\xi) = 1$ and function $f(\xi)$ specified by Roth's equations, $R_0/k_s = 15$

Таблица 2. Шероховатый канал. Собственные значения и постоянные решения задачи о тепло- и массопереносе при граничном условии первого рода, постоянной скорости потока $w(\xi) = 1$ и задании функции $f(\xi)$ уравнениями Ротта, $R_0/k_s = 15$

Order	Pr or Sc	Re	m	R_n	A_n	Eigenvalues p_n^2
0	0.7	10000	0.2062	0.05036	8.789	55.66
1				-0.0995	-4.042	423.80
2				0.00237	1.514	2223.00
3				-0.00236	-2.075	2581.00
4				0.00100	1.102	6925.00
5				-0.00112	-1.492	6812.00
0	0.7	50000	0.0940	0.02305	19.360	198.50
1				-0.0451	-8.811	1527.40
2				0.00096	2.963	8923.00
3				-0.00105	-4.408	9545.00
4				0.00039	2.091	28670.00
5				-0.00048	-3.103	25730.00
0	0.7	100000	0.0667	0.01635	27.260	387.80
1				-0.00323	-12.520	2957.00
2				0.00067	4.072	17870.00
3				-0.00075	-6.264	18480.00
4				0.00027	2.861	57670.00
5				-0.00035	-4.410	49820.00

conductivity or diffusion, was given in accordance with the equations [23]:

$$f(\xi) = \frac{1}{2}\sqrt{1 + (2l^{+})^2\tau^{+}} - 1,$$

where

$$\tau^{+} = \frac{\tau}{\tau_{st}}, \tau_{st} = \lambda_{*}\frac{\rho\overline{w}^2}{8} = \frac{1}{2}\frac{dp}{d\eta}.$$

The turbulent kinematic viscosity $\nu_T(\xi)$ for rough channels was defined according to [23]. The mixing method was adopted in the form of Roth's equations [16] (here l is a mixing length):

$$l = 0; y < \Delta y;$$

$$l = \varkappa(y - \Delta y), y > \Delta y.$$

The velocity function $w(\xi)$ was given as the equations of a rod profile $w(\xi) = 1$ and the equations of logarithm profile of velocity in rough channels.

For rough channels the distribution of the functions $f(\xi)$ and $w(\xi)$ also depend not only on the distance from the wall y, the Reynolds and Prandtl (Schmidt) numbers, but also on the value of roughness height k_s and ratio k_s and distance y. It leads to the fact that the field of nominal dimensions for rough channels is more extensive, than for smooth channels. Therefore, the calculations were carried out mainly for the channels with significant roughness, as this case is of great interest for the subsequent analysis of the diffusion of heat and impurity in rough channels.

For some cases, the eigenvalues and constants of the solutions of the boundary value problems of heat and mass transfer for a cylindrical channel are given in Table 2.

The received results are qualitatively close to the results given in the previous section for the processes of heat and mass transfer in smooth pipes. However, the number of influencing factors in this case is greater. This is explained by the fact that the values of function $f(\xi)$ and its derivatives on the wall have significant effect on calculation results as the equations under consideration include value $f(1)$, which differs significantly for various models.

The setting of these values is rather complicated, since the experimental data are practically absent, and these values depend on the type of roughness and cannot be universal. In general, the carried-out calculations showed that the received solutions of boundary value problems are universal, since they allow to determine the fields of potentials and the Nusselt numbers both for smooth and rough channels. And the hydrodynamic and thermophysical features of the medium flow in the channel can be taken into account by a type of functions $f(\xi)$ and $w(\xi)$. The impact of the values of functions $f(\xi)$ and $w(\xi)$ in the boundary layer on the calculated indexes of heat and mass transfer is quite large. Finally, it should be noted that, if experimental values of the Nusselt number distribution through the length of the channel are known, it is possible to define the turbulent transfer parameters by comparing the Nusselt numbers with the obtained dependences.

6. Conclusion. On the basis of the executed calculations it can be concluded that the proposed method allows to obtain approximate solutions of a number of boundary value problems of turbulent heat and mass transfer. These solutions are quite simple and can be successfully used in calculations.

The universality and simplicity of the method is related to obtaining the solution in an analytical form, if we define transfer functions in general form, which allows to use different models of turbulent transfer in solutions.

The efficiency of the method is also ensured by the fact that for the first time it was possible to construct asymptotic approximations of coordinate functions (basis) in the process of solving and to find the residual of the functional for determining the constants and eigenvalues not in the Laplace transform domain, but in the original domain.

The reliability of a method was verified by comparison of calculation results, available experimental data and semi-empirical dependences for the condition of the stationary motions of media in smooth and rough cylindrical pipes.

Further research may be directed to the application of this method for solving the external problems of convective heat and mass transfer, where using the traditional approximate methods at half-finite intervals, such as the Bubnov-Galerkin method, is not always possible.

Список литературы

1. Абрамовиц М. А., Стиган И. 1979. Справочник по специальным функциям. М., Наука, 832.
2. Бабкин В. А. 2007. Теплообмен при турбулентном течении несжимаемой жидкости в шероховатой трубе с постоянной температурой стенки. Инж.-физич. журнал, 80(5): 89–96.
3. Бобров А. И., Аверин Г. В. 1994. Теоретические основы переноса импульса, тепла и примеси в горных выработках. Донбасс, Мак НИИ, 270.
4. Елизарова Т. Г., Широков И. А. 2015. Моделирование турбулентного течения Куэтта на основе КГД-уравнений. Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша, 11: 26.
5. Зубарев В. М. 2019. Численное моделирование турбулентного несжимаемого течения с увеличивающимся положительным градиентом давления. Инж.-физич. журнал, 99(3): 654–663.
6. Кейс В. М. 1972. Конвективный тепло- и массообмен. М., Энергия, 448.
7. Колесникова В. И. 2015. Методы решения основных задач уравнений математической физики. М., МФТИ, 79.
8. Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М. 2013. Уравнения в частных производных математической физики. М., Книга по требованию, 712.
9. Кутателадзе С. С. 1990. Теплопередача и гидродинамическое сопротивление: справочное пособие. М., Энергоатомиздат, 367.
10. Лаптев А. Г. 2007. Модели пограничного слоя и расчет тепломассообменных процессов. Казань, Казанский университет, 500.
11. Лаптев А. Г., Фарахов Т. М. 2013. Математические модели переноса импульса в пограничном слое. Инж.-физич. журнал, 86(3): 567–575.
12. Ломов С. А., Ломов И. С. 2011. Основы математической теории пограничного слоя. М., МГУ, 433.
13. Лойцянский Л. Г. 2003. Механика жидкости и газа. М., Дрофа, 840.
14. Лыков А. В. 1967. Теория теплопроводности. М., Высшая школа, 599.
15. Лыков А. В. 1978. Тепломассообмен. Справочник. 2-е издание. М., Энергия, 480.
16. Никифоров А. Ф., Уваров В. Б. 1978. Специальные функции математической физики. М., Наука, 345.
17. Радченко А. И. 1981. Математическая теория диффузии в приложениях. Киев, Наукова думка, 396.
18. Рейнольдс А. Дж. 1979. Турбулентные течения в инженерных приложениях. М., Энергия, 408.

19. Сухович Е. П. 2000. Сравнительный анализ моделей турбулентности. Инж.-физич. журнал, 73(2): 328–339.

20. Федорюк М. В. 2015. Асимптотические методы для линейных дифференциальных уравнений. М., Либроком, 354.

21. Цой П. В. 2005. Системные методы расчетв краевых задач тепломассопереноса. М., МЭИ, 566.

22. Elahi S. S., Lange E. A., Lynch S. P. 2019. Effect of Reynolds number on turbulent junction flow fluid dynamics and heat transfer. International Journal of Heat and Mass Transfer, 142 (118328). DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2019.06.084.

23. Granvill R. S. 1990. A formula for coefficient of turbulent transfer in the direct vicinity of a wall in turbulent boundary layers with pressure gradient, suitable for the description of transfer of amount of movement, heat and weigh. Works of American Society of Mechanical Engineers, Modern mechanical engineering, 11: 67–70.

24. Kulkarni K. S., Madanan U., Mittal R., Goldstein R. G. 2017. Experimental validation of heat/mass transfer analogy for two-dimensional laminar and turbulent boundary layer. International Journal of Heat and Mass Transfer, 113: 84–95. DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2017.05.048.

25. Lesieur M. 2008. Turbulence In Fluids. 4th Edition, rev. and enlarged ed. Springer: 563.

26. Ostilla R., Stevens R. J., Grossman S., Verzicco R., Lohse D. 2013. Optimal Taylor-Couette flow: direct numerical simulations. Journal of Fluid Mechanics, 719: 14—46. DOI: 10.1017/jfm.2012.596.

27. Peeters J. W. R., Sandham N. D. 2019. Turbulent heat transfer in channels with irregular roughness. International Journal of Heat and Mass Transfer, 138: 445–467 DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2019.04.013.

References

1. Abramovits M. A., Stigan I. 1979. Spravochnik po special'nym funkciyam [Reference book on special functions]. M., Nauka, 832.

2. Babkin V. A. 2007. Teploobmen pri turbulentnom techenii neszhimaemoj zhidkosti v sherohovatoj trube s postoyannoj temperaturoj stenki [Heat transfer at turbulent flow of an incompressible fluid in a rough pipe with a constant wall temperature]. Phys. Eng. Journal, 80(5): 89–96.

3. Bobrov A. I., Averin G. V. 1994. Teoreticheskie osnovy perenosa impulsa, tepla i primesi v gornyh vyrabotkah [Theoretical bases of transfer of impulse, heat and impurity in excavations]. Donbass, MacSRI, 270.

4. Elizarova T. G., Shirokov I. A. 2015. Modelirovanie turbulentnogo techeniya Kuetta na osnove KGD-uravnenij [Modeling the turbulent Couette flow based on CGD-equations]. Preprints of Ins. of Appl. Math. named after M.V. Keldysh, 11: 26.

5. Zubarev V. M. 2019. Chislennoe modelirovanie turbulentnogo neszhimaemogo techeniya s uvelichivayushchimsya polozhitel'nym gradientom davleniya [Numerical simulation of a turbulent incompressible flow with an increasing positive pressure gradient]. Phys. Eng. Journal, 99(3): 654–663.

6. Kejs V. M. 1972. Konvektivnyj teplo- i massoobmen [Convective heat and mass exchange]. M., Energia, 448.

7. Kolesnikova V.I. 2015. Metody resheniya osnovnyh zadach uravnenij matematicheskoj fiziki [Methods of Solving Basic Problems of Equations of Mathematical Physics]. M., MFTI, 79.

8. Koshlyakov N. S., Gliner E. B., Smirnov M. M. 2013. Uravneniya v chastnyh proizvodnyh matematicheskoi fiziki [Partial Differential Equations of Mathematical Physics]. M., Kniga po Trebovaniyu, 712.

9. Kutateladze S. S. 1990. Teploperedacha i gidrodinamicheskoe soprotivlenie. Spravochnoe posobie [Heat transfer and hydrodynamic resistance. Reference book]. M., Energoatomizdat, 367.

10. Laptev A. G. 2007. Modeli pogranichnogo sloya i raschet teplomassobennyh processov [Models of boundary layer and calculation of heat and mass exchange processes]. Kazan, Kazan Univ, 500.

11. Laptev A. G., Farahov T. M. 2013. Matematicheskie modeli perenosa impul'sa v pogranichnom sloe [Mathematical models of momentum transfer in boundary layer]. Physics Engineering Journal, 86(3): 567–575.

12. Lomov S. A, Lomov I. S. 2011. Osnovy matematicheskoj teorii pogranichnogo sloya [Fundamentals of the mathematical theory of boundary layer]. M., MGU, 433.
13. Loytsyansky L. G. 2003. Mekhanika zhidkosti i gaza [Mechanics of liquid and gas]. M., Drofa, 840.
14. Lykov A. V. 1967. Teoriya teploprovodnosti [Theory of heat conductivity]. M., Vysshaya shkola, 599.
15. Lykov A. V. 1978. Teplomassoobmen. Spravochnik. The 2nd edition [Heat and mass exchange. Reference book]. M., Energia, 480.
16. Nikiforov A. F., Uvarov V. B. 1978. Specialnye funkcii matematicheskoj fiziki [Special functions of mathematical physics]. M., Nauka, 345.
17. Radchenko A. I. 1981. Matematicheskaya teoriya diffuzii v prilozheniyah [The mathematical theory of diffusion in applications]. Kiev, Naukova dumka, 396.
18. Reynolds A. J. 1979. Turbulentnye techeniya v inzhenernyh prilozheniyah [Turbulent flows in engineering applications]. M., Energia. 408.
19. Suhovich E. P. 2000. Sravnitel'nyj analiz modelej turbulentnosti [Comparative analysis of turbulence models]. Physics Engineering Journal, 73(2): 328–339.
20. Fedoryuk M. V. 2015. Asimptoticheskie metody dlya linejnyh obyknovennyh differencial'nyh uravnenij. [Asymptotic methods for linear ordinary differential equations]. M., Librocom, 354.
21. Tsoi P. V. 2005. Sistemnye metody rascheta kraevyh zadach teplomassoperenosa [System methods of calculation of boundary problems of heat and mass transfer]. M., MEI, 566.
22. Elahi S. S., Lange E. A., Lynch S. P. 2019. Effect of Reynolds number on turbulent junction flow fluid dynamics and heat transfer. International Journal of Heat and Mass Transfer, 142 (118328). DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2019.06.084 (in English).
23. Granvill R. S. 1990. A formula for coefficient of turbulent transfer in the direct vicinity of a wall in turbulent boundary layers with pressure gradient, suitable for the description of transfer of amount of movement, heat and weigh. Works of American Society of Mechanical Engineers, Modern mechanical engineering, 11: 67–70 (in English).
24. Kulkarni K. S., Madanan U., Mittal R., Goldstein R.G. 2017. Experimental validation of heat/mass transfer analogy for two-dimensional laminar and turbulent boundary layer. International Journal of Heat and Mass Transfer, 113: 84–95. DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2017.05.048 (in English).
25. Lesieur M. 2008. Turbulence In Fluids. 4th Edition, rev. and enlarged ed. Springer: 563 (in English).
26. Ostilla R., Stevens R. J., Grossman S., Verzicco R., Lohse D. 2013. Optimal Taylor-Couette flow: direct numerical simulations. Journal of Fluid Mechanics, 719: 14—46. DOI: 10.1017/jfm.2012.596 (in English).
27. Peeters J. W. R., Sandham N. D. 2019. Turbulent heat transfer in channels with irregular roughness. International Journal of Heat and Mass Transfer, 138: 445–467 DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2019.04.013 (in English).

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.
Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 12.12.2022
Поступила после рецензирования 25.01.2023
Принята к публикации 31.01.2023

Received 12.12.2022
Revised 25.01.2023
Accepted 31.01.2023

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Аверин Геннадий Викторович – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой компьютерных наук, Донецкий национальный университет
ул. Университетская, 1, Донецк, 283001, ДНР

Шевцова Мария Витальевна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики, Белгородский государственный национальный исследовательский университет

ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия

Бронникова Марина Владимировна – аспирант, Белгородский государственный национальный исследовательский университет

ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Gennadiy Averin – Doctor of Engineering Sciences, Professor, Head of the Department of Computer Technologies, Donetsk National University, Donetsk, DNR

Maria Shevtsova – Candidate of Physics and Mathematics Sciences, Associate Professor of the Department of Mathematics, Belgorod National Research University, Belgorod, Russian

Marina Bronnikova – graduate student, Belgorod National Research University, Belgorod, Russian Ra

Прикладная математика & Физика, 2023, том 55, № 1. С. 70–83.
Applied Mathematics & Physics, 2023, Volume 55, No 1. P. 70–83.

УДК 004.896 DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-1-70-83
MSC 93C85
оригинальное исследование

РАЗРАБОТКА ПРОГРАММНОГО МОДУЛЯ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ КИНЕМАТИКИ И ДИНАМИКИ МАНИПУЛЯТОРА

Ту Раин

(*Статья представлена членом редакционной коллегии С. М. Ситником*)

Белгородский государственный национальный исследовательский университет,
Белгород, 308015, Россия

E-mail: thurein.48@gmail.com

Аннотация. В статье предлагается разработка программного модуля для моделирования кинематики и динамики манипулятора с пятью степенями подвижности. Для решения прямой задачи кинематики манипулятора использован метод Денавита – Хартенберга. Для решения обратной задачи кинематики и динамики манипулятора использованы аналитические методы – метод Левенберга – Марквардта, метод Ньютона – Эйлера и метод мягких вычислений – адаптивная нейро-нечеткая система вывода. Разработан программный модуль для моделирования кинематики и динамики манипулятора с использованием программного комплекса системы автоматизированного проектирования SolidWorks и программы MatLab. Полученный программный модуль позволяет выполнять моделирование кинематики и динамики манипулятора на основе описываемых методов, визуализацию результатов моделирования, формирование траектории для целевого положения и ориентации рабочего органа манипулятора, имитационное моделирование движения манипулятора по заданной траектории.

Ключевые слова: компьютерное моделирование, моделирование кинематики, метод Левенберга – Марквардта, моделирование динамики, метод Ньютона – Эйлера, манипулятор

Для цитирования: Ту Раин. 2023. Разработка программного модуля для моделирования кинематики и динамики манипулятора. Прикладная математика & Физика, 55(1): 70–83. DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-1-70-83

DEVELOPMENT OF PROGRAM MODULE FOR MODELING KINEMATICS AND DYNAMICS OF MANIPULATOR

Thu Rain

(*Article submitted by a member of the editorial board S. M. Sitnik*)

Belgorod National Research University,
Belgorod, 308015, Russia
E-mail: thurein.48@gmail.com

Abstract. The article proposes the development of a software module for modeling the kinematics and dynamics of a manipulator with five degrees of freedom. To solve the forward kinematics problem of the manipulator, the Denavit-Hartenberg method was used. To solve the inverse the kinematics problem and inverse dynamics problem of the manipulator, analytical methods – the Levenberg – Marquardt method, the Newton – Euler method, and the soft computing method – adaptive neuro-fuzzy inference system were used. And a software module was developed for modeling the kinematics and dynamics of the manipulator using computer-aided design application SolidWorks and the MatLab program. The developed software module is able to simulate the kinematics and dynamics of the manipulator based on the described methods, visualize the simulation results, generate a trajectory for the target position and orientation of the end-effector of the manipulator, simulate the movement of the manipulator along a given trajectory.

Keywords: Computer Modeling, Kinematics Modeling, Levenberg – Marquardt Method, Dynamics Modeling, Newton – Euler Method, Manipulator

For citation: Thu Rain. 2023. Development of program module for modeling kinematics and dynamics of manipulator. Applied Mathematics & Physics, 55(1): 70–83. (in Russian) DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-1-70-83

1. Введение. Разработки программного обеспечения для кинематического и динамического моделирования манипуляторов требуются для исследования движения рабочего органа, анализа конструкций, разработки системы автоматического управления и алгоритмов функционирования манипуляторов [16, 9, 7, 4]. Одним из основных преимуществ программных симуляций является то, что они могут предоставить пользователям практическую обратную связь при разработке реальных систем. Это позволяет разработчику определить правильность и эффективность проекта еще до того, как система будет построена.

Существует несколько алгоритмов программного обеспечения для моделирования манипуляторов. Во многих работах для кинематического анализа различных манипуляторов использовалась программа RoboAnalyzer [11, 15, 7, 14]. Программное обеспечение для автоматизированного проектирования «САПР», такое как SolidWorks, CATIA и Autodesk, также используется для моделирования манипуляторов [3, 12]. В статье [13] рассмотрены методы моделирования манипуляторов с использованием различных программ, таких как GraspIt!, OpenGrasp, MATLAB/Simulink, SynGrasp, V-Realm Builder и ADAMS.

В статьях [6, 8] предлагаются методологии создания веб-графического пользовательского интерфейса для моделирования движения и кинематического исследования промышленных манипуляторов. В них описываются простые и понятные методы моделирования с использованием Web Graphics Library «WebGL» для создания любой трехмерной виртуальной модели манипуляторов на холсте HTML для имитации движения и различных видов анализа. Моделирование кинематического управления манипулятором на основе адаптивной нейро-нечеткой системы вывода «АНСВ» было представлено в работе [1]. В статье [17] разработана динамическая модель манипулятора с 6 степенями свободы с помощью уравнений Ньютона – Эйлера и проанализировано его динамическое поведение. Динамическое моделирование было выполнено с помощью программного обеспечения для динамического моделирования ADAMS. В работе [10] представлен метод анализа сил и моментов манипулятора с тремя степенями свободы, основанный на имитационной модели манипулятора в среде Matlab/Simulink, и проведено сравнение полученных результатов с математическим расчетом.

В данной работе приводится проектирование и реализация программного модуля компьютерного и имитационного моделирования манипулятора в рабочей зоне, реализующие разработанные алгоритмы и методы, позволит применять их в разработке манипуляторов, системах управления манипуляторами. Данный программный модуль компьютерного и имитационного моделирования также позволяет проводить эксперименты, необходимые для исследования предложенных в работе методов и алгоритмов. Разработанные программные модули предоставляют следующие функциональности: визуализация 3D-моделирования; взаимодействие с пользователем через графический интерфейс; расчет обратной задачи кинематики «ОЗК» манипулятора на основе метода Левенберга – Марквардта и АНСВ; расчет обратной задачи динамики «ОЗД» манипулятора на основе метода Ньютона – Эйлера и АНСВ; формирование траектории для целевого положения и ориентации рабочего органа манипулятора; имитационное моделирование движения манипулятора по заданной траектории.

2. Методология. Для программирования математического моделирования манипулятора была выбрана среда «MATLAB» Для реализации 3D-моделирования выбрана САПР-программа«SolidWorks» с целью достижения фактического размера, степени свободы и других факторов, касающихся анимации и моделирования манипулятора, будет разложен манипулятор с пятью степенями свободы, как показано на рисунке 1.

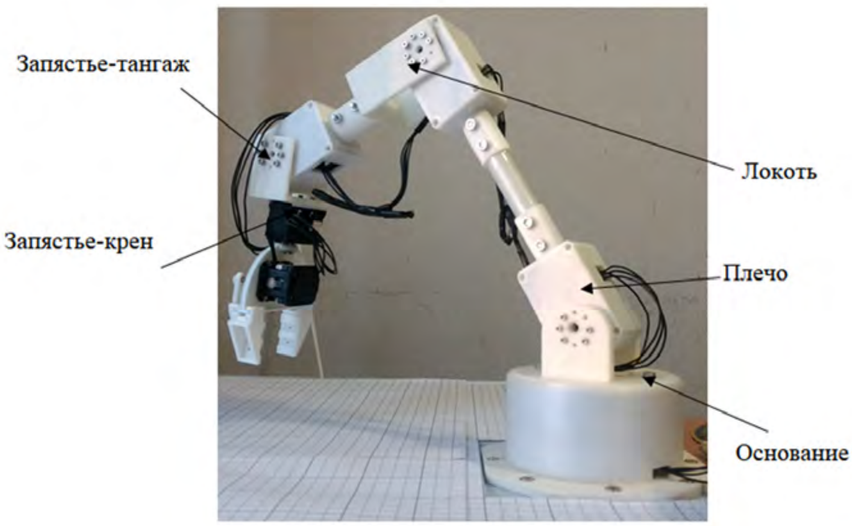

Рис. 1. Манипулятор с пятью степенями свободы
Fig. 1. Manipulator with five degrees of freedom

Процесс 3D-моделирования манипулятора разделен на два основных вида деятельности, а именно графический дизайн и дизайн поведения. Сначала была построена виртуальная геометрическая модель, использующая реальные размеры экспериментального манипулятора.

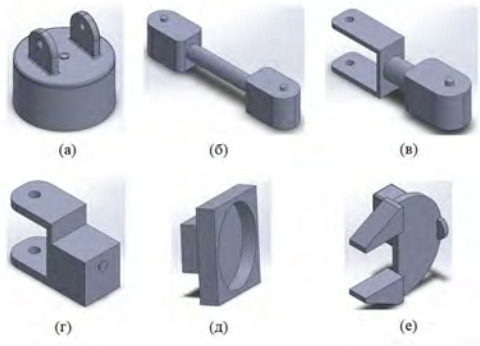

Рис. 2. 3D-детали манипулятора с пятью степенями свободы
Fig. 2. 3D parts of manipulator with five degrees of freedom

На рисунке 2 показаны разработанные 3D-детали звеньев манипулятора с пятью степенями свободы.

После разработки 3D-деталей отдельные детали были собраны в один файл «сборка». После ввода деталей в сборку были введены шарниры вращения манипулятора. Также при виртуальной сборке манипулятора, помимо обычных ограничений, 3D-детали помещаются в вертикальное положение. Это положение было принято для облегчения следующих шагов; собранное положение рассматривается как исходное, и все изменения углов стыков рассчитываются в соответствии с этим положением. Полученная 3D-модель, выбор системы координат и кинематические параметры манипулятора представлены на рисунке 3.

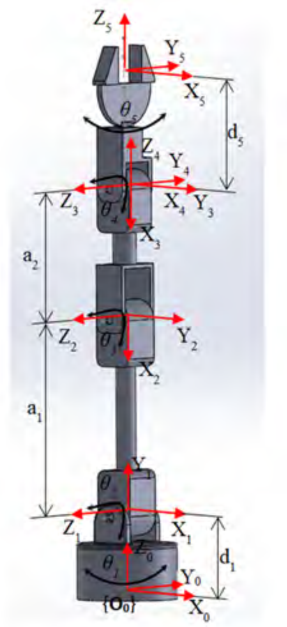

Рис. 3. 3D-модель сборки манипулятора с пятью степенями свободы
Fig. 3. 3D assembly model of manipulator with five degrees of freedom

Значения соответствующих параметров указаны в таблице 1 и геометрических параметров в таблице 2.

Таблица 1. Параметры Денавита – Хартенберга (Д-Х) манипулятора с пятью степенями свободы
Table 1. Denavit-Hartenberg parameters of manipulator with five degrees of freedom

Звено	a_{i-1} (м)	α_{i-1} (рад)	d (м)	θ (рад)
1	0	$\pi/2$	d_1	θ_1
2	0.246	0	0	θ_2
3	0.163	0	0	θ_3
4	0	$-\pi/2$	0	θ_4
5	0	0	0.165	θ_5

Затем модель интерпретируется в формат URDF (Унифицированный формат описания робототехники) для проведения моделирования и анализа. На рисунке 4 показан процесс перевода САПР, который, по

Таблица 2. Геометрические параметры манипулятора

Table 2. Geometric parameters of the manipulator

Звено	Высота (м)	Радиус (м)	Масса (кг)
1	0.071	0.06	0.102
2	0.295	0.035	0.569
3	0.205	0.035	0.310
4	0.091	0.035	0.123
5	0.08	0.05	0.142

сути, состоит из двух этапов. Первоначально сборка САПР, разработанная в SolidWorks, экспортируется в формат URDF. Затем файл URDF импортируется в MATLAB для создания имитационной модели, которая будет открыта в среде моделирования.

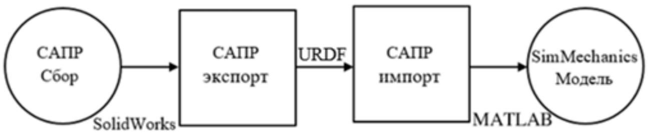

Рис. 4. Процесс перевода САПР

Fig. 4. The process of CAD assembly file translation

3. Разработка компонентов программного интерфейса «GUI». Для упрощения экспериментальной работы и получения лучшего представления о поведении системы в среде MATLAB был разработан графический пользовательский интерфейс (GUI) с использованием инструмента Среды разработки графического пользовательского интерфейса MATLAB (GUIDE). Для выбранного набора параметров графический интерфейс выполняет моделирование, отображающее временные характеристики углов сочленения, крутящих моментов в сочленениях и положения рабочего органа манипулятора. На рисунке 5 изображено основное окно программы, в левой части которого находится группа меню, в центральной части находятся панели вводов и выводов и в правой части находится панель визуализации манипулятора. Используя переключатели в группе меню, пользователь выбирает необходимый тип задачи:

1. Прямая задача кинематики,
2. Обратная задача кинематики,
3. Траектория и динамика.

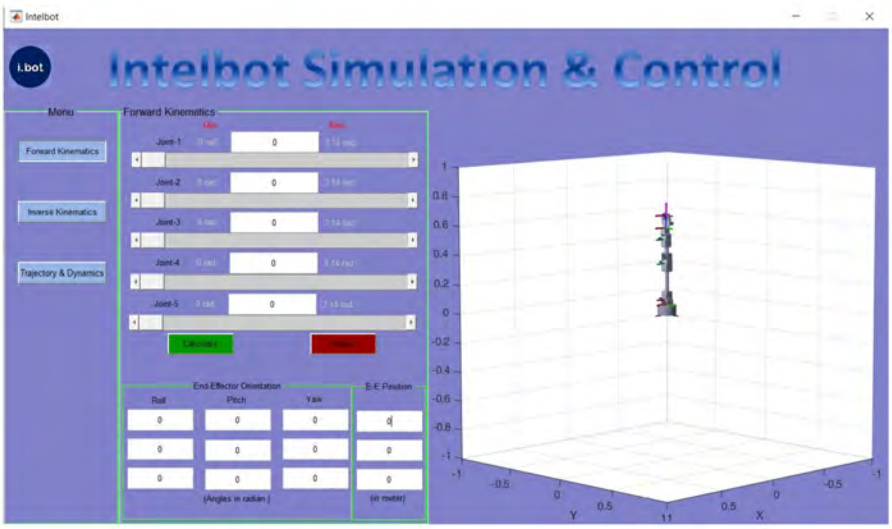

Рис. 5. Основное окно программы

Fig. 5. The main window of the program

4. Разработка программного компонента решения прямой задачи кинематики манипулятора. Определение положения и ориентации рабочего органа при заданных значений вектора обобщенных координат манипулятора называется прямой задачей кинематики. Прямую задачу кинематики манипулятора формулируют следующим образом: по заданному вектору обобщенных координат

$\theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5)^T$ найти положение и ориентацию рабочего органа $s = f(\theta)$. Положение и ориентацию рабочего органа будем искать в форме матрицы однородного преобразования:

$$T_i = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Согласно правилам Денавита – Хартенберга, матрица однородного преобразования T_i, которая имеет вид

$$T_i = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i c\alpha_i & s\theta_i s\alpha_i & a_i c\alpha_i \\ s\theta_i & c\theta_i c\alpha_i & -c\theta_i s\alpha_i & a_i s\alpha_i \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

задает переход от системы координат (i–ого) звена к системе координат (i–ого) звена. Выполняя необходимые вычисления, получим ориентацию рабочего органа:

$$\begin{gathered} n_x = s_1 s_5 - c_5[c_4(c_1 s_2 s_3 - c_1 c_2 c_3) + s_4(c_1 c_2 s_3 + c_1 c_3 s_2)], \\ n_y = -c_1 s_5 - c_5[c_4(s_1 s_2 s_3 - c_2 c_3 s_1) + s_4(c_2 s_1 s_3 + c_3 s_1 s_2)], \\ n_z = c_5(c_4 s_{23} + s_4 c_{23}), \\ o_x = c_5 s_1 + [c_4(c_1 s_2 s_3 - c_1 c_2 c_3) + s_4(c_1 c_2 s_3 + c_1 c_3 s_2)], \\ o_y = s_5[c_4(s_1 s_2 s_3 - c_2 c_3 s_1) + s_4(c_2 s_1 s_3 + c_3 s_1 s_2)] - c_1 c_5, \\ o_z = -s_5[c_4(c_2 s_3 + c_3 s_2) + s_4(c_2 c_3 - s_2 s_3)], \\ a_x = c_4(c_1 c_2 s_3 + c_1 c_3 s_2) - s_4(c_1 s_2 s_3 - c_1 c_2 c_3), \\ a_y = c_4(c_2 s_1 s_3 + c_3 s_1 s_2) - s_4(s_1 s_2 s_3 - c_2 c_3 s_1), \\ a_z = s_4(c_2 s_3 + c_3 s_2) - c_4(c_2 c_3 - s_2 s_3). \end{gathered}$$

А положение рабочего органа:

$$\begin{gathered} p_x = d_5[c_4(c_1 c_2 s_3 + c_1 c_3 s_2) - s_4(c_1 s_2 s_3 - c_1 c_2 c_3)] + a_2 c_1 c_2 + a_3 c_1 c_2 c_3 - a_3 c_1 s_2 s_3, \\ p_y = d_5[c_4(c_2 s_1 s_3 + c_3 s_1 s_2) - s_4(s_1 s_2 s_3 - c_2 c_3 s_1)] + a_2 c_2 s_1 + a_3 c_2 c_3 s_1 - a_3 s_1 s_2 s_3, \\ p_z = d_1 + a_2 s_2 - d_5[c_4(c_2 c_3 - s_2 s_3) - s_4(c_2 s_3 + c_3 s_2)] + a_3 c_2 s_3 + a_3 c_3 s_2. \end{gathered}$$

На рисунке 6 приведена блок-схема алгоритма программного компонента прямой задачи кинематики.

Рис. 6. Блок-схема алгоритма программы прямой задачи кинематики
Fig. 6. Block diagram of the program algorithm for the forward kinematics

5. Разработка программного компонента решения обратной задачи кинематики манипулятора. Метод Левенберга – Марквардта. Определение вектора обобщенных координат, который позволяет манипулятору достичь желаемых положения и ориентаций рабочего органа, называется обратной задачей кинематики. В данной работе для численного решения обратной задачи кинематики используется метод Левенберга – Марквардта. Кинематические параметры манипулятора представлены набором ограничений, которые накладываются на вектор обобщенных координат. Ограничение по положению рабочего органа можно записать как:

$$p_i(\theta) = p_i^d,$$

где $p \in \mathbb{R}^3$ – текущее положение рабочего органа; $p^d \in \mathbb{R}^3$ – целевое положение в пространстве. Для ограничения ориентации

$$R_i(\theta) = R_i^d,$$

где $R_i \in SO(3)$ – ориентация рабочего органа; $R_i^d \in SO(3)$ – целевая ориентация в пространстве. В обоих случаях вектор невязок $e_i(\theta)$ может быть определен как

$$e_i(\theta) = \begin{cases} p_i^d - p_i(\theta) \\ \alpha(R_i^d R_i(\theta)^T) \end{cases},$$

где $\alpha(R) \in \mathbb{R}^3$ для произвольного $R \in SO(3)$ – эквивалентный вектор угла-оси.

Принимая число всех ограничений $3m$, определим вектор невязок $e(\theta) \in \mathbb{R}^{3m}$ как:

$$e(\theta) = \begin{bmatrix} e_1^T(\theta) & e_1^T(\theta) & \cdots & e_m^T(\theta) \end{bmatrix}^T.$$

Решение обратной задачи кинематики сводится к решению следующего нелинейного уравнения:

$$e(\theta) = 0.$$

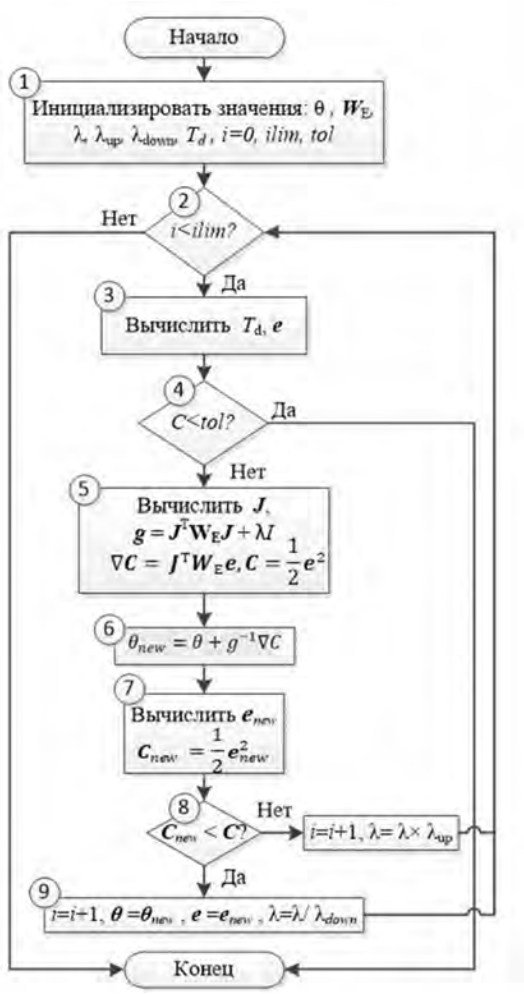

Рис. 7. Блок-схема алгоритма Левенберга – Марквардта
Fig. 7. Block diagram of the Levenberg – Marquardt algorithm

Алгоритм метода Левенберга – Марквардта представлен на рисунке 7 в виде блок-схемы и включает следующие этапы:

Шаг 1. Инициализация значений, которые будут использоваться для настройки коэффициента демпфирования: параметров θ, весовой матрицы W_E, параметра λ, а также λ_{up} и λ_{down}.

Шаг 2. Проверка счетчика итераций: если счетчик итераций не достиг максимального количества шагов, то переход к шагу 3, если достиг, то переход к концу алгоритма.

Шаг 3. Расчет матрицы преобразования T_i и оценка вектора невязок $\mathbf{e}$.

Шаг 4. Проверка: если $C < tol$, то переход к концу; если $C > tol$, то переход к шагу 5.

Шаг 5. Вычисление матрицы Якобиана $J, g_k = JW_EJ + \lambda I$, функции стоимости, $\nabla C = J^T W_E e$ и $C = \dfrac{1}{2}e^2$.

Шаг 6. Вычисление нового значения $\theta_{new} = \theta + g^{-1}\nabla C$.

Шаг 7. Оценка нового вектора невязок e_{new} в точке, заданной θ_{new} и вычисление функции оценки в новой точке $C_{new} = \dfrac{1}{2}e^2_{\text{new}}$.

Шаг 8. Проверка: если $C_{new} > C$, то отклонить шаг, сохранить старый параметр предположения θ и старые невязки e, и настроить $\lambda = \lambda \times \lambda_{\text{up}}$ и переход к шагу 2.

Шаг 9. Проверка: если $C_{new} < C$, то принимать шаг $\theta = \theta_{\text{new}}$, и установить $e = e_{\text{new}}$ и $\lambda = \lambda/\lambda_{\text{down}}$ и переход к шагу 2.

6. Адаптивная нейро-нечеткая система вывода «АНСВ» для рушения ОЗК. В этой работе для прогнозирования углов относительно поворота и крутящего момента сочленений звеньев манипулятора, необходимых для выполнения заданной траектории в рабочей зоне, используется АНСВ как другой способ. АНСВ состоит из нейронов, соединенных направленными связями, в которых каждый нейрон выполняет определенную функцию на своих входящих сигналах для генерации выходного сигнала одного нейрона. Для прогнозирования углов относительно поворота сочленений звеньев манипулятора используются 5 АНСВ. В каждой АНСВ значения координаты (p_x, p_y, p_z), задающие положение и значения (γ, β, α), задающие ориентацию схвата манипулятора работают как входные значения, а значения углов относительно поворота звеньев $(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5)$ работают как выходные значения. На рисунке 8 представлены структуры АНСВ с шестью входами и одним выходом для прогнозирования ОЗК, а сводка параметров и факторов, учитываемых при разработке модели АНСВ, представлена в таблице 3.

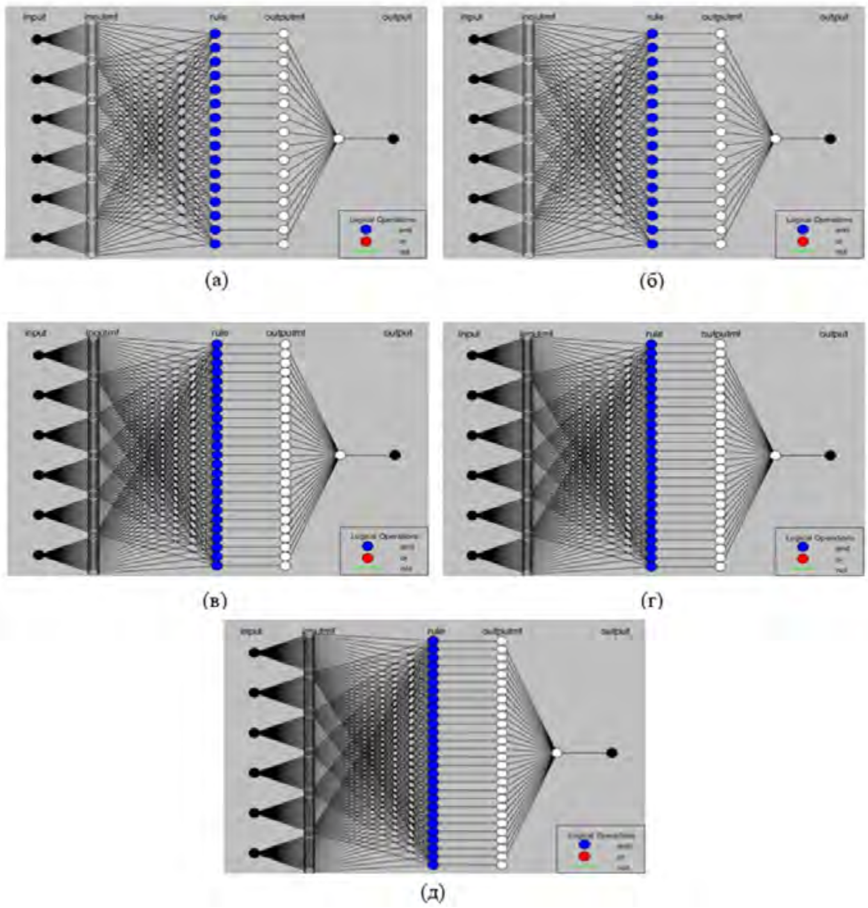

Рис. 8. Структуры АНСВ (а) звена-1, (б) звена-2, (в) звена-3, (г) звена-4 и (д) звена-5 для решения ОЗК
Fig. 8. Structures of ANFIS (a) link-1, (b) link-2, (c) link-3, (d) link-4 and (e) link-5 for solving inverse kinematics problem

На рисунке 9 приведена блок-схема алгоритма программного компонента обратной задачи кинематики.

Таблица 3. Параметры и факторы моделей АНСВ для ОЗК
Table 3. Parameters and Factors of ANFIS Models for inverse kinematics problem

Звено	АНСВ-1	АНСВ-2	АНСВ-3	АНСВ-4	АНСВ-5
Количество входов	6	6	6	6	6
Количество выходов	1	1	1	1	1
Тип функций принадлежности	Gaussian	Gaussian	Gaussian	Gaussian	Gaussian
Количество функций принадлежности	23	21	25	26	31
Количество узлов	331	303	359	373	443

Рис. 9. Блок-схема алгоритма программы обратной задачи кинематики
Fig. 9. Block diagram of the program algorithm for the inverse kinematics

7. Разработка программного компонента решения обратной задачи динамики манипулятора. Метод Ньютона – Эйлера для рушения ОЗД. Определение самих управляющих крутящих моментов, обеспечивающих требуемые законы движения звеньев, является обратной задачей динамики. Алгоритм Ньютона – Эйлера состоит из двух частей – прямой рекурсии и обратной рекурсии. Прямая рекурсия позволяет определить скорости и ускорения звеньев, обобщенные силы и моменты сил, действующих на все звенья $1-n$. Рекурсивные уравнения имеют следующий вид:

$$\omega_{i+1} = R_i^{i+1}\omega_i + \dot{\theta}_{i+1}\hat{Z}_{i+1}$$
$$\dot{\omega}_{i+1} = R_i^{i+1}\dot{\omega}_i + R_i^{i+1}\omega_i \times \dot{\theta}_{i+1}\hat{Z}_{i+1} + \ddot{\theta}_{i+1}\hat{Z}_{i+1}$$
$$\dot{v}_{i+1} = R_i^{i+1}(\dot{\omega}_i \times b_i^{i+1} + \omega_i \times b_{i+1}^i) + \dot{v}_i$$
$$\dot{v}_{C_i+1} = \dot{\omega}_{i+1} \times b_{i+1}^{C_i+1} + \omega_{i+1} \times (\omega_{i+1} \times b_{C_i+1}^{i+1}) + \dot{v}_{i+1},$$

где ω_i – угловая скорость звена i; $\dot{\omega}_i$ – угловое ускорение звена i; R_i^{i+1} – матрица перехода от системы координат звена i в систему координат звена $i+1$; $\dot{\theta}_i$ – угловая скорость вращения шарнира i; $\ddot{\theta}_i$ – угловое ускорение вращательного шарнира i; $\hat{Z}_i$ – ось вращательного сочленения i; b_i^{i+1} – вектор от начала системы координат i до начала системы координат $i+1$; $b_{C_i}^i$ – вектор от начала системы координат i до центра масс звена i; $\dot{v}_i$ – ускорение начала системы координат звена i; $\dot{v}_{C_i}^i$ – ускорение центра масс звена i.

Зная линейное и угловое ускорения центра масс для каждого звена, можно использовать уравнения Ньютона – Эйлера для вычисления моментов сил инерции, приложенных в центре масс каждого из звеньев. Таким образом, имеем

$$F_{i+1} = m_{i+1}\dot{v}_{C_i}$$
$$N_{i+1} = I_{i+1}\dot{\omega}_{i+1} + \omega_{i+1} \times I_{i+1}\omega_{i+1},$$

где F_i – общая внешняя сила на звено i; m_i – общая масса звена i; N_i – суммарный внешний крутящий момент на звене i; I_i – тензор инерции звена i относительно его центра масс. Обратная рекурсия требует вычисления сил и моментов сил взаимодействия, а также моментов, развиваемых в приводах, начиная от конечного звена манипулятора (n) и обратно к основанию.

$$f_i = R_{i+1}^i f_{i+1} + F_i,$$
$$n_i = N_i + R_{i+1}^i n_{i+1} + b_{C_i}^i \times F_i + b_{i+1}^i \times R_{i+1}^i f_{i+1},$$
$$\tau_i = n_i^T \hat{Z}_i,$$

где f_i – сила, действующая на звено (i) со стороны звена $(i\breve{}1)$; n_i – момент, действующий на звено (i) со стороны звена $(i\breve{}1)$; τ_i – входной крутящий момент в шарнире (i). На рисунке 10 представлена блок-схема алгоритма для метода Ньютона – Эйлера, который используется для решения обратной задачи динамики манипулятора [2].

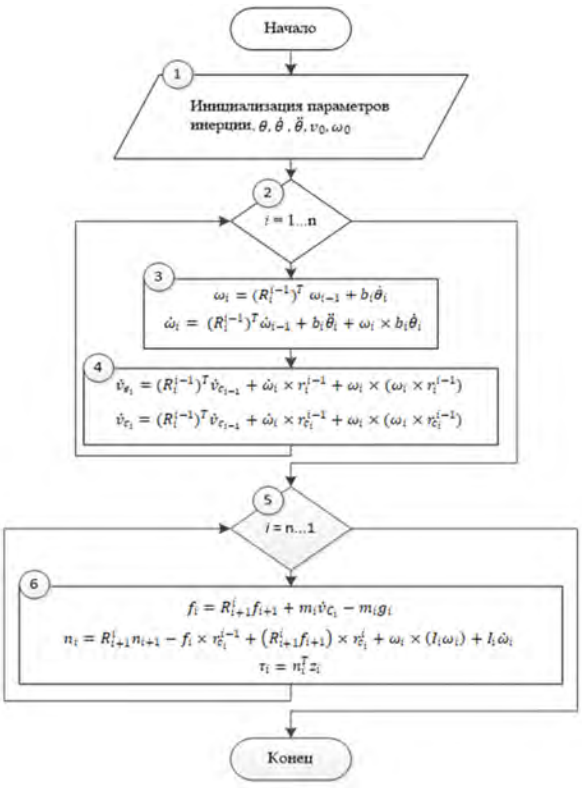

Рис. 10. Блок-схема алгоритма Ньютона – Эйлера для решения обратной задачи динамики манипулятора
Fig. 10. Block diagram of the Newton – Euler algorithm for solving the inverse dynamics problem of manipulator

8. Адаптивная нейро-нечеткая система вывода «АНСВ» для рушения ОЗД. Для прогнозирования и крутящего момента сочленений звеньев манипулятора используются 5 АНСВ. В каждой АНСВ, значения

$(\theta_i, \dot{\theta}_i, \ddot{\theta}_i)$, задающие векторы положений, скоростей и ускорений в шарнирах соответственно работают как входные значения, а значения (τ_i), задающие векторы крутящего момента, работают как выходные значения. На рисунке 11 представлены структуры АНСВ с двенадцатью входами и одним выходом для прогнозирования ОЗД, а сводка параметров и факторов, учитываемых при разработке модели АНСВ, представлена в таблице 4.

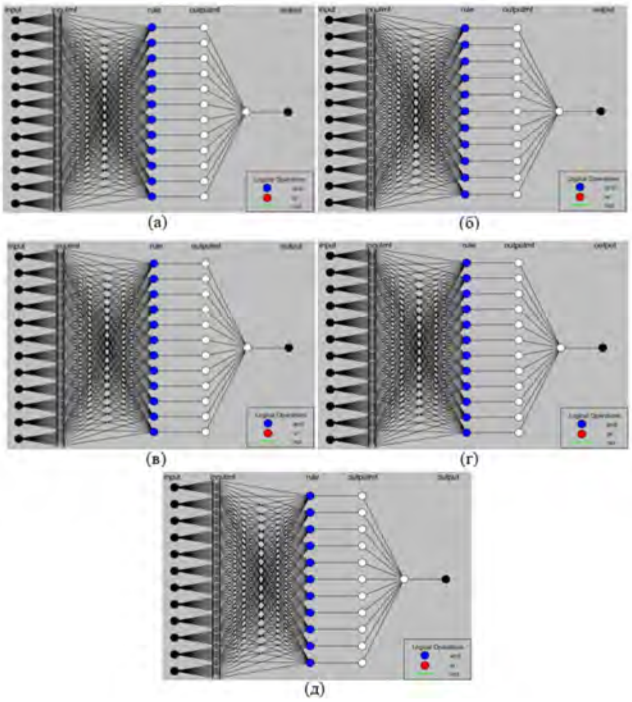

Рис. 11. Структуры АНСВ (а) звена-1, (б) звена-2, (в) звена-3, (г) звена-4 и (д) звена-5 для решения ОЗД
Fig. 11. Structures of ANFIS (a) link-1, (b) link-2, (c) link-3, (d) link-4 and (e) link-5 for solving inverse dynamics problems

Таблица 4. Параметры и факторы моделей АНСВ для ОЗД
Table 4. Parameters and Factors of ANFIS Models for inverse dynamics problem

Звено	АНСВ-1	АНСВ-2	АНСВ-3	АНСВ-4	АНСВ-5
Количество входов	12	12	12	12	12
Количество выходов	1	1	1	1	1
Тип функций принадлежности	Gaussian	Gaussian	Gaussian	Gaussian	Gaussian
Количество функций принадлежности	12	11	12	12	11
Количество узлов	327	301	327	327	301

На рисунке 12 приведена блок-схема алгоритма программного компонента обратной задачи динамики.

Рис. 12. Блок-схема алгоритма программы обратной задачи динамики
Fig. 12. Block diagram of the program algorithm for the inverse dynamics

9. Результаты моделирования. При запуске приложения на экране появляется форма, см. рисунок 5. В режиме прямой кинематики пользователь определяет значения углов, перетаскивая ползунок в пяти суставах соответственно или вводя значение углов через текстовое поле (показано в окне в верхней центральной части экрана). При изменении значений углов манипулятор в 3D-пространстве будет перемещаться в соответствующие положения и ориентации в режиме реального времени (отображается в окне в правой части экрана). На основе заданных значений углов звеньев программа вычисляет положение и ориентацию рабочего органа при нажатии кнопки «Calculate». Как показано на рисунке 13, значения углов пяти звеньев манипулятора и их соответствующее положение и ориентация рабочего органа показаны в текстовых полях.

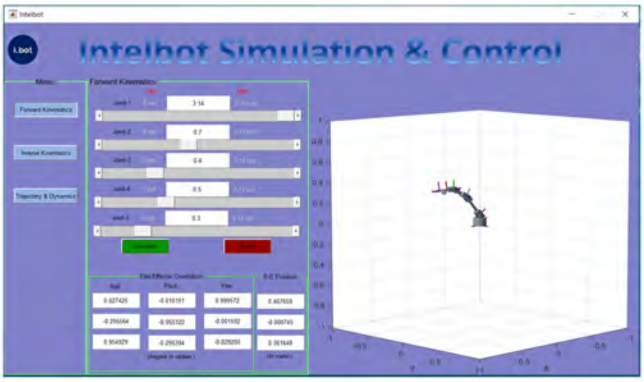

Рис. 13. Программа в режиме прямой кинематики
Fig. 13. Program in forward kinematics mode

В режиме обратной кинематики определяется вектор обобщенных координат сочленений звеньев, который позволяет манипулятору достичь желаемых положения и ориентаций рабочего органа. Желаемое положение и ориентацию рабочего органа манипулятора можно настроить, введя положение и ориентацию с помощью текстовых полей (показано в окне в верхней левой части экрана) или исходя из результата режима прямой кинематики (рисунок 14). В методе расчета выбор включает возможность использования метода АНСВ или численного метода. Затем вектор обобщенных координат сочленений звеньев будет рассчитано в режиме реального времени по обратному кинематическому алгоритму программы-скрипта (см. рисунок 9).

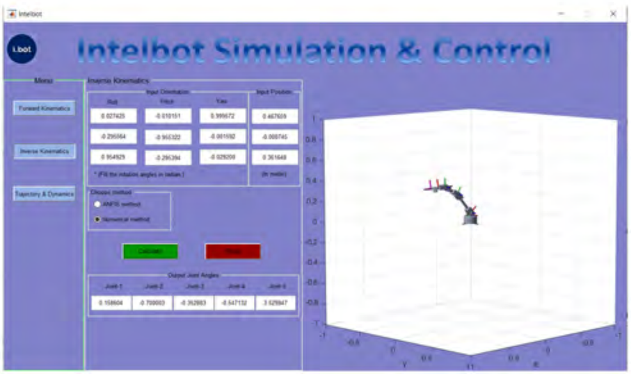

Рис. 14. Программа в режиме обратной кинематики
Fig. 14. Program in inverse kinematics mode

Режим обратной динамики определяет требуемые крутящие моменты для обеспечения движения исполнительного звена манипулятора по заданной траектории. В этом режиме, во-первых, необходимо настроить траекторию рабочего органа в обратной динамике. Здесь в программе используется метод планирования траектории на основе вектора обобщенных координат шарнирных сочленений звеньев манипулятора. Пположения, скорости и ускорения сочленений будут рассчитываться с помощью прогрммы формирования траектории. В методе расчета выбор включает возможность использования метода АНСВ или численного метода. Крутящие моменты каждого сочленения, требуемые для обеспечения движения по заданной траектории, будут рассчитываться по обратному динамическому алгоритму программы-скрипта (см. рисунок 12). В виртуальной среде можно отобразить траекторию движения рабочего органа манипулятора, рисунок 15. А также требуемые крутящие моменты, положение, угловая скорость и угловое ускорение каждого звена могут отобразиться с помощью графиков, которые могут служить ориентиром для проектирования системы управления и конструкции манипулятора.

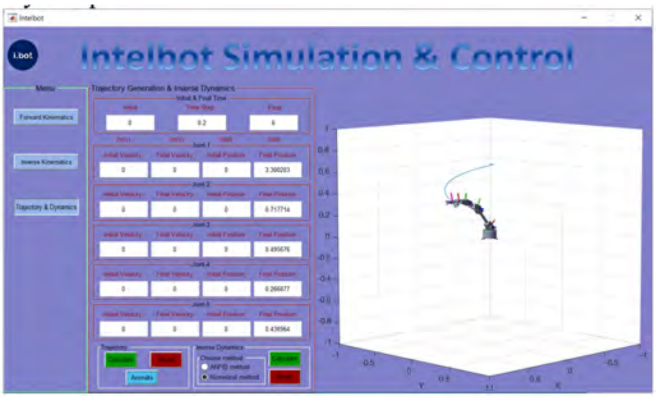

Рис. 15. Программа в режиме обратной динамики
Fig. 15. Program in inverse dynamics mode

Заключение. В данной работе использован язык программирования MATLAB для программирования математического моделирования. Для реализации 3D-модели манипулятора использована САПР-программа «SolidWorks». Разработаны программные модули для компьютерного и имитационного моделирования перемещения манипулятора в рабочей зоне со следующими функциями: визуализация 3D-моделирования; взаимодействие с пользователем через графический интерфейс; расчет ОЗК манипулятора на основе метода Левенберга – Марквардта; расчет ОЗК манипулятора на основе АНСВ; расчет ОЗД манипулятора на основе метода Ньютона – Эйлера и визуализация результатов; расчет ОЗД манипулятора на основе АНСВ и визуализация результатов; формирование траектории для целевого положения и ориентации рабочего органа манипулятора; имитационное моделирование движения манипулятора по заданной траектории.

Список литературы

1. Раин Т., Довгаль В. М., Ян Н. С. 2018. Моделирование кинематического управления роботом-манипулятором «Intelbot» на основе адаптивной нейро-нечеткой системы вывода (ANFIS). Научные ведомости БелГУ. Сер. Экономика. Информатика, 45(3): 497–509.

2. Раин Т., Ян Н. С. 2019. Моделирование динамики манипулятора с использованием адаптивной нейро-нечеткой системы вывода. Научный журнал «Моделирование, оптимизация и информационные технологии», 7(4): 1–14.

3. Adam S. A., Zhou Ji-Pin, Zhang Yi-hua. 2017. Modeling and simulation of 5DOF robot manipulator and trajectory using MATLAB and CATIA. 3rd International Conference on Control, Automation and Robotics (ICCAR): 36-40. DOI:10.1109/ICCAR.2017.7942657.

4. Amit T., Vinod K. 2020. Design, simulation, and analysis of a 6-axis robot using robot visualization software. IOP Conference Series: Materials Science and Engineering, 872: 1–9. DOI 10.1088/1757-899X/872/1/012040

5. Chauhan S. S., Khare A. K. 2020. Kinematic Analysis of the ABB IRB 1520 Industrial Robot Using RoboAnalyzer Software. Evergreen. Joint Journal of Novel Carbon Resource Sciences & Green Asia Strategy, 07(04): 510–518.

6. Dey U., Cheruvu S. K. 2020. A web-based integrated GUI for 3D modeling, kinematic study, and control of robotic manipulators. Computer Applications in Engineering Education, 28(4): 1028–1040.

7. George E. I., Smith R., Levy J. S., Brand T. C. 2019. Simulation in Robotic Surgery. Comprehensive Healthcare Simulation: Surgery and Surgical Subspecialties, Comprehensive: 191–220. https://doi.org/10.1007/978-3-319-98276-2_17

8. Kuruganti Y. S., Ganesh A. S. D., Ivan D. D., Chittawadigi R. G. 2021. Effective Teaching of Homogenous Transformations and Robot Simulation Using Web Technologies. Congress on Intelligent Systems. CIS 2020. Advances in Intelligent Systems and Computing, 1335: 687–699.

9. Maram S., Yashaswi K., Chittawadigi R., Saha S. 2019. Effective Teaching and Learning of Homogenous Transformation Matrix using RoboAnalyzer Software. In Proceedings of the Advances in Robotics (AIR 2019): 4th International Conference of the Robotics Society: 1-5. https://doi.org/10.1145/3352593.3352611
10. Mickoski I., Mickoski H., Djidrov M. 2018. Dynamic modeling and simulation of three-member robot manipulator. Mathematical Models in Engineering, 4(4), Issue 4: 183–190. https://doi.org/10.21595/mme.2018.20319
11. Othayoth R. S., Chittawadigi R. G., Joshi R. P., Saha S. K. 2017. Robot kinematics made easy using RoboAnalyzer software. Computer Applications in Engineering Education 25(5): 669–680.
12. Sabnis C. V., Anjana N. R., Talli A., Giriyapur A. C. 2021. Modelling and Simulation of Industrial Robot Using SolidWorks. Advances in Industrial Machines and Mechanisms. Select Proceedings of IPROMM 2020: 173–182. https://doi.org/10.1007/978-981-16-1769-0_16
13. Shivani R., Shruti T., Chaitali P. 2017. A Parallel Study of Designing and Simulation of Industrial Robotics. International Journal of Electrical, Electronics and Data Communication (IJEEDC), 5(2): 55–60.
14. Sinha S. S., Chittawadigi R. G., Saha S. K. 2018. Inverse Kinematics for General 6 R Manipulators in RoboAnalyzer. The 5th Joint International Conference on Multibody System Dynamics (IMSD 2018): 1–9.
15. Talli A., Marebal D. 2021. Kinematic Analysis and Simulation of Robotic Manipulator Based on RoboAnalyzer. Smart Sensors Measurements and Instrumentation. Lecture Notes in Electrical Engineering, 750: 59–69.
16. Xu X. et al., 2018. Robotic kinematics teaching system with virtual reality, remote control and an on–site laboratory, Int. J. Mech. Eng. Educ. 48(3): 197–220.
17. Yang L., Zhang X. 2015. Dynamics Modeling and Simulation of Robot Manipulator. Intelligent Robotics and Applications. Lecture Notes in Computer Science, 9246: 524–535. https://doi.org/10.1007/978-3-319-22873-0_47

References

1. Rain T., Dovgal V. M., Yan N. S. 2018. Modelling of the adaptive neuro-fuzzy inference system based control of 5-dof robotic manipulator “Intelbot”. Belgorod State University Scientific Bulletin. (Economics. Information Technologies), 45(3): 497–509 (in Russian).
2. Rain T., Yan N. S. 2019. Dynamic modelling of manipulator using adaptive neuro fuzzy inference system Modeling, Optimization And Information Technology (MOIT), 7(4): 1–14 (in Russian).
3. Adam S. A., Zhou Ji-Pin, Zhang Yi-hua. 2017. Modeling and simulation of 5DOF robot manipulator and trajectory using MATLAB and CATIA. 3rd International Conference on Control, Automation and Robotics (ICCAR): 36-40. DOI:10.1109/ICCAR.2017.7942657.
4. Amit T., Vinod K. 2020. Design, simulation, and analysis of a 6-axis robot using robot visualization software. IOP Conference Series: Materials Science and Engineering, 872: 1–9. DOI 10.1088/1757-899X/872/1/012040
5. Chauhan S. S., Khare A. K. 2020. Kinematic Analysis of the ABB IRB 1520 Industrial Robot Using RoboAnalyzer Software. Evergreen. Joint Journal of Novel Carbon Resource Sciences & Green Asia Strategy, 07(04): 510–518.
6. Dey U., Cheruvu S. K. 2020. A web-based integrated GUI for 3D modeling, kinematic study, and control of robotic manipulators. Computer Applications in Engineering Education, 28(4): 1028–1040.
7. George E. I., Smith R., Levy J. S., Brand T. C. 2019. Simulation in Robotic Surgery. Comprehensive Healthcare Simulation: Surgery and Surgical Subspecialties, Comprehensive: 191–220. https://doi.org/10.1007/978-3-319-98276-2_17
8. Kuruganti Y. S., Ganesh A. S. D., Ivan D. D., Chittawadigi R. G. 2021. Effective Teaching of Homogenous Transformations and Robot Simulation Using Web Technologies. Congress on Intelligent Systems. CIS 2020. Advances in Intelligent Systems and Computing, 1335: 687–699.
9. Maram S., Yashaswi K., Chittawadigi R., Saha S. 2019. Effective Teaching and Learning of Homogenous Transformation Matrix using RoboAnalyzer Software. In Proceedings of the Advances in Robotics (AIR 2019): 4th International Conference of the Robotics Society: 1–5. https://doi.org/10.1145/3352593.3352611

10. Mickoski I., Mickoski H., Djidrov M. 2018. Dynamic modeling and simulation of three-member robot manipulator. Mathematical Models in Engineering, 4(4), Issue 4: 183–190. https://doi.org/10.21595/mme.2018.20319

11. Othayoth R. S., Chittawadigi R. G., Joshi R. P., Saha S. K. 2017. Robot kinematics made easy using RoboAnalyzer software. Computer Applications in Engineering Education 25(5): 669–680.

12. Sabnis C. V., Anjana N. R., Talli A., Giriyapur A. C. 2021. Modelling and Simulation of Industrial Robot Using SolidWorks. Advances in Industrial Machines and Mechanisms. Select Proceedings of IPROMM 2020: 173–182. https://doi.org/10.1007/978-981-16-1769-0_16

13. Shivani R., Shruti T., Chaitali P. 2017. A Parallel Study of Designing and Simulation of Industrial Robotics. International Journal of Electrical, Electronics and Data Communication (IJEEDC), 5(2): 55–60.

14. Sinha S. S., Chittawadigi R. G., Saha S. K. 2018. Inverse Kinematics for General 6 R Manipulators in RoboAnalyzer. The 5th Joint International Conference on Multibody System Dynamics (IMSD 2018): 1–9.

15. Talli A., Marebal D. 2021. Kinematic Analysis and Simulation of Robotic Manipulator Based on RoboAnalyzer. Smart Sensors Measurements and Instrumentation. Lecture Notes in Electrical Engineering, 750: 59–69.

16. Xu X. et al., 2018. Robotic kinematics teaching system with virtual reality, remote control and an on–site laboratory, Int. J. Mech. Eng. Educ. 48(3): 197–220.

17. Yang L., Zhang X. 2015. Dynamics Modeling and Simulation of Robot Manipulator. Intelligent Robotics and Applications. Lecture Notes in Computer Science, 9246: 525–535. https://doi.org/10.1007/978-3-319-22873-0_47

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.
Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 26.12.2022
Поступила после рецензирования 13.02.2023
Принята к публикации 17.02.2023

Received 26.12.2022
Revised 13.02.2023
Accepted 17.02.2023

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Ту Раин – научный соискатель кафедры математического и программного обеспечения информационных систем, Белгородский государственный национальный исследовательский университет
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Thu Rain – Research Applicant, Department of Mathematical and Software Information Systems, Belgorod National Research University, Belgorod, Russia

Прикладная математика & Физика, 2023, том 55, № 1. С. 84–86.
Applied Mathematics & Physics, 2023, Volume 55, No 1. P. 84–86.

ПЕРСОНАЛИИ
PERSONNEL

К 75-летию профессора Георгия Генриховича Брайчева,

профессор Московского педагогического государственного университета,
профессор Математического института им. С. М. Никольского
Российского университета дружбы народов

19 марта 2023 года исполнилось 75 лет Георгию Генриховичу Брайчеву, доктору физико-математических наук, профессору кафедры математического анализа Института математики и информатики Московского педагогического государственного университета, профессору Математического института им. С. М. Никольского Российского университета дружбы народов.

Георгий Генрихович ведет научно-педагогическую деятельность более 40 лет. Читает основные курсы математического и комплексного анализа, а также авторские спецкурсы по выбору, обеспечивая подготовку научно-педагогических кадров и осуществляя научное руководство в магистратуре (01.04.01 Математика) и аспирантуре (01.06.00 Математика и механика по специальности Вещественный, комплексный и функциональный анализ). Автор учебных пособий по математическому анализу и теории функций комплексного переменного, в том числе учебника и сборника задач по математическому анализу на французском языке.

Декан математического факультета МПГУ (1994-2001, 2010-2015). С 2012 по 2015 гг. заведующий кафедрой математического анализа МПГУ. Член комиссии по разработке Государственного образовательного стандарта второго поколения. Председатель экспертной комиссии Института математики и информатики. Руководитель Межвузовского научно-исследовательского семинара по математике «Анализ и его приложения» (Math-Net.Ru). Георгий Генрихович являлся членом редколлегий журналов перечня ВАК «Педагогическое образование», «Информационные и телекоммуникационные технологии».

Им опубликовано более 150 научных и научно-педагогических работ. Результаты его научных исследований известны за рубежом. Он активный участник международных научных конференций. Лауреат конкурсов на лучшую научную работу в области физико-математических наук (МПГУ). Брайчев Г.Г. почетный профессор Кызылординского госуниверситета (Казахстан), академик Международной академии наук педагогического образования.

Ветеран труда (1999), Почетный работник высшего профессионального образования (2015). За высокий профессионализм и большой вклад в развитие образования и нравственного воспитания молодежи награжден грамотами и медалями Департамента образования г. Москвы и МПГУ.

Редколлегия журнала «Прикладная математика & Физика»
сердечно поздравляет Георгия Генриховича Брайчева
с юбилеем и желает ему здоровья, долголетия,
новых успехов и научных результатов.

Избранные научные публикации Г. Г. Брайчева

1. Г. Г. Брайчев, “О связи между ростом нулей и убыванием тейлоровских коэффициентов целой функции”, Матем. заметки, 113:1 (2023), 32–45.
2. Г. Г. Брайчев, О. В. Шерстюкова, “О наименьшем типе целой функции с заданной подпоследовательностью нулей”, Уфимск. матем. журн., 14:3 (2022), 17–22.
3. Г. Г. Брайчев, “Совместные оценки корней и тейлоровских коэффициентов целой функции”, Уфимск. матем. журн., 13:1 (2021), 31–45.
4. Г. Г. Брайчев, “О нижнем индикаторе целой функции с корнями нулевой нижней плотности, лежащими на луче”, Матем. заметки, 107:6 (2020), 817–832.
5. Г. Г. Брайчев, В. Б. Шерстюков, “Оценки индикаторов целой функции с отрицательными корнями”, Владикавк. матем. журн., 22:3 (2020), 30–46.
6. G. G. Braichev, “On Stolz’s theorem and its conversion”, Eurasian Math. J., 10:3 (2019), 8–19.
7. Г. Г. Брайчев, В. Б. Шерстюков, “Точные оценки асимптотических характеристик роста целых функций с нулями на заданных множествах”, Фундамент. и прикл. матем., 22:1 (2018), 51–97.
8. Г. Г. Брайчев, “Двусторонние оценки относительного роста функций и их производных”, Уфимск. матем. журн., 9:3 (2017), 18–26.
9. Г. Г. Брайчев, “Наименьший тип целой функции с корнями заданных усредненных плотностей, расположенными на лучах или в угле”, Матем. сб., 207:2 (2016), 45–80.
10. Г. Г. Брайчев, “Точные оценки типов целых функций с нулями на лучах”, Матем. заметки, 97:4 (2015), 503–515.
11. Г. Г. Брайчев, “Точные границы величины нижнего типа целой функции порядка $\rho \in (0, 1)$ с нулями заданных усредненных плотностей”, Уфимск. матем. журн., 7:4 (2015), 34–60.
12. Г. Г. Брайчев, “Точные соотношения между некоторыми характеристиками роста последовательностей”, Уфимск. матем. журн., 5:4 (2013), 17–30.
13. Г. Г. Брайчев, “Точные оценки типа целой функции порядка меньше единицы с нулями на луче заданных усредненных плотностей”, Доклады РАН, 2012, т. 445, № 6, с. 615–617.
14. Г. Г. Брайчев, В. Б. Шерстюков, “О росте целых функций с дискретно измеримыми нулями”, Матем. заметки, 91:5 (2012), 674–690.
15. Г. Г. Брайчев, “Наименьший тип целой функции порядка $\rho \in (0, 1)$ с положительными корнями заданных усредненных плотностей”, Матем. сб., 203:7 (2012), 31–56.
16. Г. Г. Брайчев, “Точные оценки типов целой функции порядка $\rho \in (0, 1)$ с нулями на луче”, Уфимск. матем. журн., 4:1 (2012), 29–37.
17. Г. Г. Брайчев, В. Б. Шерстюков, “О наименьшем возможном типе целых функций порядка $\rho \in (0, 1)$ с положительными нулями”, Изв. РАН. Сер. матем., 75:1 (2011), 3–28.
18. Г. Г. Брайчев, О. В. Шерстюкова, “Наибольший возможный нижний тип целой функции порядка $\rho \in (0, 1)$ с нулями фиксированных ρ–плотностей”, Матем. заметки, 90:2 (2011), 199–215.
19. Г. Г. Брайчев, “Об одной проблеме Адамара и сглаживании выпуклых функций”, Владикавк. матем. журн., 7:3 (2005), 11–25.
20. Г. Г. Брайчев, Введение в теорию роста выпуклых и целых функций. М. Прометей, 2005, 232 с.
21. On comparative increase of relations of convex functions and their derivatives // National Academy of sciences of Azerbaijan. Proceedings of institute of mathematics and mechanics, 2002, v. XVII (XXV), Bacu, p. 38–50.
22. Г. Г. Брайчев, “Индекс лакунарности”, Матем. заметки, 53:6 (1993), 3–10.
23. Г. Г. Брайчев, Определение индикатора целой функции дробного порядка по ее коэффициентам Тейлора // Украинский математический журнал, 1993, т.45, № 6, с. 854–858.

24. Г. Г. Брайчев, В. В. Моржаков, “О применимости операторов бесконечного порядка в частных производных”, Матем. заметки, 24:6 (1978), 771–777.

25. Г. Г. Брайчев, “О разрешимости уравнений в частных производных бесконечного порядка в некоторых классах целых функций”, Матем. заметки, 19:2 (1976), 225–236.

26. Г. Г. Брайчев, “Пример уравнения в частных производных с постоянными коэффициентами, не являющегося нормально разрешимым в $\{\rho, \sigma\}$” Сибирский математический журнал, 1975, т. XVI, № 3, с. 623–626.

Прикладная математика & Физика, 2023, том 55, № 1. С. 87–96.
Applied Mathematics & Physics, 2023, Volume 55, No 1. P. 87–96.

К 70-летию профессора Анатолия Георгиевича Кусраева,

основатель и научный руководитель Владикавказского научного центра
Российской академии наук (ВНЦ РАН),
руководитель Южного математического института – филиала ВНЦ РАН,
руководитель Северо-Кавказского центра математических исследований ВНЦ РАН

14 февраля 2023 года исполнилось 70 лет Анатолию Георгиевичу Кусраеву, доктору физико-математических наук, профессору, известному российскому математику, специалисту в области функционального анализа и его приложений, одному из мировых лидеров в области применения методов математической логики к задачам анализа.

Анатолий Георгиевич – основатель и научный руководитель Владикавказского научного центра Российской академии наук (ВНЦ РАН), руководитель Южного математического института – филиала ВНЦ РАН, руководитель Северо-Кавказского центра математических исследований ВНЦ РАН.

Главный редактор научного журнала «Владикавказский математический журнал», научного и общест-венно-политического журнала «Вестник Владикавказского научного центра».

Член редколлегии международного математического журнала «Positivity», научно-образовательного и прикладного журнала «Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион», научного журнала «Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН».

Анатолий Георгиевич окончил механико-математический факультет (1975 г.) и аспирантуру (1979 г.) Новосибирского государственного университета (НГУ). Защитил кандидатскую (1979 г.) и докторскую (1986г.) диссертации по специальности «математический анализ» в Институте математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук (ИМ СО РАН). С 1979 года работал в ИМ СО РАН в должности младшего (1979-1984), старшего (1984–1987) и ведущего (1987–1991) научного сотрудника. По совместительству преподавал на механико-математическом факультете в НГУ в должности ассистента (1978–1988), и. о. профессора (1988–1990), профессора (1990–1991).

Почетные звания и награды:

✓ Почетное звание «Заслуженный деятель науки Российской Федерации»
✓ Благодарность Президента Российской Федерации
✓ Орден Дружбы Российской Федерации
✓ Почетное звание «Почетный работник науки и высоких технологий Российской Федерации»
✓ Почетная грамота Российской академии наук
✓ Почетное звание «Заслуженный деятель науки Республики Северная Осетия-Алания»
✓ Почетная грамота Парламента Республики Северная Осетия-Алания
✓ Орден Почета Республики Южная Осетия

✓ Орден Дружбы Республики Южная Осетия
✓ Медаль «В ознаменование 10-летия победы в Отечественной войне народа Южной Осетии»
✓ Медаль «В ознаменование 20-летия Республики Южная Осетия»

Научная деятельность. Анатолий Георгиевич принадлежит к научной школе академика АН СССР, Лауреата Нобелевской премии, Леонида Витальевича Канторовича. Анатолий Георгиевич внес основополагающий вклад в некоторые разделы функционального анализа. Он – автор более 300 научных трудов, среди которых 24 монографии и 26 учебных пособий. Анатолием Георгиевичем впервые предложены и разработаны эффективные методы исследования функциональных пространств и операторов в них, основанные на комбинировании различных средств анализа, алгебры и математической логики. К числу важнейших научных достижений Анатолия Георгиевича относятся:

✓ методы векторной двойственности;
✓ исчисление субдифференциалов в топологической постановке на основе метода общего положения;
✓ теория мажорируемых операторов;
✓ адаптация технологии булевозначного моделирования к задачам функционального анализа и теории операторов;
✓ решение проблемы порядковой ограниченности автоморфизмов и дифференцирований в функциональных алгебрах;
✓ решение проблем Линденштраусса, геометрической характеризации и изометрической классификации для класса инъективных банаховых решеток.

Научно-организационная деятельность. Анатолий Георгиевич – основатель (с 1994 г.) и директор (до 2018 г.) Владикавказского научного центра Российской академии наук (ранее – Государственный научный центр Республики Северная Осетия-Алания (1994-1998гг.), Северо-Осетинский научный центр (1998-2000 гг.)). Основатель и руководитель (с 1996 г. по настоящее время) Южного математического института ВНЦ РАН (ранее – Институт прикладной математики и информатики, созданный в 1995 г.), вошедшего в состав ВНЦ РАН в 2000 году и ставшего одним из признанных в Российской Федерации научных институтов – лидеров в области фундаментальной математики.

В период с 2002 по 2005 годы в составе Правительства Республики Северная Осетия-Алания Анатолий Георгиевич курировал вопросы научно-технической политики. В 2008-2009 годах по согласованию с Президиумом Российской академии наук возглавлял Министерство образования и науки Республики Южная Осетия, совмещая эту работу с должностью руководителя ВНЦ РАН.

Анатолий Георгиевич является инициатором и организатором региональных, всероссийских и международных математических конференций, научных и научно-образовательных школ для молодых ученых, студентов, учителей математики и школьников. Традиционной для ЮМИ ВНЦ РАН стала международная научная конференция «Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования», которая проводится раз в два года с 2003 г. и является крупным научным событием Юга России, широко признанным как в России, так и за рубежом.

Образовательная деятельность. В период с 1991 по 2022 годы Анатолий Георгиевич – заведующий кафедрой математического анализа Северо-Осетинского государственного университета им. К. Л. Хетагурова (СОГУ). Под его руководством на кафедре математического анализа СОГУ разработаны и внедрены новые специализации: математическая экономика и математическая экология.

Важное место в деятельности Анатолия Георгиевича занимает содействие развитию в РСО-А школьного математического образования. Под его руководством в ЮМИ ВНЦ РАН разработана Региональная модель развития математического образования, которая легла в основу Комплексного плана мероприятий по реализации в РСО-А «Концепции развития математического образования в Российской Федерации» (2014-2016). С 2021 года данная модель воплощается в рамках реализации в РСО-А программы развития регионального научно-образовательного математического центра СКЦМИ ВНЦ РАН.

Анатолий Георгиевич активно занимается подготовкой научных кадров, участвует в реформировании высшего образования и его интеграции с академической наукой. Среди его учеников 20 кандидатов физико-математических наук и три доктора наук; некоторые из них ныне известные математики, работают в России, США, Канаде, Турции.

Редколлегия журнала «Прикладная математика & Физика»
сердечно поздравляет Анатолия Георгиевича Кусраева
с юбилеем и желает ему здоровья, долголетия,
новых успехов и научных результатов.

Список основных научных статей д. ф.-м. н., профессора А. Г. Кусраева

2022 год:

1. Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. Стёртые пространства Канторовича // Сиб. матем. журн. 2022. Т. 63, N 1. С 123–144.

2021 год:

2. Кусраев А. Г., Тасоев Б.Б. On the Structure of Archimedean f-Rings // Vladikavkaz Math. J., 2021. V. 23, N. 4, P. 112–114.
3. Kusraev A. G. Some Algebraic Aspects of Boolean Valued Analysis // Springer Proceedings in Mathematics and Statistics. 2021. P. 333-344. DOI: 10.1007/978-3-030-77493-6_19
4. Kusraev A. G., Kutateladze S. S. Geometric characterization of injective banach lattices // Mathematics. 2021. V.9. N3. P. 1-18. DOI:10.3390/math9030250
5. Kusraev A. G., Kutateladze S. S. Boolean Valued Analysis: Background and Results // Trends in Mathematics. 2021. P. 91-105. DOI: 10.1007/978-3-030-49763-7_9
6. Kusraev A. G., Kusraeva Z. A. Compact disjointness preserving polynomials on quasi-Banach lattices // Journal of mathematical analysis and applications. 2021. V.498, N 1. DOI: 10.1016/j.jmaa.2021.124924

2020 год:

7. Кусраев А. Г. Экстремальное строение выпуклых множеств полилинейных операторов // Сибирский математический журнал. 2020. Т.61, N 5. С. 1041-1059. DOI: 10.33048/smzh.2020.61.506.
8. Kusraev A. G., Kutateladze S. S. Geometric characterization of preduals of injective Banach lattices // Indagationes Mathematicae. 2020. V.31, N 5. 863–878. DOI: 10.1016/j.indag.2020.07.001
9. Kusraev A. G., Kutateladze S. S. Some applications of Boolean valued analysis // Journal of Applied Logics—IfCoLog Journal of Logics and Their Applications. 2020. V.7, N 4. 427–457.
10. Kusraev A. G. Concrete representation of injective Banach lattices // Mathematical methods in the applied sciences. 2020. V. 43, N 16. P.9499-9508. DOI: 10.1002/mma.6697

2019 год:

11. Кусраев А. Г., Кусрева З. А. Суммы порядков ограниченных операторов, сохраняющих дизъюнктность // Сибирский математический журнал. 2019. Т. 60, № 1. С. 148-161. DOI: 10.1134/S0037446619010130
12. Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. Два приложения булевозначного анализа // Сибирский математический журнал. Т. 60, № 5. С. 902-910. DOI: 10.1134/S0037446619050124
13. Kusraev A. G., Kusraeva Z. A. Monomial decomposition of homogeneous polynomials in vector lattices // Advances in Operator Theory. 2019. V. 4, N. 2. 428–446. DOI: 10.15352/AOT.1807-1394
14. Kusraev A. G., Kusraeva Z. A. Factorization of Order BoundedDisjointness Preserving Multilinear Operators// In: Karapetyants A., Kravchenko V., Liflyand E. (eds) Modern Methods in Operator Theory and Harmonic Analysis. OTHA 2018.Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, 2019.vol 291. P. 217-236. Springer, Cham. https://link.springer.com/chapter/10.1007

2018 год:

15. Кусраев А. Г., Тасоев Б. Б. Интегрирование по положительной мере со значениями в квазибанаховой решетке// Владикавк. матем. журн. 2018. Т. 20, № 1. С. 69–85. DOI: 10.23671/VNC.2018.1.11399
16. Kusraev A. G., Kutateladze S. S. Invitation to Boolean valued analysis // Владикавк. матем. журнал. 2018. Т. 20. № 2. С. 69–79. DOI: 10.23671/VNC.2018.2.14723
17. Kusraev A. G., Tasoev B. B. Kantorovich – Wright integration and representation of Quasi-Banach Lattices // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2018. V. 462, № 1. P. 712–729. DOI: 10.1016/j.jmaa.2018.02.027

2017 год:

18. Кусраев А. Г., Тасоев Б. Б. Интеграл Кантора – Райта и представление квазибанаховых решеток // Доклады академии наук. 2017. Т. 474. № 1. С. 1–4. DOI: 10.1134/S1064562417030036

19. Kusraev A. G., Tasoev B. B. Maximal quasi-normed extension of quasi-normed lattices // Vladikavkaz Math. J. 2017. V. 19, № 3. С. 41–50.

20. Kusraev A. G., Tasoev B. B. Kantorovich – Wright integration and representation of vector lattices // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2017. V. 455, № 1. P. 554–568. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2017.05.059

2016 год:

21. Kusraev A. G., Kutateladze S. S., Basaeva E. K. Quaisidifferentials in Kantorovich Spaces // Journal of Optimization Theory and Applications. 2016.Vol.168, № 3, P. 1–19.

22. Кусраев А. Г. Проблема мажорации в банаховых решетках // Мат. заметки. 2016, Т. 100, №. 1. С. 78–92.

23. Kusraev A. G., Kutateladze S. S. Boolean-valued analysis of order bounded operators //J. of Math Sciences. 2016. Vol. 218, № 5. P. 609–635.

2015 год:

24. Кусраев А. Г. Булевозначный принцип переноса для инъективных банаховых решеток // Сиб. мат. журн. 2015. Т.56, №5. С. 1111–1129.

25. Kusraev A. G., Kutateladze S. S. Characterization of order bounded disjointness preserving bilinear operators // Владикавк. мат. журн. 2015. Т.17, № 1. С. 60–64.

2014 год:

26. Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. О порядково ограниченных операторах, сохраняющих дизъюнктность // Сиб. мат. журн. 2014. Т.55, № 5. С. 1118–1136.

27. Kusraev A. G., Kutateladze S. S. Boolean valued analysis or order bounded operators // Fundamental and Applied Mathematics. 2014. Vol. 19, № 5. P. 89–126.

28. Kusraev A. G. Injective Banach lattices: A survey // Eurasian Mathematical Journal. 2014. V. 5, № 3. P. 58–79.

2013 год:

29. Кусраев А. Г. О классификации инъективных банаховых решеток // Докл. РАН. 2013. Т. 453 № 1. С. 12–17.

2012 год:

30. Kusraev A. G. Kantorovich Principle in Action: AW*-modules and Injectives // Владикавк. мат. журн. 2012. Т. 14, № 1. Р. 67–74.

31. Кусраев А. Г. Булевозначный анализ и инъективных банаховых решеток // Докл. РАН. 2012. Т. 444, № 2. С. 1–3.

32. Kusraev A. G. Jensen type inequalities for positive bilinear operator // Positivity. 2012. Vol. 16, № 1. P. 131–142.

33. Kusraev, A. G. A direct proof of the domination theorem for Radon–Nikodym operators // Math. Proc. Royal. Ir. Acad. 2012. V. 112A, № 1. P. 15–19.

2011 год:

34. Kusraev A. G. A transfer principle for inequalities in vector lattices // J. Math. Anal. Appl. 2011. Vol.374, № 1. P. 282–289.

35. Kusraev A. G., Kutateladze S. S. Envelopes and inequalities in vector lattices // Positivity. 2011. Vol. 15, № 4. P. 661–676.

2010 год:

36. Kusraev, A. G. A Radon–Nikodym type theorem for orthosymmetric bilinear operators // Positivity. 2010. V. 14, № 2. P. 225–238.

2009 год:

37. Kusraev A. G. Functional calculus and Minkowski duality on vector lattices // Владикавк. мат. журн. 2009. Т. 11, № 2. С. 31–42.

38. Kusraev A. G. Homogeneous functions of regular linear and bilinear operators // Владикавк. мат. журн. 2009. Т. 11, № 3. С. 38–43.

2008 год:

39. Kusraev A. G., Kutateladze S. S. Boolean methods in positivity // J. of Applied and Industrial Math., 2008. T.2, № 1. P. 81–89.

40. Kusraev A. G., Kutateladze S. S., Gutman A.E. The Wickstead Problem // Siberian Electronic Math. Reports. 2008. V. 5. P. 293–333.

41. Kusraev A. G. An almost f-algebra multiplication extends from a majorizing sublattice. // Владикавк. мат. журн. 2008. Т. 10, № 2. С. 30–31.

42. Kusraev A. G. On some properties of orthosymmetric bilinear operators // Владикавк. мат. журн. 2008. Т. 10, № 3. С. 29–33.

2007 год:

43. Kusraev A. G., Bu. Q., Buskess G. Bilinear maps on products of vector lattices a survey // In: Positivity. -Basel Boston Berlin. Str.: BirgHoser, 2007.

44. Kusraev A. G., Buskes G. Representation and extension of orthoregular bilinear operators // Владикавк. мат. журн. 2007. Т. 9, № 1. С. 16–29.

45. Kusraev A. G. When all separately band preserving bilinear operators are symmetric? // Владикавк. мат. журн. 2007. Т. 9, № 2. С. 22–25.

46. Kusraev A. G. Holder type inequalities for orthosymmetric bilinear operator // Владикавк. мат. журн. 2007. Т. 9, № 3. С. 36–46.

2006 год:

47. Кусраев А. Г. О строении ортосимметрических билинейных операторов в векторных решетках // Докл. РАН. 2006. Т. 408, № 1. С. 25–27.

48. Кусраев А. Г. Дифференцирования и автоморфизмы в расширенной комплексной f-алгебре // Сиб. мат. журн. 2006. Т. 47, № 1. С. 97–107.

49. Kusraev A. G., Kutateladze S. S. Boolean valued analysis and positivity // In: Proceedings of the Conference Positivity IV . Theory and Applications.–Dresden: Technische Univ. Dresden Publ., 2006.

50. Кусраев А. Г. О теореме Штрассена в пространствах измеримых селекторов // Владикавк. мат. журн. 2006.Т.8, № 4. С. 32–37.

2005 год:

51. Кусраев А. Г. О представлении ортосимметрических билинейных операторов в векторных решетках // Владикавк. мат. журн. 2005. Т.7, № 4. С. 30–34.

52. Kusraev A. G., Kutateladze S. S. On the calculus of order bounded operators // Positivity. 2005. V. 9, № 3. P. 327–339.

53. Кусраев А. Г. Дифференцирования и автоморфизмы в алгебре измеримых комплекснозначных функций // Владикавк. мат. журн. 2005. Т.7, № 3. С. 45–49.

2004 год:

54. Кусраев А. Г., О нерасширяющих операторах // Владикавк. мат. журн. 2004. Т. 6, № 3. С. 47–58.

55. Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. Выпуклые экстенсиональные операторы // Владикавк. мат. журн. 2004. Т. 6, № 4. С. 31–41.

56. Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. Об инфинитезимально оптимальных траекториях // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, № 1. С. 164–170.

57. Кусраев А. Г., Табуев С.Н. О билинейных операторах, сохраняющих дизъюнктность // Владикавк. мат. журн. 2004. Т. 6, № 1. С. 58–70.

58. Kusraev A. G., Kutateladze S. S. Kantorovich spaces and optimization // Записки научных семинаров ПОМИ. 2004. Т. 312.

2003 год:

59. Кусраев А. Г., Басаева Е.К. О квазидифференциале композиции // Владикавк. мат. журн. 2003. Т. 5, № 4. С. 10–25.

2002 год:

60. Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. Числа и пространство Канторовича // Владикавказск. мат. журн. 2002. Т. 4, № 1. С. 50–71.

61. Кусраев А. Г., Малюгин С.А. О теоремах представления А.Д. Александрова и А.А. Маркова для мажорируемых операторов // Владикавк. мат. журн. 2002. Т.4, № 3. С. 34–49.

2001 год:

62. Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. Эвристический принцип Л.В. Канторовича // Сиб. журн. индуст. мат-ки. 2001. Т. 4, № 2(8). С. 18–28.

2000 год:

63. Kusraev A. G. Cyclically compact operators in Banach spaces // Владикавказск. мат. журн. 2000. Т. 2, № 1. С. 10–23.

64. Kusraev A. G., Kutateladze S. S. On combined nonstandard methods in functional analysis // Владикавказск. мат. журн. 2000. Т. 2, № 1. С. 3–9.

65. Kusraev A. G., Kutateladze S. S. Unsolved nonstandar dproblems // Владикавказск. мат. журн. 2000. Т. 2, № 2. С. 26–45.

66. Кусраев А. Г. Модулярные меры и операторы Магарам // Владикавказск. мат. журн. 2000. Т. 2, № 4. С. 17–29.

1999 год:

67. Кусраев А. Г. О структуре AJW–алгебр типа I // Сиб. мат. журн. 1999. Т. 40, № 4.С. 905–917.

68. Кусраев А. Г. Нестандартный анализ линейных и нелинейных операторов // Владикавказский мат. журн. 1999. Т. 1, № 1.С. 36–44.

69. Кусраев А. Г., Плиев М.А. Ортогонально аддитивные операторы в решеточно нормированных пространствах // Владикавк. мат. журн. 1999. Т. 1, № 3. С.39–52.

70. Kusraev A. G., Malugin S.A. The Stieltjes moment problem in vector lattices // Владикавк. мат. журн. 1999. Т. 1, № 1. С. 45–51.

71. Кусраев А. Г., Плиев М.А. Слабое интегральное представление мажорируемых ортогонально аддитивных операторов // Владикавк. мат. журн. 1999. Т. 1, № 4. С. 11–32.

72. Кусраев А. Г. О структуре AJB-алгебр типа I2 // Владикавк. мат. журн. 1999. Т. 1, №3. С. 23–38.

1996 год:

73. Kusraev A. G., Kutateladze S. S. On Nonstandard Methods in Functional Analysis // Interaction between Functional Analysis Harmonic Analysis and Probability: Lecture notes in pure and applied mathematics. N-Y a.o.: Marcel Dekker, Inc.,1996. P. 301–306.

1995 год:

74. Kusraev A. G., Kutateladze S. S. Boolean-valued introduction to the theory of vector lattices // Amer. Math. Soc. Transl. 1995. V. 123, № 2. P. 103–126.

1994 год:

75. Кусраев А. Г. Булевозначный анализ и JB-алгебры // Сиб. мат. журн. 1994. Т. 35, № 1. С. 124–134.

76. Кусраев А. Г., Малюгин С.А. Преобразование Фурье мажорируемых отображений // Сиб. мат. журн. 1994. Т. 35, № 6. С. 1287–1304.

1993 год:

77. Кусраев А. Г. Пространства Канторовича и проблема метризации // Сиб. мат. журн. 1993. Т. 34, № 4. С. 106–116.

1992 год:

78. Kusraev A. G., Kutateladze S. S. Nonstandard methods in geometric functional analysis// Amer. Math. Soc. Transl.1992. V. 151, № 2.P. 91–105.

79. Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. Теорема Крейна-Миль-мана и пространства Канторовича // Оптимизация. 1992. Т. 68, № 51. С. 5–18.

80. Kusraev A. G., Kutateladze S. S. Nonstandard methods for Kantorovich spaces // Siberian Adv. in Math. 1992. V. 2, № 2.P. 114–152.

1991 год:

81. Кусраев А. Г., Колесников Е.В. О функциональной реализации лебегова расширения // Сиб. мат. журн. 1991. Т. 32, № 1.С. 78–88.

82. Кусраев А. Г.О функциональной реализации AW-алгебр типа I // Сиб. мат. журн. 1991. Т. 32, № 2.С. 78–88.

83. Кусраев А. Г. О структуре векторных мер и полных булевых алгебр // Докл. АН СССР. 1991. Т. 315,№ 6. С. 1312–1315.

1990 год:

84. Кусраев А. Г., Малюгин С.А. Продолжение конечно аддитивных векторных мер // Математ. заметки. 1990. Т. 48, № 1. С. 56–60.

85. Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. О комбинировании нестандартных методов // Сиб. мат. журн. 1990. Т. 31, № 5. С. 69–78.

86. Kusraev A. G., Kutateladze S. S. Les methodes non-standard de l'analyse (Par un preface) // Monad. 1990. Vol. 3, № 2. P. 110–123.

87. Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. Введение в булевозначную теорию векторных решеток // Оптимизация. 1990. Т.65, № 48. С. 96–123.

88. Кусраев А. Г. К статье "Линейные операторы в решеточно нормированных пространствах" // Сиб. мат. журн. 1990. Т. 31, № 4.С. 212–213.

1989 год:

89. Кусраев А. Г., Малюгин С.А. Атомическое разложение векторной меры // Сиб. мат. журн. 1989. Т. 30, № 5. С. 101–120.

90. Кусраев А. Г., Малюгин С. А. О проективном пределе векторных мер // Докл. АН СССР. 1989. Т. 307, № 2. С. 273–276.

1988 год:

91. Кусраев А. Г., Акилов Г.П., Колесников Е.В. Лебегово расширение положительного оператора // Докл. АН СССР. 1988. Т. 298, № 3. С. 521–524.

92. Кусраев А. Г. О геометрии банаховых пространств со смешанной нормой // Докл. АН СССР. 1988. Т. 300, № 5.С. 1049–1052.

93. Кусраев А. Г., Акилов Г.П., Колесников Е.В. О порядково непрерывном расширении положительного оператора // Сиб. мат. журн.1988. Т. 29, № 5. С. 24–35.

1987 год:

94. Кусраев А. Г., Стрижевский В.З. О мажорации линейных операторов // Докл. АН СССР. 1987. Т. 292, № 7.С. 1042–1044.

95. Кусраев А. Г. Интегральное представление мажорируемых операторов // Докл. АН СССР. 1987. Т. 293, № 4.С. 788–792.

96. Кусраев А. Г. Об аналитическом представлении мажорируемых операторов // Докл. АН СССР. 1987. Т. 294, № 5. С. 1055–1058.

97. Кусраев А. Г., Абасов Н.М. Циклическая компактификация и пространства непрерывных вектор-функций // Сиб. мат. журн. 1987. Т. 28, № 1.С. 7–22.

98. Кусраев А. Г., Малюгин С.А. О порядково непрерывной компоненте мажорируемого оператора // Сиб. мат. журн. 1987. Т. 28, № 4. С. 127–139.

1986 год:

99. Кусраев А. Г. Циклически компактные операторы в пространствах Банаха-Канторовича // В кн: Дифференциальные уравнения в частных производных. Новосибирск: Наука, 1986. С. 108–116.

1985 год:

100. Кусраев А. Г. О пространствах Банаха – Канторовича // Сиб. мат. журн. 1985. Т. 26, № 2. С. 119–126.

101. Кусраев А. Г. Замечания о векторной двойственности // Сиб. мат. журн. 1985. Т. 26, № 1. С. 217–220.

1984 год:

102. Кусраев А. Г. О субдифференциале суммы //Сиб. мат. журн.1984. Т. 25, № 4. С. 107–110.

103. Кусраев А. Г. Порядково непрерывные функционалы в булевозначных моделях теории множеств // Сиб. мат. журн. 1984. Т. 25, № 1. С. 69–79.

104. Кусраев А. Г. Абстрактное дезинтегрирование в пространствах Канторовича // Сиб. мат. журн. 1984. Т. 25, № 5. С. 79–89.

1983 год:

105. Кусраев А. Г. Об открытости выпуклых измеримых соответствий // Мат. заметки. 1983.Т. 33, № 1. С. 41–48.

106. Кусраев А. Г. О дискретном принципе максимума // Мат. заметки. 1983.Т. 34, № 2. С. 267–272.

107. Кусраев А. Г. О некоторых категориях и функторах булевозначного анализа// Докл. АН СССР. 1983. Т. 271, № 3. С. 526–529.

1982 год:

108. Кусраев А. Г. Теоремы об открытом отображении и замкнутом графике для выпуклых соответствий // Докл. АН СССР. 1982. Т. 265, № 3. С. 526–529.

109. Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. Анализ субдифференциалов с помощью булевозначных моделей // Докл. АН СССР. 1982. Т. 265, № 5. С. 1061–1064.

110. Кусраев А. Г. Общие формулы дезинтегрирования // Докл. АН СССР. 1982. Т. 265, № 6. С. 1312–1316.

111. Кусраев А. Г. Булевозначный анализ двойственности расширенных модулей // Докл. АН СССР. 1982. Т. 267, №5. С. 1049–1052.

112. Кусраев А. Г. О субдифференциале композиции множеств и функций // Сиб. мат. журн. 1982. Т. 23, № 2. С. 116–127.

1981 год:

113. Кусраев А. Г. Об одном общем методе субдифференцирования // Докл. АН СССР. 1981. Т. 251, № 4. С. 822–826

1980 год:

114. Кусраев А. Г. Кутателадзе С. С. Свертка Рокафеллара и характеристика оптимальных траекторий// Докл. АН СССР. 1980. Т. 251, № 2. С.280-283

115. Кусраев А. Г. Некоторые применения несплющенности в выпуклом анализ // Сиб. мат. журн.1980. Т. 122, № 6. С.102-125.

1978 год:

116. Кусраев А. Г. Необходимые условия экстремума для негладких векторнозначных отображений // Докл. АН СССР. 1978. Т. 242, № 1. С. 44–47.

Список основных монографий д. ф.-м. н., профессора А. Г. Кусраева

1. Кусраев А. Г. Векторная двойственность и ее приложения // Новосибирск: Наука, 1985. 256 с.

2. Кусраев А. Г. Элементы булевозначного анализа // Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 1987. 185 с.

3. Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. Субдифференциальное исчисление // Новосибирск: Наука, 1987. 224 с.

4. Кусраев А. Г., Малюгин С. А. Некоторые вопросы теории векторных мер // Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 1988. 182 с.

5. Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. Нестандартные методы анализа // Новосибирск: Наука, 1990. 354 с.

6. Кусраев А. Г., Бухвалов А. В., Коротков В.Б., Кутателадзе С. С., Макаров Б.М. Векторные решетки и интегральные операторы // Новосибирск: Наука, 1992. 214 с.

7. Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. Субдифференциалы. Теория и приложения // Новосибирск: Наука, 1992. 270 с.

8. Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. Nonstandard Methods of Analysis // Dordrecht: Kluwer, 1994. 444 с.

9. Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. Subdifferentials. Theory and Applications // Dordrecht, Kluwer, 1995. 398 с.

10. Кусраев А. Г., Гутман А. Е., Емельянов Э. Ю. Нестандартный анализ и векторные решетки // Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 1999. 371 с.

11. Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. Булевозначный анализ // Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 1999. 383 с.

12. Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. Boolean Valued Analysis // Dordrecht etc.: Kluwer, 1999. 322 с.

13. Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. Dominated Operators // Dordrecht etc.: Kluwer, 2000. 446 с.

14. Кусраев А. Г., Гордон Е. И., Кутателадзе С. С. Infinitesimal Analysis // Dordrecht etc.: Kluwer, 2002. 422 с.

15. Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. Субдифференциалы. Теория и приложения // Новосибирск: изд-во ИМ СО РАН, 2002. 371 с.

16. Кусраев А. Г. Мажорируемые операторы // Москва: Наука, 2003. 619 с.

17. Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. Введение в булевозначный анализ // Москва: Наука, 2005. 526 с.

18. Кусраев А. Г., Гутман А. Е., Емельянов Э. Ю., Кутателадзе С. С., Малюгин С. А. Нестандартный анализ и векторные решетки // Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 2005. 400 с.

19. Кусраев А. Г., Гордон Е. И., Кутателадзе С. С. Инфинитезимальный анализ // Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 2006. 536 с.

20. Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. Субдифференциальное исчисление: теория и приложения // Москва: Наука, 2007. 560 с.

21. Кусраев А. Г., Гордон Е. И., Кутателадзе С. С. Инфинитезимальный анализ: избранные темы // Москва: Наука, 2011. 399 с.

22. Kusraev A. G., Kutateladze S. S. Boolean Valued Analysis: Selected Topics // Vladikavkaz: SMI VSC RAS, 2014. – iv+376 p. (Trends in Science: The South of Russia. A Mathematical Monograph. Issue 6). 380 с.

Прикладная математика & Физика, 2023, том 55, № 1. С. 97–100.
Applied Mathematics & Physics, 2023, Volume 55, No 1. P. 97–100.

К 80-летию профессора Евгения Владимировича Радкевича,

доктор физико-математических наук, профессор
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,
Московский институт электроники и математики (технический университет)
Московский государственный технический университет радиотехники, электроники и автоматики
Московское математическое обществосоветский и российский учёный-математик, педагог высшей школы, режиссёр, актёр.

26 января 2023 года исполнилось 80 лет Евгению Владимировичу Радкевичу, доктору физико-математи-ческих наук, профессору, советскому и российскому учёному-математику, педагогу высшей школы.

Евгений Владимирович родился в семье инженера. В 1965 году окончил механико-математический факультет МГУ, в 1968 году — аспирантуру там же. Во время учёбы принимал активное участие в работе Студенческого театра МГУ под руководством П. П. Васильева (затем — П. Н. Фоменко).

По распределению поступил на работу в Институт проблем механики АН СССР в Отдел математических методов механики (1968).

Кандидат физико-математических наук (1969, тема диссертации «Гипоэллиптические операторы с переменными коэффициентами»)[2], ученик О. А. Олейник.

В 1974 году перешёл на преподавательскую работу в МИЭМ, затем — в МИРЭА.

Не прекращая научную и преподавательскую деятельность, в 1969 году поступил, а в 1976 году окончил ГИТИС (специальность «Режиссура драмы», курс Андрея Гончарова, однокурсниками на актёрском отделении были Светлана Акимова, Александр Соловьев, Игорь Костолевский, Александр Фатюшин). Дипломный спектакль «Рассказ от первого лица» поставил в Театре на Малой Бронной у Анатолия Эфроса.

В 1988 г. защитил диссертацию доктора физико-математических наук, в 1992 г. ему присвоено ученое звание профессора по кафедре высшей математики.

Евгений Владимирович является широко известным в нашей стране и за рубежом крупным специалистом в области дифференциальных уравнений с частными производными, является автором более 150 научных работ и 3 монографий.

В области уравнений с частными производными им были получены достаточные условия гипоэллиптичности операторов с кратными характеристиками, получены условия разрешимости краевых задач для уравнений с неотрицательной характеристической формой.

Совместно с О. А. Олейник получены широко известные результаты в теории уравнений второго порядка с неотрицательной характеристической формой на основе которых опубликована монография "Second order equations with nonnegative characteristic form Rhode Island plenum Press, New-York-London, 1973. Монография получила широкое признание как у нас в стране так и за рубежом. В 1974 монография переведена на итальянский, в и 1975 переведена на китайский. В 2010 опубликован ее расширенный перевод на русский, в издательстве Московского университета. Интерес к этому изданию, подтвердил непроходящий интерес к собранным в нем результатам.

В серии работ по задачам со свободной границей разработан метод модельных операторов, позволивший получить теоремы существования классических решений широкого класса задач со свободной границей. Обобщен метод операторных пучков (уравнений Карлемана) для исследования проблемы динамического угла, получены условия существования классического решения для модифицированной задачи Стефана и задачи Веригина – Маскета. На основе этих результатов опубликована монография «Математические вопросы неравновесных процессов», Новосибирск, 2007 г., получившая так же широкое признание как у нас в стране, так и за рубежом.

В серии работ по неравновесным процессам получены условия линейной устойчивости моментных аппроксимаций кинетических уравнений; для моментных аппроксимаций кинетического уравнения Больцмана – Пайерлса получены условия существования проекции Чепмена – Энскога в фазовое пространство консервативных переменных для задачи Коши и смешанной задачи; для класса операторов с переменной кратностью характеристик получены условия корректности смешанной задачи; исследована природа локального равновесия для дискретных кинетических уравнений, построена парадигма турбулентного-ламинарного перехода.

В последние пять лет, в серии работ исследуется класс критических процессов, объединенных общей гипотезой что они есть неравновесные фазовые переходы: ламинарно-турбулентный переход, неустойчивость Рэлея-Бенара, кристаллизация бинарных сплавов, разрушение конструкционных материалов, неустойчивость Марангони. Для первых четырех: ламинарно-турбулентный переход, неустойчивость Рэлея-Бенара, кристаллизация инарных сплавов и разрушение конструкционных материалов построена модель рекон струкции начальной стадии неустойчивости как неравновесного перехода, механизмом которого является диффузионное расслоение. Показано, что свободная энергия Гиббса отклонения от однородного состояния (относительно рассматриваемой неустойчивости) есть аналог потенциалов Гинзбурга – Ландау. Проведены численные эксперимента самовозбуждения однородного состояния управлением краевым условием (возрастанием скорости или температуры). Установлена нелокальность возмущения, что указывает на невозможности применения в этом случае классической теории возмущения. Под внешним воздействием (возрастание скорости или температуры) наблюдается переход к хаосу через бифуркации удвоения периода, подобно каскаду удвоений периода Фейгенбаума. На снове этих результатов опубликована монография: «Введение в теорию неравновесных фазовых переходов и термодинамический анализ задач механики сплошной среды» издательство Московского университета, 2019 г.

В это же время в серии работ о задаче Коши для дискретных кинетических уравнений продемонстрировано зарождение хаотических процессов во времени и пространстве. С помощью решения одномерной модели Карлемана, при увеличении параметра хаотизации (в терминологии Ландау-Гинзбурга), аналога числа Кнудсена. Это первый пример дискретного кинетического уравнения, где были выявлены хаотические режимы. Модель Карлемана обладает важными свойствами кинетического уравнения. Эта модель являются системой двух нелинейных уравнений, описывающих перенос и взаимодействие двух типов частиц. Их можно рассматривать как особый вид обратимого химического процесса. Есть два математическихе стимула для исследования таких моделей. Первым из них является неинтегрируемость системы, который указывает на существование положительных экспонент Ляпунова, когда стационарные решения задачи могут быть линейно неустойчивыми. Кроме того, эти стационарные решения могут быть легко получены аналитически . Численный эксперимент начально-краевой задачи для этих моделей показал ряд после довательных бифуркаций при увеличении показателя хаотичности-эффективного число Кнудсена. Для дискретных кинетических уравнений-Карлемана и Годунова-Султангазина доказана асимптотическая устойчивость устойчивых стационарных состояний.

Е. В. Радкевич многократно участвовал в работе международных конференций как у нас в стране, так и за рубежом; исполнитель Гранта РФФИ N 18-01-00524 и инициативной научноисследовательской работы ИЦМР-6, Валидация и верификация, N 15-01-03587(РТУ МИРЭА).

В течении пяти лет (2015-2019) Е. В. Радкевич читал курс лекций и проводил семинары по курсу «Методы математической физики», по курсу «Уравнения с частными производными» на факультете фундаментальной физико химической инженерии в МГУ имени М. В. Ломоносова.

Для студентов и аспирантов Е. В. Радкевич (совместно с А. Пятницким и А. Шамаевым) ведет спецсеминар «Качественные свойства уравнений с частными производными».

Прочитаны спецкурсы: «Интегральные уравнения и теоремы вложения», «Асимптотические методы», «Корректность моделей механики сплошных сред и термодинамика».

Евгением Владимировичем подготовлено 7 кандидатов и один доктор наук.

Редколлегия журнала «Прикладная математика & Физика»
сердечно поздравляет Евгения Владимировича Радкевича
с юбилеем и желает ему здоровья, долголетия,
новых успехов и научных результатов.

Избранные научные публикации Е. В. Радкевича

1. Radkevich E. V., Vasil'eva O. A., Dukhnovskii S. A. Local equilibrium of the carleman equaiton// Journal of Mathematical Sciences, Vol. 207, No. 2, May, 2015.

2. Radkevich E. V. The bloch principle for $L_2(\mathbb{R})$ stabilization of solutions to the cauchy problem for the carleman equation//Journal of Mathematical Sciences, Vol. 210, No. 5, November, 2015.

3. Васильева О. А., Духновский С. А., Радкевич Е. В. О природе локального равновесия уравнений карлемана и Годунова – Султангазина // Современная математика. Фундаментальные направления. Том 60 (2016). С. 23–81.

4. Лукашев Е. А., Яковлев Н. Н., Радкевич Е. В., Васильева О. А. О распространении теории неравновесных фазовых переходов на ламинарно-турбулентный переход//Наноструктуры, математическая физика и моделирование, 2016, том 14, № 1, 5–40.

5. Lukashev E. A., Radkevich E. V., Yakovlev N. N. and Vasil'eva O. A. On laminar-turbulent transition Citation: 1789, 020011 (2016); doi: 10.1063/1.4968432View online: http://dx.doi.org/10.1063/1.4968432 View Table of Contents: http://aip.scitation.org/toc/apc/1789/1 Published by the American Institute of Physics.

6. Lukashev E. A., Yakovlev N. N., Radkevich E. V., and Vasil'eva O. A. On Problems of the LaminarЏTurbulent Transition // ISSN 1064-5624, Doklady Mathematics, 2016, Vol. 94, No. 3, pp. 1-5. ? Pleiades Publishing, Ltd., 2016. Original Russian Text ? E.A. Lukashev, N. N. Yakovlev, E. V. Radkevich, O. A. Vasilieva, 2016, published in Doklady Akademii Nauk, 2016, Vol. 471, No. 3, pp. 270–274.

7. Palin V. V., Radkevich E. V., Yakovlev N. N., Lukashev E. A. On Non-classical Solutions of a Multicomponent Euler System. Journal of Mathematical Sciences, 2016, № 1, C. 1–23.

8. Radkevich E. V., Lukashev E. A., Yakovlev N. N., Vasilieva O.A. Study of the rayleigh-benard instability by methods of the theory of nonequilibrium phase transitions in the cahn-hillard form // Eurasian journal of mathematical and computer applications ISSN 2306-6172 Volume 5, Issue 2 (2017) 36–65.

9. Lukashev E. A., Radkevich E. V., Yakovlev N. N. and Vasil'eva O. A. Study of the Rayleigh-Benard instability by methods of the theory of nonequilibrium phase transitions in the Cahn-Hillard form // Citation: AIP Conference Proceedings (2017); Published by the American Institute of Physics.

10. Палин В. В., Радкевич Е. В. О поведении стабилизирующихся решений для уравнения рикатти // Труды семинара им. И. Г. Петровского, v. 31, 2017, pp 111–134.

11. Lukashev E. A., Radkevich E. V., Sidorov M. I. and Vasil'eva O. A. Investigation of the process of destruction of structural materials by the method of mathematical reconstruction in the form of a nonequilibrium phase transition Citation: AIP Conference Proceedings 2048, 020001 (2018); doi: 10.1063/1.5082019 View online: https://doi.org/10.1063/1.5082019 View Table of Contents: http://aip.scitation.org/toc/apc/2048/1 Published by the American Institute of Physics.

12. Радкевич Е. В., Лукашев Е. А., Яковлев Н. Н., Васильева О. А. О природе конвективной неустойчивости Рэлея - Бенара // Доклады РАН. 2017. Т. 475, No 6. С. 1–6.

13. Radkevich E. V., Lukashev E. A., Sidorov M. I., Vasil'eva O. A. Methods of nonlinear dynamics of nonequilibrium processes in fracture mechanics// Eurasian journal of mathematical and computer applications ISSN 2306-6172 Volume 6, Issue 2 (2018) 43–80.

14. Яковлев Н. Н., Лукашев Е. А., Радкевич Е. В., Палин В. В. О парадигме внутренней турбулентности // Вест. Самарского гос. ун-та. Сер. физ.-мат. науки. 2015. Т. 19, № 1. С. 155–185.

15. Radkevich E. V., Lukashev E. A. and Vasil'eva O. A. Rayleigh-benard instability: a study by the methods of cahn - hillard theory of nonequilibrium phase transitions// Works of the seminar named after i.g. petrovsky, v. 32, (2019), pp 283-317.

16. Радкевич Е. В., Лукашев Е. А., Васильева О. А. Гидродинамические неустойчивости и неравновесные фазовые переходы (в форме кана-хилларда) // Доклады академии наук, 2019, том 486, № 25, с. 17–22.

17. Radkevich E. V., Lukashov E. A., Vasil'eva O. A. On hydrodynamic instabilities qua nonequilibrium (cahnџhillard) phase transitions// eurasian journal of mathematical and computer applications ISSN 2306-6172 Volume 7, Issue 2 (2019) 20–61.

18. Radkevich E. V. and Vasil'eva O. A. On hydrodynamic instabilities qua nonequilibrium phase transitions//Citation: AIP Conference Proceedings (2019), Published by the American Institute of Physics.

19. Radkevich E. V., Lukashev E. A. and Vasil'eva O. A. ISSN 064-5624, Doklady Mathematics, 2019, Vol. 99, No. 3, pp. 1-5. Pleiades Publishing, Ltd., 2019. Russian Text ? The Author(s), 2019, published in Doklady Akademii Nauk, 2019, Vol. 486, No. 5. MATHEMATICS Hydrodynamic Instabilities and Nonequilibrium Phase Transitions Presented by Academician of the RAS V.V. Kozlov November 29, 2018 Received February 20, 2019.

20. Радкевич Е. В., Васильева О. А., Сидоров М. И. Кристаллизация бинарных сплавов и неравновесные фазовые переходы, ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2019, том 489, No 6, с. 11–17.

21. Radkevich E. V., Vasilieva O. A., Sidorov M. I. and Stavrovskii M. E. On the Raushenbakh Resonance// published in Vestnik Moskovskogo Universiteta, Seriya 1: Matematika, Mekhanika, 2021, No. 3, pp. 54–65.

22. Radkevich E. V., Yakovlev N. N., Vasilieva O. A. Questions and problems of mathematical modeling qua nonequilibrium of combustion processes // Eurasian journal of mathematical and computer applications, ISSN 2306-6172 Volume 8, Issue 4 (2020) 31–68.

Монографии и учебные пособия

1. Радкевич Е. В., Лукашев Е. А., Яковлев Н. Н., Васильева О. А., Сидоров М. И. Введение в обобщенную теорию неравновесных переходов и термодинамический анализ задач механики сплошной среды // изд. Московского университета, 2019, 340.

2. Палин В. В., Радкевич Е. В. Методы математической физики. Лекционный курс, изд. ЮРАЙТ (2017), 222.

Прикладная математика & Физика, 2023, том 55, № 1. С. 101–120.
Applied Mathematics & Physics, 2023, Volume 55, No 1. P. 101–120.

К 75-летию профессора Александра Павловича Солдатова,

главный научный сотрудник Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук,
профессор института прикладной математики и автоматизации, филиал ФГБНУ «Федеральный научный центр «Кабардино-Балкарский научный центр Российской академии наук», г. Нальчик ведущий научный сотрудник кафедры прикладной математики и компьютерного моделирования, Белгородский государственный национальный исследовательский университет

18 января 2023 года исполнилось 75 лет Александру Павловичу Солдатову, доктору физико-математических наук, профессору, заслуженному деятелю науки Российской Федерации, русскому учёному-математику, специалисту в области дифференциальных уравнений с частными производными и их приложений.

Александр Павлович родился в 1948 году. В 1965 году закончил физико-математическую школу-интернат при НГУ, затем с отличием Новосибирский государственный университет в 1971 г. по специальности «Математика», в 1975 г. защитил кандидатскую диссертацию в Математическом институте АН СССР им. В. А. Стеклова, а в 1979 г. – докторскую диссертацию в Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова.

Многие годы исследовательскую деятельность в академических учреждениях ВЦ АН СССР, позже — ВЦ РАН, ВЦ ФИЦ ИУ РАН, а также в Институте прикладной математики и автоматизации – филиале ФГБНУ ФНЦ «Кабардино-Балкарский научный центр РАН», г. Нальчик Александр Павлович успешно сочетает с преподавательской деятельностью.

Он преподавал во Владимирском ГПУ, Вологодском ГПИ, в начале 2000-х заведовал кафедрой математического анализа и руководил лабораторией дифференциальных и интегральных уравнений в Новгородском ГУ.

Приглашался также в качестве визит-профессора в Региональный научно-образовательный математический центр ЮФУ (Ростов-на-Дону) (октябрь-декабрь 2018 г.).

С 2004 г. работает в НИУ «БелГУ». В 2006 году Александр Павлович стал инициатором открытия диссертационного совета Д 212.015.08 по специальности 01.01.02 «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление». На данный момент Александр Павлович является членом автономного диссертационного совета БелГУ.22.01. Диссертационный совет играет заметную роль в развитии научных исследований и подготовке кадров высшей квалификации.

С деятельностью совета тесно связан Математический семинар НИУ «БелГУ», соруководителем которого является Александр Павлович. На семинаре, в частности, проходят экспертизу многие кандидатские и докторские диссертации. Александр Павлович принимает также активное участие в консультировании, рецензировании и оппонировании кандидатских и докторских диссертаций.

Александр Павлович многие годы возглавлял кафедру математического анализа НИУ «БелГУ». В 2016 г. под его руководством на базе института инженерных технологий и естественных наук было создано новое структурное подразделение – кафедра дифференциальных уравнений. В 2019 г., путем слияния с кафедрой общей математики, она преобразована в кафедру прикладной математики и компьютерного моделирования. Александр Павлович является ведущим научный сотрудником этой кафедры.

Основные научные достижения

Профессором А. П. Солдатовым:

- Построена нетеровская теория сингулярных интегро-функциональных уравнений.
- Получены наиболее общие теоремы существования и единственности решения задачи Франкля и обобщённой задачи Трикоми для уравнений смешанного типа.
- Развит прямой теоретико-функциональный подход к общим эллиптическим краевым задачам на плоскости. В этом направлении изучены смешанные и контактные задачи плоской теории упругости.

Итоги исследований Александра Павловича и его научной школы привлекли внимание математиков как в нашей стране, так и за её пределами, неоднократно докладывались и обсуждались на различных международных научных мероприятиях, в том числе таких как:

- International Conference on Differential equations, December 9-12, 2017, Dalat, Vietnam;
- International Conference «Applications of Mathematics in Engineering and Economics» (AMEE'17), June 8-13, 2017, Sozopul, Bulgaria; International Conference on Analysis and Applied Mathematics (ICAAM, 2016), September 7-10, 2016, Almaty, Kazakhstan;
- 3rd International Workshop «Boundary value problems, functional equations and their applications», April 20-23, 2016, Rzesz?ow, Poland;

  International Workshop «Wiener-Hopf Method, Toeplitz Operators, and their Applications», November 3-7, 2015, Veracruz, Mexico; и др.

Членство в научных обществах

Профессор А. П. Солдатов является членом следующих научных обществ:

- Московское математическое общество;
- Американское математическое общество (AMS), США;
- Немецкое математическое общество (GAMM), Германия.

Научно-организационная деятельность

- член редколлегии журнала «Прикладная математика & Физика»,
- член редколлегии журнала «Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. Физико-математические науки»,
- член оргкомитетов более десятка всероссийских и международных конференций в области дифференциальных уравнений, уравнений в частных производных и математического моделирования, которые проходили на основе Самарского ГТУ.
- член автономного диссертационного совета БелГУ.22.01
- председатель диссертационного совета СамГТУ.

Награды, премии, почётные звания

- Почётный знак «Отличник народного просвещения РСФСР» (1990) — отмечены заслуги Александра Павловича в качестве председателем жюри математических олимпиад Владимирской области
- Заслуженный деятель науки Российской Федерации (2001),
- действительный член Международной академии наук высшей школы (с 2001 года).

Книги

- Одномерные сингулярные операторы и краевые задачи теории функций / А. П. Солдатов. — М. : Высш. шк., 1991. – 206.
- Краевые задачи теории функций в кусочно-гладких областях: В 2 ч. / А. П. Солдатов. Тбилиси: Ин-т прикл. математики им. И. Н. Векуа, 1992. Ч.1. 260 с., Ч.2. 273 с.
- Гипераналитические функции и их приложения : учебное пособие / А. П. Солдатов ; Фед. аг-во по обр., Белгородский гос. ун-т. — Белгород : Белгородский ГУ, 2006. — 102 с.; 20 см.
- Сингулярные интегральные операторы и эллиптические краевые задачи. I / А. П. Солдатов. СМФН, 63:1 (2017), 1–189.

Александр Павлович является известным, активно работающим, специалистом в области дифференциальных уравнений с частными производными, автором более 300 научных статей и нескольких монографий. В работах А. П. Солдатова по уравнениям смешанного типа исследован ряд известных краевых задач – обобщенная задача Трикоми с отходом от характеристики, задача Франкля и др. В частности, впервые им было снято геометрическое условие на эллиптическую часть границы области в теоремах единственности решения обобщенной задачи Трикоми и задачи Франкля. Сравнительно недавно (1994-1995 гг.) А.П. Солдатовым предложены новые корректные постановки смешанных задач для модельного уравнения Лаврентьева – Бицадзе.

В большом цикле работ А. П. Солдатова построена теория одномерных сингулярных интегро-функциональных операторов, которые широко встречаются в приложениях и объединяют черты сингулярного оператора Коши и операторов Винера – Хопфа. Эти результаты легли в основу его монографии «Одномерные сингулярные операторы и краевые задачи теории функций». Ряд важных результатов получен Александром Павловичем в плоской теории упругости, где им предложен новый способ редукции основных краевых задач к эквивалентной системе интегральных уравнений на границе. Известны также прикладные исследования А. П. Солдатова в теории фильтрации и прогнозе уровня грунтовых вод. В этом направлении он свыше десяти лет успешно сотрудничает с Институтом прикладной математики и автоматизации РАН (г. Нальчик).

В последние годы А. П. Солдатовым и его многочисленными учениками активно развивается теоретико-функциональный подход к общим краевым задачам для эллиптических уравнений и систем на плоскости, основанный на разработанном им аппарате граничных интегральных уравнений.

Исследования Александра Павловича всегда привлекают широкое внимание специалистов как у нас в стране, так и в других странах.

Редколлегия журнала «Прикладная математика & Физика»
сердечно поздравляет Александра Павловича Солдатова
с юбилеем и желает ему здоровья, долголетия,
новых успехов и научных результатов.

Список основных научных статей д. ф.-м. н., профессора А. П. Солдатова

2022 год:

1. Солдатов А. П. Об одной краевой задаче для эллиптического уравнения четвертого порядка на плоскости, Журнал вычислительной математики и математической физики. 2022. Т. 62. № 4. С. 616–624.
2. Soldatov A. P. On a boundary problem for a fourth-order elliptic equation on a plane, Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2022. Т. 62. № 4. С. 599–607.
3. Soldatov A. P. Singular integral operators with a generalized Cauchy kernel, Doklady Mathematics. 2022. Т. 105. № 2. С. 117–122.
4. Солдатов А. П. К решению обратной задачи теории рассеяния на всей оси, Дифференциальные уравнения. 2022. Т. 58. № 11. С. 1484–1499.
5. Солдатов А.П. Сингулярные интегральные операторы с обобщенным ядром Коши Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. 2022. Т. 503. № 1. С. 76–82.

2021 год:

6. Averyanov G. N., Soldatov A. P. Linear conjugation problem with a triangular matrix coefficient, Journal of Mathematical Sciences. 2021. T. 257. № 1. C. 61–67.
7. Kovaleva L. A., Soldatov A. P. Dirichlet problem for functions that are harmonic on a two-dimensional net, Journal of Mathematical Sciences. 2021. T. 257. № 1. C. 41–47.
8. Soldatov A. P. Tran Quang Vuong On solutions of the lame system in a flat anisotropic medium, Lobachevskii Journal of Mathematics. 2021. T. 42. № 5. C. 1053–1066.
9. Отелбаев М., Солдатов А. П. Интегральные представления вектор-функций, основанные на параметриксе эллиптических систем первого порядка, Журнал вычислительной математики и математической физики. 2021. Т. 61. № 6. С. 967–976.
10. Otelbaev M., Soldatov A. P. Integral representations of vector functions based on the parametrix of first-order elliptic systems, Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2021. T. 61. № 6. C. 964–973.
11. Солдатов А. П. Об интеграле Помпею и некоторых его обобщениях, Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование. 2021. Т. 14. № 1. С. 60–74.
12. Солдатов А. П. Сингулярные интегральные операторы с обобщенным ядром Коши на кусочно-гладком контуре, Математические заметки СВФУ. 2021. Т. 28. № 3. С. 70–84.
13. Soldatov A. P., Rasulov A. B. Generalized Cauchy–Riemann equations with power-law singularities in coefficients of lower order, В сборнике: Springer Proceedings in Mathematics and Statistics. Сер. "Operator Theory and Harmonic Analysis, OTHA 2020"2021. C. 535–548.
14. Mitin S. P., Soldatov A. P. Solution of the Dirichlet problem for the inhomogeneous Lame system with lower order coefficients, Journal of Mathematical Sciences. 2021.
15. Солдатов А. П., Чернова О. В. Задача линейного сопряжения для эллиптических систем на плоскости, Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2021. Т. 195. С. 108–117.
16. Mitin S. P., Soldatov A. P. Bitsadze – Samarski problem for elliptic systems of second order, Azerbaijan Journal of Mathematics. 2021. T. 11. № 1. C. 154–168.

2020 год:

17. Soldatov A. P. A factorization problem on a smooth two-dimensional surface, Mathematical Notes. 2020. T. 108. № 1–2. C. 272–276.
18. Soldatov, A. P. Singular Integral Operators and Elliptic Boundary-Value Problems. Part I Journal of Mathematical Sciences (United States), 2020. T. 245. № 6. C. 695–891.
19. Солдатов А. П. О фредгольмовости и индексе обобщённой задачи Неймана, Дифференциальные уравнения. 2020. Т. 56. № 2. С. 217–225.
20. Soldatov A. P., Chernova O.V. Riemann – Hilbert problem for first-order elliptic systems with constant leading coefficients on the plane, Journal of Mathematical Sciences. 2020. T. 250. № 5. C. 811–818.
21. Солдатов А. П. Об одной задаче факторизации на гладкой двумерной поверхности. Математические заметки. 2020. Т. 108. № 2. С. 285–290.

2019 год:

22. Rasulov A. B., Soldatov A. P. Riemann — Hilbert-type problems for Bitsadze equations with strong singularities in low-order coefficients, 2019, Complex Variables and Elliptic Equations, 64(8), C. 1275–1284.
23. Soldatov A. P. The Riemann -–Hilbert Boundary Value Problem for the Moisil–Theodoresco System, 2019 Journal of Mathematical Sciences (United States) 239(3), C. 381–411.
24. Zhura N. A., Soldatov A. P. Problem of the Riemann – Hilbert Type for a Hyperbolic System on the Plane, 2019 Differential Equations, 55(6), C. 815–823.

25. Mitin S. P., Soldatov A. P. On asymptotics of piecewise analytic functions, 2019 Complex Variables and Elliptic Equations 64(5), С. 804–815.
26. Begehr H., Nakhushev A. M., Soldatov A. P. Honoring A. V. Bitsadze's service to science (on his 100th birthday), 2019, Complex Variables and Elliptic Equations 64(5), С. 721–735
27. Soldatov A. P. On elliptic systems of two equations on the plane, 2019, Trends in Mathematics С. 279–301.
28. Солдатов А. П. О задаче Шварца для системы Моисила – Теодореско в многосвязных областях, Continuum. Математика. Информатика. Образование. 2019. № 4 (16). С. 69–75.

2018 год:

29. Soldatov A. P. Characteristically closed domains for first order strictly hyperbolic systems in the plane, Journal of Mathematical Sciences. 2018. Т. 232. № 4. С. 552–557.
30. Polunin V. A., Soldatov A. P. Generalized Cauchy integrals on the plane // International Conference on Analysis and Applied Mathematics, Filomat, Vol. 32, № 3 (2018).
31. Soldatov A. P. On solvability of linear conjugation problem in weighted holder spaces, 2018, AIP Conference Proceedings.
32. Soldatov A. P. On the Theory of Anisotropic Flat Elasticity, 2018, Journal of Mathematical Sciences December 2018, Volume 235, Issue 4, P. 484–535 (United States).
33. Koshanov B., Soldatov A. P. About the generalized Dirichlet –Neumann problem for an elliptic equation of high order, 2018, AIP Conference Proceedings.
34. Soldatov A. P. Characteristically Closed Domains for First Order Strictly Hyperbolic Systems in the Plane, 2018, Journal of Mathematical Sciences (United States).

2017 год:

35. Polunin V. A., Soldatov A. P. An analogue of the Schwarz problem for the Moisil – Teodorescu system, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics vol. 216, 173–180 (2017).
36. Zhura N. A., Soldatov A. P. A boundary-value problem for a first-order hyperbolic system in a two-dimensional domain, Izvestiya Mathematics, 2017, 81(3), с. 542–567.
37. Polunin V. A., Soldatov A. P. Integral representation of solutions of the Moisil–Theodorescu system in multiply connected domains, 2017, Doklady Mathematics, 96(1), с. 358–361

2016 год:

38. Soldatov A., Rasulov A. Boundary value problem for a generalized Cauchy – Riemann equation with singular coefficients // Differential equations, 2016, № 5, Т. 52, стр. 616–629.
39. Soldatov A. Mixed problem of plane orthotropic elasticity in a half-plane //Differential equations, 2016, № 6, Т. 52, стр. 798–812.
40. Soldatov A., Mesheryakova E. Riemann – Hilbert problem in a family of weighted Holder spaces //Differential equations 2016, № 4, Т. 52, стр. 495–504.
41. Polunin V. A., Soldatov A. P. The Riemann–Gilbert problem for Moisil–Theodorescu system in multiply connected domains // Electronic journal of differential equation, Vol. 2016 (2016), No. 310, P. 1–5.
42. Polunin V. A., Soldatov A. P. An analogue of the Schwarz problem for the Moisil–Teodorescu system in a multiply connected domain // Journal of Fundamental and Applied Sciences, 2016, 8(2S), 2989–2995

2015 год:

43. Ковалева Л. А., Солдатов А. П. Задача Дирихле на двумерных стратифицированных множествах. Изв. РАН. Сер. матем., 79:1 (2015), 77–114.
44. Kovaleva L. A., Soldatov A. P. The Dirichlet problem on two-dimensional stratified sets, Izv. Math., 79:1 (2015), 74–108.

45. Аверьянов Г. Н., Солдатов А. П. Задача линейного сопряжения для аналитических функций в семействе весовых пространств Гёльдера. Изв. вузов. Матем., 2015, 9, 56–61.

46. Aver'yanov G. N., Soldatov A. P. Linear conjugation problem for analytic functions in the weighted Ho?lder spaces, Russian Math. (Iz. VUZ), 59:9 (2015), 47–50.

2014 год:

47. Soldatov A. P. Generalized potentials of double layer in plane theory of elasticity, Eurasian mathematical journal, 2014, V.5, No 2, P. 78–125.

48. Солдатов А. П. Разрешимость задачи Дирихле на двумерных стратифицированных множествах в классах Соболева $W^{1,2}$ и Гельдера C^{μ}, Докл. АМАН 2013, Т.15,№ 2, С. 99–107.

2013 год:

49. Жура Н. А., Солдатов А. П. К решению обратной задачи Штурма – Лиувилля на всей оси, Докл. РАН, 2013, 453, 4, С. 386–372.

50. Солдатов А. П. Задача Дирихле для слабо связанных эллиптических систем на плоскости, Дифференц. уравнения, 2013, т. 49, № 6, С. 734–745.

51. Солдатов А. П. Задача Неймана для эллиптических систем на плоскости, Труды Шестой Международной конференции по дифференциальным и функционально-дифференциальным уравнениям (Москва, 14–21 августа, 2011). Часть 4, Современная математика. Фундаментальные направления, 48, РУДН, М., 2013, 120–133

52. Soldatov A. P. Mixed problems for the Lavrent'ev— Bitsadze equation Proceedings of the 38th International Conference Applications of Mathematics in Engineering and Economics, AIP Conf. Proc. 1497, P. 199–204. doi:http://dx.doi.org/10.1063/1.4766786

53. Митин С. П., Солдатов А. П. Задача Дирихле для системы Ламе с кусочно - постоянными коэффициентами, Материалы международной научной конференции «Дифференциальные уравнения и их приложения», 26- 31 мая 2013 г., Белгород, С 124–125.

54. Митин С. П., Солдатов А. П., Задача Дирихле для системы Ламе с кусочно - постоянными коэффициентами, Научные ведомости БелГУ, Белгород, 2013, Т.32, № 19(162). С 92–100.

55. Ковалева Л. А., Солдатов А. П. Задача Дирихле на двумерных стратифицированных множествах, Материалы международной научной конференции «Дифференциальные уравнения и их приложения», 26-31 мая 2013 г., Белгород, С 88–89.

56. Жура Н. А., Солдатов А. П. К решению обратной задачи Штурма – Лиувилля, Материалы международной научной конференции «Дифференциальные уравнения и их приложения», 26- 31 мая 2013 г., Белгород, С 73.

57. Солдатов А. П. Обобщенная задача Трикоми для уравнения Лаврентьева Бицадзе в весовых пространствах Гельдера, Математическая физика и ее приложения, Третья международная конференция (Самара, 27 августа – 1 сентября, 2012 г.)Материалы конференции, С 280–282.

2012 год:

58. Солдатов А. П., Урбанович Т. М. Характеристическое сингулярное уравнение на прямой в исключительном случае с произвольными порядками нулей, В книге «Аналитические методы анализа и дифф. ур-ний, АМАДЕ-2011, посв. Памяти проф. Килбаса, под ред. Рогозина С.В. – Минск, БГУ, 2012, С. 195–206.

59. Солдатов А. П. Интегральные представления системы Ламе на плоскости, Материалы второй международной научной конференции «Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения», г. Ростове-на-Дону, 22-26 апреля 2012 г., С. 68–70.

60. Солдатов А. П. О задачах типа Дирихле для уравнения Лаврентьева – Бицадзе, Труды Математического института им. В. А. Стеклова, 2012, т. 278, С. 242–249.

61. Soldatov A. P. On Dirichlet type problems for the Lavrent'ev – Bitsadze equation, Proceeding of the Steklov Institute of Mathematics, 2012, V. 278, P. 233–240.

62. Жура Н. А., Солдатов А. П. Об асимптотике кусочно–аналитической функции, удовлетворяющей контактным условиям, Сибирский матем. журнал, 2012, т. 53, № 5, 1001–1006.

63. Zhura N. A., Soldatov A. P. On Asymptotics of a Piecewise Analytic Function Satisfying Contact Conditions, Sib. Mathem. Journal, 2012, т. 53, номер 5, 800–804.

2011 год:

64. Солдатов А. П. Нелокальная краевая задача Римана, Научные ведомости БелГУ, 2011, 5, вып. 22, С. 122–132.

65. Полунин В. А., Солдатов А. П. О сопряженной задаче Римана – Гильберта для системы Моисила – Теодореску, Научные ведомости БелГУ, 2011, 5, вып. 22, С. 106–111.

66. Полунин В. А., Солдатов А. П. Трехмерный аналог интеграла типа Коши // Дифференц. уравнения, 2011, Т. 47, 3, 2011, С. 366–375.

67. Polunin V. A., Soldatov A. P., Three-dimensional analog of the Cauchy type integral, Differential Equations, 2011, Volume 47, Number 3, Pages 363–372.

68. Полунин В. А., Солдатов А. П. Об интегральном представлении решений системы Моисила – Теодореску, Материалы Международной "Дифференциальные уравнения и смежные вопросы посвященная 110-летию со дня рождения И.Г.Петровского, Москва, 29 мая–4 июня 2011 г., Москва, 2011, С. 308–309.

69. Солдатов А. П. О разрешимости задачи Дирихле для эллиптических систем на плоскости в классе C, Труды Всероссийской научной конференции с международным участием "Дифференциальные уравнения и их приложения 27–30 июня 2011 г. Стерлитамак, 2011, С. 85–87.

70. Солдатов А. П. Краевая задача для уравнения смешанного типа высокого порядка, Материалы VI Международной конференции по математическому моделированию, 3–8 июля 2011, Якутск, 2011, С. 17–18.

71. Polunin V. A., Soldatov A. P. An analogue Schwartz problem for Moisil - Theodorescu system, Abstracts of 8th International ISAAC Congress, Moscou, August 22-27, 2011, P. 82.

72. Soldatov A. P. Neumann problem for second order elliptic systems on the plane, 8th International ISAAC Congress, Moscou, August 22-27, 2011, P. 88.

73. Солдатова Т. А. Граничные свойства обобщенных интегралов типа Коши в пространствах гладких функций, Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. 2011. Т. 11. Сер. Математика. Механика. Информатика, вып. 3, ч. 1, С. 95–109.

74. Солдатов А.П., Урбанович Т.М., Характеристическое сингулярное уравнение с ядром Коши в исключительном случае, Научные ведомости БелГУ, (матем., физика), 2011, 17(112), С.165-171 19-11BelGU3 (РИНЦ)

75. Солдатов А. П., Урбанович Т. М. О решении характеристического сингулярного интегрального уравнения в исключительном случае, Материалы II Всероссийской конференции молодых ученых, Матем. моделирование фрактальн. процессов, родств. пробл. анализа и информ., Кабардино-Балкарская республика, п. Терскол, 5-8 декабря 2011 , С. 202-204.

76. Абаполова Е.А., Солдатов А.П. Явное выражение для обобщенного потенциала двойного слоя системы Ламе плоской ортотропной упругости, Научные ведомости БелГУ, (матем., физика), 2011, 17(112), С.150–155.

77. Полунин В. А., Солдатов А. П. Об интегральном представлении решений системы Моисила – Теодореску, Научные ведомости БелГУ, 2011, № 23 (118), с. 84–92.

78. Soldatov A. P. The Schwarz problem for Douglis analytic functions, Journal of Mathematical Sciences, 2011, V. 173, 2, P. 221–224.

2010 год:

79. Soldatov A. P. To the theory of anisotropic plane elasticity, Analysis by Oldenbourg Wissenschaftsverlags, 2010, Vol. 30(2) P. 107–117.

80. Солдатов А. П., Жура Н. А. Об асимптотике кусочно-аналитической функции в семействе секторов, Докл АМАН, 2010, 12, 1, С. 73–78.

81. Солдатов А. П. Задачи с данными Дирихле для уравнения Лаврентьева – Бицадзе, Докл. АМАН.

82. Ковалева Л. А., Солдатов А. П., Об одной нелокальной задаче теории функций, Дифференциальные уравнения, 2010, 46(3), С. 396–409.

83. Kovaleva L. A., Soldatov A.P. On a nonlocal problem in function theory, Differential Equations, 2010, Vol. 46(3), P.400-414.

84. Ковалева Л. А., Солдатов А. П., Гармонические функции в двумерных стратифицированных областях, Научные ведомости БелГУ, 2010, 17(88), 73–78.

85. Полунин В. А., Солдатов А. П. Об условии Шапиро – Лопатинского в задаче Римана – Гильберта для эллиптической системы первого порядка, Научные ведомости БелГУ, 2010, 17(88), 91–100.

86. Абаполова Е. А., Солдатов А. П. К теории сингулярных интегральных уравнений на гладком контуре, Научные ведомости БелГУ, 2010, №5 (76), вып. 18, С. 6–20.

87. Солдатов А. П. Задача Шварца для функций, аналитических по Дуглису, Современная математика и ее приложения, 2010, 67, 99–102.

88. Солдатов А. П. Краевые задачи с данными Дирихле для уравнения Лаврентьева – Бицадзе, Материалы международной конференции по дифф. ур-ниям и динамическим системам, Суздаль, 2010. М, 2010, С.175–176.

89. Ковалева Л. А., Солдатов А. П., Гармонические функции на двумерных стратифицированных множествах, материалы Международной научной конференции, посвященной 105-летию академика Сергея Михайловича Никольского, 17-19 мая 2010 г., Изд-во МГУ, 2010, 82–83.

90. Солдатов А. П. О некоторых постановках краевых задач для уравнения Лаврентьева – Бицадзе с данными Дирихле, Материалы Российско- Болгарского симпозиума, Нальчик, 2010, С. 225–226.

91. Полунин В. А., Солдатов А. П. Задача Римана – Гильберта для системы Моисила – Теодореско, Материалы I Всероссийской конференции молодых ученых, Матем. моделирование фрактальн. процессов, родств. пробл. анализа и информ., Кабардино- Балкарская республика, п. Терскол, 6-9 декабря 2010 , С. 132–133.

92. Солдатов А. П., Чернова О. В. Эллиптическая система первого порядка в бесконечной области, Материалы I Всероссийской конференции молодых ученых матем. моделирование фрактальн. процессов, родств. пробл. анализа и информ., Кабардино- Балкарская республика, п. Терскол, 6-9 декабря 2010 , С. 145–147.

93. Солдатов А. П. К теории краевых задач на двумерных стратифицированных множествах, Современные методы теории краевых задач. Материалы воронежской весенней матем. школы, Изд-во ВГУ, 2010, С. 212–213.

94. Полунин В. А., Солдатов А. П. Задача Римана – Гильберта для системы Моисила – Теодореску в конечной области, сб. труд. «Неклассические уравнения математической физики», посвященных В. Н. Врагову, 2010, С. 192–201.

2009 год:

95. Солдатов А. П., Чернова О. В. К теории эллиптических систем первого порядка. Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук, 2009, Т.11, 1, С. 119-123.

96. Солдатов А. П. К теории интегральных уравнений Фредгольма второго рода, Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук, 2009, Т.11,1, С. 74–78.

97. Soldatov A. P. On representation of solutions of second order elliptic systems on the plane, More progresses in analysis, Proceedings of the 5th International ISAAC Congress, Catania, Italy , 25 - 30 July 2005, Editors H.Begehr and oth., World Scientific, 2, (2009), P. 1171–1184.

98. Soldatov A. P. Bitsadze – Samarski problem for elliptic systems of second order // Journal of applied functional analysis (JAFA), 2009, P. 98–114.

99. Soldatov A. P. Generalized potentials of double layer for second order elliptic systems, Научные ведомости БелГУ, 2009, № 13(68), вып. 17/1, С. 103–109.

100. Солдатов А. П., Чернова О. В. Задача Римана – Гильберта для эллиптической системы первого порядка в классах Гельдера, Научные ведомости БелГУ, 2009, № 13(68), вып. 17/2, С. 115–121.

101. Абаполова Е. А., Солдатов А. П. Система Ламе плоской анизотропной теории упругости, Современная математика и ее приложения, 2009, Vol. 157, 3, P. 167-172.

102. Abapolova E. A, Soldatov A. P. Lame system of elasticity theory in a plane orthotropic medium, Journal of Mathematical Sciences, 2009, Vol. 157, 3, P. 387–394 (Proceedings of the International Conference on Dynamical Systems and Differential Equations. Suzdal, 2006. Part 1, 2008")

103. Soldatov A. P. Hardy space of solutions of elliptic systems on the plane, Journal of Mathematical Sciences, 2009, Vol. 160(1), P. 103-115

104. Солдатов А. П. О функциях, непрерывных по Гельдеру, Труды Стерлитамакского филиала Академии наук РБ. Серия "Физико-математические и технические науки". Уфа: Гилем, 2009. Вып. 6. С. 111–117.

105. Солдатов А. П. Интегральное представление функций, аналитических по Дуглису, Вестник СамГУ-Естественнонаучная серия, 2008, №8/1(67), С. 225–234.

106. Soldatov A. P. Function theoretical approach to anisotropic plane elasticity, Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics, 2007, Vol. 7(1), P. 113-124.

2008 год:

107. Солдатов А. П. Пространство Харди решений эллиптических систем второго порядка, Докл. РАН, 2008, Т. 418, 2, С.162–167.

108. Soldatov A. P. The Hardy Space of Solutions to Second-Order Elliptic Systems, Doklady RAN, 2008, V. 418, 2, P. 162–167.

109. Солдатов А. П. Граничные свойства обобщенных интегралов типа Коши с суммируемой плотностью, Докл. Адыгской (Черкесской) Международной академии наук, 2008, 10, 1, С. 62–66.

110. Малахова Н. А., Солдатов А. П. Об одной краевой задаче для эллиптического уравнения высокого порядка, Дифференц. ур-ния, 2008, Т.44, № 8, С. 1077–1083.

111. Malakhova N. A., Soldatov A. P. On a boundary value problem for a higher order elliptic equation, Differential equations, 2008, V. 44, No. 8, P. 1–8.

112. Полунин В. А., Солдатов А. П., Трехмерный аналог интеграла типа Коши с непрерывной по Гельдеру плотностью, Научные ведомости БелГУ. Математика. Физика. 2008, Выпуск 15. №13(53) С. 95–103.

113. Абаполова Е. А., Солдатов А. П. Система Ламе плоской ортотропной упругости, Современная математика и ее приложения, 2008, Т. 53, С. 3–10.

114. Солдатов А. П. Пространство Харди решений эллиптических систем на плоскости, Современная математика и ее приложения, 2008, Т. 57, С. 90–100.

115. Солдатов А. П. К теории неклассических сингулярных интегральных уравнений на кусочно-гладкой кривой, Сб. «Неклассические уравнения математической физики. Труды международной конференции «Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения», посвященной 100-летию со дня рождения академика И. Н. Векуа», Новосибирск, Институт математики СО РАН, 2007, С. 251–259.

2007 год:

116. Солдатов А. П. Пространство Харди решений эллиптических систем первого порядка, Докл. РАН, 2007, 416, № 1, С. 26–30.

117. Soldatov A. P. The Hardy Space of Solutions to First-Order Elliptic Systems, Doklady Mathematical Sciences, 2007, vol. 76, No 2, P. 660–664.

118. Абаполова Е. А., Солдатов А. П. О системе Ламе плоской анизотропной теории упругости, Докл. АМАН, 2007, Т. 9, № 7, С. 17–23.

119. Ковалева Л. А., Солдатов А. П. Об одной задаче теории функций, Докл. АМАН, 2007, Т. 9, № 7, С. 30–38.

120. Ващенко О. В., Солдатов А. П. Пространство Харди решений обобщенной системы Бельтрами, Дифференц. ур-ния, 2007, Т. 43, № 4, С. 488–491.

121. Vashchenko O. V., Soldatov A. P., The Hardy space of solutions of generalized Beltrami systems, Differential Equations, 2007, Vol. 43, No. 4, pp. 1–4.

122. Абаполова Е. А., Солдатов А. П., Система Ламе теории упругости в плоской ортотропной среде, Вестник СамГУ-естественно научная серия, 2007, №6 (56), С. 260–268.

2006 год:

123. Soldatov A. P. On Dirichlet problem for elliptic systems on the plane, Complex variables and elliptic equations, 2006, Vol. 51, No 8-11, P. 805–820.

124. Солдатов А. П. Задача типа Бицадзе – Самарского для эллиптических систем второго порядка на плоскости, Докл. РАН, 2006, Т. 410, № 5, С. 219–224.

125. Soldatov A. P. Problem of Bitsadze – Samarskii Type for Second-Order Elliptic Systems in the Plane, Doklady Mathematics, 2007, vol. 74, No 2, pp. 736–740.

126. Солдатов А. П. Об индексе задачи Дирихле для эллиптических систем на плоскости, Дифференц. уравнения, 2006, Т. 42, № 8, С. 1092–1105.

127. Soldatov A. P. On the index of the Dirichlet problem for elliptic systems on the plane, Differential Equations, 2006, Vol. 42, No. 8, P. 1–14.

128. Солдатов А. П. Эллиптические системы второго порядка в полуплоскости, Известия РАН (сер. матем.), 2006, Т.70, № 6, С. 161–192.

129. Soldatov A. P. Second order elliptic systems in half-plane, Izv. RAN. Seriya Matematicheskaya.

130. Солдатов А. П. Задача типа Бицадзе – Самарского теории функций, Научные ведомости БелГУ, серия «Информатика и прикладная математика», 2006, вып. 6, 1(21), С. 23–30.

131. Ващенко О.В., Солдатов А.П., Интегральное представление решений обобщенной системы Бельтрами, Научные ведомости БелГУ, серия «Информатика и прикладная математика», 2006, вып.6, №1(21), С. 3–6.

132. Солдатов А. П. Интегралы с ядрами, однородными степени -1, Научные ведомости БелГУ, сер физ.-матем. науки, 2006, №6 (26), вып. 12, С. 3–9.

2005 год:

133. Soldatov A. P. On elliptic boundary value problems on upper half-plane, Complex variables, 2005, V.50, No 7-11, P. 719-731.

134. Солдатов А. П. О степенно- логарифмической асимптотике в угле аналитических функций, Докл. РАН, 2005, т. 400, № 2, С. 162–165.

135. Soldatov A. P. On a power- logarithmic asymptotic on an angle of analytic functions, Dokl. RAN, 2005, 400, No 2, P. 162–165.

136. Солдатов А. П. Задача типа Бицадзе - Самарского для уравнения Лапласа, Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. Т. 7. № 2. 2005. – С. 50–55.

137. Солдатов А. П. Задача Бицадзе-Самарского для функций, аналитических по Дуглису, Дифференц. уравнения, 2005, Т. 41, No 3, С. 396–407.

138. Soldatov A. P. Bitsadze-Samarski problem for Douglis analitic functions, Differentcial'nye Uravneniya, 2005, 41, No 3, P. 396–407.

139. Soldatov A. P. Dirichlet problem for elliptic systems on the plane, Journal of Contemporary Mathematical Analysis, 2005, Volume 40, Number 6, P. 54–70.

140. Soldatov A. P. On the theory of mixed- type equations, J. Math. Sciences, 2005, V.129, N0 1, P. 3671–3679.

141. Солдатов А. П. Оценка спектрального радиуса функциональных операторов. – Неклассические уравнения математической физики. Труды семинара, посвященные 60-летию проф. В.Н.Врагова, Под ред. А. И. Кожанова.- Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2005. – 297 С.

2004 год:

142. Soldatov A. P. On asymptotic on an angle of analytic functions, Complex analysis, differential Equations and Related Topics. Proc. Conf. Analysis, Jerevan, Armenia, 2002, eds. G. Barsegian, H. Begehr, H. Gharzaryan, A. Nersessian. Nat. Akad. Sci. Armenia, 2004, 218–223.

143. Солдатов А. П. Гипераналитические функции и их приложения, Современная математика и ее приложения, Тбилиси, Институт кибернетики Академии наук Грузии (ISSN 1512- 1712), 2004, Т. 15, С.142-199.

144. Soldatov A. P. Hyperanalytic functions, J. Math. Sciences, 2004, V. 17, P. 67–89.

2003 год:

145. Солдатов А. П. О первой и второй краевых задачах для эллиптических систем на плоскости, Дифференциальные уравнения, 2003, Т. 39, № 5, С. 674–686.

146. Soldatov A. P. On the first and second boundary value problems for elliptic systems on the plane, Differentcial'nye Uravneniya, 39, (2003), 674–686; English transl. in Differential Equations, 39, (2003).

147. Солдатов А. П. Обобщенные ядра Коши и Пуассона, Известия Международной академии наук высшей школы, 2003, № 4(26), С. 178–184.

148. Soldatov A. P. The generalized Cauchy and Poisson kernels, Izv. mezdunarodnoy akademii vish. shkoli, 4(26), (2003), P. 178–184 (Russian).

149. Begehr H., Soldatov A. P. On elliptic boundary value problems in the plane. Proceedings of the 3rd Intern. ISAAC Congress, Editors H. Begehr and oth., World Scientific, 2, (2003), 779–784.

150. Бегер Г., Солдатов А. П. К теории эллиптических краевых задач на плоскости. Proceedings of the 3rd Intern. ISAAC Congress, Editors H.Begehr and oth., World Scientific, 2, (2003), 779–784.

151. Солдатов А. П. К теории уравнений смешанного типа, Современная математика и ее приложения, 2003, Т. 10, SuzdalConference-4, С. 193–206.

152. Soldatov A. P. On the theory of mixed-type equations, J. Mathem.Sciences, 2003, Vol.10, Suzdal Conference-4, P. 193–206.

153. Жура Н. А., Солдатов А. П. Нелокальные краевые задачи на плоскости для гиперболических систем первого порядка, Спектральная теория дифф. операторов и родственные проблемы: Труды межд. научн. конф., 24- 28 июня 2003 г. Стерлитамак, т. 1, С. 124–130, Уфа, Изд-во Гилем, 2003.

154. Zhura N. A., Soldatov A. P. Nonlocal boundary value problems in the plane for hyperbolic systems of the first order. Proc. Of Intern. confer. “Specrtal theory of diff. operators and related problems”, Sterlitamak, 2003, Vol. 1, Ufa, P. 124-130 (Russian).

155. Сакс Е. А., Солдатов А. П. Задача Бицадзе – Самарского для эллиптических систем второго порядка, Спектральная теория дифф. операторов и родственные проблемы: Труды межд. научн. конф., 24- 28 июня 2003 г. Стерлитамак, т. 1, С. 220– 226, Уфа, Изд-во Гилем, 2003.

156. Saks E. A., Soldatov A. P. The Bitsadze – Samarskii problem for elliptic systems of the second order. Proc. Of Intern. confer. “Specrtal theory of diff. operators and related problems”, Sterlitamak, 2003, Vol. 1, Ufa, P. 220–226 (Russian).

157. Солдатов А. П., Шишмарева Ю. Н. О допустимых областях для систем главного типа на плоскости, Труды Межд. Научн. конференции “Современные проблемы матем. физики и информ. технологии”, т. 2, Ташкент, 2003.

2002 год:

158. Солдатов А. П. Система Ламе плоской анизотропной теории упругости, Докл. РАН, 2002, Т. 385, № 2, С. 163–167.

159. Soldatov A. P. Lame system of anisotropic plane elasticity, Dokl. RAN, 385, (2002), 163–167; Englishtransl.in Dokl. Russ.Acad.Sci., 385, (2002).

160. Солдатов А. П. Весовые классы Харди аналитических функций, Дифференц.уравн. 2002, Т.38, № 6, С. 809–817.

161. Soldatov A. P. The weight Hardy spaces for analityc functions, Differentcial’nye Uravneniya, 38, (2002), C. 809–817; English transl. in Differential Equations, 38, (2002).

162. Солдатов А. П. Задача R для системы Лаврентьева – Бицадзе в весовых классах Харди, Дифференц.уравн. 2002, Т. 38, № 10, С. 1418–1430.

163. Soldatov A. P. The problem R for Lavrent’ev- Bitsadze system in the weighted Hardy spaces, Differentcial’nye Uravneniya, 38, (2002), 1418-1430; English transl. in Differential Equations, 38, (2002).

164. Солдатов А. П. Задачи Римана – Гильберта для системы Лаврентьева – Бицадзе в смешанной области с характеристическими участками границ, Дифференц.уравн. 2002, Т. 38, № 12, С. 1653–1663.

165. Soldatov A. P. The Riemann – Hilbert problems for Lavrent’ev – Bitsadze system in mixed domain whose boundary contains segments of characteristics, Differentcial’nye Uravneniya, 38, (2002); English transl. in Differential Equations, 38, (2002).

166. Солдатов А. П., Краевые задачи для уравнения Лаврентьева- Бицадзе с данными на всей границе, В сб. науч. работ "Неклассические уравнения математической физики": Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2002. 249 с., С. 321–340.

167. Soldatov A. P., The boundary value problems for Lavrent’ev – Bitsadze equation with dates on the whole boundary. In “Nonclassic equations of mathem. physics”, Editor A. Kozhanov, Novosibirsk, 2002, P. 321–340.

2001 год:

168. Солдатов А. П. Задача Пуанкаре для уравнений смешанного типа, Докл. РАН, 2001, 377, № 4, С. 447–451.

169. Soldatov A. P. Poincare problem for equation of mixed type. Dokl. RAN, 377, 4, (2001), 447-451; English transl in Dokl. Russ. Acad. Sci., 377, 4, (2001).

170. Солдатов А. П. Алгебра сингулярных операторов с концевым символом на кусочно- гладкой кривой. II. Основные построения, Дифференц.уравн. 2001, т.37, № 6, С. 825–838.

171. Soldatov A. P. The algebra of singular operators with end symbol on piecewise smooth line. II. The main construction. Differentcial’nye Uravneniya, 37, (2001), 825-838; English transl. in Differential Equations.

172. Солдатов А. П. Алгебра сингулярных операторов с концевым символом на кусочно- гладкой кривой III. Операторы нормального типа, Дифференц.уравн. 2001, Т. 37, 10, С. 1364-1376.

173. Soldatov A. P. Algebra of singular operators with end symbol on piecewise smooth line. III. The normal type operators. Differentcial’nye Uravneniya, 37, (2001), 1364-1376; English transl. in Differential Equations, 37, (2001).

174. Солдатов А. П. О существовании допустимых областей для систем главного типа на плоскости, Юбилейный сб, посв. 75-летию В. А. Какичева, НовГУ, 2001, В. Новгород, С. 165-170.

175. Солдатов А. П. Обобщенные ядра Коши, Вестник НовГУ, 2001, 19, С. 136–141.

176. Soldatov A. P. The generalized Cauchy kernels, Vestn. NovGU, 19, (2001), C. 119–123 (Russian).

2000 год:

177. Солдатов А. П. Алгебра сингулярных операторов с концевым символом на кусочно- гладкой кривой I. Операторы типа свертки на полуоси, Дифференц. уравн. 2000, Т.36, № 9, С. 1209–1219.

178. Soldatov A. P. The algebra of singular operators with end symbol on piecewise smooth line. I. Convolution type operators, Differentcial'nye Uravneniya, 36, (2000), 1209- 1219; English transl. in Differential Equations, 36, (2000).

179. Солдатов А. П. О решениях системы Лаврентьева- Бицадзе, допускающих нули бесконечного порядка, Дифференц. уравн. 2000, Т.36, № 8, С. 1101–1105.

180. Soldatov A. P. On solutions of Lavrent'ev-Bitsadse systems, having zeros of infinite order, Differential equations, 36, (2000), 1101-1105; English transl. in Differential equations, 36, (2000).

181. Солдатов А. П. Интегральные операторы типа свертки на полуоси, "Математика в вузе. Совр. интеллектуальные технологии"Матер. XII межд. научно- метод. конф., 21-25 июня 2000, Великий Новгород, НовГУ, 2000, С. 248-250.

182. Солдатов А. П. Задача Пуанкаре для уравнения смешанного типа с данными на всей границе, Труды Матем.центра им. Н.И.Лобачевского. Т.5 "Актуальные пробл. матем. и механ."Мат. межд. научн. конф., С. 194-198, - Казань, УНИПРЕСС, 2000.

183. Soldatov A. P. Puancare problem for equations of mixed type with dates on the whole boundary, Proceeding of Mathem. center of Lobachevski, vol. 5 "Act.problems of mathem. and mechanics (2000), 194-198 (Russian).

184. Солдатов А. П. Метод триангуляции в краевых задачах на римановых поверхностях, "Математические методы в технике и технологиях ММТТ-XIII, Сб. трудов XIII Международной научн. конф., Т. 1, Ст. Петербург, 2000, С. 97-99.

185. Сакс Е. А., Солдатов А. П. Первая краевая задача плоской теории упругости с контактными условиями внутри области, Научн.труды IV межд.семин."Совр. проблемы прочности Ст.Русса, 2000,-Новгород, НовГУ, 2000, Т.1, С. 126-130.

1999 год:

186. Soldatov A. P. To elliptic theory for domains with piecewise smooth boundary on the plane, Proc. the Congress ISAAC'97, 3-7 June 1997, University of Delaware, Newark, USA, //Partial Diff. and Integr. Equations, Kluver Ac. Publ., 1999, p. 177-186.

187. Солдатов А. П. Об индексе операторов с концевым символом, Изв. РАН (сер. матем.) 1999, Т.63, № 4, С. 171–206.

188. Soldatov A. P. On the index of operators with end symbol, Izv.RAN, 63, (1999), 171-206; English transl.in Izv. Russ. Acad. Sci., 63, (1999).

189. Солдатов А. П. Модельные уравнения смешанного типа газовой динамики, Научн. труды III межд. семин."Совр. проблемы прочности Ст.Русса, 1999,-Новгород, НовГУ, 1999, Т.1, С. 113-118.

190. Солдатов А. П. Краевые задачи для уравнений смешанного типа, Научн. труды III межд. семин."Совр. проблемы прочности Ст. Русса, 1999, - Новгород, НовГУ, 1999, Т.1, С. 119-125.

1998 год:

191. Солдатов А. П. Обобщенная задача Римана на римановой поверхности, Докл. РАН,1998, Т. 362, № 6, С. 735–738.

192. Soldatov A. P. Generalized Riemann problem on Riemann's surfaces, Dokl. RAN, 362, 6, (1998), 735–738; English transl.in Dokl. Russ. Acad. Sci., 362, 6, (1998).

193. Солдатов А. П. Задача Римана -Гильберта для системы Лаврентьева- Бицадзе, Дифференц. уравн. 1998, Т. 34, № 12, С. 1649–1659.

194. Soldatov A. P. The Riemann-Hilbert problem for Lavrent'ev- Bitsadse systems, Differentcial'nye Uravneniya, 34, (1998), 1649-1659; English transl. in Differential equations, 34, (1998).

195. Солдатов А. П. О решении основных задач плоской упругости в угле, Научн. труды II межд. семин. "Совр. проблемы прочности Ст.Русса, 1998,-Новгород, НовГУ, Т.1, С. 87-88.

1997 год:

196. Солдатов А. П., Митин С. П. Об одном классе сильно эллиптических систем, Дифференц. уравн. 1997. Т.33, N 8. С. 1118—1122.

197. Soldatov A. P. and Mitin S. P. On some class of strongly elliptic systems, Differentcial'nye Uravneniya, 33, (1997), 1118 – 1122; English transl. in Differential Equations, 33, (1997).

198. Солдатов А. П. К теории эллиптических задач в областях с кусочно- гладкой границей, I межд. семин. "Акт. проблемы прочности"1997, Т.1, II, С. 333-344, Новгород, НовГУ, 1997.

1996 год:

199. Солдатов А. П., Митин С. П. О разрешимости обобщенной смешанной задачи, Дифференц. уравн. 1996. Т. 32 , № 3. С. 384–388.

200. Soldatov A. P., Mitin S. P. On solvability of the generalized mixed problem, Differentcial'nye Uravneniya, 32, (1996), 384-388; English transl. in Differential Equations, 32, (1996)

201. Солдатов А. П. Обобщенная задача Римана, International Conference on boundary value problems, special functions and fractional calculus, part 2, Minsk, 1996, c. 18-19

202. Soldatov A. P. Generalized Riemann problem, Intern. Conf. on boundary value problems, special functions and fractional calculus, part 2, Minsk, (1996), P.18-19 (Russian).

1995 год:

203. Солдатов А. П. Эллиптические задачи на плоскости. Вестник НовГУ, 1995, 1, 113-119.

204. Soldatov A.P.,Elliptic problems in the plane, Vestn. NovGU, 1 (1995), 119-123 (Russian).

205. Солдатов А. П., Задача М для уравнения Лаврентьев –Бицадзе, Докл. Адыгской АН. 1995. Т. 1, С. 217-222.

206. Soldatov A. P. The problem M for Lavrent'ev- Bitsadze equation, Dokl. Adigsk. Akad. Nauk, 1, (1995) (Russian).

1994 год:

207. Солдатов А. П. Задачи типа Дирихле для уравнения Лаврентьева- Бицадзе, Дифференц. уравн. 1994. Т. 30, № 8. С. 2001–2009.

208. Soldatov A. P. Problems of Dirichlet type for the Lavrent'ev- Bitsadze equation, Differentcial'nye Ura vneniya, 30 (1994), 2001-2009; English transl. in Differential Equations, 30 (1994)

1993 год:

209. Солдатов А. П., Митин С. П. О разрешимости смешанно- контактной задачи плоской теории упругости, Дифференц. уравн. 1993. Т. 29, № 5. С. 885–889.

210. Soldatov A. P., Mitin S. P. On solvability of mixed- contact problem in the plane theory of elasticity, Differentcial'nye Uravneniya, 29 (1993), 885-889. English transl.in Differential Equations, 29 (1993).

211. Солдатов А. П. Задачи типа Дирихле для уравнения Лаврентьева- Бицадзе. I. Теоремы единственности, Докл.РАН . 1993. Т. 332, № 6. С. 696–698.

212. Soldatov A. P. Problems of Dirichlet type for the Lavrent'ev- Bitsadze equation. I: Uniquness theorems, Dokl.Akad. Nauk SSSR, 332 (1993), 696-698; English transl.in Soviet Math. Dokl., 332 (1993).

213. Солдатов А. П. Задачи типа Дирихле для уравнения Лаврентьева- Бицадзе. II. Теоремы существования, Докл. РАН. 1993. Т. 333, № 1. С. 16–18.

214. Soldatov A. P. Problems of Dirichlet type for Lavrent'ev- Bitsadze equation. II: Existence theorems, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 333 (1993), 16-18; English transl. in Soviet Math. Dokl., 333 (1993).

215. Солдатов А. П. Обобщенный интеграл типа Коши и сингулярный интеграл в пространстве Гельдера с весом, Докл. РАН, 330 (1993), 164-166;

216. Soldatov A.P., A generalized Cauchy type integral and singular integral in Holder spaces with a weight, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 330 (1993), 164-166; English transl.in Soviet Math. Dokl., 330 (1993).

217. Солдатов А. П. О задаче типа Карлемана для эллиптических систем, Дифференц. уравн. 1992. Т. 28, № 1, С. 143–151.

218. Soldatov A. P. On some problem of Carleman type for elliptic systems. Differentcial'nye Uravneniya, 28 (1992), 143-151; English transl. in Differential Equations, 28 (1992).

219. Солдатов А. П. Метод теории функций в эллипт. краевых задачах на плоскости. II. Кусочно- гладкий случай, Изв. АН СССР. 1992. Т. 56, № 3. С. 566–604.

220. Soldatov A. P. A function theory method in elliptic probles in the plane. II: The piecewise smooth case. Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 56 (1992), 556-604; English transl. in Math. USSRIzv. 40 (1993).

1991 год:

221. Солдатов А. П. Смешанно-контактная задача для эллиптических систем, Дифференц. уравн. 1991. Т. 27, № 2, С. 279–287.

222. Soldatov A. P. The mixed-contact problem for elliptic systems, Differentcial'nye Uravneniya, 27 (1991), 279-287; English transl. in Differential Equations, 27 (1991).

223. Солдатов А. П. Краевые задачи теории функций в областях с кусочно- гладкой границей, Тбилиси, Изд-во ТГУ, Ин-т прикл. матем. им. И. Н. Векуа. ч.1. 1991. 266 С.

224. Soldatov A. P. Boundary value problems of function theory in domains with piecew ise boundary. Part I, Izdat. Tbil. Gos. Univ., Tbilisi. 1991 (Russian).

225. Солдатов А. П. Краевые задачи теории функций в областях с кусочно- гладкой границей, Тбилиси, Изд-воТГУ, Ин-тприкл. матем. им.И.Н.Векуа. ч.11. 1991. 274 С.

226. Soldatov A. P. Boundary value problems of function theory in domains with piecewise boundary. Part II, Izdat.Tbil.Gos. Univ., Tbilisi. 1991 (Russian).

227. Солдатов А. П. Метод теории функций в краевых задачах на плоскости. I. Гладкий случай, Изв. АН СССР"(сер.матем.) 1991. Т. 55, № 5. С. 1070–1100.

228. Soldatov A. P. A function theory method in boundary value probles 1n the plane. I: The smooth case. Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 55 (1991), 1070-1100; English transl. in Math.USSR Izv. 39 (1992).

229. Солдатов А. П. Одномерные сингулярные операторы и краевые задачи теории функций, М., Высшая школа. 1991. 266 С.

230. Soldatov A. P. Singular integral operators and boundary value problems of function theory. Vyssh.Shkola, Moscow, 1991 (Russian).

231. Солдатов А. П., Александров А. В. Граничные свойства интегралов типа Коши. Lp-случай, Дифференц. ур-ния. 1991. Т. 27, № 1. С. 3–8.

232. Soldatov A. P., Alexandrov A. V.: Boundary properties of iitegrals of Cauchy type: Lp-case, Differentcial'nye Uravneniya, 27 (1991), 3-8; English transl. in Differential Equations, 27 (1991).

233. Солдатов А. П., Обобщенный интеграл типа Коши, Сообщ. АН Грузии". 1991. Т. 141. № 2-3. С. 349–351.

234. Soldatov A. P., The generalized Cauchy integral, Soob. Akad. Nauk Gruz., 141 (1991), C. 349–351 (Russian).

235. Солдатов А. П. Обобщенный интеграл типа Коши, Дифференц. ур-ния. 1991. Т. 27, № 2. С. 3–8.

236. Soldatov A. P. The generalized Cauchy integral. Differentcial'nye Uravneniya, 27 (1991), 3-8; English transl. in Differential Equations, 27 (1991).

1990 год:

237. Солдатов А. П. Контактная задача Римана, Дифференц. уравн. 1990. Т. 26, № 10. С. 1828–1830.

238. Soldatov A. P. The contact Riemann problem, Differentcial'nye Uravneniya, 26 (1990), 1828-1830; English transl. in Differential Equations, 26 (1990).

239. Солдатов А. П. Общая краевая задача (k-1) -го порядка для эллиптических уравнений, Докл. АН СССР 1990. Т. 311, №1, С. 39–43.

240. Soldatov A. P. The general boundary value problem of order k-1 for elliptic equations, Dokl.Akad. Nauk SSSR, 311 (1990), 39-43; English transl.in Soviet Math. Dokl., 311 (1990).

241. Солдатов А. П. Общая краевая задача для эллиптических систем, Докл.АН СССР. 1990. Т. 311, № 3. С. 539–543.

242. Soldatov A. P. A general boundary value problem for elliptic systems, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 311 (1990), С. 539–543; English transl.in Soviet Math. Dokl.,311 (1990).

243. Солдатов А. П. Асимптотика решений краевых задач для эллиптических систем вблизи угловых точек, Докл.АН СССР. 1990. Т. 315, № 1. С. 34–36.

244. Soldatov A. P. Asymptotics of the solutions of boundary value problems for elliptic systems near the corner points, Dokl.Akad. Nauk SSSR, 315 (1990), 34-36; English transl.in Soviet Math. Dokl., 315, (1990).

Солдатов А. П., Граничные свойства интегралов типа Коши, Дифференц. уравн. 1990. Т. 26, № 1. С. 131–136.

Soldatov A. P., Boundary properties of Cauchy type integrals, Differentcial'nye Uravneniya, 26 (1990), P. 131–136; English transl. in Differential Equations, 26 (1990).

245. Солдатов А. П. Функциональные операторы со сдвигом, Дифференц. уравн. 1990. Т. 26, № 12. С. 2136–2145.

246. Soldatov A. P. Functional operators with a shift, Differentcial'nye Uravneniya, 26 (1990), P. 2136–2145; English transl. in Differential Equations, 26 (1990).

1989 год:

247. Солдатов А. П. Эллиптические системы высокого порядка, Дифференц. уравн. 1989. Т. 25, № 1. С. 136–144.

248. Soldatov A. P. Higher order elliptic systems, Differentcial'nye Uravneniya, 25 (1989), 136-144; English transl. in Differential Equations, 25 (1989).

249. Солдатов А. П. Пространства Гельдера с весом, Нелокальные задачи и их приложения, Сб. научных трудов, Нальчик, 1989, С. 218–225.

250. Солдатов А. П. Обобщенная задача Дирихле-Неймана. В сб. Линейные операторы в функциональных пространствах, Грозный, 1989, 153-154.

251. Soldatov A. P. The generalized Dirichlet- Neumann problem, Proc. conf. "Linear operator and function spaces", Grozny, (1989), 153-154 (Russian).

252. Солдатов А. П. Общая краевая задача теории функций в областях с гладкой границей, Доклады расширенных заседаний семинара института прикладной математики им. И. Н. Векуа, т. 4, № 1, Тбилиси, 1989, с. 99-103.

1988 год:

253. Солдатов А. П., Жура Н. А. Смешанно-контактная задача плоской теории упругости, Дифференц. уравн. 1988. Т. 24, № 1. С. 55–64.

254. Soldatov A. P., Zhura N. A. The mixed-contact problem in the plane theory of elasticity, Differentcial'nye Uravneniya , 24 (1988), P. 55–64; English transl. in Differential Equations, 24 (1988).

255. Солдатов А. П. Общая краевая задача теории функций, Докл. АН СССР 1988. Т. 299, № 4. С. 825–828.

256. Soldatov A. P. A general boundary value problem of the functions theory, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 299 (1988), 825-828; English transl. in Soviet Math.

1987 год:

257. Солдатов А. П. Смешанная задача плоской теории упругости, Дифференц.уравн. 1987. Т. 23, № 1. С. 161–168.

258. Soldatov A. P. The mixed problem in the plane theory of elasticity, Differentcial'nye Uravneniya, 23 (1987), P. 161–168; English transl. in Differential Equations, 23 (1987).

259. Солдатов А. П. Условие нормальности для нелокальных задач, Современные проблемы матем. физики. Труды Всес. симп., Тбилиси, 1987. Т. 1, С. 365–371.

260. Soldatov A. P. A normality condition for general nonlocal problem, Current problems in Mathematical physics. Proc. All-Union Sympos., Tbilisi, (1987), P. 365–371 (Russian).

261. Солдатов А. П., Шхануков М. Х. Краевые задачи с общим нелокальным условием А. А. Самарского для псевдо-параболических уравнений высокого порядка, Докл. АН СССР, 1987. Т. 297, № 3. С. 547–552.

262. Soldatov A. P. Shkhanukov M. Kh. Boundary value problems with general nonlocal Samarsky's condition for pseudoparabolic equations of higher order, Dokl.Akad. Nauk SSSR, 297 (1987), 547-552; English transl. in Soviet Math. Dokl., 297 (1987).

1986 год:

263. Солдатов А. П. Аналог интеграла типа Коши для эллиптических систем, Докл.АН СССР. 1986. Т. 289, № 4. С. 800–804.

264. Soldatov A. P. An analogue of the Cauchy type integral for elliptic systems, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 289 (1986), 800–804; English transl.in Soviet Math. Dokl., 34 (1987).

265. Солдатов А. П. Асимптотика решений сингулярных интегральных уравнений, Дифференц. уравн. 1986. Т.22, No. 1. С. 143–153.

266. Soldatov A. P. Asymptotics of the solutions of singular integral equations, Differentcial'nye Uravneniya, 22 (1986), 143–153; English transl. in Differential Equations, 18 (1986).

1985 год:

267. Солдатов А. П. Общая задача Римана теории функций, Нелокальные задачи для уравнений в частных производных и их приложения, Сб. научн. трудов (межвузовский), Нальчик, 19996, С. 76–77.

268. Солдатов А. П. Алгебра B сингулярных операторов, Докл.АН СССР. 1985. Т. 282, № 6. С. 1312–1316.

269. Soldatov A. P. The algebra B of singular operators, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 282 (1985), 1312-1316; English transl. in Soviet Math. Dokl., 31 (1985).

1982 год:

270. Солдатов А. П., Об одной задаче Римана-Гильберта со сдвигом, Докл.АН СССР. 1982. Т. 26, № 2. С. 291–294.

271. Soldatov A. P. On a Riemann- Hilbert problem with a shift, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 266 (1982), 291-294; English transl. in Soviet Math. Dokl., 26, 2, (1982).

272. Солдатов А. П. Об одном классе сингулярных операторов на прямой с односторонним сдвигом, Дифференц.уравн. 1982, Т. 18, № 1. С. 127–131.

273. Soldatov A. P. On a class of singular operators on a line with one-sided a shift, Differentcial'nye Uravneniya, 18 (1982), P. 127–131; English transl. in Differential Equations, 18 (1982).

1981 год:

274. Солдатов А. П. Алгебра сингулярных операторов на полупрямой со сдвигом- сжатием, Дифференц. уравн. 1981. Т. 17, № 1. С. 137–149.

275. Soldatov A. P. Algebra singulars operators on a half-line with shift-pressure, Differentcial'nye Uravneniya, 17 (1981), P. 137–149; English transl. in Differential Equations, 17 (1981).

276. Солдатов А. П. К теории одномерных сингулярных операторов. Автореферат диссерт. на соискание ученой степени доктора физ.-мат. наук. Московский гос.университет. 1981, 29 С.

1980 год:

277. Солдатов А. П. Задача линейного сопряжения со сдвигом на кусочно-гладкой линии в весовых пространствах, Докл. АН СССР. 1980. Т. 252, № 3. С. 1050–1055;

278. Soldatov A. P. A problem of linear conjunction with a shift on a piewise smooth line in weighted spaces, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 252 (1980), 1050-1055; English transl. in Soviet Math. Dokl., 252 (1980).

279. Солдатов А. П. Сингулярные интегральные операторы на прямой, Дифференц.уравн. 1980. Т. 16, № 1. С. 135–144.

280. Soldatov A. P. Singular integral operators on the line, Differentcial'nye Uravneniya, 16 (1980), 135-144; English transl.in Differential Equations, 16 (1980).

281. Солдатов А. П. Сингулярные операторы со сдвигом на кусочно-гладкой линии в весовых пространствах, Докл.АН СССР. 1980. Т. 252, № 3. С. 555–559.

282. Soldatov A. P. Singulars operators with a shift on a piewise smooth line in weighted spaces, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 252 (1980), P. 555–559; English transl. in Soviet Math. Dokl., 252(1980).

1979 год:

283. Солдатов А. П. Краевая задача линейного сопряжения теории функций, Изв. АН СССР (сер. матем.). 1979. Т. 43, № 1. С. 184–202.

284. Soldatov A. P. A boundary value problem of linear conjugation of the theory of functions, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 43 (1979), P. 184–202; English transl. in Math. USSR Izv. 43 (1979).

285. Солдатов А. П. К теории сингулярных операторов со сдвигом, Дифференц. уравн. 1979. Т. 15, № 1. С. 116–131.

286. Soldatov A. P. To theory of singular operators with a shift, Differentcial'nye Uravneniya, 15 (1979), P. 116–131; English transl. in Differential Equations, 15 (1979).

287. Солдатов А. П. Категория двойственности в теории нетеровых операторов, Дифференц. уравн. 1979. Т. 15, № 2. С. 303–309.

288. Soldatov A. P. A duality category in the theory of Noetherian operators, Differentcial'nye Uravneniya, 15 (1979), 303- 309; English transl. in Differential Equations, 15 (1979).

289. Солдатов А. П. К теории сингулярных интегральных операторов классического вида, Дифференциальные уравнения. 1979. Т. 15, № 3. С. 529–544.

290. Soldatov A. P. To theory of singular integral operators of classical type, Differentcial'nye Uravneniya, 15 (1979), P. 529–544; English transl. in Differential Equations, 15 (1979).

291. Солдатов А. П. К теории одномерных сингулярных операторов // Диссерт. на соискание ученой степени доктора физ.-мат. наук. Владимир, ВПИ, 1979.

292. Soldatov A. P. To theory of singular one- dimentional operators. Doctor's dissertation, Vladimir, VPI, 1979 (Russian).

1978 год:

293. Солдатов А. П. К нетеровской теории операторов. Винеровские вложения B-алгебр, Дифференц. уравн. 1978. Т. 14, № 1. С. 104–115.

294. Soldatov A. P. To Noether theory of operators. Winer's imbeddings of B-algebras, Differentcial'nye Uravneniya, 14 (1978), P. 104–115; English transl. in Differential Equations, 14 (1978).

295. Солдатов А. П. К нетеровской теории операторов. Одномерные сингулярные операторы общего вида, Дифференц. уравн. 1978. Т. 14, № 4. С. 706–718.

296. Soldatov A. P. To Noether theory of operators. One-dimentional singular operators of general form, Differentcial'nye Uravneniya, 14 (1978), P. 706–718; English transl. in Differential Equations, 14 (1978).

297. Солдатов А. П. К нетеровской теории операторов. Одномерные сингулярные операторы классического вида, Дифференц. уравн. 1978. Т. 14, № 7. С. 1285–1295.

298. Soldatov A. P. To Noether theory of operators. One-dimentional singular operators of classical form, Differentcial'nye Uravneniya, 14 (1978), P. 1285–1295; English transl.in Differential Equations, 14 (1978).

299. Солдатов А. П. К нетеровской теории операторов, Докл.АН СССР. 1978. Т. 238, № 2. С. 134–145.

300. Soldatov A. P. To Noether theory of operators, Dokl. Akad. Nauk SSSR 238 (1978); English transl. in Soviet Math. Dokl. 238 (1978).

301. Солдатов А. П. К нетеровской теории сингулярных операторов общего вида, Докл. АН СССР. 1978. Т. 238, № 5. С. 1067–1070.

302. Soldatov A. P. To Noether theory of singular operators of general form, Dokl. Akad. Nauk SSSR 238 (1978); English transl. in Soviet Math. Dokl. 238 (1978).

1977 год:

303. Солдатов А.П., К теории сингулярных интегральных уравнений со сдвигом некарлемановского типа, Дифференц. уравн. 1977. Т. 13, № 1. С. 140–154.

304. Soldatov A. P. To theory of singular integral equations with shift of non-Carleman type, Differentcial'nye Uravneniya, 13 (1977), 140-154; English transl. in Differential Equations, 13 (1977).

1975 год:

305. Солдатов А. П. Один класс сингулярных интегральных уравнений со сдвигом некарлемановского типа, Дифференц. уравн. 1975. Т. 11, № 1. С. 137–150.

306. Soldatov A. P. A class of singular integral equations with a shift of non-Carleman type, Differentcial'nye Uravneniya, 11 (1975), 137-150; English transl. in Differential Equations, 11 (1975).

1974 год:

307. Солдатов А.П., Решение одной краевой задачи теории функций со смещением, Дифференц. уравн. 1974. Т. 10, № 1. С. 143–152.

308. Soldatov A. P. Solving of some problem of function theory with a shift, Differentcial'nye Uravnenia, 10 (1974), 143-152; English transl. in Differential Equations, 10 (1974).

309. Солдатов А. П. О некоторых краевых задачах теории функций со сдвигом некарлемановского типа. Диссерт. на соискание ученой степени кандидата физ.-мат. наук. Матем.ин-т АН СССР, 127 С. маш.текста. 1974.

310. Soldatov A.P. On boundary value problems of function theory with non-carleman shift, Kandidat dissertation, Steklov Mathem. Institute, 1974 (Russian).

311. Солдатов А.П., О некоторых краевых задачах теории функций со сдвигом некарлемановского типа. Автореферат диссерт. на соискание ученой степени кандидата физ.-мат. наук. Матем.ин-т АН СССР, 1974, 22 С.

1973 год:

312. Солдатов А. П. Об одной задаче теории функций, Дифференц. уравн. 1973. Т. 8, № 1. С. 325–332.
313. Soldatov A. P. On some problem of function theory, Differentcial'nye Uravnenia, 9 (1973), P. 325–333; English transl. in Differential Equations, 9.

1972 год:

314. Солдатов А. П., О единственности решения одной задачи А.В.Бицадзе, Дифференц. уравн. 1972. Т. 8, № 1. С. 143–146.
315. Soldatov A. P.: On uniqueness of solution of the problem of A. V. Bitsadze, Differentcial'nye Uravneniya, 8 (1972), P. 143–146; English transl. in Differential Equations, 8 (1972).

1970 год:

316. Солдатов А. П. Краевая задача для гармонических функций со смещением на части границы, Мат. VIII юбил. научн. студенч. конф., посвященной 100- летию со дня рождения В. И. Ленина, Новосибирск, 1970, С. 34.