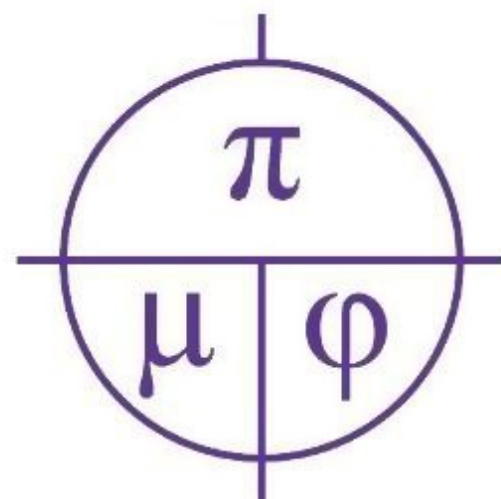


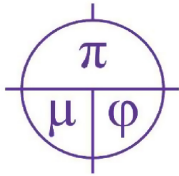
# ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА & ФИЗИКА

# APPLIED MATHEMATICS & PHYSICS



**2023. Том 55, № 2**





## Прикладная математика & Физика

2023. Том 55, № 2

Основан в 1995 г. Журнал принимает к публикации оригинальные и обзорные статьи отечественных и зарубежных авторов по всем разделам современной математики и физики, и их приложений, исторические обзоры научной деятельности выдающихся учёных и краткие сообщения о научной жизни и научных мероприятиях в России и за рубежом. Журнал включен в Перечень ВАК рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней кандидата и доктора наук (1.1.1 – вещественный, комплексный и функциональный анализ, 1.1.2 – дифференциальные уравнения и математическая физика, 1.3.8 – физика конденсированного состояния). До 2020 г. журнал издавался под названием «Научные ведомости Белгородского государственного университета. Математика. Физика».

### УЧРЕДИТЕЛЬ:

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования  
«Белгородский государственный национальный исследовательский университет».

### РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:

**Главный редактор:** В. Б. Васильев, доктор физико-математических наук, НИУ «БелГУ»;  
**Заместители главного редактора:** С. М. Ситник, доктор физико-математических наук, НИУ «БелГУ», Математика; А. В. Носков, доктор физико-математических наук, НИУ «БелГУ», Физика. Математическое моделирование;  
**Ответственный секретарь:** О. В. Чернова, кандидат физико-математических наук, НИУ «БелГУ».

### ЧЛЕНЫ РЕДАКЦИОННОЙ КОЛЛЕГИИ:

Ш. А. Алимов, д-р ф.-м. н., Ташкент, Узбекистан;	В. В. Меньших, д-р ф.-м. н., Воронеж, Россия;
Ю. А. Алхутов, д-р ф.-м. н., Владимир, Россия;	А. Б. Муравник, д-р ф.-м. н., Москва, Россия;
А. Ашыралыев, д-р ф.-м. н., Алматы, Казахстан;	А. И. Назаров, д-р ф.-м. н., Санкт-Петербург, Россия;
С. В. Блажевич, д-р ф.-м. н., Белгород, Россия;	Е. Ю. Панов, д-р ф.-м. н., Великий Новгород, Россия;
А. Н. Беляков, д-р ф.-м. н., Белгород, Россия;	О. М. Пенкин, д-р ф.-м. н., Алматы, Казахстан;
Ю. П. Вирченко, д-р ф.-м. н., Белгород, Россия;	И. П. Половинкин, д-р ф.-м. н., Воронеж, Россия;
А. В. Глушак, д-р ф.-м. н., Белгород, Россия;	Е. В. Радкевич, д-р ф.-м. н., Москва, Россия;
С. Б. Дабагов, д-р ф.-м. н., Москва, Россия;	С. Е. Савотченко, д-р ф.-м. н., Белгород, Россия;
Й. Диблик, д-р ф.-м. н., Брно, Чешская Республика;	А. П. Солдатов, д-р ф.-м. н., Москва, Россия;
Л. М. Кожевникова, д-р ф.-м. н., Стерлитамак, Россия;	В. Е. Федоров, д-р ф.-м. н., Челябинск, Россия;
А. Н. Куликов, д-р ф.-м. н., Ярославль, Россия;	А. А. Шибков, д-р ф.-м. н., Тамбов, Россия;
И. С. Ломов, д-р ф.-м. н., Москва, Россия;	М. В. Шитикова, д-р ф.-м. н., Воронеж, Россия;
Н. В. Малай, д-р ф.-м. н., Белгород, Россия;	Э. Л. Шишкина, д-р ф.-м. н., Воронеж, Россия.

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор). Выходит 4 раза в год.

Выпускающий редактор: Ю. В. Ивахненко  
Корректурa Ю. В. Ивахненко  
Компьютерная верстка: О. В. Чернова  
Оригинал-макет: В. Б. Васильев  
E-mail: vasilyev\_v@bsu.edu.ru

Гарнитура Times. Уч. изд. л. 7,6  
Дата выхода 30.06.2023.  
Оригинал-макет подготовлен отделом объединенной  
редакции научных журналов НИУ «БелГУ»  
308015, г. Белгород, ул. Победы, 85.

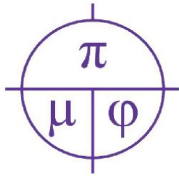
## СОДЕРЖАНИЕ

### МАТЕМАТИКА

- В. С. Алексеев, С. С. Ахтамова, А. П. Ляпин**  
Дискретные производящие функции **125**
- Ф. Е. Ломовцев**  
Локальные классические решения общего неоднородного волнового уравнения  
в криволинейной первой четверти плоскости **132**

### ФИЗИКА. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

- С. В. Борзунов**  
Новый класс гистерезисных преобразователей: обобщенный люфт со случайными  
направляющими функциями **143**
- Ю. П. Вирченко, А. А. Довганюк, Д. Д. Мачукаев, С. И. Кучеев**  
Трехэлектродная жидкокристаллическая ячейка с линзоподобными свойствами **157**
- Г. В. Аверин, А. О. Спицын, М. В. Шевцова**  
Теоретический анализ работы джозефсоновских криотронов **166**
- Ю. И. Шостак**  
Влияние теплообмена и массообмена на фотофорез крупной высоковязкой капли в бинарной  
газовой смеси **176**
- А. В. Носков, В. А. Бондаренко, С. В. Блажевич, А. А. Юрьева, А. Э. Федосеев**  
О влиянии многократного рассеяния на переходное излучение в монокристалле **183**



# Applied Mathematics & Physics

2023. Volume 55, No 2

*Founded in 1995. The journal accepts for publication original and review articles by domestic and foreign authors on all areas of modern mathematics and physics and their applications, historical reviews of the scientific activities of prominent scientists and brief reports on scientific life and scientific events in Russia and abroad. The journal is included into the List of Higher Attestation Commission of peer-reviewed scientific publications where the main scientific results of dissertations for obtaining scientific degrees of a candidate and doctor of science should be published (1.1.1 – material, complex and functional analysis, 1.1.2 – differential equations and mathematical physics, 1.3.8 – condensed matter physics). Until 2020, the journal was published with the name «Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics. Physics».*

## FOUNDER:

Federal state autonomous educational establishment of higher education  
«Belgorod National Research University».

## EDITORIAL BOARD:

**Chief Editor:** V. B. Vasilyev, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Belgorod National Research University;  
**Deputy Editor-in-Chief:** S. M. Sitnik, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Belgorod National Research University, Mathematics;  
A. V. Noskov, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Belgorod National Research University, Physics. Mathematical modeling;  
**Executive Secretary:** O. V. Chernova, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Belgorod National Research University.

## EDITORIAL BOARD MEMBERS:

Sh. A. Alimov, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Tashkent, Uzbekistan;  
Yu. A. Alkhutov, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Vladimir, Russia;  
A. Ashyralyev, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Almaty, Kazakhstan;  
S. V. Blazhevich, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Belgorod, Russia;  
A. N. Belyakov, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Belgorod, Russia;  
Yu. P. Virchenko, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Belgorod, Russia;  
A. V. Glushak, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Belgorod, Russia;  
S. B. Dabagov, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Moscow, Russia;  
J. Diblík, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Brno, Czech Republic;  
L. M. Kozhevnikova, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Sterlitamak, Russia;  
A. N. Kulikov, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Yaroslavl, Russia;  
I. S. Lomov, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Moscow, Russia;  
N. V. Malay, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Belgorod, Russia;  
V. V. Menshih, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Voronezh, Russia;  
A. B. Muravnik, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Moscow, Russia;  
A. I. Nazarov, Dr. Sci. (Phys.-Math.), St. Petersburg, Russia;  
E. Yu. Panov, Dr. Sci. (Phys.-Math.), V. Novgorod, Russia;  
O. M. Penkin, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Almaty, Kazakhstan;  
I. P. Polovinkin, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Voronezh, Russia;  
E. V. Radkevich, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Moscow, Russia;  
S. E. Savotchenko, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Belgorod, Russia;  
A. P. Soldatov, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Moscow, Russia;  
V. E. Fedorov, Dr. Sc. (Phys.-Math.), Chelyabinsk, Russia;  
A. A. Shibkov, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Tambov, Russia;  
M. V. Shitikova, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Voronezh, Russia;  
E. L. Shishkina, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Voronezh, Russia.

The journal has been registered at the Federal service for supervision of communications information technology and mass media (Roskomnadzor). Publication frequency: 4 /year.

Commissioning Editor Yu. V. Ivakhnenko  
Proofreading Yu. V. Ivakhnenko  
Computer imposition O. V. Chernova  
Dummy layout by V. B. Vasilyev  
E-mail: vasilyev\_v@bsu.edu.ru

Typeface Times. Publisher's signature 7,6  
Date of publishing 30.06.2023.  
The layout is presented by Department of the united  
Editorial Board of Scientific Journals Belgorod  
National Research University  
Address: 85 Pobeda St., Belgorod, 308015, Russia

## CONTENTS

### MATHEMATICS

- V. Alekseev, S. Akhtamova, A. Lyapin**  
Discrete Generating Functions **125**
- F. Lomovtsev**  
Local classical solutions to the general inhomogeneous wave equation in a curvilinear first quarter of the plane **132**

### PHYSICS. MATHEMATICAL MODELING

- S. Borzunov**  
A new class of hysteresis converters: generalized backlash with stochastic determining curves **143**
- Yu. Virchenko, A. Dovganuk, D. Machukaev, S. Kucheev**  
Three-electrode liquid crystal cell with lens-like properties **157**
- G. Averin, A. Spitsyn, M. Shevtsova**  
Theoretical analysis of the work of Josephson cryotrons **166**
- Yu. Shostak**  
The effect of heat transfer and mass transfer on the photophoresis of a large high-viscosity droplet in a binary gas mixture **176**
- A. Noskov, V. Bondarenko, S. Blazhevich, A. Yurieva, A. Fedoseev**  
On the effect of multiple scattering on the transition radiation in a single crystal **183**

## МАТЕМАТИКА MATHEMATICS

УДК 517.55+517.96  
MSC 39A06, 32A10, 39A10, 39A14  
оригинальное исследование

DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-2-125-131

### Дискретные производящие функции

В. С. Алексеев<sup>1</sup> , С. С. Ахтамова<sup>2</sup> , А. П. Ляпин<sup>1</sup> 

(Статья представлена членом редакционной коллегии С. М. Ситником)

<sup>1</sup> Сибирский федеральный университет,  
Красноярск, 660041, Россия

<sup>2</sup> Лесосибирский педагогический институт – филиал Сибирского федерального университета,  
Лесосибирск, 662544, Россия

E-mail: [ddbnc@mail.ru](mailto:ddbnc@mail.ru), [ahtamova-ss@mail.ru](mailto:ahtamova-ss@mail.ru), [aplyapin@sfu-kras.ru](mailto:aplyapin@sfu-kras.ru)

**Аннотация.** В данной работе определено понятие дискретной производящей функции, использующее в своем определении убывающий факториал вместо степенной функции. Найдено функциональное соотношение для дискретной производящей функции решения линейного разностного уравнения с постоянными коэффициентами. Для дискретной производящей функции решения линейного разностного уравнения с полиномиальными коэффициентами сформулировано понятие  $D$ -финитности и доказан аналог теоремы Р. Стенли, а именно, найдено условие  $D$ -финитности дискретной производящей функции решения такого уравнения.

**Ключевые слова:** производящая функция,  $D$ -финитность,  $p$ -рекурсивность, производящий ряд, правый разностный оператор

**Для цитирования:** Алексеев В. С., Ахтамова С. С., Ляпин А. П. 2023. Дискретные производящие функции. Прикладная математика & Физика, 55(2): 125–131. DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-2-125-131

Original Research

### Discrete Generating Functions

Vitaliy Alekseev<sup>1</sup> , Svetlana Akhtamova<sup>2</sup> , Alexander Lyapin<sup>1</sup> 

(Article submitted by a member of the editorial board S. M. Sitnik)

<sup>1</sup>Siberian Federal University,  
Krasnoyarsk, 660041, Russia

<sup>2</sup>Lesosibirskij Pedagogical Institute – branch of Siberian Federal University,  
Lesosibirsk, 662544, Russia

E-mail: [ddbnc@mail.ru](mailto:ddbnc@mail.ru), [ahtamova-ss@mail.ru](mailto:ahtamova-ss@mail.ru), [aplyapin@sfu-kras.ru](mailto:aplyapin@sfu-kras.ru)

**Abstract.** The discrete generating function of one variable is defined as a generalization of discrete hypergeometric functions and some of its properties are investigated. This type of generating series uses a falling power in its definition as opposed to a monomial, and leads to solutions of delay difference equations with polynomial coefficients. In particular, the effect of the operator  $\theta$ , which is a modification of the forward difference operator  $\Delta$ , on the discrete generating functions is determined. Functional equations with the operator  $\theta$  for difference generating functions of solutions to linear difference equations with constant and polynomial coefficients are derived. Finally, an analogue of differentially finite ( $D$ -finite) power series is given for discrete power series and the condition for its  $D$ -finiteness is proven: the discrete generating function of  $f(x)$  is  $D$ -finite if  $f(x)$  is a polynomially recursive sequence (an analog of Stanley and Lipschitz theorems).

**Keywords:** Generating Function,  $D$ -finiteness,  $p$ -recursiveness, Generating Series, Forward Difference Operator

**For citation:** Alekseev Vitaliy, Akhtamova Svetlana, Lyapin Alexander. 2023. Discrete Generating Functions. Applied Mathematics & Physics, 55(2): 125–131. DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-2-125-131

---

**1. Введение. Основные определения и обозначения.** Пусть  $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_{\geq}, \mathbb{C}$  – множества натуральных, целых, целых неотрицательных и комплексных чисел соответственно,  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $z \in \mathbb{C}$ ,  $n, \ell \in \mathbb{Z}_{\geq}$ ,

$z^n = z(z-1)\cdots(z-n+1)$  – убывающий факториал,  $(a)_k = a(a+1)\cdots(a+k-1)$  – символ Похгаммера. Обобщенные дискретные гипергеометрические функции были определены в работе [2] как

$${}_pF_q(a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_q; t; \xi) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k) \frac{\xi^k t^{nk}}{k!}, \quad f(k) = \frac{(a_1)_k \cdots (a_p)_k}{(b_1)_k \cdots (b_q)_k},$$

где  $a_j \in \mathbb{C}$ ,  $j = 1, \dots, p$ ,  $b_j \in \mathbb{C} \setminus \{-1, -2, \dots\}$ ,  $j = 1, \dots, q$ . Отметим, что различные варианты обобщенных дискретных гипергеометрических функций рассматривались в работах [1, 2, 4, 5, 7].

В данной работе определена дискретная производящая функция для произвольной функции  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  и получены функциональные соотношения для таких производящих функций.

**Определение 1.1.** Дискретной производящей функцией будем называть формальную сумму вида

$$F(z; \xi; \ell) = \sum_{x=0}^{\infty} f(x) \xi^x z^{\ell x}.$$

**Определение 1.2.** Дискретной производящей функцией экспоненциального типа будем называть формальную сумму вида

$$E(z; \xi; \ell) = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{f(x)}{x!} \xi^x z^{\ell x}.$$

В данной работе ограничимся исследованием только дискретных производящих функций. Например, в уравнении  $f(x) - f(x-1) - f(x-2) = 0$  сделаем замену  $f(x) = \frac{g(x)}{x!}$ , тогда

$$\frac{g(x)}{x!} - \frac{g(x-1)}{(x-1)!} - \frac{g(x-2)}{(x-2)!} = 0,$$

после умножения полученного соотношения на  $x!$  получим  $g(x) - xg(x-1) - x^2g(x-2) = 0$ . Таким образом, вместо дискретной производящей функции экспоненциального типа можно рассматривать дискретную производящую функцию решения уравнения с соответствующими коэффициентами.

Покажем простую связь между производящей функцией и дискретной производящей функцией. Известна общая формула для коэффициентов в разложении

$$z^n = \sum_{i=0}^n \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix} z^i,$$

где

$$\begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix} = \frac{(2n-i)!}{(i-1)!} \sum_{t=0}^{n-i} \frac{(-1)^j j^{n-i+t}}{j!(t-j)!}$$

есть числа Стирлинга первого рода. Отметим, что при  $m > n$  числа Стирлинга равны нулю. Пусть

$$F(z) = \sum_{x=0}^{\infty} f(x) z^x \tag{1}$$

есть производящая функция для последовательности  $f(x)$ ,  $x = 0, 1, 2, \dots$ . Подставим разложение

$$z^{\ell x} = \sum_{i=0}^{\ell x} \begin{bmatrix} \ell x \\ i \end{bmatrix} z^i = \sum_{i=0}^{\infty} \begin{bmatrix} \ell x \\ i \end{bmatrix} z^i$$

в дискретную производящую функцию  $F(z; \xi; \ell)$ , тогда

$$F(z; \xi; \ell) = \sum_{x=0}^{\infty} f(x) \xi^x \sum_{i=0}^{\infty} \begin{bmatrix} \ell x \\ i \end{bmatrix} z^i = \sum_{i=0}^{\infty} \left( \sum_{x=0}^{\infty} f(x) \xi^x \begin{bmatrix} \ell x \\ i \end{bmatrix} \right) z^i.$$

**2. Дискретная производящая функция решения линейного разностного уравнения с постоянными коэффициентами.** В этом параграфе приведем определение линейного разностного уравнения с полиномиальными коэффициентами. Для его частного случая – линейного разностного уравнения с постоянными коэффициентами – найдем функциональное соотношение для дискретной производящей функции решения такого уравнения.

**Определение 2.1.** Пусть  $\{p_k(x)\}_{k=0}^r$  — набор многочленов, причем  $p_r(x)$  тождественно не равен нулю. Линейное разностное уравнение с полиномиальными коэффициентами — это соотношение вида

$$\sum_{k=0}^r p_k(x)f(x-k) = 0. \tag{2}$$

Решить уравнение (2) означает найти функцию  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ , удовлетворяющую соотношению (2).

В случае, если в уравнении (2) коэффициенты  $p_k(x) = c_k, k = 0, \dots, r$ , — некоторые постоянные, будем говорить о линейных разностных уравнениях с постоянными коэффициентами и записывать (2) как

$$\sum_{k=0}^r c_k f(x-k) = 0. \tag{3}$$

Такие уравнения возникают в широком классе задач перечислительного комбинаторного анализа, например, в задачах о решетчатых путях (см. [3]) или в баллотировочной задаче (см. пример из [11]), в теории числовых рекурсивных фильтров (см. [6]).

Введем следующие обозначения. Будем рассматривать конечные суммы вида

$$F_r(z; \xi; \ell) = \sum_{x=0}^r f(x)\xi^x z^{\ell x},$$

далее обозначим оператор сдвига  $\rho^r z = z - r$ . Тогда полиномиальный дискретный оператор сдвига определим как

$$\varrho(z; \xi; \ell; \rho) = \sum_{k=0}^r c_k \xi^k z^{\ell k} \rho^{\ell k}.$$

**Теорема 2.2.** Дискретная производящая функция  $F(z; \xi; \ell)$  решения разностного уравнения (3) удовлетворяет функциональному соотношению

$$\varrho(z; \xi; \ell; \rho)F(z; \xi; \ell) = \sum_{k=0}^{r-1} c_k \xi^k z^{\ell k} \rho^{\ell k} F_{r-k-1}(z; \xi; \ell).$$

Суммы в правой части данного равенства можно группировать различными способами, различные варианты группировки для более сложного многомерного случая производящей функции были приведены в [8]).

**Доказательство.** Умножим обе части равенства (3) на  $\xi^x z^{\ell x}$  и просуммируем по всем  $x \geq r$ :

$$\sum_{x=r}^{\infty} c_0 f(x)\xi^x z^{\ell x} + \sum_{x=r}^{\infty} c_1 f(x-1)\xi^x z^{\ell x} + \dots + \sum_{x=r}^{\infty} c_r f(x-r)\xi^x z^{\ell x} = 0.$$

Изменим индексы суммирования:

$$c_0 \sum_{x=r}^{\infty} f(x)\xi^x z^{\ell x} + c_1 \xi \sum_{x=r-1}^{\infty} f(x)\xi^x z^{\ell(x+1)} + \dots + c_r \xi^r \sum_{x=0}^{\infty} f(x)\xi^x z^{\ell(x+r)} = 0.$$

Так как  $z^{n+m} = z^n(z-n)^m = z^n \rho^n z^m$ , где  $\rho^n z = z - n$ , получим

$$\begin{aligned} & c_0 \sum_{x=r}^{\infty} f(x)\xi^x z^{\ell x} + c_1 \xi z^{\ell} \sum_{x=r-1}^{\infty} f(x)\xi^x (z-l)^{\ell x} + \dots + \\ & + c_r \xi^r z^{\ell r} \sum_{x=0}^{\infty} f(x)\xi^x (z-\ell r)^{\ell x} = 0, \\ & c_0 \left( F(z; \xi; \ell) - \sum_{x=0}^{r-1} f(x)\xi^x z^{\ell x} \right) + c_1 \xi z^{\ell} \rho^{\ell} \left( F(z; \xi; \ell) - \sum_{x=0}^{r-2} f(x)\xi^x z^{\ell x} \right) + \dots + \\ & + c_r \xi^r z^{\ell r} \rho^{\ell r} F(z; \xi; \ell) = 0, \end{aligned}$$

после перегруппировки получим

$$\begin{aligned} & (c_0 + c_1 \xi z^{\ell} \rho^{\ell} + \dots + c_r \xi^r z^{\ell r} \rho^{\ell r}) F(z; \xi; \ell) = \\ & = c_0 \sum_{x=0}^{r-1} f(x)\xi^x z^{\ell x} + c_1 \xi z^{\ell} \rho^{\ell} \sum_{x=0}^{r-2} f(x)\xi^x z^{\ell x} + \dots + c_{r-1} \xi^{r-1} z^{\ell(r-1)} f(0), \end{aligned}$$



или

$$\sum_{k=0}^r c_k \xi^k z^{\ell k} \rho^{\ell k} F(z) = \sum_{k=0}^{r-1} c_k \xi^k z^{\ell k} \rho^{\ell k} \sum_{x=0}^{r-k-1} f(x) \xi^x z^{\ell x},$$

что и требовалось доказать.

**Пример 1.** Рассмотрим разностное уравнение с постоянными коэффициентами (уравнение Фибоначчи)

$$f(x) - f(x-1) - f(x-2) = 0,$$

умножим обе его части на  $\xi^x z^{\ell x}$  и просуммируем по  $x \geq 2$ :

$$\begin{aligned} & \sum_{x=2}^{\infty} f(x) \xi^x z^{\ell x} - \sum_{x=2}^{\infty} f(x-1) \xi^x z^{\ell x} - \sum_{x=2}^{\infty} f(x-2) \xi^x z^{\ell x} = \\ & = (F(z) - f(0) - f(1) \xi z^{\ell}) - \sum_{x=1}^{\infty} f(x) \xi^{x+1} z^{\ell(x+1)} - \sum_{x=0}^{\infty} f(x) \xi^{x+2} z^{\ell(x+2)} = \\ & = (F(z) - f(0) - f(1) \xi z^{\ell}) - \xi z^{\ell} \sum_{x=1}^{\infty} f(x) \xi^x (z - \ell)^{\ell x} - \xi^2 z^{2\ell} \sum_{x=0}^{\infty} f(x) \xi^x (z - 2\ell)^{\ell x} = \\ & = \left( F(z) - f(0) - f(1) \xi z^{\ell} \right) - \xi z^{\ell} \left( F(z - \ell) - f(0) \right) - \xi^2 z^{2\ell} F(z - 2\ell). \end{aligned}$$

В результате получим функциональное соотношение для  $F(z)$ :

$$\left( 1 - \xi z^{\ell} \rho^{\ell} - \xi^2 z^{2\ell} \rho^{2\ell} \right) F(z) = f(0) + (f(1) - f(0)) \xi z^{\ell}.$$

**3. D-финитные дискретные производящие функции.** В этом параграфе рассмотрим дискретные производящие функции решений линейных разностных уравнений с полиномиальными коэффициентами и докажем аналог теоремы Р. Стенли — получим условия  $D$ -финитности дискретных производящих функций.

Обозначим  $\Delta f(z) = f(z+1) - f(z)$  — правый разностный оператор, тогда  $\Delta z^x = x z^{x-1}$ . Следовательно, оператор  $\Delta$  является дискретным аналогом оператора дифференцирования. Далее,

$$\Delta F(z; \xi; \ell) = \Delta \sum_{x=0}^{\infty} f(x) \xi^x z^{\ell x} = \sum_{x=0}^{\infty} \ell x f(x) \xi^x z^{\ell x-1}.$$

Обозначим  $\rho F(z) = F(z-1)$  и определим оператор  $\theta = \ell^{-1} z \rho \Delta$ . Тогда справедлива лемма.

**Лемма 3.1.** Для дискретной производящей функции справедливо соотношение

$$\theta F(z; \xi; \ell) = \sum_{x=0}^{\infty} x f(x) \xi^x z^{\ell x}.$$

**Доказательство.**

$$\theta F(z; \xi; \ell) = \ell^{-1} z \rho \Delta \sum_{x=0}^{\infty} f(x) \xi^x z^{\ell x} = \ell^{-1} z \rho \sum_{x=0}^{\infty} \ell x f(x) \xi^x z^{\ell x-1} = \sum_{x=0}^{\infty} x f(x) \xi^x z^{\ell x},$$

что и требовалось доказать.

Для разностного оператора высшего порядка  $\theta^n = \underbrace{\theta \circ \dots \circ \theta}_{n \text{ раз}}$  имеет место следующая лемма.

**Лемма 3.2.** Для дискретной производящей функции справедливо соотношение

$$\theta^n F(z; \xi; \ell) = \sum_{x=0}^{\infty} x^n f(x) \xi^x z^{\ell x}.$$

**Доказательство.** Применим предыдущую лемму  $n$  раз к производящему ряду  $F(z; \xi; \ell)$  и получим утверждение теоремы.

**Лемма 3.3.** Для дискретной производящей функции справедливо соотношение:

$$\sum_{x=0}^{\infty} p(x)f(x)\xi^x z^{\ell x} = p(\theta) \sum_{x=0}^{\infty} f(x)\xi^x z^{\ell x},$$

где  $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$  – многочлен степени  $n$ ,  $p(\theta) = a_0 + a_1\theta + a_2\theta^2 + \dots + a_n\theta^n$  – полиномиальный разностный оператор.

**Доказательство.** Рассмотрим

$$\begin{aligned} \sum_{x=0}^{\infty} p(x)f(x)\xi^x z^{\ell x} &= \sum_{x=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n a_k x^k \right) f(x)\xi^x z^{\ell x} = \sum_{k=0}^n a_k \sum_{x=0}^{\infty} x^k f(x)\xi^x z^{\ell x} = \\ &= \sum_{k=0}^n a_k \theta^k \sum_{x=0}^{\infty} f(x)\xi^x z^{\ell x} = \sum_{k=0}^n a_k \theta^k F(z; \xi; \ell) = p(\theta)F(z; \xi; \ell), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Обозначим

$$\varrho(z; \xi; \ell; \theta; \rho) = \sum_{k=0}^r p_k(\theta + k)\xi^k z^{\ell k} \rho^{\ell k}.$$

**Теорема 3.4.** Дискретная производящая функция  $F(z; \xi; \ell)$  решения разностного уравнения (2) удовлетворяет функциональному соотношению

$$\varrho(z; \xi; \ell; \theta; \rho)F(z; \xi; \ell) = \sum_{k=0}^r \sum_{x=0}^{r-k-1} p_k(x+k)f(x)\xi^{x+k} z^{\ell(x+k)}. \tag{4}$$

**Доказательство.** Умножим обе части разностного уравнения (2) на  $\xi^x z^{\ell x}$  и просуммируем по всем целым  $x \geq r$ :

$$\sum_{x=r}^{\infty} \sum_{k=0}^r p_k(x)f(x-k)\xi^x z^{\ell x} = 0.$$

Изменим индексы суммирования и преобразуем левую часть:

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^r \sum_{x=r-k}^{\infty} p_k(x+k)f(x)\xi^{x+k} z^{\ell(x+k)} = \\ &= \sum_{k=0}^r \xi^k \left( \sum_{x=0}^{\infty} p_k(x+k)f(x)\xi^x z^{\ell(x+k)} - \sum_{x=0}^{r-k-1} p_k(x+k)f(x)\xi^x z^{\ell(x+k)} \right) = \\ &= \sum_{k=0}^r \xi^k \left( p_k(\theta+k)z^{\ell k} \rho^{\ell k} F(z; \xi; \ell) - \sum_{x=0}^{r-k-1} p_k(x+k)f(x)\xi^x z^{\ell(x+k)} \right). \end{aligned}$$

В результате,

$$\sum_{k=0}^r p_k(\theta+k)\xi^k z^{\ell k} \rho^{\ell k} F(z; \xi; \ell) = \sum_{k=0}^r \sum_{x=0}^{r-k-1} p_k(x+k)f(x)\xi^{x+k} z^{\ell(x+k)},$$

что и требовалось доказать.

В работе [12] последовательности, удовлетворяющие соотношению (2), называются полиномиально-рекурсивными. В этой же работе определено понятие конечно дифференцируемых ( $D$ -финитных) степенных рядов, а именно производящий ряд (1) называется конечно дифференцируемым, если для набора полиномов  $P_0(z), P_1(z), \dots, P_r(z)$  и  $P(z)$ , среди которых есть хотя бы один, тождественно не равный нулю, выполняется соотношение

$$\left( P_r(z) \frac{\partial^r}{\partial z^r} + \dots + P_1(z) \frac{\partial}{\partial z} + P_0(z) \right) F(z) = P(z). \tag{5}$$

Тогда формула (4) будет представлять аналог формулы (5) для случая дискретных производящих функций  $F(z; \xi; \ell)$ , а сами функции, удовлетворяющие данному соотношению, будем называть конечно дифференцируемыми дискретными производящими функциями. Отметим, что случай  $D$ -финитных производящих рядов от нескольких переменных был рассмотрен в работе [9], условия  $D$ -финитности

производящего ряда от нескольких переменных были приведены в [11], а вопросы  $D$ -финитности сечений такого ряда – в работе [10].

Теперь можно сформулировать простое следствие из Теоремы 3.4.

**Следствие 3.5.** Дискретная производящая функция  $F(z; \xi; \ell)$  полиномиально рекурсивной последовательности  $f(x)$  является конечно дифференцируемой.

**Пример 2.** Рассмотрим разностное уравнение

$$f(x) - xf(x-1) - x^3 f(x-2) = 0$$

умножим обе его части на  $\xi^x z^{\ell x}$  и просуммируем по  $x \geq 2$ :

$$\sum_{x=2}^{\infty} f(x) \xi^x z^{\ell x} - \sum_{x=2}^{\infty} x f(x-1) \xi^x z^{\ell x} - \sum_{x=2}^{\infty} x^3 f(x-2) \xi^x z^{\ell x} = 0.$$

Преобразуем левую часть:

$$\begin{aligned} & \sum_{x=2}^{\infty} f(x) \xi^x z^{\ell x} - \xi \sum_{x=1}^{\infty} (x+1) f(x) \xi^x z^{\ell(x+1)} - \xi^2 \sum_{x=0}^{\infty} (x+2)^3 f(x) \xi^x z^{\ell(x+2)} = \\ & = \left( \sum_{x=0}^{\infty} f(x) \xi^x z^{\ell x} - f(0) - f(1) \xi z^{\ell} \right) - \xi \left( \sum_{x=0}^{\infty} (x+1) f(x) \xi^x z^{\ell(x+1)} - f(0) z^{\ell} \right) - \\ & \quad - \xi^2 \sum_{x=0}^{\infty} (x+2)^3 f(x) \xi^x z^{\ell(x+2)} = \\ & = (F(z; \xi; \ell) - f(0) - f(1) \xi z^{\ell}) - \xi \left( (\theta+1) \sum_{x=0}^{\infty} f(x) \xi^x z^{\ell(x+1)} - f(0) z^{\ell} \right) - \\ & \quad - \xi^2 (\theta+2)^3 \sum_{x=0}^{\infty} f(x) \xi^x z^{\ell(x+2)} = \\ & = F(z; \xi; \ell) - f(0) - f(1) \xi z^{\ell} - \xi (\theta+1) z^{\ell} \rho^{\ell} \sum_{x=0}^{\infty} f(x) \xi^x z^{\ell x} + \xi f(0) z^{\ell} - \\ & \quad - \xi^2 (\theta+2)^3 z^{2\ell} \rho^{2\ell} \sum_{x=0}^{\infty} f(x) \xi^x z^{\ell x} = \\ & = (1 - \xi (\theta+1) z^{\ell} \rho^{\ell} - \xi^2 (\theta+2)^3 z^{2\ell} \rho^{2\ell}) F(z; \xi; \ell) - f(0) - f(1) \xi z^{\ell} + \xi f(0) z^{\ell}. \end{aligned}$$

В итоге получим функциональное соотношение

$$(1 - (\theta+1) \xi z^{\ell} \rho^{\ell} - (\theta+2)^3 \xi^2 z^{2\ell} \rho^{2\ell}) F(z; \xi; \ell) = f(0) + (f(1) - f(0)) \xi z^{\ell}.$$

**Благодарность.** Авторы выражают благодарность Т. Кучте за внимание к работе и полезные замечания.

## References

1. Bohner M., Cuchta, T. 2017. The Bessel difference equation. Proc. Am. Math. Soc. 145: 1567–1580. DOI: 10.1090/proc/13416
2. Bohner M., Cuchta T. 2018. The generalized hypergeometric difference equation. Demonstr. Math. 51: 62–75. DOI: 10.1515/dema-2018-0007
3. Bousquet-Mélou M., Petkovšek M. 2000. Linear recurrences with constant coefficients: the multivariate case. Discrete Mathematics. 2000. 225:51–75. DOI: 10.1016/S0012-365X(00)00147-3
4. Cuchta T., Luketic R. 2021. Discrete Hypergeometric Legendre Polynomials. Mathematics. 9(20): 2546. DOI: 10.3390/math9202546
5. Cuchta T., Pavelites M., Tinney R. 2021. The Chebyshev Difference Equation. Mathematics 8:74. DOI: 10.3390/math8010074
6. Dudgeon D. E., Mersereau R.M. Multidimensional digital signal processing. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1983.
7. Khan M. A. 1994. Discrete hypergeometric functions and their properties. Commun. Fac. Sci. Univ. Ankara, Ser. A1, Math. Stat.43(1-2): 31–40. DOI: 10.1501/Commua1\_0000000469
8. Leinartas E. K., Lyapin A. P. 2009. On the Rationality of Multidimensional Recursive Series. Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. 2 (4): 449–455.
9. Lipshitz L. 1989. D-Finite Power Series. J. of Algebra. 122: 353–373. DOI: 10.1016/0021-8693(89)90222-6
10. Lyapin A. P., Cuchta T. 2022. Sections of the generating series of a solution to the multidimensional difference equation. Bulletin of Irkutsk State University-Series mathematics. 42: 75–89. DOI: 10.26516/1997-7670.2022.42.75

11. Nekrasova T. I. 2014. On the Hierarchy of Generating Functions for Solutions of Multidimensional Difference Equations. The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics. 9: 91–102.
12. Stanley R. P. 1980. Differentiably Finite Power Series. Europ. J. Combinatorics. 1: 175–188. DOI: 10.1016/S0195-6698(80)80051-5

**Конфликт интересов:** о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

**Conflict of interest:** no potential conflict of interest related to this article was reported.

*Поступила в редакцию 18.03.2023*

*Поступила после рецензирования 29.04.2023*

*Принята к публикации 03.05.2023*

*Received 18.03.2023*

*Revised 29.04.2023*

*Accepted 03.05.2023*

---

#### СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

**Алексеев Виталий Сегеевич** – магистрант Института математики и фундаментальной информатики, Сибирский федеральный университет

пр. Свободный, 79, Красноярск, 660041, Россия

**Ахтамова Светлана Станиславовна** – кандидат педагогических наук, доцент, доцент кафедры высшей математики, информатики, экономики и естествознания, Лесосибирский педагогический институт – филиал Сибирского федерального университета

ул. Победы, 42, Красноярский край, Лесосибирск, 662544, Россия

**Ляпин Александр Петрович** – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент базовой кафедры вычислительных и информационных технологий, Сибирский федеральный университет

пр. Свободный, 79, Красноярск, 660041, Россия

#### INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

**Vitaliy Alekseev** – Undergraduate, School of Mathematics and Computer Science, Siberian Federal University, Krasnoyarsk, Russia

**Svetlana Akhtamova** – Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor, Lesosibirskij Pedagogical Institute – branch of Siberian Federal University, Lesosibirsk, Russia

**Alexander Lyapin** – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, School of Mathematics and Computer Science, Siberian Federal University, Krasnoyarsk, Russia

## Локальные классические решения общего неоднородного волнового уравнения в криволинейной первой четверти плоскости

Ф. Е. Ломовцев 

(Статья представлена членом редакционной коллегии А. П. Солдатовым)

Белорусский государственный университет,  
Минск, 220030, Республика Беларусь

E-mail: [lomovcev@bsu.by](mailto:lomovcev@bsu.by)

**Аннотация.** Построено множество новых локальных классических решений одномерного неоднородного волнового уравнения с необходимой (минимальной достаточной) гладкостью его правой части в криволинейной первой четверти плоскости. Они выведены предложенным ранее автором методом корректировки пробных обобщенных решений. В криволинейной первой четверти плоскости вычислены общие интегралы (общие решения) неоднородного волнового уравнения во множестве классических решений. С помощью каждого из построенных локальных решений уравнения вычисление общего интеграла неоднородного волнового уравнения в криволинейной первой четверти плоскости сводится к общему интегралу однородного волнового уравнения.

**Ключевые слова:** криволинейная четверть плоскости, метод корректировки пробных решений, локальное классическое решение, общий интеграл уравнения

**Благодарности:** Работа выполнена в рамках программы ГПНИ № 11, «Конвергенция-2025», подпрограмма «Математические модели и методы», НИР 1.2.02.3

**Для цитирования:** Ломовцев Ф. Е. 2023. Локальные классические решения общего неоднородного волнового уравнения в криволинейной первой четверти плоскости. Прикладная математика & Физика, 55(2): 132–142. DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-2-132-142

---

Original Research

## Local Classical Solutions to the General Inhomogeneous Wave Equation in a Curvilinear First Quarter of the Plane

Fedor Lomovtsev 

(Article submitted by a member of the editorial board A. P. Soldatov)

Belarusian State University,  
Minsk, 220030, Republic of Belarus

E-mail: [lomovcev@bsu.by](mailto:lomovcev@bsu.by)

**Abstract.** Many new local classical solutions have been constructed to one-dimensional inhomogeneous wave equation with the necessary (minimum sufficient) smoothness of its right-hand side in the curvilinear first quarter of the plane. They are derived by the correction method of test generalized solutions proposed earlier by the author. In the curvilinear first quarter of the plane, the general integrals (general solutions) to the inhomogeneous wave equation are calculated in the set of classical solutions. Using each of the constructed local equation solutions, the calculation of the general integral to the inhomogeneous wave equation in the curvilinear first quarter of the plane reduces to the general integral of the homogeneous wave equation.

**Keywords:** Curvilinear Quarter of the Plane, Method for Adjusting Trial Solutions, Local Classical Solution, General Integral of the Equation

**Acknowledgements:** The work was carried out within the framework of the SPNI program No. 11, "Convergence-2025 subprogram "Mathematical Models and Methods", R&D 1.2.02.3

**For citation:** Lomovtsev Fedor. 2023. Local classical solutions to the general inhomogeneous wave equation in a curvilinear first quarter of the plane. Applied Mathematics & Physics, 55(2): 132–142. DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-2-132-142

---

**Введение.** Для одномерного неоднородного волнового уравнения в криволинейной первой четверти плоскости известны его локальные классические решения только двух видов из [3], [7]. Эти решения выведены обобщением метода корректировки, предложенного автором для прямолинейной первой четверти плоскости в [6], на криволинейную первую четверть плоскости в [3] (см. замечание 1). В настоящей

работе этим обобщением метода корректировки получены новые множество локальных классических решений и множество общих интегралов классических решений неоднородного волнового уравнения в криволинейной первой четверти плоскости (см. замечание 3). Более того, так же, как в [3], для этих классических решений найдены необходимые (минимальные достаточные) требования гладкости на правую часть волнового уравнения. Благодаря этим классическим решениям легко записываются общие интегралы (множества всех классических решений) неоднородного волнового уравнения в криволинейной четверти плоскости. В будущем метод вспомогательных смешанных задач для волнового уравнения на полупрямой [5] позволит из [8, 16] выводить классические решения и критерии однозначной и устойчивой везде разрешимости смешанных задач для волновых уравнений не только в прямолинейных, так же, как в [15, 9], но и в криволинейных областях. В мире нет других работ с явными формулами решений смешанных задач в криволинейных областях.

Методами спектрального анализа изучена и решена смешанная задача для уравнения колебаний балки, один конец которой свободен, а другой заделан, т. е. для консольной балки в статье [10]. В ней собственные значения – корни трансцендентного уравнения и собственные функции – ортогональная и полная система функций в пространстве Лебега. Её решением служит ряд Фурье в классе регулярных решений уравнения колебаний балки. В работе [2] секвенциальным из [12] и аксиоматическим из [13] методами А. П. Хромова получено обобщенное решение в виде быстро сходящегося ряда Фурье смешанной задачи для телеграфного уравнения с потенциалом  $q(x, t)$  при нелокальном граничном условии со значением решения во внутренней точке отрезка. Эти два метода обобщают метод разделения переменных (метод Фурье) путем использования резольвентного метода, идеи А. Н. Крылова об ускорении сходимости рядов Фурье и идеи Л. Эйлера о расходящихся рядах. В первом методе обобщенным решением смешанной задачи является предел классических решений последовательности смешанных задач, а в другом методе вместо классических решений используется дополнительная система аксиом. Статья [14] посвящена построению методом характеристик классического решения смешанной задачи для однородного нестроого гиперболического уравнения четвертого порядка, представляющего четырехкратную композицию одного и того же оператора первого порядка с постоянными коэффициентами и четырехкратной характеристикой. Её особенность ещё состоит в том, что граничные условия задаются не на всей боковой границе. Доказана теорема существования единственного классического решения при достаточных требованиях гладкости и условиях согласования граничных условий с начальными условиями и уравнением. Известно: метод характеристик (общих интегралов) применим и к смешанным задачам с неразделяющимися переменными.

**1. Постановка задачи корректировки. Предварительные понятия.** В криволинейной первой четверти плоскости  $\tilde{G}_\infty = \{\sigma(t), +\infty[x]\kappa(x), +\infty[: t > 0, x > 0]\}$  ищутся локальные классические решения уравнения

$$u_{tt}(x, t) + (a_1 - a_2)u_{tx}(x, t) - a_1a_2u_{xx}(x, t) = f(x, t), (x, t) \in \tilde{G}_\infty, \quad (1)$$

где нижними индексами функции  $u$  обозначены вторые частные производные,  $a_1 > 0, a_2 > 0$  и  $t = \kappa(x), x = \sigma(t)$  – заданные функции криволинейных осей координат первой четверти плоскости. Заменой независимых переменных  $x$  и  $t$  всегда можно добиться того, чтобы  $\kappa(0) = \sigma(0) = 0$ , т. е. эти оси пересекались в начале координат. Криволинейная четверть  $\tilde{G}_\infty$  может содержать точки со значениями  $x < 0$  или  $t < 0$ .

Пусть  $C^k(\Omega)$  – множество всех  $k$  раз непрерывно дифференцируемых функций на подмножестве  $\Omega \subset \mathbb{R}^2, \mathbb{R} = ] - \infty, +\infty[$ , и  $C^0(\Omega) = C(\Omega)$ .

**Определение 1.** Функция  $u = u(x, t)$  называется классическим решением уравнения (1) на множестве  $\Omega \subset \tilde{G}_\infty = \{\sigma(t), +\infty[x]\kappa(x), +\infty[: t > 0, x > 0\}$ , если она  $u \in C^2(\Omega)$  и удовлетворяет этому уравнению для всех  $(x, t) \in \Omega$ .

Для уравнения (1) в каждой точке  $(x, t) \in \tilde{G}_\infty$  требуется найти локальные классические решения  $F = F(x, t)$  с минимальной гладкостью правой части  $f = f(x, t)$ . Если существует некоторое классическое решение  $u \in C^2(\tilde{G}_\infty)$  неоднородного уравнения (1), то его правая часть непрерывна  $f \in C(\tilde{G}_\infty)$ . Если же функции  $F(x, t)$  не дважды непрерывно дифференцируемы, то проводим их корректировку обобщёнными решениями  $F_0 \notin C^2(\tilde{G}_\infty)$  однородного уравнения (1) так, чтобы функции  $F_1(x, t) = F(x, t) - F_0(x, t)$  стали дважды непрерывно дифференцируемыми на  $\tilde{G}_\infty$ . Корректировка проводится с помощью корректирующей задачи Гурса, в которой используются функции  $\chi_i(x) = x + (-1)^i a_i \kappa(x), \sigma_i(t) = a_i t + (-1)^i \sigma(t), i = 1, 2$ , где  $\chi_i(0) = \sigma_i(0) = 0, i = 1, 2$ . Если криволинейные оси и их производные

$$\kappa(x), \sigma(t) \in C^2[0, +\infty[, -\frac{1}{a_2} < \kappa'(x) < \frac{1}{a_1}, x \geq 0, -a_2 < \sigma'(t) < a_1, t \geq 0, i = 1, 2, \quad (2)$$

то существуют их дважды непрерывно дифференцируемые обратные функции  $\chi_i^{-1}, \sigma_i^{-1}, i = 1, 2$ . Действительно, из неравенств в (2) вытекает их строгое возрастание  $\chi_i'(x) = 1 + (-1)^i a_i \kappa'(x) > 0, x \geq 0, \sigma_i'(t) = a_i + (-1)^i \sigma'(t) > 0, t \geq 0, i = 1, 2$ , а из гладкости осей в (2) – дважды непрерывная дифференцируемость их обратных.

Если оси  $\kappa(x) < x/a_1$ ,  $x > 0$ ,  $\sigma(x) < a_1 t$ ,  $t > 0$ , то криволинейная первая четверть плоскости  $\widetilde{G}_\infty$  делится характеристикой  $x = a_1 t$  на два непустые множества  $\widetilde{G}_- = \{(x, t) \in \widetilde{G}_\infty : x > a_1 t > a_1 \kappa(x), x > 0\}$  и  $\widetilde{G}_+ = \{(x, t) \in \widetilde{G}_\infty : \sigma(t) \leq x \leq a_1 t, t \geq 0\}$ .

**2. Корректирующая задача Гурса.** Роль пробных локальных обобщенных решений уравнения (1) играют функции

$$F^{(0)}(x, t) = \frac{1}{a_1 + a_2} \int_{t_0}^t \int_{x-a_1(t-\tau)}^{x+a_2(t-\tau)} f(\sigma(\tau) + |s - \sigma(\tau)|, \tau) ds d\tau \quad (3)$$

из [3]. Интервалы изменения параметра  $t_0$  будут указаны в теоремах 1 и 3. Можно показать, что если  $f \in C^1(\widetilde{G}_\infty)$ , то функции  $F^{(0)} \in C^2(\widetilde{G}_\infty)$  и удовлетворяют уравнению (1) с правой частью  $f(\sigma(t) + |x - \sigma(t)|, t)$  на  $\widetilde{G}_\infty$ .

**Замечание 1.** В прямолинейной первой четверти плоскости  $\widetilde{G}_\infty$  осями координат являются прямые  $t = \kappa(x) \equiv 0$ ,  $x = \sigma(t) \equiv 0$ . Согласно учебнику Тихонова А. Н., Самарского А. А. [11] (Раздел 9. Интегральные уравнения колебаний, параграф 2, глава II) на стр. 83 последнее слагаемое решения (31) первой смешанной задачи при  $at > x$  в прямолинейной первой четверти плоскости имеет вид нашего интеграла (3) при  $a_1 = a_2 = a$ ,  $t_0 = 0$  и  $\sigma(\tau) \equiv 0$  от  $f(s, \tau)$ , но с модулем нижнего предела интегрирования  $|x - a(t - \tau)|$  вместо модуля  $|s|$  под интегралом в  $f(|s|, \tau)$ . Это последнее слагаемое является лишь непрерывным кусочно-дифференцируемым (обобщенным) решением простейшего уравнения колебаний струны, так как даже для более гладких правых частей, чем  $f \in C^1(\widetilde{G}_\infty)$ , оно имеет разрывные вторые частные производные на характеристике  $x = at$ . Поэтому в методе корректировки [6] автор перенес модуль с нижнего предела интегрирования под интеграл на координаты  $s$  точек струны правой части  $f(|s|, \tau)$  уравнения. Важно отметить, что в статьях [3], [6] доказано, что функция (3) при  $a_1 \neq a_2$  не является классическим решением уравнения (1) с зависящей от  $x$  и  $t$  правой частью  $f$  на первой четверти  $\widetilde{G}_\infty$  и, следовательно, требует корректировки соответствующими обобщенными решениями до указанных классических решений. Более того, в этих статьях выводится минимальная (необходимая) гладкость правой части  $f$  уравнения (1) на  $\widetilde{G}_\infty$ .

Только для упрощения изложения мы продолжаем правую часть  $f \in C(\widetilde{G}_\infty)$  чётно по  $x$  относительно оси  $x = \sigma(t)$  с первой криволинейной четверти  $\widetilde{G}_\infty^{(1)} = \widetilde{G}_\infty$  на вторую криволинейную четверть плоскости  $\widetilde{G}_\infty^{(2)}$ . В результате имеем непрерывную в криволинейной снизу верхней полуплоскости  $\widetilde{Q}_\infty = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : t > \kappa(x), x \in \mathbb{R}\}$  функцию  $\tilde{f}(x, t) = f(\sigma(t) + |x - \sigma(t)|, t)$ , т. е.  $\tilde{f}(x, t) = f(x, t)$  на  $\widetilde{G}_\infty^{(1)}$  и  $\tilde{f}(x, t) = f(2\sigma(t) - x, t)$  на  $\widetilde{G}_\infty^{(2)}$ . Для внутренних точек  $M(x, t) \in \widetilde{G}_+$  строим локальные классические решения уравнения (1) с минимальной гладкостью на  $f$ , дополнительной к  $f \in C(\widetilde{G}_\infty)$ .

**Теорема 1.** Пусть  $\kappa(x) < x/a_1$ ,  $x > 0$ ,  $\sigma(t) < a_1 t$ ,  $t > 0$ , верны свойства (2),

$$\exists \varepsilon_0 > 0, \kappa(x) = 0 \quad \forall x \in [0, \varepsilon_0], \quad \sigma(t) = 0 \quad \forall t \in [0, \varepsilon_0]. \quad (4)$$

Тогда уравнение (1) на множестве  $\widetilde{G}_+$  имеет локальные классические решения:

$$F_{(q)}^{(0)}(x, t) = \frac{1}{a_1 + a_2} \left[ \int_{t_0}^t \int_{q(a_1 t - x) - a_2 \tau + (a_1 + a_2)t_0}^{x + a_2(t - \tau)} f(s, \tau) ds d\tau + \int_{t_{(q)}(x) + t_0}^t \int_{x - a_1(t - \tau)}^{q(a_1 t - x) - a_2 \tau + (a_1 + a_2)t_0} f(s, \tau) ds d\tau \right], \quad (x, t) \in \widetilde{G}_+, \quad (5)$$

где  $t_{(q)}(x) = (q + 1)(a_1 t - x)/(a_1 + a_2)$  и  $q > -1$ , в которых  $t_0$  принимает значения

$$t_0 \in [ \max_{x_2 \leq s \leq x_3} \kappa(s), t^* [ \forall x > 0, t_0 \in ] \kappa(x_3), t^* ] \forall x \leq 0, \quad (6)$$

параметры  $x_2 = \chi_2^{-1}(\sigma_2(\sigma_1^{-1}(a_1 t - x)))$ ,  $x_3 = \chi_2^{-1}(x + a_2 t)$  и  $t^* = (x + a_2 t)/(a_1 + a_2)$ .

**Доказательство.** Можем предполагать существование некоторого классического решения  $u^{(0)} \in C^2(\widetilde{G}_\infty)$  уравнения (1) на  $\widetilde{G}_\infty$  также, как в [3, 6, 7]. Например, выше сказано, что для  $f \in C^1(\widetilde{G}_\infty)$  функции  $F^{(0)}(x, t) \in C^2(\widetilde{G}_\infty)$  удовлетворяют уравнению (1) на  $\widetilde{G}_\infty$ . Любая внутренняя точка  $(x^{(0)}, t^{(0)}) \in \widetilde{G}_+$  находится строго внутри различных параллелограммов  $\widetilde{G}_0 \subset \widetilde{G}_+$ , сторонами которых служат отрезки характеристик

$$x - a_1 t = C_1, \quad x + a_2 t = C_2, \quad \forall C_1, C_2 \in \mathbb{R} = ] - \infty, +\infty[. \quad (7)$$

В этих параллелограммах  $\widetilde{G}_0$  уравнение (1) линейной невырожденной заменой

$$\xi = x + a_2 t, \quad \eta = x - a_1 t \quad (8)$$

с невырожденным якобианом  $J_1 = -(a_1 + a_2) \neq 0$  приводится к каноническому виду

$$-(a_1 + a_2)^2 \tilde{u}_{\xi\eta}(\xi, \eta) = \tilde{f}(\xi, \eta) = f\left(\frac{a_1\xi + a_2\eta}{a_1 + a_2}, \frac{\xi - \eta}{a_1 + a_2}\right), (\xi, \eta) \in \widehat{G}_0, \tag{9}$$

в различных прямоугольниках  $\widehat{G}_0 = \{(\xi, \eta) : \xi_0 \leq \xi \leq \xi_1, \eta_0 \leq \eta \leq \eta_1\}$ . Ввиду невырожденности линейной замены (8) из непрерывности функции  $f \in C(\widehat{G}_\infty)$  следует непрерывность функции  $\tilde{f} \in C(\widehat{G}_\infty)$  на образе  $\widehat{G}_\infty = \{(\xi, \eta) : \xi > \chi_2((a_1\xi + a_2\eta)/(a_1 + a_2)), \eta > -\sigma_1((\xi - \eta)/(a_1 + a_2)), -(a_1/a_2)\xi < \eta < \xi\}$  четверти плоскости  $\widehat{G}_\infty$ . Отсюда заключаем, что уравнение (9) на  $\widehat{G}_+$  имеет классическое решение

$$\tilde{u}^{(0)}(\xi, \eta) = u^{(0)}\left(\frac{a_1\xi + a_2\eta}{a_1 + a_2}, \frac{\xi - \eta}{a_1 + a_2}\right) \in C^2(\widehat{G}_+). \tag{10}$$

Для любой функции  $\tilde{f} \in C(\widehat{G}_\infty)$  существует последовательность функций  $\tilde{f}_n \in C^1(\widehat{G}_\infty)$ , равномерно сходящаяся к  $\tilde{f}$  на каждом компакте  $\widehat{G}_0$  при  $n \rightarrow \infty$ . В различных прямоугольниках  $\widehat{G}_0$  методом характеристик решаем задачу Гурса

$$-(a_1 + a_2)^2 (\tilde{u}_n)_{\xi\eta}(\xi, \eta) = \tilde{f}_n(\xi, \eta), (\xi, \eta) \in \widehat{G}_0, \tag{11}$$

$$\tilde{u}_n(\xi_0, \eta) = \tilde{u}^{(0)}(\xi_0, \eta), \eta \in [\eta_0, \eta_1], \tilde{u}_n(\xi, \eta_0) = \tilde{u}^{(0)}(\xi, \eta_0), \xi \in [\xi_0, \xi_1], n = 1, 2, \dots \tag{12}$$

Общие интегралы уравнений (11) – это непрерывно дифференцируемые функции

$$\tilde{u}_n(\xi, \eta) = g(\xi) + h(\eta) + \tilde{F}_n^{(0)}(\xi, \eta), n = 1, 2, \dots, \tag{13}$$

где  $g, h$  – любые непрерывно дифференцируемые функции своих аргументов  $\xi, \eta$  и функции  $\tilde{F}_n^{(0)}$  получаются из функции  $F_n^{(0)}$  вида (3) с подынтегральными функциями  $f_n(\sigma(\tau) + |s - \sigma(\tau)|, \tau)$  вместо  $f(\sigma(\tau) + |s - \sigma(\tau)|, \tau)$  в результате замены (8). Выше говорилось, что для  $f_n \in C^1(\widehat{G}_\infty)$  решения  $F_n^{(0)} \in C^2(\widehat{G}_+)$  являются классическими и, следовательно, такие же решения  $\tilde{F}_n^{(0)} \in C^2(\widehat{G}_+)$  уравнения (11).

Подставив общие интегралы (13) в согласованные условия Гурса (12), в силу  $u^{(0)} \in C^2(\widehat{G}_\infty)$ , равенства (10), линейности и невырожденности замены (8) находим её единственные классические решения из  $C^2(\widehat{G}_0)$ :

$$\begin{aligned} \tilde{u}_n(\xi, \eta) = & \tilde{u}^{(0)}(\xi, \eta_0) + \tilde{u}^{(0)}(\xi_0, \eta) - \tilde{u}^{(0)}(\xi_0, \eta_0) - \\ & - \tilde{F}_n^{(0)}(\xi, \eta_0) + \tilde{F}_n^{(0)}(\xi_0, \eta_0) + \tilde{F}_n^{(0)}(\xi, \eta) - \tilde{F}_n^{(0)}(\xi_0, \eta), n = 1, 2, \dots \end{aligned} \tag{14}$$

**Определение 2.** Задача Гурса (11), (12) называется *корректирующей краевой задачей обобщенных решений уравнения (1) для минимальной гладкости его правой части  $f$ , а функции  $F^{(0)}$  вида (3) – пробными.*

Тогда функции  $\tilde{v}_n(\xi, \eta) = \tilde{u}^{(0)}(\xi, \eta) - \tilde{u}_n(\xi, \eta)$ , как разность классических решений, являются классическими решениями задачи Гурса:

$$-(a_1 + a_2)^2 (\tilde{v}_n)_{\xi\eta}(\xi, \eta) = \tilde{f}(\xi, \eta) - \tilde{f}_n(\xi, \eta), (\xi, \eta) \in \widehat{G}_0, \tag{15}$$

$$\tilde{v}_n(\xi_0, \eta) = 0, \eta \in [\eta_0, \eta_1], \tilde{v}_n(\xi, \eta_0) = 0, \xi \in [\xi_0, \xi_1], n = 1, 2, \dots \tag{16}$$

Умножаем уравнение (15) на сумму первых частных производных  $(\tilde{v}_n)_\xi + (\tilde{v}_n)_\eta$ , интегрируем результат по области  $[\xi_0, \tau_1] \times [\eta_0, \tau_2]$  с помощью однородных условий Гурса (16), применяем элементарные оценки, берем супремум по  $(\tau_1, \tau_2) \in [\xi_0, \xi_1] \times [\eta_0, \eta_1]$  и также, как в [1, неравенство (2.5), стр.1020], выводим априорную оценку

$$\begin{aligned} & \sup_{\eta_0 < \eta < \eta_1} \int_{\xi_0}^{\xi_1} \left( |(\tilde{v}_n)_\xi(\xi, \eta)|^2 + |\tilde{v}_n(\xi, \eta)|^2 \right) d\xi + \\ & + \sup_{\xi_0 < \xi < \xi_1} \int_{\eta_0}^{\eta_1} \left( |(\tilde{v}_n)_\eta(\xi, \eta)|^2 + |\tilde{v}_n(\xi, \eta)|^2 \right) d\eta \leq c_0 \iint_{\widehat{G}_0} |\tilde{f}_n(\xi, \eta) - \tilde{f}(\xi, \eta)|^2 d\xi d\eta, \end{aligned} \tag{17}$$

где постоянная  $c_0 > 0$  не зависит от  $\tilde{v}_n, \xi, \eta$  и  $n = 1, 2, \dots$

Поскольку в (17) правая часть сходится к нулю при  $n \rightarrow \infty$ , то левая часть тоже сходится к нулю при  $n \rightarrow \infty$  и, следовательно, в силу известных непрерывных вложений пространств Соболева:  $W_2^1(\xi_0, \xi_1) \subset C[\xi_0, \xi_1], W_2^1(\eta_0, \eta_1) \subset C[\eta_0, \eta_1]$  последовательность  $\tilde{v}_n$  равномерно сходится к нулю на  $\widehat{G}_0$  при  $n \rightarrow \infty$ .



Последнее означает равномерную сходимость  $\tilde{u}_n$  к  $\tilde{u}$  на прямоугольниках  $\widehat{G}_0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Поэтому из решений (14) предельным переходом при  $n \rightarrow \infty$  получаем тождество

$$\begin{aligned} \tilde{u}^{(0)}(\xi, \eta) = & \tilde{u}^{(0)}(\xi, \eta_0) + \tilde{u}^{(0)}(\xi_0, \eta) - \tilde{u}^{(0)}(\xi_0, \eta_0) - \\ & - \tilde{F}^{(0)}(\xi, \eta_0) + \tilde{F}^{(0)}(\xi_0, \eta_0) + \tilde{F}^{(0)}(\xi, \eta) - \tilde{F}^{(0)}(\xi_0, \eta), \quad (\xi, \eta) \in \widehat{G}_0, \end{aligned} \quad (18)$$

где функции  $\tilde{F}^{(0)}(\xi, \eta) = F^{(0)}((a_1\xi + a_2\eta)/(a_1 + a_2), (\xi - \eta)/(a_1 + a_2))$  получены из функций (3) заменой (8). Слагаемые  $\tilde{u}^{(0)}(\xi, \eta_0)$  и  $\tilde{u}^{(0)}(\xi_0, \eta)$  дважды непрерывно дифференцируемы соответственно по  $\xi$  и  $\eta$ , так как  $\tilde{u}^{(0)} \in C^2(\widehat{G}_0)$ .

1. Пусть у точки  $M(x, t) \in \widehat{G}_+$  координата  $x > 0$  (рис. 1).

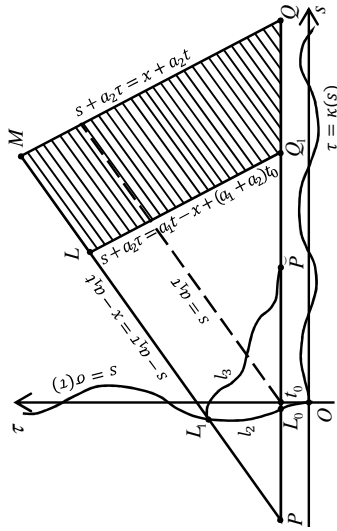


Рис. 1. Область интегрирования в  $F_1^{(0)}$  на  $\widehat{G}_+$  при  $x > 0$   
 Fig. 1. Domain of integration in  $F_1^{(0)}$  on  $\widehat{G}_+$  for  $x > 0$

Для корректировки пробных решений (3) в тождестве (18) полагаем  $\eta_0 = \xi - (a_1 + a_2)t_0$ ,  $\xi_0 = -q\eta + (a_1 + a_2)t_0$ ,  $q \in ]-\infty, +\infty[$ , и получаем для уравнения (9) скорректированные классические решения

$$\tilde{F}_1^{(0)}(\xi, \eta) = \tilde{F}^{(0)}(\xi, \eta) - \tilde{F}^{(0)}(\xi_0, \eta) = \frac{-1}{(a_1 + a_2)^2} \iint_{\tilde{M}\tilde{L}\tilde{Q}_1\tilde{Q}} \tilde{f}(\xi, \eta) d\xi d\eta \in C^2(\widehat{G}_0) \quad (19)$$

в трапеции  $\tilde{M}\tilde{L}\tilde{Q}_1\tilde{Q}$  с вершинами  $\tilde{M}(\xi, \eta)$ ,  $\tilde{L}(-q\eta + (a_1 + a_2)t_0, \eta)$ ,  $\tilde{Q}_1(-q\eta + (a_1 + a_2)t_0, -q\eta)$ ,  $\tilde{Q}(\xi, \xi - (a_1 + a_2)t_0)$  (рис. 2).

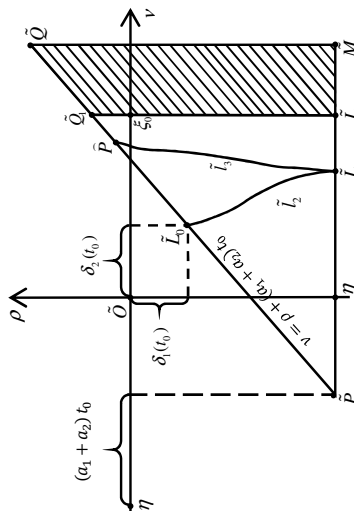


Рис. 2. Область интегрирования в  $\tilde{F}_1^{(0)}$  на  $\widehat{G}_+$  при  $x > 0$   
 Fig. 2. Domain of integration in  $\tilde{F}_1^{(0)}$  on  $\widehat{G}_+$  for  $x > 0$

Здесь значения  $q$  выбираем такими, чтобы для каждого  $\rho$  кривая  $\tilde{l}_2$  уравнения  $v = \rho - (a_1 + a_2)\sigma_1^{-1}(\rho)$  находилась слева от прямой  $\tilde{L}\tilde{Q}_1$  уравнения  $v = -q\eta + (a_1 + a_2)t_0$ , т. е. как решения неравенства

$$\rho - (a_1 + a_2)\sigma_1^{-1}(\rho) \leq -q\eta + (a_1 + a_2)t_0, \rho \in [\eta, -\sigma_1(t_0)], \tag{20}$$

где  $\eta = x - a_1t \leq 0$  в  $\tilde{G}_+$ . Если  $\eta \neq 0$ , то отсюда находим решения этого неравенства

$$q \geq \frac{\rho - (a_1 + a_2)\sigma_1^{-1}(\rho) - (a_1 + a_2)t_0}{-\eta} \geq \frac{\eta + (a_1 + a_2)t_0 - (a_1 + a_2)t_0}{-\eta} = -1,$$

потому что функция  $\sigma_1^{-1}$  строго возрастает по предположениям теоремы 1. Если  $\eta = 0$ , то неравенство (20) справедливо для всех указанных в нем  $\rho \in [0, -\sigma_1(t_0)]$ .

Рисунки 1 и 2 нами взяты из статьи [3], в которой указаны координаты вспомогательной точки  $\hat{P}$  из рисунка 2. В двойном интеграле (19) делаем обратную замену переменных к (8), полученный двойной интеграл от  $f(x, t)$  по трапеции  $MLQ_1Q$  с вершинами  $M(x, t)$ ,  $L((qa_1 - a_2)(a_1t - x)/(a_1 + a_2) + a_1t_0, (q + 1)(a_1t - x)/(a_1 + a_2) + t_0)$ ,  $Q_1(q(a_1t - x) + a_1t_0, t_0)$ ,  $Q(x + a_2(t - t_0), t_0)$  сводим к повторным интегралам и, благодаря равенству (10), приходим к классическим решениям (5) уравнения (1) в  $\tilde{G}_+$  для  $x > 0$ . Через точки  $L$  и  $Q_1$  проходит прямая  $s + a_2\tau = q(a_1t - x) + (a_1 + a_2)t_0$ . Функции (5) при  $q = -1$  равны функциям (3) на характеристике  $x = a_1t$  и являются классическими решениями уравнения (1) на этой характеристике (см. замечание 2).

2. Пусть точка  $M(x, t) \in \tilde{G}_+$  имеет координату  $x \leq 0$  (рис. 3).

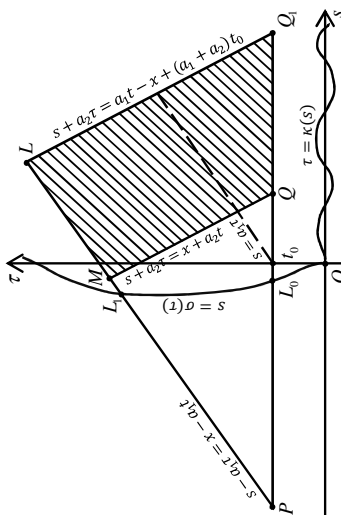


Рис. 3. Область интегрирования в  $F_1^{(0)}$  на  $\tilde{G}_+$  при  $x \leq 0$   
 Fig. 3. Domain of integration in  $F_1^{(0)}$  on  $\tilde{G}_+$  for  $x \leq 0$

Тогда прямая  $\tilde{L}\tilde{Q}_1$  лежит справа от прямой  $\tilde{M}\tilde{Q}$ , т. е. справа от кривой  $\tilde{l}_2$  (рис. 4).

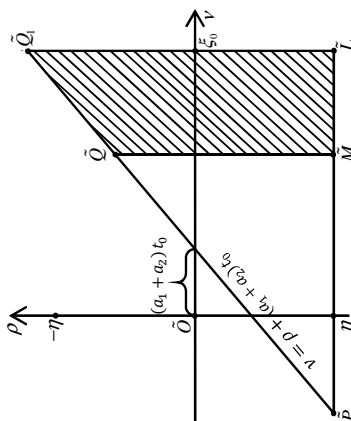


Рис. 4. Область интегрирования в  $\tilde{F}_1^{(0)}$  на  $\tilde{G}_+$  при  $x \leq 0$   
 Fig. 4. Domain of integration in  $\tilde{F}_1^{(0)}$  on  $\tilde{G}_+$  for  $x \leq 0$

Поэтому реализованной выше процедурой корректировки тоже приходим к локальным классическим решениям (5) уравнения (1) во внутренних точках множества  $\widetilde{G}_+$  для  $x \leq 0$ . Напоминаем, что требования (4) обеспечивают возможность лишь однократного пересечения осей  $t = \kappa(x)$ ,  $x = \sigma(t)$  с характеристиками (7), которые проходят через точки  $M(x, t) \in \widetilde{G}_+$ , близкие к началу координат, так же, как неравенства из (2) через все остальные точки  $M(x, t) \in \widetilde{G}_+$ . Интервалы (6) изменения  $t_0$  очевидно те же самые, что и в работе [3]. Теорема 1 доказана.  $\square$

**3. Необходимая гладкость правой части.** Продолжим выводить локальные классические решения уравнения (1) и необходимую гладкость на  $f$  в  $\widetilde{G}_\infty$  методом корректировки из пробных решений (3).

**Теорема 2.** Пусть выполняются предположения теоремы 1. Для классических решений (5) при  $q > -1$  уравнения (1) в  $\widetilde{G}_+$  необходима гладкость:

$$f \in C(\widetilde{G}_\infty), \quad \int_{t_0}^t f(x + a_2(t - \tau), \tau) d\tau \in C^1(\widetilde{G}_+), \quad (21)$$

$$q \int_{t_{(q)}(x)+t_0}^{t_0} f(q(a_1 t - x) - a_2 \tau + (a_1 + a_2)t_0, \tau) d\tau + \int_{t_{(q)}(x)+t_0}^t f(x - a_1(t - \tau), \tau) d\tau \in C^1(\widetilde{G}_+). \quad (22)$$

**Доказательство.** Необходимость непрерывности  $f \in C(\widetilde{G}_\infty)$  показана выше. Ясно, что решения (5) из  $C^2(\widetilde{G}_+)$  имеют непрерывно дифференцируемые производные:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{(q)}^{(0)}(x, t)}{\partial t} &= \frac{1}{a_1 + a_2} \left[ a_2 \int_{t_0}^t f(x + a_2(t - \tau), \tau) d\tau + \right. \\ &+ q a_1 \int_{t_{(q)}(x)+t_0}^{t_0} f(q(a_1 t - x) - a_2 \tau + (a_1 + a_2)t_0, \tau) d\tau + a_1 \int_{t_{(q)}(x)+t_0}^t f(x - a_1(t - \tau), \tau) d\tau \left. \right], \\ \frac{\partial F_{(q)}^{(0)}(x, t)}{\partial x} &= \frac{1}{a_1 + a_2} \left[ \int_{t_0}^t f(x + a_2(t - \tau), \tau) d\tau - \right. \\ &- q \int_{t_{(q)}(x)+t_0}^{t_0} f(q(a_1 t - x) - a_2 \tau + (a_1 + a_2)t_0, \tau) d\tau - \int_{t_{(q)}(x)+t_0}^t f(x - a_1(t - \tau), \tau) d\tau \left. \right]. \end{aligned}$$

Такой же гладкости должны быть их производные вдоль характеристик (7):

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{(q)}^{(0)}}{\partial t} + a_1 \frac{\partial F_{(q)}^{(0)}}{\partial x} &= \int_{t_0}^t f(x + a_2(t - \tau), \tau) d\tau, \\ \frac{\partial F_{(q)}^{(0)}}{\partial t} - a_2 \frac{\partial F_{(q)}^{(0)}}{\partial x} &= q \int_{t_{(q)}(x)+t_0}^{t_0} f(q(a_1 t - x) - a_2 \tau + (a_1 + a_2)t_0, \tau) d\tau + \int_{t_{(q)}(x)+t_0}^t f(x - a_1(t - \tau), \tau) d\tau. \end{aligned} \quad (23)$$

Из (23) следует необходимость гладкости (21), (22) для решений (5) теоремы 1.  $\square$

Известны локальные классические решения и необходимая гладкость  $f$  на  $\widetilde{G}_-$  из [3].

**Теорема 3.** Пусть верны предположения теоремы 1. В каждой точке  $M(x, t) \in \widetilde{G}_-$  волновое уравнение (1) имеет локальные классические решения:

$$F_k^{(0)}(x, t) = \frac{1}{a_1 + a_2} \left[ \int_{t_0}^{t^{(k)}(x)+t_0} \int_{k(x-a_1 t) - a_2 \tau + (a_1 + a_2)t_0}^{x+a_2(t-\tau)} f(s, \tau) ds d\tau + \int_{t^{(k)}(x)+t_0}^t \int_{x-a_1(t-\tau)}^{x+a_2(t-\tau)} f(s, \tau) ds d\tau \right], \quad k \geq 1, \quad (24)$$

где  $t^{(k)}(x) = (k-1)(x - a_1 t)/(a_1 + a_2)$ , в которых параметр  $t_0$  принимает значения  $t_0 \in \max_{x_0 \leq s \leq x_3} \kappa(s), t_k^*$ ,  $k > 1$ , и

$$x_0 = \chi_2^{-1}(k(x - a_1 t)), \quad x_3 = \chi_2^{-1}(x + a_2 t), \quad t_k^*(x) = [(ka_1 + a_2)t - (k-1)x]/(a_1 + a_2).$$

Для этих классических решений (24) необходима гладкость

$$f \in C(\tilde{G}_-), \quad \int_{t_0}^t f(x + a_2(t - \tau), \tau) d\tau \in C^1(\tilde{G}_-), \quad (25)$$

$$k \int_{t_0}^{t^{(k)}(x)+t_0} f(k(x - a_1t) - a_2\tau + (a_1 + a_2)t_0, \tau) d\tau + \int_{t^{(k)}(x)+t_0}^t f(x - a_1(t - \tau), \tau) d\tau \in C^1(\tilde{G}_-). \quad (26)$$

Из решений (24) и (5) соответственно с необходимой гладкостью (25), (26) и (21), (22) можно строить локальные классические решения уравнения (1) в четверти  $\tilde{G}_\infty$ .

**Следствие 1.** В предположениях теоремы 1 функции  $f \in C^1(\tilde{G}_\infty)$  из классических решений (24) с  $k \geq 1$  на  $\tilde{G}_-$  и (5) с  $q > -1$  на  $\tilde{G}_+$  удовлетворяют включению

$$\int_{t_0}^t f(x + a_2(t - \tau), \tau) d\tau \in C^1(\tilde{G}_\infty). \quad (27)$$

Интеграл (27) равен производной от функций (24) и (5) вдоль характеристик  $x - a_1t = C_1$ ,  $C_1 \in \mathbb{R}$ , которые не пересекают характеристику  $x = a_1t$  (см. доказательство теоремы 2 и [3]). Для прямолинейной первой четверти и простейшего волнового уравнения (1) при  $a_1 = a_2 = a$  доказательство следствия 1 заменой переменной интегрирования  $s_2 = x + a(t - \tau)$  имеется в диссертации [9, формула (2.19), стр. 29].

На основании следствия 1 в криволинейной первой четверти плоскости  $\tilde{G}_\infty$  нам помогут написать новые множества общих интегралов уравнения (1) на  $\tilde{G}_\infty$  следующие

**Следствие 2.** В предположениях теоремы 1 для всех  $f \in C^1(\tilde{G}_\infty)$  классические решения (24) при  $k = q + 2$  на  $\tilde{G}_-$  и (5) при  $q > -1$  на  $\tilde{G}_+$  уравнения (1) дважды непрерывно дифференцируемы на характеристике  $x = a_1t$ , т. е.

$$\begin{aligned} & \left[ 1 - (-1)^i(q + 1) \right] \int_{t_0}^{\hat{t}_i(x)+t_0} f\left( \left[ 1 - (-1)^i(q + 1) \right] (x - a_1t) - a_2\tau + (a_1 + a_2)t_0, \tau \right) d\tau + \\ & + \int_{\hat{t}_i(x)+t_0}^t f(x - a_1(t - \tau), \tau) d\tau \in C^1(\tilde{G}_\infty), \quad i = 1, 2, \quad \hat{t}_i(x) = (-1)^i \frac{(q + 1)(a_1t - x)}{a_1 + a_2}. \end{aligned} \quad (28)$$

**Замечание 2.** Решения (24) при  $k = 1$  и (5) при  $q = -1$  совпадают с классическими решениями уравнения (1) в замыкании  $\tilde{G}_-$  множества  $\tilde{G}_-$ .

**Следствие 3.** Пусть верны предположения теоремы 1 и интегральные требования гладкости (25), (26) при  $k = q + 2$  на  $\tilde{G}_-$  и (21), (22) при  $q > -1$  на  $\tilde{G}_+$ . Тогда общими интегралами уравнения (1) на криволинейной первой четверти  $\tilde{G}_\infty$  во множестве классических (дважды непрерывно дифференцируемых) решений являются функции

$$u(x, t) = \tilde{f}_1(x + a_2t) + \tilde{f}_2(x - a_1t) + \widehat{F}^{(0)}(x, t), \quad (x, t) \in \tilde{G}_\infty, \quad q > -1, \quad (29)$$

где  $\widehat{F}^{(0)}(x, t) = F_k^{(0)}(x, t)$  из (24) с  $k = q + 2$  на  $\tilde{G}_-$ ,  $\widehat{F}^{(0)}(x, t) = F_{(q)}^{(0)}(x, t)$  из (5) с  $q > -1$  на  $\tilde{G}_+$ ,  $\tilde{f}_1$  и  $\tilde{f}_2$  – любые дважды непрерывно дифференцируемые функции от  $\xi, \eta$  вида:

$$\tilde{f}_1(\xi) = f_1(\xi) + f_2(0), \quad \tilde{f}_2(\eta) = f_2(\eta) - f_2(0). \quad (30)$$

В следствии 3 дважды непрерывную дифференцируемость функций  $\widehat{F}^{(0)}$  на  $\tilde{G}_\infty$  дают теорема 3 на  $\tilde{G}_-$ , теорема 1 на  $\tilde{G}_+$  и следствие 2 на характеристике  $x = a_1t$ . Функции (30) выводятся "методом погружения в решения с фиксированными значениями" из [4]. В общих интегралах (29) постоянная  $f_2(0)$  сокращается, но очевидное значение  $\tilde{f}_2(0) = 0$  из (30) существенно упрощает решение систем дифференциальных уравнений, например, при решении методом характеристик смешанной задачи для (1) в [4].

**Замечание 3.** В статье [3] установлены два общих интеграла классических решений одномерного неоднородного волнового уравнения (1) на  $\tilde{G}_\infty$  вида (29) только при  $q = 1$  и  $q = a_2/a_1$ . Существование на  $\tilde{G}_\infty$  разрывных функций  $f$ , для которых интегралы (24) при  $k = q + 2$  и (5) при  $q > -1$  не дважды непрерывно дифференцируемы на  $\tilde{G}_\infty$  не противоречит следствию 3 в силу обоснованной выше необходимости (обязательности) непрерывности функций  $f$  на  $\tilde{G}_\infty$  для всех классических решений уравнения (1) [3].

**Следствие 4.** Если функция  $f$  в уравнении (1) не зависит от  $x$  или  $t$ , то в предположениях теоремы 1 для дважды непрерывно дифференцируемости на  $\tilde{G}_\infty$  функций (24) с  $k = q + 2$  и (5) с  $q > -1$  необходимо и достаточно непрерывности  $f$  по  $t$  или  $x$ .

Для функций  $f$ , зависящих только от  $t$  или  $x$  и непрерывных, гладкость (25), (26) при  $k = q + 2$  и (21), (22) при  $q > -1$  всегда выполняется [6, стр. 46–47], [9, стр. 27].

**Замечание 4.** Требования гладкости (27), (28) для классических решений (5) и (24) при  $k = q + 2$ ,  $q > -1$  уравнения (1) распространяются предельным переходом по  $f$  с более гладких  $f \in C^1(\tilde{G}_\infty)$  на  $f$  с необходимой гладкостью (21), (22) и (25), (26), которая для  $f \in C(\tilde{G}_\infty)$  эквивалентна гладкости (22), (26) при  $k = q + 2$ ,  $q > -1$ , (27). Здесь требования гладкости (22), (26) при  $k = q + 2$  очевидно равносильны требованиям (28).

**Заключение.** В настоящей работе выведено более широкое множество локальных классических решений (24) в  $\tilde{G}_-$  и (5) в  $\tilde{G}_+$  при  $q > -1$  одномерного неоднородного волнового уравнения (1) соответственно с необходимой гладкостью (25), (26) и (21), (22) его правой части  $f$  в криволинейной первой четверти плоскости  $\tilde{G}_\infty$ . Они получены автором с помощью реализованного ранее обобщения метода корректировки пробных обобщенных решений с прямолинейной на криволинейную первую четверть плоскости.

В криволинейной первой четверти плоскости вычислены новые общие интегралы (29) неоднородного волнового уравнения (1) во множестве классических решений. С помощью каждого из полученных локальных решений вычисление общего интеграла неоднородного волнового уравнения в криволинейной первой четверти плоскости сводится к известному общему интегралу однородного волнового уравнения в криволинейной первой четверти плоскости.

Множества локальных классических решений и общих интегралов, построенных в настоящей работе при всех  $q > -1$  для одномерного неоднородного волнового уравнения в криволинейной первой четверти плоскости, обобщают случаи двух множеств из них при  $q = 1$  и  $q = a_2/a_1$  статьи [3]. Если правая часть  $f$  уравнения (1) зависит только от  $t$  или  $x$ , то для дважды непрерывной дифференцируемости функций (24) и (5) при  $q > -1$  на  $\tilde{G}_\infty$  необходимо и достаточно лишь непрерывности  $f$  по  $t$  и  $x$  соответственно.

#### Список литературы

1. Бриш Н. И., Юрчук Н. И. 1971. Задача Гурса для абстрактных линейных дифференциальных уравнений второго порядка. Дифференциальные уравнения, 7(6): 1017–1030.
2. Владимиров В. С. 1976. Обобщенные функции в математической физике. М., Наука. 280.
3. Ломов И. С. 2022. Построение обобщенного решения смешанной задачи для телеграфного уравнения: секвенциальный и аксиоматический подходы. Дифференциальные уравнения, 58(11): 1471–1483.
4. Ломовцев Ф. Е. 2021. В криволинейной первой четверти плоскости метод корректировки пробных решений для минимальной гладкости правой части волнового уравнения с постоянными коэффициентами. Веснік Віцебскага дзяржаўнага ўніверсітэта, 4(113): 5–22.
5. Ломовцев Ф. Е., Лысенко В. В. 2019. Нехарактеристическая смешанная задача для одномерного волнового уравнения в первой четверти плоскости при нестационарных граничных вторых производных. Веснік Віцебскага дзяржаўнага ўніверсітэта, 3(104): 5–17.
6. Ломовцев Ф. Е. 2015. Метод вспомогательных смешанных задач для полуограниченной струны. Материалы Международной научной конференции "Шестые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям". Ч. 2. (7–10 декабря 2015г.), 2: 74–75.
7. Ломовцев Ф. Е. 2023. Метод компенсации граничного режима правой частью телеграфного уравнения с переменными коэффициентами в решении второй смешанной задачи на полупрямой. Веснік Гродзенскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя Янкі Купалы. Серыя 2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальна тэхніка і кіраванне, 13(1): 39–63.
8. Ломовцев Ф. Е. 2017. Метод корректировки пробных решений общего волнового уравнения в первой четверти плоскости для минимальной гладкости его правой части. Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика, 3: 38–52.
9. Ломовцев Ф. Е. 2020. О методе корректировки пробных решений одномерного волнового уравнения в криволинейной четверти плоскости. Материалы Международной конференции "XXXII ВВМШ <Понрягинские чтения-XXXI>" (3–9 мая 2020 г.) Воронеж : АНО <Наука-Юнипресс>: 126–129.
10. Ломовцев Ф. Е. 2021. Первая смешанная задача для общего телеграфного уравнения с переменными коэффициентами на полупрямой. Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика, 1: 18–38.
11. Ломовцев Ф. Е., Устилко Е. В. 2018. Критерий корректности смешанной задачи для общего уравнения колебаний полуограниченной струны с нестационарной характеристической первой косою производной в граничном условии. Веснік Віцебскага дзяржаўнага ўніверсітэта, 4(101): 18–28.
12. Новиков Е. Н. 2017. Смешанные задачи для уравнения вынужденных колебаний ограниченной струны при нестационарных граничных условиях с первой и вторыми косыми производными. Автореф. дис. : кан-та физ.-мат. наук (01.01.02). ИМ НАН Беларуси.
13. Сабитов К. Б., Фадеева О.В. 2021. Колебания консольной балки. Прикладная математика & Физика, 53(1): 5–12. DOI 10.52575/2687-0959-2021-53-1-5-12.

14. Соболев С. Л. 1938. Об одной теореме функционального анализа. Математический сборник, 4 (46): 471–498.
15. Тихонов А. Н., Самарский А. А. 2004. Уравнения математической физики. М., Наука. 798.
16. Хромов А. П. 2019. Необходимые и достаточные условия существования классического решения смешанной задачи для однородного волнового уравнения в случае суммируемого потенциала. Дифференциальные уравнения, 55(5): 717–731.
17. Хромов А. П. 2022. Расходящиеся ряды и обобщённая смешанная задача для волнового уравнения. Современные проблемы теории функций и их приложения, 21: 319–324.
18. Чеб Е. С., Семинская Е. С. 2020. О классическом решении смешанной задачи для линейного нестрого гиперболического уравнения четвёртого порядка с одной кратной характеристикой. Прикладная математика & Физика, 52(1): 11–17. DOI 10.18413/2687-0959-2020-52-1-11-17.
19. Lomovtsev F. E. 2016. Solution of a Mixed Problem with Oblique Derivatives in the Boundary Conditions for the Inhomogeneous String Vibration Equation without Continuing the Data. Differential Equations, 52(8): 1093–1097.
20. Lomovtsev F. E., Spesivtseva K. A. 2021. Mixed Problem for a General 1D Wave Equation with Characteristic Second Derivatives in a Non-Stationary Boundary Mode. Mathematical Notes, 110(3): 329–338. © Pleiades Publishing, Ltd., 2021. Russian Text © The Author(s), 2021, published in Matematicheskie Zametki, 110(3): 345–357. ISSN 0001-4346, DOI: 10.1134/S0001434621090030.

### References

1. Brish N. I., Yurchuk N. I. 1971. The Goursat problem for abstract linear differential equations of the second order. Differential Equations, 7(6): 1017–1030. (in Russian)
2. Vladimirov V. S. 1976. Generalized functions in mathematical physics. M., Science. 1976. 280. (in Russian)
3. Lomov I. S. 2022. Construction of a generalized solution of a mixed problem for telegraph equation: sequential and axiomatic approaches. Differential Equations, 58(11): 1471–1483. (in Russian)
4. Lomovtsev F. E. 2021. In the curvilinear first quarter of the plane, a correction method to trial solutions for the minimum smoothness of the right-hand side of the wave equation with constant coefficients. Vesnik Vitsebskaga jarjaunaga university, 4(113): 5–22. (in Russian)
5. Lomovtsev F. E., Lysenko V. V. 2019. Non-characteristic mixed problem for one-dimensional wave equation in the first quarter of the plane with non-stationary boundary second derivatives. Vesnik Vitsebskaga jarjaunaga university, 3(104): 5–17. (in Russian)
6. Lomovtsev F. E. 2015. Method of auxiliary mixed problems for a semi-bounded string. Materials Int. scientific conf. "Sixth Bogdanovsky readings on ordinary differential equations". Part 2. (December 7-10, 2015), 2: 74–75. (in Russian)
7. Lomovtsev F. E. 2023. Boundary mode compensation method by the right-hand side of the telegraph equation with variable coefficients in solving the second mixed problem on the half-line. Bulletin of Grodzensk dzyarzhunaga university named after Yanka Kupala. Series 2. Mathematics. Physics. Information, special equipment and kiravanne, 13(1): 39–63. (in Russian)
8. Lomovtsev F. E. 2017. Correction method for test solutions of the general wave equation in the first quarter of the plane for the minimum smoothness of its right-hand side. Journal of the Belarusian State University. Mathematics. Computer science, 3: 38–52. (in Russian)
9. Lomovtsev F. E. 2020. On a correction method to trial solutions of a one-dimensional wave equation in a curvilinear quarter of a plane. Proceedings of Int. conf. "XXXII VVMSH <Pontryagin Readings-XXXI>" (May 3–9, 2020) Voronezh: ANO <Nauka-Unipress> : 126–129. (in Russian)
10. Lomovtsev F. E. 2021. The first mixed problem for the general telegraph equation with variable coefficients on the half-line. Journal of the Belarusian State University. Mathematics. Computer science, 1: 18–38. (in Russian)
11. Lomovtsev F. E., Ustilko E. V. 2018. Correctness criterion to the mixed problem for the general oscillation equation of semi-bounded string with non-stationary characteristic first oblique derivatives in the boundary condition. Vesnik Vitsebsk jarjaunaga university, 4(101): 18–28. (in Russian)
12. Novikov E. N. 2017. Mixed Problems for the Forced Vibration Equation of a Bounded String under Non-stationary Boundary Conditions with First and Second Oblique Derivatives. Abstract dis. : Candidate of Physics and Mathematics. Sciences (01.01.02). IM NAS of Belarus. (in Russian)
13. Sabitov K. B., Fadeeva O. V. 2021. Oscillations of a cantilever beam. Applied Mathematics & Physics, 53(1): 5–12. DOI 10.52575/2687-0959-2021-53-1-5-12. (in Russian)
14. Sobolev S. L. 1938. On a theorem of functional analysis. Mathematical collection, 4 (46): 471–498. (in Russian)
15. Tikhonov A. N., Samarsky A. A. 2004. Equations of mathematical physics. M., Science. 798. (in Russian)
16. Khromov A. P. 2019. Necessary and sufficient conditions for the existence of a classical solution of a mixed problem for a homogeneous wave equation in the case of an integrable potential. Differential Equations, 55(5): 717–731. (in Russian)
17. Khromov A.P. 2022. Divergent series and a generalized mixed problem for the wave equation. Modern problems of function theory and their applications, 21: 319–324. (in Russian)

18. Cheb E. S., Seminskaya E. S. 2020. On the classical solution of a mixed problem for a linear nonstrictly hyperbolic equation of the fourth order with one multiple characteristic. *Applied Mathematics & Physics*, 52(1): 11–17. DOI 10.18413/2687-0959-2020-52-1-11-17. (in Russian)
19. Lomovtsev F. E. 2016. Solution of a Mixed Problem with Oblique Derivatives in the Boundary Conditions for the Inhomogeneous String Vibration Equation without Continuing the Data. *Differential Equations*, 52(8): 1093–1097.
20. Lomovtsev F. E., Spesivtseva K. A. 2021. Mixed Problem for a General 1D Wave Equation with Characteristic Second Derivatives in a Non-Stationary Boundary Mode. *Mathematical Notes*, 110(3): 329–338. © Pleiades Publishing, Ltd., 2021. Russian Text © The Author(s), 2021, published in *Matematicheskie Zametki*, 110(3): 345–357. ISSN 0001-4346, DOI: 10.1134/S0001434621090030.

**Конфликт интересов:** о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

**Conflict of interest:** no potential conflict of interest related to this article was reported.

*Поступила в редакцию 27.03.2023*

*Поступила после рецензирования 08.05.2023*

*Принята к публикации 10.05.2023*

*Received 27.03.2023*

*Revised 08.05.2023*

*Accepted 10.05.2023*

---

#### СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

**Ломовцев Фёдор Егорович** – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры математической кибернетики механико-математического факультета, Белорусский государственный университет  
пр. Независимости, 4, Минск, 220030, Республика Беларусь

#### INFORMATION ABOUT THE AUTHOR


**Fedor Lomovtsev** – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Professor of the Department of Mathematical Cybernetics Mechanics and Mathematics Faculty, Belarusian State University, Minsk, Belarus.

## ФИЗИКА. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ PHYSICS. MATHEMATICAL MODELING

УДК 517, 519.6, 519.8  
MSC 37M05, 34C55, 47J40  
оригинальное исследование

DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-2-143-156

### Новый класс гистерезисных преобразователей: обобщенный люфт со случайными направляющими функциями

С. В. Борзунов 

(Статья представлена членом редакционной коллегии Ю. П. Вирченко)

Воронежский государственный университет,  
Воронеж, 394018, Россия  
E-mail: [sborzunov@gmail.com](mailto:sborzunov@gmail.com)

**Аннотация.** В работе приводится формальное определение, устанавливаются свойства стохастического гистерезисного преобразователя — обобщенного люфта. С помощью трехэтапной конструкции, включающей в себя последовательное определение входно-выходных соответствий на монотонных, кусочно-монотонных, непрерывных входах, введенный преобразователь трактуется как оператор, зависящий от своего начального состояния как от параметра, сопоставляющий всякому допустимому входу случайный процесс, параметры которого, в свою очередь, определяются свойствами направляющих функций обобщенного люфта. Доказывается корректность преобразователя, приводятся явные формулы для первой и второй моментных функций. Теоретические построения работы иллюстрируются результатами вычислительных экспериментов.

**Ключевые слова:** гистерезис, люфт, случайный процесс

**Для цитирования:** Борзунов С. В. 2023. Новый класс гистерезисных преобразователей: обобщенный люфт со случайными направляющими функциями. Прикладная математика & Физика, 55(2): 143–156.

DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-2-143-156

---

Original Research

### A New Class of Hysteresis Converters: Generalized Backlash With Stochastic Determining Curves

Sergei Borzunov 

(Article submitted by a member of the editorial board Yu. P. Virchenko)

Voronezh State University,  
Voronezh, 394018, Russia

E-mail: [sborzunov@gmail.com](mailto:sborzunov@gmail.com)

**Abstract.** The paper provides a formal definition and establishes the properties of a stochastic hysteresis converter — a generalized backlash. Using of a three-stage construction, which includes the sequential determination of input-output correspondences on monotone, piecewise monotone, and continuous inputs, the introduced converter is interpreted as an operator depending on its initial state as a parameter, matching a random process to any permissible input, the parameters of which, in turn, are determined by the properties of the guiding functions of the generalized backlash. The correctness of the converter is proved, explicit formulas for the first and second moment functions are given. The theoretical constructions of the work are illustrated by the results of computational experiments.

**Keywords:** Hysteresis, Backlash, Random Process

**For citation:** Borzunov Sergei. 2023. A new class of hysteresis converters: generalized backlash with stochastic determining curves. Applied Mathematics & Physics, 55(2): 143–156. DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-2-143-156

---

**1. Введение.** Математические модели гистерезисных нелинейностей восходят к классическим работам Дюема, Прейзаха, Вена [15, 30, 37]. Интерес к таким моделям обусловлен широким кругом задач (из самых разных предметных областей от физики и техники до биологии и экономики), где гистерезисные нелинейности играют едва ли не центральную роль. Некоторые примеры систем, отдельные составляющие которых демонстрируют гистерезисное поведение, приведены в работах [7, 9, 13, 1, 33, 19, 16, 6, 21, 29, 25, 20].



Указанный список ни в коей мере не претендует на полноту (ежегодно выходят тысячи работ в той или иной мере связанные с моделями гистерезиса), однако модели, применяемые в этих работах, обладают одним существенным недостатком: гистерезисные зависимости в них формализуются исключительно в рамках детерминированного подхода. Одна из первых монографий [3], посвященных моделям гистерезиса, появилась в 1983 году. С тех пор подходы к описанию гистерезисных зависимостей, предложенные в ней, давно стали классическими. Согласно М. А. Красносельскому элементарным носителем гистерезисных свойств является преобразователь – гистерон, формальное описание динамики входно-выходных соответствий которого сводится к двум соотношениям: вход – переменное состояние и состояние – выход (в некоторых случаях, когда состояние совпадает с выходом достаточно одного соотношения). При этом входно-выходные соответствия определяются сначала на монотонных входах, далее на кусочно-монотонных и на последнем этапе, с использованием предельного перехода, на непрерывных входах. Эта схема оказалась применима для формализации таких гистерезисных нелинейностей, как люфт и упор.

В большинстве практически важных задачах механики, физики, экономики, теории управления гистерезисное звено является частью более широкой системы, как правило, подверженной воздействию неконтролируемых факторов и шумов. В этом случае входы на гистерезисное звено либо неизвестны, либо известны с малой степенью точности, и структура входов может быть весьма сложной. В [3] предложена операторная трактовка гистерезисного преобразователя как оператора, определенного для достаточно широкого класса возможных входов.

Математические модели сложных систем, демонстрирующих гистерезисное поведение, применялись для анализа физических систем различной природы [2, 24, 12, 36, 4, 35, 18, 14, 34]. В работе [5] исследовано влияние электромагнитных актуаторов на частотную характеристику консольных балок. Результаты, полученные путем численного моделирования, демонстрируют возможность получения гистерезисного поведения и появления сдвига частоты вынужденных колебаний под действием электромагнитных сил. Использование преобразователя Преизаха описано в работах [31, 26], также указаны границы применимости соответствующей модели.

Одна из первых феноменологических моделей гистерезиса была предложена Боуком [8] и затем расширена Веном [37]. Эта модель способна отображать в аналитической форме особенности гистерезисного цикла, соответствующие поведению широкого класса гистерезисных систем. Первоначально она была применена к техническим задачам, включая расчеты в области сопротивления материалов и непрерывных сред.

Модель Боука – Вена активно изучается и широко применяется в настоящее время. Так, например, в работе [21] рассматривается задача аналитического анализа предельного цикла в данной модели. Этот вопрос часто возникает в вопросах идентификации параметров, когда на вход системы подается периодический сигнал, и экспериментальный полученный предельный цикл затем используется для определения параметров модели. Доказано, что выход в модели Боука – Вена для класса периодических входов, которые возможно реализовать физически и которые представляют практический интерес для процедур идентификации параметров, является периодическим.

Модель Боука – Вена является достаточно универсальной, но тем не менее она не лишена некоторых ограничений. В частности, ее применение весьма затруднено при входах малой амплитуды, из нее следует отсутствие затухания гистерезисных петель при малых нагрузках. Предложены модификации модели, которые устраняют эти и другие ограничения [11, 23]. В данных работах показано, что введение дополнительного коэффициента жесткости в гистерезисное дифференциальное уравнение позволяет различать исходное внешнее воздействие и последующее движение по петле гистерезиса. Доказано, что предлагаемая модификация корректирует нефизическое поведение модели для петель малой площади, не затрагивая остальные случаи.

Рассматривались и другие феноменологические модели. Так, например, в работе [23] представлена модель гистерезисного поведения материалов и конструкций, основанная на подходе, который рассматривает систему как состоящую из серии идеальных эластопластических элементов. Определен стационарный динамический отклик модели при воздействии возбуждения гармонической формы. Исследуется влияние деталей формы петли гистерезиса на характер реакции.

Все вышеперечисленные подходы основаны на детерминированности параметров изучаемых систем. Хотя имеется ряд работ, посвященных изучению отклика на случайный или зашумленный сигнал [32, 28], в большинстве из них внутренние параметры гистерезисной подсистемы считаются детерминированными. В интересной работе [10] предложен способ идентификации параметров гистерезисных систем Боука – Вена с использованием гибридного эволюционного алгоритма. Особенностью этого способа является использование избранных стохастических операторов, эвристик, а также дополнительной информации о специфике задачи. Показано, что предлагаемый метод нечувствителен к шумовым искажениям входных данных.

В работах [22, 27] исследуется отклик нелинейной системы на стохастическое внешнее воздействие. В них введена модель последствия случайных тепловых возмущений, приводящих к постепенной

потере памяти в гистерезисных системах. В предположении, что каждый домен имеет температуру фазового перехода  $T_c \pm \delta T_c$ , где знаки плюс и минус соответствуют нагреву и охлаждению соответственно, пространственные распределения  $T_c$  и  $\delta T_c$  служат параметрами модели.

Однако характеристики динамических систем, включающих блоки гистерезиса, могут быть известны лишь с той или иной точностью и, как правило, не позволяют провести идентификацию в условиях неразрушающего контроля. Такая ситуация возникает, например, при возникновении люфтов в механических узлах при длительной эксплуатации. При этом параметры носителей гистерезисных свойств могут испытывать закономерные или неравномерные изменения, связанные со старением материалов, или изменяться под влиянием других неконтролируемых факторов. В связи с этим возникает необходимость в обобщении конструктивных моделей гистерезисных преобразователей, учитывающих вероятностный характер определяющих их параметров.

Настоящая статья посвящена обобщению одной из основных моделей гистерезиса — люфта на класс преобразователей, характеристики которых определяются случайными параметрами.

**2. Обобщенный люфт.** Физическая модель люфта представляет собой систему, состоящую из цилиндра длины  $h$  и поршня, которые могут перемещаться в горизонтальном направлении (см. рис. 1а). Положение цилиндра будем считать входной координатой, а положение поршня — выходной. Вход системы в зависимости от времени на конечном интервале  $t \in [t_0, T]$  обозначим через  $x(t)$ , выход — через  $u(t)$ .

Для вещественных чисел  $v_r, v_l \in \mathbb{R}$  рассмотрим *определяющие кривые*  $\tilde{\Gamma}_l^{v_l}, \tilde{\Gamma}_r^{v_r}$  обобщенного люфта с параметрами сдвига  $v_l, v_r$ . Такие кривые вводятся согласно правилам:  $\tilde{\Gamma}_l^{v_l} : u_l(x) = l(x) + v_l$  и  $\tilde{\Gamma}_r^{v_r} : u_r(x) = r(x) + v_r$ . Здесь  $l(x)$  и  $r(x)$  — функции, отражающие механизм передачи движения цилиндра на движение поршня. Предполагается, что функции  $l(x)$  и  $r(x)$  удовлетворяют глобальному условию Липшица на всей области определения и монотонно возрастают. Кроме того, пусть выполняется условие отсутствия пересечения положений границ люфта:

$$\forall x (l(x) > r(x)). \tag{1}$$

Для  $v_r, v_l \in \mathbb{R}$ , таких, что  $l(w) + v_l > r(w) + v_r$  для всех  $w \in \mathbb{R}$ , и для произвольной непрерывной функции  $x : [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ , и  $x_0 := x(t_0)$  введем понятие обобщенного люфта.

Следуя классической схеме [3], определим сначала выход на монотонных входах. Выход  $u(t)$  в каждый момент времени  $t$  подчиняется операторному соотношению

$$u(t) = \hat{L}_S[t_0, u_0; \tilde{\Gamma}_l^{v_l}, \tilde{\Gamma}_r^{v_r}]x(t), \quad t_0 \leq t \leq T, \tag{2}$$

где  $t_0$  — начальный момент времени,  $u_0 := u(t_0)$  — начальное значение функции выхода.

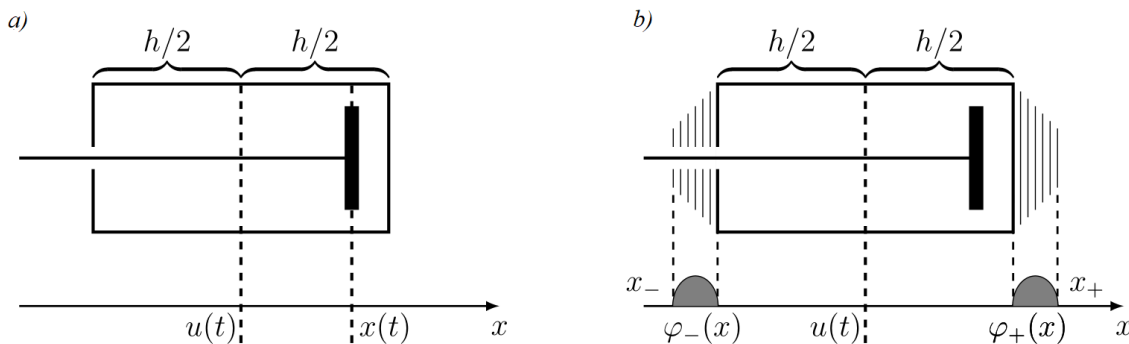


Рис. 1. Схематическое изображение люфта. Панель а) — люфт с детерминированными параметрами, панель б) — со стохастическими параметрами. Серой заливкой выделены области под кривыми  $\varphi_l(z)$  и  $\varphi_r(z)$ , определяющими плотность вероятности левой и правой границ цилиндра соответственно

Fig. 1. Schematic view of the backlash. Panel a) — the backlash with deterministic parameters, panel b) — the backlash with stochastic parameters. Gray filling indicates the area under the curves  $\varphi_l(z)$  and  $\varphi_r(z)$  which determine the probability density for the left and right boundaries of the cylinder, respectively

Обратимся к реализации следующего этапа — определения выхода на кусочно-монотонных входах. Отметим, что оператор обобщенного люфта  $\hat{L}_S$  в (2) удовлетворяет полугрупповому тождеству

$$\hat{L}_S[t_0, u_0; \tilde{\Gamma}_l^{v_l}, \tilde{\Gamma}_r^{v_r}]x(t) = \hat{L}_S[t_1, \hat{L}_S[t_0, u_0; \tilde{\Gamma}_l^{v_l}, \tilde{\Gamma}_r^{v_r}]x(t_1); \tilde{\Gamma}_l^{v_l}, \tilde{\Gamma}_r^{v_r}]x(t) \tag{3}$$

для произвольного момента времени  $t_1 \in [t_0, T]$ . Выполняя разбиение промежутка  $[0, T] = [0, t_1] \cup [t_1, t_2] \cup \dots \cup [t_{n-1}, t_n] \cup [t_n, T]$  на промежутки монотонности, определим на каждом из них соответствующий

оператор как оператор на монотонном входе. Таким образом, начальное состояние определяется как состояние в момент времени, соответствующий переходу на очередной участок монотонности.

**3. Обобщенный люфт со случайными параметрами.** В настоящем разделе введем понятие недетерминированного обобщенного люфта. Если рассматривать положения левой и правой стенок цилиндра, распределенные по случайному закону, то соответствующий преобразователь естественно назвать люфтом со случайными параметрами, или недетерминированным обобщенным люфтом. Ниже предполагается, что функции  $\varphi_r(x)$  и  $\varphi_l(x)$ , интерпретируемые как плотности вероятности, соответствующие положениям левой и правой границ цилиндра, заданы.

Ниже будем полагать, что положения левой и правой границ цилиндра заданы случайным образом, причем они определяются известными функциями плотности вероятности  $\varphi_r(x)$  и  $\varphi_l(x)$ .

Будем считать, что носители функций  $\varphi_l(x)$  и  $\varphi_r(x)$  расположены на промежутках  $(-v_l, v_l)$  и  $(-v_r, v_r)$  соответственно (см. рис. 1б). Пусть плотности вероятности  $\varphi_r(x)$  и  $\varphi_l(x)$  имеют ограниченную первую производную. Выход преобразователя-люфта со случайными параметрами будем считать случайным процессом  $u(t)$  с функцией распределения  $P\{u(t) < u\}$ .

Как и выше для детерминированного преобразователя, определим сначала выход на монотонных входах. Для случайного процесса  $u(t)$  в каждый момент времени  $t$  запишем операторное соотношение вида

$$u(t) = \hat{L}[t_0, u_0; \tilde{\Gamma}_l^{\Xi_l}, \tilde{\Gamma}_r^{\Xi_r}]x(t), \quad t_0 \leq t \leq T, \tag{4}$$

где  $x_0 = x(t_0)$  и  $u_0 = u(t_0)$  – начальные значения функций входа и выхода соответственно,  $t_0$  – начальный момент времени. Здесь  $\tilde{\Gamma}_l^{\Xi_l}, \tilde{\Gamma}_r^{\Xi_r}$  – определяющие кривые люфта,  $\tilde{\Gamma}_l^{\Xi_l}: u_l = l(x) + \Xi_l$  и  $\tilde{\Gamma}_r^{\Xi_r}: u_r = r(x) + \Xi_r$ , где  $l(x)$  и  $r(x)$  – функции, отражающие механизм передачи движения поршня на движение цилиндра,  $\Xi_l, \Xi_r$  – случайные величины с плотностями вероятности  $\varphi_l(x)$  и  $\varphi_r(x)$  соответственно (см. рис. 2). Предполагается, кроме того, что при всяком значении аргумента вероятность положительности разности случайных величин  $u_r$  и  $u_l$  равна единице:  $P\{u_r - u_l > 0\} = 1$ .

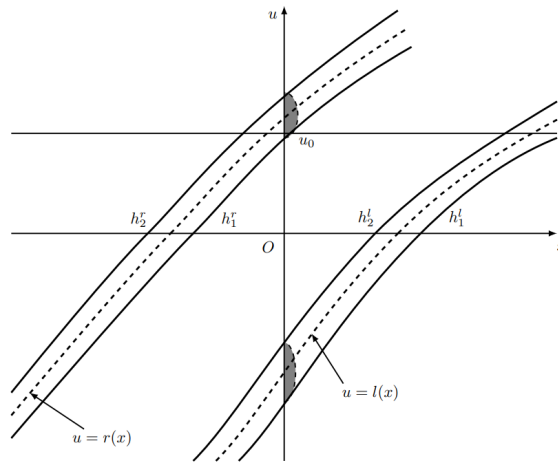


Рис. 2. Обобщенный люфт со случайными параметрами.

Серой заливкой выделены области под  $\varphi_l(z - l(x))$  и  $\varphi_r(z - r(x))$

Fig. 2. Generalized backlash with stochastic parameters: input-output plane with determining curves.

Gray filling indicates the area under the probability densities  $\varphi_l(z - l(x))$  and  $\varphi_r(z - r(x))$

Введем обозначения:

$$h_1^r(x) = r(x) - v_r, \tag{5}$$

$$h_2^r(x) = r(x) + v_r, \tag{6}$$

$$h_1^l(x) = l(x) - v_l, \tag{7}$$

$$h_2^l(x) = l(x) + v_l. \tag{8}$$

Величины  $h_1^r(x)$  и  $h_2^r(x)$  отвечают левой и правой границам носителя левой части люфта при изменении входа соответственно. В свою очередь, величины  $h_1^l(x)$  и  $h_2^l(x)$  отвечают левой и правой границам носителя правой части люфта соответственно (см. рис. 2).

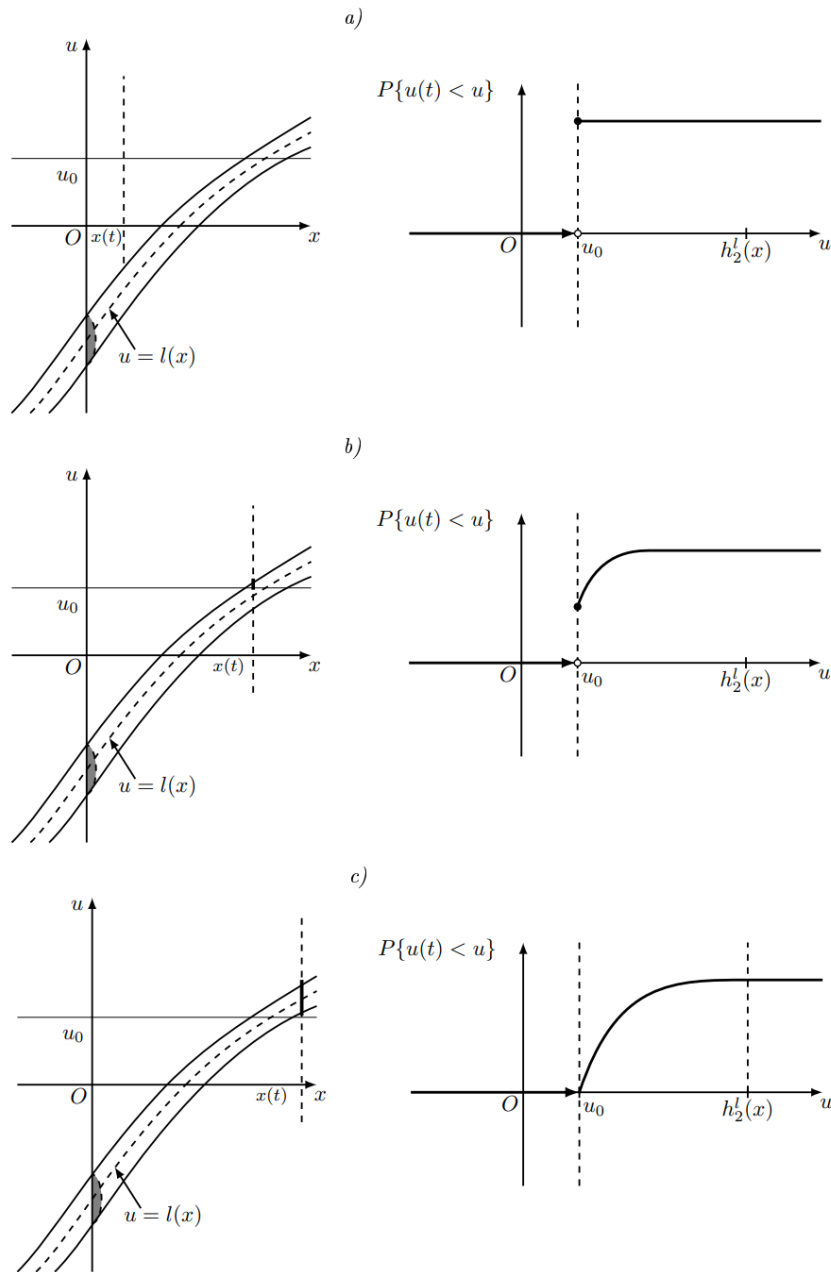


Рис. 3. Эволюция функции распределения  $P(u) = \{u(t) < u\}$  для монотонно возрастающих входов.

Панель a) –  $u_0 > h_2^l(x)$ , панель b) –  $h_1^l(x) \leq u_0 \leq h_2^l(x)$ , панель c) –  $u_0 < h_1^l(x)$

Fig. 3. Evolution of the distribution function  $P(u) = \{u(t) < u\}$  for monotonically increasing inputs.

Panel a) –  $u_0 > h_2^l(x)$ , panel b) –  $h_1^l(x) \leq u_0 \leq h_2^l(x)$ , panel c) –  $u_0 < h_1^l(x)$

Функцию распределения случайного процесса определим на монотонно возрастающих входах  $x(t)$  следующим образом:

$$P_{x(t)}\{u(t) < u\} = \Phi_l(u - \tilde{\Gamma}_l^{\Xi l}(x(t))), \tag{9}$$

где введено определение  $\Phi_l(u) \equiv \int_{-\infty}^u \varphi_l(s) ds$ . Для монотонно убывающих входов  $x(t)$  имеем по определению:

$$P_{x(t)}\{u(t) < u\} = \Phi_r(u - \tilde{\Gamma}_r^{\Xi r}(x(t))), \tag{10}$$

где  $\Phi_r(u) \equiv \int_{-\infty}^u \varphi_r(s) ds$ .

Соотношения (9) и (10) допускают следующую интерпретацию: вероятность  $P(u) \equiv P\{u(t) < u\}$  определяется начальным положением цилиндра  $u_0$  и координатой поршня  $x(t)$  в текущий момент времени. В зависимости от соотношения между  $u_0$  и  $x(t)$  возможны несколько случаев (см. рис. 3).

1) Если  $u_0 > h_2^l(x)$ , то поршень расположен левее правой границы цилиндра. Следовательно, координата  $u$  не менялась за прошедший промежуток времени, и  $P(u) = 1$  при  $u \geq u_0$ ,  $P(u) = 0$  при  $u < u_0$ . В данном случае функция  $P(u)$  совпадает с функцией Хевисайда:  $P(u) = \theta(u - u_0)$ .

2) Если выполняются неравенство  $u_0 \leq h_2^l(x)$ , то поршень находится на промежутке, где плотность вероятности правой границы люфта отлична от нуля. Из физических свойств системы следует, что событие  $u < u_0$  невозможно, а событие  $u > h_2^l(x)$  — достоверно. Для  $u$  из интервала  $[u_0, h_2^l(x)]$  вероятность противоположного события, как следует из рис. 2, равна  $\varphi_l(u)$ . Величина  $P(u)$  с увеличением  $u$  монотонно возрастает до единицы.

**Определение выхода на кусочно-монотонных входах.** Определим выход в ситуации, когда начальное значение выхода является случайной величиной. Введем понятие базовых состояний обобщенного гистерезисного преобразователя со случайными параметрами. Под *базовым состоянием* недетерминированного обобщенного люфта будем понимать множество  $\{t_0, u_0; \tilde{\Gamma}_l^{\Xi_l}, \tilde{\Gamma}_r^{\Xi_r}\}$ , для элементов которого справедливо условие принадлежности носителя распределения  $u_0$  внутренней области люфта:

$$\tilde{\Gamma}_l^{v_l} \leq \text{supp } \varphi_{u_0} \leq \tilde{\Gamma}_r^{v_r}. \quad (11)$$

Допустимыми состояниями назовем состояния вида  $\{T, u(T); \tilde{\Gamma}_l^{\Xi_l}, \tilde{\Gamma}_r^{\Xi_r}\}$ , удовлетворяющие следующему условию:

$$\exists u_0, x(t) : \hat{L}[t_0, u_0; \tilde{\Gamma}_l^{\Xi_l}, \tilde{\Gamma}_r^{\Xi_r}]x(t) = u(T). \quad (12)$$

Другими словами, критерием допустимости состояния является возможность получения этого состояния в результате эволюции из какого-либо базового состояния.

Пусть начальное значение  $u_0$  представляет собой случайную величину, распределенную с плотностью вероятности  $\varphi_{u_0}(u)$ , которая имеет ограниченную первую производную. Обозначим функцию распределения следующим образом:

$$P_{u_0}\{u(t) < u\} = \int_{-\infty}^u \varphi_{u_0}(s) ds. \quad (13)$$

Функцию распределения  $P\{u(t) < u\}$  в ситуации, когда  $u_0$  также является случайной величиной, для монотонно возрастающих входов определим как минимальное из значений (9) и (13):

$$P\{u(t) < u\} = \min(P_{x(t)}\{u(t) < u\}, P_{u_0}\{u(t) < u\}). \quad (14)$$

Для монотонно убывающих входов формула (14) принимает следующий вид:

$$P\{u(t) < u\} = \max(P_{x(t)}\{u(t) < u\}, P_{u_0}\{u(t) < u\}). \quad (15)$$

Отметим, что оператор люфта со случайными параметрами  $\hat{L}$  в (4) удовлетворяет полугрупповому тождеству

$$\hat{L}[t_0, u_0; \tilde{\Gamma}_l^{\Xi_l}, \tilde{\Gamma}_r^{\Xi_r}]x(t) = \hat{L}[t_1, \hat{L}[t_0, u_0; \tilde{\Gamma}_l^{\Xi_l}, \tilde{\Gamma}_r^{\Xi_r}]x(t_1); \tilde{\Gamma}_l^{\Xi_l}, \tilde{\Gamma}_r^{\Xi_r}]x(t) \quad (16)$$

для произвольного момента времени  $t_1 \in [t_0, T]$ .

Для определения оператора  $\hat{L}$  на кусочно-монотонных входах в случае конечного значения  $t$  выполним разбиение промежутка  $[0, T]$  на промежутки монотонности и определим на каждом из них соответствующий оператор как оператор на монотонном входе. Начальное состояние при этом определяется как состояние в момент времени перехода на другой участок монотонности.

**Теорема.** Пусть на отрезке  $t_0 \leq t \leq T$  имеет место равномерная сходимость последовательности кусочно-монотонных функций  $\{x_n(t)\}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , к функции  $x_*(t)$ :

$$x_n(t) \rightrightarrows x_*(t) \quad \forall t \in [t_0, T]. \quad (17)$$

Тогда выход представляет собой случайный процесс, сходящийся по распределению к случайному процессу

$$u_*(t) = \hat{L}[u_0, x_0; \tilde{\Gamma}_l^{\Xi_l}, \tilde{\Gamma}_r^{\Xi_r}]x_*(t). \quad (18)$$

**Доказательство.** Сходимость последовательности  $\xi_n$ , где  $n = 1, 2, \dots$ , по распределению к  $\xi$  (обозначение  $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$ ) означает, что для произвольной ограниченной непрерывной функции  $f = f(x)$  выполняется предельный переход

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle f(\xi_n) \rangle = \langle f(\xi) \rangle, \quad (19)$$

где  $\langle \dots \rangle$  отвечает усреднению по функции распределения.

Выходу  $x_*(t)$  сопоставляется случайный процесс с функцией распределения  $P\{u_*(t) < u\}$  как верхний предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} P\{u_n(t) < u\}$ .

1. Докажем, что  $u_n(t) \xrightarrow{d} u_*(t)$  выполняется для монотонных функций  $x_n(t)$ .

Для этого рассмотрим модуль разности математических ожиданий  $\mathcal{D} = |\langle f(u_n(t)) \rangle - \langle f(u_*(t)) \rangle|$  и убедимся, что  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ : при  $|x_n(t) - x_*(t)| < \delta$  справедливо условие  $\mathcal{D} < \varepsilon$ . В самом деле, используя (14), получим:

$$\mathcal{D} = \left| \int_0^1 f(u) dP\{u_n < u\} - \int_0^1 f(u) dP\{u_* < u\} \right| = \left| \int_0^1 f(u) d(P\{u_n < u\} - P\{u_* < u\}) \right|. \quad (20)$$

Далее докажем вспомогательное неравенство

$$|\min(A_1, B_1) - \min(A_2, B_2)| \leq \max(|A_1 - A_2|, |B_1 - B_2|), \quad (21)$$

справедливое для произвольных  $A_1, A_2, B_1, B_2 \in \mathbb{R}$ . Перейдем к новым переменным  $A_1 = x, A_2 = x + a, B_1 = y, B_2 = y + b$ , где  $x, y, a, b$  также принадлежат множеству вещественных чисел:

$$|\min(x, y) - \min(x + a, y + b)| \leq \max(|a|, |b|). \quad (22)$$

Вспользуемся выражением для минимума двух чисел через функцию абсолютной величины двух чисел:

$\min(x, y) = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|)$ . Обозначим левую часть неравенства (21) через  $L$ :

$$L = \left| \frac{x + y - |x - y|}{2} - \frac{x + a + y + b - |(x - y) + (a - b)|}{2} \right| = \frac{1}{2} ||(x - y) + (a - b)| - |x - y| - (a + b)|. \quad (23)$$

Согласно неравенству треугольника  $|A| - |B| \leq |A + B| \leq |A| + |B|$  имеем:

$$|x - y| - |a - b| \leq |(x - y) + (a - b)| \leq |x - y| + |a - b|. \quad (24)$$

Следовательно, для  $L$  получаем оценку

$$\frac{1}{2}(-|a - b| - (a + b)) \leq L \leq \frac{1}{2}(|a - b| - (a + b)). \quad (25)$$

В силу приведенной оценки  $(-\max(a, b)) \leq L \leq \min(a, b)$ , или

$$L \leq \max(|\min(a, b)|, |\max(a, b)|) \equiv \max(|a|, |b|). \quad (26)$$

Таким образом, неравенство (21) доказано.

С помощью (21) получаем оценку, которой удовлетворяет модуль разности математических ожиданий  $\mathcal{D}$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= \left| \int_0^1 f(u) d(P\{u_n < u\} - P\{u_* < u\}) \right| \leq \\ &\leq \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \max_{t \in [t_0, T]} \max(\varphi_l(u - h_2^l(x_n(t))) - \varphi_l(u - h_2^l(x_*(t))), \right. \\ &\quad \left. \varphi_{u_0}(u) - \varphi_{u_0}(u)) du \right| \leq \\ &\leq |h_2^l(x_n) - h_2^l(x_*)| \max_{t \in [t_0, T]} \max \left( \left. \frac{d\varphi_l(u)}{du} \right|_{\xi_n} |\text{supp } \varphi_l(u)|, \frac{d\varphi_{u_0}(u)}{du} \right|_{\xi_*} |\text{supp } \varphi_{u_0}(u)| \Big) = \\ &= \text{const} \times \delta = \varepsilon, \end{aligned} \quad (27)$$

где  $\xi_n \in [\inf \text{supp } \varphi_l(u), \sup \text{supp } \varphi_l(u)]$ ,  $\xi_* \in [\inf \text{supp } \varphi_{u_0}(u), \sup \text{supp } \varphi_{u_0}(u)]$ .

Напомним, что функция  $l(x)$  удовлетворяет глобальному условию Липшица. Принимая во внимание также непрерывность функций  $f(u)$ , и с учетом  $x_n(t) \xrightarrow{d} x_*(t)$ , на основании теоремы о среднем получаем, что  $\mathcal{D} < \varepsilon$ , следовательно,  $u_n(t) \xrightarrow{d} u_*(t)$ .

2. Перейдем к рассмотрению кусочно-монотонных входов  $x(t)$  для  $t_0 \leq t \leq T$ . Обозначим  $y_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) dP\{u_n < u\}$ . Докажем, что последовательность  $\{y_n\}$  является фундаментальной на отрезке  $[t_0, T]$ :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall m, n \geq N \forall t \in [t_0, T] |y_m(t) - y_n(t)| < \varepsilon. \quad (28)$$

Для некоторого члена последовательности  $\{y_n\}$  запишем разбиение вещественной оси  $\mathbb{R}$  на промежутки монотонности  $t_k^{(n)}$ :

$$\mathcal{T}^{(n)} = \bigcup_{k=1}^{S_n} T_k^{(n)}, \quad T_k^{(n)} \cap T_{k'}^{(n)} = \emptyset \text{ при } k \neq k'. \quad (29)$$

Аналогично, для еще одного представителя последовательности, например,  $y_m(t)$ , имеем разбиение на промежутки монотонности  $T_k^{(m)}$ :

$$\mathcal{T}^{(m)} = \bigcup_{k=1}^{S_m} T_k^{(m)}, \quad T_k^{(m)} \cap T_{k'}^{(m)} = \emptyset \text{ при } k \neq k'. \quad (30)$$

На основе разбиений  $\mathcal{T}_n$  и  $\mathcal{T}_m$  сконструируем новое разбиение  $\mathcal{T} = \mathcal{T}_n \cup \mathcal{T}_m = \bigcup_{k=1}^{S_n+S_m} T_k$ , являющееся подразбиением  $\mathbb{R}$  на такие промежутки, для которых как  $\{x_n(t)\}$ , так и  $\{x_m(t)\}$  обладают свойством монотонности.

Далее рассмотрим два случая:

1) одновременное возрастание (или убывание) функций  $x_n(t)$  и  $x_m(t)$  на некотором промежутке  $T_k$ .  
Имеем следующую оценку:

$$\begin{aligned} & |y_n(t) - y_m(t)| \leq \\ & \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(u) d(P\{u_n < u\} - P\{u_m < u\})| \leq \\ & \leq \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \max_{t \in t_k} \max(\varphi_l(u - h_2^l(x_n(t))) - \varphi_l(u - h_2^l(x_m(t))), \right. \\ & \quad \left. \varphi_{u_0}(u) - \varphi_{u_0}(u)) du \right| \leq \\ & \leq |h_2^l(x_n(t)) - h_2^l(x_m(t))| \max_{t \in T_k} \max \left( \left. \frac{d\varphi_l(u)}{du} \right|_{\xi} |\text{supp } \varphi_l(u)|, \frac{d\varphi_{u_0}(u)}{du} \right|_{\xi} |\text{supp } \varphi_{u_0}(u)| \Big) = \text{const} \times \delta = \varepsilon, \quad (31) \end{aligned}$$

где  $\xi_n \in [\inf \text{supp } \varphi_l(u), \sup \text{supp } \varphi_l(u)]$ ,  $\xi_* \in [\inf \text{supp } \varphi_{u_0}(u), \sup \text{supp } \varphi_{u_0}(u)]$ .

Заметим, что если значения входа  $x(t)$  отличаются на ограниченные величины

$|\delta x_n(t)|, |\delta x_m(t)| < \varepsilon_0 = \text{const}$ , то, в силу непрерывности функции  $h_2^l(x)$  на промежутке  $t_k$ , оценка (31) сохраняет свою истинность.

2) функция  $x_n(t)$  монотонно возрастает (убывает), а  $x_m(t)$  монотонно убывает (возрастает) на некотором  $T_k$ :

$$\begin{aligned} & |y_n(t) - y_m(t)| \leq \\ & \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(u) d(P\{u_n < u\} - P\{u_m < u\})| \leq \\ & \leq \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \max_{t \in t_k} \max(\varphi_l(u - h_2^l(x_n(t))) - \varphi_l(u - h_2^l(x_m(\inf T_k))), \right. \\ & \quad \left. \varphi_{u_0}(u) - \varphi_{u_0}(u)) du \right|. \quad (32) \end{aligned}$$

В силу того, что  $\max_{t \in T_k} |x_n(t) - x_m(\inf T_k)| \leq \max_{t \in t_k} |x_n(t) - x_m(t)|$ , для левой части неравенства (32) также справедлива оценка вида (31).

Следовательно, последовательность  $\{y_n\}$  имеет предел:  $Y(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \{y_n\}$ .

3. Докажем, что  $Y(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle f(u_n(t)) \rangle$ .

Введем обозначения для нижнего и верхнего пределов последовательности функций распределения при фиксированном  $t \in [t_0, T]$ :

$$\tilde{P}(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} P\{u_n < n\}, \quad \tilde{\tilde{P}}(u) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} P\{u_n < n\}, \quad (33)$$

Существование пределов (33) вытекает из ограниченности функции распределения (14).

Докажем, что  $\tilde{P}(u) = \tilde{\tilde{P}}(u) = Y(t)$ .

В самом деле, если для всех моментов времени  $t \in [t_0, T]$  выполняется равенство  $\tilde{P}(u) = \tilde{\tilde{P}}(u)$ , то, следовательно, по свойствам верхнего и нижнего предела функциональной последовательности  $Y(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \{y_n\}$ .

Далее предположим, что в некоторый момент времени  $t_w \in [t_0, T]$  значения пределов различны:  $\tilde{P}(w) \neq \tilde{\tilde{P}}(w)$ . Тогда для достаточно большого номера  $N_0$  существуют порядковые номера  $n$  и  $m$  такие, что либо

$$\tilde{P}(w) \leq P(u_n(t_w) < w) < P(u_m(t_w) < w) \leq \tilde{\tilde{P}}(w), \quad (34)$$

либо

$$\tilde{P}(w) \leq P(u_n(t) < w) < P(u_n(t) < w) \leq \tilde{\tilde{P}}(w). \quad (35)$$

Без ограничения общности достаточно рассмотреть первый из двух случаев (34) и (35). Как доказано в пункте 2), неравенство

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(u) d(P\{u_n < u\} - P\{u_m < u\}) \right| \leq \varepsilon \quad (36)$$

справедливо для произвольной ограниченной непрерывной на  $\mathbb{R}$  функции  $f(u)$ . Положим  $f(u) = \theta(w - u)$ , где  $\theta(u)$  – функция Хевисайда. Из этого следует оценка

$$|P\{u_n < w\} - P\{u_m < w\}| \leq \varepsilon, \quad (37)$$

что противоречит предположению (34).

Тем самым доказано, что для произвольного непрерывного на  $[t_0, T]$  входе  $x(t)$  определен случайный процесс  $u(t)$ , трактуемый как выход гистерезисного преобразователя со случайными параметрами на произвольном непрерывном входе. ■

**4. Иллюстративные примеры.** Рассмотрим люфт с направляющими прямыми  $\tilde{I}_l: u = x + \Xi_l$  и  $\tilde{I}_r: u = x + \Xi_r$ , где  $\Xi_l, \Xi_r$  – определенные на интервале  $(x_-, x_+)$  случайные величины.

Динамика изменения функции распределения  $P(u) = P\{u(t) < u\}$  для монотонно возрастающего входа  $x(t) = t + 1$  и для  $l(x) = x + \sin x - 3$  в зависимости от  $u$  приведена на рис. 4, правая граница является равномерно распределенной случайной величиной, значения параметров равны  $x_- = -0.5, x_+ = 0.5, u_0 = 0, t = 1.2$  (сплошная кривая),  $t = 4$  (пунктирная кривая),  $t = 5$  (штрих-пунктирная кривая).

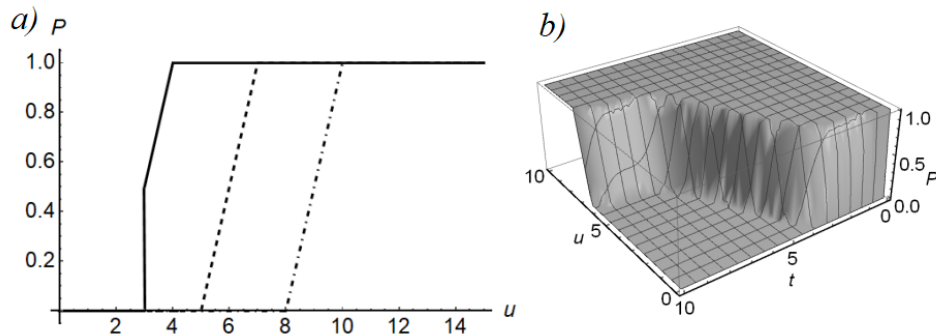


Рис. 4. Панель a) – динамика эволюции функции распределения  $P(u) = P\{u(t) < u\}$  для входа  $x(t) = t + 1$  и  $l(x) = x + \sin x - 3$ , сплошная линия соответствует моменту времени  $t = 1.2$ , пунктирная –  $t = 4$ , штрих-пунктирная –  $t = 5$ , панель b) – функция распределения  $P_t(u) = \{u(t) < u\}$

Fig. 4. Panel a) – dynamics of the distribution function  $P(u) = P\{u(t) < u\}$  for the input  $x(t) = t + 1$ , when  $l(x) = x + \sin x - 3$ , right edge is *uniformly* distributed, and the time moment is fixed:  $t = 1.2$  (solid curve),  $t = 4$  (dashed curve),  $t = 5$  (dash-dotted curve), panel b) – the distribution function  $P_t(u) = \{u(t) < u\}$

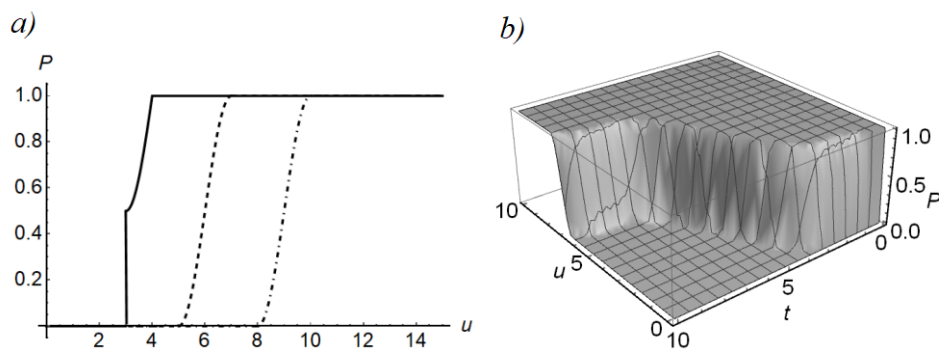


Рис. 5. Панель a) – динамика функции распределения  $P(u) = P\{u(t) < u\}$  для входа  $x(t) = t + 1$ , когда  $l(x) = x + \sin x - 3$ , правый край распределен с плотностью (38), а момент времени фиксирован:  $t = 1.2$  (сплошная кривая),  $t = 4$  (штриховая кривая),  $t = 5$  (штрихпунктирная кривая), панель b) – функция распределения  $P_t(u) = \{u(t) < u\}$

Fig. 5. Panel a) – dynamics of the distribution function  $P(u) = P\{u(t) < u\}$  for the input  $x(t) = t + 1$ , when  $l(x) = x + \sin x - 3$ , right edge is distributed with the density (38), and time moment is fixed:  $t = 1.2$  (solid curve),  $t = 4$  (dashed curve),  $t = 5$  (dash-dotted curve), panel b) – the distribution function  $P_t(u) = \{u(t) < u\}$



Рисунок 5 иллюстрирует эволюцию функции распределения в ситуации, когда правая граница является случайной величиной с плотностью распределения

$$\varphi_l(x) = \frac{\pi}{2(x_+ - x_-)} \sin\left(\pi \frac{x - x_-}{x_+ - x_-}\right) \tag{38}$$

при  $x \in (x_-, x_+)$ , и  $\varphi_l(x) = 0$  при остальных значениях  $x$ , параметры равны  $x_- = -0.5, x_+ = 0.5, u_0 = 0$ .

Результаты численного эксперимента определения моментных функций  $\langle u \rangle$  и  $\langle u^2 \rangle$  приведены на рис. 6.

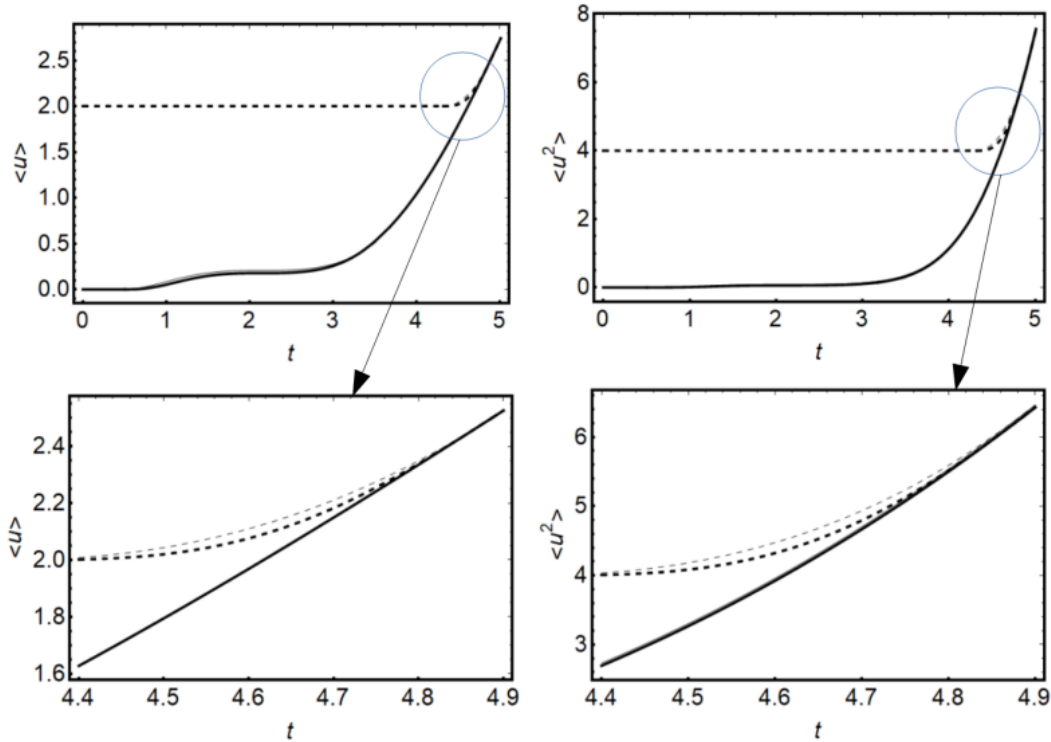


Рис. 6. Моменты  $\langle u \rangle$  и  $\langle u^2 \rangle$  для входа  $x(t) = t + 1$  и  $l(x) = x + \sin x - 3$  при  $u_0 = 0$  (сплошные кривые) и  $u_0 = 2$  (пунктирные кривые), правая граница является равномерно распределенной случайной величиной (тонкие кривые) или случайной величиной с плотностью распределения (38). Значения параметров равны  $x_- = -0.5, x_+ = 0.5$   
 Fig. 6. Moment functions  $\langle u \rangle$  and  $\langle u^2 \rangle$  for the input  $x(t) = t + 1$  and  $l(x) = x + \sin x - 3$ :  $u_0 = 0$  (solid curve) and  $u_0 = 2$  (dashed curve). The right edge is a uniformly distributed (thin curves), or distributed with density (38). Parameters are:  $x_- = -0.5, x_+ = 0.5$ .

Рассмотрим динамику изменения функции распределения  $P(u) = P\{u(t) < u\}$  для функции  $l(x)$ , задающей границу люфта, равной  $l(x) = 5 \tanh(x/5) - 2$ . По-прежнему полагаем, что вход равен  $x(t) = t + 1$ .

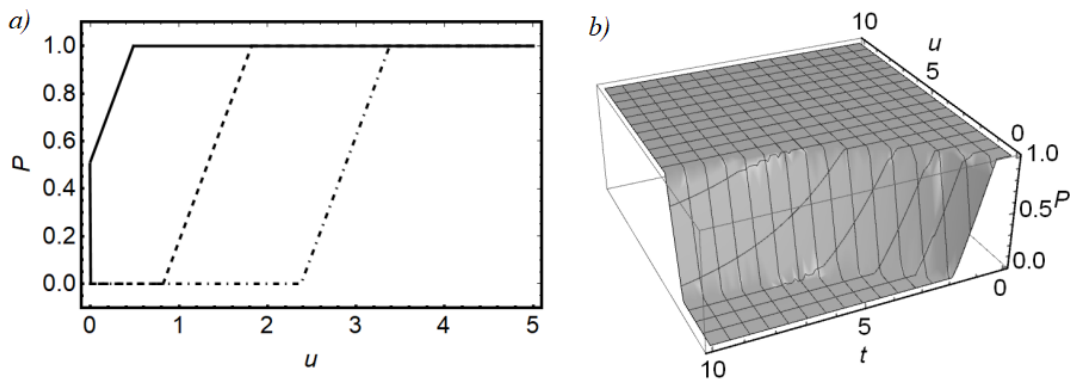


Рис. 7. Панель а) – динамика эволюции функции распределения  $P(u) = P\{u(t) < u\}$  для входа  $x(t) = t + 1$  и  $l(x) = 5 \tanh(x/5) - 2$ , сплошная линия соответствует моменту времени  $t = 1.2$ , пунктирная –  $t = 4$ , штрих-пунктирная –  $t = 5$ , панель б) – функция распределения  $P_t(u) = \{u(t) < u\}$   
 Fig. 7. Panel a) – dynamics of evolution of distribution function  $P(u) = P\{u(t) < u\}$  for input  $x(t) = t + 1$  and  $l(x) = 5 \tanh(x/5) - 2$ , solid line corresponds to time  $t = 1.2$ , dotted line –  $t = 4$ , dash-dotted line –  $t = 5$ , panel b) – distribution function  $P_t(u) = \{u(t) < u\}$

График функции  $P(u)$  в этом случае приведен на рис. 7, правая граница является равномерно распределенной случайной величиной, значения параметров равны  $x_- = -0.5$ ,  $x_+ = 0.5$ ,  $u_0 = 0$ ,  $t = 1.2$  (сплошная кривая),  $t = 4$  (пунктирная кривая),  $t = 5$  (штрих-пунктирная кривая).

Рисунок 8 иллюстрирует эволюцию функции распределения в ситуации, когда правая граница является случайной величиной с плотностью распределения (38) при  $x \in (x_-, x_+)$ , значения параметров равны  $x_- = -0.5$ ,  $x_+ = 0.5$ ,  $u_0 = 0$ .

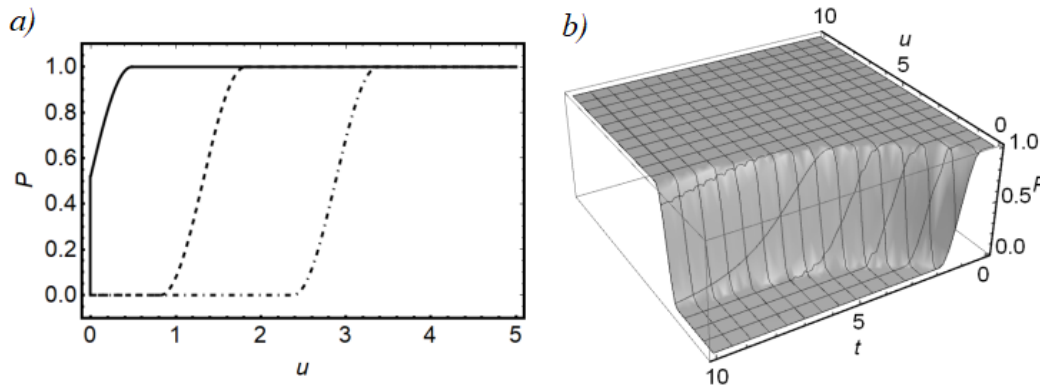


Рис. 8. То же, что и на рис. 5, но для  $l(x) = 5 \tanh(x/5) - 2$   
 Fig. 8. The same as in Fig. 5, but for  $l(x) = 5 \tanh(x/5) - 2$

Результаты численного эксперимента определения моментных функций  $\langle u \rangle$  и  $\langle u^2 \rangle$  для  $l(x) = 5 \tanh(x/5) - 2$  приведены на рис. 9.

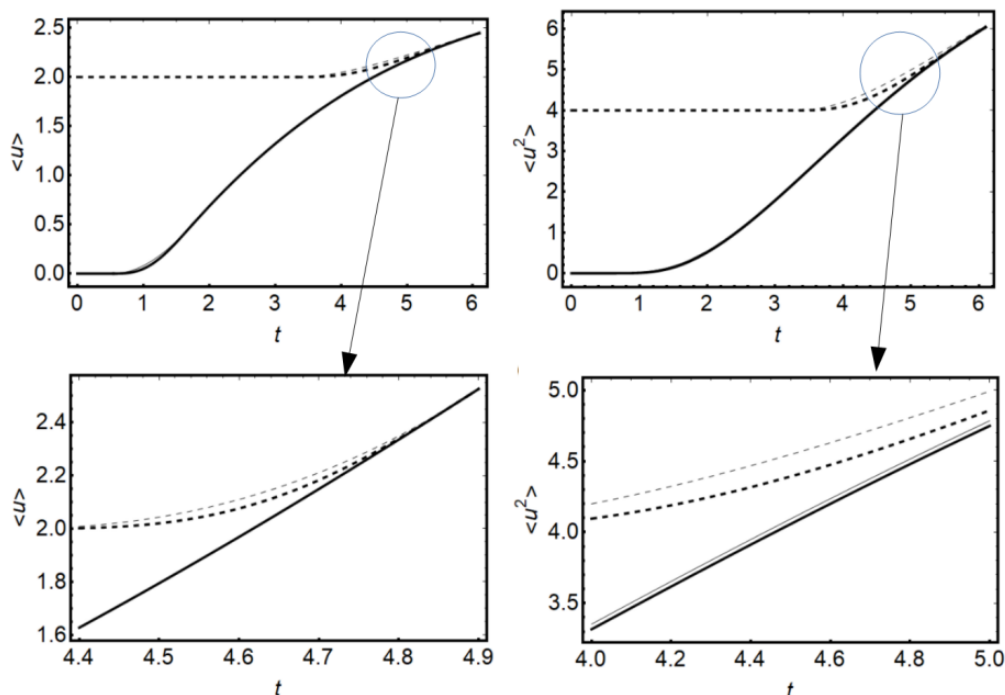


Рис. 9. То же, что и на рис. 6, но для  $l(x) = 5 \tanh(x/5) - 2$   
 Fig. 9. The same as in Fig. 6, but for  $l(x) = 5 \tanh(x/5) - 2$

#### Список литературы

1. Борзунов С. В., Семенов М. Е., Сельвесюк Н. И., Мелешенко П. А. 2019. Гистерезисные преобразователи со случайными параметрами. Математическое моделирование. Т. 31(7). С. 109-126. EDN: KWHLZJ. DOI: 10.1134/S0234087919070074
2. Борзунов С. В., Семенов М. Е., Сельвесюк Н. И., Мелешенко П. А., Соловьев А. М. 2021. Стохастическая модель гистерезисного преобразователя с доменной структурой Математическое моделирование, 33(9): 60–86. EDN: XTIALM. DOI: 10.20948/mm-2021-09-05

3. Красносельский М. А., Покровский А. В. 1983. Системы с гистерезисом. М., Наука, 272.
4. Медведский А. Л., Мелешенко П. А., Нестеров В. А., Решетова О. О., Семенов М. Е. 2021. Динамика гистерезисно-связанных осцилляторов Ван-дер-Поля: Метод малого параметра. Известия РАН. Теория и системы управления, 4: 7–26. DOI: 10.31857/S0002338821040107
5. Belhaq M., Bichri A., Der Hogapian J., Mahfoud J. 2011. Effect of electromagnetic actuations on the dynamics of a harmonically excited cantilever beam. International Journal of Non-Linear Mechanics, Elsevier. DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.2011.03.001
6. Benabou A., Clénet S., Piriou F. 2003. Comparison of Preisach and Jiles–Atherton models to take into account hysteresis phenomenon for finite element analysis. Journal of Magnetism and Magnetic Materials, 261(1): 139–160.
7. Brokate M., Krejčí P. 2013. Optimal control of ODE systems involving a rate independent variational inequality. Discrete and Continuous Dynamical Systems – Series B. 18: 331–348.
8. Bouc R. 1967. Forced vibration of mechanical systems with hysteresis. Proceedings of the Fourth Conference on Nonlinear Oscillation. Prague, Czechoslovakia, p. 315.
9. Carboni B., Lacarbonara W. 2016. Nonlinear dynamic characterization of a new hysteretic device: experiments and computations. Nonlinear Dynamics, 83: 23–39. <https://doi.org/10.1007/s11071-015-2305-9>
10. Charalampakis A. E., Koumousis V. K. 2008. Identification of Bouc–Wen hysteretic systems by a hybrid evolutionary algorithm. Journal of Sound and Vibration, 314 (3–5): 571–585.
11. Charalampakis A. E., Koumousis V. K. 2009. A Bouc–Wen model compatible with plasticity postulates. Journal of Sound and Vibration, 322, pp. 954–968.
12. Chtouki, A., Lakrad, F., Belhaq, M. 2020. Quasi-periodic bursters and chaotic dynamics in a shallow arch subject to a fast–slow parametric excitation. Nonlinear Dynamics, 99: 283–298. <https://doi.org/10.1007/s11071-019-05082-7>
13. Davino D., Krejčí P., Pimenov A. et al. 2016. Analysis of an operator-differential model for magnetostrictive energy harvesting. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 39: 504–519.
14. De Domenico, D., Quaranta, G., Ricciardi, G., Lacarbonara, W. 2022. Optimum design of tuned mass damper with pinched hysteresis under nonstationary stochastic seismic ground motion. Mechanical Systems and Signal Processing, 170: 108745.
15. Duhem P. 1987. Die dauernden Aenderungen und die Thermodynamik. I. Z. Phys. Chem. 22: 543–589.
16. Dupre L. R., Van Keer R., Melkebeek J.A.A. 1999. Identification of the relation between the material parameters in the Preisach model and in the Jiles–Atherton hysteresis model. Journal of Applied Physics, 85(8): 4376–4378.
17. Kottaria A. K., Charalampakis A. E., Koumoussi V. K. 2014. A consistent degrading Bouc–Wen model. Engineering Structures 60: 235–240.
18. Formica G., Lacarbonara W. 2020. Asymptotic dynamic modeling and response of hysteretic nanostructured beams. Nonlinear Dynamics, 99(1): 227–248.
19. Gavioli C., Krejčí P. 2021. Control and controllability of PDEs with hysteresis. Applied Mathematics & Optimization, 84: 829–847.
20. Ikhouane F. 2018. A survey of the hysteretic Duhem model. Archives of Computational Methods in Engineering, 25(4): 965–1002.
21. Ikhouane F., Rodellar J. 2005. On the Hysteretic Bouc–Wen Model. Nonlinear Dynamics, 42: 63–78.
22. Korman C.E. Mayergoyz I.D. Review of Preisach type models driven by stochastic inputs as a model for after-effect. Physica B. 233: 381–389.
23. Kottaria A.K., Charalampakis A.E., Koumoussi V.K. 2014. A consistent degrading Bouc–Wen model. Engineering Structures 60: 235–240.
24. Lacarbonara W., Talò M., Carboni B., Lanzara G. Tailoring of Hysteresis Across Different Material Scales. In Collection: M. Belhaq (ed.), Recent Trends in Applied Nonlinear Mechanics and Physics, Springer Proceedings in Physics 199:227–250. [https://doi.org/10.1007/978-3-319-63937-6\\_13](https://doi.org/10.1007/978-3-319-63937-6_13)
25. Lin C.-J., Lin P.-T. 2012. Tracking control of a biaxial piezo-actuated positioning stage using generalized Duhem model. Computers and Mathematics with Applications, 64: 766–787.
26. Mayergoyz I. D. 1986. Mathematical models of hysteresis. Physical Review Letters, 56(15): 1518–1521.
27. Mayergoyz I., Dimian M. 2003. Analysis of spectral noise density of hysteretic systems driven by stochastic processes. Journal of Applied Physics, 93(10): 6826–6828.
28. Mayergoyz I. D., Dimian M. 2005. Stochastic aspects of hysteresis. Journal of Physics: Conference Series, 22: 139–147.
29. Padthe, A.K., Drincic, B., Oh, J. et al. 2008. Duhem modeling of friction-induced hysteresis. IEEE Control Systems Magazine, 28: 90–107. DOI: 10.1109/MCS.2008.927331
30. Preisach F. 1935. Über die magnetische Nachwirkung. Zeitschrift für Physik. 94(5–6): 277–302.
31. Rachinskii D. 2016. Realization of Arbitrary Hysteresis by a Low-dimensional Gradient Flow. Discrete & Continuous Dynamical Systems - B, 21: 227–243.

32. Rios L.A., Rachinskii D., Cross R. 2017. A model of hysteresis arising from social interaction within a firm. *Journal of Physics: Conference Series*, 811 (1): 012011.
33. Semenov M. E., Borzunov S. V., Meleshenko P. A. 2020. Stochastic Preisach operator: definition within the design approach. *Nonlinear Dynamics*, 101: 2599–2614. <https://doi.org/10.1007/s11071-020-05907-w>
34. Semenov M. E., Meleshenko P. A., Borzunov S. V., Reshetova O. O., Barsukov A. I. 2023. A Simple Model of the Energy Harvester within a Linear and Hysteresis Approach. *Micromachines*, 14: 310. <https://doi.org/10.3390/mi14020310>
35. Semenov M. E., Reshetova O. O., Borzunov S. V., Meleshenko P. A. 2021. Self-oscillations in a system with hysteresis: the small parameter approach. *Eur. Phys. J. Spec. Top.* 230: 3565–3571. <https://doi.org/10.1140/epjs/s11734-021-00237-3>
36. Semenov M. E., Solovyov A. M., Meleshenko P. A., Reshetova O. O. 2020. Efficiency of hysteretic damper in oscillating systems *Mathematical Modelling of Natural Phenomena*, 15: 43. <https://doi.org/10.1051/mmnp/2019053>
37. Wen Y. K. 1976. Method of random vibration of hysteretic systems. *ASCE Journal of Engineering Mechanics*. 102(2): 249–263.

### References

1. Borzunov S. V., Semenov M. E., Sel'vesyuk N. I., Meleshenko P. A. 2020. Hysteretic Converters with Stochastic Parameters. *Mathematical Models and Computer Simulations*, 12 (2): 164-175. (in Russian)
2. Borzunov S. V., Semenov M. E., Sel'vesyuk N. I., Meleshenko P. A. 2022. Stochastic Model of a Hysteresis Converter with a Domain Structure. *Mathematical Models and Computer Simulations*. 14(2): 305-321. (in Russian)
3. Krasnosel'skii M. A., Pokrovskii A. V. *Systems with Hysteresis*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1989, 410 p. (in Russian)
4. Medvedskii, A., Meleshenko, P., Nesterov, V., Reshetova, O., Semenov, M. 2021. Dynamics of hysteretic-related Van-Der-Pol oscillators: the small parameter method. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 60: 511–529. (in Russian)
5. Belhaq M., Bichri A., Der Hogapian J., Mahfoud J. 2011. Effect of electromagnetic actuations on the dynamics of a harmonically excited cantilever beam. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Elsevier. DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.2011.03.001
6. Benabou A., Clénet S., Piriou F. 2003. Comparison of Preisach and Jiles–Atherton models to take into account hysteresis phenomenon for finite element analysis. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 261(1): 139–160.
7. Brokate M., Krejčí P. 2013. Optimal control of ODE systems involving a rate independent variational inequality. *Discrete and Continuous Dynamical Systems – Series B*. 18: 331–348.
8. Bouc R. 1967. Forced vibration of mechanical systems with hysteresis. *Proceedings of the Fourth Conference on Nonlinear Oscillation*. Prague, Czechoslovakia, p. 315.
9. Carboni B., Lacarbonara W. 2016. Nonlinear dynamic characterization of a new hysteretic device: experiments and computations. *Nonlinear Dynamics*, 83: 23–39. <https://doi.org/10.1007/s11071-015-2305-9>
10. Charalampakis A. E., Koumousis V. K. 2008. Identification of Bouc-Wen hysteretic systems by a hybrid evolutionary algorithm. *Journal of Sound and Vibration*, 314 (3–5): 571–585.
11. Charalampakis A. E., Koumousis V. K. 2009. A Bouc–Wen model compatible with plasticity postulates. *Journal of Sound and Vibration*, 322, pp. 954–968.
12. Chtouki, A., Lakrad, F., Belhaq, M. 2020. Quasi-periodic bursters and chaotic dynamics in a shallow arch subject to a fast–slow parametric excitation. *Nonlinear Dynamics*, 99: 283–298. <https://doi.org/10.1007/s11071-019-05082-7>
13. Davino D., Krejčí P., Pimenov A. et al. 2016. Analysis of an operator-differential model for magnetostrictive energy harvesting. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 39: 504–519.
14. De Domenico, D., Quaranta, G., Ricciardi, G., Lacarbonara, W. 2022. Optimum design of tuned mass damper with pinched hysteresis under nonstationary stochastic seismic ground motion. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 170: 108745.
15. Duhem P. 1987. Die dauernden Aenderungen und die Thermodynamik. I. *Z. Phys. Chem.* 22: 543–589.
16. Dupre L. R., Van Keer R., Melkebeek J. A. A. 1999. Identification of the relation between the material parameters in the Preisach model and in the Jiles–Atherton hysteresis model. *Journal of Applied Physics*, 85(8): 4376–4378.
17. Kottaria A. K., Charalampakis A. E., Koumoussi V. K. 2014. A consistent degrading Bouc–Wen model. *Engineering Structures* 60: 235–240.
18. Formica G., Lacarbonara W. 2020. Asymptotic dynamic modeling and response of hysteretic nanostructured beams. *Nonlinear Dynamics*, 99(1): 227–248.
19. Gavioli C., Krejčí P. 2021. Control and controllability of PDEs with hysteresis. *Applied Mathematics & Optimization*, 84: 829–847.
20. Ikhoulane F. 2018. A survey of the hysteretic Duhem model. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 25(4): 965–1002.
21. Ikhoulane F., Rodellar J. 2005. On the Hysteretic Bouc–Wen Model. *Nonlinear Dynamics*, 42: 63–78.

22. Korman C.E. Mayergoz I.D. Review of Preisach type models driven by stochastic inputs as a model for after-effect. *Physica B*. 233: 381–389.
23. Kottaria A. K., Charalampakis A. E., Koumoussi V. K. 2014. A consistent degrading Bouc–Wen model. *Engineering Structures* 60: 235–240.
24. Lacarbonara W., Talò M., Carboni B., Lanzara G. Tailoring of Hysteresis Across Different Material Scales. In Collection: M. Belhaq (ed.), *Recent Trends in Applied Nonlinear Mechanics and Physics*, Springer Proceedings in Physics 199:227–250. [https://doi.org/10.1007/978-3-319-63937-6\\_13](https://doi.org/10.1007/978-3-319-63937-6_13)
25. Lin C.-J., Lin P.-T. 2012. Tracking control of a biaxial piezo-actuated positioning stage using generalized Duhem model. *Computers and Mathematics with Applications*, 64: 766–787.
26. Mayergoz I. D. 1986. Mathematical models of hysteresis. *Physical Review Letters*, 56(15): 1518–1521.
27. Mayergoz I., Dimian M. 2003. Analysis of spectral noise density of hysteretic systems driven by stochastic processes. *Journal of Applied Physics*, 93(10): 6826–6828.
28. Mayergoz I. D., Dimian M. 2005. Stochastic aspects of hysteresis. *Journal of Physics: Conference Series*, 22: 139–147.
29. Padthe, A.K., Drincic, B., Oh, J. et al. 2008. Duhem modeling of friction-induced hysteresis. *IEEE Control Systems Magazine*, 28: 90–107. DOI: 10.1109/MCS.2008.927331
30. Preisach F. 1935. Über die magnetische Nachwirkung. *Zeitschrift für Physik*. 94(5–6): 277–302.
31. Rachinskii D. 2016. Realization of Arbitrary Hysteresis by a Low-dimensional Gradient Flow. *Discrete & Continuous Dynamical Systems - B*, 21: 227–243.
32. Rios L.A., Rachinskii D., Cross R. 2017. A model of hysteresis arising from social interaction within a firm. *Journal of Physics: Conference Series*, 811 (1): 012011.
33. Semenov M. E., Borzunov S. V., Meleshenko P. A. 2020. Stochastic Preisach operator: definition within the design approach. *Nonlinear Dynamics*, 101: 2599–2614. <https://doi.org/10.1007/s11071-020-05907-w>
34. Semenov M. E., Meleshenko P. A., Borzunov S. V., Reshetova O. O., Barsukov A. I. 2023. A Simple Model of the Energy Harvester within a Linear and Hysteresis Approach. *Micromachines*, 14: 310. <https://doi.org/10.3390/mi14020310>
35. Semenov M. E., Reshetova O. O., Borzunov S. V., Meleshenko P. A. 2021. Self-oscillations in a system with hysteresis: the small parameter approach. *Eur. Phys. J. Spec. Top.* 230: 3565–3571. <https://doi.org/10.1140/epjs/s11734-021-00237-3>
36. Semenov M. E., Solovyov A. M., Meleshenko P. A., Reshetova O. O. 2020. Efficiency of hysteretic damper in oscillating systems *Mathematical Modelling of Natural Phenomena*, 15: 43. <https://doi.org/10.1051/mmnp/2019053>
37. Wen Y. K. 1976. Method of random vibration of hysteretic systems. *ASCE Journal of Engineering Mechanics*. 102(2): 249–263.

**Конфликт интересов:** о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

**Conflict of interest:** no potential conflict of interest related to this article was reported.

*Поступила в редакцию 03.03.2023*

*Поступила после рецензирования 14.04.2023*

*Принята к публикации 18.04.2023*

*Received 03.03.2023*

*Revised 14.04.2023*

*Accepted 18.04.2023*

---

#### СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

**Борзунов Сергей Викторович** – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры цифровых технологий, Воронежский государственный университет  
Университетская пл., 1, Воронеж, 394018, Россия

#### INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

**Sergei Borzunov** – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Digital Technologies, Voronezh State University, Voronezh, Russia

## Трёхэлектродная жидкокристаллическая ячейка с линзоподобными свойствами

Ю. П. Вирченко<sup>1</sup> , А. А. Довганюк<sup>2</sup> , Д. Д. Мачукаев<sup>2</sup> , С. И. Кучеев<sup>2</sup> 

<sup>1</sup> Белгородский государственный технологический университет им. В. Г. Шухова,  
Белгород, 308012, Россия

<sup>2</sup> Белгородский государственный национальный исследовательский университет,  
Белгород, 308015, Россия

E-mail: [kucheev@bsu.edu.ru](mailto:kucheev@bsu.edu.ru)

**Аннотация.** В работе описывается трёхэлектродная жидкокристаллическая ячейка с плавающим изолированным от жидкокристаллического слоя электродом. Экспериментально показано, что в постоянных электрических полях переориентация нематического жидкого кристалла начинается в окрестности анода, при этом граница между исходной и переориентированной областями жидкого кристалла остается не размытой в широком диапазоне напряжений. Область переориентированного жидкого кристалла проявляет линзоподобные свойства с цилиндрической симметрией, причём местоположение этой области линейно зависит от величины напряжения. Максимальное отклонение фрагментов лазерного луча, которые являются результатом проявления линзовых свойств и интерференции, может варьироваться в диапазоне не менее пары десятков градусов от первоначального направления, демонстрируя линейную зависимость от приложенного напряжения. Обсуждается влияние зарядовых процессов и предыстории ячейки на характер поведения области переориентации жидкого кристалла.

**Ключевые слова:** жидкокристаллическая линза, сканирование лучом, подвижность зарядов

**Для цитирования:** Вирченко Ю. П., Довганюк А. А., Мачукаев Д. Д., Кучеев С. И. 2023. Трёхэлектродная жидкокристаллическая ячейка с линзоподобными свойствами. Прикладная математика & Физика, 55(2): 157–165.

DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-2-157-165

Original Research

## Three-Electrode Liquid Crystal Cell With Lens-Like Properties

Yuri Virchenko<sup>1</sup> , Alexandr Dovganuk<sup>2</sup> , Deni Machukaev<sup>2</sup> 

Sergey Kucheev 

<sup>1</sup>Belgorod State Shukhov's Technological University,  
Belgorod, 308012, Russia

<sup>2</sup>Belgorod National Research University,  
Belgorod, 308015, Russia

E-mail: [kucheev@bsu.edu.ru](mailto:kucheev@bsu.edu.ru)

**Abstract.** The paper describes a three-electrode liquid crystal cell with a floating electrode isolated from the liquid crystal layer. It has been experimentally shown that in constant electric fields, the reorientation of a nematic liquid crystal begins in the vicinity of the anode, while the boundary between the initial and reoriented regions of the liquid crystal remains unblurred in a wide voltage range. The region of the reoriented liquid crystal exhibits lens-like properties with cylindrical symmetry, and the location of this region depends linearly on the magnitude of the voltage. The maximum deviation of the laser beam fragments, which are the result of lens properties and interference, can vary in the range of at least a couple of tens of degrees from the original direction, demonstrating a linear dependence on the applied voltage. The influence of charge processes and cell prehistory on the behavior of the liquid crystal reorientation region is discussed.

**Keywords:** Liquid Crystal Lens, Beam Steering, Charge Mobility

**For citation:** Virchenko Yuri, Dovganuk Alexandr, Machukaev Deni, Kucheev Sergey. 2023. Three-electrode liquid crystal cell with lens-like properties. Applied Mathematics & Physics, 55(2): 157–165. DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-2-157-165

---

**1. Введение.** Управление параметрами фронта световой волны (направление, амплитуда, фаза, поляризация) на сегодняшний день остается актуальной задачей. Это связано с необходимостью решать прикладные задачи, связанные с микрооптикой, лазерным сканированием, оптической коммуникацией, офтальмологией и т. д. Задачи, связанные с изменением направления волнового фронта лазерного

излучения, решаются как с помощью механических приборов (подвижные зеркала, в том числе микроскопы, призмы, линзы и т. п.), так и без механических элементов при помощи электрооптических материалов. К последним относятся жидкие кристаллы (ЖК), в которых анизотропные оптические свойства обусловлены коллективным поведением ориентированных молекул [9]. Чувствительность директора к широкому спектру факторов, например, электрическое и/или магнитное поле, световая волна [13], химико-биологические реагенты [2, 1, 6], а также влияние стенок, позволяет формировать в ЖК среде в заданное время в заданном месте необходимый профиль распределения коэффициента преломления. Для управления лазерным лучом наибольшие успехи достигнуты при формировании линзо- и/или призм-подобного распределения коэффициента преломления в ЖК. К настоящему времени предложено большое разнообразие двухэлектродных конструкций ЖК ячеек [4, 8, 15, 21, 23, 24] и используемых ЖК материалов, включая холестерики [11], стабилизированные полимерами нематики [14], голубые фазы [20]. Для достижения заданного распределения коэффициента преломления используются в основном два подхода, а именно, в первом подходе указанное распределение показателя преломления ЖК среды достигается за счёт использования аналогового распределения электрического поля за счёт «резистивных» решений [16, 3, 12, 17], тогда как второй подход можно условно назвать «цифровым» [7], когда достаточно большой набор микроэлектродов задают требуемое распределение электрического поля за счет фиксированной комбинации уровней напряжений на электродах. «Цифровой» подход доминирует для получения призм-подобного распределения для сканирования лазерного луча [10]. Очевидно, что отмеченные методы (особенно последний) заведомо страдают отсутствием дополнительной возможности параллельной обработки информации поскольку профиль потенциалов фактически формируется на внешних приборах или заранее predetermined, поэтому для перспективных сенсорных адаптирующихся оптических систем предпочтительны решения с ограниченной детерминированностью в управлении жидким кристаллом. Должна оставаться возможность влияния на ЖК среду других управляющих факторов. В предлагаемой работе продемонстрировано, что в трёхэлектродной ячейке при действии постоянным напряжением достигается линзоподобное свойство переориентированной области ЖК, причём помимо напряжения, управляющими могут выступать параметры, связанные с подвижной зарядовой подсистемой в ЖК.

**2. Эксперимент.** Исследования проводились с использованием жидкокристаллической структуры, схематично представленной на рис. 1.

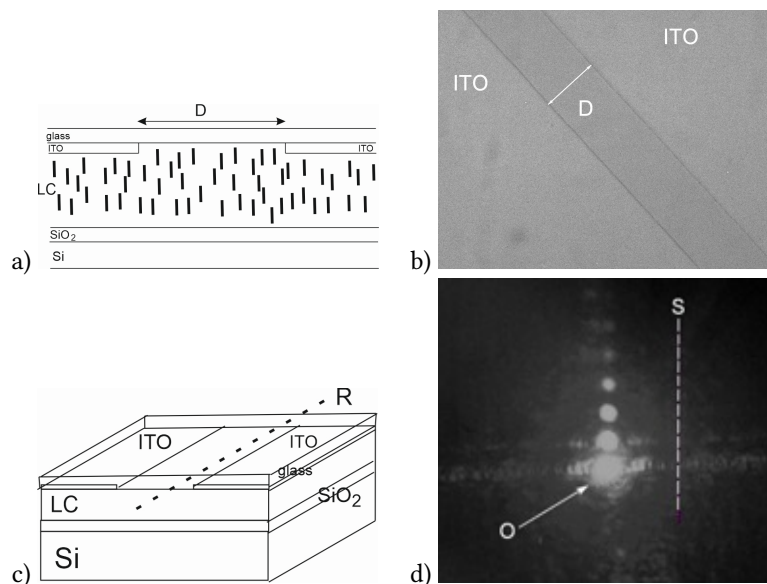


Рис. 1. Условия эксперимента. а) Экспериментальная ячейка (сечение). Si – плавающий электрод. SiO<sub>2</sub> – плёнка, изолирующая жидкий кристалл от электрода Si. LC – жидкий кристалл. D – зазор между электродами ITO, б) Изображение фрагмента ЖК ячейки с гомеотропно ориентированным нематическим жидким кристаллом 5CB в поляризованном свете, в) Элементы ЖК ячейки. R – направление вдоль границы электрода ITO, д) Изображение на экране «объекта» (светлые пятна от главного (O) и переотраженных лучей вдоль направления (S))

Fig. 1. Experiment conditions. a) Experimental cell (section). Si – a floating electrode. SiO<sub>2</sub> – a film that isolates the liquid crystal from the Si electrode. LC – liquid crystal. D – the gap between the ITO electrodes, b) Image of a fragment of an LC cell with a homeotropically oriented 5CB nematic liquid crystal in polarized light, c) LC cell elements. R – the direction along the ITO electrode boundary, d) Image on the screen of the "object" (light spots from the main (O) and re-reflected rays along the direction (S)).

Рассмотрим, что происходит с жидким кристаллом в ячейке при подключении постоянного напряжения к электродам ITO. При квазистационарном увеличении напряжения переориентация ЖК начинается

в окрестности анода, как под электродом ИТО, так и между электродами в зазоре D. При пороговых напряжениях размеры области переориентации ЖК под электродом ИТО превышают таковую в зазоре D, рис. 2а.

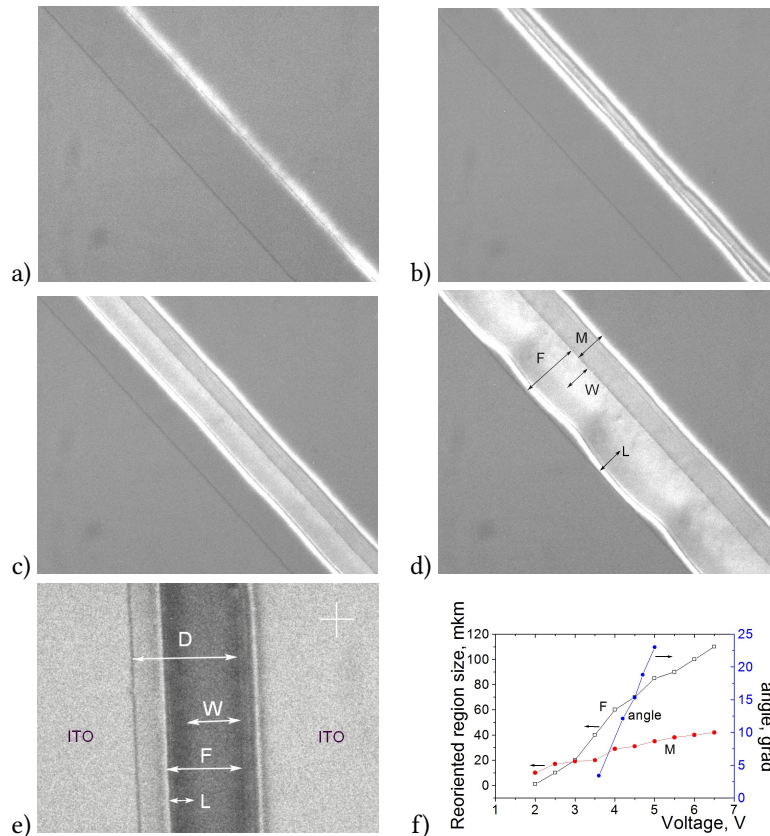


Рис. 2. Переориентация гомеотропно ориентированного жидкого кристалла 5CB в постоянном электрическом поле электродов ИТО. Напряжение (V, В): а) 2; б) 2.5; в) 3; д) 3.5. е) скрещенные поляризаторы параллельны (перпендикулярны) R. f) зависимость размеров переориентированных областей (F, M) и угла (angle) отклонения луча от напряжения

Fig. 2. Reorientation of a homeotropically oriented 5CB liquid crystal in a constant electric field of ITO electrodes. Voltage, V: a) 2; б) 2.5; в) 3; д) 3.5. e) Crossed polarizers are parallel (perpendicular) to R. f) — Dependence of the sizes of the reoriented regions (F, M) and the angle (angle) of beam deflection on voltage

Несимметричный характер переориентации ЖК относительно анода и катода, т.е. отсутствие переориентации в окрестности катода, говорит о неоднородном электрическом поле в зазоре D. Такая неоднородность электрического поля, по всей видимости, связана с совокупным влиянием механизмов электрической поляризации ЖК за счёт подвижных ионов и формированием положительных ионов на аноде, причём последний процесс можно рассматривать как процесс инжекции положительного заряда [5]. При дальнейшем увеличении напряжения область переориентированного ЖК продолжает расширяться, как в направлении к катоду, так и под ИТО электродом. На рис. 2f представлены зависимости размеров полос переориентированных областей F в зазоре D и области M под электродом ИТО от приложенного напряжения соответственно. Для обеих областей переориентированного ЖК наблюдается линейная зависимость от напряжения. Также видно, что в данном диапазоне напряжений размеры области M под ИТО электродом меньше, чем область F. Расширение области M при дальнейшем увеличении напряжения практически останавливается, что можно связать с тем, что электрическое поле под ИТО электродом вертикально и стабилизирует гомеотропную ориентацию ЖК, а имеющаяся деформация ЖК обусловлена только упругими силами, величина которых спадает по мере увеличения расстояния от фактической границы электрода ИТО.

Характерной особенностью переориентации ЖК в данной трёхэлектродной ячейке является то, что граница между исходной гомеотропной и переориентированной (F) областями всегда остаётся резкой и сохраняется таковой в любом месте зазора D, рис. 2. Этот факт объясняется стабилизирующей ролью плавающего электрода (Si) на гомеотропную ориентацию молекул ЖК из-за наличия на нём некоторого потенциала, который появляется вследствие перераспределения, приложенного к электродам ИТО напряжения.

В переориентированной области F (рис. 2) визуально можно выделить две полосы W и L, отличающиеся друг от друга интенсивностью отраженного света и своим строением. Более светлая полоса W



однородна и прилегает непосредственно к краю электрода (анода), рис. 2d, e. Более светлый фон этой полосы указывает на достижение директором в этой области более совершенной планарной ориентации. Полоса L представляет собой область, визуально состоящую из близко расположенных друг к другу узких интерференционно окрашенных полосок, хорошо различимых при низких напряжениях. Интерференционный спектр появляется из-за набега фазы между обыкновенным и необыкновенным лучами при начальном отклонении оптической оси в ЖК от вертикали. С увеличением напряжения ширина каждой полоски уменьшается, но количество их увеличивается, что в итоге приводит к их уплотнению при одновременном увеличении общей ширины полосы L.

Разбиение области переориентации F на указанные выше две полосы W и L с резкими и прямыми границами сохраняется в любом месте зазора D при её движении в сторону катода. Отметим, что с увеличением напряжения может появляться некоторая волнообразная неустойчивость полосы L (рис. 2d), что в большинстве случаев в постоянных полях указывает на электрогидродинамические процессы.

Стабилизирующая роль плавающего электрода (Si) заметным образом проявляется при изменении полярности приложенного к электродам напряжения. На рис. 3 приведены изображения фрагмента ЖК ячейки при переключении полярности.

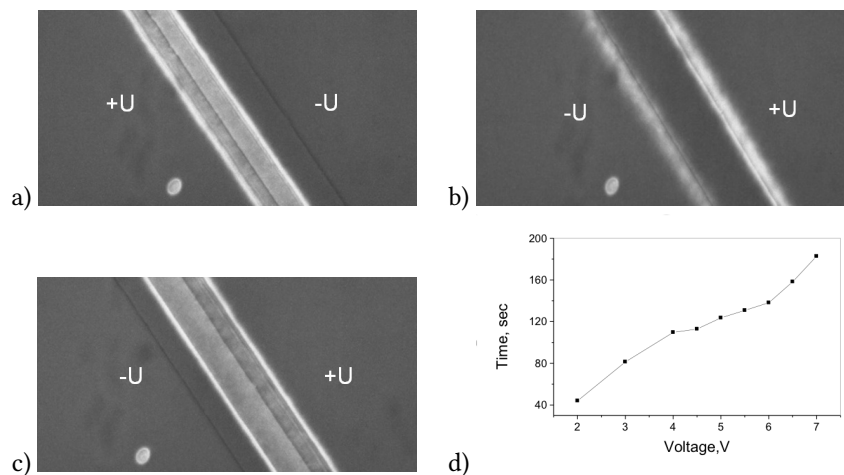


Рис. 3. Изменение полярности напряжения, приложенного к ITO электродам. а) Фрагмент ЖК ячейки перед переключением полярности напряжения. Время от момента переключения полярности напряжения, сек : а) 0, б) 100, с) 300. д) Зависимость времени установления стационарной картинке переориентации в первых циклах изменения полярности напряжения

Fig. 3. Changing the polarity of the voltage applied to the ITO electrodes. a) Fragment of an LC cell before switching the voltage polarity. Time period from the moment of voltage polarity switching, sec: a) 0, b) 100, c) 300. d) Dependence of the time of establishing a stationary reorientation picture in the first cycles of changing the voltage polarity

На приведенных иллюстрациях видно, что есть момент времени (рис. 3b), когда области переориентированного ЖК в окрестностях анода и катода практически одинаковы (симметричны), при этом ширина полос переориентированного ЖК под ITO электродами больше ширины переориентации ЖК в зазоре D.

Характерной особенностью перехода от одного стационарного распределения директора при одной полярности напряжения к другому распределению при другой полярности, является то, что этот процесс может занимать сотни секунд, рис. 3d. Принимая во внимание вышеупомянутое предположение, что несимметричность переориентации ЖК относительно анода и катода обусловлена неоднородностью электрического поля вследствие формирования объемного заряда, такое время согласуется с временем переноса носителей заряда. Для типичной ионной подвижности  $10^{-8} \div 10^{-11}$  м<sup>2</sup>/Вс [22, 19] и величины напряжения  $\sim 5$ В для зазора D оценка времени переноса заряда даёт  $\sim 1 \div 100$  сек. С учетом предполагаемой поляризации [18] это время только увеличится, что в общем случае наблюдается в экспериментах. На время установления ориентации ЖК влияет предыстория ячейки, а именно, длительность и величина ранее прикладываемого к ячейке напряжения. С увеличением значений этих двух параметров процессы переключения ориентации при изменении полярности напряжения занимают все больший промежуток времени. Можем допустить, что в механизм переключения ориентации при изменении полярности напряжения вовлечены процессы ионной самоочистки и переноса ориентанта (лецитина). Последний по мере увеличения общей длительности манипуляций с приложенным к ячейке напряжением, выносится из области зазора D в прилегающие области ячейки. Это, в свою очередь, увеличивает время формирования гомеотропной ориентации в соответствующем месте ячейки. О диффузии ориентанта с характерными временами порядка суток в ЖК ячейке в условиях отсутствия электрического поля сообщалось в [7]. Можно предположить, что в условиях описываемого эксперимента, т.е. с приложенным напряжением, подобный процесс переноса ориентанта может протекать более активно.

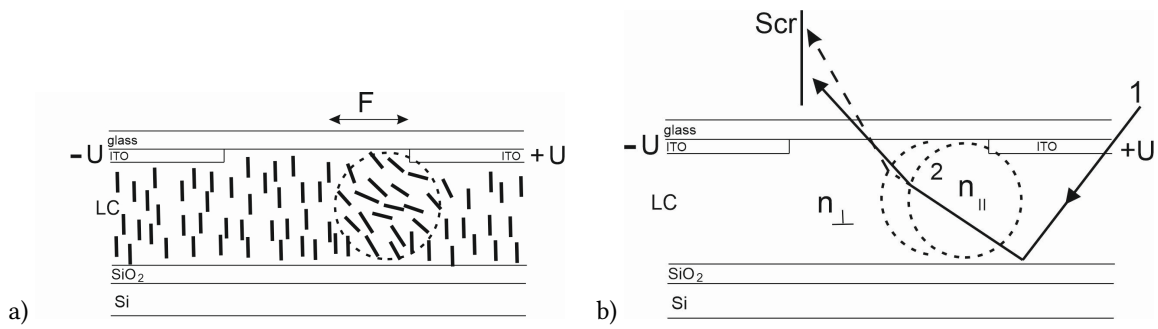


Рис. 4. ЖК ячейка с линзоподобным распределением директора. а) Схематическое распределение директора в окрестности анода. F – переориентированная область ЖК. б) Преломление фрагмента (1) луча в области (2) переориентированного ЖК с линзоподобными свойствами. Движение вверх преломлённого фрагмента луча по экрану Scr при перемещении «выпуклости» «линзы» влево с увеличением напряжения

Fig. 4. LC cell with lens-like director distribution. а) Schematic distribution of the director in the vicinity of the anode. F – The reoriented area of the LC. б) Refraction of a fragment (1) of a beam in the region (2) of a reoriented LC with lens-like properties. Upward movement of the refracted fragment of the beam along the screen Scr while moving the “bulge” of the “lens” to the left with increasing voltage

Рассмотрим качественно область переориентированного ЖК в окрестности анода, рис. 4аb. В сечении эта область приближенно имеет форму «двояковыпуклой линзы». Одна «выпуклость» направлена в сторону катода, вторая – под ITO электрод (анод). Такая форма обусловлена влиянием электрического поля электродов ITO и совокупным влиянием стенок и плавающего электрода. Последние стремятся сохранить исходную гомеотропную ориентацию молекул, тогда как электрическое поле электродов, с учетом процессов, приводящих к его неоднородности, переориентирует молекулы, причем переориентация осуществляется легче в середине слоя ЖК. Благодаря этому формируются вышеуказанные два «выступа» в профиле распределения переориентированного директора. С увеличением напряжения «выпуклости» возрастают и продвигаются в сторону катода и под анод, рис. 4аb, причём в последнее направление незначительно.

Проанализируем изображения, которые получаются на экране при прохождении лазерного луча («объекта») через область переориентированного ЖК. Первоначально, поворотом газоразрядной трубки, установим направление S под углом ~ 45 град. по отношению к направлению R. В этом случае «объект» располагается по отношению к ЖК таким образом, что в область переориентации F в основном попадает только главный луч(O).

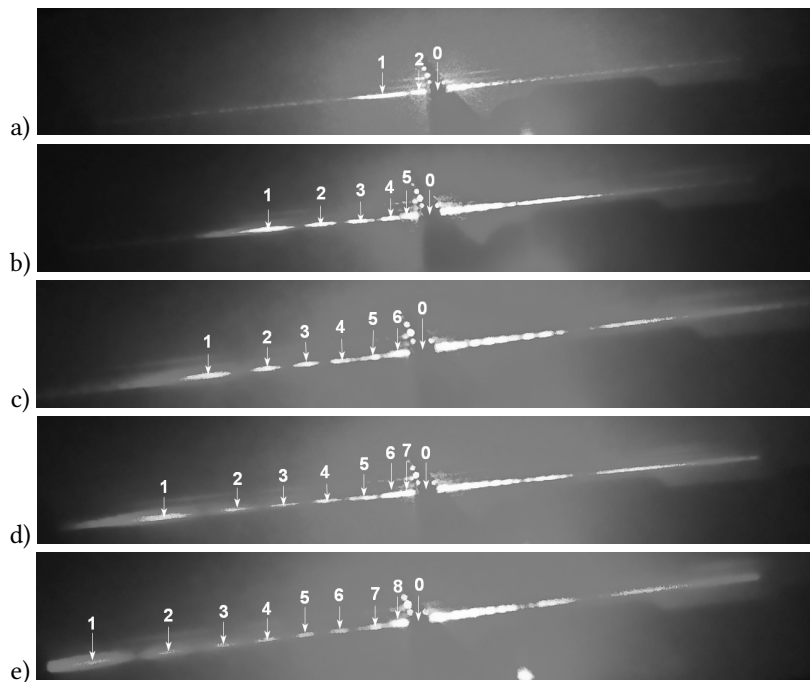


Рис. 5. Изображение «объекта» на экране после его оптического преобразования в полосе F переориентированного ЖК. Угол между S и R ~ 45 град. Напряжение, В: а) – 3,6; б) – 4,2; в) – 4,5; д) – 4,7; е) – 5. Главное пятно (0) затенено

Fig. 5. Image of the "object" on the screen after its optical transformation in the F band of the reoriented LC. Angle between S and R ~ 45deg. Voltage, V: а) – 3.6; б) – 4.2; в) – 4.5; д) – 4.7; е) – 5. The main spot (0) is shaded

На рис. 5 представлены изображения «объекта» на экране при нескольких значениях напряжения. Эти изображения получены, когда лазерный луч направлен на ячейку со стороны анода, через ИТО электрод, как схематически отображено на рис. 4b. Изображение представляет собой ряд размытых максимумов (далее пятен), лежащих на прямой, при этом картина их месторасположения относительно главного пятна 0 несимметрична. Картинка зеркально меняется относительно «0», если лазерный луч будет направлен на ЖК ячейку с другой стороны на область F, а именно, со стороны зазора D (этот случай не рассматривается). Проанализируем расположение пятен в изображениях на экране, которые лежат только по одну сторону (налево) от главного пятна «0», рис. 5. Это направление на экране соответствует направлению «вверх» на «scg» на рис. 4b. Как видно из приведенных иллюстраций, по мере увеличения напряжения появляются новые пятна, которые непрерывно перемещаются в сторону от центрального пятна «0». Такой характер поведения пятен можно объяснить следующим образом. С одной стороны, проявляются линзовые свойства области переориентации F. В результате этого луч расширяется, причём оптическая сила «линзы» растёт с увеличением напряжения. С другой стороны, имеет место интерференция, которая является причиной гашения интенсивности света между пятнами. Необходимо отметить, что появление отдельных различимых пятен и их движение совпадает с «уплотнением» полосы L в области переориентации F, рис. 2. Другими словами линзоподобными свойствами с интерференционным гашением обладает область L, в которой в каждой полоске имеет место набег фазы на  $2\pi$  при непрерывном отклонении директора от вертикали.

Рассмотрим особенности изменения угла отклонения лучей (пятен) от первоначального направления на примере первого луча, который сформировался первым и который дает на экране пятно с номером 1, рис. 5. Отклонения всех других лучей будут на меньшие углы. На рис. 2f представлена зависимость угла отклонения этого луча от первоначального направления от приложенного напряжения. Хорошо видно, что отклонение этого луча значительно, и составляет не менее пары десятков градусов в указанном диапазоне напряжений, при этом наблюдается линейная зависимость от приложенного напряжения. Этот факт указывает на потенциальную возможность решать задачи, связанные со сканированием лазерного излучения.

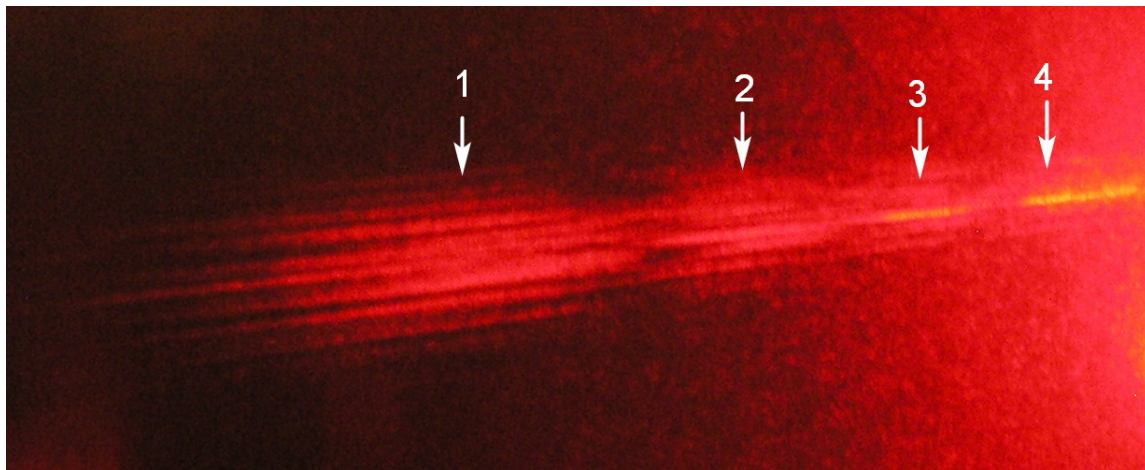


Рис. 6. Изображение «объекта», когда S и R параллельны. Напряжение 5В

Fig. 6. The image of the "object" when S and R are parallel. Voltage is 5V

Линзоподобные свойства переориентированной области ЖК с цилиндрической симметрией вдоль электрода ИТО можно увидеть, если установить газо-разрядную трубку, чтобы S было параллельно R. В этом случае все лучи «объекта» (рис. 1d) будут попадать в область переориентации ЖК. На приведенной иллюстрации, рис. 6, изображение «объекта» условно выглядит как ряд «стопок» (отмечены номерами 1, 2, 3, 4), каждая из которых состоит из некоторого количества горизонтальных полосок. Каждая «стопка» ведет себя аналогично поведению отдельно взятого пятна, о чём было дано описание выше к рис. 5, т.е. появляется при некотором напряжении и непрерывно перемещается по экрану от центрального пятна при увеличении напряжения. Совершенно очевидно, что в конкретной «стопке» определенная горизонтальная полоска соответствует конкретному переотраженному лучу «объекта» (рис. 1).

**3. Заключение.** Таким образом, экспериментально показано, что в трёхэлектродной ЖК ячейке, в которой один из электродов изолирован от ЖК слоя, является плавающим и стабилизирующим исходную гомеотропную ориентацию ЖК, переориентация молекул ЖК происходит в окрестности анода. Предполагается, что несимметричность переориентации относительно анода и катода обусловлена зарядовыми процессами, приводящими к неоднородному распределению электрического поля. Граница между областями переориентированного и исходного ЖК остается не размытой в широком диапазоне приложенного напряжения и демонстрирует линейную зависимость местоположения при перемещении

в сторону катода. Область переориентированного ЖК проявляет свойства линзы с цилиндрической симметрией с осью вдоль анода. Максимальные отклонения фрагментов лазерного луча после оптического преобразования в переориентированном ЖК насчитывают пару десятков градусов для рабочего диапазона напряжений и линейную зависимость.

#### Список литературы

1. Бердниченко А. В., Кучеев С. И. 2020. Доменная переориентация нематика в поле р-п перехода в сенсоре пара органических реагентов. Прикладная математика & Физика, 52(3): 214–223.
2. Валетова Е. А., Колесников Д. А., Кучеев С. И. 2017. Адсорбция и переориентация нематика на наноразмерной углеродной плёнке, индуцированная парами органических растворителей. Научные ведомости БелГУ. Серия: Математика. Физика, 50(1): 64–72.
3. Вдовин Г. В., Гуральник И. Р., Котова С. П., Локтев М. Ю., Наумов А. Ф. 1999. Жидкокристаллические линзы с перестраиваемым фокусным расстоянием. Квантовая электроника, 26(3): 256–260.
4. Грязнова М. В., Данилов В. В., Кузнецов Ю. А., Рыльков В. В., Шахвердов П. А., Хребтов А. И. 2001. Жидкокристаллические микролинзы в системе оптического ограничения. Письма в ЖТФ, 27(2):24–29.
5. Жакин А. И. 2006. Приэлектродные и переходные процессы в жидких диэлектриках. Успехи физических наук, 176(3): 289–310.
6. Каманин А. А., Каманина Н. В. 2006. Структурирование жидкокристаллической мезофазы, вызванное введением эритроцитов. Письма в ЖТФ, 32(14):25–32.
7. Кучеев С. И. 2016. Переключение ориентации нематика, обусловленное диффузией фосфолипида в МДП структуре. Научные ведомости БелГУ. Серия: Математика. Физика, 45(27(248)): 115–120.
8. Algorri J. F., Morawiak P., Bennis N., et al. 2020. Positive-negative tunable liquid crystal lenses based on a microstructured transmission line. Scientific reports, 10(1): 10153–10162.
9. Blinov L. M., Chigrinov V. G. 1993. Electrooptic Effects in Liquid Crystal Materials. New York. Springer, 464.
10. de Blas M. G., Geday M. A., Oton J. M., Arregui X. Q. 2021. Two-dimensional digital beam steering based on liquid crystal phase gratings. Applied Sciences, 11(8): 3632–3644.
11. Chang K., Varanytsia A., Chien L. 2017. Electrically tunable liquid crystal lens with suppressed axial chromatic aberration. Applied physics letters, 111(3): 033504–033509.
12. Chang Y., Jen T., Ting C., Huang Y. 2014. High-resistance liquid-crystal lens array for rotatable 2D/3D autostereoscopic display. Optics express, 22(3): 2714–2724.
13. Gunter P., Huignard J. 2007. Photorefractive Materials and Their Applications. New York. Springer, 626.
14. Fan Y., Ren H., Wu S. 2003. Switchable Fresnel lens using polymer-stabilized liquid crystals. Optics Express, 11(23): 3080–3086.
15. Feng W., Liu Z., Liu H., Ye M. 2023. Design of tunable liquid crystal lenses with a parabolic phase profile. Crystals, 13(1): 8–17.
16. Huang B., Huang S., Chuang C., Kuo C. 2020. Electrically-tunable blue phase liquid crystal microlens array based on a photoconductive film. Polymers, 12(1): 65–72.
17. Kaur S., Kim Y., Milton H., Mistry D., Syed I. M., Bailey J., Novoselov K. S., Jones J. C., Morgan P. B., Clamp J., Gleeson H. F. 2016. Graphene electrodes for adaptive liquid crystal contact lenses. Optics express, 24(8): 8782–8787.
18. Kovalchuk A. V. 2001. Relaxation processes and charge transport across liquid crystal–electrode interface. Journal of Physics: Condensed Matter, 13(46): 10333–10345.
19. Kucheev S. I. 2008. Transient current in nematic cells containing a silicon substrate. Journal of Physics: Condensed Matter, 20(27): 275222–275226.
20. Lin S., Huang L., Lin C., Kuo C. 2014. Polarization-independent and fast tunable microlens array based on blue phase liquid crystals. Optics express, 22(1): 925–930.
21. Munavar H. M., Doreswamy B. H., Shobha N. C., Vijayakumar V. N., Fakruddin K. 2019. Orientational order parameter of liquid crystalline nanocomposites by Newton’s rings and image analysis methods. Наносистемы: физика, химия, математика, 10(3): 243–254.
22. Naito H., Yoshida K., Okuda M., Sugimura A. 1994. Transient current study of ultraviolet-light-soaked states in n-pentyl-p-n-cyanobiphenyl. Japanese Journal of Applied Physics, 33(10): 5890–5891.
23. Ren H., Fox D. W., Wu B., Wu S. 2007. Liquid crystal lens with large focal length tunability and low operating voltage. Optics Express, 15(18): 11328–11335.
24. Subota S. L., Reshetnyak V. Yu., Ren H., Wu S. 2010. Tunable-focus liquid crystal lens with non-planar electrodes. Molecular Crystals and Liquid Crystals, 526(1): 93–100.

## References

1. Berdnichenko A. V., Kucheev C. I. 2020. Domennaya pereorientatsiya nematika v pole p-n perekhoda v sensore para organicheskikh reagentov [Domain reorientation of nematic in p-n junction field in sensor of organic reagents vapor]. *Applied Mathematics & Physics*, 52(3): 214–223.
2. Valetova E. A., Kolesnikov D. A., Kucheev S. I. 2017. Adsorbtsiya i pereorientatsiya nematika na nanorazmernoy uglerodnoy plyonke, indutsirovannaya parami organicheskikh rastvoriteley [Adsorption and reorientation of a nematic on a nanoscale carbon film induced by vapors of organic solvents]. *Belgorod State University Scientific bulletin. Series: Mathematics. Physics*, 50(1): 64–72.
3. Vdovin G. V., Guralnik I. R., Kotova S. P., Loktev M. U., Naumov A.F. 1999. Zhidkokristallicheskie linzy s perestraivaemym fokusnim rasstoyaniem [Liquid crystal lenses with adjustable focal length]. *Quantum Electronics*, 26(3): 256–260.
4. Gryaznova M. V., Danilov V. V., Kuznetsov U. A., Rylkov V. V., Shahverdov P. A., Hrebtov A. I. 2001. Zhidkokristallicheskie mikrolinzy v sisteme opticheskogo ogranicheniya [Liquid crystal microlenses in an optical confinement system]. *Technical Physics Letters*, 27(2): 24–29.
5. Zhakin A. I. 2006. Prielektrodnnye i perekhodnye protsessy v zhidkikh dielektrikah [Near-electrode and transient processes in liquid dielectrics]. *Advances in Physical Sciences*, 176(3): 289–310.
6. Kamanin A. A., Kamanina N. V. 2006. Strukturirovanie zhidkokristallicheskoj mezofazy, vyzvannoe vvedeniem eritrotsitov [Structuring of the liquid crystal mesophase caused by the introduction of erythrocytes]. *Technical Physics Letters*, 32(14): 25–32.
7. Kucheev S. I. 2016. Pereklucheniye orientatsiyi obuslovlennoe diffuziyey fosfolipida v MDP strukture [Nematic orientation switching due to phospholipid diffusion in the MIS structure]. *Belgorod State University Scientific bulletin. Series: Mathematics. Physics*, 45(27(248)):115–120.
8. Algorri J. F., Morawiak P., Bennis N., et al. 2020. Positive-negative tunable liquid crystal lenses based on a microstructured transmission line. *Scientific reports*, 10(1): 10153–10162.
9. Blinov L. M., Chigrinov V. G. 1993. *Electrooptic effects in liquid crystal materials*. New York. Springer, 464.
10. de Blas M. G., Geday M. A., Oton J. M., Arregui X. Q. 2021. Two-dimensional digital beam steering based on liquid crystal phase gratings. *Applied Sciences*, 11(8): 3632–3644.
11. Chang K., Varanytsia A., Chien L. 2017. Electrically tunable liquid crystal lens with suppressed axial chromatic aberration. *Applied physics letters*, 111(3): 033504–033509.
12. Chang Y., Jen T., Ting C., Huang Y. 2014. High-resistance liquid-crystal lens array for rotatable 2D/3D autostereoscopic display. *Optics express*, 22(3): 2714–2724.
13. Gunter P., Huignard J. 2007. *Photorefractive materials and their applications*. New York. Springer, 626.
14. Fan Y., Ren H., Wu S. 2003. Switchable Fresnel lens using polymer-stabilized liquid crystals. *Optics Express*, 11(23): 3080–3086.
15. Feng W., Liu Z., Liu H., Ye M. 2023. Design of tunable liquid crystal lenses with a parabolic phase profile. *Crystals*, 13(1): 8–17.
16. Huang B., Huang S., Chuang C., Kuo C. 2020. Electrically-tunable blue phase liquid crystal microlens array based on a photoconductive film. *Polymers*, 12(1): 65–72.
17. Kaur S., Kim Y., Milton H., Mistry D., Syed I.M., Bailey J., Novoselov K.S., Jones J.C., Morgan P.B., Clamp J., Gleeson H.F. 2016. Graphene electrodes for adaptive liquid crystal contact lenses. *Optics express*, 24(8): 8782–8787.
18. Kovalchuk A. V. 2001. Relaxation processes and charge transport across liquid crystal–electrode interface. *Journal of Physics: Condensed Matter*, 13(46): 10333–10345.
19. Kucheev S.I. 2008. Transient current in nematic cells containing a silicon substrate. *Journal of Physics: Condensed Matter*, 20(27): 275222–275226.
20. Lin S., Huang L., Lin C., Kuo C. 2014. Polarization-independent and fast tunable microlens array based on blue phase liquid crystals. *Optics express*, 22(1): 925–930.
21. Munavar H. M., Doreswamy B. H., Shobha N. C., Vijayakumar V. N., Fakruddin K. 2019. Orientational order parameter of liquid crystalline nanocomposites by Newton's rings and image analysis methods. *Nanosystems: Physics, Chemistry, Mathematics*, 10(3): 243–254.
22. Naito H., Yoshida K., Okuda M., Sugimura A. 1994. Transient current study of ultraviolet-light-soaked states in n-pentyl-p-n-cyanobiphenyl. *Japanese Journal of Applied Physics*, 33(10): 5890–5891.
23. Ren H., Fox D. W., Wu B., Wu S. 2007. Liquid crystal lens with large focal length tunability and low operating voltage. *Optics Express*, 15(18): 11328–11335.
24. Subota S. L., Reshetnyak V.Yu., Ren H., Wu S. 2010. Tunable-focus liquid crystal lens with non-planar electrodes. *Molecular Crystals and Liquid Crystals*, 526(1): 93–100.

**Конфликт интересов:** о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

**Conflict of interest:** no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 03.03.2023  
Поступила после рецензирования 15.04.2023  
Принята к публикации 19.04.2023

Received 03.03.2023  
Revised 15.04.2023  
Accepted 19.04.2023

---

#### СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

**Вирченко Юрий Петрович** – доктор физико-математических наук, профессор, Белгородский государственный технологический университет им. В. Г. Шухова  
ул. Костюкова, 46, Белгород, 308012, Россия

**Довганюк Александр Александрович** – магистрант, Белгородский государственный национальный исследовательский университет  
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия

**Мачукаев Дени Даудович** – магистрант, Белгородский государственный национальный исследовательский университет  
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия

**Кучеев Сергей Иванович** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической и экспериментальной физики, Белгородский государственный национальный исследовательский университет  
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия

#### INFORMATION ABOUT THE AUTHORS




**Yuri Virchenko** – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Belgorod State Technological Shukhov's University, Belgorod, Russia

**Alexandr Dovganuk** – Undergraduate, Belgorod National Research University, Belgorod, Russia

**Deni Machukaev** – Undergraduate, Belgorod National Research University, Belgorod, Russia

**Sergey Kucheev** – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Theoretical and Experimental Physics, Belgorod National Research University, Belgorod, Russia

## Теоретический анализ работы джозефсоновских криотронов

Г. В. Аверин<sup>1</sup> , А. О. Спицын<sup>2</sup> , М. В. Шевцова<sup>2</sup> 

(Статья представлена членом редакционной коллегии Ю. П. Вирченко)

<sup>1</sup> Донецкий национальный университет,  
Донецк, 283001, ДНР

<sup>2</sup> Белгородский государственный национальный исследовательский университет,  
Белгород, 308015, Россия

E-mail: [1380576@bsu.edu.ru](mailto:1380576@bsu.edu.ru)

**Аннотация.** Рассмотрены различные схемы работы джозефсоновских криотронов, технологии их изготовления и способы эксплуатации; изучено решение вопросов стабильности работы логических вентилях, в основе которых лежит эффект Джозефсона, и предельно допустимых геометрических параметров криотрона. Построена вольт-амперная характеристика джозефсоновского криотрона с четырьмя устойчивыми режимами работы; составлена система дифференциальных уравнений, определяющих переходную характеристику криотронов с заданными параметрами в условиях гелиевых и азотных температур; предложены рекомендации по улучшению характеристик джозефсоновских криотронов, а также обозначены перспективы дальнейших исследований.

**Ключевые слова:** джозефсоновский криотрон, логический элемент, LCJC (логический управляемый джозефсоновский контакт), криоэлектроника

**Для цитирования:** Аверин Г. В., Спицын А. О., Шевцова М. В. 2023. Теоретический анализ работы джозефсоновских криотронов. Прикладная математика & Физика, 55(2): 166–175.

DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-2-166-175

Original Research

## Theoretical analysis of the work of Josephson cryotrons

Gennady Averin<sup>1</sup> , Aleksey Spitsyn<sup>2</sup> , Maria Shevtsova<sup>2</sup> 

(Article submitted by a member of the editorial board Yu. P. Virchenko)

<sup>1</sup> Donetsk National University,  
Donetsk, 283001, DNR

<sup>2</sup> Belgorod National Research University,  
Belgorod, 308015, Russia

E-mail: [1380576@bsu.edu.ru](mailto:1380576@bsu.edu.ru)

**Abstract.** Various schemes of operation of Josephson cryotrons, technologies for their manufacture and methods of operation are considered; the solution of questions of the stability of the operation of logic gates, which are based on the Josephson effect, and the maximum permissible geometrical parameters of the cryotron, have been studied. The volt-ampere characteristic of the Josephson cryotron with four stable operating modes has been constructed; a system of differential equations was compiled that determines the transient response of cryotrons with given parameters under conditions of helium and nitrogen temperatures; recommendations for improving the characteristics of Josephson cryotrons are proposed, and prospects for further research are outlined.

**Keywords:** Josephson Cryotron, Logic Element, LCJC (logical controlled Josephson contact), Cryoelectronics

**For citation:** Averin Gennadiy, Spitsyn Aleksey, Shevtsova Maria. 2023. Theoretical analysis of the work of Josephson cryotrons. Applied Mathematics & Physics, 55(2): 166–175. DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-2-166-175

**1. Введение.** В настоящее время существуют сверхпроводящие логические элементы, работающие на эффекте Джозефсона с бинарной логикой. Для работы устройств, имеющих более двух устойчивых рабочих состояний, потребуется использовать управляющие шины-электроды.

Наиболее компромиссным техническим решением такой задачи является джозефсоновский криотрон. Он состоит из джозефсоновского перехода, управляющей шины и экрана, который нивелирует действие внешних полей на переход [1]. Самый главный недостаток такого устройства заключается

в высокой сложности его производства. В отличие от криотронов с бинарной логикой, простейший джозефсоновский криотрон является, по меньшей мере, пятислойной конструкцией. Минимальный набор базовых элементов джозефсоновского криотрона имеет вид: screen – insulator – superconductor – insulator – conductor; а также дополнительно необходима особая схема для питания управляющей шины.

Многие конструкции джозефсоновских криотронов имеют существенные недостатки, в том числе и технологического характера. Перечислим основные недостатки базисных элементов криоэлектроники.

В качестве первого недостатка выделим высокую степень сложности технологий изготовления криоэлектронных устройств. Джозефсоновские переходы вполне могут быть изготовлены методом фотолитографии сверхпроводниковой дорожки, например, из  $(\text{BiPb})_2\text{Sr}_2\text{Ca}_2\text{Cu}_3\text{O}_{10}$  на подложке из MgO [3]. Но существенным минусом данного метода является отсутствие функции экранирования и управления джозефсоновским переходом.

Второй существенный недостаток заключается в устойчивости к деградации параметров. Конструкцию джозефсоновского криотрона можно упростить, совместив функции экрана и управляющей шины путём объединения их в сверхпроводящую дорожку, которая наносится на поверхность подложки под джозефсоновский переход, соединяясь с ним последовательно [4]. Но такая организация структуры не позволяет устранить в долгосрочной перспективе действие разрушительных эффектов [7] диффузии, Киркендалла, Френкеля – Конторовой, крипа потока и т.д. Очевидно, что основной причиной деструктуризации логического элемента и утраты его способности выполнять свою роль с течением времени является непосредственный контакт всех образующих его слоёв, в которых происходят указанные выше эффекты. Эти проблемы особенно актуальны, когда речь идёт о длительных космических миссиях, где бесперебойное функционирование электронной аппаратуры в условиях сильного радиационного шума на протяжении всего времени исследования является важнейшей задачей. Так как если какой-то из основных управляющих узлов электроники перестаёт работать вследствие, например, неизбежной деструктуризации контакта, то, разумеется, вся система в целом может полностью выйти из строя. К перечисленным механизмам деструктуризации в данном случае необходимо добавить и космическое излучение (радиацию). А в силу того, что проходимые зондами расстояния в космических миссиях весьма значительные, то осуществление своевременного ремонта возникших неполадок на месте просто не представляется возможным.

Третьим недостатком является довольно большой размер структурных элементов криоэлектронных устройств, в сравнении с полупроводниковыми аналогами. Важной точкой развития криоэлектроники является её конкурентоспособность в создании интегральных схем малых размеров. На данный момент одной из самых сложных задач является уменьшение размера джозефсоновского перехода [19], являющегося нелинейным элементом сверхпроводящих цепей. По сравнению с современным транзистором площадь перехода в настоящее время более чем на два порядка больше. Решение вопроса уменьшения размеров криоэлектронных устройств ведёт к значительному успеху развития данной отрасли.

В работе выполнен теоретический анализ работы джозефсоновского криотрона и на основании этого анализа выработаны рекомендации по его усовершенствованию.

**2. Построение вольт-амперной характеристики LCJC.** Определим все возможные режимы устойчивой работы LCJC путём построения вольт-амперной характеристики (ВАХ) джозефсоновского перехода. Будем для простоты сначала исходить из классической многослойной геометрии джозефсоновского криотрона: screen – insulator – superconductor – insulator – conductor, постепенно внося корректировки. Схема LCJC представлена на рисунке 1.

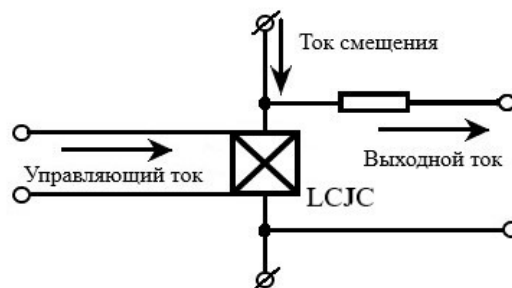


Рис. 1. Структурная схема LCJC – логического вентиля, базирующегося на эффекте Джозефсона

Fig. 1. Block diagram of an LCJC – logic gate based on the Josephson effect

В случае, когда ток криотрона меньше критического – сопротивление нижней сверхпроводниковой дорожки нулевое. Тогда общее состояние криотрона предписывается состоянием джозефсоновского перехода верхней дорожки.



Поведение джозефсоновского перехода – его ВАХ, в отсутствии магнитного поля задаётся уравнениями (1-3) для случаев стационарного ( $I < I_0$ ) и нестационарного эффектов Джозефсона ( $I \geq I_0$ ):

$$I < I_0 : U = 0, \quad (1)$$

$$I = I_0 : U = U_0 = I_0 R, \quad (2)$$

$$I > I_0 : U = R \sqrt{I^2 - I_0^2}, \quad (3)$$

где  $R$  – сопротивление джозефсоновского перехода в нормальном состоянии, которое можно определить через тангенс угла наклона ВАХ  $\alpha$ , как  $R = 1/\operatorname{tg} \alpha$ ;  $I_0$  – максимальный туннельный сверхток при нулевом напряжении (критический ток). Однако, стоит отметить, что тепловые эффекты при конечных напряжениях способны резко уменьшить эффективное значение  $I_0$  в сопоставлении с током, который был необходим для достижения резистивного состояния первоначально. Влияние температурных флуктуаций, размывающих значение  $I_0$ , очень важно учитывать, особенно при проектировании логических элементов (создании математической модели), так как фоновые шумы не должны серьёзным образом влиять на их работу.

Величина тока куперовских пар через джозефсоновский контакт при наличии магнитного поля становится функцией этого поля [9]. В рассматриваемом нами случае поле прикладывается параллельно плоскости перехода, поэтому выражение для тока туннелирования имеет вид:

$$I(\Phi) = I_0 \sin \gamma(0) \left[ \sin \frac{\pi \Phi}{\Phi_0} \cdot \left( \frac{\pi \Phi}{\Phi_0} \right)^{-1} \right], \quad (4)$$

где  $\Phi$  – полный магнитный поток в площади джозефсоновского перехода,  $\Phi_0 = h/2e$  – квант магнитного потока,  $\Phi_0 = 2,07 \cdot 10^{-15}$  Вб,  $\gamma(0)$  – разность фаз  $\Delta\phi$  в центре перехода; обычно её устанавливают так, чтобы ток в переходе совпадал с током, который задан внешним источником.

Величину максимального тока пар можем получить из уравнения (4), учтя, что  $|\sin \gamma(0)| \leq 1$ , получим:

$$I_{max} = I_0 \left| \sin \frac{\pi \Phi}{\Phi_0} \cdot \left( \frac{\pi \Phi}{\Phi_0} \right)^{-1} \right|. \quad (5)$$

Магнитный поток рассчитаем, как:

$$\Phi = BS = BZ_{\Pi} Y_{\Pi}, \quad (6)$$

где  $B$  – индукция магнитного поля,  $S$  – площадь джозефсоновского перехода, а  $Z_{\Pi}$  и  $Y_{\Pi}$  – его высота и ширина, соответственно.

Продолжая рассмотрение классического случая слоистой конструкции, в которой магнитное поле создаётся током  $I$  в нижней сверхпроводниковой дорожке, найдём выражение для индукции. В первом приближении можно использовать закон Био – Савара – Лапласа для случая бесконечно длинного проводника с током:

$$B = \frac{\mu_d \mu_0 I}{2\pi b_d}, \quad (7)$$

где  $\mu_0$  – магнитная постоянная;  $\mu_d$  – величина магнитной проницаемости диэлектрика;  $b_d$  – толщина диэлектрического слоя.

С учетом выражения (5) для  $I_{max}$  уравнение (3) примет вид:

$$U = R \sqrt{I^2 - I_0^2} \cdot \left| \frac{\sin \frac{\pi \Phi}{\Phi_0}}{\left( \frac{\pi \Phi}{\Phi_0} \right)} \right|^2. \quad (8)$$

Исходя из вида уравнения (8), минимум тока через криотрон  $I_{min}$  будет соответствовать следующему условию:

$$\Phi = \Phi_0,$$

тогда с учетом (6) и (7) выражение для минимального тока примет вид:

$$I_{min} = \frac{2\pi \Phi_0}{\mu_0} \frac{b_d}{\mu_d Z_{\Pi} Y_{\Pi}}.$$

Из уравнения (8) найдём минимальное напряжение на криотроне:

$$U_{min} = R I_{min} = \frac{2\pi \Phi_0}{\mu_0} \frac{b_d}{\mu_d Z_{\Pi} Y_{\Pi}} R.$$

Сделаем оценку величины максимального тока в криотроне  $I_{max}$  из следующего уравнения:

$$I_{max} = I_0 + I_{min},$$

тогда максимум напряжения на криотроне  $U_{max}$  можно будет рассчитывать как:

$$U_{max} = I_{max}R = I_0R + U_{min}.$$

Обобщая полученные результаты, охарактеризуем основные четыре состояния ВАХ подобного криотрона:

1.  $I_1 < I_0 : U_1 = 0,$
2.  $I_2 = I_0 : U_2 = U_0,$
3.  $I_3 = I_{max} = I_0 + \frac{2\pi\Phi_0}{\mu_0} \frac{b_d}{\mu_d Z_{II} Y_{II}}; U_3 = U_{max} = R(I_0 + \frac{2\pi\Phi_0}{\mu_0} \frac{b_d}{\mu_d Z_{II} Y_{II}}),$
4.  $I_4 = I_{min} = \frac{2\pi\Phi_0}{\mu_0} \frac{b_d}{\mu_d Z_{II} Y_{II}}; U_4 = U_{min} = \frac{2\pi\Phi_0}{\mu_0} \frac{b_d}{\mu_d Z_{II} Y_{II}} R.$

Анализируя данные соотношения, видим, что состояния криотрона задаются протекающим током и его параметрами:  $b_d$  – толщиной слоя диэлектрика,  $Z_{II}$  – высотой перехода,  $Y_{II}$  – шириной перехода,  $\mu_d$  – величиной магнитной проницаемости диэлектрика.

Полученные зависимости между токами и напряжениями можно отобразить графически, построив ВАХ (рис. 2). Она имеет особенность:  $U_{min} < U_{max}$ , которая объясняется лучшей наглядностью отображения всех рабочих состояний.

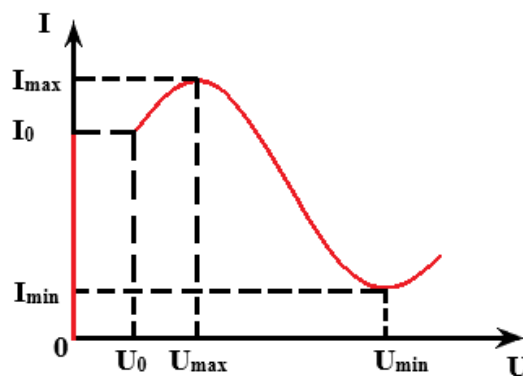


Рис. 2. ВАХ джозефсоновского криотрона с заданными состояниями  
Fig. 2. Current-voltage characteristic of a Josephson cryotron with specified states

Проанализируем различные способы формирования заявленной ВАХ, опираясь на рассмотрение основных конструктивных особенностей нашей разработки и технологий, позволяющих создавать реальные устройства с требуемыми параметрами.

**3. Конструктивные особенности LCJS.** Для решения обозначенных в работе проблем в сфере криоэлектроники необходимо изначально определиться с конструктивными особенностями LCJS (logical controlled Josephson contact). Это необходимо выполнить перед созданием соответствующей математической модели, в целях более высокой корреляции с разрабатываемой теоретической моделью.

Одним из способов сформировать заявляемую ВАХ (рис. 2) является применение при изготовлении элемента метода магнетронного распыления и атомно-силового микроскопа [3], который будет формировать область джозефсоновского перехода в верхней сверхпроводниковой дорожке. Также не стоит отбрасывать методы ионно-лучевого осаждения – фрезерование сфокусированным ионным пучком обеспечивает достаточное пространственное разрешение для воспроизводимого формирования рисунка джозефсоновского перехода.

Стоит отметить ещё один схожий приемлемый способ изготовления слабой связи с плёнкой из высокотемпературных сверхпроводников (ВТСП). Он заключается в изготовлении сверхпроводниковой дорожки со слабой связью путем фотолитографии, причём сверхпроводящее состояние в области слабой связи подавляется направленным облучением сверхпроводниковой дорожки электронным лучом [5]. В этом случае ускоренные электроны будут создавать радиационные дефекты, а необходимая доза облучения лежит, как правило, в пределах  $10^{-19} - 10^{20} \text{ см}^{-2}$ , но для каждого материала требуется детальное рассмотрение. Энергия электронов задаётся, в первую очередь, исходя из типа ВТСП и толщины пленки. Так, например, для рассматриваемой в нашем случае плёнки из системы  $\text{BiPbSrCaCuO}$  с толщиной  $\sim 0,5 \text{ мкм}$  энергия электронов должна составлять 80-120 кэВ. Критическая температура

сформированной плёнки на характерных подложках равна  $T_C \approx 90\text{K}$ . Материалом подложки могут служить  $\text{MgO}$ ,  $\text{ZrO}_2$ , монокристаллический сапфир,  $\text{SrTiO}_3$ ,  $\text{YSZ}$  и другие. Важным преимуществом бикристаллических переходов является отсутствие гистерезиса на их ВАХ, так как это обстоятельство устраняет необходимость шунтирования, что упрощает технологическое производство.

При реализации перечисленных способов изготовления джозефсоновского криотрона верхняя (с областью джозефсоновского перехода) и нижняя сверхпроводниковые дорожки будут иметь гальваническую связь. В этом и заключается геометрическая модификация (рис. 3). Установить основные параметры криотрона можно путём рассмотрения ВАХ джозефсоновского перехода.

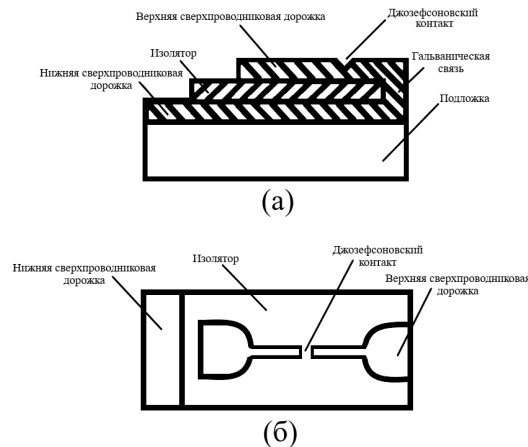


Рис. 3. Геометрическая схема джозефсоновского криотрона: (а) – в разрезе, (б) – вид сверху  
Fig. 3. Geometric scheme of the Josephson cryotron: (a) – in section, (б) – top view

Технически реализуемый минимальный предел диапазонов варьирования геометрических параметров криотрона, в целом, зависит от уровня литографической техники, но имеет и принципиально не зависящий от используемых технологий барьер чисто физического характера. Сущность этого ограничения заключается в том, что свойства ультратонких сверхпроводящих плёнок отличаются от их объёмных аналогов. При уменьшении толщины сверхпроводящего слоя  $d$  происходит подавление критической температуры  $T_C$ , плотности критического тока  $j_C$  и критической напряжённости магнитного поля  $H_C$ . Так как длина когерентности  $\xi$  является функцией  $d$  со скачком при  $\xi \sim d \sim 5\text{ нм}$  [13], то будем считать недопустимыми величины толщин джозефсоновского контакта, которые удовлетворяют неравенству  $d \lesssim 10\text{ нм}$ . Если говорить о характерных величинах площади LCJS – известно, что «при ширине токоведущих шин  $W$  минимальная площадь криотрона может быть равна  $4W^2$ » [2], но предельно возможная плотность упаковки всех слоёв джозефсоновского криотрона будет задаваться не только его минимальными геометрическими размерами, но и предельно допустимой тепловой нагрузкой – величиной среднего перегрева, а также размером соответствующих элементов соединительных цепей. Эти параметры не играют особой роли в асинхронных схемах, где переключение происходит одновременно (адресные запоминающие устройства), но в устройствах, в которых практически все элементы задействованы одновременно, они становятся определяющими.

Термический гистерезис возникает при нагреве, возникающем в процессе перехода джозефсоновского контакта в резистивное состояние, и обычно наблюдается для контактов с критическими токами  $I_0 > 20\text{ мкА}$  [16, 20]. Снизить отрицательное влияние, вызванное тепловыми потерями, можно путём уменьшения критических токов перехода, например, с помощью ионно-лучевого травления [15], но в этом случае необходимо соблюдать баланс и не забывать про предельно допустимые геометрические размеры, заложенные в дизайне структуры, так как если толщина или ширина перехода становятся сравнимыми с размером зерна в поликристаллической сверхпроводящей плёнке – разброс критических токов значительно увеличивается. Увеличение ширины перехода  $Y_{II}$  приводит к отклонению от идеального джозефсоновского поведения  $I(\phi)\sin(\phi)$  и при значениях, превышающих длину когерентности  $\xi$  в 3,5 раза, характеристики  $I(\phi)$  могут стать многозначными [11]. В работе [17] было проведено тщательное исследование наиболее распространенных типов джозефсоновских переходов на предмет их масштабируемости, которое показало, что существуют перспективы миниатюризации переходов с геометрией перемычек, обладающих переменной толщиной.

Довольно очевидным фактом, как уже отмечалось выше, является отрицательное длительное воздействие радиации на работу криоэлектроники. Например, молекулярно-динамическое моделирование радиационного повреждения сверхпроводника  $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$ , проводимое в работе [12], показало, что длительное накопление дефектов в плоскостях  $\text{CuO}_2$  вызывает деградацию сверхпроводящего состояния. В свою очередь, стабильность работы криотронов определяется как целостностью самой внутренней

рабочей структуры, так и постоянством её начальных характеристик, которые неразрывно с ней связаны. Разрушительное действие радиации можно сократить, увеличив зону и силу экранирования.

Как известно, одним из способов повышения критических токов является пиннинг. В работе [6] отмечается, что наиболее важными техническими моментами, которые необходимо успешно реализовать при пиннинге, являются создание и строгий контроль изолированных кластеров сверхпроводящей и нормальной фаз сверхпроводящего образца. В настоящее время существует большое количество различных способов закрепления вихрей Абрикосова, которые описаны, например, в работах [6, 10, 18]. Основная задача в ходе применения механизма пиннинга заключается в формировании сверхпроводящего перколяционного кластера, представляющего собой совокупность слабосвязанных мезоскопических сверхпроводящих островков.

В ходе исследования влияния искусственных центров пиннинга в виде нановключений  $\text{BaSnO}_3$  (BSO) и  $\text{BaZrO}_3$  (BZO) на критический ток высокотемпературных сверхпроводящих лент второго поколения (2G) на основе пленок  $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-\delta}$  (YBCO) было обнаружено [14], что введение нановключений  $\text{BaZrO}_3$  увеличивает критический ток при 77 К для направления магнитного поля, параллельного и нормального к поверхности ленты, в то время как введение нановключений  $\text{BaSnO}_3$  уменьшает критический ток в обоих случаях. Всё объясняется тем, что введение нановключений  $\text{BaZrO}_3$  увеличивает жесткость связей медь-кислород в сверхпроводящей плоскости  $\text{CuO}_2$  и минимизирует их статический беспорядок в матрице YBCO, в то время как введение нановключений  $\text{BaSnO}_3$  приводит к значительному увеличению статического беспорядка при относительно слабом влиянии на жесткость связей  $\text{Cu-O}$ . Эти изменения в локальной структуре становятся решающими для изменения макроскопических свойств ВТСП-лент.

Таким образом, при аналитическом подборе материалов стоит учитывать механизм пиннинга, геометрические особенности и размеры элементов криотрона, а также технологии его изготовления.

**4. Переходные характеристики LCJS.** Под переходной характеристикой, определяющей эффективность работы логического вентиля, будем понимать функциональную зависимость  $U(t)$  при смене логических состояний джозефсоновского криотрона [8].

Исследуем особенности переходных процессов в джозефсоновском криотроне методами математического моделирования, в целях выявления критических зависимостей и определения интервалов стабильной работы криотрона, его предельных характеристик.

Основной математической модели логических переходов в криотронах на эффекте Джозефсона является дифференциальное уравнение:

$$I(t) = I_0 \sin \gamma(t) + C \frac{\hbar}{2e} \frac{d^2 \gamma(t)}{dt^2} + G(U) \frac{\hbar}{2e} \frac{d\gamma(t)}{dt}, \quad (9)$$

где  $I(t)$  – сила полного тока через криотрон,  $C$  – ёмкость перехода,  $\hbar$  – постоянная Дирака (приведённая постоянная Планка),  $e$  – элементарный заряд,  $G(U)$  – нормальная проводимость (одноэлектронная проводимость джозефсоновского перехода),  $\gamma(t)$  – скачок фазы.

Зависимость  $G(U)$  можно определить из ВАХ криотронов и аппроксимировать простыми математическими функциями для гелиевых температур  $T = 11, 6$  К [8]:

$$G(U) = G_n \left( 0,942U - \frac{0,940U}{1 + (0,054U)^{31/2}} \right), \quad (10)$$

и для азотных температур  $T = 81, 2$  К:

$$G(U) = G_n \left( 0,920U - \frac{0,001^{7/5} \cdot 2681U}{1 + (0,054U)^{31/2}} \right), \quad (11)$$

где  $G_n$  – величина нормальной проводимости при напряжении резистивного перехода.

Определение переходной характеристики криотрона заключается в поиске выражения для  $U(t)$  – временной зависимости напряжения в процессе изменения логического состояния криотрона. Для нахождения  $U(t)$  воспользуемся выражением для нестационарного эффекта Джозефсона:

$$U(t) = \frac{\hbar}{2e} \frac{d\gamma(t)}{dt}. \quad (12)$$

Выведем уравнения, которые определяют, как влияет на быстрдействие криотронов величина тока смещения, и устанавливают зависимость времени коммутации, характеризующего быстроту отклика, для прямых и обратных логических переходов в криотронах. Для этого будем проводить расчёты переходных характеристик криотронов, считая ток смещения величиной, которую можно варьировать перед запуском, но постоянной в процессе работы LCJS.

Управление логическим состоянием криотрона будем производить импульсами тока со следующей функциональной зависимостью от времени:

$$I_{regulator}^{[i]}(t) = I_{Ae} \frac{(t-t_i)^4}{t_{mid(i)}^4}, \quad (13)$$

здесь  $I_A$  – амплитуда импульса тока;  $t_{mid(i)} = \frac{\Delta t_i}{2}$  – средняя продолжительность  $i$ -го управляющего импульса (среднее время изменения силы тока);  $t_i$  – момент подачи  $i$ -го управляющего импульса. Выбор такой зависимости условный и может быть пересмотрен в ходе моделирования. В таком случае, величина  $I(t)$ , будет определяться выражением:

$$I(t) = I_1 + I_{regulatory}^{[1]}(t) + I_{regulatory}^{[2]}(t), \quad (14)$$

где  $I_1 < I_0$  – ток смещения,  $I_{regulatory}^{[1]}(t)$  и  $I_{regulatory}^{[2]}(t)$  силы тока первого и второго импульсов соответствующих управляющих сигналов.

Составим дифференциальное уравнение, решение которого будет определять переходную характеристику криотрона с заданными параметрами при гелиевых температурах. Этим уравнением будет являться уравнение (9) с учётом новых, введённых ранее, выражений (10), (12), (13) и (14):

$$I_1 + I_A e^{-\frac{(t-t_1)^4}{t_{mid(1)}^4}} - I_A e^{-\frac{(t-t_2)^4}{t_{mid(2)}^4}} = I_0 \sin \gamma + C \frac{\hbar}{2e} \frac{d^2 \gamma(t)}{dt^2} + G_n \left( 0,942U - \frac{0,940U}{1 + (0,054U)^{31/2}} \right) \frac{\hbar}{2e} \frac{d\gamma(t)}{dt}, \quad (15)$$

где  $I_1 < I_0$  – ток смещения (рабочий ток);  $t_1$  – момент подачи первого импульса тока;  $t_2$  – момент подачи второго импульса тока;  $t_{mid(1)} = \frac{\Delta t_1}{2}$  – половина длительности первого импульса;  $t_{mid(2)} = \frac{\Delta t_2}{2}$  – половина длительности второго импульса. Положительный импульс, отправленный в  $t_1$ , приводит криотрон к логическому переходу  $\langle 0 \rangle \rightarrow \langle 1 \rangle$ , в то время как последующий в  $t_2$  отрицательный импульс возвращает систему в первоначальное логическое состояние  $\langle 0 \rangle$ , то есть происходит переход  $\langle 1 \rangle \rightarrow \langle 0 \rangle$ . Уравнение для определения переходной характеристики криотрона с заданными параметрами, работающего в условиях азотных температур, будет отличаться от уравнения (15) только тем, что вместо уравнения (10) будет фигурировать уравнение (11).

Математическое моделирование переходной характеристики криотрона во время логических переходов основано на решении систем уравнений (12) и (15). Расчеты можно проводить для различных начальных параметров и материалов. Из полученной зависимости  $U(t)$  определяются интервалы стабильной работы логического вентиля и устанавливаются соответствующие пределы.

**5. Принцип работы LCJS.** Перейдём к описанию работы криотрона, задав основные девять параметров для первого рабочего состояния:  $I_0, I_1, I_A, C, G_n, t_1, t_{mid(1)}, t_2, t_{mid(2)}$ . Переходы между остальными рабочими состояниями будут происходить по такому же алгоритму, поэтому подробно рассмотрим весь процесс только на одном логическом переходе между первым и вторым устойчивым состояниями. При фабрикации джозефсоновского перехода его ёмкость  $C \sim \frac{Z_{II} Y_{II}}{b_d}$  и проводимость  $G_n \sim 1/R$  можно изменять довольно в широких пределах, задавая разные геометрические размеры ( $b_d, Z_{II}, Y_{II}$  и др.), а величину критического тока  $I_0 \sim G_n \sim Z_{II} Y_{II} e^{-\frac{d}{d_0}}$ , где  $\frac{d}{d_0}$  – приведенная толщина перехода, можно варьировать с помощью силы пиннинга, либо выбором другого ВТСП-материала.

Для управления логическим состоянием криотрона необходимо дискретно воздействовать на него, подавая управляющие сигналы, которые представляют собой импульсы тока, увеличивающие или уменьшающие силу общего тока на определённую величину, специально подобранную так, чтобы осуществлялся запрашиваемый логический переход. Передача сигналов осуществляется через подводящие кабели, по которым передаётся излучение, транслируемое от внешних приборов внутрь к устройству, которое находится в криостате. В целях уменьшения фоновых температурных шумов (поступающих извне криостата) и защиты устройства от воздействия внешнего магнитного поля, такие кабели можно оснащать аттенюаторами, а также устанавливать на криостаты внешние изолирующие экраны, например, из пермаллового сплава с высокой магнитной проницаемостью.

В момент времени  $t_1$  на криотрон подаётся управляющий импульс, который приводит к увеличению силы тока в криотроне на величину  $I_A$ , вследствие чего начинается логический переход  $\langle 0 \rangle \rightarrow \langle 1 \rangle$ . После окончания логического перехода на криотроне установится напряжение  $U_0 = I_0/G_n$ , которое определяется по данным ВАХ джозефсоновского перехода и примерно равняется  $\frac{\Delta}{e}$ , где  $\Delta$  – энергетическая щель сверхпроводников, образующих переход. Время коммутации  $t_{mid(1)}$  в случае перехода  $\langle 0 \rangle \rightarrow \langle 1 \rangle$  будем определять с момента подачи первого управляющего сигнала  $t_1$ , как половину промежутка времени, за который напряжение  $U(t)$  изменится от  $0,1U_0$  до  $0,9U_0$ . Если учесть тепловые флуктуации и влияние внешних факторов, таких как радиационный фон, то можно предположить, что переходный процесс будет протекать не плавно, а в форме угасающих колебаний напряжения на криотроне.

По аналогии определим и время коммутации  $t_{mid(2)}$ , в случае логического перехода  $\langle 1 \rangle \rightarrow \langle 0 \rangle$ , который произойдёт вследствие подачи второго управляющего импульса в момент времени  $t_2$ , как половину промежутка времени, за который огибающая колебаний амплитуды напряжения установится меньше уровня  $0,1U_0$ .

Меняя параметры модели, можно получать различные переходные характеристики, определяющие как стабильный, так и нестабильный режим работы LCJS. Основная задача моделирования данной

системы состоит в поиске стабильных режимов работы логического вентиля, соответствующих технически достижимым при производстве параметрам системы. Отличить стабильный режим работы от нестабильного можно, рассмотрев поведение криотрона в момент подачи управляющих импульсных сигналов. Если LCJS при попытке логического перехода, после колебаний напряжения вернулся в первоначальное логическое состояние  $\langle 0 \rangle$ , так и не достигнув состояния  $\langle 1 \rangle$ , т.е. на криотроне установилось нулевое напряжение (как и до попытки перехода), то такая конфигурация параметров соответствует нестабильному (неопределённому) режиму работы. Нестабильным будет считаться и такой режим, при котором не происходит логический переход  $\langle 1 \rangle \rightarrow \langle 0 \rangle$ : при подаче второго управляющего импульса напряжение не возвращается к нулевому значению, а постепенно устанавливается напряжение  $U_0$ , соответствующие логическому состоянию  $\langle 1 \rangle$ .

Для определения набора конкретных значений управляющих импульсов тока, устанавливающих стабильные логические состояния при работе LCJS, необходимо обратиться к результатам теоретического расчёта ВАХ, которые были получены в конце первой главы и провести численное математическое моделирование, подбирая различные значения параметров, стремясь поучить удовлетворительные результаты.

В результате комбинирования параметров, для различных материалов, можно получить спектр значений модельных параметров, соответствующих стабильному режиму работы. Последующий отбор строится на результатах сравнения величины максимального быстродействия логических элементов.

Перспективы разработок логических вентилях LCJS обусловлены их высокой устойчивостью к внешним воздействиям (к радиации, к электромагнитным импульсам), сверхбыстрым откликом (превосходство в скорости переключения по сравнению с аналогами), относительной простотой изготовления и значительным снижением потребляемой, а, следовательно, и рассеиваемой мощности.

**6. Заключение.** Таким образом, в настоящей работе сформулированы эффективные рекомендации по решению ряда технических задач, связанных с созданием и эксплуатацией сверхпроводящих логических элементов – джозефсоновских криотронов. Научно-техническим результатом нашего исследования является адаптация конструкции джозефсоновского криотрона для упрощения процедуры его создания и облегчения последующей эксплуатации за счет наиболее выгодного, но в то же время относительно менее трудоёмкого способа изготовления, элементарного уменьшения числа его базовых слоев, а также геометрической модификации. Дальнейшая миниатюризация сверхпроводящих логических вентилях требует смены парадигмы проектирования и изготовления джозефсоновских переходов от трехслойных структур значительной толщины к гораздо меньшим размерам переходов, которые, в свою очередь, как было показано в данной работе, ограничены не только разрешением технологии однослойного структурирования, но и критерием неустойчивости к перегреву.

#### Список литературы

1. Алфеев В. Н., Бахтин П. А., Васенков А. А. 1985. Интегральные схемы и микроэлектронные устройства на сверхпроводниках. М., Радио и связь, 232.
2. Игумнов В. Н. 2019. Основы высокотемпературной криоэлектроники: учебное пособие. 2-е изд., стер. – Москва; Берлин: Директ-Медиа, 238.
3. Патент RU 2298260 C1, H01L 39/24. 27.04.2007.
4. Патент RU 2364009 C1, H01L 39/18. 10.08.2009.
5. Патент RU 2080693 C1, H01L39/22. 27.05.1997.
6. Сатлер О. Н., Спицын А. О. 2021. Механизм пиннинга в технологии контроля старения материалов. Журнал технических исследований, 2: 53-65.
7. Спицын А. О. 2020. Закономерности туннелирования в технологиях контроля старения материалов и биохимической эволюции. Научный альманах, 12-2(74): 64-70.
8. Тиханский М. В., Шурыгин Ф. М., Тиханская К.М. 2003. Моделирование переходных процессов в джозефсоновских элементах памяти с использованием реальных ВАХ туннельных переходов. Вестник национального университета «Львовская политехника». Электроника, 482: 152-161.
9. Тинкхам М. 2013. Введение в сверхпроводимость. М.: Книга по Требованию, 310.
10. Chen Y., et al. 2009. Enhanced flux pinning by BaZrO<sub>3</sub> and (Gd, Y)2O<sub>3</sub> nanostructures in metal organic chemical vapor deposited GdYBCO high temperature superconductor tapes. Appl. Phys. Lett., 94: 062513. DOI: 10.1063/1.3082037.
11. Faley M. I., Fiadziushkin H., Frohn B., Sch?ffelgen P., Dunin-Borkowski R. E. 2022. TiN nanobridge Josephson junctions and nanoSQUIDs on SiN-buffered Si. Superconductor Science and Technology, 35: 065001. DOI: 10.1088/1361-6668/ac64cd.
12. Gray R. L., Murphy S. T., Rushton M. J. D. 2022. Molecular dynamics simulations of radiation damage in YBa<sub>2</sub>Cu<sub>3</sub>O<sub>7</sub>. Superconductor Science and Technology., 35 (3): 035010. DOI: 10.1088/1361-6668/ac47dc.
13. Keren A., Blau N., Gavish N., Kenneth O., Ivry Y., Suleiman M. 2022. Stiffness and coherence length measurements of ultra-thin superconductors, and implications for layered superconductors. Superconductor Science and Technology, 35 (7): 075013. DOI: 10.1088/1361-6668/ac7173.

14. Menushenkov A. P., Ivanov A. A., Chernysheva O. V., et al. 2022. The influence of BaSnO<sub>3</sub> and BaZrO<sub>3</sub> nanoinclusions on the critical current and local structure of HTS coated conductors. *Superconductor Science and Technology*, 35. (6): 065006. DOI: 10.1088/1361-6668/ac68a6.
15. Russo R., Esposito E., Crescitelli A., Di Gennaro E., Granata C., Vettoliere A., Cristiano R., Lisitskiy M. 2016. NanoSQUIDs based on niobium nitride films. *Superconductor Science and Technology*, 30: 024009. DOI: 10.1088/1361-6668/30/2/024009.
16. Shishkin A. G., Skryabina O. V., Gurtovoi V. L., Dizhur S. E., Faley M. I., Golubov A. A., Stolyarov V. S. 2020. Planar MoRe-based dc nanoSQUID. *Superconductor Science and Technology*, 33: 065005. DOI: 10.1088/1361-6668/ab877c.
17. Soloviev I. I., Bakurskiy S. V., Ruzhickiy V. I., Klenov N. V., Kupriyanov M. Yu., Golubov A. A., Skryabina O. V., Stolyarov V. S. 2021. Miniaturization of Josephson Junctions for Digital Superconducting Circuits. *Physical Review Applied*, 16: 044060. DOI: 10.1103/PhysRevApplied.16.044060.
18. Sumption M. D., et al. 2008. Magnetization creep and decay in YBA<sub>2</sub>Cu<sub>3</sub>O<sub>7-x</sub> thin films with artificial nanostructure pinning. *Phys. Rev. B*, 77: 094506. DOI: 10.1103/PhysRevB.77.094506.
19. Tolpygo S. K. 2016. Superconductor digital electronics: Scalability and energy efficiency issues. *Low Temperature Physics*, 42: 5. 361-378. DOI: 10.1063/1.4948618.
20. Troeman A. G. P., van der Ploeg S. H. W., Il'ichev E., Meyer H-G, Golubov A. A., Kupriyanov M. Y., Hilgenkamp H. 2008. Temperature dependence measurements of the supercurrent-phase relationship in niobium nanobridges. *Physical Review B*, 77: 024509. DOI: 10.1103/PhysRevB.77.024509.

### References

1. Alfeev V. N., Bahtin P. A., Vasenkov A. A. 1985. Integral'nye skhemy i mikroelektronnye ustrojstva na sverhprovodnikah [Integrated circuits and microelectronic devices based on superconductors]. M., Radio i svyaz', 232.
2. Igunnov V. N. 2019. Osnovy vysokotemperaturnoj krioelektroniki: uchebnoe posobie [Fundamentals of high-temperature cryoelectronics: textbook]. 2-e izd., ster. – Moskva; Berlin: Direkt-Media, 238.
3. Patent RU 2298260 C1, H01L 39/24. 27.04.2007.
4. Patent RU 2364009 C1, H01L 39/18. 10.08.2009.
5. Patent RU 2080693 C1, H01L39/22. 27.05.1997.
6. Satler O. N., Spitsyn A. O. 2021. Pinning mechanism in materials aging control technology. *Journal of technical research*, 2: 53-65 (in Russian).
7. Spitsyn A.O. 2020. Regularities of tunneling in technologies for controlling aging of materials and biochemical evolution. *Science Almanac*, 12-2(74): 64-70 (in Russian).
8. Tihanskij M. V., SHurygin F. M., Tihanskaya K.M. 2003. Modelirovanie perekhodnyh processov v dzhozefsonovskih elementah pamyati s ispol'zovaniem real'nyh VAH tunnel'nyh perekhodov [Simulation of transients in Josephson memory elements using real volt-ampere characteristics of transitions]. *Vestnik nacional'nogo universiteta «L'vovskaya politehnika»*. *Elektronika*, 482: 152-161.
9. Tinkkham M. 2013. Vvedenie v sverhprovodimost' [Introduction to Superconductivity]. M.: Kniga po Trebovaniyu, 310.
10. Chen Y., et al. 2009. Enhanced flux pinning by BaZrO<sub>3</sub> and (Gd, Y)2O<sub>3</sub> nanostructures in metal organic chemical vapor deposited GdYBCO high temperature superconductor tapes. *Applied Physics Letters*, 94: 062513. DOI: 10.1063/1.3082037.
11. Faley M. I., Fiazdushkin H., Frohn B., Sch'ffolgen P., Dunin-Borkowski R. E. 2022. TiN nanobridge Josephson junctions and nanoSQUIDs on SiN-buffered Si. *Supercond. Sci. Technol.*, 35: 065001. DOI: 10.1088/1361-6668/ac64cd.
12. Gray R. L., Murphy S. T., Rushton M. J. D. 2022. Molecular dynamics simulations of radiation damage in YBa<sub>2</sub>Cu<sub>3</sub>O<sub>7</sub>. *Superconductor Science and Technology*, 35 (3): 035010. DOI: 10.1088/1361-6668/ac47dc.
13. Keren A., Blau N., Gavish N., Kenneth O., Ivry Y., Suleiman M. 2022. Stiffness and coherence length measurements of ultra-thin superconductors, and implications for layered superconductors. *Superconductor Science and Technology*, 35 (7): 075013. DOI: 10.1088/1361-6668/ac7173.
14. Menushenkov A. P., Ivanov A. A., Chernysheva O. V., et al. 2022. The influence of BaSnO<sub>3</sub> and BaZrO<sub>3</sub> nanoinclusions on the critical current and local structure of HTS coated conductors. *Superconductor Science and Technology*, 35. (6): 065006. DOI: 10.1088/1361-6668/ac68a6.
15. Russo R., Esposito E., Crescitelli A., Di Gennaro E., Granata C., Vettoliere A., Cristiano R., Lisitskiy M. 2016. NanoSQUIDs based on niobium nitride films. *Superconductor Science and Technology*, 30: 024009. DOI: 10.1088/1361-6668/30/2/024009.
16. Shishkin A. G., Skryabina O. V., Gurtovoi V. L., Dizhur S. E., Faley M. I., Golubov A. A., Stolyarov V. S. 2020. Planar MoRe-based dc nanoSQUID. *Superconductor Science and Technology*, 33: 065005. DOI: 10.1088/1361-6668/ab877c.
17. Soloviev I. I., Bakurskiy S. V., Ruzhickiy V. I., Klenov N. V., Kupriyanov M. Yu., Golubov A. A., Skryabina O. V., Stolyarov V. S. 2021. Miniaturization of Josephson Junctions for Digital Superconducting Circuits. *Physical Review Applied*, 16: 044060. DOI: 10.1103/PhysRevApplied.16.044060.
18. Sumption M. D., et al. 2008. Magnetization creep and decay in YBA<sub>2</sub>Cu<sub>3</sub>O<sub>7-x</sub> thin films with artificial nanostructure pinning. *Physical Review B*, 77: 094506. DOI: 10.1103/PhysRevB.77.094506.
19. Tolpygo S. K. 2016. Superconductor digital electronics: Scalability and energy efficiency issues. *Low Temperature Physics*, 42: 5. 361-378. DOI: 10.1063/1.4948618.

20. Troeman A. G. P., van der Ploeg S. H. W., Il'ichev E, Meyer H-G, Golubov A. A., Kupriyanov M. Y., Hilgenkamp H. 2008. Temperature dependence measurements of the supercurrent-phase relationship in niobium nanobridges. Physical Review B, 77: 024509. DOI: 10.1103/PhysRevB.77.024509.

**Конфликт интересов:** о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

**Conflict of interest:** no potential conflict of interest related to this article was reported.

*Поступила в редакцию 13.03.2023*

*Поступила после рецензирования 24.04.2023*

*Принята к публикации 27.04.2023*

*Received 13.03.2023*

*Revised 24.04.2023*

*Accepted 27.04.2023*

---

#### СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

**Аверин Геннадий Викторович** – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой компьютерных наук, Донецкий национальный университет

ул. Университетская, 1, Донецк, 283001, ДНР

**Спицын Алексей Олегович** – студент 4-го курса факультета математики и естественнонаучного образования педагогического института, Белгородский государственный национальный исследовательский университет

ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия

**Шевцова Мария Витальевна** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики факультета математики и естественнонаучного образования педагогического института, Белгородский государственный национальный исследовательский университет

ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия

#### INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

**Gennadiy Averin** – Doctor of Engineering Sciences, Professor, Head of the Department of Computer Technologies, Donetsk National University, Donetsk, DNR

**Aleksey Spitsyn** – 4th year student of the Faculty of Mathematics and Science Pedagogical Institute, Belgorod State National Research University, Belgorod, Russia

**Maria Shevtsova** – Candidate of Physics and Mathematics Sciences, Associate Professor of the Department of Mathematics, Belgorod National Research University, Belgorod, Russia



## Влияние теплообмена и массообмена на фотофорез крупной высоковязкой капли в бинарной газовой смеси

Ю. И. Шостак 

(Статья представлена членом редакционной коллегии Н. В. Малай)

Белгородский государственный национальный исследовательский университет,  
Белгород, 208015, Россия

E-mail: [juliashostak@mail.ru](mailto:juliashostak@mail.ru)

**Аннотация.** В квазистационарном приближении Стокса при малых теплом и диффузионном числах Пекле рассматривается влияние тепло- и массопереноса на фотофоретическое движение крупной высоковязкой сферической капли в бинарной газовой смеси при малых относительных перепадах температуры в ее окрестности. Конвективные уравнения тепло- и массопереноса решались методом сращиваемых асимптотических разложений. Получены аналитические выражения и проведены численные оценки влияния тепло и массообмена на скорость фотофореза крупных высоковязких капель.

**Ключевые слова:** фотофорез испаряющихся капель, движение капель в поле электромагнитного излучения

**Для цитирования:** Шостак Ю. И. 2023. Влияние теплообмена и массообмена на фотофорез крупной высоковязкой капли в бинарной газовой смеси. Прикладная математика & Физика, 55(2): 176–182.

DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-2-176-182

Original Research

## The Effect of Heat Transfer and Mass Transfer on the Photophoresis of a Large High-Viscosity Droplet in a Binary Gas Mixture

Julia Shostak 

(Article submitted by a member of the editorial board N. V. Malay)

Belgorod National Research University,  
Belgorod, 308015, Russia

E-mail: [juliashostak@mail.ru](mailto:juliashostak@mail.ru)

**Abstract.** The effect of heat and mass transfer on the photophoretic motion of a large highly viscous spherical droplet in a binary gas mixture with small relative temperature differences in its vicinity is considered in the quasi-stationary Stokes approximation at small Pecle numbers. Convective heat and mass transfer equations were resolved by the method of asymptotic expansion. Analytical expressions were obtained and numerical estimates of the effect of heat and mass transfer on the photophoresis rate of large high-viscosity droplets were carried out.

**Keywords:** Photophoresis of Evaporating Droplets, the Movement of Droplets in the Field of Electromagnetic Radiation

**For citation:** Shostak Julia. 2023. The effect of heat transfer and mass transfer on the photophoresis of a large high-viscosity droplet in a binary gas mixture. Applied Mathematics & Physics, 55(2): 176–182.

DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-2-176-182

**1. Введение.** Движению аэрозольных частиц в поле электромагнитного излучения называется фотофорезом, например, [1, 15, 16, 17, 18, 19, 21]. Это явление обусловлено действием сил молекулярного происхождения и связано с передачей аэрозольным частицам нескомпенсированного импульса молекулами газообразной среды [1, 19, 20, 21].

Фотофорез играет значительную роль в природе, например, в левитации и широко используется в производстве, медицине, сельском хозяйстве и т.д., например, см. в [1, 15, 16, 17].

В научной литературе имеется много работ, посвященных изучению этого явления (см., например, обзор [21] и ссылки в нем). В настоящей работе исследуется вопрос о влиянии на фотофорез высоковязких капель тепло- и массообмена.

**2. Постановка задачи.** В неограниченную и неподвижную бинарную газовую смесь с температурой  $T_e$ , средней массовой плотностью  $\rho_e$ , теплопроводностью  $\lambda_e$ , диффузией  $D_{12}$  и средней вязкостью смеси  $\mu_e$ , помещается крупная высоковязкая сферическая капля радиусом  $R$  с коэффициентом испарения  $\alpha_0$ , внутри которой действуют неоднородно распределенные по ее объему тепловые источники плотностью  $q_i$ . Рассматривается такой тип капель, когда можно пренебречь течением жидкости внутри них, т.е. в предположении, что вязкость жидкости велика по сравнению с вязкостью газовой смеси.

Компоненты смеси обозначим, соответственно, через  $C_2 = n_2/n_e$ ,  $C_1 = n_1/n_e$ ,  $n_e = n_2 + n_1$ ,  $\rho_e = \rho_1 + \rho_2$ ,  $\rho_1 = n_1 m_1$ ,  $\rho_2 = n_2 m_2$ , где  $n_1, n_2$  – численные концентрации первого и второго сорта бинарной смеси с массами  $m_1, m_2$ . Для определенности будем считать первый компонент газовой смеси  $C_1$  по физико-химическому составу совпадающим с веществом капли и граничная поверхность для него является непрерывной; второй компонент –  $C_2$  будем называть основным (несущим) и граничная поверхность для него является непроницаемой. Здесь и далее индексы "e" и "i" будем относить к газу и капле, индексом "s" – обозначены значения физических величин, взятых при средней температуре поверхности капли  $T_s$ , а индексом " $\infty$ " – обозначены средние значения физических величин, характеризующие бинарную газовую среду вдали от капли.

В силу малости времен тепловой и диффузионной релаксации процесс тепло-и массообмена в системе капля-газ протекает квазистационарно. Движение капли происходит при малых числах Рейнольдса и Пекле. Внешние массовые силы не действуют. Циркуляция вещества внутри капли и силы межфазного поверхностного натяжения не рассматриваются (капля высоковязкая).

Задача решается в сферической системе координат ( $y = r/R, \theta, \varphi$ ), начало которой совпадает с центром масс капли и таким образом, задача сводится к анализу обтекания испаряющейся капли бесконечным плоскопараллельным потоком в положительном направлении оси  $Oz$ , скорость которого  $U_\infty$  подлежит определению ( $U_\infty \parallel Oz$ ,  $U_\infty = -U_p$ ,  $U_p$  – скорость движения капли).

Распределения скоростей, давлений, температур и относительной концентрации первого компонента бинарной газовой смеси (в силу симметрии задачи) зависят только от радиальной координаты  $y$  и полярного угла  $\theta$ .

Задача рассматривается при малых относительных перепадах температуры в окрестности высоковязкой капли, коэффициенты молекулярного переноса (вязкость, теплопроводность, диффузия) и плотность бинарной газовой смеси считаются постоянными. Газ рассматривать как несжимаемую среду, а сама система газодинамических уравнений распадается при этом на гидродинамическую и конвективные уравнения тепло-массопереноса.

С учетом допущений решается система газодинамических уравнений (1)-(3) для среднемассовой скорости  $U_e(r)$ , давления  $P_e(r)$ , относительной концентрации  $C_1(r)$  и полей температур  $T_e(r)$  и  $T_i(r)$  вне и внутри капли с краевых условий (4)-(6) [5, 6, 8, 12]:

$$\mu_e \Delta U_e = \nabla P_e, \quad \text{div}(\rho_e U_e) = 0, \quad (1)$$

$$\rho_e c_p (U_e \nabla) T_e = \lambda_e \Delta T_e, \quad (U_e \nabla) C_1 = D_{12} \Delta C_1, \quad (2)$$

$$\Delta T_i = -\frac{q_i}{\lambda_i}. \quad (3)$$

На бесконечности при  $y \rightarrow \infty$  и конечность физических величин, характеризующих каплю при  $y \rightarrow 0$ , учтены в краевых условиях (4), (5), а на граничной поверхности, т.е. при  $y = 1$  справедливы краевые условия (6)

$$U_e = U_\infty n_z, \quad T_e = T_\infty, \quad C_1 = C_{1\infty}, \quad P_e = P_\infty, \quad U_\infty = |U_\infty|, \quad (4)$$

$$T_i \neq \infty, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} n_1 U_r^{(e)} - D_{12} \frac{n_e^2 m_2}{R \rho_e} \frac{\partial C_1}{\partial y} &= \alpha_0 v n_e \left[ C_{1s}^{(H)} + C_{1s}^* \delta T_i - C_1 \right], \\ n_2 U_r^{(e)} + D_{12} \frac{n_e^2 m_1}{R \rho_e} \frac{\partial C_1}{\partial y} &= 0, \quad U_\theta^{(e)} = K_{TS} \frac{v_e}{RT_e} \frac{\partial T_e}{\partial \theta} + K_{DS} \frac{D_{12}}{R} \frac{\partial C_1}{\partial \theta}, \\ T_e = T_i, \quad -\lambda_e \frac{\partial T_e}{\partial y} + \lambda_i \frac{\partial T_i}{\partial y} &= -L m_1 R \alpha_0 v n_e \left[ C_{1s}^{(H)} + C_{1s}^* \delta T_i - C_1 \right] - \sigma_0 \sigma_1 R (T_i^4 - T_\infty^4), \\ C_{1s}^{(H)} &= \frac{n_{1s}^{(H)}}{n_e} \Big|_{T_i=T_s}, \quad C_{1s}^* = \frac{1}{n_e} \frac{\partial n_{1s}^{(H)}}{\partial T_i} \Big|_{T_i=T_s}, \quad v = \sqrt{k_B T_e / (2\pi m_1)}, \quad y = r/R. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь  $U_r^{(e)}, U_\theta^{(e)}$  – компоненты массовой скорости  $U_e$ ,  $L$  – удельная теплота испарения жидкости,  $D_{12}, \lambda_e$  – коэффициенты взаимной диффузии и теплопроводности газовой смеси,  $\lambda_i$  – коэффициент теплопроводности капли,  $\sigma_0$  – постоянная Стефана – Больцмана,  $\sigma_1$  – интегральная степень черноты,  $v$  – одна четвертая средней арифметической скорости теплового движения газовых молекул первого сорта [6],  $n_{1s}^{(H)}$  – насыщенная концентрация молекул первого компонента бинарной газовой смеси, зависящая от средней температуры поверхности капли  $T_i$ ,  $K_{TS}, K_{DS}$  – коэффициенты теплового и диффузионного скольжения [5, 10, 13] и при коэффициентах аккомодации по энергии и тангенциального импульса равных единицы  $K_{TS} = 1.161$ ,  $K_{DS} = 0.3$  [5, 10, 13]. Невозмущенные параметры ( $T_\infty, P_\infty, C_{1\infty}$ ) наблюдаются в месте нахождения геометрического центра высоковязкой капли при ее отсутствии (величина  $C_{1\infty}$  определяется через численные концентрации  $n_1$  и  $n_2$  газовых молекул).

В граничных условиях на поверхности высоковязкой капли учтено соответственно: непрерывность радиального летучего потока первого компонента через поверхность капли. Левая часть равна суммарному радиальному потоку первого компонента вне капли и представляет из себя сумму конвективного и диффузионного потоков. Правая же часть дает радиальный поток первого компонента, отводимый через слой Кнудсена с поверхности капли и пропорциональный коэффициенту испарения  $\alpha_0$  жидкости капли. Вывод выражения для этого потока основан на том, что радиальный поток молекул пара определяется на основе статистических соображений и равен по величине  $n_e \alpha_0 v (C_1^{(s)} - C_1) \Big|_{y=1}$ , где  $C_1^{(s)}$  – насыщенная относительная концентрация первого компонента, являющейся функцией температуры  $T_i$  на поверхности капли,  $v = \sqrt{k_B T_e / (2\pi m_1)}$  – одна четвертая абсолютной тепловой скорости молекул пара,  $k_B$  – постоянная Больцмана. Поскольку  $C_1^{(s)} = C_1^{(s)}(T_i)$ , то мы можем  $C_1^{(s)}$  разложить в ряд

по безразмерному числу Рейнольдса ( $\varepsilon = Re = (\rho_e U_\infty R) / \mu_e \ll 1$ ) с удержанием линейных по этому параметров членов:  $C_1^{(s)}(T_i) = C_{1s}^{(H)} + C_{1s}^* \delta T_i - C_1$ ,  $\delta T_i$  находится из граничных условий на поверхности капли. Коэффициент испарения  $\alpha_0$  – это отношение числа безвозвратно улетевших молекул пара к общему числу испускаемых молекул. В большинстве случаев принято приравнять коэффициенты конденсации и испарения, пренебрегая термическим сопротивлением фазового перехода. Считают, что давление пара в слое неразрезанной парогазовой бинарной смеси у поверхности равно давлению насыщения при температуре поверхности жидкости. Если вдали от жидкости газ не насыщен паром, то возникает поток вещества всегда направленный от поверхности испарения. При этом тепловой поток может быть направлен как к жидкости, так и к газу. Направление теплового потока зависит от разности температур поверхности испарения и парогазовой смеси. Многочисленные экспериментальные данные (в литературе имеются противоречивые сведения) показывают, что коэффициент испарения  $\alpha_0 \leq 1$  [2, 4, 6]; следующее крайнее условие учитывает тот факт, что поверхность капли непроницаема для второго компонента бинарной газовой смеси и в нем учтены радиальный конвективный и радиальный диффузионный потоки второй компоненты смеси; далее граничное условие отражает известные явления теплового и диффузионного скольжений бинарной газовой смеси вдоль поверхности капли, пропорциональные соответственно коэффициентам теплового  $K_{TS}$  и диффузионного  $K_{DS}$  скольжений и в последних двух крайних условиях учтены условия непрерывности температуры и радиального потока тепла. Причем в последнем условии в правой части учитывается тепло, идущее на фазовый переход жидкости капли в пар, пропорциональное величине  $L$  и на излучение.

Уравнения, описывающие тепло-и массоперенос, будем решать методом сращиваемых асимптотических разложений [9, 14], поэтому систему уравнений газовой динамики и крайние условия необходимо привести к безразмерному виду:  $y = r/R$ ,  $\mathbf{V}_e = \mathbf{U}_e/U_\infty$ ,  $t_e = T_e/T_\infty$ ,  $t_i = T_i/T_\infty$ .

При малых числах Рейнольдса и Пекле набегающий поток оказывает лишь возмущающее влияние и поэтому решений уравнений гидродинамики (1) следует искать в виде [12]

$$\mathbf{V}_e = \mathbf{V}_e^{(0)} + \varepsilon \mathbf{V}_e^{(1)} + \dots, P_e = P_e^{(0)} + \varepsilon P_e^{(1)} + \dots$$

При нахождении влияния тепло- и массопереноса на силу и скорость фотофореза ограничимся поправками до первого порядка малости включительно.

Согласно метода сращиваемых асимптотических разложений [9, 14] поля температуры и концентрации представляются в виде двух асимптотических разложений – внутреннего и внешнего. В частности, внутренние и внешние для температуры  $t_e$  имеют вид (7) и (8):

$$t_e(y, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(\varepsilon) t_{en}(y, \theta), \quad (7)$$

$$t_e^*(\xi, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n^*(\varepsilon) t_{en}^*(\xi, \theta), \quad (8)$$

При этом требуется, чтобы

$$\frac{f_{n+1}}{f_n} \rightarrow 0, \quad \frac{f_{n+1}^*}{f_n^*} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

а недостающие крайние условия для внутреннего и внешнего разложений определяются из условия тождественности асимптотических продолжений того и другого в некоторую промежуточную область

$$t_e(y \rightarrow \infty, \theta) = t_e^*(\xi \rightarrow 0, \theta). \quad (9)$$

Здесь  $\xi = \varepsilon y$  – "сжатая" радиальная координата [9].

Асимптотическое разложение решения внутри высоковязкой капли следует искать в виде, аналогичном (7), т.е

$$t_i(y, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(\varepsilon) t_{in}(y, \theta). \quad (10)$$

Отметим, что согласно методу сращиваемых асимптотических разложений, относительно функций  $f_n(\varepsilon)$  и  $f_n^*(\varepsilon)$  предполагается лишь, что порядок их малости по  $\varepsilon$  увеличивается с ростом  $n$ .

Уравнения в безразмерном виде для температур  $t_e$  и  $t_e^*$  имеют вид, соответственно, (11) и (12):

$$\varepsilon Pr^{(T)} \left( V_r^{(e)}(y, \theta) \frac{\partial t_e(y, \theta)}{\partial y} + V_\theta^{(e)}(y, \theta) \frac{\partial t_e(y, \theta)}{\partial \theta} \right) = \Delta t_e(y, \theta), \quad t_e \rightarrow 1 \quad \text{при} \quad y \rightarrow \infty, \quad (11)$$

$$Pr^{(T)} \left( V_r^{(*)}(\xi, \theta) \frac{\partial t_e^*(\xi, \theta)}{\partial \xi} + V_\theta^{(*)}(\xi, \theta) \frac{\partial t_e^*(\xi, \theta)}{\partial \theta} \right) = \Delta^* t_e^*(\xi, \theta), \quad (12)$$

и

$$\mathbf{V}_e^*(\xi, \theta) = \mathbf{n}_z + \varepsilon \mathbf{V}_e^{*(1)}(\xi, \theta) + \dots \quad (13)$$

Здесь  $\mathbf{n}_z$  – единичный вектор в направлении оси  $Oz$ ,  $\Delta^* = \Delta(\xi, \theta)$ ,  $Pr^{(T)} = \mu_e c_p / \lambda_e$ .

Решения для компонент массовой скорости  $\mathbf{V}_e$  радиальной  $V_r^{(e)}$  и касательной и  $V_\theta^{(e)}$  следует искать в виде разложений по полиномам Лежандра и Гегенбауэра [12], а поскольку величина силы, действующей на высоковязкую каплю, определяется первыми членами этих разложений, то компоненты имеют вид:

$$V_r^{(e)} = G(y) \cos \theta, \quad V_\theta^{(e)} = -g(y) \sin \theta.$$

**3. Поля скорости, давления, температур и относительной концентрации первого компонента.** Общие решения для уравнений гидродинамики (1) при малых числах Рейнольдса, удовлетворяющие краевым условиям (4), имеют вид [8, 12]

$$V_r^{(e)}(y, \theta) = \cos \theta \left( 1 + \frac{A_1}{y^3} + \frac{A_2}{y} \right), \quad V_\theta^{(e)}(y, \theta) = -\sin \theta \left( 1 - \frac{A_1}{2y^3} + \frac{A_2}{2y} \right), \quad P_e(y, \theta) = P_\infty + \frac{U_\infty}{R} \mu_e \frac{\cos \theta}{y^2} A_2, \quad (14)$$

а для полей температур (15) и относительной концентрации первого компонента (16)

$$t_e(y, \theta) = t_{e0}(y) + \varepsilon t_{e1}(y, \theta), \quad t_e^*(\xi, \theta) = t_{e0}^*(\xi) + \varepsilon t_{e1}^*(\xi, \theta), \quad t_i(y, \theta) = t_{i0}(y) + \varepsilon t_{i1}(y, \theta), \quad (15)$$

$$C_1(y, \theta) = C_{10}(y) + \varepsilon C_{11}(y, \theta), \quad C_1^*(\xi, \theta) = C_{10}^*(\xi) + \varepsilon C_{11}^*(\xi, \theta). \quad (16)$$

Здесь

$$\begin{aligned} t_{e0}(y) &= 1 + \frac{\Gamma_0}{y}, \quad t_{e0}^* = 1, \quad t_{e1}(y, \theta) = \frac{\omega_0^{(T)}}{2y} (N_1 - y) + \cos \theta \left[ \frac{\Gamma_1}{y^2} + \frac{\omega_0^{(T)}}{2} \left( 1 + \frac{A_2}{y} - \frac{A_1}{2y^3} \right) \right], \\ t_{e1}^*(\xi, \theta) &= \frac{\Gamma_0}{\xi} \exp \left\{ \frac{1}{2} Pr^{(T)} \xi (\cos \theta - 1) \right\}, \quad t_{i0}(y) = B_0 + \frac{H_0}{y} - \frac{1}{y} \int_1^y \psi_0 dy + \int_1^y \frac{\psi_0}{y} dy, \\ C_{10}(y) &= C_{1\infty} + \frac{M_0}{y}, \quad C_{11}(y, \theta) = \frac{\omega_0^{(D)}}{2y} (N_2 - y) + \cos \theta \left[ \frac{M_1}{y^2} + \frac{\omega_0^{(D)}}{2} \left( 1 + \frac{A_2}{y} - \frac{A_1}{2y^3} \right) \right], \\ C_{10}^* &= C_{1\infty}, \quad C_{11}^*(\xi, \theta) = \frac{M_0}{\xi} \exp \left\{ \frac{1}{2} Pr^{(D)} \xi (\cos \theta - 1) \right\}, \quad \omega_0^{(D)} = Pr^{(D)} M_0, \quad Pr^{(D)} = \mu_e / (D_{12} \rho_e), \\ t_{i1}(y) &= N_3 + \cos \theta \left\{ B_1 y + \frac{H_1}{y^2} + \frac{1}{3} \left[ y \int_1^y \frac{\psi_1}{y^2} dy - \frac{1}{y^2} \int_1^y y \psi_1 dy \right] \right\}, \quad J_0 = \frac{1}{V} \int_V q_i dV, \\ \psi_1(y) &= -\frac{3}{2} \frac{R^2}{\lambda_i T_\infty} y^2 \int_{-1}^{+1} q_i x dx, \quad J_1 = \frac{1}{V} \int_V q_i z dV, \quad z = r \cos \theta, \quad \psi_0(y) = -\frac{R^2}{2\lambda_i T_\infty} y^2 \int_{-1}^{+1} q_i dx, \\ \omega_0^{(T)} &= Pr^{(T)} \Gamma_0, \quad Pr^{(T)} = \mu_e c_p / \lambda_e, \quad H_0 = \frac{R^2 J_0}{3\lambda_i T_\infty}, \quad H_1 = \frac{R J_1}{3\lambda_i T_\infty}, \quad V = \frac{4}{3} \pi R^3, \quad \int_V q_i z dV - \end{aligned}$$

дипольный момент плотности тепловых источников [1, 20, 21]. Интегрирование ведется по всему объему испаряющейся капли,  $Pr^{(T)}$ ,  $Pr^{(D)}$  – тепловое и диффузионное числа Прандтля.

Среднее значение температуры поверхности капли  $T_S = t_{iS} T_\infty$  определяется из решения следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} t_{eS} = t_{iS}, \quad \Gamma_0 = t_{eS} - 1, \\ \frac{\lambda_e}{\lambda_i} (t_{eS} - 1) = \frac{R^2 J_0}{3\lambda_i T_\infty} + LD_{12} \frac{n_e^2 m_1}{T_\infty \lambda_i n_2} \frac{C_{1\infty} - C_{1s}^{(H)}}{1 + D_{12} \frac{R \alpha_0 \nu n_2}{\lambda_i}} - \sigma_0 \sigma_1 \frac{RT_\infty^4}{\lambda_i} (t_{iS}^4 - 1). \end{cases}$$

Здесь  $t_{eS} = t_{e0}(y=1)$ ,  $t_{iS} = t_{i0}(y=1)$ .

Постоянные интегрирования, которые входят в поля скорости, температур и относительной концентрации первого компонента находятся из краевых условий (6). Далее нам потребуются коэффициенты  $\Gamma_1$  и  $A_2$ :

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \frac{3H_1}{\delta} - \frac{\omega_0^{(T)}}{2\delta} \left[ \left( 1 + A_2 - \frac{A_1}{2} \right) \left( a_0 + 2L \frac{n_e^2 m_1}{\lambda_i a_1 n_2} D_{12} C_{1s}^* \right) - \frac{\lambda_e}{\lambda_i} \left( \frac{3}{2} A_1 - A_2 \right) \right] + \\ &+ \frac{\omega_0^{(D)}}{2\delta a_1} D_{12} L \frac{m_1 n_e^2}{\lambda_i T_\infty n_2} \left( 2 + A_2 + \frac{A_1}{2} \right), \quad \delta = a_0 + 2 \frac{\lambda_e}{\lambda_i}, \quad a_0 = 1 + 4\sigma_0 \sigma_1 \frac{RT_\infty^3}{\lambda_i} t_{iS}^3, \quad a_1 = 1 + 2D_{12} \frac{n_e}{R \alpha_0 \nu n_2}, \\ A_2 &= -\frac{3}{2} + \frac{\varepsilon}{U_\infty R \delta} \left\{ 3H_1 \left[ K_{TS} \frac{v_e}{t_{eS}} + K_{DS} \frac{D_{12}}{a_1} C_{1s}^* T_\infty + D_{12} \frac{n_e^2 m_1 C_{1s}^* T_\infty}{\rho_e n_2 a_1} \right] + \frac{3}{8} \omega_0^{(T)} \frac{\lambda_e}{\lambda_i} \times \right. \\ &\times \left[ K_{TS} \frac{v_e}{t_{eS}} + K_{DS} \frac{D_{12}}{a_1} C_{1s}^* T_\infty + D_{12} \frac{n_e^2 m_1 C_{1s}^* T_\infty}{\rho_e n_2 a_1} \right] + \frac{3}{8} \omega_0^{(D)} \left[ K_{TS} \frac{v_e}{t_{eS}} L \frac{n_e^2 m_1}{\lambda_i T_\infty n_2} D_{12} + \right. \\ &\left. \left. + K_{DS} D_{12} \left( L \frac{n_e^2 m_1}{\lambda_i n_2} C_{1s}^* D_{12} + D_{12} \frac{n_e}{R \alpha_0 \nu n_2} \left( a_0 + 2 \frac{\lambda_e}{\lambda_i} \right) \right) - D_{12} \frac{n_e^2 m_1}{2\rho_e n_2} \left( a_0 + 2 \frac{\lambda_e}{\lambda_i} \right) \right] \right\}. \end{aligned}$$

**4. Сила и скорость фотофореза. Анализ полученных результатов.** После того как получены в первом приближении по  $\varepsilon$  выражения для полей температур вне и внутри испаряющейся капли и первого компонента бинарной газовой смеси, метод сращиваемых асимптотических разложений, общая сила, действующая на каплю, определяется интегрированием тензора напряжений по поверхности высоковязкой капли (17) [8]:

$$F_z = \int_{(S)} (-P_e \cos \theta + \sigma_{rr} \cos \theta - \sigma_{r\theta} \sin \theta) r^2 \sin \theta d\theta d\varphi |_{r=R}. \quad (17)$$

Здесь

$$\sigma_{rr} = 2\mu_e \frac{\partial U_r^{(e)}}{\partial r}, \quad \sigma_{r\theta} = \mu_e \left( \frac{\partial U_\theta^{(e)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_r^{(e)}}{\partial \theta} - \frac{U_\theta^{(e)}}{r} \right).$$

Подставляя полученные выше выражения в (17), и после интегрирования имеем

$$F_z = -4\pi R\mu_e U_\infty A_2,$$

а с учетом коэффициента  $A_2$  получаем, что общая сила, действующая на крупную высоковязкую каплю, будет складываться из силы вязкого сопротивления среды  $F_\mu$ , "чисто" фотофоретической силы  $F_{ph}$ , которая пропорциональна коэффициенту  $J_1$ , силы  $F_{cht}$ , обусловленной влиянием конвективного теплообмена на "чистый" фотофорез, пропорциональна коэффициенту  $\omega_0^{(T)}$  и силы  $F_{cmt}$ , обусловленной влиянием конвективного массообмена на "чистый" фотофорез, пропорциональна коэффициенту  $\omega_0^{(D)}$ :

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_\mu + \mathbf{F}_{ph} + \mathbf{F}_{cht} + \mathbf{F}_{cmt}, \quad (18)$$

$$\mathbf{F}_\mu = 6\pi R\mu_e U_\infty \mathbf{n}_z, \quad \mathbf{F}_{ph} = -6\pi R\mu_e f_{ph} J_1 \mathbf{n}_z,$$

$$\mathbf{F}_{cht} = -6\pi R\mu_e f_{cht} \omega_0^{(T)} \mathbf{n}_z, \quad \mathbf{F}_{cmt} = -6\pi R\mu_e f_{cmt} \omega_0^{(D)} \mathbf{n}_z,$$

$$f_{ph} = \frac{2}{3\delta\lambda_i T_\infty} \left[ K_{TS} \frac{v_e}{t_{eS}} + K_{DS} \frac{D_{12}}{a_1} C_{1s}^* T_\infty + D_{12} \frac{n_e^2 m_1 C_{1s}^* T_\infty}{\rho_e n_2 a_1} \right], \quad (19)$$

$$f_{cht} = \frac{\lambda_e}{\lambda_i} \frac{1}{4\delta R} \left[ K_{TS} \frac{v_e}{t_{eS}} + K_{DS} \frac{D_{12}}{a_1} C_{1s}^* T_\infty + D_{12} \frac{n_e^2 m_1 C_{1s}^* T_\infty}{\rho_e n_2 a_1} \right], \quad (20)$$

$$f_{cmt} = \frac{1}{4R\delta a_1} \left[ K_{TS} \frac{v_e}{t_{eS}} L \frac{n_e^2 m_1}{\lambda_i T_\infty n_2} D_{12} + K_{DS} D_{12} \left( L \frac{n_e^2 m_1}{\lambda_i n_2} C_{1s}^* D_{12} + D_{12} \frac{n_e}{R\alpha_0 v n_2} \left( a_0 + 2 \frac{\lambda_e}{\lambda_i} \right) \right) - D_{12} \frac{n_e^2 m_1}{2\rho_e n_2} \left( a_0 + 2 \frac{\lambda_e}{\lambda_i} \right) \right]. \quad (21)$$

Приравнявая к нулю общую силу, действующую на каплю (частица движется равномерно) из (18) получаем выражение для скорости упорядоченного движения капли. Эта скорость также будет складываться из трех скоростей: "чисто" фотофоретической скорости  $U_{ph}$ , которая пропорциональна коэффициенту  $J_1$ , скорости  $U_{cht}$ , обусловленной влиянием конвективного теплообмена на "чистый" фотофорез, пропорциональна коэффициенту  $\omega_0^{(T)}$  и скорости  $U_{cmt}$ , обусловленной влиянием конвективного массообмена на "чистый" фотофорез, пропорциональна коэффициенту  $\omega_0^{(D)}$ :

$$\mathbf{U}_p = \mathbf{U}_{ph} + \mathbf{U}_{cht} + \mathbf{U}_{cmt}, \quad (22)$$

$$\mathbf{U}_p = - \left( f_{ph} J_1 + f_{cht} \omega_0^{(T)} + f_{cmt} \omega_0^{(D)} \right) \mathbf{n}_z.$$

Выражения для коэффициентов  $f_{ph}$ ,  $f_{cht}$ ,  $f_{cmt}$  состоят из суммы трех слагаемых, появление которых обусловлено тепловым и диффузионным скольжением бинарной газовой смеси относительно неравномерно нагретой поверхности капли и реактивным эффектом, связанным с испарением. Для иллюстрации в таблице 1 в качестве примера зависимости функций  $f_{ph}$ ,  $f_{cht}$ ,  $f_{cmt}$  от температуры  $T_{iS}$  приведены значения функций  $h_{ph} = f_{ph}/f_{ph}|_{T_{iS}=273K}$ ,  $h_{cht} = f_{cht}/f_{cht}|_{T_{iS}=273K}$ ,  $h_{cmt} = f_{cmt}/f_{cmt}|_{T_{iS}=273K}$  для капли воды радиуса  $R = 30$  мкм, взвешенной в воздухе при нормальных условиях ( $T_\infty = 273K$ ,  $P_\infty = 10^5$  Па,  $\alpha_0 = 0.5$ ). Численные значения коэффициентов, входящих в выражения (19) – (21), взяты их справочников [2, 4]. При  $T_{iS} = 273K$  значения коэффициентов  $f_{ph}|_{T_{iS}=273K} = 4.54 \cdot 10^{-9}$ ,  $f_{cht}|_{T_{iS}=273K} = 3.78 \cdot 10^{-4}$ ,  $f_{cmt}|_{T_{iS}=273K} = -0.46$ . Численные оценки показали, что вклад в силу и скорость фотофореза крупной высоковязкой капли разный – вклад теплообмена положительный, а массообмена отрицательный.

Таблица 1  
Table 1

Зависимость коэффициентов  $h_{ph}$ ,  $h_{cht}$ ,  $h_{cmt}$  от температуры  $T_{iS}$   
Dependence of coefficients  $h_{ph}$ ,  $h_{cht}$ ,  $h_{cmt}$  on temperature  $T_{iS}$

$T_{iS}$ (K)	$h_{ph}$	$h_{cht}$	$h_{cmt}$
273	1	1	1
283	1.01	1.05	0.99
293	1.02	1.08	0.99
303	1.04	1.15	0.98
313	1.05	1.19	0.97
323	1.06	1.23	0.95

В тех случаях, когда капля поглощает излучение как черное тело, с помощью формул (17) и (22) можно непосредственно оценить силу и скорость фотофореза. Когда капля поглощает излучение как черное тело, поглощение

происходит в тонком слое с толщиной  $\delta R \ll R$ , прилегающем к нагреваемой части поверхности капли. При этом плотность тепловых источников внутри слоя толщиной  $\delta$  имеет вид

$$q_i(r, \theta) = \begin{cases} -\frac{I_0}{\delta}, & \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi, R - \delta \leq r \leq R, \\ 0, & 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

где  $I_0$  – интенсивность падающего излучения.

$$\text{Тогда } \int_V q_i z dV = -\frac{2}{3} \pi R^3 I_0, J_1 = -\frac{I_0}{2}, \int_V q_i dV = \pi R^2 I_0, J_0 = \frac{3I_0}{4R}, \omega_0^{(T)} = \frac{RPr^{(T)}}{4\lambda_e T_\infty} I_0.$$

Конвективный перенос тепла пропорционален коэффициенту  $\omega_0^{(T)}$ . Мы можем, в частности, оценить влияние теплообмена на "чистый" фотофорез. В этом случае имеем следующие формулы

$$F_{ph} = 2\pi R \mu_e \frac{I_0}{\delta \lambda_i T_\infty} \left[ K_{TS} \frac{v_e}{t_{eS}} + C_{1s}^* \frac{D_{12}}{a_1} T_\infty \left( K_{DS} + \frac{n_e^2 m_1}{\rho_e n_2} \right) \right] \left( 1 - \frac{3}{16} Pr^{(T)} \right) \mathbf{n}_z, \quad (23)$$

$$U_{ph} = \frac{I_0}{3\delta \lambda_i T_\infty} \left[ K_{TS} \frac{v_e}{t_{eS}} + C_{1s}^* \frac{D_{12}}{a_1} T_\infty \left( K_{DS} + \frac{n_e^2 m_1}{\rho_e n_2} \right) \right] \left( 1 - \frac{3}{16} Pr^{(T)} \right) \mathbf{n}_z. \quad (24)$$

Для большинства газов тепловое число Прандтля порядка единицы и из формул (23) – (24) видно, что вклад конвективного теплопереноса в фотофоретическую силу и скорость испаряющейся капли при малых относительных перепадах в ее окрестности составляет более 20 процентов. Это означает, что при описании поведения неравномерно нагретых высоковязких капель в бинарных газовых смесях и численных оценок силы и скорости фотофореза необходимо учитывать конвективный тепло и массоперенос.

**Благодарность.** Автор выражает благодарность Н. В. Малай за поддержку, внимание к работе, ценные замечания и советы.

#### Список литературы

1. Береснев С. А., Ковалев Ф. Д., Кочнева Л. Б., Рунков В. А., Суевин П. Е., Черемисин А. А. 2003. О возможности фотофоретической левитации частиц в стратосфере. *Оптика атмосферы и океана*, 16(1): 52-57.
2. Бретшнайдер С. 1966. Свойства газов и жидкостей. Инженерные методы расчета. М., Мир. 534.
3. Борен К., Хафмен Д. 1986. Поглощение и рассеяние света малыми частицами. М., Мир. 660.
4. Варгафтик Н. Б. 1972. Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей. М., Наука. 720.
5. Галоян В. С., Яламов Ю. И. 1985. Динамика капель в неоднородных вязких средах. Ереван, Луйс. 207.
6. Дьяконов С. Н., Котлярова Л. В., Яламов Ю. И. 2002. Влияние летучести на термофоретическое движение высоковязкой сферы в бинарной газовой смеси с учетом термодиффузионных и стефановских эффектов. *Журнал технической физики*, 72(3): 24-30.
7. Камке Э. 2003. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., Лань. 576.
8. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. 2003. Теоретическая физика. Т. VI. Гидродинамика. М., Физматлит. 731.
9. Найфэ А. 1984. Введение в методы возмущения. М., Мир. 525.
10. Поддоскин А. Б., Юшканов А. А., Яламов Ю. И. 1980. К вопросу о термофорезе умеренно крупных аэрозольных частиц. *Журнал технической физики*, 50(1). 158-160.
11. Тихонов А. Н., Самарский А. А. 1972. Уравнения математической физики. М., Наука. 735.
12. Хаппель Дж., Бреннер Г. 1976. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М., Мир. 630.
13. Яламов Ю. И., Поддоскин А. Б., Юшканов А. А. 1980. О граничных условиях при обтекании неоднородно нагретым газом сферической поверхности малой кривизны. *ДАН СССР*, 254(2). 1047-1050.
14. Acrivos A., Taylor T. 1962. Heat and Mass Transfer from Single Spheres in Stokes Flow. *Phys. Fluid*, 5(4): 387-394; <https://doi.org/10.1063/1.1706630>.
15. Cheremisin A. A., Kushnarenko A. V. 2013. Photophoretic interaction of aerosol particles and its effect on coagulation in rarefied gas medium. *J. of Aerosol Science*, 62: 26-39.
16. Gong Z., Pan Y-L and Wang C. 2016. Optical configurations for photophoretic trap of single particles in air. *Rev. Sci. Instrum.* 87, 103104; <https://doi.org/10.1063/1.4963842>
17. Liu F., Zhang Z., Wei Y., Zhang Q., Cheng T., Wu X. 2014. Photophoretic trapping of multiple particles in tapered-ring optical field. *Opt. Express*, 22(19):23716-23. doi: 10.1364/OE.22.023716.
18. Malai N. V., Efimtseva D. N., Shchukin E. R. 2022. Convective heat transfer between a moving solid spherical particle and a viscous gas. *Differential Equations*, 58(2): 195-206; DOI: 10.1134/S0012266122020069.
19. Malai N. V., Shchukin E. R. 2019. Photo- and thermophoresis of heat medium-size spherical aerosol particle. *Technical Physics*, 64(4): 458-464; DOI: 10.1134/S1063784219040169.
20. Malai N. V., Limanskaya A. V., Shchukin E.R., Stukalov A.A. 2012. Photophoresis of heat large spherical aerosol particle. *Technical Physics*, 57(10): 1364-1371.

21. Pereira D. J. S. and Pano M. R. O. 2022. Photophoresis of spherical particles in slip-flow regime. *Phys. Fluids*, 34. 103307; <https://doi.org/10.1063/5.0103646>

### References

1. Beresnev S. A., Kovalev F. D., Kochneva L. B., Runkov V. A., Suetin P. E., Cheremisin A. A. 2003. On the possibility of photophoretic levitation of particles in the stratosphere. *Optics of the Atmosphere and Ocean*, 16(1):52-57. (in Russian)
2. Bretschneider S. 1966. Properties of gases and liquids. Engineering methods of calculation. Moscow, Mir. 534. (in Russian)
3. Boren K., Hafman D. 1986. Absorption and scattering of light by small particles. M., Mir. 660. (in Russian)
4. Vargaftik N.B. 1972. Handbook of thermophysical properties of gases and liquids. M., Nauka. 720. (in Russian)
5. Galoyan V. S., Yalamov Yu. I. 1985. Dynamics of droplets in inhomogeneous viscous media. Yerevan, Luys. 207. (in Russian)
6. Diakonov S. N., Kotlyarova L. V., Yalamov Yu. I. 2002. The effect of volatility on the thermophoretic motion of a highly viscous sphere in a binary gas mixture, taking into account thermodiffusion and Stefan effects. *Journal of Technical Physics*, 72(3): 24-30. (in Russian)
7. Kamke E. 2003. Handbook of ordinary differential equations. M., Lan. 576. (in Russian)
8. Landau L.D., Lifshits E.M. 2003. Theoretical physics. Vol. VI. Hydrodynamics. M., Fizmatlit. 731. (in Russian)
9. Naife A. 1984. Introduction to perturbation methods. M., Mir. 525. (in Russian)
10. Poddoskin A. B., Yushkanov A. A., Yalamov Yu. I. 1980. On the issue of thermophoresis of moderately large aerosol particles. *Journal of Technical Physics*, 50(1). 158-160. (in Russian)
11. Tikhonov A. N., Samarsky A. A. 1972. Equations of mathematical physics. M., Nauka. 735. (in Russian)
12. Happel J., Brenner G. 1976. Hydrodynamics at small Reynolds numbers. M., Mir. 630. (in Russian)
13. Yalamov Yu. I., Poddoskin A. B., Yushkanov A. A. 1980. On boundary conditions during flow of inhomogeneously heated gas around a spherical surface of small curvature. *DAN USSR*, 254(2). 1047-1050. (in Russian)
14. Acrivos A., Taylor T. 1962. Heat and Mass Transfer from Single Spheres in Stokes Flow. *Phys. Fluid*, 5(4): 387-394; <https://doi.org/10.1063/1.1706630>.
15. Cheremisin A. A., Kushnarenko A. V. 2013. Photophoretic interaction of aerosol particles and its effect on coagulation in rarefied gas medium. *J. of Aerosol Science*, 62: 26-39.
16. Gong Z., Pan Y-L and Wang C. 2016. Optical configurations for photophoretic trap of single particles in air. *Rev. Sci. Instrum.* 87, 103104; <https://doi.org/10.1063/1.4963842>
17. Liu F., Zhang Z., Wei Y., Zhang Q., Cheng T., Wu X. 2014. Photophoretic trapping of multiple particles in tapered-ring optical field. *Opt. Express*, 22(19):23716-23. doi: 10.1364/OE.22.023716.
18. Malai N. V., Efimtseva D. N., Shchukin E. R. 2022. Convective heat transfer between a moving solid spherical particle and a viscous gas. *Differential Equations*, 58(2): 195-206: DOI: 10.1134/S0012266122020069.
19. Malai N. V., Shchukin E. R. 2019. Photo- and thermophoresis of heat medium-size spherical aerosol particle. *Technical Physics*, 64(4): 458-464: DOI: 10.1134/S1063784219040169.
20. Malai N. V., Limanskaya A. V., Shchukin E. R., Stukalov A. A. 2012. Photophoresis of heat large spherical aerosol particle. *Technical Physics*, 57(10): 1364-1371.
21. Pereira D. J. S. and Pano M. R. O. 2022. Photophoresis of spherical particles in slip-flow regime. *Phys. Fluids*, 34. 103307; <https://doi.org/10.1063/5.0103646>

**Конфликт интересов:** о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

**Conflict of interest:** no potential conflict of interest related to this article was reported.

*Поступила в редакцию 06.04.2023*

*Поступила после рецензирования 18.05.2023*

*Принята к публикации 22.05.2023*

*Received 06.04.2023*

*Revised 18.05.2023*

*Accepted 22.05.2023*






### СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

**Шостак Юлия Ивановна** – аспирант второго года обучения института инженерных и цифровых технологий, Белгородский государственный национальный исследовательский университет  
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия

### INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

**Julia Shostak** – Post-graduate student of the Second Year of Study at the Institute of Engineering and Digital Technologies, Belgorod State National Research University, Belgorod, Russia

## О влиянии многократного рассеяния на переходное излучение в монокристалле

А. В. Носков<sup>1</sup> , В. А. Бондаренко<sup>2</sup> , С. В. Блажевич<sup>2</sup> , А. А. Юрьева<sup>2</sup> , А. Э. Федосеев<sup>2</sup> 

<sup>1</sup>Белгородский государственный технологический университет им. В. Г. Шухова,  
Белгород, 308015, Россия

<sup>2</sup>Белгородский государственный национальный исследовательский университет,  
Белгород, 308015, Россия

E-mail: [noskov\\_a@bsu.edu.ru](mailto:noskov_a@bsu.edu.ru)

**Аннотация.** Исследуется переходное излучение пучка релятивистских электронов, пересекающих монокристаллическую пластинку в геометрии рассеяния Брэгга. В рамках динамической теории рассеяния рентгеновского излучения в монокристалле получена амплитуда напряженности поля излучения в виде вкладов амплитуд параметрического рентгеновского излучения вперед и переходного излучения. Получены выражения, описывающие спектрально-угловую плотность переходного излучения с учетом и без учета многократного рассеяния электронов в мишени. Исследовано влияние многократного рассеяния на спектрально-угловую плотность переходного излучения.

**Ключевые слова:** переходное излучение, монокристаллическая пластинка, динамическая дифракция, рентгеновские волны

**Для цитирования:** Носков А. В., Бондаренко В. А., Блажевич С. В., Юрьева А. А., Федосеев А. Э. 2023. О влиянии многократного рассеяния на переходное излучение в монокристалле. Прикладная математика & Физика, 55(2): 183–192. DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-2-183-192

Short Communication

## On the Effect of Multiple Scattering on the Transition Radiation in a Single Crystal

Anton Noskov<sup>1</sup> , Victoria Bondarenko<sup>2</sup> , Sergey Blazhevich<sup>2</sup> , Alina Yurieva<sup>2</sup> , Andrey Fedoseev<sup>2</sup> 

<sup>1</sup>Belgorod State Shukhov's Technological University,  
Belgorod, 308012, Russia

<sup>2</sup>Belgorod National Research University,  
Belgorod, 308015, Russia

E-mail: [noskov\\_a@bsu.edu.ru](mailto:noskov_a@bsu.edu.ru)

**Abstract.** The transition radiation of a beam of relativistic electrons crossing a single crystal plate in the Bragg scattering geometry is investigated. Within the framework of the dynamic theory of X-ray scattering in a single crystal, the amplitude of the radiation field intensity is obtained in the form of contributions of the amplitudes of parametric forward X-ray radiation and transient radiation. Expressions describing the spectral-angular density of transient radiation with and without multiple electron scattering in the target are obtained. The effect of multiple scattering on the spectral-angular density of transition radiation is investigated.

**Keywords:** Transition Radiation, Single Crystal Plate, Dynamic Diffraction, X-ray Waves

**For citation:** Noskov Anton, Bondarenko Victoria, Blazhevich Sergey, Yurieva Alina, Fedoseev Andrey. 2023. On the Effect of Multiple Scattering on the Transition Radiation in a Single Crystal. Applied Mathematics & Physics, 55(2): 183–192. DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-2-183-192

**1. Введение.** При пересечении релятивистским электроном монокристаллической пластинки его кулоновское поле рассеивается на системе параллельных атомных плоскостей, генерируя вблизи направления рассеяния Брэгга параметрическое рентгеновское излучение (ПРИ) [4, 6, 11] и вблизи направления скорости электрона параметрическое рентгеновское излучение вперед (ПРИВ) [7, 14, 17, 18]. В работе [13] в геометрии рассеяния Лауэ было получено выражение для интегральной интенсивности ПРИВ. Детальное теоретическое описание ПРИВ как эффекта динамической дифракции и сопровождающего его фона переходного излучения в случае симметричного отражения в геометрии рассеяния Лауэ представлено в работе [19] и монографии [15]. Теоретическое описание ПРИВ релятивистских электронов в монокристалле в общем случае асимметричного отражения поля электрона относительно поверхности мишени в геометриях рассеяния Лауэ и Брэгга представлено в работах [1, 2].

Переходное излучение (ПИ) [8, 9] возникает при прохождении заряженной частицей границы раздела между двумя разными средами. Влияние многократного рассеяния заряженной частицы атомами среды на спектрально-угловую плотность ПИ в аморфной среде рассматривалось на качественном уровне в работах [3, 10]. В работе [5]



влияние многократного рассеяния на ПИ в аморфной среде рассмотрено с использованием строгого кинетического подхода к усреднению спектрально-угловой плотности ПИ по всем возможным траекториям движения электронов в веществе. Влияние многократного рассеяния на спектрально-угловые характеристики дифрагированного переходного излучения пучка релятивистских электронов, пересекающих монокристаллическую пластинку в геометрии рассеяния Брэгга, было исследовано недавно в работе [16].

В настоящей работе влияние динамической дифракции рентгеновских волн в монокристаллической пластинке на спектрально-угловые характеристики ПИ рассматривается с учетом многократного рассеяния релятивистских электронов на атомах мишени. Исследовано влияние многократного рассеяния на спектрально-угловые характеристики излучения.

**2. Амплитуда излучения.** Рассмотрим когерентное рентгеновское излучение релятивистских электронов, пересекающих монокристаллическую пластинку в геометрии Брэгга (Рис. 1). Будем исследовать случай асимметричного отражения поля электрона относительно поверхности мишени, когда отражающие атомные плоскости монокристалла расположены под некоторым углом  $\delta$  к поверхности пластины (Рис. 1) ( $\delta = 0$  – частный случай симметричного отражения). Введем следующие обозначения

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= \left(1 - \frac{1}{2}\gamma^{-2} - \frac{1}{2}\psi^2\right)\mathbf{e}_1 + \psi, \quad \mathbf{e}_1\psi = 0, \\ \mathbf{n} &= \left(1 - \frac{1}{2}\theta^2\right)\mathbf{e}_1 + \theta, \quad \mathbf{e}_1\theta = 0, \quad \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 = \cos 2\theta_B, \quad \mathbf{n}_g = \left(1 - \frac{1}{2}\theta'^2\right)\mathbf{e}_2 + \theta', \quad \mathbf{e}_2\theta = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\mathbf{n}$  – единичный вектор в направлении импульса фотона, излученного вблизи направления вектора скорости электрона  $\mathbf{V}$ , и  $\mathbf{n}_g$  – единичный вектор в направлении рассеяния Брэгга.  $\theta'$  – угол излучения когерентного рентгеновского излучения (ПРИ и ДПИ) вблизи направления рассеяния Брэгга, отсчитываемый от оси детектора излучения  $\mathbf{e}_2$ ,  $\psi$  – угол отклонения рассматриваемого электрона в пучке, отсчитываемый от оси электронного пучка  $\mathbf{e}_1$ ,  $\theta$  – угол когерентного рентгеновского излучения (ПРИВ и ПИ) вблизи направления скорости релятивистского электрона,  $\gamma = 1/\sqrt{1 - V^2}$  – Лоренц-фактор электрона. Угловые переменные рассматриваются в виде суммы составляющих, параллельных и перпендикулярных плоскости рисунка:  $\theta = \theta_{\parallel} + \theta_{\perp}$ ,  $\psi = \psi_{\parallel} + \psi_{\perp}$ ,  $\theta_B$  – угол между осью пучка электронов и отражающими слоями (угол Брэгга). ПРИВ и ПИ будем рассматривать в направлении вектора  $\mathbf{n}$  (см. рис. 1). Угол  $\psi_0$  – будем называть начальной расходимостью пучка излучающих электронов (см. рис. 1). Угол  $\psi_0$  определяет конус, ограничивающий часть пучка электронов, за пределами которого плотность электронов уменьшается более чем в  $\epsilon$  раз по сравнению с плотностью на оси пучка.

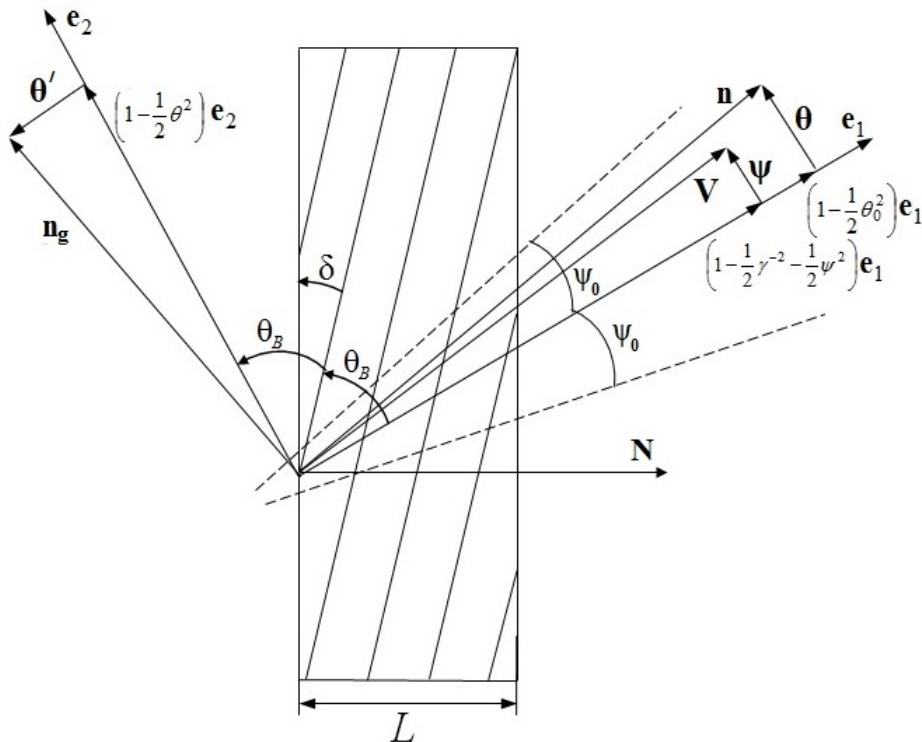


Рис. 1. Геометрия процесса излучения

Fig. 1. Radiation process geometry

Рассматривается уравнение для фурье-образа  $\mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) = \int dt d^3r \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \exp(i\omega t - i\mathbf{k}\mathbf{r})$  электрического поля, возбуждаемого электроном в монокристалле, которое следует из системы уравнений Максвелла:

$$(k^2 - \omega^2(1 + \chi_0))\mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) - \mathbf{k}(\mathbf{k}\mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega)) - \omega^2 \sum_g \chi_{-g} \mathbf{E}(\mathbf{k} + \mathbf{g}, \omega) = 4\pi i \omega \mathbf{J}(\mathbf{k}, \omega), \quad (2)$$

где  $\mathbf{J}(\mathbf{k}, \omega) = 2\pi eV\delta(\omega - \mathbf{kV})$  – фурье-образ плотности тока излучающего электрона,  $\chi_0(\omega)$  – средняя диэлектрическая восприимчивость в монокристалле,  $\chi_g$  и  $\chi_{-g}$  коэффициенты Фурье разложения диэлектрической восприимчивости по векторам обратной решетки  $\mathbf{g}$ :  $\chi(\omega, \mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{g}} \chi_{\mathbf{g}}(\omega) \exp(i\mathbf{g}\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{g}} (\chi'_{\mathbf{g}}(\omega) + i\chi''_{\mathbf{g}}(\omega)) \exp(i\mathbf{g}\mathbf{r})$ , где  $\chi_0 = \chi'_0 + i\chi''_0$ ,  $\chi_g = \chi'_g + i\chi''_g$ . Фурье-образы падающей  $E(\mathbf{k}, \omega)$  и дифрагированной  $E(\mathbf{k} + \mathbf{g}, \omega)$  электромагнитной волны в монокристалле представим в виде:  $E(\mathbf{k}, \omega) = E_0^{(1)}(\mathbf{k}, \omega)\mathbf{e}_0^{(1)} + E_0^{(2)}(\mathbf{k}, \omega)\mathbf{e}_0^{(2)}$ ,  $E(\mathbf{k} + \mathbf{g}, \omega) = E_g^{(1)}(\mathbf{k}, \omega)\mathbf{e}_g^{(1)} + E_g^{(2)}(\mathbf{k}, \omega)\mathbf{e}_g^{(2)}$ , где единичные векторы  $\mathbf{e}_0^{(1)}$  и  $\mathbf{e}_0^{(2)}$  перпендикулярны  $\mathbf{k}$ , а единичные векторы  $\mathbf{e}_g^{(1)}$  и  $\mathbf{e}_g^{(2)}$  перпендикулярны вектору  $\mathbf{k}_g = \mathbf{k} + \mathbf{g}$ . При этом  $\mathbf{e}_0^{(2)}$  и  $\mathbf{e}_g^{(2)}$  лежат в плоскости векторов  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{k}_g$  ( $\pi$  – поляризация), а  $\mathbf{e}_0^{(1)}$  и  $\mathbf{e}_g^{(1)}$  перпендикулярны ей ( $\sigma$  – поляризация). В рамках двухволнового приближения динамической теории дифракции уравнение (2) сводится к системе уравнений [3]:

$$\begin{cases} (k^2 - \omega^2(1 + \chi_0))E_0^{(s)} - \omega^2\chi_{-g}C^{(s,\tau)}E_g^{(s)} = 8\pi^2ie\omega\mathbf{e}_0^{(s)}\mathbf{V}\delta(\omega - \mathbf{kV}), \\ \omega^2\chi_gC^{(s,\tau)}E_0^{(s)} - (k_g^2 - \omega^2(1 + \chi_0))E_g^{(s)} = 0. \end{cases} \quad (3)$$

где  $C^{(s,\tau)} = \mathbf{e}_0^{(s)}\mathbf{e}_1^{(s)} = (-1)^\tau C^{(s)}$ ,  $C^{(1)} = 1$ ,  $C^{(2)} = |\cos 2\theta_B|$ ,  $\mathbf{e}_0^{(1)}\mathbf{V} = \theta_\perp - \psi_\perp$ ,  $\mathbf{e}_0^{(2)}\mathbf{V} = \theta_\parallel - \psi_\parallel$ , Система (3) при  $s = 1$  и  $\tau = 2$  описывает поля  $\sigma$  – поляризованные, а при  $s = 2$  поля  $\pi$  – поляризованные, при этом  $\tau = 2$ , если  $2\theta_B < \frac{\pi}{2}$ , а в противном случае  $\tau = 1$ . Решение системы уравнений (3) для поля в вакууме впереди и позади мишени соответственно имеет вид:

$$E_0^{(s)vacI} = \frac{8\pi^2ie\Omega^{(s)}\delta(\lambda_0^* - \lambda_0)}{\omega\chi_0 + \frac{2\lambda_0}{\omega}}, E_0^{(s)vacII} = \frac{8\pi^2ie\Omega^{(s)}\delta(\lambda_0^* - \lambda_0)}{\omega\chi_0 + \frac{2\lambda_0}{\omega}} + E_0^{(s)Rad}\delta\left(\lambda_0 + \frac{\omega\chi_0}{2}\right), \quad (4)$$

где  $\lambda_0^* = \omega\left(\frac{\gamma^{-2} + (\theta_\perp - \psi_\perp)^2 + (\theta_\parallel - \psi_\parallel)^2 - \chi_0}{2}\right)$ ,  $\lambda_0$  – динамическая добавка длины волнового вектора в монокристалле  $k = \omega\sqrt{1 + \chi_0} + \lambda_0$ ,  $\Omega^{(1)} = \theta_\perp - \psi_\perp$ ,  $\Omega^{(2)} = \theta_\parallel - \psi_\parallel$ ,  $E_{Rad}^{(s)}$  – амплитуда напряженности поля когерентного рентгеновского излучения.

Решение системы уравнений (3) для дифрагированного поля в монокристалле имеет вид:

$$E_0^{(s)} = \frac{8\pi^2ie\Omega^{(s)}}{\omega} \frac{\omega^2\beta + 2\omega\frac{\gamma_g}{\gamma_0}\lambda_0}{4\frac{\gamma_g}{\gamma_0}(\lambda_0 - \lambda_0^{(1)})(\lambda_0 - \lambda_0^{(2)})} \delta(\lambda_0^* - \lambda_0) + E_0^{(s)(1)}\delta(\lambda_0 - \lambda_0^{(1)}) + E_0^{(s)(2)}\delta(\lambda_0 - \lambda_0^{(2)}),$$

$$E_g^{(s)} = \frac{\omega^2\chi_gC^{(s,\tau)}}{2\omega\lambda_g}E_0^{(s)}, \quad (5)$$

где  $E_0^{(s)(1)}$  и  $E_0^{(s)(2)}$  – свободные поля.  
Введены обозначения

$$\lambda_0^{(1,2)} = \frac{\omega|\chi'_g|C^{(s)}}{2\varepsilon} \left( \xi^{(s)} - \frac{i\rho^{(s)}(1 + \varepsilon)}{2} \mp \sqrt{\xi^{(s)2} - \varepsilon - i\rho^{(s)}((1 + \varepsilon)\xi^{(s)} - 2\kappa^{(s)}\varepsilon) - \rho^{(s)2}\left(\frac{(1 + \varepsilon)^2}{4} - \kappa^{(s)2}\varepsilon\right)} \right),$$

$$\lambda_g^{(1,2)} = \frac{\omega|\chi'_g|C^{(s)}}{2} \left( \xi^{(s)} - \frac{i\rho^{(s)}(1 + \varepsilon)}{2} \pm \sqrt{\xi^{(s)2} - \varepsilon - i\rho^{(s)}((1 + \varepsilon)\xi^{(s)} - 2\kappa^{(s)}\varepsilon) - \rho^{(s)2}\left(\frac{(1 + \varepsilon)^2}{4} - \kappa^{(s)2}\varepsilon\right)} \right),$$

где

$$\xi^{(s)}(\omega) = \eta^{(s)}(\omega) + \frac{1 + \varepsilon}{2V^{(s)}}, \eta^{(s)}(\omega) = \frac{2\sin^2\theta_B}{V^2|\chi'_g|C^{(s)}} \left( 1 - \frac{\omega(1 + \theta_\parallel \cot\theta_B)}{\omega_B} \right),$$

$$v^{(s)} = \frac{\chi'_gC^{(s)}}{\chi_0'}, \rho^{(s)} = \frac{\chi''_0}{|\chi''_g|C^{(s)}}, \kappa^{(s)} = \frac{\chi'_gC^{(s)}}{\chi_0''}, \varepsilon = \frac{\sin(\theta_B - \delta)}{\sin(\theta_B + \delta)}, \lambda_g = \frac{\omega\beta}{2} + \lambda_0\frac{\gamma_g}{\gamma_0}. \quad (6)$$

Параметр  $\eta^{(s)}(\omega)$  – является быстрой функцией от частоты  $\omega$ . Параметр  $\rho^{(s)}$  характеризует степень поглощения рентгеновских волн в кристалле и равен отношению длины экстинкции  $L_{ext}^{(s)} = \frac{1}{\omega|\chi''_g|C^{(s)}}$  к длине поглощения  $L_{abc} = \frac{1}{\omega\chi_0''}$  рентгеновских волн  $\rho^{(s)} = \frac{L_{ext}^{(s)}}{L_{abc}}$ . Для фиксированного значения  $\theta_B$  параметр  $\varepsilon$  определяет ориентацию входной поверхности мишени относительно отражающей системы параллельных атомных плоскостей монокристалла.

Воспользовавшись обычными граничными условиями на передней и задней границе монокристалла

$$\int E_0^{(s)vacI}d\lambda_0 = \int E_0^{(s)}d\lambda_0, \int E_0^{(s)}e^{i\frac{\lambda_0}{\gamma_0}L}d\lambda_0 = \int E_0^{(s)vacII}e^{i\frac{\lambda_0}{\gamma_0}L}d\lambda_0, \int E_g^{(s)}e^{i\frac{\lambda_0}{\gamma_0}L}d\lambda_0 = 0, \quad (7)$$

получим выражение для амплитуды напряженности поля излучения

$$E_0^{(s)Rad} = E_{ПРИВ}^{(s)} + E_{ПИ}^{(s)},$$

$$E_{ПРИВ}^{(s)} = \frac{8\pi^2 e \Omega^{(s)}}{\omega} \frac{\exp\left[\frac{i\omega\Lambda}{2\sin(\delta+\theta_B)}\right]}{\Lambda - \chi_0} \frac{(1 - i\rho^{(s)}\kappa^{(s)})^2}{\Lambda^{(s)}} \left[\Delta_1^{(s)} - \Delta_2^{(s)}\right], \quad (8)$$

$$E_{ПИ}^{(s)} = -\frac{8\pi^2 e \Omega^{(s)}}{\omega} \exp\left[\frac{i\omega\Lambda}{2\sin(\delta+\theta_B)}\right] \left[\left(\frac{1}{\Lambda} - \frac{1}{\Lambda - \chi_0}\right) \frac{2K^{(s)} \exp(-ib^{(s)}\Sigma^{(s)})}{\Lambda^{(s)}} + \frac{1}{\Lambda} - \frac{1}{\Lambda - \chi_0}\right], \quad (9)$$

где введены обозначения

$$\Delta_1^{(s)} = \frac{\left(e^{-ib^{(s)}\Sigma^{(1)(s)}} - 1\right) e^{ib^{(s)}\frac{K^{(s)}}{\varepsilon}}}{\Sigma^{(1)(s)}}, \quad \Delta_2^{(s)} = \frac{\left(e^{-ib^{(s)}\Sigma^{(2)(s)}} - 1\right) e^{ib^{(s)}\frac{K^{(s)}}{\varepsilon}}}{\Sigma^{(2)(s)}},$$

$$\Lambda^{(s)} = \left(\xi^{(s)} - i\rho^{(s)}\frac{(1+\varepsilon)}{2} - K^{(s)}\right) e^{-ib^{(s)}\frac{K^{(s)}}{\varepsilon}} - \left(\xi^{(s)} - i\rho^{(s)}\frac{(1+\varepsilon)}{2} + K^{(s)}\right) e^{ib^{(s)}\frac{K^{(s)}}{\varepsilon}},$$

$$K^{(s)} = \sqrt{\xi^{(s)2} - \varepsilon - i\rho^{(s)}((1+\varepsilon)\xi^{(s)} - 2\kappa^{(s)}\varepsilon) - \rho^{(s)2}\left(\frac{(1+\varepsilon)^2}{4} - \kappa^{(s)2}\varepsilon\right)},$$

$$\Lambda = \gamma^{-2} + (\theta_{\perp} - \psi_{\perp})^2 + (\theta_{\parallel} - \psi_{\parallel})^2, \quad \Sigma^{(s)} = \sigma^{(s)} + \frac{i\rho^{(s)}(1-\varepsilon)}{2\varepsilon} - \frac{\xi^{(s)}}{\varepsilon},$$

$$\Sigma^{(1)(s)} = \sigma^{(s)} + i\rho^{(s)}\frac{(1-\varepsilon)}{2\varepsilon} - \frac{\xi^{(s)} - K^{(s)}}{\varepsilon}, \quad \Sigma^{(2)(s)} = \sigma^{(s)} + i\rho^{(s)}\frac{(1-\varepsilon)}{2\varepsilon} - \frac{\xi^{(s)} + K^{(s)}}{\varepsilon},$$

$$b^{(s)} = \frac{\omega|\chi_g'|C^{(s)}}{2\sin(\delta+\theta_B)}L, \quad \sigma^{(s)} = \frac{1}{|\chi_g'|C^{(s)}}\left(\gamma^{-2} + (\theta_{\perp} - \psi_{\perp})^2 + (\theta_{\parallel} - \psi_{\parallel})^2 - \chi_0'\right).$$

Выражения (8) и (9) представляют собой амплитуды напряженностей полей ПРИВ и ПИ, которые выделены из общей амплитуды когерентного излучения. Слагаемые в квадратных скобках выражения (9), соответствуют переходным излучениям, генерируемым на входной и выходной поверхности монокристаллической мишени соответственно. При этом множитель  $\frac{2K^{(s)} \exp(-ib^{(s)}\Sigma^{(s)})}{\Lambda^{(s)}}$  описывает влияние динамической дифракции в монокристалле на ПИ, генерируемое на входной поверхности пластины.

**3. Спектрально-угловая плотность ПИ.** Исследуем спектрально-угловую плотность переходного излучения от рассматриваемой монокристаллической мишени. Подставим амплитуду напряженности электрического поля ПИ (9) в хорошо известное выражение для спектрально-угловой плотности рентгеновского излучения [19]:  $\omega \frac{d^3 N^{(s)}}{d\omega d\theta_{\perp} d\theta_{\parallel}} = \omega^2 (2\pi)^{-6} |E_0^{(s)Rad}|^2$ , получим выражение, описывающее спектрально-угловую плотность переходного излучения:

$$\omega \frac{d^3 N_{ПИ}^{(s)}}{d\omega d\theta_{\perp} d\theta_{\parallel}} = F^{(s)} = F_1^{(s)} + F_2^{(s)} + F_{int}^{(s)}, \quad (10)$$

$$F_1^{(s)} = 4 \frac{e^2}{\pi^2} \left( \frac{\Omega^{(s)}}{\Lambda} - \frac{\Omega^{(s)}}{\Lambda - \chi_0} \right)^2 \left| \frac{K^{(s)} \exp(-ib^{(s)}\Sigma^{(s)})}{\Lambda^{(s)}} \right|^2, \quad (11)$$

$$F_2^{(s)} = \frac{e^2}{\pi^2} \left( \frac{\Omega^{(s)}}{\Lambda} - \frac{\Omega^{(s)}}{\Lambda - \chi_0} \right)^2, \quad (12)$$

$$F_{int}^{(s)} = 4 \frac{e^2}{\pi^2} \left( \frac{\Omega^{(s)}}{\Lambda} - \frac{\Omega^{(s)}}{\Lambda - \chi_0} \right)^2 \operatorname{Re} \left[ \frac{K^{(s)} \exp(-ib^{(s)}\Sigma^{(s)})}{\Lambda^{(s)}} \right]. \quad (13)$$

Выражения  $F_1^{(s)}$ ,  $F_2^{(s)}$ ,  $F_{int}^{(s)}$  описывают соответственно вклад в суммарную спектрально-угловую плотность переходного излучения от передней границы, задней границы и их интерференции.

Для учета многократного рассеяния излучающих электронов в среде проведем усреднение спектрально-угловой плотности ПИ (10) по угловому распределению электронов в пучке, которое представим функцией Гаусса, меняющейся с длиной пути прохождения в мишени  $t$  за счет многократного рассеяния электрона:

$$f(\psi, t) = \frac{1}{\pi(\psi_0^2 + \psi_s^2 t)} e^{-\frac{\psi^2}{\psi_0^2 + \psi_s^2 t}}. \quad (14)$$

Мы будем усреднять по расширяющемуся пучку прямолинейных траекторий излучающих электронов на длине пути электрона в мишени  $L_e$ . Здесь  $\psi_s^2 = \frac{E_s^2}{m^2 \gamma^2} \frac{1}{L_R} \left(1 + 0.038 L_n \left(\frac{t}{L_R}\right)\right)^2$  – средний квадрат угла многократного рассеяния электрона на единице длины [12], зависящего от длины пройденного пути  $t$  в монокристалле.  $E_s \approx \frac{4\pi m^2}{e^2} \approx 21$  МэВ,  $L_R$  – радиационная длина. Чтобы выделить эффект многократного рассеяния электронов в спектрально-угловой

плотности переходного излучения, не учитывая вклада начальной расходимости электронного пучка, положим в (14)  $\psi_0$  и рассмотрим излучение релятивистского электрона, падающего на монокристаллическую пластину вдоль оси электронного пучка  $\mathbf{e}_1$ , при этом в формулах (11, 12, 13) положим  $\psi_{\parallel} = \psi_{\perp} = 0$ . Проведя усреднение выражений (11, 12, 13) по (14), получим выражения, описывающие спектрально-угловую плотность ПИ с учетом многократного рассеяния:

$$\left\langle \omega \frac{d^3 N^{(s)}}{d\omega d\theta_{\perp} d\theta_{\parallel}} \right\rangle = \langle F^{(s)} \rangle = \langle F_1^{(s)} \rangle + \langle F_2^{(s)} \rangle + \langle F_{int}^{(s)} \rangle, \quad (15)$$

$$\langle F_1^{(s)} \rangle = 4 \frac{e^2}{\pi^2} \frac{1}{L_e} \int_0^{L_e} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\Omega^{(s)0}}{\Lambda^0} - \frac{\Omega_{\Delta\psi}^{(s)0}}{\Lambda_{\Delta\psi}^0 - \chi_0} \right)^2 \left| \frac{K^{(s)} \exp \left( -ib^{(s)} \sum_{\Delta\psi}^{(s)0} \right)}{\Lambda^{(s)}} \right|^2 \cdot \frac{1}{\pi \psi_s^2 t} e^{-\frac{\Delta\psi_{\perp}^2 + \Delta\psi_{\parallel}^2}{\psi_s^2 t}} d\Delta\psi_{\perp} d\Delta\psi_{\parallel} dt, \quad (16)$$

$$\langle F_2^{(s)} \rangle = \frac{e^2}{\pi^2} \frac{1}{L_e} \int_0^{L_e} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\Omega^{(s)0}}{\Lambda^0} - \frac{\Omega_{\Delta\psi}^{(s)0}}{\Lambda_{\Delta\psi}^0 - \chi_0} \right)^2 \frac{1}{\pi \psi_s^2 t} e^{-\frac{\Delta\psi_{\perp}^2 + \Delta\psi_{\parallel}^2}{\psi_s^2 t}} d\Delta\psi_{\perp} d\Delta\psi_{\parallel} dt, \quad (17)$$

$$\langle F_{int}^{(s)} \rangle = 4 \frac{e^2}{\pi^2} \frac{1}{L_e}$$

$$\int_0^{L_e} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\Omega^{(s)0}}{\Lambda^0} - \frac{\Omega_{\Delta\psi}^{(s)0}}{\Lambda_{\Delta\psi}^0 - \chi_0} \right) \left( \frac{\Omega^{(s)0}}{\Lambda_{\Delta\psi}^0} - \frac{\Omega_{\Delta\psi}^{(s)0}}{\Lambda_{\Delta\psi}^0 - \chi_0} \right) \operatorname{Re} \left[ \frac{K^{(s)} \exp \left( -ib^{(s)} \sum_{\Delta\psi}^{(s)0} \right)}{\Lambda^{(s)}} \right] \cdot \frac{1}{\pi \psi_s^2 t} e^{-\frac{\Delta\psi_{\perp}^2 + \Delta\psi_{\parallel}^2}{\psi_s^2 t}} d\Delta\psi_{\perp} d\Delta\psi_{\parallel} dt, \quad (18)$$

где введены обозначения:

$$\Omega_{\Delta\psi}^{(1)0} = \theta_{\perp} - \Delta\psi_{\perp}, \Omega_{\Delta\psi}^{(2)0} = \theta_{\parallel} - \Delta\psi_{\parallel}, \Omega^{(1)0} = \theta_{\perp}, \Omega^{(2)0} = \theta_{\parallel}, \Lambda^0 = \gamma^{-2} + \theta_{\perp}^2 + \theta_{\parallel}^2,$$

$$\Lambda_{\Delta\psi}^0 = \gamma^{-2} + (\theta_{\perp} - \Delta\psi_{\perp})^2 + (\theta_{\parallel} - \Delta\psi_{\parallel})^2, \sum_{\Delta\psi}^{(s)0} = \sigma_{\Delta\psi}^{(s)0} + \frac{i\rho^{(s)}(1-\varepsilon)}{2\varepsilon} - \frac{\xi^{(s)}}{\varepsilon},$$

$$\sigma_{\Delta\psi}^{(s)0} = \frac{1}{|\chi'_{\sigma}|C^{(s)}} (\Lambda_{\Delta\psi}^0 - \chi_0).$$

Выражения, (15)-(18) являются главным результатом настоящей работы. Они описывают спектрально-угловую плотность ПИ релятивистских электронов, пересекающих монокристаллическую пластинку в геометрии рассеяния Брэгга в общем случае асимметричного отражения поля электрона относительно поверхности мишени. Выражения  $\langle F_1^{(s)} \rangle$ ,  $\langle F_2^{(s)} \rangle$ ,  $\langle F_{int}^{(s)} \rangle$  описывают вклады в суммарную спектрально-угловую плотность соответственно переходного излучения от передней границы мишени, задней границы и их интерференции с учетом многократного рассеяния электрона.

**4. Численные расчеты.** Используя полученные выше выражения, мы провели численные расчеты спектрально-угловой плотности ПИ с учетом и без учёта многократного рассеяния излучающих электронов в монокристалле. Для определенности рассмотрено переходное излучение релятивистского электрона, пересекающего монокристаллическую пластину углерода C(111). Значения основных параметров: Лоренц-фактор электрона  $\gamma = 200$ , угол Брэгга  $\theta_B = 16.2^\circ$ , частота Брэгга  $\omega_B = 10.9$  кэВ. Для случая симметричного отражения  $\delta = 0$  ( $\varepsilon = 1$ ) рассмотрены  $\sigma$ -поляризованные ( $s = 1$ ) волны ПИ. На рис. 2 представлены построенные по формулам (10)-(13) кривые, описывающие спектрально-угловую плотность  $F^{(1)}$  переходного излучения прямолинейно пересекающего монокристалл электрона, а также вклады в нее переходных излучений от входной и выходной поверхностей мишени, а также интерференционного слагаемого. Спектрально-угловые плотности построены для фиксированного угла наблюдения  $\theta$ , с координатами  $\theta_{\perp} = 5$  мрад,  $\theta_{\parallel} = 0$ , который соответствует максимуму угловой плотности ПИ ( $\theta = \gamma^{-1}$ ). Из рисунка видно, что при рассматриваемых параметрах интерференция волн ПИ от входной и выходной поверхностей  $F_{int}^{(1)}$  деструктивна во всей частотной области излучения. Спектрально-угловая плотность ПИ от выходной поверхности  $F_2^{(1)}$  имеет постоянное значение. Это связано с тем, что фотоны ПИ, излученные вблизи выходной поверхности мишени, не испытывают динамической дифракции, в то время как ПИ от входной поверхности испытывает динамическую дифракцию в монокристаллической мишени, которая приводит к отражению части фотонов ПИ в направлении рассеяния Брэгга, что соответствует провалу на графике функции  $F_1^{(1)}$  (см. рис. 2).

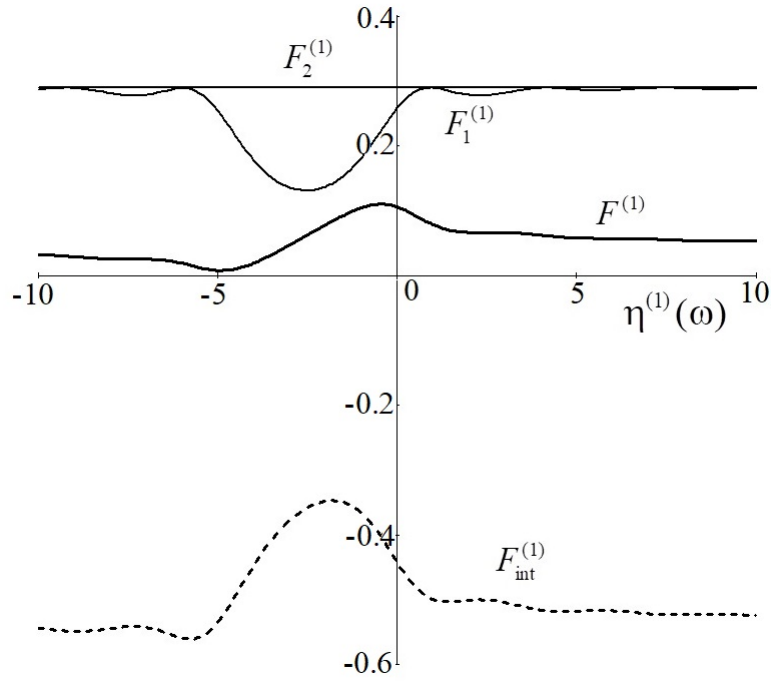


Рис. 2.  $F^{(1)}$ —спектрально-угловая плотность ПИ,  $F_1^{(1)}$ ,  $F_2^{(1)}$  и  $F_{int}^{(1)}$ —спектрально-угловые плотности переходных излучений от входной и выходной поверхности монокристалла и интерференционное слагаемое.  $L = 2$  мкм,  $\gamma = 200$ ,  $\theta_{\perp} = 5$  мрад,  $\theta_{\parallel} = 0$

Fig. 2.  $F^{(1)}$ —spectral-angular density of PI,  $F_1^{(1)}$ ,  $F_2^{(1)}$  and  $F_{int}^{(1)}$ —spectral-angular densities of transition radiation from the input and output surfaces of a single crystal and the interference term.  $L = 2$  mkm,  $\gamma = 200$ ,  $\theta_{\perp} = 5$  mrad,  $\theta_{\parallel} = 0$

При увеличении толщины мишени спектрально угловая плотность ПИ изменяется, что демонстрирует рисунок (рис. 3.), на котором видно увеличение провала в спектре  $F_1^{(1)}$ , что связано с увеличением интенсивности отраженной вблизи частоты Брэгга ( $\eta^{(1)}(\omega) \approx -2.5$ ) волны, и как следствие, уменьшением интенсивности прошедшей волны. Необходимо также отметить, что интерференция  $F_{int}^{(1)}$  вблизи частоты Брэгга конструктивна, что приводит к увеличению пика суммарной спектрально-угловой плотности ПИ  $F^{(1)}$ .

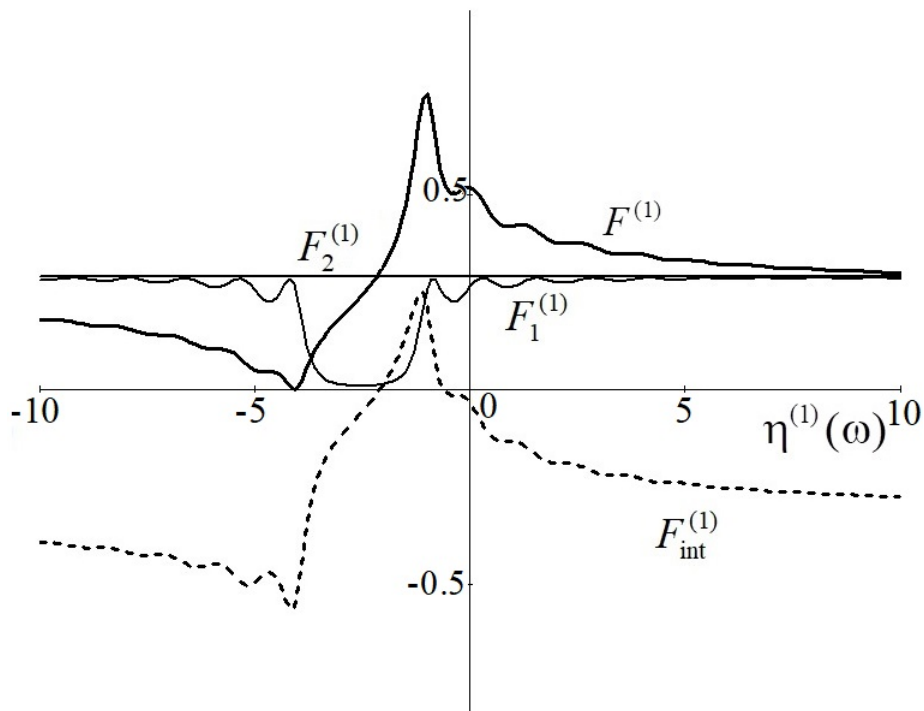


Рис. 3. То же, что на рис. 2, но при большей толщине мишени.  $L = 5$  мкм,  $\gamma = 200$ ,  $\theta_{\perp} = 5$  мрад,  $\theta_{\parallel} = 0$

Fig. 3. The same as in Fig. 2, but with a larger target thickness.  $L = 5$  mkm,  $\gamma = 200$ ,  $\theta_{\perp} = 5$  mrad,  $\theta_{\parallel} = 0$

Рассмотрим влияние многократного рассеяния на спектрально-угловую плотность излучения. На рис. 4. и рис. 5 представлены кривые, построенные по формулам (15)-(18), описывающие переходное излучение  $\langle F_1^{(s)} \rangle$  и вклады переходных излучений от различных границ  $\langle F_1^{(s)} \rangle$  и  $\langle F_2^{(s)} \rangle$ , и их интерференцию  $\langle F_{int}^{(s)} \rangle$ . Кривые на рис. 4. и рис. 5 построены для тех же условий, что кривые на рис. 2 и рис. 3 соответственно. Из сравнения рис. 2 и рис. 4, а также рис. 3 и рис. 5 видно, что при учете многократного рассеяния излучающих электронов на атомах мишени, спектрально-угловая плотность ПИ существенно возрастает и в основном за счет вклада ПИ от входной границы мишени  $\langle F_1^{(s)} \rangle$ .

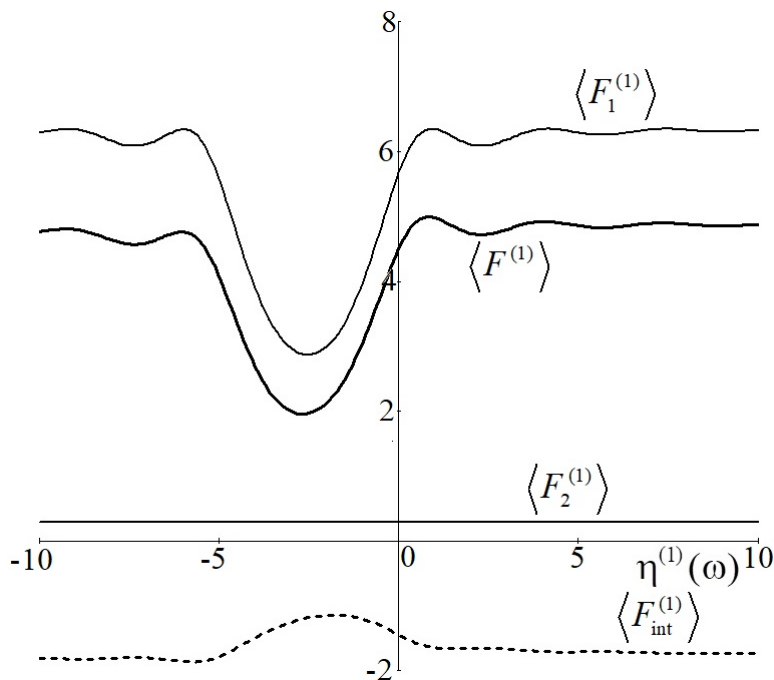


Рис. 4. То же, что на рис. 2, но с учетом многократного рассеяния.  $L = 2$  мкм,  $\gamma = 200$ ,  $\theta_{\perp} = 5$  мрад,  $\theta_{\parallel} = 0$   
 Fig. 4. The same as in Fig. 2, but taking into account multiple scattering.  $L = 2$  mkm,  $\gamma = 200$ ,  $\theta_{\perp} = 5$  mrad,  $\theta_{\parallel} = 0$

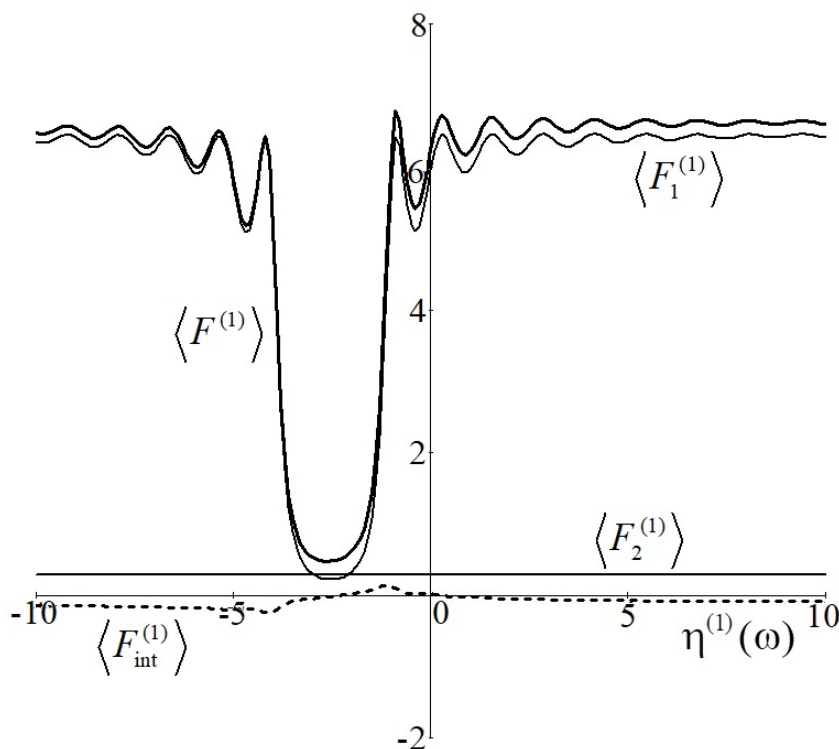


Рис. 5. То же, что на рис. 3, но с учетом многократного рассеяния.  $L = 5$  мкм,  $\gamma = 200$ ,  $\theta_{\perp} = 5$  мрад,  $\theta_{\parallel} = 0$   
 Fig. 5. The same as in Fig. 3, but taking into account multiple scattering.  $L = 5$  mkm,  $\gamma = 200$ ,  $\theta_{\perp} = 5$  mrad,  $\theta_{\parallel} = 0$

**5. Заключение.** В настоящей работе исследовано переходное излучение, генерируемое релятивистским электроном, пересекающим монокристаллическую пластинку в геометрии рассеяния Брэгга. В рамках двухволнового приближения динамической теории дифракции получены выражения, описывающие спектрально-угловую плотность переходного излучения, а также вклад переходных излучений от входной и выходной мишени и их интерференцию. Для учета многократного рассеяния излучающих электронов в среде проведено усреднение каждого слагаемого спектрально-угловой плотности ПИ по угловому распределению электронов в пучке в виде функции Гаусса, меняющейся с длиной пути прохождения в мишени за счет многократного рассеяния. Выявлено, что спектрально-угловая плотность ПИ от выходной поверхности имеет постоянное значение. Показано, что ПИ от входной поверхности монокристаллической пластинки испытывает динамическую дифракцию в монокристаллической мишени. При увеличении толщины мишени спектрально-угловая плотность ПИ изменяется. Спектрально-угловая плотность ПИ при фиксированном угле наблюдения зависит от многократного рассеяния электронов в среде. Выявлено, что при учете многократного рассеяния, при определенных условиях, спектрально-угловая плотность ПИ может существенно возрасти по сравнению со спектрально-угловой плотностью ПИ без учета многократного рассеяния.

#### Список литературы

1. Блажевич С. В., Люшина К. С., Носков А. В. 2019. Когерентное рентгеновское излучение, возбуждаемое пучком релятивистских электронов в монокристалле в направлении оси пучка. ЖЭТФ, 155: 242.
2. Блажевич С. В., Носков А.В. 2009. Параметрическое рентгеновское излучение вдоль скорости релятивистского электрона в условиях асимметричного отражения. ЖЭТФ, 136, 1043.
3. Болотовский Б. М. 1982. Путь формирования и его роль в излучении движущихся зарядов. Труды ФИАН, 140: 95.
4. Барышевский В. Г., Феранчук И. Д. 1971. О переходном излучении - квантов в кристалле. ЖЭТФ, 61: 944–948.
5. Гарибян Г. М. 1960. Излучение частицы при переходе через границу раздела сред с учетом влияния многократного рассеяния. ЖЭТФ, 39(2): 332.
6. Гарибян Г.М., Ян Ши. 1971. Квантовая макроскопическая теория излучения равномерно движущейся заряженной частицы в кристалле. ЖЭТФ, 61: 930–943.
7. Гарибян Г.М., Ян Ши. 1972. Боковые пятна РПИ в кристаллах и их влияние на центральное пятно. ЖЭТФ, 63(4): 1198–1210.
8. Гинзбург В. Л., Цытович В.Н. 1984. Переходное излучение и переходное рассеяние. М., Наука.
9. Гинзбург В. Л., Франк И. М. 1946. Излучение равномерно движущегося электрона, возникающее при его переходе из одной среды в другую. ЖЭТФ, 16: 15.
10. Пафомов В. Е. 1960. Влияние многократного рассеяния на переходное излучение. Докл. АН СССР, 133(6): 1315.
11. Тер-Микаэлян М.Л. 1969. Влияние среды на электромагнитные процессы при высоких энергиях. АН АрмССР, Ереван, 459.
12. Barnett R. M. et al. 1996. Partic1e Data Group. Phys. Rev., 54: 1.
13. Baryshevsky V.G. 1997. Parametric X-ray radiation at a small angle near the velocity direction of the relativistic particle. Nucl. Instr. and Meth. A., 122: 13.
14. Baryshevsky V.G., Feranchuk I.D. 1976. The X-ray radiation of ultrarelativistic electrons in a crystal. Phys. Lett. A., 57: 183.
15. Baryshevsky V.G, Feranchuk I.D., Ulyanekov A.P. 2005. Parametric X-Ray Radiation in Crystals. Theory, Experiment and Applications, Springer, 171.
16. Blazhevich S. V., Noskov A.V., Fedoseev A.E. 2022. Effect of multiple scattering on diffracted transition radiation of a relativistic electron crossing a single crystal target. Journal of Instrumentation, 17.
17. Caticha A. 1992. Phys. Rev. Quantum theory of the dynamical Cherenkov emission of x-ray. 45: 9541.
18. Feranchuk I.D. 1979. Kristallografia, 24: 289.
19. Kubankin A.S., Nasonov N.N., Sergienko V.I., Vnukov I.E. 2003. An investigation of the parametric X-rays along the velocity of emitting particle, Nucl. Instr. and Meth. In Phys. Res. 201: 97.

#### References

1. Blazhevich S. V., Lyushina K. S., Noskov A. V. 2019. Coherent X-ray radiation excited by a beam of relativistic electrons in a single crystal in the direction of the beam axis. ZHETF, 155: 242. (in Russian)
2. Blazhevich S. V., Noskov A. V. 2009. Parametric X-ray emission along the velocity of a relativistic electron under conditions of asymmetric reflection. ZHETF: 136: 1043. (in Russian)
3. Bolotovskiy B. M. 1982. Formation path and its role in the radiation of moving charges. Proceedings of FIAN, 140: 95. (in Russian)
4. Baryshevsky V. G., Feranchuk I. D. 1971. On the transition radiation - quanta in a crystal. ZHETF, 61: 944–948. (in Russian)

5. Garibyan G. M. 1960. Radiation of a particle when passing through the interface between media, taking into account the influence of multiple scattering. ZHETF, 39(2): 332. (in Russian)
6. Garibyan G. M., Yang Shi. 1971. Quantum macroscopic theory of radiation of a uniformly moving charged particle in a crystal. ZHETF, 61: 930–943. (in Russian)
7. Garibyan G. M., Yang Shi. 1972. Lateral RPI spots in crystals and their influence on the central spot. ZHETF, 63(4): 1198–1210. (in Russian)
8. Ginzburg V. L., Tsytoovich V. N. 1984. Transition Radiation and Transition Scattering. М., Nauka. (in Russian)
9. Ginzburg V. L., Frank I. M. 1946. Radiation of a uniformly moving electron arising during its transition from one medium to another. ZHETF, 16: 15. (in Russian)
10. Pafomov V. E. 1960. Influence of Multiple Scattering on Transition Radiation, Dokl. Academy of Sciences of the USSR, 133(6): 1315. (in Russian)
11. Ter-Mikaelyan M. L. 1969. Influence of the medium on electromagnetic processes at high energies. Academy of Sciences of the ArmSSR, Yerevan, 459. (in Russian)
12. Barnett R. M. et al. 1996. Particle Data Group. Phys. Rev. 54: 1.
13. Baryshevsky V.G. 1997. Parametric X-ray radiation at a small angle near the velocity direction of the relativistic particle. Nucl. Instr. and Meth. A., 122: 13.
14. Baryshevsky V.G., Feranchuk I.D. 1976. The X-ray radiation of ultrarelativistic electrons in a crystal. Phys. Lett. A., 57: 183.
15. Baryshevsky V.G., Feranchuk I.D., Ulyanenko A.P. 2005. Parametric X-Ray Radiation in Crystals. Theory, Experiment and Applications, Springer, 171.
16. Blazhevich S. V., Noskov A. V., Fedoseev A. E. 2022. Effect of multiple scattering on diffracted transition radiation of a relativistic electron crossing a single crystal target. Journal of Instrumentation, 17.
17. Caticha A. 1992. Phys. Rev. Quantum theory of the dynamical Cherenkov emission of x-ray. 45: 9541.
18. Feranchuk I.D. 1979. Kristallografia 24: 289.
19. Kubankin A.S., Nasonov N.N., Sergienko V.I., Vnukov I.E. 2003. An investigation of the parametric X-rays along the velocity of emitting particle. Nucl. Instr. and Meth. In Phys. Res., 201: 97.

**Конфликт интересов:** о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

**Conflict of interest:** no potential conflict of interest related to this article was reported.

*Поступила в редакцию 17.04.2023*

*Поступила после рецензирования 22.05.2023*

*Принята к публикации 25.05.2023*

*Received 17.04.2023*

*Revised 22.05.2023*

*Accepted 25.05.2023*

---

#### СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

**Носков Антон Валерьевич** – доктор физико-математических наук, профессор, Белгородский государственный технологический университет им. В. Г. Шухова  
ул. Костюкова, 46, Белгород, 308012, Россия

**Бондаренко Виктория Александровна** – аспирант, Белгородский государственный национальный исследовательский университет  
ул. Победы, 85, г. Белгород, 308015, Россия

**Блажевич Сергей Владимирович** – доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической и экспериментальной физики, Белгородский государственный национальный исследовательский университет  
ул. Победы, 85, г. Белгород, 308015, Россия

**Юрьева Алина Александровна** – студент выпускного курса института инженерных и цифровых технологий, Белгородский государственный национальный исследовательский университет  
ул. Победы, 85, г. Белгород, 308015, Россия

**Федосеев Андрей Эдуардович** – аспирант, Белгородский государственный национальный исследовательский университет  
ул. Победы, 85, г. Белгород, 308015, Россия



**INFORMATION ABOUT THE AUTHORS**

**Noskov Anton Valerievich** –Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Belgorod State Technological Shukhov's University, Belgorod, Russia

**Bondarenko Victoria Aleksandrovna** –Postgraduate Student, Belgorod State National Research University, Belgorod, Russia

**Blazhevich Sergey Vladimirovich** –Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Department of Theoretical and Experimental Physics, Belgorod State National Research University, Belgorod, Russia

**Yurieva Alina Aleksandrovna** –graduate student at the Institute of Engineering and Digital Technologies, Belgorod State National Research University, Belgorod, Russia

**Fedoseev Andrey Eduardovich** –postgraduate student, Belgorod State National Research University, Belgorod, Russia