НИУ БелГУ
BELGOROD STATE UNIVERSITY (BSU)

ISSN 2687-0959(online)

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА & ФИЗИКА

APPLIED MATHEMATICS & PHYSICS

2023. Том 55, № 3

http://pmph.bsu.edu.ru/index.php/journal ISSN 2687-0959

Прикладная математика & Физика

2023. Том 55, № 3

Основан в 1995 г. Журнал принимает к публикации оригинальные и обзорные статьи отечественных и зарубежных авторов по всем разделам современной математики и физики, и их приложений, исторические обзоры научной деятельности выдающихся учёных и краткие сообщения о научной жизни и научных мероприятиях в России и за рубежом. Журнал включен в Перечень ВАК рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней кандидата и доктора наук (1.1.1 – вещественный, комплексный и функциональный анализ, 1.1.2 – дифференциальные уравнения и математическая физика, 1.3.8 – физика конденсированного состояния). До 2020 г. журнал издавался под названием «Научные ведомости Белгородского государственного университета. Математика. Физика».

УЧРЕДИТЕЛЬ:

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Белгородский государственный национальный исследовательский университет».

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор). Выходит 4 раза в год.

Выпускающий редактор: Ю. В. Ивахненко
Корректура Ю. В. Ивахненко
Компьютерная верстка: О. В. Чернова
Оригинал-макет: В. Б. Васильев
E-mail: vasilyev_v@bsu.edu.ru

Гарнитура Times. Уч. изд. л. 9,7
Дата выхода 30.09.2023.
Оригинал-макет подготовлен отделом объединенной редакции научных журналов НИУ «БелГУ»
308015, г. Белгород, ул. Победы, 85.

Свидетельство о регистрации средства массовой информации
ЭЛ № ФС 77-77959 от 19.02.2020.

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

Applied Mathematics & Physics

2023. Volume 55, No 3

Founded in 1995. The journal accepts for publication original and review articles by domestic and foreign authors on all areas of modern mathematics and physics and their applications, historical reviews of the scientific activities of prominent scientists and brief reports on scientific life and scientific events in Russia and abroad.The journal is included into the List of Higher Attestation Commission of peer-reviewed scientific publications where the main scientific results of dissertations for obtaining scientific degrees of a candidate and doctor of science should be published (1.1.1 – material, complex and functional analysis, 1.1.2 – differential equations and mathematical physics, 1.3.8 – condensed matter physics). Until 2020, the journal was published with the name «Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics. Physics».

FOUNDER:

Federal state autonomous educational establishment of higher education
«Belgorod National Research University».

The journal has been registered at the Federal service for supervision of communications information technology and mass media (Roskomnadzor). Publication frequency: 4 /year.

Commissioning Editor Yu. V. Ivakhnenko
Proofreading Yu. V. Ivakhnenko
Computer imposition O. V. Chernova
Dummy layout by V. B. Vasilyev
E-mail: vasilyev_v@bsu.edu.ru

Typeface Times. Publisher's signature 9,7
Date of publishing 30.09.2023.
The layout is presented by Department of the united Editorial Board of Scientific Journals Belgorod National Research University
Address: 85 Pobeda St., Belgorod, 308015, Russia

Mass media registration certificate
EL № FS 77-77959 dd 19.02.2020.

CONTENTS

MATHEMATICS

Прикладная математика & Физика, 2023, том 55, № 3. С. 197–206.
Applied Mathematics & Physics, 2023, Volume 55, No 3. P. 197–206.

МАТЕМАТИКА
MATHEMATICS

УДК 517.55+517.96
MSC 39A06, 32A10, 39A10, 39A14
Оригинальное исследование

DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-3-197-206

Первые асимптотики решений вырождающихся дифференциальных уравнений второго порядка

[1] **Архипов В. П.**, [2] **Глушак А. В.**
[1] Орловский государственный университет им. И. С. Тургенева,
Россия, 302026, г. Орел, ул. Комсомольская, 95
varhipov@inbox.ru
[2] Белгородский государственный национальный исследовательский университет,
Россия, 308015, Белгород, ул. Победы, 85
Glushak@bsu.edu.ru

Аннотация. Для обыкновенных линейных вырождающихся дифференциальных уравнений второго порядка предложен метод построения асимптотических представлений решений, позволяющий построить точные асимптотики решений в окрестности точки вырождения. Приводится пример получения степенной асимптотики.

Ключевые слова: вырождающиеся дифференциальные уравнения, точка вырождения, асимптотические представления, степенная асимптотика

Для цитирования: Архипов В. П., Глушак А. В. 2023. Первые асимптотики решений вырождающихся дифференциальных уравнений второго порядка. *Прикладная математика & Физика*, 55(3): 197–206.
DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-3-197-206

Original Research

First Asymptotics of Solutions of Degenerate Differential Equations of the Second Order

[1] **Viktor P. Arkhipov**, [2] **Alexander V. Glushak**
[1] Oryel State University named after I. S. Turgenev,
95 Komsomolskaya st., Orel, 302026, Russia
varhipov@inbox.ru
[2] Belgorod National Research University,
85 Pobedy st., Belgorod, 308015, Russia
Glushak@bsu.edu.ru

Abstract. For ordinary linear degenerate differential equations of the second order, a method for constructing asymptotic representations of solutions is proposed, which allows construct exact asymptotics of solutions in a neighborhood of the degeneracy point. An example is given obtaining a power asymptotics.

Keywords: Degenerate Differential Equations, Degeneracy Point, Asymptotic Representations, Power Asymptotics

For citation: Arkhipov V. P., Glushak A. V. 2023. First Asymptotics of Solutions of Degenerate Differential Equations of the Second Order. *Applied Mathematics & Physics*, 55(3): 197–206. (in Russian) DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-3-197-206

---

1. Введение. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка, при сохранении знака коэффициента при старшей производной, подробно изучены в классических курсах дифференциальных уравнений. Однако изучение поведения решений вблизи точки вырождения указанного коэффициента требует определенных усилий (см. [3, 4, 1]). В настоящей работе нас интересует возможность построения точных асимптотик решений в окрестности точки вырождения при $t \to 0+$.

Рассмотрим вырождающееся при $t = 0$ дифференциальное уравнение

$$(a(t)u'(t))' + b(t)u'(t) + c(t)u(t) = f(t) \tag{1}$$

с действительными на отрезке $[0, 1]$ коэффициентами и такими, что $b(0) \neq 0$, $a(0) = 0$, $a(t) > 0$ при $t \in (0, 1]$, а также при некоторых предположениях о гладкости коэффициентов, позволяющих проводить необходимые преобразования.

В работах [1, 2] построены разложения решений уравнения (1) по асимптотическим рядам специально выбранных функций. Приведем во введении некоторые из этих результатов, которые понадобятся для наших дальнейших исследований.

Пусть $d(t)$ — произвольная достаточно гладкая функция и такая, что $d(t) \neq 0$ при $t \in (0,1]$. Для любых точек $t_0, t \in (0,1]$ определим две функции $v_k(t),\ k = 1,2$ по формуле

$$v_k(t,t_0) = \frac{1}{\sqrt{d(t)}} \exp\left(\int\limits_t^{t_0} \frac{b(\tau) - (-1)^k d(\tau)}{2a(\tau)}\, d\tau \right), \tag{2}$$

а также функции

$$h(t) = \frac{1}{4d(t)} \left(a(t) \left(\frac{d'(t)}{d(t)} \right)^2 - 2 \left(\frac{a(t)d'(t)}{d(t)} \right)' + \frac{d^2(t) - b^2(t) + 4a(t)c(t) - 2a(t)b'(t)}{a(t)} \right), \tag{3}$$

$$s(t) = \int\limits_0^t h(\tau)\, d\tau, \quad w(t,t_0) = \int\limits_t^{t_0} \frac{d(\tau)}{a(\tau)}\, d\tau. \tag{4}$$

При $f(t) \equiv 0$ линейно независимые решения однородного уравнения (1) могут быть представлены в виде $u_1(t) = \Phi(t)v_1(t), \quad u_2(t) = \Psi(t)v_2(t)$.

Функция $\Phi(t)$ — решение задачи

$$\Phi(t) = 1 + K_1\Phi(t), \quad \Phi(0) = 1, \tag{5}$$

где K_1 — интегральный оператор

$$K_1\varphi(t) = \int\limits_0^{t_0} k_1(t,\tau)\varphi(\tau)\, d\tau$$

с ядром $k_1(t,\tau) = h(\tau)$ при $0 \le \tau \le t \le t_0$ и $k_1(t,\tau) = h(\tau)\exp\left(w(\tau,t_0) - w(t,t_0)\right)$ при $t \le \tau \le t_0$, функции $h(t),\ w(t,t_0)$ введены в (3), (4).

Аналогично, функция $\Psi(t)$ — решение задачи

$$\Psi(t) = 1 + K_2\Psi(t), \quad \Psi(0) = 1, \tag{6}$$

где K_2 — интегральный оператор

$$K_2\psi(t) = \int\limits_0^{t} k_2(t,\tau)\psi(\tau)\, d\tau$$

с ядром $k_2(t,\tau) = -h(\tau)\left(1 - \exp\left(w(t,t_0) - w(\tau,t_0)\right)\right)$ при $0 \le \tau \le t$.

В дальнейшем будем полагать $b(t) = b = const \neq 0,\ a(t) = t^m a_0(t),\ m \ge 2,\ a_0(t) > 0$, что означает случай сильного вырождения уравнения (1).

Пусть $d(t) = \sqrt{b^2 - 4a(t)c(t)}$. Выберем точку $t_0 > 0$ так, чтобы для $t \in [0,t_0]$ выполнялись неравенства $d(t) > 0$. Такой выбор функции $d(t)$ и точки t_0 позволяет при $t \to 0$ записать асимптотические представления

$$a(t) = t^m O(1),\ h(t) = t^{2m-2}O(1),\ d(t) = |b|\left(1 + t^m O(1)\right),\ s(t) = \int\limits_0^t h(\tau)d\tau = t^{2m-1}O(1), \tag{7}$$

что в дальнейшем позволит использовать (7) при нахождении асимптотик решений.

2. Асимптотические свойства интегральных операторов K_1 и K_2. Будем предполагать в дальнейшем, что функции $a(t)$ и $f(t)$ имеют именно степенную асимптотику конечного порядка в точке $t = 0$.

Лемма 1. *Пусть $a(t), f(t), d(t) \in C^2[0,t_0]$ для некоторого $t_0 \in (0,1]$, $a(0) = a'(0) = 0$ и на $(0,t_0]$ $a(t) > 0, f(t) \neq 0$, кроме того, $d(t) > 0$ на $[0,t_0]$. Тогда справедливы представления*

$$\int\limits_t^{t_0} f(\xi)\exp\left(-\int\limits_t^{\xi} \frac{d(\tau)}{a(\tau)} d\tau \right) d\xi = \frac{a(t)}{d(t)} \left(f(t) + \left(\frac{a(t)f(t)}{d(t)} \right)' (1 + a'(t)O(1)) \right), \tag{8}$$

$$\int\limits_0^{t} f(\xi)\exp\left(-\int\limits_{\xi}^{t} \frac{d(\tau)}{a(\tau)} d\tau \right) d\xi = \frac{a(t)}{d(t)} \left(f(t) - \left(\frac{a(t)f(t)}{d(t)} \right)' (1 + o(1)) \right). \tag{9}$$

Доказательство. Дважды интегрируя по частям, получим представление

$$\int\limits_t^{t_0} f(\xi)\exp\left(-\int\limits_t^{\xi}\frac{d(\tau)}{a(\tau)}d\tau\right)d\xi=\frac{a(t)f(t)}{d(t)}+\int\limits_t^{t_0}\left(\frac{a(\xi)f(\xi)}{d(\xi)}\right)'\exp\left(-\int\limits_{\xi}^{t}\frac{d(\tau)}{a(\tau)}d\tau\right)d\xi-$$

$$-\frac{a(t_0)f(t_0)}{d(t_0)}\exp\left(-\int\limits_t^{t_0}\frac{d(\tau)}{a(\tau)}d\tau\right)=\frac{a(t)f(t)}{d(t)}+\int\limits_t^{t_0}\left(\frac{a(\xi)f(\xi)}{d(\xi)}\right)'\exp\left(-\int\limits_{\xi}^{t}\frac{d(\tau)}{a(\tau)}d\tau\right)d\xi+o(t^{\infty})=$$

$$=\frac{a(t)f(t)}{d(t)}+\frac{a(t)\tilde f(t)}{d(t)}+\int\limits_t^{t_0}\left(\frac{a(\xi)\tilde f(\xi)}{d(\xi)}\right)'\exp\left(-\int\limits_t^{\xi}\frac{d(\tau)}{a(\tau)}d\tau\right)d\xi+o(t^{\infty}),\tag{10}$$

где $\tilde f(t)=\left(\dfrac{a(t)f(t)}{d(t)}\right)'$.

Рассмотрим далее отношение

$$\frac{\int\limits_t^{t_0}\left(a(\xi)\tilde f(\xi)/d(\xi)\right)'\exp\left(-\int\limits_t^{\xi}d(\tau)/a(\tau)d\tau\right)d\xi}{\tilde f(t)a(t)a'(t)/d(t)}=\frac{\int\limits_t^{t_0}\left(a(\xi)\tilde f(\xi)/d(\xi)\right)'\exp\left(\int\limits_{\xi}^{t_0}d(\tau)/a(\tau)d\tau\right)d\xi}{\tilde f(t)a(t)a'(t)/d(t)\exp\left(\int\limits_t^{t_0}d(\tau)/a(\tau)d\tau\right)d\xi}$$

и, поскольку функции $a(t)$ и $f(t)$ имеют именно степенную асимптотику конечного порядка в точке $t=0$, то применяя правило Лопиталя к этому отношению, получим

$$\lim_{t\to 0+}\frac{-\left(a(t)\tilde f(t)/d(t)\right)'}{\left(a(t)a'(t)\tilde f(t)/d(t)\right)'-a'(t)\tilde f(t)}=const=O(1).\tag{11}$$

Таким образом, в силу доказанного равенства (11)

$$\int\limits_t^{t_0}\left(a(\xi)\tilde f(\xi)/d(\xi)\right)'\exp\left(-\int\limits_t^{\xi}d(\tau)/a(\tau)d\tau\right)d\xi=\frac{\tilde f(t)a(t)a'(t)}{d(t)}O(1),$$

что вместе с (10) устанавливает асимптотическое представление (8).

Докажем теперь представление (9). Как и при доказательстве (8), дважды интегрируя по частям, получим

$$\int\limits_0^{t} f(\xi)\exp\left(-\int\limits_{\xi}^{t}\frac{d(\tau)}{a(\tau)}d\tau\right)d\xi=\int\limits_0^{t}\frac{a(\xi)f(\xi)}{d(\xi)}\frac{d(\xi)}{a(\xi)}\exp\left(-\int\limits_{\xi}^{t}\frac{d(\tau)}{a(\tau)}d\tau\right)d\xi=$$

$$=\frac{a(t)f(t)}{d(t)}-\int\limits_0^{t}\frac{a(\xi)}{d(\xi)}\left(\frac{a(\xi)f(\xi)}{d(\xi)}\right)'\frac{d(\xi)}{a(\xi)}\exp\left(-\int\limits_{\xi}^{t}\frac{d(\tau)}{a(\tau)}d\tau\right)d\xi=$$

$$=\frac{a(t)f(t)}{d(t)}-\frac{a(t)}{d(t)}\left(\frac{a(t)f(t)}{d(t)}\right)'+\int\limits_0^{t}\left(\frac{a(\xi)}{d(\xi)}\left(\frac{a(\xi)f(\xi)}{d(\xi)}\right)'\right)'\exp\left(-\int\limits_{\xi}^{t}\frac{d(\tau)}{a(\tau)}d\tau\right)d\xi.\tag{12}$$

Поскольку

$$\lim_{t\to 0+}\frac{\int\limits_0^{t}\tilde f(\xi)\exp\left(-\int\limits_{\xi}^{t}d(\tau)/a(\tau)d\tau\right)d\xi}{\tilde f(t)a(t)a'(t)/d(t)}=\lim_{t\to 0+}\frac{\int\limits_0^{t}\tilde f(\xi)\exp\left(-\int\limits_{\xi}^{t_0}d(\tau)/a(\tau)d\tau\right)d\xi}{\tilde f(t)a(t)a'(t)/d(t)\exp\left(-\int\limits_t^{t_0}d(\tau)/a(\tau)d\tau\right)d\xi}=$$

$$= \lim_{t\to 0+} \frac{\tilde{f}(t)\exp\left(-\int\limits_t^{t_0} d(\tau)/a(\tau)d\tau\right)}{\tilde{f}(t)\exp\left(-\int\limits_t^{t_0} d(\tau)/a(\tau)d\tau\right) + \left(a(t)\tilde{f}(t)/d(t)\right)'\exp\left(-\int\limits_t^{t_0} d(\tau)/a(\tau)d\tau\right)} =$$

$$= \lim_{t\to 0+} \frac{\tilde{f}(t)}{\tilde{f}(t) + \left(a(t)\tilde{f}(t)/d(t)\right)'} = 1,$$

то

$$\int\limits_0^t f(\xi)\exp\left(-\int\limits_\xi^t \frac{d(\tau)}{a(\tau)}d\tau\right)d\xi = \frac{a(t)}{d(t)}\left(f(t) - \frac{a(t)f(t)}{d(t)}\right)'(1+o(1)$$

и из (12) вытекает представление (9). Лемма доказана.

Введем следующие обозначения:

$$K_{10}\varphi(t) = \int\limits_0^t h(\tau)\varphi(\tau)\,d\tau,\ K_{11}\varphi(t) = \int\limits_t^{t_0} h(\tau)\varphi(\tau)\exp\left(w(\tau,t_0) - w(t,t_0)\right)d\tau,\ s(t) = \int\limits_0^t h(\tau)\,d\tau,$$

где функции $h(t),\ w(t,t_0)$ определены в (3), (4).

Интегрируя по частям, будем иметь

$$K_{10}\varphi(t) = \int\limits_0^t h(\tau)\varphi(\tau)\,d\tau = s(t)\varphi(t) - \int\limits_0^t s(\tau)\varphi'(\tau)\,d\tau,$$

а, применяя лемму 1 при $\varphi(t) \in C^2[0,t_0]$, получим

$$K_{11}\varphi(t) = \int\limits_t^{t_0} h(\tau)\varphi(\tau)\exp\left(w(\tau,t_0) - w(t,t_0)\right)d\tau = \frac{a(t)}{d(t)}\left(h(t)\varphi(t) + \left(\frac{a(t)}{d(t)}h(t)\varphi(t)\right)'(1+a'(t)O(1))\right). \quad (13)$$

Поэтому для $K_1\varphi(t)$ справедливо асимптотическое представление

$$K_1\varphi(t) = K_{10}\varphi(t) + K_{11}\varphi(t) =$$

$$= s(t)\varphi(t) - \int\limits_0^t s(\tau)\varphi'(\tau)\,d\tau + \frac{a(t)}{d(t)}\left(h(t)\varphi(t) + \left(\frac{a(t)}{d(t)}h(t)\varphi(t)\right)'(1+a'(t)O(1))\right). \quad (14)$$

Продифференцировав (5) и применив (13), получим асимптотическое представление для производной

$$(K_1\varphi(t))' = \frac{d(t)}{a(t)}\exp(-w(t,t_0))\int\limits_t^{t_0} h(\tau)\varphi(\tau)\exp\left(w(\tau,t_0)\right)\,d\tau = \frac{d(t)}{a(t)}K_{11}\varphi(t) =$$

$$= h(t)\varphi(t) + \left(\frac{a(t)}{d(t)}h(t)\varphi(t)\right)'(1+a'(t)O(1)) = h(t)\varphi(t)\left(1+o(1)\right). \quad (15)$$

Аналогично применяя лемму 1 при $\psi(t) \in C^2[0,t_0]$, получим

$$K_2\psi(t) = -\int\limits_0^t h(\tau)\left(1 - \exp\left(w(t,t_0) - w(\tau,t_0)\right)\right)\psi(\tau)\,d\tau = K_{20}\psi(t) + K_{21}\psi(t) =$$

$$= -s(t)\psi(t) + \int\limits_0^t s(\tau)\psi'(\tau)\,d\tau + \frac{a(t)}{d(t)}\left(h(t)\psi(t) - \left(\frac{a(t)}{d(t)}h(t)\psi(t)\right)'(1+O(1))\right). \quad (16)$$

Дифференцируя (6) и применяя лемму 1, с учетом асимптотических представлений (7), будем иметь

$$(K_2\psi(t))' = k_2(t,t)\psi(t) - \frac{d(t)}{a(t)}\int\limits_0^t h(\tau)\exp\left(w(t,t_0) - w(\tau,t_0)\right)\psi(\tau)\,d\tau =$$

$$= -\frac{d(t)}{a(t)} \int\limits_0^t h(\tau) \exp\left(\int\limits_\tau^t \frac{d(\xi)}{a(\xi)}\, d\xi \right) \psi(\tau)\, d\tau = -h(t)\psi(t) + \left(\frac{a(t)}{d(t)} h(t)\psi(t) \right)' (1 + o(1)) =$$

$$= -h(t)\psi(t)(1 + o(1)). \tag{17}$$

3. Первые асимптотики функций $\Phi(t)$ и $\Psi(t)$. Результаты предыдущего пункта применим для исследования асимптотики функций $\Phi(t)$ и $\Psi(t)$. Отметим, что требования гладкости, накладываемые на рассматриваемые функции, обусловлены методом и не являются точными.

Лемма 2. *Пусть $a(t), c(t) \in C^4[0, t_0]$, $a(t) = t^m a_0(t)$, $m \geq 2$, $a_0(t) > 0$ при $t \in [0, t_0]$, $b(t) = b = const$ и $d(t) = \sqrt{b^2 - 4a(t)c(t)} > 0$. Тогда определяемые равенствами (5), (6) функции $\Phi(t)$ и $\Psi(t)$ допускают при $t \to 0+$ асимптотические представления*

$$\Phi(t) = 1 + s(t) + \frac{a(t)}{d(t)} \left(h(t) + \left(\frac{a(t)}{d(t)} h(t) \right)' \right) + s^2(t)O(1), \tag{18}$$

$$\Psi(t) = 1 - s(t) + \frac{a(t)}{d(t)} \left(h(t) - \left(\frac{a(t)}{d(t)} h(t) \right)' \right) + s^2(t)O(1), \tag{19}$$

где функции $h(t), s(t)$ определены в (3), (4).

Доказательство. Продифференцировав (5) и используя (15), получим

$$\Phi'(t) = (K_1\Phi(t))' = h(t)\Phi(t) + \left(\frac{a(t)}{d(t)} h(t)\Phi(t) \right)' (1 + a'(t)O(1)) = h(t)\Phi(t)(1 + o(1)). \tag{20}$$

Учитывая равенства (5), (14), (20), будем иметь

$$\Phi(t) = 1 + K_1\Phi(t) = 1 + s(t)\Phi(t) - \int\limits_0^t s(\tau)\Phi'(\tau)\, d\tau + \frac{a(t)}{d(t)} \left(h(t)\Phi(t) + \left(\frac{a(t)}{d(t)} h(t)\Phi(t) \right)' \right) (1 + a'(t)O(1)) =$$

$$= 1 + s(t)\Phi(t) - \frac{1}{2} s^2(t)\Phi(t)(1 + o(1)) + \frac{a(t)}{d(t)} h(t)\Phi(t) + \left(\frac{a(t)\Phi(t)}{d(t)} \left(\frac{a(t)h(t)}{d(t)} \right)' + h(t)\Phi'(t) \left(\frac{a(t)}{d(t)} \right)^2 \right) (1 + a'(t)O(1)),$$

поскольку

$$\int\limits_0^t s(\tau)\Phi'(\tau)\, d\tau = \int\limits_0^t s(\tau)h(\tau)\Phi(\tau)(1 + o(1))\, d\tau = \frac{1}{2} s^2(t)\Phi(t)(1 + o(1)).$$

При малых $t > 0$ $\Phi'(t) = h(t)\Phi(t)(1 + o(1))$, поэтому справедливо соотношение

$$\Phi(t) = 1 + s(t)\Phi(t) + \frac{a(t)}{d(t)} h(t)\Phi(t) + \frac{a(t)\Phi(t)}{d(t)} \left(\frac{a(t)h(t)}{d(t)} \right)' + s^2(t)\Phi(t)O(1),$$

разрешая которое относительно $\Phi(t)$, окончательно получим $1 + s(t) + \frac{a(t)}{d(t)} \left(h(t) + \left(\frac{a(t)}{d(t)} h(t) \right)' \right) + s^2(t)O(1)$, что и доказывает асимптотическое представление (18).

Аналогично для $\Psi(t)$ из (6), (16), (17) выводим

$$\Psi'(t) = (K_2\Psi(t))' = -h(t)\Psi(t)(1 + o(1)),$$

$$\Psi(t) = 1 + K_2\Psi(t) = 1 - s(t)\Psi(t) - \int\limits_0^t s(\tau)h(\tau)\Psi(\tau)(1 + o(1))\, d\tau +$$

$$+ \frac{a(t)}{d(t)} \left(h(t)\Psi(t) - \left(\frac{a(t)}{d(t)} h(t)\Psi(t) \right)' \right) (1 + o(1)),$$

$$\Psi(t = 1 - s(t) + \frac{a(t)}{d(t)} \left(h(t) - \left(\frac{a(t)}{d(t)} h(t) \right)' \right) + s^2(t)O(1).$$

Тем самым и асимптотическое представление (19) также установлено. Лемма доказана.

4. Первые асимптотики решений однородного уравнения. Поведение решений однородного уравнения

$$(a(t)u'(t))' + b(t)u'(t) + c(t)u(t) = 0 \tag{21}$$

вблизи точки вырождения $t = 0$ определяется в основном функциями $v_1(t, t_0)$, $v_2(t, t_0)$, заданными равенствами (2) (подробнее см. [1]), которые представляются конкретными функциями и их асимптотики могут быть получены стандартными методами или же с помощью известных пакетов математических вычислений, например, Wolfram Mathematica. Асимптотические представления указанных во введении решений

$$u_1(t) = \Phi(t)v_1(t, t_0), \quad u_2(t) = \Psi(t)v_2(t, t_0) \tag{22}$$

однородного уравнения (21) устанавливаются в следующей теореме, в которой требования к гладкости коэффициентов завышены для упрощения формулировки.

Теорема 1. *Пусть в уравнении (21)* $a(t), c(t) \in C^\infty[0, t_0]$, $a(t) = t^m a_0(t)$, $m \geq 2$, $a_0(t) > 0$ *при* $t \in [0, t_0]$, $b(t) = b = const$ *и* $d(t) = \sqrt{b^2 - 4a(t)c(t)} > 0$. *Тогда существуют линейно независимые решения* $u_1(t)$ *и* $u_2(t)$ *этого уравнения, допускающие при* $t \to 0+$ *следующие асимптотические разложения*

$$u_1(t) = v_1(t, t_0)\left(1 + s(t) + \frac{a(t)}{d(t)}\left(h(t) + \left(\frac{a(t)}{d(t)}h(t)\right)'\right) + s^2(t)O(1)\right), \tag{23}$$

$$u_2(t) = v_2(t, t_0)\left(1 - s(t) + \frac{a(t)}{d(t)}\left(h(t) - \left(\frac{a(t)}{d(t)}h(t)\right)'\right) + s^2(t)O(1)\right), \tag{24}$$

где функции $h(t), s(t)$ *определены в (3), (4). При этом для всех* $n \geq 0$ *и* $b < 0$

$$\lim_{t\to 0+} u_1(t) = v_1(0, t_0) \neq 0, \quad \lim_{t\to 0+} u_2^{(n)}(t) = 0, \tag{25}$$

а для $n \geq 0$ *и* $b > 0$

$$\lim_{t\to 0+} u_1^{(n)}(t) = +\infty, \quad \lim_{t\to 0+} u_2(t) = v_2(0, t_0) \neq 0. \tag{26}$$

Доказательство. Применяя лемму 2 к представлениям (22) получаем асимптотические разложения (23), (24).

Свойства функций $v_1(t, t_0)$, $v_2(t, t_0)$ подробно описаны в статье [1]), в которой установлено, что при $b < 0$ и $n \geq 0$ $\lim\limits_{t\to 0+} v_1(t, t_0) = v_1(0, t_0) > 0$, $\lim\limits_{t\to 0+} v_2^{(n)}(t, t_0) = 0$, а при $b > 0$ $\lim\limits_{t\to 0+} v_1^{(n)}(t, t_0) = +\infty$, $\lim\limits_{t\to 0+} v_2(t, t_0) = v_2(0, t_0) \neq 0$, откуда и следует (25), (26). Теорема доказана.

5. Первые асимптотики решений неоднородного уравнения. Для неоднородного дифференциального уравнения (1) с достаточно гладкими коэффициентами и правой частью в работах [1, 2] установлено существование дважды непрерывно дифференцируемого решения $u_*(t)$ этого уравнения, которое может быть выражено через определяемые равенствами (5), (6) функции $\Phi(t)$, $\Psi(t)$ следующим образом:

$$u_*(t) = A(t)\Phi(t) + B(t)\Psi(t), \tag{27}$$

где

$$A(t) = -\int_0^t \frac{\Psi(\xi)f(\xi)}{\sqrt{d(t)d(\xi)}}\exp\left(-\int_\xi^t \frac{b + d(\tau)}{2a(\tau)}d\tau\right)d\xi,$$

$$B(t) = -\int_t^{t_0} \frac{\Phi(\xi)f(\xi)}{\sqrt{d(t)d(\xi)}}\exp\left(\int_t^\xi \frac{b - d(\tau)}{2a(\tau)}d\tau\right)d\xi.$$

При этом для $b < 0$ $\lim_{t\to 0+} u_*(t) = 0$, а для $b > 0$ $\lim_{t\to 0+} u_*(t) = u_*(0) \neq 0$.

Полученные в (18), (19) асимптотики функций $\Phi(t)$, $\Psi(t)$ позволяют сформулировать следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть относительно коэффициентов уравнения (1) выполнены условия теоремы 1. Тогда при* $b < 0$ *для любой функции* $f(t) \in C^\infty[0, t_0]$ *существует решение* $u_*(t) \in C^\infty[0, t_0]$ *этого неоднородного уравнения, которое в окрестности нуля является бесконечно малым и может быть записано в виде*

$$u_*(t) = A_0(t)\left(1 + s(t) + \frac{a(t)h(t)}{d(t)}\right) + \frac{a(t)}{d(t)}\left(\frac{a(t)h(t)}{d(t)}\right)' +$$

$$+B_0(t)\left(1 - s(t) + \frac{a(t)h(t)}{d(t)}\right) - \frac{a(t)}{d(t)}\left(\frac{a(t)h(t)}{d(t)}\right)' + s^2(t)O(1), \tag{28}$$

где

$$A_0(t) = -\int_0^t \left(1 - s(\xi) + \frac{a(\xi)h(\xi)}{d(\xi)} - \frac{a(\xi)}{d(\xi)}\left(\frac{a(\xi)h(\xi)}{d(\xi)}\right)'\right)\exp\left(\int_\xi^t \frac{c(\tau)d\tau}{d_1(\tau)}\right)\frac{f(\xi)d\xi}{\sqrt{d(t)d(\xi)}} = o(1),$$

$$B_0(t)=-\int\limits_t^{t_0}\left(1+s(\xi)+\frac{a(\xi)h(\xi)}{d(\xi)}+\frac{a(\xi)}{d(\xi)}\left(\frac{a(\xi)h(\xi)}{d(\xi)}\right)'\right)\exp\left(\int\limits_\xi^t\frac{d_1(\tau)d\tau}{a(\tau)}\right)\frac{f(\xi)d\xi}{\sqrt{d(t)d(\xi)}}=o(1),$$

$$d_1(t)=\frac{1}{2}(|b|+d(t)).$$

Если $b>0$, то бесконечно малое в окрестности нуля решение $\tilde{u}_*(t)\in C^\infty[0,t_0]$ неоднородного уравнения (1) может быть записано в виде

$$\tilde{u}_*(t)=\tilde{A}_0(t)\left(1+s(t)+\frac{a(t)h(t)}{d(t)}\right)+\frac{a(t)}{d(t)}\left(\frac{a(t)h(t)}{d(t)}\right)'+$$

$$+\tilde{B}_0(t)\left(1-s(t)+\frac{a(t)h(t)}{d(t)}\right)-\frac{a(t)}{d(t)}\left(\frac{a(t)h(t)}{d(t)}\right)'+s^2(t)O(1),\tag{29}$$

где

$$\tilde{A}_0(t)=-\int\limits_0^{t}\left(1-s(\xi)+\frac{a(\xi)h(\xi)}{d(\xi)}-\frac{a(\xi)}{d(\xi)}\left(\frac{a(\xi)h(\xi)}{d(\xi)}\right)'\right)\exp\left(\int\limits_t^\xi\frac{d_1(\tau)d\tau}{a(\tau)}\right)\frac{f(\xi)d\xi}{\sqrt{d(t)d(\xi)}}=o(1),$$

$$\tilde{B}_0(t)=-\int\limits_t^{t_0}\left(1+s(\xi)+\frac{a(\xi)h(\xi)}{d(\xi)}+\frac{a(\xi)}{d(\xi)}\left(\frac{a(\xi)h(\xi)}{d(\xi)}\right)'\right)\exp\left(\int\limits_\xi^t\frac{c(\tau)d\tau}{d_1(\tau)}\right)\frac{f(\xi)d\xi}{\sqrt{d(t)d(\xi)}}=o(1),$$

Доказательство. Прежде всего отметим, что функции $A_0(t),\tilde{A}_0(t),B_0(t),\tilde{B}_0(t)$ выражаются через заданные функции и их асимптотика может быть получена, возможно и с использованием леммы 1, стандартными методами. В соответствии с условием теоремы и формулами (28), (29) точность указанных асимптотик должна быть порядка t^{4m-2}. Условия гладкости могут быть снижены и определяются лишь методом построения асимптотик и их точностью.

Как уже отмечалось ранее, решение неоднородного уравнения (1) может быть записано в виде (27). При $b<0$ преобразуем $A(t)$ и $B(t)$, используя полученные в лемме 2 асимптотики (18), (19). Будем иметь

$$A(t)=-\int\limits_0^t\frac{\Psi(\xi)f(\xi)}{\sqrt{d(t)d(\xi)}}\exp\left(\int\limits_\xi^t\frac{b-d(\tau)}{2a(\tau)}d\tau\right)d\xi=$$

$$\int\limits_0^t\left(-1+s(\xi)-\frac{a(\xi)h(\xi)}{d(\xi)}+\frac{a(\xi)}{d(\xi)}\left(\frac{a(\xi)h(\xi)}{d(\xi)}\right)'-s^2(\xi)O(1)\right)\exp\left(\int\limits_\xi^t\frac{c(\tau)d\tau}{d_1(\tau)}\right)\frac{f(\xi)d\xi}{\sqrt{d(t)d(\xi)}}=$$

$$=A_0(t)+s^2(t)o(1),\tag{30}$$

$$B(t)=-\int\limits_t^{t_0}\frac{\Phi(\xi)f(\xi)}{\sqrt{d(t)d(\xi)}}\exp\left(\int\limits_t^\xi\frac{b-d(\tau)}{2a(\tau)}d\tau\right)d\xi=$$

$$-\int\limits_t^{t_0}\left(1+s(\xi)+\frac{a(\xi)h(\xi)}{d(\xi)}+\frac{a(\xi)}{d(\xi)}\left(\frac{a(\xi)h(\xi)}{d(\xi)}\right)'+s^2(\xi)O(1)\right)\exp\left(\int\limits_\xi^t\frac{d_1(\tau)d\tau}{a(\tau)}\right)\frac{f(\xi)d\xi}{\sqrt{d(t)d(\xi)}}=$$

$$=B_0(t)+s^2(t)O(1),\tag{31}$$

Подставляя представления (30), (31) в равенство (27), и вновь используя (18), (19), получим требуемую асимптотику (28).

При $b>0$ введем для рассмотрения другое решение $\tilde{u}_*(t)$ неоднородного уравнения (1) так, чтобы $\tilde{u}_*(0)=0$. Выберем его в виде

$$\tilde{u}_*(t)=u_*(t)-C(t_0)u_2(t),\tag{32}$$

где

$$C(t)=-\int\limits_0^t\frac{f(\xi)\Phi(\xi)}{\sqrt{d(\xi)}}\exp\left(-\int\limits_\xi^{t_0}\frac{c(\tau)d\tau}{d_1(\tau)}\right)d\xi.$$

Поскольку

$$B(t)\Psi(t) = -\Psi(t)\int\limits_0^t \frac{f(\xi)\Phi(\xi)}{\sqrt{d(t)d(\xi)}}\exp\left(\int\limits_t^\xi \frac{b-d(\tau)d\tau}{2a(\tau)}\right)d\xi =$$

$$= -v_2(t,t_0)\Psi(t)\int\limits_0^t \frac{f(\xi)\Phi(\xi)}{\sqrt{d(\xi)}}\exp\left(-\int\limits_{t_0}^\xi \frac{c(\tau)d\tau}{d_1(\tau)}\right)d\xi =$$

$$= v_2(t,t_0)\Psi(t)\left(\int\limits_0^t \frac{f(\xi)\Phi(\xi)}{\sqrt{d(\xi)}}\exp\left(\int\limits_{t_0}^\xi \frac{c(\tau)d\tau}{d_1(\tau)}\right)d\xi - \int\limits_0^{t_0} \frac{f(\xi)\Phi(\xi)}{\sqrt{d(\xi)}}\exp\left(\int\limits_{t_0}^\xi \frac{c(\tau)d\tau}{d_1(\tau)}\right)d\xi\right) =$$

$$= v_2(t,t_0)\Psi(t)\left(C(t_0)-C(t)\right) = u_2(t)\left(C(t_0)-C(t)\right),$$

то из последнего равенства и следует $\tilde{u}_*(t) = u_*(t) - C(t_0)u_2(t) = A(t)\Phi(t) - C(t)u_2(t)$, $\tilde{u}_*(0) = 0$.

Определяемое равенством (32) решение $\tilde{u}_*(t)$ запишем в виде

$$\tilde{u}_*(t) = A(t)\Phi(t) + B_*(t)\Psi(t), \tag{33}$$

где $B_*(t) = -v_2(t,t_0)C(t)$, и аналогично предыдущему случаю преобразуем $B_*(t)$, используя (18), (19). Будем иметь

$$B_*(t) = \frac{1}{\sqrt{d(t)}}\exp\left(\int\limits_t^{t_0}\frac{c(\tau)\,d\tau}{d_1(\tau)}\right)\int\limits_0^t \frac{f(\xi)\Phi(\xi)}{\sqrt{d(\xi)}}\exp\left(-\int\limits_\xi^{t_0}\frac{c(\tau)\,d\tau}{d_1(\tau)}\right)d\xi =$$

$$= \int\limits_0^t \left(1 + s(\xi) + \frac{a(\xi)h(\xi)}{d(\xi)} + \frac{a(\xi)}{d(\xi)}\left(\frac{a(\xi)h(\xi)}{d(\xi)}\right)' + s^2(\xi)O(1)\right)\exp\left(\int\limits_t^\xi \frac{c(\tau)d\tau}{d_1(\tau)}\right)\frac{f(\xi)d\xi}{\sqrt{d(t)d(\xi)}} =$$

$$= B_{*,0}(t) + s^2(t)o(1). \tag{34}$$

Подставляя (30), (34) в (33) и вновь применяя (18), (19), устанавливаем утверждение теоремы при $b > 0$. Теорема доказана.

6. Пример построения степенной асимптотики. Покажем на примере возможность получения степенной асимптотики. Пусть в уравнении (1)

$$a(t) = t^m,\ \ m \geq 2,\ \ b = const \neq 0,\ \ c = const,\ t_0 = 1,\ \ f(t) \in C^\infty[0,1], \tag{35}$$

и, таким образом, получим уравнение

$$(t^m u'(t))' + bu'(t) + cu(t) = f(t). \tag{36}$$

Учитывая конкретный вид (35) коэффициентов уравнения (36), произведем необходимые для получения асимптотик вычисления. Имеем

$$h(t) = \frac{1}{4d(t)}\left(a(t)\left(\frac{d'(t)}{d(t)}\right)^2 - 2\left(\frac{a(t)d'(t)}{d(t)}\right)'\right) = \frac{1}{d^5(t)}\left(c_{2m-2}t^{2m-2} + c_{3m-2}t^{3m-2}\right), \tag{37}$$

где

$$c_{2m-2} = m(2m-1)cb^2,\ \ c_{3m-2} = m(4-3m)c^2,\ \ d(t) = \sqrt{b^2 - 4a(t)c(t)} = |b|\sqrt{1 - \frac{4ct^2}{b^2}}.$$

Воспользовавшись известной формулой

$$(1-x)^p = 1 + \sum_{i=1}^n \frac{(-1)^i p(p-1)\cdots(p-i+1)}{i!}x^i + O(x^{n+1})$$

справедливой при $|x| < 1$, определим также

$$\frac{1}{\sqrt{d(t)}} = \frac{1}{\sqrt{|b|}}\left(1 + \frac{1}{4}\frac{4c}{b^2}t^m + \frac{5}{32}\left(\frac{4c}{b^2}\right)^2 t^{2m} + \frac{5\cdot 9}{4^3\cdot 6}\left(\frac{4c}{b^2}\right)^3 t^{3m}\right) +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{|b|}}\left(\frac{5\cdot 9\cdot 13}{4^5\cdot 6}\left(\frac{4c}{b^2}\right)^4 t^{4m} + O\left(\left(\frac{4c}{b^2}\right)^5 t^{5m}\right)\right), \tag{38}$$

$$\frac{1}{d(t)} = \frac{1 + d_{11}t^m}{|b|} + t^{2m}O(1),\ d_{11} = \frac{2c}{b^2}, \quad \frac{1}{d^5(t)} = \frac{1 + d_{51}t^m}{|b|^5} + t^{2m}O(1),\ d_{51} = \frac{10c}{b^2}. \tag{39}$$

Подставив (39) в (37), будем иметь

$$h(t) = \frac{1}{|b|^5}\left(1 + d_{51}t^m\right)\left(c_{2m-2}t^{2m-2} + c_{3m-2}t^{3m-2}\right) + t^{4m-2}O(1) =$$

$$= h_1 t^{2m-2} + h_2 t^{3m-2} + t^{4m-2}O(1), \tag{40}$$

где

$$h_1 = \frac{m(2m-1)c}{|b|^3}, \quad h_2 = \frac{m(4-3m)b^2c^2 + 10c}{|b|^7}$$

и, кроме того,

$$s(t) = \int_0^t h(\tau)\, d\tau = s_1 t^{2m-1} + s_2 t^{3m-1} + t^{4m-2}O(1), \quad s_1 = \frac{h_1}{2m-1}, \quad s_2 = \frac{h_2}{3m-1}. \tag{41}$$

Используя вычисленные асимптотики (38)–(41) в полученных ранее разложениях (18), (19) и (23), (24), получим

$$\Phi(t) = 1 + s_1 t^{2m-1} + \frac{h_1}{|b|}t^{3m-2} + s_2 t^{3m-1} + \frac{(3m-2)h_1}{|b|^2}t^{4m-3} + t^{4m-2}O(1),$$

$$\Psi(t) = 1 - s_1 t^{2m-1} + \frac{h_1}{|b|}t^{3m-2} - s_2 t^{3m-1} + \frac{(3m-2)h_1}{|b|^2}t^{4m-3} + t^{4m-2}O(1),$$

$$u_1(t) = v_1(t, t_0)\Phi(t) =$$

$$= v_1(t, t_0)\left(1 + s_1 t^{2m-1} + \frac{h_1}{|b|}t^{3m-2} + s_2 t^{3m-1} + \frac{(3m-2)h_1}{|b|^2}t^{4m-3} + t^{4m-2}O(1)\right), \tag{42}$$

$$u_2(t) = v_2(t, t_0)\Psi(t) =$$

$$= v_1(t, t_0)\left(1 - s_1 t^{2m-1} + \frac{h_1}{|b|}t^{3m-2} - s_2 t^{3m-1} + \frac{(3m-2)h_1}{|b|^2}t^{4m-3} + t^{4m-2}O(1)\right). \tag{43}$$

Как уже отмечалось при доказательстве теоремы 1, при $b < 0$ все производные в нуле функции $v_2(t, t_0)$ обращаются в нуль, поэтому нахождение степенной асимптотики имеет смысл лишь для $u_1(t)$, и если

$$v_1(t, t_0) = \sum_{j=0}^{4m-3} \frac{v_1^{(j)}(0, t_0)}{j!}t^j + t^{4m-2}O(1),$$

то из (42) выводим

$$u_1(t) = \left(1 + s_1 t^{2m-1} + \frac{h_1}{|b|}t^{3m-2} + s_2 t^{3m-1} + \frac{(3m-2)h_1}{|b|^2}t^{4m-3}\right) \times$$

$$\times \sum_{j=0}^{4m-3} \frac{v_1^{(j)}(0, t_0)}{j!}t^j + t^{4m-2}O(1).$$

При $b > 0$ функция $v_1(t, t_0)$ неограниченна в нуле, поэтому нахождение степенной асимптотики имеет смысл лишь для $u_2(t)$, и если

$$v_2(t, t_0) = \sum_{j=0}^{4m-3} \frac{v_2^{(j)}(0, t_0)}{j!}t^j + t^{4m-2}O(1),$$

то из (43) следует

$$u_2(t) = \left(1 - s_1 t^{2m-1} + \frac{h_1}{|b|}t^{3m-2} - s_2 t^{3m-1} + \frac{(3m-2)h_1}{|b|^2}t^{4m-3}\right) \times$$

$$\times \sum_{j=0}^{4m-3} \frac{v_2^{(j)}(0, t_0)}{j!}t^j + t^{4m-2}O(1).$$

Для построения степенной асимптотики решений $u_*(t)$ при $b < 0$ и $\tilde{u}_*(t)$ при $b > 0$ неоднородного уравнения (36) также можно в (28) и (29) воспользоваться формулами (37)–(41) и разложением

$$f(t) = \sum_{j=0}^{4m-3} \frac{f^{(j)}(0)}{j!}t^j + t^{4m-2}O(1),$$

выполнить необходимые преобразования и результат проинтегрировать.

Список литературы

1. Архипов В. П. 2011. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с вырождающимся коэффициентом при старшей производной. Дифференциальные уравнения, 47(10): 1383–1393.
2. Архипов В. П., Глушак А. В. 2016. Вырождающиеся дифференциальные уравнения второго порядка. Асимптотические представления решений. Научные ведомости Белгородского государственного университета. Математика. Физика, № 20(241), 44: 5–22.
3. Глушко В. П. 1972. Линейные вырождающиеся дифференциальные уравнения, Воронеж. 193.
4. Розов Н. Х., Сушко В. Г., Чудова Д. И. 1998. Дифференциальные уравнения с вырождающимся коэффициентом при старшей производной. Фундаментальная и прикладная математика, 4(3): 1063–1095.

References

1. Arkhipov V. P. 2011. Linear second-order differential equations with degenerating coefficient of the second derivative. Differential Equations, 47(10): 1383–1393. (in Russian)
2. Arhipov V. P., Glushak A. V. 2016. Degenerate differential equations of the second order. Asymptotic representations of solutions. Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathem. Physics, № 20(241), 44: 5–22. (in Russian)
3. Glushko V. P. 1972. Linear Degenerating Differential Equations, Voronezh. 193. (in Russian)
4. Rosov N. Kh., Sushko V. G., Chudova D. I. 1998. Differential equations with a degenerate coefficient multiplying the highest derivative. Fundamental and applied mathematics, 4(3): 1063–1095. (in Russian)

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.
Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 08.05.2023 — Received May 8, 2023
Поступила после рецензирования 20.06.2023 — Revised June 20, 2023
Принята к публикации 24.06.2023 — Accepted June 24, 2023

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Архипов Виктор Петрович – кандидат физико-математических наук, доцент, Орловский государственный университет им. И. С. Тургенева, г. Орел, Россия

Глушак Александр Васильевич – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры прикладной математики и компьютерного моделирования, Белгородский государственный национальный исследовательский университет, г. Белгород, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Viktor P. Arkhipov – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Assosiate Professor, Oryel State University named after I. S. Turgenev, Oryel, Russia

Alexander V. Glushak – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Professor of the Department of Applied Mathematics and Computer Modeling, Belgorod National Research University, Belgorod, Russia

Прикладная математика & Физика, 2023, том 55, № 3. С. 207–219.
Applied Mathematics & Physics, 2023, Volume 55, No 3. P. 207–219.

УДК 519.46
MSC 22E15
DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-3-207-219
Оригинальное исследование

О стратификации и топологической структуре классических компактных групп Ли

[1] **Берестовский В. Н.**, [2] **Никоноров Ю. Г.**
(*Статья представлена членом редакционной коллегии Ю. П. Вирченко*)

[1] Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
Россия, 630090, г. Новосибирск, пр. Акад. Коптюга, 4
vberestov@inbox.ru
[2] Южный математический институт Владикавказского научного центра РАН,
Россия, 362025, г. Владикавказ, ул. Ватутина, 53
nikonorov2006@mail.ru

Аннотация. В статье осуществлена стратификация классических связных компактных групп Ли. Стратом наибольшей размерности каждой такой группы Ли является диффеоморфный образ ее алгебры Ли относительно преобразования Кэли, состоящий в точности из матриц, допускающих (обратное) преобразование Кэли. Дальнейшая стратификация производится на подмножестве исключительных матриц группы Ли, т. е. подмножестве всех матриц, не допускающих преобразования Кэли. Основное внимание уделяется группам Ли унитарных матриц. Как следствие, получено описание топологической структуры множеств исключительных унитарных операторов в двумерных и трехмерных комплексных векторных пространствах; первое из них реализовано физиками как конформная бесконечность пространства Минковского. Стратификация унитарных групп использует указанные в статье фундаментальные области действия их групп Вейля на максимальных торах и однородные пространства с геометрическими структурами – орбиты канонических унитарных матриц относительно действия унитарных групп сопряжениями.

Ключевые слова: гомотопическая группа, группа гомологий, исключительная матрица, неисключительная матрица, преобразование Кэли, страт, стратификация

Благодарности: Работа первого автора выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН, проект FWNF–2022–0006.

Для цитирования: Берестовский В. Н., Никоноров Ю. Г. 2023. О стратификации и топологической структуре классических компактных групп Ли. *Прикладная математика & Физика*, 55(3): 207–219.
DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-3-207-219

Original Research

On the Stratification and Topological Structure of Classical Compact Lie Groups

[1] **Valeriĭ N. Berestovskiĭ**, [2] **Yuriĭ G. Nikonorov**

(*Article submitted by a member of the editorial board Yu. P. Virchenko*)

[1] Sobolev Institute of Mathematics of the SB RAS,
4 Acad. Koptyuga pr., Novosibirsk, 630090, Russia
vberestov@inbox.ru
[2] Southern Mathematical Institute of VSC RAS,
53 Vatutina st., Vladikavkaz, 362025, Russia
nikonorov2006@mail.ru

Abstract. The authors realize the stratification of classical connected compact Lie groups. The stratum of the maximal dimension of any such Lie group is a diffeomorphic image of its Lie algebra with respect to the Cayley transform, consisting exactly of all matrices admitting the (inverse) Cayley transform. The further stratification is applied to the subset of exclusive matrices of the Lie group, i. e. the subset of all matrices that do not admit the Cayley transform. The main attention is paid to the Lie groups of unitary matrices. As a consequence, the authors obtained a description of topological structure for the sets of exclusive unitary operators in two-dimensional and three-dimensional complex vector spaces; the first of these sets is realized by physicists as the conformal infinity of the Minkowski space. The stratification of unitary groups uses actions of their Weyl groups on maximal tori and special homogeneous spaces with geometric structures, orbits of canonical unitary matrices with respect to the action of unitary groups by conjugations.

Keywords: Homotopy Group, Homology Group, Exclusive Matrix, Non-Exclusive Matrix, Cayley Transform, Stratum, Stratification

Acknowledgements: The work of the first author was carried out within the framework of the state task of the Institute of Mathematics of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, project FWNF–2022–0006.

For citation: Berestovskiĭ V. N., Nikonorov Yu. G. 2023. On the Stratification and Topological Structure of Classical Compact Lie Groups. *Applied Mathematics & Physics*, 55(3): 207–219. (in Russian) DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-3-207-219

1. Введение. Классическими связными компактными группами Ли являются группы $SO(n)$, $n \geq 2$; $U(n)$, $n \geq 1$; $Sp(n)$, $n \geq 1$; состоящие из ортогональных унимодулярных, унитарных и симплектических матриц соответствующих размерностей.

Одним из мотивов написания этой статьи послужили вопросы из статьи [2].

Векторное пространство $\mathfrak{u}(n)$ всех косоэрмитовых $(n \times n)$-матриц есть алгебра Ли группы Ли $U(n)$ всех унитарных $(n \times n)$-матриц. Все матрицы из пространства $\mathfrak{u}(n)$ неисключительны, т. е. для них определено преобразование Кэли c [12]. Множество N неисключительных матриц из $U(n)$ открыто и всюду плотно в $U(n)$. Преобразования Кэли на $\mathfrak{u}(n)$ и N — взаимно обратные диффеоморфизмы $\mathfrak{u}(n)$ и N. Это известные результаты. Доказательства даны и в [2].

Пространство $\mathfrak{u}(2)$ с лоренцевой квадратичной формой det есть пространство-время Минковского M_0, соответствующая левоинвариантная лоренцева метрика $\langle\cdot,\cdot\rangle$ на $U(2)$ биинвариантна, $c : \mathfrak{u}(2) \to U(2)$ — *причинное преобразование* и $M = U(2)$ — *причинная компактификация* пространства M_0 [27].

В [2] установлены топологическая, дифференциальная и геометрическая структуры множества исключительных матриц $U(2) \setminus N$ в $U(2)$; это множество физики называют *конформной бесконечностью пространства Минковского* [8]. На основе биинвариантности лоренцевой метрики $\langle\cdot,\cdot\rangle$ на $U(2)$, в [2] доказано, что $U(2) \setminus N$ — объединение всех (замкнутых, диффеоморфных окружностям) изотропных геодезических в $(U(2), \langle\cdot,\cdot\rangle)$ с началом $-I_2$. Те же результаты получены ранее другими методами в статьях А. Ядчика [22], [23].

В [2] был поставлен естественный вопрос:

Вопрос 1. *Какова структура множества $U(n) \setminus N$ всех исключительных матриц в $U(n)$ при $n \geq 3$, в частности при $n = 3$?*

Во втором разделе приводится некоторая информация о группах Ли $U(n)$ и $SU(n)$, в том числе из статьи [2].

В третьем разделе рассматриваются максимальные торы и группы Вейля компактных связных групп Ли. Указаны фундаментальные области действий групп Вейля на максимальных торах для групп Ли $U(n)$ и $SU(n)$.

В четвертом разделе рассматриваются каноническая форма унитарных матриц, однородные пространства — орбиты канонических унитарных матриц относительно действия унитарных групп Ли сопряжениями — и геометрические структуры на этих однородных пространствах.

Подмножества неисключительных и исключительных матриц в $U(n)$ инвариантны относительно действия группы Ли $SU(n) \subset U(n)$ сопряжениями.

В пятом разделе исследуются подмножества исключительных матриц в группах Ли $U(n)$, в том числе их стратификация, в примерах подробно рассматриваются случаи $n = 2$ и $n = 3$.

В шестом разделе приводятся сведения о гомотопических группах, группах гомологий и когомологий групп Ли $U(n)$ и $SU(n)$.

В седьмом разделе многие из результатов для групп Ли $U(n)$ и $SU(n)$ переносятся (как правило, без доказательств) на остальные классические связные компактные (матричные) группы Ли.

2. Группы Ли $U(n)$ и $SU(n)$. (Инволютивная) операция * применима ко всем комплексным матрицам и есть композиция транспонирования и комплексного сопряжения матриц. Комплексная $(n \times n)$-матрица A называется *эрмитовой* (соответств., *косоэрмитовой*), если $A^* = A$ $(A^* = -A)$. Комплексная $(n \times n)$-матрица B называется *унитарной*, если $B^* = B^{-1}$; они составляют *унитарную группу* $U(n)$.

Векторное пространство $\mathfrak{u}(n)$ всех косоэрмитовых $(n \times n)$-матриц со скобкой Ли $[\cdot,\cdot]$ — алгебра Ли группы Ли $U(n)$, а подалгебра $\mathfrak{su}(n) \subset \mathfrak{u}(n)$ бесследовых косоэрмитовых матриц — алгебра Ли группы Ли $SU(n) \subset U(n)$. Скалярное произведение $(X, Y) = \operatorname{tr}(X^*Y) = -\operatorname{tr}(XY)$ на $\mathfrak{u}(n)$ и $\mathfrak{su}(n)$ распространяется до биинвариантной римановой метрики $(\cdot,\cdot)$ на $U(n)$ и $SU(n)$.

Группа Ли $U(n)$ — связная, максимальная компактная подгруппа и вещественная форма связной комплексной группы Ли $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ невырожденных $(n \times n)$-матриц; $\dim(U(n)) = n^2$. Группа Ли $\mathrm{SU}(n) = U(n) \cap \mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$, $n \geq 2$, – связная, максимальная компактная подгруппа и вещественная форма комплексной группы Ли $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$ невырожденных $(n \times n)$-матриц с определителем 1, $\dim(\mathrm{SU}(n)) = n^2 - 1$. Алгебры Ли $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$, $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ – комплексификации вещественных компактных алгебр Ли $\mathfrak{u}(n)$, $\mathfrak{su}(n)$. Алгебра Ли $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ простой группы Ли $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$ – комплексная алгебра Ли типа A_{n-1}.

Отсюда и из теоремы 2 п. 5.2.1 в [6] вытекает, что $(\mathrm{GL}(n),\mathbb{C})$ диффеоморфна $U(n) \times \mathbb{R}^{n^2}$, $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$ диффеоморфна $\mathrm{SU}(n) \times \mathbb{R}^{n^2-1}$ и гомотопические группы групп Ли $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ и $U(n)$ (соотв., групп Ли

$\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$ и $\mathrm{SU}(n)$) совпадают. Группы Ли $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$ и $\mathrm{SU}(n)$ связны и односвязны вследствие упражнений 3.2 и 3.6 главы 1 в [6]. Если I_n – единичная $(n\times n)$-матрица, то центры групп Ли равны

$$C(\mathrm{SU}(n)) = C(\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})) = \left\{\exp\bigl(2\pi\mathbf{i}(k/n)\bigr)I_n \mid k=1,\dots,n\right\};$$

$$C(U(n)) = \left\{\exp(\mathbf{i}t)I_n \mid t\in\mathbb{R}\right\}$$

изоморфен $U(1)$. Поэтому $U(n)$ редуктивна, а ее подгруппа $SU(n)$ проста.

Определен гомоморфизм групп Ли $\det: U(n)\to U(1)$ с ядром $SU(n)$ и короткой точной последовательностью групп Ли

$$1\to SU(n)\to U(n)\to U(1)\to 1\,.$$

Можно рассматривать $U(1)$ как диагональную подгруппу группы $U(n)$, состоящую из матриц вида $\mathrm{diag}\bigl(\exp(\mathbf{i}t),1,1,\dots,1\bigr)$, $t\in\mathbb{R}$. Поэтому $U(n)$ изоморфна полупрямому произведению $U(1)\leftthreetimes SU(n)$. Как следствие, группа $U(n)$ диффеоморфна $S^1\times SU(n)$, хотя группы Ли $U(n)$ и $U(1)\times SU(n)$ не изоморфны,

$$\pi_1(U(n)) = (\mathbb{Z},+),\quad \pi_m(U(n)) = \pi_m(SU(n)),\quad m\geq 2.$$

Целочисленные гомологии группы Ли $SU(n)$ вычислены Л. С. Понтрягиным (см. [9, Теорема 4]): полином Пуанкаре для группы Ли $SU(n)$ имеет вид

$$P(t)(SU(n)) = \prod_{k=1}^{n-1}(1+t^{2k+1}) = P(t)\left(\prod_{k=1}^{n-1}S^{2k+1}\right). \tag{1}$$

Второе равенство – следствие теоремы Кюннета. Таким образом, гомологии группы $SU(n)$ совпадают с гомологиями указанного произведения сфер, но сама группа Ли $SU(n)$ при $n\geq 3$ не диффеоморфна такому произведению [10]. Вследствие (1), теоремы Кюннета и диффеоморфности $U(n)$ и $S^1\times SU(n)$,

$$P(t)(U(n)) = \prod_{k=0}^{n-1}(1+t^{2k+1}) = P(t)\left(\prod_{k=0}^{n-1}S^{2k+1}\right). \tag{2}$$

3. Максимальные торы и группы Вейля. Теорема 1 [1]. *Максимальная связная коммутативная подгруппа T связной компактной группы Ли G замкнута и является тором. T включает центр CG группы G и является максимальной коммутативной подгруппой в G.*

Определение 1. *Подгруппа $T\subset G$ называется максимальным тором группы G. Коммутативная подалгебра $\mathfrak{t}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы Ли G, соответствующая подгруппе T, называется картановской подалгеброй.*

Теорема 2 [1, 18]. *Любые два максимальных тора T_1, T_2 связной компактной группы Ли G сопряжены: существует элемент $g\in G$ такой, что $T_2 = gT_1g^{-1} := I(g)(T_1)$. При этом для любого элемента $g_0\in G$ и любого максимального тора $T\subset G$ существует элемент $g\in G$ такой, что $I(g^{-1})(g_0)\in T$.*

Элемент $g\in G$ называется *регулярным*, если компонента связности единицы $C(g)_e$ его централизатора $C(g)$ коммутативна и *сингулярным* в противном случае. Другими словами, $g\in G$ регулярен, если $C(g)_e$ — максимальный тор в G; это эквивалентно тому, что $\dim C(g) = \dim T$.

Группа Вейля $W = W(G)$ группы G — группа автоморфизмов ее максимального тора T, являющихся ограничениями внутренних автоморфизмов группы G. Группа W конечна и $W\cong N(T)/T$, где $N(T)\subset G$ – нормализатор тора T.

Максимальный тор $T\subset U(n)$ — множество диагональных $(n\times n)$-матриц вида

$$DU(n) = \mathrm{diag}(\exp\mathbf{i}\lambda_1,\dots,\exp\mathbf{i}\lambda_n) := \exp(\mathbf{i}\Lambda),\quad \Lambda = (\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{R}^n; \tag{3}$$

соответствующая картановская подалгебра $\mathfrak{t}\subset\mathfrak{u}(n)$ состоит из $(n\times n)$-матриц

$$\mathrm{diag}(\mathbf{i}\lambda_1,\dots,\mathbf{i}\lambda_n) := \mathbf{i}\Lambda,\quad \Lambda = (\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{R}^n. \tag{4}$$

Максимальный тор $T_0\subset SU(n)$ — множество диагональных $(n\times n)$-матриц вида (3), где $\Sigma\lambda_k = 0$. Соответствующая картановская подалгебра $\mathfrak{t}_0\subset\mathfrak{su}(n)$ состоит из $(n\times n)$-матриц вида (4), где $\Sigma\lambda_k = 0$.

Группа Вейля $W = W(U(n)) = W(SU(n))$ — симметрическая группа (перестановок) на множестве $\{\lambda_1,\dots,\lambda_n\}$. Ее порядок $|W| = n!$

Рассмотрим многогранник

$$\overline{C} := \Bigl\{\Lambda = (\lambda_1,\dots,\lambda_n) \mid \pi\geq\lambda_1\geq\lambda_2\geq\dots\geq\lambda_n\geq -\pi\Bigr\}. \tag{5}$$

Многогранник $\overline{C}$ имеет $n+1$ гиперграней $\lambda_1=\pi$, $\lambda_n=-\pi$, $\lambda_k=\lambda_{k+1}$, $k=1,\dots,n-1$, является n-мерным симплексом, и включает $(n-1)$-мерный симплекс S, определяемый дополнительным условием $\Sigma\lambda_k = 0$.

Предложение 1. *Множество S — $(n-1)$-мерный симплекс в $\mathbb{R}^n$. При этом*

$$W(\exp(\mathbf{i}S)) = T_0, \quad I(SU(n))(\exp(\mathbf{i}S)) = SU(n); \tag{6}$$

$\exp(\mathbf{i}S)$ — фундаментальная область относительно действия группы Вейля W на максимальном торе $T_0 \subset SU(n)$ и действия группы $I(SU(n))$ на $SU(n)$.
Доказательство. Первое утверждение следует из того, что $\overline{C}$ — n-мерный симплекс в $\mathbb{R}^n$, и определения S. Первое равенство в (6) и утверждение о фундаментальной области для W следуют из вида S и элементов группы W. Отсюда и из теоремы 2 вытекают остальные утверждения предложения. □

Полезно сравнить симплекс S со стандартной камерой Вейля алгебры $\mathfrak{su}(n)$, [16, Глава VII, §6] и с клетками для аффинной группы Вейля [16, Глава VII,§7].

По определению, P — результат склейки гиперграней $\{\Lambda \in \overline{C} \mid \lambda_n = -\pi\}$ и $\{\Lambda \in \overline{C} \mid \lambda_1 = \pi\}$ симплекса $\overline{C}$. Более точно, P — фактор-пространство симплекса $\overline{C}$ по отношению эквивалентности $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \sim (\tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_n)$, если $\lambda_n = -\pi$, $\tilde{\lambda}_1 = \pi$, $\lambda_i = \tilde{\lambda}_{i+1}$ для $i = 1, \dots, n-1$.

Предложение 2. *Справедливы равенства*

$$W(\exp(\mathbf{i}P)) = T, \quad I(U(n))(\exp(\mathbf{i}P)) = I(SU(n))(\exp(\mathbf{i}P)) = U(n)$$

и $\exp(\mathbf{i}P)$ — фундаментальная область для действия группы Вейля W на максимальном торе $T \subset U(n)$ и действия группы $I(U(n)) = I(SU(n))$ на $U(n)$.

4. О каноническом виде унитарных матриц. Любая матрица $B \in U(n)$ унитарно подобна единственной матрице вида

$$A = \operatorname{diag}\big(\exp(\lambda_1 \mathbf{i}), \exp(\lambda_2 \mathbf{i}), \dots, \exp(\lambda_n \mathbf{i})\big) \tag{7}$$

для некоторых действительных чисел λ_k, где $\pi \geq \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n > -\pi$, т. е. $A \in \exp(\mathbf{i}P)$. Матрицы вида (7) мы будем называть *каноническими*, а каноническую матрицу A, унитарно подобную заданной матрице $B \in U(n)$, будем называть *канонической формой* унитарной матрицы B.

Зафиксируем некоторую каноническую матрицу A. Будем говорить, что A имеет тип $t = t(A) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$, где последний вектор состоит из неповторяющихся чисел λ_k, расположенных в порядке убывания. Степень $S = S(A)$ матрицы A есть (упорядоченный) набор $(d_1, d_2, \dots, d_m)$ кратностей соответствующих α_i. Заметим, что $d_1 + \dots + d_m = n$, $\det(A) = \exp\big((d_1\alpha_1 + d_2\alpha_2 + \dots + d_m\alpha_m)\mathbf{i}\big)$.

Для фиксированной канонической матрицы $V \in \mathfrak{u}(n)$, отображение $\mathbb{R} \mapsto U(n)$, $s \mapsto \exp(sV)$ может быть периодическим (если все α_i соизмеримы) или инъективным (если α_i не соизмеримы).

Орбита $\operatorname{Orb}(A)$ матрицы A под действием $I(U(n))$ $(A \mapsto gAg^{-1}, g \in U(n))$ есть однородное пространство $U(n)/C(A)$, где $C(A)$ — централизатор матрицы A в $U(n)$. Этот централизатор имеет вид $\operatorname{diag}(C_1, C_2, \dots, C_m)$, $C_l \in U(d_l)$, $l = 1, \dots, m$. Будем его обозначать как $U(d_1) \times \dots \times U(d_m)$. Так что

$$\operatorname{Orb}(A) = U(n)/(U(d_1) \times \dots \times U(d_m)) \cong SU(n)/S(U(d_1) \times \dots \times U(d_m)). \tag{8}$$

Таким образом, вид орбиты $\operatorname{Orb}(A)$ канонической матрицы $A \in U(n)$ зависит только от набора кратностей $(d_1, d_2, \dots, d_m)$, соответствующих α_i.

Многообразие (8) допускает структуру однородного кэлерова алгебраического многообразия вследствие теоремы 2 в [19]: Пусть G — компактная полупростая группа Ли, U — централизатор некоторого тора в G. Тогда G/U — однородное кэлерово алгебраическое многообразие. Многообразие алгебраическое, если оно комплексно аналитически диффеоморфно комплексному подмногообразию некоторого комплексного проективного пространства $\mathbb{CP}^N$.

С геометрической точки зрения (8) является многообразием флагов типа $(d_1, d_2, \dots, d_m)$ в $\mathbb{C}^n$, т. е. наборов $(P_1, \dots, P_m)$ взаимно ортогональных относительно эрмитовой метрики $\langle \cdot, \cdot \rangle$ подпространств пространства $\mathbb{C}^n$ размерностей $\dim P_k = d_k$, $k = 1, \dots, m$. Определенное так многообразие флагов изоморфно многообразию обобщенных флагов пространства $\mathbb{C}^n$ в обычном смысле [3].

Размерность центра группы $S(U(d_1) \times \dots \times U(d_m))$ равна $m - 1$. Поэтому орбиты, для которых эта размерность равна единице, имеют вид

$$SU(n)/S(U(p) \times U(q)) \cong U(n)/(U(p) \times U(q)), \quad p + q = n,$$

и являются грассмановыми многообразиями комплексных p-подпространств пространства $\mathbb{C}^n$. Одно из них — комплексное проективное пространство $\mathbb{CP}^{n-1}$, снабженное при $p = 1$ канонической комплексной структурой, а при $h = n - 1$ — сопряженной комплексной струкурой (они экивалентны). Известно, что нормальные метрики этих многообразий являются кэлеровыми относительно канонической комплексной структуры и симметрическими (см. п. 8.86 в [3]), в частности, метриками Кэлера — Эйнштейна.

Предложение 3. *Пусть $d := (d_1, \dots, d_m)$ — произвольный фиксированный набор натуральных чисел, являющийся разбиением числа n, т. е. $d_1 + \dots + d_m = n$. Тогда множество всех векторов $\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in P$, группирующихся в наборы $(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ убывающих чисел с указанными кратностями $(d_1, \dots, d_m)$, выпукло и* *является подмножеством единственной минимальной грани $f_d \subset P$. При этом внутренность $\mathrm{Int}(f_d)$ грани f_d есть множество всех указанных векторов Λ с дополнительным условием $\alpha_1 < \pi$; все оставшиеся векторы Λ составляют внутренность грани $f_d \cap P_\pi$, где $P_\pi = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in P \mid \lambda_1 = \pi\}$.*

Теорема 3. *Множество орбит*

$$I(U(n))\Big(\exp\big(\mathbf{i}\,\mathrm{Int}(f_d)\big)\Big) \cong \Big(U(n)/(U(d_1) \times \dots \times U(d_m))\Big) \times \mathrm{Int}(f_d). \tag{9}$$

Множество орбит

$$I(U(n))\Big(\exp\big(\mathbf{i}\,\mathrm{Int}(f_d \cap P_\pi)\big)\Big) \cong \Big(U(n)/(U(d_1) \times \dots \times U(d_m))\Big) \times \mathrm{Int}(f_d \cap P_\pi). \tag{10}$$

Здесь орбиты снабжаются индуцированной дифференциальной структурой из $U(n)$, а символ $\cong$ обозначает диффеоморфность.

Следствие 1. *Указанные в теореме 3 орбиты первого и второго типа задают стратификацию множеств неисключительных и исключительных матриц соответственно из $U(n)$, а теорема указывает диффеоморфность соответствующих стратов.*

5. Множество $U(n) \setminus N$ исключительных матриц. Вещественная или комплексная $(n \times n)$-матрица A, $n \geq 2$, *неисключительная*, если $\det(I + A) \neq 0$. Тогда *преобразование Кэли* $c(A) := (I - A)(I + A)^{-1}$ [12].

Лемма 1 [12, 2]. *Если матрица A неисключительная, то и матрица $B = c(A)$ неисключительная. При этом $c(c(A)) = A$.*

Теорема 4 [2]. *Все матрицы из множества $\mathfrak{u}(n)$ косоэрмитовых $(n \times n)$-матриц неисключительны. Множество N неисключительных матриц из $U(n)$ открыто и всюду плотно в $U(n)$. Преобразования Кэли на $\mathfrak{u}(n)$ и N — взаимно обратные диффеоморфизмы $\mathfrak{u}(n)$ и N.*

Есть два простых описания множества $U(n) \setminus N$ исключительных матриц:

1. $U(n) \setminus N$ состоит из матриц $B \in U(n)$ с собственным числом -1.
2. $U(n) \setminus N$ состоит из матриц $B \in U(n)$ таких, что $\det(I_n + B) = 0$.

Но эти простые описания не дают полного ответа на вопрос 1 и ничего не говорят о топологической и дифференциальной структуре множества $U(n) \setminus N$.

Предложение 4. *Группа $U(n)$ является вещественной алгебраической группой. Множество $U(n) \setminus N$ — вещественное алгебраическое многообразие.*

Доказательство. Первое утверждение — следствие того, что условие $B \in U(n)$ задается конечным числом полиномиальных уравнений второго порядка от вещественных переменных: вещественных и мнимых частей элементов матрицы B. Второе утверждение вытекает из того, что матрица $B \in U(n) \setminus N$, если дополнительно $\det(I_n + B) = 0$, т. е. вещественные и мнимые части элементов матрицы B еще удовлетворяют двум полиномиальным уравнениям n-го порядка. □

Теорема 5. *Для всех $n \geq 2$,*

$$U(n) \setminus N = \Big\{-g \exp(s\sigma) g^{-1} \mid g \in SU(n),\ \sigma \in \mathfrak{t},\ \det\sigma = 0,\ s \in \mathbb{R}\Big\}.$$

Доказательство. Пусть $g \in SU(n)$, $\sigma \in \mathfrak{t}$, $\det\sigma = 0$ и

$$B = -g \exp(s\sigma) g^{-1}.$$

Тогда $\sigma = \mathrm{diag}(\lambda_1\mathbf{i}, \dots, \lambda_n\mathbf{i})$, $\lambda_l = 0$ для некоторого l, $1 \leq l \leq n$, l-й элемент у матрицы $g^{-1}Bg = \mathrm{diag}(-\exp(s\lambda_1\mathbf{i}), \dots, -\exp(s\lambda_n\mathbf{i}))$ равен -1 и

$$\det(I_n + B) = \det(g^{-1}(I_n + B)g) = \det(I_n + g^{-1}Bg) = 0.$$

Пусть теперь $B \in U(n) \setminus N$, т. е. $\det(I_n + B) = 0$, $B \in U(n)$. По теореме 2, существует элемент $g \in U(n)$ такой, что

$$g^{-1}Bg = \mathrm{diag}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n), \quad \varepsilon_k \in U(1), \quad k = 1, \dots, n. \tag{11}$$

Так как $U(n) = U(1)I_nSU(n)$, то можно считать, что $g \in SU(n)$. Далее,

$$0 = \det(I_n + B) = \det(g^{-1}(I_n + B)g) = \det(I_n + g^{-1}Bg).$$

Тогда вследствие (11), существуют $l \in \{1, \dots, n\}$ с $\varepsilon_l = -1$ и $\lambda_l \in \mathbb{R}$, $\lambda_l = 0$:

$$-g^{-1}Bg = \exp(\sigma) = g^{-1}(-\exp(\sigma))g, \sigma = \mathrm{diag}(\lambda_1\mathbf{i}, \dots, \lambda_n\mathbf{i}) \Leftrightarrow$$

$$B = -g\exp(\sigma)g^{-1} = g(-\exp\sigma)g^{-1}, \quad g \in SU(n), \quad \sigma \in \mathfrak{t}, \quad \det\sigma = 0, \tag{12}$$

что и требовалось. □

Каждый элемент $\sigma = \mathrm{diag}(\lambda_1\mathbf{i}, \dots, \lambda_n\mathbf{i}) \in \mathfrak{t}$ с условием $\det\sigma = 0$ имеет вид

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_0, \sigma_1 = \Sigma_{k=1}^{n}(\lambda_k/n)\,\mathrm{diag}(\mathbf{i}, \dots, \mathbf{i}) \in \mathfrak{t}_1, \quad \sigma_0 = \sigma - \sigma_1 \in \mathfrak{t}_0 = \mathfrak{t} \cap \mathfrak{su}(n), \tag{13}$$

$\mathfrak{t}_1$ — центр алгебры Ли $\mathfrak{u}(n)$, $\mathfrak{t}_0$ — алгебра Ли максимального тора T_0 в $SU(n)$,

$$-g\exp(s\sigma)g^{-1} = -\exp(s\sigma_1)g(\exp(s\sigma_0))g^{-1},\ s \in \mathbb{R},\ g \in SU(n),\ \exp(s\sigma_0) \in T_0.$$

Для каждого ненулевого элемента $\sigma_0 \in \mathfrak{t}_0$ существует, и не единственный, элемент $\sigma_1 \in \mathfrak{t}_1$ такой, что $\det\sigma = 0$ для $\sigma = \sigma_1 + \sigma_0$.

Если $n = 2$ и $\sigma_0 = \mathrm{diag}(\mathbf{i}, -\mathbf{i})$, то можно взять $\sigma_1 = \mathrm{diag}(\mathbf{i}, \mathbf{i})$, $\sigma = \sigma_1 + \sigma_0 = \mathrm{diag}(2\mathbf{i}, 0)$. Для каждого элемента $g \in SU(2)$, $-g(\exp(s\sigma))g^{-1}$, $s \in \mathbb{R}$— замкнутая изотропная геодезическая с началом $-I_2$ и периодом π относительно лоренцевой метрики $\langle\cdot,\cdot\rangle$ из введения. Кроме того, максимальный тор $T_0 \subset SU(2)$ — окружность. Отсюда и из теоремы 5 вытекает утверждение из введения

Предложение 5 [2]. $U(2) \setminus N$ *— объединение всех (замкнутых, диффеоморфных окружностям) изотропных геодезических в* $(U(2), \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *с началом* $-I_2$.

Существенные отличия для групп Ли $U(n)$, $n \geq 3$, от случая $n = 2$ состоят в том, что 1-параметрические подгруппы $\exp(s\sigma) \subset T$, $s \in \mathbb{R}$, $\det\sigma = 0$, из теоремы 5 могут быть незамкнутыми или быть подгруппами тора T_0. Отсюда следует, что *при* $n \geq 3$ *нет никакого аналога предложения 5.*

Существует единственная матрица $\exp(\tilde{\sigma})$ в орбите матрицы $-\exp\sigma$, где $\det\sigma = 0$, относительно действия группы $W(U(n))$ следующего вида:

$$\exp(\tilde{\sigma}) := \mathrm{diag}\big(\exp(\lambda_1\mathbf{i}), \dots, \exp(\lambda_n\mathbf{i})\big),\ \tilde{\sigma} \in \mathfrak{t},\ \lambda_1 = \pi \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n > -\pi. \tag{14}$$

Определение 2. *Стратификация* St *гладкого компактного многообразия* M *определяется следующим образом: Задается убывающая последовательность замкнутых в* M *подмножеств* $X_0 = M, X_1, \dots, X_m$ *такая, что*
1) $\dim(X_k) = l_k > \dim(X_{k+1}) = l_{k+1}$, $k = 0, 1, \dots, m-1$;
2) $S_k = X_k \setminus X_{k+1}$, $k = 0, 1, \dots, m-1$; $S_m = X_m$*— конечное дизъюнктное семейство связных открытых в* X_k, $k = 0, 1, \dots, m$, *гладких подмногообразий многообразия* M *размерности* l_k, *называемых стратами стратификации* St;
3) Если страт $\sigma \subset X_k$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, *то* $\overline{\sigma} \setminus \sigma \subset X_{k+1}$.

Замечание 1. Стратификация St многообразия M дает специальное клеточное разбиение, если для каждого ее страта $\sigma \subset X_k$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, существует непрерывное отображение $f_\sigma : B^{l_k}(0,1) \to X_k$, где $B^{l_k}(0,1)$ — замкнутый единичный шар в $\mathbb{R}^{l_k}$ с центром в нуле, такое, что f_σ отображает внутренность шара гомеоморфно на σ, а $f_\sigma(S^{l_k-1}) = \overline{\sigma} \setminus \sigma$. Тогда страты являются клетками получаемого клеточного разбиения.

Вопрос 2. *Является ли стратификация* St *компактного гладкого многообразия* M *его клеточным разбиением, если каждый ее страт* $\sigma \in X_k$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, *диффеоморфен открытому шару* $U^{l_k}(0,1) \subset \mathbb{R}^{l_k}$?

Множество $U(n) \setminus N$ есть множество всех матриц вида (12). Оно имеет некоторые сингулярности. Поэтому желательно осуществить его стратификацию. Для канонической матрицы $A \in U(n)$ включение $A \in U(n) \setminus N$ эквивалентно равенству $\alpha_1 = \pi$, см. (14); $A \in N$ тогда и только тогда, когда $\alpha_1 < \pi$. Объединение всех орбит $\mathrm{Orb}(A)$ для канонических матриц A с условием $\alpha_1 = \pi$ ($\alpha_1 < \pi$) есть множество всех исключительных (неисключительных) унитарных матриц.

Стратификация двух множеств матриц дается в теореме 3 и следствии 1. Другую, более удобную, их стратификацию дают результаты далее.

Предложение 6. *Множество неисключительных матриц* $N \subset U(n)$ *диффеоморфно* $\mathbb{R}^{n^2}$ *и является при этом дизъюнктным объединением орбит относительно присоединенного действия* $U(n)$ *на себе точек из множества* $\exp(\mathbf{i}P_0)$,

$$P_0 := \big\{(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n \mid \pi > \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n > -\pi\big\} \subset P. \tag{15}$$

Доказательство. Поскольку N является диффеоморфным образом пространства косоэрмитовых матриц при преобразовании Кэли, а упомянутое пространство очевидно диффеоморфно $\mathbb{R}^{n^2}$, то мы получаем первое утверждение. Второе утверждение немедленно следует из описания спектра унитарных матриц. □

Для каждого $i = 0, 1, 2, \dots, n$ рассмотрим следующее подмножество в $U(n)$:

$$V_i = \{A \in U(n) \mid A \text{ имеет собственное число } -1 \text{ кратности } i\}. \tag{16}$$

Другими словами, V_i — это множество матриц $A \in U(n)$ таких, что ранг матрицы $A + I_n$ равен $n - i$. Очевидно, что $V_0 = N$, $V_n = \{-I_n\}$.

Теорема 6. *Каждое множество* V_i *диффеоморфно*

$$\Big(U(n)/U(i) \times U(n-i)\Big) \times \mathbb{R}^{(n-i)^2},\ \ i = 0, 1, 2, \dots, n. \tag{17}$$

В частности, V_1 *диффеоморфно* $\mathbb{C}P^{n-1} \times \mathbb{R}^{(n-1)^2}$ *и* $\dim(V_1) = n^2 - 1$.

Доказательство. Случай $i = 0$ рассмотрен в предложении 6. Для каждого фиксированного $i = 1, 2, \dots, n$ имеем следующее описание: V_i — это множество матриц из $U(n)$, унитарно подобных матрицам

$$D_\lambda := \exp\Big(\operatorname{diag}\big(\exp(\lambda_1 \mathbf{i}), \exp(\lambda_2 \mathbf{i}), \dots, \exp(\lambda_n \mathbf{i})\big)\Big) \in U(n), \tag{18}$$

для $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ из множества

$$P_i := \{(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n \mid \lambda_1 = \dots = \lambda_i = \pi > \lambda_{i+1} \ge \dots \ge \lambda_n > -\pi\} \subset P. \tag{19}$$

Централизатор такой матрицы в $U(n)$ относительно действия сопряжениями содержится в группе $U(i) \times U(n-i) \subset U(n)$. Согласно предложению 6, образ P_i при сопряжениях матрицами из $U(i) \times U(n-i)$ диффеоморфен $\mathbb{R}^{(n-i)^2}$. Если же мы рассмотрим P_i при сопряжениях матрицами из $U(n)$, то очевидно получим локально тривиальное расслоение над $\mathbb{R}^{(n-i)^2}$ со слоем $U(n)/(U(i) \times U(n-i))$. Поскольку база расслоения стягиваема в точку, это расслоение тривиально, т. е. сводится к прямому произведению $U(n)/(U(i) \times U(n-i))$ и $\mathbb{R}^{(n-i)^2}$ (см., например, [13, теорема 14.1]). □

Теорема 7. *Справедливы следующие утверждения:*

1) Каждая точка множества V_j *является предельной точкой для каждого множества* V_i *при* $n \ge j > i \ge 1$, *а также для множества* N.

2) $W_i := \bigcup_{k=i}^n V_k$ *— замкнутое множество в* $U(n)$ *для всех* $i = 1, 2, \dots, n$;

3) Каждое множество V_i *является связным и открытым подмножеством в множестве* W_i, $i = 1, 2, \dots, n$;

4) Каждое множество V_i *является гладким подмногообразием в* $U(n)$ *при* $i = 1, 2, \dots, n-1$;

5) Размерность V_i *равна* $n^2 - i^2 \le n^2 - 1 = \dim(U(n) \setminus N)$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Доказательство. Утверждения 1) и 2) сразу следуют из описания спектра соответствующих матриц.

Ясно, что V_i — множество матриц из $U(n)$, унитарно подобных матрицам вида

$$A = \operatorname{diag}\big(\exp(\lambda_1 \mathbf{i}), \exp(\lambda_2 \mathbf{i}), \dots, \exp(\lambda_n \mathbf{i})\big)$$

для некоторых действительных чисел λ_i, где $\pi = \lambda_1 = \dots = \lambda_i > \lambda_{i+1} \ge \dots \ge \lambda_n > -\pi$. Поскольку множество векторов $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ с этим свойством образует связное множество в $\mathbb{R}^n$, а $U(n)$ — связная группа Ли, то V_i является связным. Кроме того, при небольшом шевелении матрицы $A \in V_i$ в $U(n)$, ранг матрицы $A + I_n$ не меняется. Это рассуждение завершает доказательство утверждения 3).

Утверждения 4) и 5) являются простыми следствиями теоремы 6. □

Предложение 7. *Для всех натуральных* $i < n^2 - 1$ *справедливо равенство* $\pi_i(U(n) \setminus N) = \pi_i(U(n))$ *для гомотопических групп.*

Доказательство. Первые сомножители в правой части формулы (8) при $i = 1, \dots, n$ являются грассмановыми многообразиями комплексных i-мерных подпространств пространства $\mathbb{C}^n$, клетки Шуберта которых задают их клеточные разбиения. Страты (8) вместе с этими клеточными разбиениями превращают замкнутое подмножество $U(n) \setminus N \subset U(n)$ в клеточный комплекс размерности $n^2 - 1$. Открытое подмногообразие $N \subset U(n)$, диффеоморфное $\mathbb{R}^{n^2}$, можно считать клеткой размерности n^2, подклеиваемой по ее границе к $U(n) \setminus N$ согласно структуре стратов (8), что дает клеточное разбиение группы Ли $U(n)$.

Согласно известному результату о гомотопиях вложенных остовов (см., например, Теорему 6.11 в [14]), мы получаем требуемое утверждение. □

Пример 1. Рассмотрим случай $n = 2$. Каноническая матрица имеет следующий вид: $A = \operatorname{diag}\big(\exp(\lambda_1 \mathbf{i}), \exp(\lambda_2 \mathbf{i})\big)$, $\pi \ge \lambda_1 \ge \lambda_2 > -\pi$. При этом A исключительна, если либо $\lambda_1 = \lambda_2 = \pi$, либо $\lambda_1 = \pi > \lambda_2 > -\pi$. В первом случае получаем матрицу $A = -I_2$, а во втором матрицы вида $A_t = \operatorname{diag}(-1, \exp(t\mathbf{i}))$ при $t \in (-\pi, \pi)$. Централизатор матрицы $A = -I_2$ совпадает с $U(2)$. А централизатор матрицы A_t равен $U(1) \times U(1) = \operatorname{diag}(U(1), U(1)) \subset U(2)$. Понятно, что $U(2)/(U(1) \times U(1))$ диффеоморфно S^2 (см., например, [16, Глава X, § 6, п. 10]). При $t \to \pm\pi$ матрицы A_t стремятся к $A = -I_2$. Поэтому пространство исключительных матриц при $n = 2$ имеет простое описание. Зададим на $S^1 \times S^2$, где $S^1 = U(1)$, отношение эквивалентности следующим образом: $(a_1, b_1) \sim (a_2, b_2)$ равносильно тому, что $a_1 = a_2 = -1$, а $b_1, b_2 \in S^2$ произвольны. Интересующее нас пространство исключительных матриц гомеоморфно фактор-пространству $S^1 \times S^2$ по указанному отношению эквивалентности.

Пример 2. Рассмотрим теперь случай $n = 3$. Каноническая матрица имеет следующий вид: $A = \operatorname{diag}\big(\exp(\lambda_1 \mathbf{i}), \exp(\lambda_2 \mathbf{i}), \exp(\lambda_3 \mathbf{i})\big)$, $\pi \ge \lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \lambda_3 > -\pi$. При этом A исключительна в четырех взаимно исключающих случаях: 1) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \pi$, 2) $\lambda_1 = \lambda_2 = \pi > \lambda_3 > -\pi$, 3) $\lambda_1 > \lambda_2 = \lambda_3 > -\pi$, 4) $\lambda_1 = \pi > \lambda_2 > \lambda_3 > -\pi$.

В первом случае получаем матрицу $A = -I_3$. Во втором и третьем случаях получаем соответственно матрицы вида $A_t = \operatorname{diag}\big(-1, \exp(t\mathbf{i}), \exp(t\mathbf{i})\big)$ при $t \in (-\pi, \pi)$ и $A_s = \operatorname{diag}\big(-1, -1, \exp(s\mathbf{i})\big)$ при $s \in (-\pi, \pi)$. Наконец, в четвертом случае мы получаем двухпараметрическое семейство матриц $A_{t,s} = \operatorname{diag}(-1, \exp(t\mathbf{i}), \exp(s\mathbf{i}))$ при $t, s \in (-\pi, \pi)$, $t > s$.

Централизатор матрицы $A = -I_3$ совпадает с $U(3)$. Централизаторы матриц A_t и A_s равны соответственно $U(1)\times U(2) = \mathrm{diag}(U(1), U(2)) \subset U(3)$ и $U(2)\times U(1) = \mathrm{diag}(U(2), U(1)) \subset U(3)$. Тогда пространства $U(3)/(U(2)\times U(1))$ и $U(3)/(U(1)\times U(2))$ диффеоморфны двумерному комплексному проективному пространству $\mathbb{C}P^2$ (см., например, [16, Глава X, § 2, п. 3]). При $t \to \pm\pi$ ($s \to \pm\pi$) матрицы A_t (A_s) стремятся к $A = -I_3$. Орбита любой матрицы $A_{t,s}$ имеет вид $U(3)/(U(1)\times U(1)\times U(1))$ и является шестимерным пространством Уоллаха W_6, см., например, [17, 29].

Полезно рассмотреть треугольник $\Delta = \{(t,s)\,|\,\pi \ge t \ge s \ge -\pi\}$ на плоскости (t,s) с вершинами $A = (-\pi,-\pi)$, $B = (\pi,\pi)$ и $C = (\pi,-\pi)$. Три вершины этого треугольника соответствуют случаю 1) (матрице $-I_3$). Внутренние точки сторон AC и CB соответствуют случаю 2), поскольку точки вида $(\mu,-\pi)$ и (π,μ) естественно отождествляются для любого $\mu \in (-\pi,\pi)$. Внутренние точки стороны AB соответствуют случаю 3), а внутренние точки треугольника Δ соответствуют случаю 4).

Таким образом $U(n)\setminus N$ при $n = 3$ строится следующим образом: К множеству $\mathrm{int}(\Delta)\times W_6$ = подклеиваются два экземпляра множества $(-1,1)\times\mathbb{C}P^2$, при этом интервал $(-1,1)$ в первом случае подклеивается к внутренности стороны AB, а во втором — к отождествленным друг с другом внутренностям двух других сторон треугольника; наконец на последнем этапе подклеивается одна точка (соответствует отождествленным трем вершинам треугольника Δ). Заметим, что W_6 естественно представляется как локально тривиальное расслоение над $\mathbb{C}P^2 = U(3)/(U(2)\times U(1))$ со слоем $S^2 = U(2)/(U(1)\times U(1))$.

Можно доказать, что в результате склеивания $\mathrm{int}(\Delta)\times W_6$ и первого экземпляра $(-1,1)\times\mathbb{C}P^2$ получается $(-1,1)^4\times\mathbb{C}P^2$, см. теорему 6 выше.

Пример 3. Пусть $A \in \mathfrak{u}(n)$, $r(A)$ — максимум из модулей собственных значений матрицы A. Тогда существует $s \in U(n)$ такой, что $\mathrm{Ad}(s)(A) = sAs^{-1} = \mathrm{diag}(\lambda_1\mathbf{i},\dots,\lambda_k\mathbf{i},...,\lambda_n\mathbf{i})$, где все λ_i вещественны и упорядочены по убыванию. При этом $r(A) = \max\{|\lambda_1|,|\lambda_n|\}$.

Понятно, что

$$\mathrm{Ad}(s)(I_n \pm A) = I_n \pm \mathrm{Ad}(s)(A) = \mathrm{diag}(1\pm\lambda_1\mathbf{i},\dots,1\pm\lambda_k\mathbf{i},...,1\pm\lambda_n\mathbf{i})$$

и

$$\mathrm{Ad}(s)\big(I_n + (I_n - A)(I_n + A)^{-1}\big) = s\big(I_n + (I_n - A)(I_n + A)^{-1}\big)s^{-1} = \mathrm{diag}\left(\frac{2}{1+\lambda_1\mathbf{i}},\dots,\frac{2}{1+\lambda_k\mathbf{i}},\dots,\frac{2}{1+\lambda_n\mathbf{i}}\right).$$

Заметим, что $\prod_{k=1}^n\big(1+\lambda_k\mathbf{i}\big) \to \infty$ равносильно тому, что $\prod_{k=1}^n\sqrt{1+|\lambda_k|^2} \to \infty$ или же тому, что $r(A) = \max\{|\lambda_1|,|\lambda_n|\} = \max\{|\lambda_k|\,|\,k = 1,\dots,n\} \to \infty$. Теперь очевидно, что

$$\det\big(I_n + (I_n - A)(I_n + A)^{-1}\big) = 2^n\left(\prod_{k=1}^n\big(1+\lambda_k\mathbf{i}\big)\right)^{-1} \to 0$$

тогда и только тогда, когда $r(A) = \max\{|\lambda_1|,|\lambda_n|\} \to \infty$. Отметим, что вместо $r(A)$ можно рассматривать значение любой матричной нормы на матрице $A \in \mathfrak{u}(n)$.

Поскольку $\lambda_k = 0$ равносильно $\frac{2}{1+\lambda_k\mathbf{i}} = 2$, то кратность нулевого собственного значения матрицы A совпадает с кратностью собственного значения 2 матрицы $I_n + (I_n - A)(I_n + A)^{-1}$.

6. О топологии групп Ли $U(n)$ и $SU(n)$. Подробное описание топологических свойств групп $U(n)$ и $SU(n)$ можно найти в [26] (равно как и во многих других источниках).

Естественная проекция $U(n+1) \to U(n+1)/U(n) \cong S^{2n+1}$ при вложении $U(n) \ni A \mapsto \mathrm{diag}(A,1) \in U(n+1)$ является расслоением Серра, что влечет точность гомотопической последовательности

$$\dots \to \pi_{l+1}(S^{2n+1}) \to \pi_l(U(n)) \to \pi_l(U(n+1)) \to \pi_l(S^{2n+1}) \to \dots. \tag{20}$$

Поскольку $\pi_l(S^{2n+1}) = 0$ при $l \le 2n$, то $\pi_l(U(n+1)) = \pi_l(U(n))$ для всех $l < 2n$. Если при этом l нечетно, то $\pi_l(U(n)) = \mathbb{Z}$ и $\pi_l(U(n)) = 0$, если l четно [20], [28]. Р. Ботт вычислил также $\pi_{2n}(U(n)) = \mathbb{Z}_{n!} = \mathbb{Z}/n!\mathbb{Z}$, см. [28] и ссылку в [20] (теорема Бореля – Хирцебруха в терминологии статьи [28]). Известно, что $\pi_2(G) = 0$ для любой группы Ли G. В [28] и [24] доказано, что

$$\pi_{2n+1}(U(n)) = \mathbb{Z}_2,\ n = 2k \ge 2; \quad \pi_{2n+1}(U(n)) = 0,\ n = 2k+1 \ge 3;$$

$$\pi_{2n+2}(U(n)) = \mathbb{Z}_2 + \mathbb{Z}_{(n+1)!},\ n = 2k \ge 4; \quad \pi_{2n+2}(U(n)) = \mathbb{Z}_{(n+1)!/2},\ n = 2k+1 \ge 3.$$

В [25] вычислены p-примарные компоненты групп $\pi_{2n+k}(U(n))$, $k = 3,4,5$ для простых чисел p; $\pi_{2n+5}(SU(n)) = \pi_{2(n+1)+3}(SU(n+1))$, $n \ge 3$, вследствие точности гомотопической последовательности (20) и равенств $\pi_{m+4}(S^m) = 0, m \ge 6$; $\pi_{m+5}(S^m) = 0, m \ge 7$ [15]. Заметим, что также $\pi_{m+12}(S^m) = 0$, $m \ge 14$ [15].

Поскольку $SU(2)$ диффеоморфна S^3, то $\pi_k(SU(2)) = \pi_k(S^3)$. По теореме В. Гуревича, $\pi_3(S^3) = H_3(S^3) = \mathbb{Z}$. Л. С. Понтрягин доказал, что $\pi_{n+1}(S^n) = \mathbb{Z}_2$, $n \ge 3$; $\pi_{n+2}(S^n) = \mathbb{Z}_2$, $n \ge 2$ [11]. В. А. Рохлин вычислил гомотопические группы $\pi_{n+3}(S^n)$, в частности $\pi_6(S^3) = \mathbb{Z}_{12}$, см. его статьи в книге [7]. Далее гомотопические группы сфер вычислялись методами теории гомотопий в работах Серра, Ху Сы-Цзяна, Тода и др. В таблицах из [15] даны $\pi_{n+k}(S^n)$ для $1 \le k \le 22$. Представим здесь некоторые из этих групп:

$$\pi_7(S^3) = \pi_8(S^3) = \pi_{11}(S^3) = \mathbb{Z}_2,\ \pi_9(S^3) = \mathbb{Z}_3,\ \pi_{10}(S^3) = \mathbb{Z}_{15},\ \pi_{25}(S^3) = \mathbb{Z}_{210}.$$

Простые способы вычисления гомологий специальных унитарных групп можно найти в разных источниках, см., например, [21] и список литературы в этой работе. Вычисление гомологий и когомологий групп $SU(n)$ с помощью специальных клеточных разбиений можно найти в работе [30]. Кроме того, справедлива следующая формула (см. [4]):

$$H_i(U(n)) \cong \bigoplus_{k=0}^{n} H_{i-k^2}(G_k(\mathbb{C}^n)),$$

$G_k(\mathbb{C}^n)$ — грассманово многообразие k-мерных комплексных плоскостей в $\mathbb{C}^n$. Эту формулу принято называть *разложением Васильева — Маховальда* [5].

Она просто вытекает из теории Морса в [5], примененной к функции

$$f_A(X) = \operatorname{tr} AX,\ X \in G = SO(n), U(n), Sp(n);\ A = \operatorname{diag}(a_1, \dots, a_n),\ 0 < a_1 \cdots < a_n.$$

Эта функция f_A определяет специальное клеточное разбиение группы G; его описание дает следующая замечательная теорема 2.2 из [5].

Теорема 8 [5]. *Клетки на группе G находятся во взаимно однозначном соответствии с множеством клеток Шуберта грассманианов $G_m(\mathbf{k}^n)$, $m = 0, 1, \cdots, n$, где $\mathbf{k}$ равно соответственно $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ или $\mathbb{H}$. Внутренность клетки, соответствующей клетке Шуберта σ, состоит из операторов, собственное подпространство которых с собственным значением -1 является ортогональным дополнением к некоторому элементу из σ.*

7. Другие классические связные компактные группы Ли. Вещественная $(n \times n)$-матрица B, $n \ge 2$, ортогональна, если $B^*B = B^TB = I_n$. Множество всех ортогональных $(n \times n)$-матриц составляет компактную ортогональную группу $O(n) \subset U(n)$, компонента связности единицы которой есть подгруппа $SO(n) \subset O(n)$ индекса 2, состоящая из ортогональных матриц с определителем 1. При этом $\dim SO(n) = \dim O(n) = n(n-1)/2$. Алгебра Ли $\mathfrak{so}(n)$ групп Ли $O(n)$ и $SO(n)$ состоит из кососимметрических $(n \times n)$-матриц. Максимальные торы групп Ли $SO(2n)$ и $SO(2n+1)$ имеют соответственно вид

$$T_{ev} = \left\{\operatorname{diag}(D_{\lambda_1}, \dots, D_{\lambda_n})\right\}, \quad D_{\lambda_k} = \begin{pmatrix} \cos\lambda_k & -\sin\lambda_k \\ \sin\lambda_k & \cos\lambda_k \end{pmatrix}, \quad k = 1, \dots, n, \tag{21}$$

$$T_{od} = \left\{\operatorname{diag}(D_{\lambda_1}, \dots, D_{\lambda_n}, 1)\right\}, \quad \lambda_k \in \mathbb{R}, \quad k = 1, \dots, n. \tag{22}$$

Для кватернионной $(n\times n)$-матрицы C, C^* есть результат транспонирования матрицы C с последующим сопряжением элементов-кватернионов. Матрица C называется *симплектической*, если $C^*C = I_n$; группа Ли $Sp(n)$, $n \ge 1$, всех симплектических $(n \times n)$-матриц называется *симплектической группой.* Ее алгебра Ли $\mathfrak{sp}(n)$ состоит из кватернионных $(n \times n)$-матриц A таких, что $A^* = -A$. Группа Ли $Sp(n)$ изоморфна группе Ли $U(2n) \cap Sp(n,\mathbb{C})$, где $Sp(n,\mathbb{C})$ состоит из J-унитарных $(2n \times 2n)$-матриц F, т.е. комплексных матриц таких, что $J^{-1}F^*JF = I_{2n}$ для блочной (2×2)-матрицы J, элементами-блоками которой являются $(n\times n)$-матрицы $j_{11} = 0$, $j_{12} = -I_n$, $j_{21} = I_n$, $j_{22} = 0$. В частности, $Sp(1)$ изоморфна $SU(2)$; $\dim Sp(n) = n(2n+1)$. Максимальный тор группы Ли $Sp(n)$ совпадает с максимальным тором T группы Ли $U(n)$ (3).

Группы Вейля $W = W(SO(2n+1))$ и $W = W(Sp(n))$ совпадают и порождаются элементами группы подстановок S_n чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ и перемножениями соответствующих чисел последовательностей $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ и $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, где $\varepsilon_k = \pm 1$. $|W| = n!2^n$. Для группы $W(SO(2n))$, еще $\prod_{k=1}^n \varepsilon_k = 1$. $|W(SO(2n))| = n!2^{n-1}$.

Утверждения выше о максимальных торах и группах Вейля взяты из [1].

Аналогично предложению 4, устанавливается

Предложение 8. *Группы $SO(n)$, $n \ge 2$, и $Sp(n)$, $n \ge 1$, — вещественные алгебраические группы, а подмножества исключительных матриц $SO(n) \setminus N$, $Sp(n) \setminus N$ — вещественные алгебраические многообразия.*

Предложение 9. *Справедливы включения $SO(n) \subset SU(n) \subset U(n)$, $Sp(n) \subset U(2n)$ и соответствующие включения алгебр Ли $\mathfrak{so}(n) \subset \mathfrak{u}(n)$, $\mathfrak{sp}(n) \subset \mathfrak{u}(2n)$. Поэтому вследствие теоремы 4, все матрицы из $\mathfrak{so}(n)$, $\mathfrak{sp}(n)$ неисключительны; преобразования Кэли на $\mathfrak{so}(n)$ и $N \subset SO(n)$ — взаимно обратные диффеоморфизмы $\mathfrak{so}(n)$ и $N \subset SO(n)$; преобразования Кэли на $\mathfrak{sp}(n)$ и $N \subset Sp(n)$ — взаимно обратные диффеоморфизмы $\mathfrak{sp}(n)$ и $N \subset Sp(n)$.*

Положим $Q = \{(\lambda_1, \dots \lambda_n) \in \mathbb{R}^n : \pi \ge \lambda_1 \ge \cdots \ge \lambda_n \ge 0\}$. Из описания группы Вейля W групп Ли $SO(2n+1)$, $Sp(n)$ и $SO(2n)$ вытекают

Предложение 10. *$W(Sp(n))(\exp(\mathbf{i}Q)) = T$, $I(Sp(n))(\exp(\mathbf{i}Q)) = Sp(n)$ и $\exp(\mathbf{i}Q)$ — фундаментальная область для действия группы Вейля $W(Sp(n))$ на максимальном торе $T \subset Sp(n)$ и действия группы $I(Sp(n))$ на $Sp(n)$. Элементы максимального тора $T_{od} \subset SO(2n+1)$, (22) с дополнительным условием $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in Q$*

составляют фундаментальную область для действий группы $W(SO(2n+1))$ на T_{od} и группы $I(SO(2n+1))$ на $SO(2n+1)$.

Предложение 11. *Множество всех элементов тора $T_{ev} \subset SO(2n)$, (21):*

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in Q_{pm} = Q \bigcup \left\{ \pi \geq \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_{n-1} > 0 > \lambda_n \geq -\lambda_{n-1} \right\}, \tag{23}$$

есть фундаментальная область для $W(SO(2n))$ на T_{ev} и $I(SO(2n))$ на $SO(2n)$.

Доказательство. Ясно, что каждая матрица из T_{ev}, (21) однозначно определяется последовательностью чисел $\lambda_k \in (-\pi, \pi]$, $k = 1, \dots, n$. Если при этом число отрицательных чисел четно или одно из них равно нулю, то преобразование из $W(SO(2n))$, умножающее эти отрицательные (соответственно, четное число неположительных чисел) на $\varepsilon = -1$, дает новый набор из n чисел в $[0, \pi]$. После этого надлежащая подстановка из $S_n \subset W(SO(2n))$ набора этих чисел дает единственный вектор $\Lambda \in Q$. Иначе, применяя, если это необходимо, умножение одного положительного и одного отрицательного числа из $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ на $\varepsilon = -1$, можно считать, что одно из отрицательных чисел этого набора имеет наименьший среди всех $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ модуль. Умножая все остальные отрицательные числа (их четное число) на $\varepsilon = -1$, получим n-мерный вектор Λ_1, все компоненты которого, кроме одной, принадлежат интервалу $(0, \pi]$. После этого надлежащая подстановка из $S_n \subset W(SO(2n))$ превращает Λ_1 в единственный вектор $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, удовлетворяющий последним условиям из (23). □

Предложение 12. *Пусть $d := (d_1, \dots, d_m)$ — произвольный фиксированный набор натуральных чисел, являющийся разбиением числа n, т. е. $d_1 + \dots + d_m = n$. Тогда множество всех векторов $\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in Q$, группирующихся в наборы $(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ убывающих чисел с указанными кратностями $(d_1, \dots, d_m)$, выпукло и является подмножеством единственной минимальной грани $f_d \subset Q$. При этом внутренность $\mathrm{Int}(f_d)$ грани f_d есть множество всех указанных векторов Λ с дополнительными условиями $\alpha_1 < \pi$ и $\alpha_m > 0$; все оставшиеся векторы Λ составляют объединение внутренностей граней $f_d \cap Q_0$, $f_d \cap Q_\pi$ и $f_d \cap Q_\pi \cap Q_0$, где $Q_\pi = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in Q \mid \lambda_1 = \pi\}$, $Q_0 = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in Q \mid \lambda_n = 0\}$.*

Теорема 9. *Для каждого из множеств $M_1 = \mathrm{Int}(f_d)$, $M_2 = \mathrm{Int}(f_d \cap Q_0)$, $M_3 = \mathrm{Int}(f_d \cap Q_\pi)$ и $M_4 = \mathrm{Int}(f_d \cap Q_0 \cap Q_\pi)$,*

$$I(Sp(n))\Big(\exp(\mathbf{i}M_k)\Big) \cong \Big(Sp(n)/(Sp(d_1) \times \dots \times Sp(d_m))\Big) \times M_k, \quad k = 1, \dots 4. \tag{24}$$

Здесь орбиты снабжаются индуцированной дифференциальной структурой из $Sp(n)$, а символ $\cong$ обозначает диффеоморфность.

Теорема 10. *Для каждого из множеств M_1, M_2, M_3 и M_4 из теоремы 9,*

$$I(SO(2n+1))\Big(\Big\{\mathrm{diag}(D_{\lambda_1}, \dots, D_{\lambda_n}, 1), (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in M_k\Big\}\Big) \cong$$

$$\Big(SO(2n+1)/S(O(2d_1) \times \dots \times O(2d_m))\Big) \times M_k, \quad k = 1, \dots 4.$$

Здесь орбиты снабжаются индуцированной дифференциальной структурой из $SO(2n+1)$, а символ $\cong$ обозначает диффеоморфность.

Следствие 2. *Орбиты первого и второго типа дают стратификации множеств неисключительных матриц, а третьего и четвертого типа из теорем 9, 10 — стратификации множеств исключительных матриц из $Sp(n)$, $SO(2n+1)$; указана диффеоморфность соответствующих стратов.*

Предложение 13. *Множество неисключительных матриц $N \subset Sp(n)$ диффеоморфно $\mathbb{R}^{n(2n+1)}$ и является дизъюнктным объединением орбит относительно действия сопряжениями $Sp(n)$ на себе точек из множества $\exp(\mathbf{i}Q_{non})$,*

$$Q_{non} := \Big\{(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n \mid \pi > \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0\Big\} \subset Q. \tag{25}$$

Предложение 14. *Множество неисключительных матриц $N \subset SO(2n+1)$ диффеоморфно $\mathbb{R}^{n(2n+1)}$ и является дизъюнктным объединением орбит относительно действия сопряжениями $SO(2n+1)$ на себе точек из множества T_{od}, (22), (21), $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in Q_{non}$.*

Определим множества $V_i \subset Sp(n)$; $i = 0, 1, 2, \dots, n$ так же, как для $U(n)$.

Теорема 11. *Каждое множество V_i диффеоморфно*

$$\Big(Sp(n)/Sp(i) \times Sp(n-i)\Big) \times \mathbb{R}^{(n-i)(2(n-i)+1)}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n. \tag{26}$$

В частности, $\dim(V_i) = n(2n+1) - i(2i+1)$, *$V_1$ диффеоморфно $\mathbb{H}P^{n-1} \times \mathbb{R}^{(n-1)(2(n-1)+1)}$ и* $\dim(V_1) = \dim(Sp(n)) - 3 = 2n^2 + n - 3$.

Для каждого $i = 0, 1, \dots, n$ определим следующие подмножества в $SO(2n+1)$:

$$V_i = \{A \in SO(2n+1) \mid A \text{ имеет собственное число } -1 \text{ кратности } 2i\} \tag{27}$$

и $V_{n+1} = \{-I_{2n+1}\}$. Ясно, что V_i — множество матриц $A \in SO(2n+1)$ таких, что ранг матрицы $A + I_n$ равен $2n + 1 - 2i$, $i = 0, 1, \dots, n$; $V_0 = N \subset SO(2n+1)$.

Теорема 12. *Каждое множество V_i, $i = 1, \dots, n$ диффеоморфно*

$$\Big(SO(2n+1)/S(O(2i) \times O(2n-2i+1))\Big) \times \mathbb{R}^{(n-i)(2(n-i)+1)}, \tag{28}$$

$\dim(V_i) = (n+i)(2(n-i)+1)$, *$V_1$ диффеоморфно $G_2(\mathbb{R}^{2n+1}) \times \mathbb{R}^{2n^2-3n+1}$ и $\dim(V_1) = \dim(SO(2n+1)) - 1$.*

Определение V_i, $i = 0, 1, \dots, n$, для $SO(2n)$ и утверждения об этих множествах — те же самые, что перед теоремой 12, с заменой $2n+1$ на $2n$.

Теорема 13. *Каждое множество V_i, $i = 1, \dots, n$ диффеоморфно*

$$\Big(SO(2n)/S(O(2i) \times O(2(n-i)))\Big) \times \mathbb{R}^{(n-i)(2(n-i)-1)}, \tag{29}$$

$\dim(V_i) = n(2n-1) - i(2i-1)$, *$V_1$ диффеоморфно $G_2(\mathbb{R}^{2n}) \times \mathbb{R}^{(n-1)(2(n-1)-1)}$ и $\dim(V_1) = \dim(SO(2n)) - 1$.*

Аналоги теоремы 7 для групп Ли $Sp(n)$, $SO(2n+1)$ и $SO(2n)$ формулируются так же, за исключением последнего утверждения. Там нужно заменить группу $U(n)$ и размерности пространств V_i и V_1 для $U(n)$ на одну из трех упомянутых групп и размерности пространств V_i и V_1 для каждой из трех групп, вычисленные в теоремах 11, 12, 13.

Предложение 15. *Вследствие аналогов теоремы 7 для групп Ли $Sp(n)$, $SO(2n)$ и $SO(2n+1)$ и размерностей пространств V_i и V_1 для этих групп, вычисленных в теоремах 11, 13, 12, множества неисключительных матриц $N \subset Sp(n)$, $N \subset SO(2n)$ и $N \subset SO(2n+1)$ открыты и всюду плотны соответственно в $Sp(n)$, $SO(2n)$ и $SO(2n+1)$. Вместе с предложением 9 это значит, что для групп Ли $Sp(n)$, $SO(2n)$ и $SO(2n+1)$ справедливы аналоги теоремы 4.*

Список литературы

1. Адамс Дж. 1979. Лекции по группам Ли. М., Наука, 144.
2. Берестовский В. Н. 2023. Введение к хронометрической теории Сигала. Математические труды (принято к печати). 19.
3. Бессе А. 1990. Многообразия Эйнштейна. Том I. М., Мир, 320.
4. Васильев В. А. 1991. Геометрическая реализация гомологий классических групп Ли и комплексы, S-двойственные к флаговым многообразиям. Алгебра и анализ, 3(4): 113–120.
5. Веселов А. П., Дынников И. А. 1996. Интегрируемые градиентные потоки и теория Морса. Алгебра и анализ, 8(3): 78–103.
6. Винберг Э. Б., Онищик А. Л. 1988. Семинар по группам Ли и алгебраическим группам. М., Наука, 344.
7. Гийу Л., Марен А. 1989. В поисках утраченной топологии. М., Мир, 293.
8. Пенроуз Р., Риндлер В. 1988. Спиноры и пространство-время. Спинорные и твисторные методы в геометрии пространства-времени. М., Мир, Т. 2, 573.
9. Понтрягин Л. С. 1988. Гомологии в компактных группах Ли. В книге: Л. С. Понтрягин. Избранные научные труды. Том 1. Топология. Топологическая алгебра. М., Наука, 170–208 (перевод с английского оригинала).
10. Понтрягин Л. С. 1988. О топологической структуре групп Ли. В книге: Л. С. Понтрягин. Избранные научные труды. Том 1. Топология. Топологическая алгебра. М., Наука, 209–214 (перевод с немецкого оригинала).
11. Понтрягин Л. С. 1988. Гладкие многообразия и их применения в теории гомотопий. В книге: Л. С. Понтрягин. Избранные научные труды. Том 1. Топология. Топологическая алгебра. М., Наука, 548–677.
12. Постников М. М. 1982. Группы и алгебры Ли (Лекции по геометрии, Семестр V). М., Наука, 480.
13. Прасолов В. В. 2004. Элементы комбинаторной и дифференциальной топологии. М., МЦНМО, 352.
14. Свитцер Р. М. 1985. Алгебраическая топология, Гомотопии и гомологии. М., Наука, 600.
15. Тода Х. 1982. Композиционные методы в теории гомотопических групп сфер. М., Наука, 224.
16. Хелгасон С. 2005. Дифференциальная геометрия, группы Ли и симметрические пространства. М., Факториал, 608.
17. Abiev N. A., Nikonorov Yu. G. 2016. The evolution of positively curved invariant Riemannian metrics on the Wallach spaces under the Ricci flow. Ann. Glob. Anal. Geom., 50(1): 65–84. DOI: 10.1007/s10455-016-9502-8
18. Berestovskii V. N., Nikonorov Yu. G. 2020. Riemannian Manifolds and Homogeneous Geodesics. Springer Monographs in Mathematics. Springer Nature Switzerland AG. Cham, 482. DOI: 10.1007/978-3-030-56658-6
19. Borel A. 1954. Kählerian coset spaces of semisimple Lie groups. Proc. of Natl. Academy of Scinces, 44: 1147–1151. DOI: 10.1073/pnas.40.12.1147
20. Bott R. 1959. The stable homotopy of the classical groups. Ann. of Math. 70: 313–337. DOI: 10.2307/1970106

21. Coleman A. J. 1958. The Betti numbers of the simple Lie groups. Can. J. Math. 10: 349–356.
22. Jadczyk A. 2011. On Conformal Infinity and Compactifications of Minkowski Space. Adv. Appl. Clifford Algebras. 21: 721–756. DOI: 10.1007/s00006-011-0285-5
23. Jadczyk A. 2012. Conformally Compactified Minkowski Space: Myths and Facts. Prespacetime Journal. 3(2): 131–140.
24. Kervaire M. A. 1960. Some non-stable homotopy groups of Lie groups. Illinois Jour. of Math. 4: 161–169.
25. Matsunaga H. 1961. The homotopy groups $\pi_{2n+i}(U(n))$ for $i = 3, 4$ and 5. Mem. of Fac. of Sci. Kyushu Univ., Ser. A, 15(1): 72–81. DOI: 10.2206/kyushumfs.15.72
26. Mimura M., Toda H. 1991. Topology of Lie groups, I and II. Translations of Mathematical Monographs. 91. Providence, RI: American Mathematical Society, 451.
27. Paneitz S. M., Segal I. E. 1982. Analysis in Space-Time Bundles I. General Considerations and the Scalar Bundle. J. Funct. Anal. 47: 78–142. DOI: 10.1016/0022-1236(82)90101-X
28. Toda H. 1959. A topological proof of theorems of Bott and Borel-Hirzebruch for homotopy groups of unitary groups. Mem. of Coll. Univ. Kyoto. 32: 103–119. DOI: 10.1215/kjm/1250776701
29. Wallach N. R. 1972. Compact homogeneous Riemannian manifolds with strictly positive curvature. Ann. Math. Second Ser. 96: 277–295. DOI: 10.2307/1970789
30. Yokota I. 1956. On the cellular decompositions of unitary groups. J. Inst. Polytechn., Osaka City Univ., Ser. A. 7(1-2): 39–49.

References

1. Adams J. F. 1969. Lectures on Lie groups. W.A. Benjamin, Inc. New York-Amsterdam, 188.
2. Berestovskii V. N. 2023. Vvedenie k khronometricheskoy teorii Segala [Introduction to Seagal’s chronometric theory]. Mathematicheskie trudy, to appear 19.
3. Besse A. L. 1987. Einstein Manifolds. Springer-Verlag. Berlin, Heidelberg, 510.
4. Vassiliev V. A. 1992. A geometric realization of the homology of classical Lie groups, and complexes, S-dual to the flag manifolds. St.-Petersburg Math. J., 3(4): 809–815.
5. Veselov A. P., Dynnikov I. A. 1997. Integrable gradient flows and Morse theory. St. Petersburg Math. J., 8(3): 429–446.
6. Onishchik A. L., Vinberg E. B. 1990 Lie groups and algebraic groups. Translated from the Russian by D. A. Leites. Springer Series in Soviet Mathematics. Berlin etc.: Springer-Verlag, 328.
7. Guillow L., Marin A. 1986. A la Recherche de la Topologie Perdue. Progress in Mathematics Vol. 62. Birkhäuser. Boston, Basel, Stuttgart, 244.
8. Penrose R., Rindler W. 1986. Spinors and Space-Time. Spinor and Twistor Methods in Space-Time Geometry. Cambridge University Press, Cambridge, 1986. V. 2, 501.
9. Pontrjagin L. 1939. Homologies in compact Lie groups. Recueil Mathématique. Nouvelle Série. 6(3): 389–422.
10. Pontryagin L. 1940/1941. Über die topologische Struktur der Lieschen Gruppen. Math. Helv., 13(4): 277–283. DOI: 10.1007/BF01378066
11. Pontryagin L. S. 1986. Smooth manifolds and their applications in homotopy theory. In: Selected works. Vol. 3. Algebraic and differential topology. Classics of Soviet Mathematics. New York, NY: Gordon and Breach.
12. Postnikov M. M. 1986. Lie groups and Lie algebras (Lectures in geometry, Semester V). Mir Publisher, Moscow, 448.
13. Prasolov V. V. 2006. Elements of combinatorial and differential topology. Graduate Studies in Mathematics 74. Providence, RI: American Mathematical Society (AMS), 331.
14. Switzer R. M. 1975. Algebraic Topology - Homotopy and Homology, Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 526.
15. Toda H. 1962. Composition methods in the homotopy groups of spheres. Ann. Math. Studies 49. Princeton, 193. DOI: 10.1515/9781400882625
16. Helgason S. 2001. Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces. Graduate Studies in Mathematics. 34. Providence, RI: American Mathematical Society (AMS), 641.
17. Abiev N. A., Nikonorov Yu. G. 2016. The evolution of positively curved invariant Riemannian metrics on the Wallach spaces under the Ricci flow. Ann. Glob. Anal. Geom., 50(1): 65–84. DOI: 10.1007/s10455-016-9502-8
18. Berestovskii V. N., Nikonorov Yu. G. 2020. Riemannian Manifolds and Homogeneous Geodesics. Springer Monographs in Mathematics. Springer Nature Switzerland AG. Cham, 482. DOI: 10.1007/978-3-030-56658-6
19. Borel A. 1954. Kählerian coset spaces of semisimple Lie groups. Proc. of Natl. Academy of Scinces, 44: 1147–1151. DOI: 10.1073/pnas.40.12.1147
20. Bott R. 1959. The stable homotopy of the classical groups. Ann. of Math. 70: 313–337. DOI: 10.2307/1970106
21. Coleman A. J. 1958. The Betti numbers of the simple Lie groups. Can. J. Math. 10: 349–356.
22. Jadczyk A. 2011. On Conformal Infinity and Compactifications of Minkowski Space. Adv. Appl. Clifford Algebras. 21: 721–756. DOI: 10.1007/s00006-011-0285-5

23. Jadczyk A. 2012. Conformally Compactified Minkowski Space: Myths and Facts. Prespacetime Journal. 3(2): 131–140.
24. Kervaire M. A. 1960. Some non-stable homotopy groups of Lie groups. Illinois Jour. of Math. 4: 161–169.
25. Matsunaga H. 1961. The homotopy groups $\pi_{2n+i}(U(n))$ for $i = 3, 4$ and 5. Mem. of Fac. of Sci. Kyushu Univ., Ser. A, 15(1): 72–81. DOI: 10.2206/kyushumfs.15.72
26. Mimura M., Toda H. 1991. Topology of Lie groups, I and II. Translations of Mathematical Monographs. 91. Providence, RI: American Mathematical Society, 451.
27. Paneitz S. M., Segal I. E. 1982. Analysis in Space-Time Bundles I. General Considerations and the Scalar Bundle. J. Funct. Anal. 47: 78–142. DOI: 10.1016/0022-1236(82)90101-X
28. Toda H. 1959. A topological proof of theorems of Bott and Borel-Hirzebruch for homotopy groups of unitary groups. Mem. of Coll. Univ. Kyoto. 32: 103–119. DOI: 10.1215/kjm/1250776701
29. Wallach N. R. 1972. Compact homogeneous Riemannian manifolds with strictly positive curvature. Ann. Math. Second Ser. 96: 277–295. DOI: 10.2307/1970789
30. Yokota I. 1956. On the cellular decompositions of unitary groups. J. Inst. Polytechn., Osaka City Univ., Ser. A. 7(1-2): 39–49.

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.
Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 12.05.2023
Поступила после рецензирования 24.06.2023
Принята к публикации 26.06.2023

Received May 12, 2023
Revised June 24, 2023
Accepted June 26, 2023

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Берестовский Валерий Николаевич – доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник, Институт математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской Академии Наук, г. Новосибирск, Россия

Никоноров Юрий Геннадьевич – доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник, Южный математический институт Владикавказского научного центра Российской Академии Наук, г. Владикавказ, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Valeriĭ N. Berestovskiĭ – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Principal Investigator, Sobolev Institute of Mathematics of the Siberian Branch of the Russian Academy of Science, Novosibirsk, Russia

Yuriĭ G. Nikonorov – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Principal Investigator, Southern Mathematical Institute of the Vladikavkaz Scientific Centre of the Russian Academy of Science, Vladikavkaz, Russia

Прикладная математика & Физика, 2023, том 55, № 3. С. 220–227.
Applied Mathematics & Physics, 2023, Volume 55, No 3. P. 220–227.

УДК 514, 519.2
MSC 18F40
Оригинальное исследование

DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-3-220-227

Стохастическая дифференциальная геометрия гладких поверхностей положительной кривизны

Климентов Д. С.
(*Статья представлена членом редакционной коллегии Ю. П. Вирченко*)
Южный федеральный университет,
Россия, 344000, г. Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8А
dklimentov75@gmail.com

Аннотация. В предлагаемой работе выводится стохастический аналог уравнений Петерсона – Кодацци для двумерных поверхностей положительной кривизны класса C^k. Для исследования этих объектов используются методы стохастического анализа, точнее формула Ито и свойства броуновского движения, порождённого метрикой поверхности. Существенным отличием от результатов И. Я. Бакельмана [3] является применение формулы Ито и второй производной Ито, которая вводится в этой работе. Также используется техника симметричных интегралов (детерминированного аналога) стохастических интегралов Стратоновича.

Ключевые слова: основная теорема теории поверхностей, формула Ито, поверхность ограниченного искривления, симметричные интегралы

Для цитирования: Климентов Д. С. 2023. Стохастическая дифференциальная геометрия гладких поверхностей положительной кривизны. *Прикладная математика & Физика*, 55(3): 220–227.
DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-3-220-227

Original Research

Stochastic Differential Geometry of Smooth Surfaces of Positive Curvature

Dmitry S. Klimentov

(*Article submitted by a member of the editorial board Yu. P. Virchenko*)

South Federal University,
8A Milchakova st., Rostov-on-Don, 344000, Russia
dklimentov75@gmail.com

Abstract. In this note, we derive a stochastic analogue of the Peterson-Codazzi equations for two-dimensional surfaces of positive curvature of the class C^k. To study these objects, methods of stochastic analysis are used, more precisely, the Ito formula and the properties of Brownian motion generated by the surface metric. An essential difference from the results of Backelman I. Ya. [3] is an application of the Ito formula and the second Ito derivative introduced in this paper. The technique of symmetric integrals (a deterministic analogue of Stratonovich's stochastic integrals) is also used.

Keywords: Fundamental Theorem of Surface Theory, Ito's Formula, Surface of Bounded Curvature, Symmetric Integrals

For citation: Klimentov D. S. 2023. Stochastic Differential Geometry of Smooth Surfaces of Positive Curvature. *Applied Mathematics & Physics*, 55(3): 220–227. (in Russian) DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-3-220-227

1. Введение. Хорошо известна *основная теорема теории поверхностей* [8, с. 306]:

Уравнения Гаусса – Петерсона – Кодацци представляют собой необходимое и достаточное условие того, чтобы две аналитически заданные квадратичные формы, из которых одна является положительно определённой (первая форма поверхности), служили первой и второй формами для некоторой поверхности, которую они определяют с точностью до движения; ее глобальный вариант см. в [11, с. 76].

В 1956 году И. Я. Бакельман в работе [3] вывел уравнения Гаусса – Петерсона – Кодацци для поверхностей ограниченного искривления, то есть для поверхностей, задаваемых функциями с непрерывными первыми производными и суммируемыми с квадратом обобщёнными вторыми производными в смысле Соболева. В 1988 году Ю. Е. Боровский в работе [4] доказал, что уравнения, выведенные И. Я. Бакельманом, однозначно определяют поверхность ограниченного искривления.

Целью настоящей работы является получение стохастического аналога уравнений Петерсона – Кодацци для поверхностей класса C^k.

Структура статьи следующая: в первой части приводятся некоторые определения из теории случайных процессов; во второй части приводятся необходимые сведения из теории двумерных многообразий ограниченной кривизны (пространств Александрова); в третьей части формулируется и доказывается стохастический аналог основной теоремы теории поверхностей для гладких поверхностей положительной кривизны.

Сведения из теории случайных процессов. Предполагается, что читатель знаком с определениями случайного, марковского и строго марковского процессов, диффузионного процесса. Здесь принимаются обозначения из [6]. Более подробные сведения по излагаемым в этом пункте вопросам можно найти в [6], [5].

Будем считать заданным вероятностное пространство $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$. Рассмотрим многообразие (фазовое пространство) $(E, \mathfrak{B})$, где $\mathfrak{B}$— σ-поле борелевских множеств на E. Подробное определение случайного процесса на многообразии можно посмотреть в [5].

Введём некоторые необходимые в дальнейшем обозначения.

Определение. [6, с. 74] *Функция $P(t,x,\Gamma)$ $(t>0, x\in E, \Gamma\in\mathfrak{B})$ называется переходной функцией, если выполнены следующие условия:*

1. *При фиксированных t и x функция $P(t,x,\Gamma)$ является мерой на σ-алгебре $\mathfrak{B}$.*
2. *При фиксированных t и Γ $P(t,x,\Gamma)$ есть $\mathfrak{B}$-измеримая функция точки x.*
3. $P(t,x,\Gamma)\le 1$.
4. $P(0,x,E\setminus x)=0$.
5. $P(s+t,x,\Gamma)=\int_E P(s,x,dy)P(t,y,\Gamma)$

Пусть μ — некоторая мера в фазовом пространстве $(E,\mathfrak{B})$.

Определение. [6, с. 75] *Функция $p(t,x,y)$ $(t>0, x,y\in E)$ называется переходной плотностью, если выполнены условия:*

1. $p(t,x,y)\ge 0$.
2. *При фиксированном t $p(t,x,y)$ является $\mathfrak{B}\times\mathfrak{B}$- измеримой функцией от (x,y).*
3. $\int_E p(t,x,y)\mu(dy)\le 1$.
4. $p(s+t,x,z)=\int_E p(s,x,y)p(t,y,z)\mu(dy)$.

Легко проверить [6, с. 75], что если $p(t,x,y)$ — переходная плотность, то формула

$$P(t,x,\Gamma)=\int_\Gamma p(t,x,y)dy, t>0, P(t,x,\Gamma)=\chi_\Gamma, t=0$$

определяет переходную функцию.

Со всякой переходной функцией связана сжимающая полугруппа T_t следующим образом [6, с. 80]

$$T_t f(x)=\int_E P(t,x,dy)f(y),$$

где $f\in B$, B – совокупность всех ограниченных измеримых функций с естественными линейными операциями и нормой $||f||=\sup_{x\in E}|f(x)|$.

Определение.[6, с. 214] *Инфинитезимальным оператором полугруппы T_t (переходной функции $P(t,x,\Gamma)$) будем называть оператор A, действующий по правилу*

$$Af(x)=\lim_{t\to+0}\frac{T_t f(x)-f(x)}{t},$$

причем область определения оператора A состоит из тех функций f, для которых предел в правой части существует. Если на фазовом пространстве введена структура гладкого многообразия, то инфинитезимальный оператор, суженный на дважды непрерывно дифференцируемые функции, называется генератором (случайного процесса) и в локальных координатах (x^i) имеет вид:

$$Af(x)=a^{ij}\partial_i\partial_j f(x)+b^i\partial_i f(x)-Cf(x),$$

где $\partial_i=\dfrac{\partial}{\partial x^i}$, a^{ij} — положительно определённая матрица.

Переходная плотность связана с генератором случайного процесса обратным уравнением Колмогорова [6, с. 238]

$$\frac{\partial p}{\partial t}=Ap,$$

где оператор A — генератор случайного процесса, введённый выше.

В книге [6] в главах 1 и 2 показано, что со всяким марковским процессом однозначно связаны сжимающая полугруппа, переходная функция и инфинитезимальный оператор.

Приведём здесь определение симметричного интеграла [7].

Определение.[7]. *Симметричным интегралом называется*

$$\int_0^t f(s, X(s)) * dX(s) = \lim_{n\to\infty} \Sigma_k \frac{1}{\Delta t_k^{(n)}} \int_{\Delta t_k^{(n)}} f(s, X_n(s)) ds \Delta X_k^{(n)},$$

где $X(s)$ – непрерывная функция (траектория броуновского движения в нашем случае) $X_k^{(n)}$ – ломанная, построенная по разбиению t_n[1].

Сведения из дифференциальной геометрии. Подробное изложение теории двумерных многообразий ограниченной кривизны можно найти в книге [1], общепринятых обозначений из которой мы будем придерживаться в этом параграфе.

Определение.[3, с. 74] *Двумерную поверхность F в трёхмерном евклидовом пространстве будем называть гладкой поверхностью ограниченного искривления, если она в некоторой окрестности любой своей точки допускает параметризацию*

$$\vec{r} = \vec{r}(x^1, x^2),$$

где $\vec{r}(x^1, x^2)$ — непрерывно дифференцируемая вектор–функция своих переменных, меняющихся в некоторой области D на плоскости (x^1, x^2), имеющая все вторые обобщённые производные, локально суммируемые с квадратом в D, причём всюду в D $|\vec{r}_{x^1} \times \vec{r}_{x^2}| \neq 0$. Иными словами, функция $\vec{r}(x^1, x^2) \in C^1 \cap W_2^2$ внутри указанной области.

Пусть R – метрическое пространство с метрикой ρ. Если дано непрерывное отображение сегмента $0 \le t \le 1$ $(a \le t \le b)$ в пространство R, то мы говорим, что задана кривая в параметризации $X(t)$. Различным значениям t могут отвечать одинаковые точки $X(t)$. Сегмент $0 \le t \le 1$ распадается на связные компоненты k_t, каждой из которых отвечает одна и та же точка $X(t)$. Параметризации $X(t)$ и $Y(s)$ называются эквивалентными, если существует строго монотонное взаимно однозначное отображение ϕ, при котором $X(k_t) = Y(\phi(k_t))$.

Определение. [1, с. 6] *Кривая есть класс эквивалентных параметризаций.*

Длина кривой $X(t)$, $0 \le t \le 1$ в R может быть определена как

$$\sup \Sigma_{i=1}^n \rho\left(X(t_{i-1}), X(t_i)\right),$$

где $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$ — произвольное разбиение промежутка $[0, 1]$.

Определение.[1, с. 7] *Метрика ρ называется внутренней, если для любых двух точек $X, Y \in R$ расстояние $\rho(X, Y)$ равно точной нижней границе длин кривых, соединяющих точки X, Y.*

Определение.[1, с. 7] *Кратчайшей, соединяющей точки $X, Y \in R$, называется кривая, имеющая наименьшую длину среди всех кривых с теми же концами. Геодезической называется кривая, кратчайшая на каждом достаточно малом участке.*

Определение.[1, с. 8] *Треугольником $T = ABC$ в пространстве R назовем фигуру, состоящую из трех заданных различных точек A, B, C (вершин треугольника) и трех попарно соединяющих их кратчайших (сторон треугольника).*

Допустим, что в пространстве R выделена открытая в R область G, которая оказалась гомеоморфной открытому кругу на плоскости. Пусть треугольник T лежит в этой области и его стороны образуют простой замкнутый контур (то есть они ограничивают в G область). Мы будем причислять ее к T и говорить, что T есть треугольник, гомеоморфный кругу.

Определение.[1, с. 8] *Будем говорить, что треугольник T — гранично выпуклый, если никакие две точки его контура нельзя соединить идущей вне T кривой, более короткой, чем соединяющий эти точки участок контура.*

Определение.[1, с. 9] *Простым треугольником (в области G) будем называть гомеоморфный кругу гранично выпуклый треугольник. Два простых треугольника называются неналегающими, если они не имеют общих внутренних точек.*

Пусть L и M — две кривые в R, исходящие из одной точки O. Пусть X и Y — переменные точки соответственно на L и на M. Построим на плоскости треугольник T_0 со сторонами $\rho(O, X)$, $\rho(O, Y)$ и $\rho(X, Y)$. Такой треугольник существует, поскольку указанные расстояния удовлетворяют неравенству треугольника. Пусть $\gamma(X, Y)$ — угол, лежащий против стороны $\rho(X, Y)$.

Определение.[1, с.8] *Верхним углом (углом) между кривыми L и M в точке O называется*

$$\overline{\lim_{X,Y\to O}} \gamma(X, Y) \left(\lim_{X,Y\to O} \gamma(X, Y)\right).$$

[1]Полное определение симметричного интеграла довольно громоздко, поэтому здесь мы его целиком не приводим.

Верхним углом треугольника $T = ABC$ в вершине A будем считать верхний угол между кратчайшими AB и AC.

Определение.[1, с. 9] *Верхним избытком (избытком) треугольника называется величина*

$$\bar{\nu}(T) = \bar{\alpha} + \bar{\beta} + \bar{\gamma} - \pi \; (\nu(T) = \alpha + \beta + \gamma - \pi),$$

где $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma} (\alpha, \beta, \gamma)$ *— верхние углы (углы) треугольника* T.

Определение. [1, с.8]

Метрическое пространство R называется двумерным многообразием ограниченной кривизны, если выполнены следующие аксиомы:

1. *R есть метрическое пространство с внутренней метрикой;*

2. *Каждая точка в R имеет окрестность, гомеоморфную кругу на плоскости;*

3. *Для всякой области $G \subset R$ с компактным замыканием существует такое число $\nu(G)$, что для всякой конечной совокупности попарно неналегающих простых треугольников $T_i \subset G$*

$$\Sigma_i \left|\bar{\nu}(T_i)\right| \leq \nu(G) < +\infty.$$

Имеет место следующая

Теорема[9, с. 91] *Двумерное многообразие с внутренней метрикой имеет ограниченную кривизну тогда и только тогда, когда во всякой области G с компактным замыканием индуцированная в ней метрика ρ_G допускает равномерное приближение римановыми метриками, в которых абсолютные кривизны ограничены в совокупности.*

В работе [3, с. 83] была доказана

Теорема *Всякая гладкая поверхность ограниченного искривления в смысле своей внутренней метрики есть многообразие ограниченной кривизны.*

Приведем теперь некоторые определения и результаты из работы [3].

Определение.[3, с. 71] *Средней поверхностью F_h для поверхности ограниченного искривления F с параметризацией $\vec{r} = \vec{r}(x^1, x^2)$ называют поверхность с параметризацией*

$$\vec{r}_h(x^1, x^2) = \iint_{D-D_\delta} \vec{r}(\xi, \eta)\omega_h(\xi, \eta, x^1, x^2)d\xi d\eta,$$

где

$$\omega_h(\xi, \eta, x^1, x^2)d\xi d\eta = \begin{cases} \frac{1}{H_h} e^{\frac{r^2}{r^2-h^2}}, r < h \\ 0, r \geq h \end{cases},$$

$H_h = \iint_{r \leq h} e^{\frac{r^2}{r^2-h^2}} d\xi d\eta$, $r = \sqrt{(x^1 - \xi)^2 + (x^2 - \eta)^2}$.

Введём следующие обозначения [3, с. 102]:

$$\Gamma_1 = \frac{1}{2} g_{12} \cdot \frac{\partial g_{22}}{\partial x^2} - g_{22}(\frac{\partial g_{12}}{\partial x^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1});$$

$\psi(x^1, x^2) = \frac{\Gamma_1}{\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}} \cdot g_{22\,h}$, где индекс h внизу означает принадлежность к средней поверхности.

Пусть теперь $U_{1,\delta}$ — множество точек отрезка $[a + \delta, b - \delta]$, обладающих следующими свойствами: для $u \in U_{1,\delta}$ можно выбрать подпоследовательность F_{h_k} так, что

1. при любых $c + \delta \leq \lambda < \mu \leq d - \delta$

$$\lim_{h_k \to 0} \int_\lambda^\mu \psi_{h_k}(u, v)dv = \int_\lambda^\mu \psi(u, v)dv;$$

2. кривая L_u[2] имеет конечный поворот в пространстве, который как функция множеств кривой L_u абсолютно непрерывен;

3. кривые L_{u,h_k} сходятся к L_u равномерно вместе со своими касательными и имеют ограниченные в совокупности повороты, которые равностепенно абсолютно непрерывны.

[2]Определение поворота координатной линии L_u [3, с. 99] достаточно громоздко, поэтому здесь оно не приводится.

Теорема[3, с. 110] *На всякой гладкой поверхности ограниченного искривления в прямоугольнике* $K_{x_1^1 x_2^1}^{x_1^2 x_2^2}$ *для почти всех* $x_1^1, x_2^1 \in U_{1,\delta}$ *и для почти всех* $x_1^2, x_2^2 \in V_{1,\delta}$ *имеют место соотношения*

$$\begin{aligned} \oint_L b_{11}dx^1 + b_{12}dx^2 &= \iint_{K_{x_1^1 x_2^1}^{x_1^2 x_2^2}} \Gamma_{12}^1 b_{11} + \Gamma_{12}^2 b_{12} - \Gamma_{11}^1 b_{12} - \Gamma_{11}^2 b_{22} dx^1 dx^2 \\ \oint_L b_{12}dx^1 + b_{22}dx^2 &= \iint_{K_{x_1^1 x_2^1}^{x_1^2 x_2^2}} \Gamma_{22}^1 b_{11} + \Gamma_{22}^2 b_{12} - \Gamma_{21}^1 b_{12} - \Gamma_{21}^2 b_{22} dx^1 dx^2 \end{aligned}, \tag{1}$$

где L *— граница прямоугольника* $K_{x_1^1 x_2^1}^{x_1^2 x_2^2}$, Γ_{ij}^k *– обобщенные символы Христоффеля второго рода [3, с.85]*

В дальнейшем мы будем рассматривать гладкую поверхность положительной кривизны. Определение этого понятия для двумерного многообразия ограниченной кривизны достаточно громоздко и потому здесь не приводится. Подробную конструкцию понятия кривизны можно посмотреть в [1], глава 5. В гладком случае аналогом кривизны является гауссова кривизна и ее положительность эквивалентна положительной определённости второй основной формы поверхности.

Из положительности кривизны поверхности ограниченного искривления следует положительная определенность второй основной формы почти всюду [3, §§ 11, 12.].

Случайный процесс Y_t, порождённый второй формой поверхности, может быть построен с помощью соответствующей формы Дирихле[3] [10, с. 19]. Эквивалентность задания процесса с помощью формы Дирихле или генератора показана там же.

Основной результат. Пусть S — гладкая поверхность положительной гауссовой кривизны с параметризацией $\vec{r} = \vec{r}(x^1, x^2)$. Первую и вторую формы поверхности будем обозначать $I = g_{ij}dx^i dx^j$ и $II = b_{ij}dx^i dx^j$ соответственно. Случайный процесс, порождённый первой формой, будем обозначать X_t, второй — Y_t. Не ограничивая общности будем считать, что вторая форма приведена к изотермическому виду, то есть $b_{12} = 0$.

Хорошо известны формулы для вычисления коэффициентов b_{ij} [8]:

$$b_{ij} = (\vec{r}_{ij}, \vec{n}) = \frac{(\vec{r}_{ij}, \vec{r}_1, \vec{r}_2)}{|I|},$$

где $|I| = \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}$.

На поверхности S имеет место формула Ито [5, с. 73]:

$$df(Z_t) = \partial_i f(Z_t)dZ_t^i + \frac{1}{2}\partial_i\partial_j f(Z_t)dZ_t^i dZ_t^j,$$

где d — стохастический дифференциал[4], f – дважды дифференцируемая функция, Z_t — диффузионный процесс на S. Необходимо отметить, что мы рассматриваем диффузионный процесс с нулевыми сносом и вероятностью обрыва.

Выберем вместо случайного процесса Z_t каноническое броуновское движение $B_t = (B_t^1, B_t^2)$ [2] на S и подставим в формулу Ито, воспользовавшись свойствами броуновского движения [2, с. 21]:

$$df(B_t) = \partial_i f(B_t)dB_t^i + \frac{1}{2}\left[\partial_{11} f(B_t)dt + \partial_{22} f(B_t)dt\right].$$

Рассмотрим последнюю формулу для двух частных случаев:

1. $Z_1 = (B_t^1, 0)$;
2. $Z_2 = (0, B_t^2)$.

После подстановки получим:

$$df(Z_1) = \partial_1 f(Z_1)dB_t^1 + \frac{1}{2}\partial_{11} f(Z_1)dt,$$

$$df(Z_2) = \partial_1 f(Z_2)dB_t^2 + \frac{1}{2}\partial_{22} f(Z_2)dt.$$

Выразим отсюда вторые производные:

$$\partial_{11} f(Z_1)dt = 2\left(df(Z_1) - \partial_1 f(Z_1)dB_t^1\right),$$

[3]Построение случайного процесса с помощью формы Дирихле весьма громоздко [10], глава 1 и здесь не приводится.
[4]Определения и свойства стохастического дифференциала можно посмотреть, например, в книге [5].

$$\partial_{22} f(Z_2)dt = 2\left(df(Z_2) - \partial_1 f(Z_2)dB_t^2\right).$$

Определение. *Второй производной Ито вдоль траектории броуновского движения B^1 (B^2) назовём*

$$\partial_{11} f(Z_1)dt = 2\left(df(Z_1) - \partial_1 f(Z_1)dB_t^1\right),$$

$$\partial_{22} f(Z_2)dt = 2\left(df(Z_2) - \partial_1 f(Z_2)dB_t^2\right).$$

Вернёмся теперь к нашей поверхности S. На ней имеют место уравнения Петерсона – Кодацци:

$$b_{i[j,k]} = 0,$$

где «[]» – альтернирование, «,» – ковариантная производная.

Лемма. *На поверхности S имеют место формулы:*

$$b_{11}(B_t^1)dt = \frac{(2(d\vec{r}(B_t^1) - \partial\vec{r}(B_t^1)dB_t^1), \vec{r}_1, \vec{r}_2)}{|I|},$$

$$b_{22}(B_t^2)dt = \frac{(2(d\vec{r}(B_t^2) - \partial\vec{r}(B_t^2)dB_t^2), \vec{r}_1, \vec{r}_2)}{|I|}.$$

Доказательство. Домножим выражения для вычисления коэффициентов b_{ij} на dt, заменим координаты x^i на соответствующее броуновское движение и получим выражение коэффициентов через вторую производную Ито:

$$b_{11}(B_t^1)dt = \frac{(2(d\vec{r}(B_t^1) - \partial\vec{r}(B_t^1)dB_t^1), \vec{r}_1, \vec{r}_2)}{|I|},$$

$$b_{22}(B_t^2)dt = \frac{(2(d\vec{r}(B_t^2) - \partial\vec{r}(B_t^2)dB_t^2), \vec{r}_1, \vec{r}_2)}{|I|}.$$

Отметим, что коэффициент $b_{12} = 0$ в силу выбора системы координат.

Выведем теперь аналог уравнений Петерсона – Кодацци на поверхности S. Перепишем уравнения Петерсона – Кодацци в более удобной для нас интегральной форме [3]:

$$\oint_L b_{11}dx^1 = \iint_Q \left(\Gamma_{12}^1 b_{11} - \Gamma_{11}^2 b_{22}\right) dx^1 dx^2,$$

$$\oint_L b_{22}dx^2 = \iint_Q \left(\Gamma_{22}^1 b_{11} - \Gamma_{21}^2 b_{22}\right) dx^1 dx^2.$$

Здесь Γ_{ij}^k – символ Христоффеля второго рода, Ω – прямоугольник, L – его граница. Домножим оба уравнения на dt:

$$\oint_L b_{11}dtdx^1 = \iint_Q \left(\Gamma_{12}^1 b_{11} - \Gamma_{11}^2 b_{22}\right) dx^1 dx^2 dt,$$

$$\oint_L b_{22}dtdx^2 = \iint_Q \left(\Gamma_{22}^1 b_{11} - \Gamma_{21}^2 b_{22}\right) dx^1 dx^2 dt.$$

Заменим теперь в последнем равенстве коэффициенты b_{ij} на их выражения из предыдущей леммы и перейдём к симметричным интегралам:

$$\oint_L \frac{(2(d\vec{r}(B_t^1) - \partial\vec{r}(B_t^1)dB_t^1), \vec{r}_1, \vec{r}_2)}{|I|} * dB^1 =$$

$$= \iint_Q \left(\Gamma_{12}^1 \frac{(2(d\vec{r}(B_t^1) - \partial\vec{r}(B_t^1)dB_t^1), \vec{r}_1, \vec{r}_2)}{|I|} - \Gamma_{11}^2 \frac{(2(d\vec{r}(B_t^2) - \partial\vec{r}(B_t^2)dB_t^2), \vec{r}_1, \vec{r}_2)}{|I|}\right) * dB^1 dB^2 \cdot dt,$$

$$\oint_L \frac{(2(d\vec{r}(B_t^2) - \partial\vec{r}(B_t^2)dB_t^2), \vec{r}_1, \vec{r}_2)}{|I|} * dB^2 =$$

$$= \iint_Q \left(\Gamma_{22}^1 \frac{(2(d\vec{r}(B_t^1) - \partial\vec{r}(B_t^1)dB_t^1), \vec{r}_1, \vec{r}_2)}{|I|} - \Gamma_{21}^2 \frac{(2(d\vec{r}(B_t^2) - \partial\vec{r}(B_t^2)dB_t^2), \vec{r}_1, \vec{r}_2)}{|I|}\right) * dB^1 dB^2 \cdot dt.$$

Итак, на гладкой пооверхности мы получили аналог уравнений Петерсона – Кодацци, который не содержит вторых производных.

Резюмируя все вышесказанное, сформулируем следующую теорему:

Теорема. *Пусть S – двумерная гладкая поверхность положительной кривизны, задаваемая вектор–функцией $\vec{r} = \vec{r}(x^1, x^2)$. Тогда на S имеет место стохастический аналог уравнений Петерсона – Кодацци:*

$$\oint_L \frac{(2(d\vec{r}(B_t^1) - \partial\vec{r}(B_t^1)dB_t^1), \vec{r}_1, \vec{r}_2)}{|I|} * dB^1 =$$

$$= \iint_Q \left(\Gamma_{12}^1 \frac{(2(d\vec{r}(B_t^1) - \partial\vec{r}(B_t^1)dB_t^1), \vec{r}_1, \vec{r}_2)}{|I|} - \Gamma_{11}^2 \frac{(2(d\vec{r}(B_t^2) - \partial\vec{r}(B_t^2)dB_t^2), \vec{r}_1, \vec{r}_2)}{|I|} \right) * dB^1 dB^2,$$

$$\oint_L \frac{(2(d\vec{r}(B_t^2) - \partial\vec{r}(B_t^2)dB_t^2), \vec{r}_1, \vec{r}_2)}{|I|} * dB^2 =$$

$$= \iint_Q \left(\Gamma_{22}^1 \frac{(2(d\vec{r}(B_t^1) - \partial\vec{r}(B_t^1)dB_t^1), \vec{r}_1, \vec{r}_2)}{|I|} - \Gamma_{21}^2 \frac{(2(d\vec{r}(B_t^2) - \partial\vec{r}(B_t^2)dB_t^2), \vec{r}_1, \vec{r}_2)}{|I|} \right) * dB^1 dB^2,$$

где Γ_{ij}^k – обобщённые символы Христоффеля второго рода, $B = (B^1, B^2)$ – броуновское движение, порождённое метрикой поверхности, Ω – произвольный координатный прямоугольник, L – его граница.

Список литературы

1. Александров А. Д., Залгаллер В. А. 1962. Двумерные многообразия ограниченной кривизны. Труды математического института имени В. А. Стеклова. Изд. Академии наук СССР. М.–Л.: 3–262.
2. Анулова С. В., Веретенников А. Ю., Крылов Н. В., Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н. 1989. Стохастическон исчисление. Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. ВИНИТИ. 49: 5–260.
3. Бакельман И. Я. 1956. Дифференциальная геометрия гладких нерегулярных поверхностей. УМН. 11(2)68: 67–124.
4. Боровский Ю. Е. 1988. Системы Пфаффа с коэффициентами из L_n и их геометрические приложения. Сибирский математический. журнал. 24(2): 10–16.
5. Ватанабе С, Икеда Н. 1986. Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы. М., Наука, 448.
6. Дынкин Е. Б. 1963. Марковские процессы. М., Физматлит, 860.
7. Насыров Ф. С. 2006. Симметричные интегралы и стохастический анализ. Теория вероятностей и её применения. 51(3): 496–517.
8. Рашевский П. К. 1939. Курс дифференциальной геометрии. ГОНТИ, 360.
9. Решетняк Ю. Г. 1989. Двумерные многообразия ограниченной кривизны, Геометрия – 4. Итоги науки и техники. Серия Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. ВИНИТИ. М. 70: 7-–189.
10. Fukushima M., Oshima Y., Takeda M. 1994. Dirishlet Forms and Symmetric Markov Processes. Walter de Gruyter. Berlin. New York, 390.
11. Sasaki S. 1958. A global formulation of the foundamental theorem of the theory of surfaces in three dimensional Euclidean space. Nagoya Math J. 13: 69–82.

References

1. Aleksandrov A. D., Zalgaller V. A. 1962. Dvumernye mnogoobrazija ogranichennoj krivizny [Two-dimensional manifolds of bounded curvature]. Trudy matematicheskogo instituta imeni V. A. Steklova. Izd. Akademii nauk SSSR. M.–L.: 3–262.
2. Anulova S. V., Veretennikov A. Ju., Krylov N. V., Lipcer R. Sh., Shirjaev A. N. 1989. Stohasticheskon ischislenie [Stochastic calculus]. Itogi nauki i tehniki. Sovremennye problemy matematiki. Fundamental'nye napravlenija. VINITI. 49: 5 –260.
3. Bakel'man I. Ja. 1956. Differencial'naja geometrija gladkih nereguljarnyh poverhnostej [Differential geometry of smooth irregular surfaces]. UMN. 11(2)68: 67–124.
4. Borovskij Ju. E. 1988. Sistemy Pfaffa s kojefficientami iz L_n i ih geometricheskie prilozhenija [Pfaffian systems with coefficients from L_n and their geometric applications]. Sibirskij matematicheskij. zhurnal. 24(2): 10–16.
5. Vatanabe S, Ikeda N. 1986. Stohasticheskie differencial'nye uravnenija i diffuzionnye processy [Stochastic differential equations and diffusion processes]. M., Nauka, 448.
6. Dynkin E. B. 1963. Markovskie processy [Markov processes]. M., Fizmatlit, 860.
7. Nasyrov F. S. 2006. Simmetrichnye integraly i stohasticheskij analiz [Symmetric integrals and stochastic analysis]. Teorija verojatnostej i ejo primenenija. 51(3): 496–517.
8. Rashevskij P. K. 1939. Kurs differencial'noj geometrii [Differential geometry course]. GONTI, 360.
9. Reshetnjak Ju. G. 1989. Dvumernye mnogoobrazija ogranichennoj krivizny, Geometrija – 4 [Two-dimensional manifolds of bounded curvature, Geometry – 4]. Itogi nauki i tehniki. Seriya. Sovremennyye problemy matematiki. Fundamental'nyye napravleniya. VINITI. M. 70:7—189.

10. Fukushima M., Oshima Y., Takeda M. 1994. Dirishlet Forms and Symmetric Markov Processes. Walter de Gruyter. Berlin. New York, 390.
11. Sasaki S. 1958. A global formulation of the foundamental theorem of the theory of surfaces in three dimensional Euclidean space. Nagoya Math J. 13: 69–82.

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.
Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 18.05.2023
Поступила после рецензирования 30.06.2023
Принята к публикации 03.07.2023

Received May 18, 2023
Revised June 30, 2023
Accepted July 3, 2023

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Климентов Дмитрий Сергеевич – кандидат физико-математических наук, доцент, Южный федеральный университет, г. Ростов-на-Дону, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Dmitry S. Klimentov – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, South Federal University, Rostov-on-Don, Russia

Прикладная математика & Физика, 2023, том 55, № 3. С. 228–235.
Applied Mathematics & Physics, 2023, Volume 55, No 3. P. 228–235.

УДК 517.98
MSC 47B35
Оригинальное исследование

DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-3-228-235

О структуре спектра и резольвентного множества оператора Теплица в счетно-нормированном пространстве гладких функций

Пасенчук А. Э.
(*Статья представлена членом редакционной коллегии С. М. Ситником*)
Южно-Российский государственный политехнический университет имени М. И. Платова,
Россия, 346428, г. Новочеркасск, ул. Просвещения, 132
pasenchuk@mail.ru

Аннотация. В счетно-нормированном пространстве гладких на единичной окружности функций рассматривается оператор Теплица с гладким символом. Изучаются вопросы об ограниченности, нетеровости и обратимости таких операторов. Вводятся понятия гладкой канонической вырожденной факторизации типа минус гладких функций и связанной с ней локальной вырожденной канонической факторизации типа минус. Получены критерии в терминах символа существования канонической вырожденной факторизации типа минус. Как и в классическом случае оператора Теплица в пространствах суммируемых функций с винеровскими символами, нетеровость оператора Теплица оказалась равносильной наличию гладкой вырожденной канонической факторизации типа минус его символа. Устанавливается эквивалентность вырожденной канонической факторизуемости и аналогичной локальной факторизуемости, что позволяет при исследовании вопросов обратимости пользоваться локализацией символа на некоторых характерных дугах окружности. Получены соотношения, связывающие спектры некоторых операторов Теплица в пространствах гладких и суммируемых функций. Дается описание резольвентного множества оператора Теплица с гладким символом.

Ключевые слова: оператор Теплица, нетеровость, обратимость, гладкий оператор, вырожденный оператор, факторизация, сингулярный, индекс, спектр

Для цитирования: Пасенчук А. Э. 2023. О структуре спектра и резольвентного множества оператора Теплица в счетно-нормированном пространстве гладких функций. *Прикладная математика & Физика*, 55(3): 228–235.
DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-3-228-235

Original Research

On the Structure of the Spectrum and the Resolvent Set of the Toeplitz Operator in a Countably Normed Space of Smooth Functions

Alexander E. Pasenchuk

(*Article submitted by a member of the editorial board S. M. Sitnik*)

South-Russian State Polytechnic University named after V. I. Platov,
132 Enlightenment st., Novocherrassk, 346428, Russia
pasenchukz@mail.ru

Abstract. In a countable normed space of smooth functions on the unit circle, we consider the Toeplitz operator with a smooth symbol. Boundedness, Notherianity and invtrbillity of such operators are studied. The concepts of a smooth canonical degenerate factorization on the minus type of smooth functions and the associated local degenerate canonical factorization of the minus type are introduced. Criteria are obtained in terms of the symbol for existence of a canonical degenerate factorization of type minus. As in the classical case of the Toeplitz operator in spaces of summable functions with Wiener symbols, the Toeplitz operator being Noterian turned out to be equivalent to the presence of a canonical factorization its symbol. The equivalence of the degenerate canonical factorizability is established, which makes it possible to use the localization of the symbol of certain characteristic arcs of the circle when studying Invertibility questions. The equivalence of the degenerate canonical factorizability is established, which makes it possible to use the localization of the symbol on certain characteristic arcs of the circle when studying Invertibility questions. Relations are obtained that relate the spectra of some Toeplitz operators in the spaces smooth and summable functions. A description is given of the resolvent set of the Toeplitz operator with smooth symbol.

Keywords: Toeplitz Operator, Noetherianness, Invertibillity, Smooth Operator, Degenerate Operator, Factorization, Singular, Index, Spectrum

For citation: Pasenchuk A. E. 2023. On the Structure of the Spectrum and the Resolvent Set of the Toeplitz Operator in a Countably Normed Space of Smooth Functions. *Applied Mathematics & Physics*, 55(3): 228–235. (in Russian)
DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-3-228-235

1. Введение. Пусть N, Z, R, C – множества натуральных, целых, вещественных, комплексных чисел соответственно, а

$$Z_+ = \{j \in Z : j \geq 0\}, Z_- = Z \backslash Z_+, \Gamma = \{z \in C : |z| = 1\}, D^+ = \{z \in C : |z| < 1\}, D^- = \{z \in C : |z| > 1\}.$$

Введем следующие множества функций, определенных на единичной окружности

$$C^m(\Gamma) = \left\{ \varphi(\xi) = \sum_{j \in Z} \varphi_j \xi^j,\ \varphi_j \in C,\ \xi \in \Gamma :\ \sum_{j \in Z} (|j| + 1)^{2m} \left|\varphi_j\right|^2 < \infty \right\}, m \in Z_+.$$

$C^m(\Gamma)$ является гильбертовым пространством относительно поточечных линейных операций и нормы

$$\left\| \sum_j \varphi_j \xi^j \right\|_m = \sqrt{\sum_{j \in Z} (|j| + 1)^{2m} \left|\varphi_j\right|^2}.$$

При этом $C^0(\Gamma) = L_2(\Gamma)$ – гильбертово пространство измеримых суммируемых с квадратом на Γ-функций. Пересечение

$$C^\infty(\Gamma) = \bigcap_{m \in Z_+} C^m(\Gamma)$$

является счетно-гильбертовым пространством функций, топология в котором задается при помощи счетного набора норм $\|\bullet\|_m$, $m \in Z_+$. Формулами

$$P^\pm \left(\sum_{j \in Z} \varphi_j \xi^j \right) = \sum_{j \in Z_\pm} \varphi_j \xi^j,$$

определим операторы проектирования $P^\pm$ и положим:

$$C_+^m(\Gamma) = P^+(C^m(\Gamma)), \tilde{C}_-^\infty(\Gamma) = P^-(C^\infty(\Gamma)), C_-^m(\Gamma) = C \oplus \tilde{C}_-^m(\Gamma), m \in Z_+ \bigcup \{\infty\}.$$

Для случая $m = 0$ будем использовать стандартные обозначения

$$C^0(\Gamma) = L_2(\Gamma), \quad C_\pm^0(\Gamma) = L_2^\pm(\Gamma).$$

Оператор

$$T(a) = \left|P^+ a(\xi)\right|_{ImP^+}, T(a) : C_+^\infty(\Gamma) \to C_+^\infty(\Gamma)$$

называют оператором Теплица, а функцию $a(\xi)$ называют символом этого оператора. В этой работе мы будем предполагать, что $a(\xi) \in C^\infty(\Gamma)$.

Оператору Теплица $T(a)$ и родственным операторам посвящено большое число работ. Наиболее полные результаты относительно этого оператора были получены в банаховых пространствах гельдеровых и суммируемых функций. В этих пространствах для широкого класса символов построена полная теория Нетера оператора $T(a)$. Современное состояние теории оператора Теплица и подобных операторов в случае банаховых пространств отражено в монографиях [1]-[4] и цитируемых там работах. Оператор Теплица в случае счетно-нормированного пространства изучался в ряде исследований, многие из которых цитируются в монографиях [4, 7, 8]. В этих работах были установлены критерии нетеровости и обратимости. Однако критерий обратимости был получен в терминах, которые делали его практическое применение весьма трудной задачей. Нами получен новый критерий обратимости оператора Теплица в пространстве гладких функций, позволяющий дать описание спектра и резольвентного множества рассматриваемого оператора. Приводятся утверждения о структуре этих множеств.

2. Вспомогательные результаты. Здесь мы формулируем некоторые вспомогательные понятия и результаты, подробное изложение которых приведено в работах [4]-[6]. Введем следующие линейные функционалы $\pi_k : C_+^\infty(\Gamma) \to C$, действующие по формуле

$$\pi_k \left(\sum_{j \in Z_+} \varphi_j \xi^j \right) = \varphi_k$$

и связанные с ними операторы проектирования

$$\tilde{\pi}_k : C_+^\infty(\Gamma) \to C_+^\infty(\Gamma), \tilde{\pi}_k \left(\sum_{j \in Z_+} \varphi_j \xi^j \right) = \varphi_k \xi^k, \quad k \in Z_+.$$

Оператору $D : C_+^\infty(\Gamma) \to C_+^\infty(\Gamma)$ поставим в соответствие следующую матрицу:

$$\left(d_{kj}\right), \quad d_{kj} = \pi_k D \tilde{\pi}_j, \quad (k, j) \in Z_+^2.$$

Лемма 1. *Имеет место равенство* $D = \sum_{k \in Z_+} \xi^k \sum_{j \in Z_+} d_{kj}$, *понимаемое в сильном смысле. Оператор* $D : C_+^\infty(\Gamma) \to C_+^\infty(\Gamma)$ *ограничен тогда и только тогда, когда элементы матрицы* $\left(d_{kj}\right)$ *таковы, что для всех* $(k, j) \in Z_+^2$ *по любому* $n \in Z_+$ *найдутся* $c_n > 0$ *и* $m_n \in Z_+$ *так, что*

$$\left|d_{kj}\right| \leq c_n (k+1)^{-n} (j+1)^{m_n}.$$

Следствие. *Для оператора Теплица*

$$T(a) : C_+^\infty(\Gamma) \to C_+^\infty(\Gamma)$$

с символом

$$a(\xi) = \sum_{j \in Z} a_j \xi^j \in C^\infty(\Gamma)$$

имеем $d_{kj} = a_{k-j}$, *поэтому оператор* $T(a)$ *с символом* $a(\xi) \in C^\infty(\Gamma)$ *ограничен в пространстве* $C_+^\infty(\Gamma)$.

Однако иногда ограниченный оператор Теплица может быть определен и для некоторых, вообще говоря, разрывных на Γ функций. Рассмотрим, например, функцию $a^-(\xi)$, аналитическую в области D^-. Пусть $a^-(\xi) = \sum_{j \in Z_+} a_j \xi^{-j}$ – разложение в ряд Лорана этой функции в окрестности бесконечно удаленной точки. Оператор

$$T(a^-) : C_+^\infty(\Gamma) \to C_+^\infty(\Gamma)$$

ограничен тогда и только тогда, когда найдутся $c_0 > 0$ и $m_0 \in Z_+$ так, что $\left|a_j\right| \leq c_0 (j+1)^{m_0}$. В частности, символ

$$a^-(\xi) = \left(\xi^{-1} - \mu\right)^{-1} = -\sum_{j \in Z_+} \mu^{-j-1} \xi^{-j}$$

порождает ограниченный в пространстве $C_+^\infty(\Gamma)$ оператор Теплица при всех $\mu : |\mu| \geq 1$.

Лемма 2. *Пусть* $a^-(\xi)$*- функция, аналитическая в области* D^-. *Оператор Теплица* $T(a^-)$, *ограниченный в пространстве* $C_+^\infty(\Gamma)$, *обратим тогда и только тогда, когда*

$$a^-(\xi_0) \neq 0, \forall \xi_0 \in D^-$$

и если

$$(a^-(\xi))^{-1} = \sum_{l \in Z_+} b_j \xi^{-j}$$

– разложение функции $(a^-(\xi))^{-1}$ *в ряд Лорана в окрестности точки* $\xi = \infty$, *то найдутся* $c_0 > 0$ *и* $m_0 \in Z_+$ *так, что* $\left|b_j\right| \leq c_0 (j+1)^{m_0}$. *При выполнении этих условий*

$$(T(a^-))^{-1} = T\left((a^-)^{-1}\right).$$

Следствие. *Оператор*

$$T\left(\prod_{j=1}^{m} \left(\xi^{-1} - \mu_j\right)\right) : C_+^\infty(\Gamma) \to C_+^\infty(\Gamma)$$

обратим тогда и только тогда, когда

$$\left|\mu_j\right| \geq 1, \quad j = 1, 2, ..., m.$$

Рассмотрим функцию $a^+(\xi)$, аналитическую в области D^+. Из леммы 1 вытекает, что порождаемый этой функцией оператор Теплица

$$T\left(a^+\right) : C_+^\infty(\Gamma) \to C_+^\infty(\Gamma)$$

ограничен тогда и только тогда, когда

$$a^+(\xi) \in C_+^\infty(\Gamma).$$

Лемма 3. *Пусть функция* $a^+(\xi)$ *аналитическая в области* D^+. *Оператор Теплица*

$$T\left(a^+\right) : C_+^\infty(\Gamma) \to C_+^\infty(\Gamma)$$

ограничен тогда и только тогда, когда обратим тогда и $a^+(\xi) \in C_+^\infty(\Gamma)$. *Для обратимости этого оператора необходимо и достаточно, чтобы*

$$a^+(\xi) \in GC_+^\infty(\Gamma).$$

При выполнении последнего условия

$$\left(T\left(a^{+}\right)\right)^{-1} = T\left(\left(a^{+}\right)^{-1}\right).$$

Определение. *Будем говорить, что функция $a(\xi) \in C^{\infty}(\Gamma)$ допускает каноническую гладкую вырожденную факторизацию типа минус, если имеет место равенство $a(\xi) = a^{-}(\xi) \cdot a^{+}(\xi)$, причем компоненты факторизации $a^{\pm}(\xi)$ удовлетворяют условиям: $a^{\pm}(\xi) \in C^{\infty}_{\pm}(\Gamma)$ и операторы Теплица*

$$T\left(a^{\pm}\right) : C^{\infty}_{+}(\Gamma) \to C^{\infty}_{+}(\Gamma)$$

обратимы.

Теорема 1. *Оператор Теплица*

$$T(a) : C^{\infty}_{+}(\Gamma) \to C^{\infty}_{+}(\Gamma), a(\xi) \in C^{\infty}(\Gamma)$$

обратим тогда и только тогда, когда его символ допускает каноническую гладкую вырожденную факторизацию типа минус.

Пусть $a(\xi) \in C^{\infty}(\Gamma, C)$ и имеет на Γ конечное число нулей z_k порядков n_k, $\ k = 1, 2, ..., s$ соответственно. Назовем число $n(a) = \sum_{k=1}^{s} n_k$ суммарным числом нулей этой функции. Если $n(a) < \infty$, то может быть введен функционал

$$\kappa_c(a) = \frac{1}{\pi i} v.p. \int_{\Gamma} \frac{a'(\xi)}{a(\xi)} d\xi.$$

Функционал $\kappa_c(a)$ называют сингулярным индексом функции $a(\xi)$.

Теорема 2. *Функция $a(\xi) \in C^{\infty}(\Gamma)$ допускает гладкую вырожденную факторизацию типа минус тогда и только тогда, когда она имеет на Γ не более чем конечное число нулей конечных порядков и при этом имеет место равенство $\kappa_c(a) = -n(a)$.*

Следствие. *Оператор Теплица*

$$T(a) : C^{\infty}_{+}(\Gamma) \to C^{\infty}_{+}(\Gamma)$$

с символом $a(\xi) \in C^{\infty}(\Gamma)$ обратим тогда и только тогда, когда выполнены условия:

$$1) n(a) < \infty, 2) \kappa_c(a) = -n(a).$$

3. Локальная вырожденная факторизация.

Определение. *Будем говорить, что функция $a(\xi) \in C^{\infty}(\Gamma)$ допускает локальную каноническую вырожденную факторизацию типа минус на окружности Γ, если найдется конечное число дуг этой окружности, удовлетворяющих следующим условиям: 1) дуги γ_k, $\ k = 1, 2, ..., m$ таковы, что*

$$\gamma_k \bigcap \gamma_{k+1} \neq \emptyset, \quad k = 1, 2, ..., m-1; \quad \gamma_1 \bigcap \gamma_m \neq \emptyset; \quad \Gamma = \bigcup \gamma_k;$$

2) для каждой дуги γ_k найдутся области Δ_k^{+}, $\ \Delta_k^{-}$, так, что дуга γ_k, $\ k = 1, 2, ..., m$ является частью границы каждой из этих областей; 3) на любой дуге γ_k имеет место равенство

$$a(\xi) = g_k^{-}(\xi)\, a_k^{-}(\xi)\, a_k^{+}(\xi),$$

где функции $a_k^{\pm}(\xi)$ аналитически продолжимы в области $\Delta_k^{\pm}$ и непрерывны на γ_k, функция

$$g_k^{-}(\xi) \in C^{\infty}_{-}(\Gamma);$$

4) функции

$$a_k^{\pm}(\xi) \neq 0, \quad \xi \in \Delta_k^{\pm} \bigcup \Gamma;$$

5) оператор

$$T\left(g_k^{-}\right) : C^{\infty}_{+}(\Gamma) \to C^{\infty}_{+}(\Gamma)$$

обратим.

Отметим, что при $g_k^{-}(\xi) = 1$ понятие локальной вырожденной факторизации типа минус совпадает с понятием локальной канонической факторизации (см. [3, с. 102]). Ясно также, что если функция $a(\xi) \in C^{\infty}(\Gamma)$ допускает локальную каноническую вырожденную факторизацию типа минус, то функция

$$a_0(\xi) = \prod_{k=1}^{m} \left(g_k^{-}(\xi)\right)^{-1} a(\xi) \in C^{\infty}(\Gamma)$$

допускает локальную каноническую факторизацию.

Замечание. *Функция $a(\xi) \in C^{\infty}(\Gamma)$ не допускает локальной канонической факторизации в точке $\xi_0 \in \Gamma$, если для любой достаточно малой дуги окружности Δ, содержащей эту точку, найдутся функции*

$$a_{\Delta}^{-}(\xi) \in C_{-}^{\infty}(\Gamma), \quad a_{\Delta}(\xi) \in C^{\infty}(\Gamma)$$

такие, что 1) имеют место соотношения

$$a(\xi) = a_{\Delta}^{-}(\xi)\, a_{\Delta}(\xi), \ \xi \in \Delta;$$

2) оператор $T\left(a_{\Delta}^{-}(\xi)\right)$ необратим; 3) оператор $T\left(a_{\Delta}(\xi)\right)$ обратим.

Теорема 3. *Оператор Теплица*

$$T(a) : C_{+}^{\infty}(\Gamma) \to C_{+}^{\infty}(\Gamma)$$

с символом $a(\xi) \in C^{\infty}(\Gamma)$ обратим тогда и только тогда, когда его символ допускает локальную каноническую вырожденную факторизацию типа минус на окружности Γ.

Доказательство. Если оператор $T(a)$ обратим, то согласно теореме 2, его символ имеет на Γ не более чем конечное число нулей конечных кратностей и при этом имеет место равенство $\kappa_c(a) = n(a)$. Пусть $\xi_k, \quad k = 1, 2, ..., m$ – все нули функции $a(\xi)$ кратностей $n_k, \quad k = 1, 2, ..., m$ соответственно. Тогда функция

$$a_0(\xi) = \prod_{k=1}^{m} \left(1 - \xi_k \xi^{-1}\right)^{-n_k} a(\xi) \in C^{\infty}(\Gamma)$$

и $a_0(\xi) \neq 0, \quad \xi \in \Gamma$. Кроме того, простые вычисления показывают, что

$$\operatorname*{ind}_{\Gamma} a_0(\xi) = 2\kappa_c(a_0) = 2(\kappa_c(a) + n(a)) = 0.$$

Как известно (см., например, [2]), тогда имеет место представление

$$a_0(\xi) == a_0^{-}(\xi)\, a_0^{+}(\xi),$$

где

$$a_0^{\pm}(\xi) = \exp\left(P^{\pm} \ln a_0(\xi)\right) \in GC_{\pm}^{\infty}(\Gamma).$$

Отсюда следует, что

$$a(\xi) = \prod_{k=1}^{m} \left(1 - \xi_k \xi^{-1}\right)^{n_k} a_0^{-}(\xi)\, a_0^{+}(\xi).$$

Выберем на окружности Γ набор дуг $\gamma_k, \ \ k = 1, 2, ..., m$ так, чтобы они удовлетворяли условиям 1), 2) из определения локальной канонической вырожденной факторизации типа минус. Тогда на дуге γ_k функция $a(\xi)$ допускает представление

$$a(\xi) = \left(1 - \xi_k \xi^{-1}\right)^{n_k} a_k^{-}(\xi)\, a_k^{+}(\xi)\ ,$$

где

$$a_k^{-}(\xi) = \prod_{j \neq k} \left(1 - \xi_k \xi^{-1}\right)^{n_j} a_0^{-}(\xi), a_k^{+}(\xi) = a_0^{+}(\xi).$$

Выбрав в качестве областей $\Delta_k^{+}, \ \ \Delta_k^{-}$ подходящие части областей $D^{+}, \ \ D^{-}$, получим, что функция $a(\xi)$ допускает локальную каноническую вырожденную факторизацию типа минус. Обратно, как было отмечено выше, из локальной вырожденной факторизуемости функции $a(\xi)$ вытекает локальная факторизуемость функции функция $a_0(\xi)$.

Как известно (см., например, теорема 6.1, [3], стр. 102) имеет место представление

$$a_0(\xi) = a_0^{-}(\xi)\, a_0^{+}(\xi).$$

В этом представлении функции $a_0^{\pm}(\xi)$ аналитически продолжимы в области $D^{\pm}$ соответственно, непрерывны на Γ и $a_0^{\pm}(\xi) \neq 0, \quad \xi \in \overline{D^{\pm}}$. Это означает, что $\operatorname*{ind}_{\Gamma} a_0(\xi) = 0$, поэтому существует гладкая каноническая факторизация функции $a_0(\xi)$. В силу единственности канонической факторизации функции $a_0^{\pm}(\xi)$ могут отличаться от функций $\exp\left(P^{\pm} \ln a_0(\xi)\right) \in GC_{\pm}^{\infty}(\Gamma)$ лишь скалярными множителями. Но тогда представление

$$a(\xi) = a^{-}(\xi)\, a^{+}(\xi),$$

где

$$a_0^{-}(\xi) = \prod_{k=1}^{m} \left(1 - \xi_k \xi^{-1}\right)^{n_k} a_0^{-}(\xi), a^{+}(\xi) = a_0^{+}(\xi)$$

есть каноническая гладкая вырожденная факторизация типа минус.

4. Спектр и резольвентное множество оператора Теплица. Рассмотрим оператор Теплица

$$T\left(a\right):L_{2}^{+}\left(\Gamma\right)\rightarrow L_{2}^{+}\left(\Gamma\right).$$

Ясно, что функция $a\left(\xi\right)\in C^{\infty}\left(\Gamma\right)$ порождает ограниченные операторы в пространствах $L_{2}^{+}\left(\Gamma\right)$ и $C_{+}^{\infty}\left(\Gamma\right)$. Условимся эти операторы обозначать одним и тем же символом $T\left(a\right)$, а для резольвентных множеств и спектров использовать обозначения

$$\rho_{2}\left(T\left(a\right)\right),\sigma_{2}\left(T\left(a\right)\right)$$

в случае пространства $L_{2}^{+}\left(\Gamma\right)$ и $\rho_{\infty}\left(T\left(a\right)\right)$, $\sigma_{\infty}\left(T\left(a\right)\right)$ в случае пространства $C_{+}^{\infty}\left(\Gamma\right)$ соответственно.

Теорема 4. *Имеют место вложения*

$$\rho_{2}\left(T\left(a\right)\right)\subseteq\rho_{\infty}\left(T\left(a\right)\right),\sigma_{2}\left(T\left(a\right)\right)\supseteq\sigma_{\infty}\left(T\left(a\right)\right).$$

Доказательство. В самом деле, если $\lambda\in\rho_{2}\left(T\left(a\right)\right)$, то $\underset{\Gamma}{ind}\left(a\left(\xi\right)-\lambda\right)=0$. Это означает, что выполнены условия $n\left(a\left(\xi\right)-\lambda\right)=0$ и

$$\kappa_{c}\left(a\left(\xi\right)-\lambda\right)=2\underset{\Gamma}{ind}\left(a\left(\xi\right)-\lambda\right)=0=n\left(a\left(\xi\right)-\lambda\right).$$

Но тогда $\lambda\in\rho_{\infty}\left(T\left(a\right)\right)$.

С геометрической точки зрения теорема 4 может быть истолкована следующим образом. Геометрически образом окружности при отображении $\xi\mapsto a\left(\xi\right)$ является замкнутая гладкая кривая $a\left(\Gamma\right)$, которая может иметь точки самопересечения. Эта кривая разбивает комплексную плоскость на компоненты связности, обладающие тем свойством, что функция $a\left(\xi\right)-\lambda,\ \ \xi\in\Gamma$ при выборе λ внутри каждой компоненты не обращается в нуль. Это означает, что определен индекс: $\underset{\Gamma}{ind}\left(a\left(\xi\right)-\lambda\right)$, принимающий постоянное значение при изменении λ внутри каждой компоненты. Обозначим через K_{0} объединение тех компонент связности, где $\underset{\Gamma}{ind}\left(a\left(\xi\right)-\lambda\right)=0$. Из доказательства теоремы 4 следует, что имеют место соотношения

$$\mathrm{K}_{0}=\rho_{2}\left(T\left(a\right)\right),\ \ \mathrm{K}_{0}\subseteq\rho_{\infty}\left(T\left(a\right)\right).$$

Вопрос о полном описании спектра и резольвентного множества оператора

$$T\left(a\right):C_{+}^{\infty}\left(\Gamma\right)\rightarrow C_{+}^{\infty}\left(\Gamma\right)$$

с символом $a\left(\xi\right)\in C^{\infty}\left(\Gamma\right)$ сводится к вопросу о принадлежности точек кривой $a\left(\Gamma\right)$.

Лемма 5. *Точка $\lambda=0$ является точкой резольвентного множества оператора*

$$T\left(\left(1-\xi_{0}\xi^{-1}\right)^{n}\right):C_{+}^{\infty}\left(\Gamma\right)\rightarrow C_{+}^{\infty}\left(\Gamma\right),$$

но при этом возможны следующие ситуации 1) если $n=1,2,3$ точка $\lambda=0$ является граничной точкой множеств $\rho_{\infty}\left(T\left(a\right)\right)$ и $\sigma_{\infty}\left(T\left(a\right)\right)$, 2) если $n\geq 4$, то точка $\lambda=0$ является изолированной точкой множества $\rho_{\infty}\left(T\left(a\right)\right)$.

Доказательство. Обратимость рассматриваемого оператора является следствием леммы 3. Пусть $\lambda\rightarrow 0$, рассмотрим оператор

$$T\left(\left(1-\xi_{0}\xi^{-1}\right)^{n}\right)-\lambda I=T\left(\left(1-\xi_{0}\xi^{-1}\right)^{n}-\lambda\right).$$

Ясно, что его символ допускает представление

$$\left(1-\xi_{0}\xi^{-1}\right)^{n}-\lambda=\left(-\xi_{0}\right)^{n}\prod_{j=1}^{n}\left(\xi^{-1}-\xi_{j}^{-1}\left(\lambda\right)\right),$$

где

$$\xi_{j}\left(\lambda\right)-\ \left(1-\xi_{0}\xi^{-1}\right)^{n}-\lambda=0.$$

Нетрудно видеть, что

$$\xi_{j}^{-1}\left(\lambda\right)=\xi_{0}^{-1}\left(1-\left(\sqrt[n]{\lambda}\right)_{j}\right),$$

где

$$\left(\sqrt[n]{\lambda}\right)_{j}=\sqrt[n]{\left|\lambda\right|}\left(\cos\varphi_{j}\left(\lambda\right)+i\sin\varphi_{j}\left(\lambda\right)\right),\varphi_{j}\left(\lambda\right)=\frac{\varphi_{\lambda}+2\pi\left(j-1\right)}{n},$$

$$\varphi_{\lambda}=\arg\lambda j=1,2,...,n.$$

В силу следствия к лемме 2 оператор

$$T\left(\left(1-\xi_0\xi^{-1}\right)^n-\lambda\right)$$

обратим тогда и только тогда, когда

$$\left|\xi_j^{-1}(\lambda)\right| \geq 1, j=1,2,...,n.$$

Последние неравенства равносильны следующим

$$\cos\varphi_j(\lambda) \leq \frac{1}{2}\sqrt[n]{|\lambda|}, j=1,2,...,n.$$

Ясно, что при достаточно больших n имеем

$$\varphi_1(\lambda)=\frac{\varphi_\lambda}{n}\approx 0,$$

поэтому

$$\cos\varphi_1(\lambda)\approx\cos 0=1.$$

Тогда

$$\cos\varphi_1(\lambda)>\frac{1}{2}\geq\frac{1}{2}\sqrt[n]{|\lambda|}$$

и, следовательно, оператор

$$T\left(\left(1-\xi_0\xi^{-1}\right)^n-\lambda\right)$$

необратим при $\lambda\longrightarrow 0$, но $\lambda\neq 0$. Непосредственно, легко проверить, что описанная ситуация реализуется для всех $n\geq 4$. Аналогичным образом устанавливается, что при $n=1,2,3$ найдутся такие достаточно близкие к $\lambda=0$ числа, что выполнены неравенства $\cos\varphi_j(\lambda)\leq\frac{1}{2}\sqrt[n]{|\lambda|}$ для всех j и найдутся такие числа $\lambda\longrightarrow 0$, что хотя бы один из корней удовлетворяет условию $\left|\xi_j^{-1}(\lambda)\right|<1$.

Теорема 5. *Пусть точка $\lambda=0$ является точкой резольвентного множества оператора Теплица*

$$T(a): C_+^\infty(\Gamma)\longrightarrow C_+^\infty(\Gamma), a(\xi)=\prod_{k=1}^{n}\left(1-\xi_k\xi^{-1}\right)^{n_k}a_0(\xi),$$

где

$$a_0(\xi)\in C^\infty(\Gamma);\quad a_0(\xi)\neq 0, \xi\in\Gamma;\quad \underset{\Gamma}{ind}\,a_0(\xi)=0.$$

Тогда, если $\max\limits_k n_k>3$, то точка $\lambda=0$ является изолированной точкой резольвентного множества. Теорема вытекает из теоремы 4 и леммы 5. Пусть $\xi_0\in\Gamma$, рассмотрим оператор

$$T(a(\xi))-a(\xi_0)I=T(a(\xi)-a(\xi_0)).$$

Будем говорить, что точка $\xi_0\in\Gamma$ имеет конечную кратность относительно функции $a(\xi)$, если функция $a(\xi)-a(\xi_0)$ имеет не более чем конечное число нулей конечных порядков, т.е. $n(a(\xi)-a(\xi_0))<\infty$. Положим

$$A(\xi_0)=\left\{\eta_j\in\Gamma: a\left(\eta_j\right)=a(\xi_0)\right\}.$$

Точки из множества $A(\xi_0)$ назовем ассоциированным с точкой ξ_0 относительно функции $a(\xi)$.

Лемма 6. *Если оператор*

$$T(a(\xi)-a(\xi_0)): C_+^\infty(\Gamma)\longrightarrow C_+^\infty(\Gamma)$$

обратим, то множество точек, ассоциированных с точкой $\xi_0\in\Gamma$, конечно и каждая из точек $\eta_j\in A(\xi_0)$ имеет конечную кратность относительно функции $a(\xi)$.

Рассматривая оператор $T(a(\xi)-\lambda)$ при $\lambda\longrightarrow a(\xi_0)$ и применяя полученные в теоремах 2-5 результаты, заключаем, что

$$\rho_\infty(T(a))=\mathrm{K}_0\bigcup\mathrm{K}_1,$$

где

$$\mathrm{K}_1=\{\lambda=a(\xi_0):(n(a-a_0)<\infty)\Lambda(\kappa_c(a-a_0)+n(a-a_0)=0)\}, a=a(\xi),\quad a_0=a(\xi_0).$$

Отметим, что, вообще говоря, множество K_1 может быть весьма разнообразным подмножеством образа единичной окружности $a(\Gamma)$. В частности, если хотя бы одна из точек, ассоциированных с точкой ξ_0, имеет кратность не меньшую 4, то точка $a(\xi_0)\in\mathrm{K}_1$ является изолированной точкой резольвентного множества. Некоторые конкретные примеры спектров и резольвентных множеств операторов Теплица приведены в работах [5, 6].

Список литературы

1. Гахов Ф. Д. 1977. Краевые задачи. М., Наука, 638.
2. Гохберг И. Ц., Фельдман И.А. 1971. Уравнения в свертках и проекционные методы их решения. М., Наука, 352.
3. Гохберг И. Ц., Крупник Н. Я. 1973. Введение в теорию одномерных сингулярных интегральных уравнений. К., Штиинца, 426.
4. Пасенчук А. Э. 2013. Дискретные операторы типа свертки в классах последовательностей со степенным характером поведения на бесконечности. РнД., ЮФУ, 279.
5. Пасенчук А. Э., Серегина В. В. 2019. О матричном операторе Римана в пространстве гладких вектор-функций. Владикавказский математический журнал. 21(3): 50–61.
6. Пасенчук А. Э., Серегина В. В. 2022. О спектре оператора Теплица в счетно-нормированном пространстве гладких функций. Владикавказский математический журнал, 4(3): 96–107.
7. Пресдорф З. 1979. Некоторые классы сингулярных уравнений. М., Мир, 493.
8. Солдатов А. П. 1991. Одномерные сингулярные операторы и краевые задачи теории функций. М., Высшая школа, 210.

References

1. Gakhov F. D. 1977. Boundary value problems. M., Nauka, 638. (in Russian)
2. Gokhberg I.Ts., Feldman I.A. 1971. Equations in convolutions and projection methods for their solution. M., Nauka, 352. (in Russian)
3. Gokhberg I. Ts., Krupnik N. Ya. 1973. Introduction to the theory of one-dimensional singular integral equations. K., Shtiintsa, 426. (in Russian)
4. Pasenchuk A. E. 2013. Discrete operators of convolution type in classes of sequences with power behavior at infinity. RnD., Southern Federal University, 279. (in Russian)
5. Pasenchuk A. E., Seregina V. V. 2019. On the matrix Riemann operator in the space of smooth vector functions. Vladikavkaz mathematical journal. 21(3): 50-61. (in Russian)
6. Pasenchuk A. E., Seregina V. V. 2022. On the spectrum of the Toeplitz operator in a countably normed space of smooth functions. Vladikavkaz Mathematical Journal, 4(3): 96–107. (in Russian)
7. Presdorf Z. 1979. Some classes of singular equations. M., Mir, 493. (in Russian)
8. Soldatov A. P. 1991. One-dimensional singular operators and boundary value problems of function theory. M., Higher School, 210. (in Russian)

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.
Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 20.05.2023
Поступила после рецензирования 03.07.2023
Принята к публикации 07.07.2023

Received May 20, 2023
Revised July 3, 2023
Accepted July 7, 2023

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Пасенчук Александр Эдуардович – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры прикладной математики, Южно-Российский государственный университет имени М. И. Платова, г. Новочеркасск, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Alexander E. Pasenchuk – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Professor of the Department of Applied Mathematics, Platov South-Russian State University, Novocherkassk, Russia

Прикладная математика & Физика, 2023, том 55, № 3. С. 236–247.
Applied Mathematics & Physics, 2023, Volume 55, No 3. P. 236–247.

УДК 517.95
MSC 35B06; 35R11; 35Q91; 70G65
DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-3-236-247
Оригинальное исследование

Линейно-автономные симметрии одной дробной модели Геана – Пу

[1] **Ядрихинский Х. В.**, [1,2] **Федоров В. Е.**
(*Статья представлена членом редакционной коллегии А. В. Глушаком*)

[1] Якутское отделение Дальневосточного центра математических исследований,
Северо-Восточный федеральный университет им. М. К. Аммосова,
Россия, 677000, г. Якутск, ул. Белинского, 58
ghdsfdf@yandex.ru
[2] Челябинский государственный университет,
Россия, 454001, г. Челябинск, ул. Братьев Кашириных, 129
kar@csu.ru

Аннотация. Исследована групповая структура уравнения Геана – Пу дробного порядка по переменной цены базового актива, представляющего собой одну из моделей динамики ценообразования опционов с учетом транзакционных издержек. Осуществлен поиск непрерывных групп линейно-автономных преобразований эквивалентности. Найденные преобразования эквивалентности использованы при построении групповой классификации (в рамках линейно-автономных преобразований) рассматриваемого уравнения с нелинейной функцией в правой части уравнения в качестве свободного элемента. В случае ненулевой безрисковой ставки показано, что возможны два случая допускаемых групп линейно-автономных преобразований изучаемого уравнения: двумерная в случае специального вида свободного элемента и одномерная в остальных случаях. Если же безрисковая ставка равна нулю, имеется четыре варианта допускаемой группы, которая может быть двумерной, трехмерной или четырехмерной. В дальнейшем предполагается использование полученной групповой классификации при вычислении инвариантных решений и законов сохранения исследуемой модели.

Ключевые слова: уравнение в частных производных, групповой анализ, линейно-автономное преобразование, преобразование эквивалентности, симметрия, алгебра Ли, ценообразование опционов

Благодарности: Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ, соглашение № 075-02-2023-947 от 16.02.2023.

Для цитирования: Ядрихинский Х. В., Федоров В. Е. 2023. Линейно-автономные симметрии одной дробной модели Геана – Пу. *Прикладная математика & Физика*, 55(3): 236–247. DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-3-236-247

Original Research

Linear-Autonomous Symmetries of a Fractional Guéant – Pu Model

[1] **Khristofor V. Yadrikhinskiy**, [1,2] **Vladimir E. Fedorov**
(*Article submitted by a member of the editorial board A. V. Glushak*)

[1] Yakut Branch of the Far Eastern Far Eastern Center for Mathematical Research, North East Federal University named after M. K. Ammosov,
58 Belinsky st., Yakutsk, 677000, Russia
ghdsfdf@yandex.ru
[2] Chelyabinsk State University,
129 Brothers Kashirin st., Chelyabinsk, 454001, Russia
kar@csu.ru

Abstract. We study the group structure of the Guéant – Pu equation of the fractional-order with respect to the price of the underlying asset variable. It is one of the models of the dynamics of options pricing, taking into account transaction costs. The search for continuous groups of linear-autonomous equivalence transformations is carried out. The equivalence transformations found are used in constructing a group classification (within the framework of linear-autonomous transformations) of the equation under consideration with a nonlinear function in the right side of the equation as a free element. In the case of a nonzero risk-free rate, it is shown that two cases of Lie algebras of the equation under study are possible: two-dimensional in the case of a special type of free element and one-dimensional in the remaining cases. If the risk-free rate is zero, there are four variants of the Lie algebra, which can be two-dimensional, three-dimensional or four-dimensional. In the future, we assume to use the obtained group classification in calculating invariant solutions and conservation laws of the model under study.

Keywords: Partial Differential Equation, Group Analysis, Linear-Autonomous Transformation, Equivalence Transformation, Symmetry, Lie Algebra, Option Pricing

Acknowledgements: The work is supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation, agreement No. 075-02-2023-947, 16 February 2023.

For citation: Yadrikhinskiy Khr. V., Fedorov V. E. 2023. Linear-Autonomous Symmetries of a Fractional Guéant – Pu Model. *Applied Mathematics & Physics*, 55(3): 236–247. (in Russian) DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-3-236-247

1. Введение. Уравнение Геана – Пу

$$\theta_t = r\theta + (\mu - rS)q - \mu\theta_S - \frac{\sigma^2}{2}\theta_{SS} - \frac{1}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)^2 + F(t, \theta_q) \tag{1}$$

моделирует динамику ценообразования опционов с учетом транзакционных издержек и влияния операций на рынок [5, 6]. Здесь $r \in \mathbb{R}$ – безрисковая ставка, $\gamma \in \mathbb{R}$ — абсолютный параметр неприятия риска, $\sigma > 0$ — волатильность, $\mu \in \mathbb{R}$ – прогноз тренда, ожидаемая доходность базового актива. Цена безразличия колл-опциона $\theta = \theta(t, S, q)$ зависит от времени t, цены базового актива S, доли количества акций в хеджируемом портфеле q. В работах авторов ранее исследованы групповые свойства уравнения (1) с функцией $F = F(\theta_q)$ [2, 12], а также в случае $F = F(t, \theta_q)$ [9, 11]. Для уравнений с конкретными функциями F из полученных в этих работах групповых классификаций методами группового анализа получены точные решения. Для модели Геана – Пу (1) с функцией $F = a(t)\theta_q$ найдены семейства операторов рекурсии [10].

В теорию финансовых рынков дробные производные введены для описания эредитарных свойств моделируемых процессов [3, 7, 8]. В настоящей работе рассмотрено уравнение

$$\theta_t = r\theta + (\mu - rS)q - \mu D_S^\alpha\theta - \frac{\sigma^2}{2}D_S^{\alpha+1}\theta - \frac{1}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(D_S^\alpha\theta - q)^2 + F(t, \theta_q) \tag{2}$$

дробного порядка по переменной S. С помощью методов, развитых в работах Р. К. Газизова, С. Ю. Лукащука и А. А. Касаткина [1, 4] в данной работе изучаются линейно-автономные симметрии уравнения (2) при $\alpha \in (0, 1)$. В §2 приведены предварительные сведения. Третий параграф содержит получение алгебр Ли генераторов непрерывных групп линейно-автономных преобразований эквивалентности уравнения (2). В четвертом параграфе начато получение групповой классификации (в смысле только линейно-автономных преобразований) уравнения (2) в общем случае, в пятом – эта классификация получена для случая нелинейных по θ_q функций $F = F(t, \theta_q)$. При этом групповые классификации уравнения (2) существенно различаются для случаев $r = 0$ и $r \neq 0$.

2. Предварительные сведения. Пусть $\mathcal{Z}$ — банахово пространство, $c, T \in \mathbb{R}$, $c < T$, определим дробный интеграл Римана – Лиувилля порядка $\beta > 0$ для функции $f : (c, T) \to \mathcal{Z}$

$$J_S^\beta f(S) := \int_c^S \frac{(S-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} f(s)ds, \quad S \in (c, T),$$

и дробную производную Римана – Лиувилля порядка $\alpha \in (n-1, n]$, $n \in \mathbb{N}$, $D_S^\alpha f(S) := D_S^n J_S^{n-\alpha} f(S)$, где D_S^n – производная целого порядка n.

Обобщенная формула Лейбница имеет вид

$$D_S^\alpha(f(S)g(S)) = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k} D_S^{\alpha-k}g(S)D_S^k f(S), \quad \binom{\alpha}{k} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(\alpha-k+1)}.$$

Будем использовать функцию Миттаг – Леффлера $E_{\alpha,\beta}(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}$.

Решение уравнения $D_S^\alpha y(S) - \lambda y(S) = f(S)$ имеет вид

$$y = \sum_{k=1}^{n} b_k (S-c)^{\alpha-k} E_{\alpha,\alpha-k+1}(\lambda(S-c)^\alpha) + \int_c^S (S-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda(S-s)^\alpha)f(s)ds, \ n-1 < \alpha \leq n. \tag{3}$$

В статье [1] получена формула продолжения по дробной производной Римана – Лиувилля и для оператора $X = \tau\partial_t + \xi\partial_S + \beta\partial_q + \eta\partial_\theta$ она принимает вид

$$\eta^\alpha = D_S^\alpha(\eta - \tau\theta_t - \xi\theta_S - \beta\theta_q) + \tau D_t D_S^\alpha\theta + \xi D_S D_S^\alpha\theta + \beta D_q D_S^\alpha\theta.$$

Перегруппируем слагаемые с учетом равенств $D_S D_S^\alpha = D_S^{\alpha+1}$ и $(\tau\theta)_t = \tau_t\theta + \tau\theta_t$:

$$\eta^\alpha = D_S^\alpha\eta + \tau D_S^\alpha\theta_t - D_S^\alpha(\tau\theta_t) + \xi D_S^{\alpha+1}\theta - D_S^\alpha D_S(\xi\theta) + D_S^\alpha(\xi_S\theta) + \beta D_S^\alpha\theta_q - D_S^\alpha(\beta\theta_q).$$

Далее используем равенство $D_S^\alpha D_S f(S) = D_S^{\alpha+1} f(S) - \dfrac{(S-c)^{-\alpha-1}}{\Gamma(-\alpha)} f(c)$. Тогда с учетом условия $\xi(c) = 0$ получаем

$$\begin{aligned}\eta^\alpha &= D_S^\alpha \eta + \tau D_S^\alpha \theta_t - D_S^\alpha(\tau\theta_t) + \xi D_S^{\alpha+1}\theta - D_S^{\alpha+1}(\xi\theta) + (\xi\theta)|_{S=c}\frac{(S-c)^{-\alpha-1}}{\Gamma(-\alpha)} + \\ &+ D_S^\alpha(\xi_S\theta) + \beta D_S^\alpha \theta_q - D_S^\alpha(\beta\theta_q) = \\ &= D_S^\alpha \eta - \sum_{k=1}^{\infty}\binom{\alpha}{k} D_S^{\alpha-k}\theta_t D_S^k \tau + \sum_{k=0}^{\infty}\left(\binom{\alpha}{k} - \binom{\alpha+1}{k+1}\right) D_S^{\alpha-k}\theta D_S^{k+1}\xi - \sum_{k=1}^{\infty}\binom{\alpha}{k} D_S^{\alpha-k}\theta_q D_S^k \beta.\end{aligned}$$

Для оператора X в линейно-автономной форме [1, 4], т. е. при $\eta = p(t,S,q)\theta + g(t,S,q)$, $\tau_\theta = 0$, $\xi_\theta = 0$, $\beta_\theta = 0$, формула продолжения в силу обобщенной формулы Лейбница и равенства $\dbinom{\alpha+1}{k+1} = \dfrac{\alpha+1}{k+1}\dbinom{\alpha}{k}$ принимает вид

$$\eta^\alpha = D_S^\alpha g + \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k} D_S^{\alpha-k}\theta\left(D_S^k p + \frac{k-\alpha}{k+1} D_S^{k+1}\xi\right) - \sum_{k=1}^{\infty}\binom{\alpha}{k} D_S^{\alpha-k}\theta_t D_S^k\tau - \sum_{k=1}^{\infty}\binom{\alpha}{k} D_S^{\alpha-k}\theta_q D_S^k\beta.$$

Для $\eta^{\alpha+1}$ формула продолжения имеет вид

$$\begin{aligned}\eta^{\alpha+1} &= D_S^{\alpha+1} g + \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha+1}{k} D_S^{\alpha+1-k}\theta\left(D_S^k p + \frac{k-\alpha-1}{k+1} D_S^{k+1}\xi\right) - \\ &- \sum_{k=1}^{\infty}\binom{\alpha+1}{k} D_S^{\alpha+1-k}\theta_t D_S^k\tau - \sum_{k=1}^{\infty}\binom{\alpha+1}{k} D_S^{\alpha+1-k}\theta_q D_S^k\beta.\end{aligned}$$

3. Генераторы непрерывных групп преобразований эквивалентности. Рассмотрим уравнение

$$\theta_t = r\theta + (\mu - rS)q - \mu D_S^\alpha\theta - \frac{\sigma^2}{2} D_S^{\alpha+1}\theta - \frac{1}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(D_S^\alpha\theta - q)^2 + F(t,\theta_q), \tag{4}$$

где $\theta = \theta(t,S,q)$, $\gamma\sigma \neq 0$, $0 < \alpha < 1$. Путем рассмотрения функции F и ее производных как дополнительных переменных производится поиск генераторов непрерывных групп преобразований эквивалентности. Для учета того, от каких переменных зависит F, вводятся дополнительные уравнения

$$F_S = 0, \quad F_q = 0, \quad F_\theta = 0, \quad F_{\theta_t} = 0, \quad F_{\theta_S} = 0, \quad F_{D_S^\alpha\theta} = 0. \tag{5}$$

Уравнения (4) и (5) задают многообразие $\mathcal{M}$. Порождающий группу оператор ищется в виде $Y = \tau\partial_t + \xi\partial_S + \beta\partial_q + \eta\partial_\theta + \zeta\partial_F$, где τ, ξ, β, η зависят от t, S, q, θ, а ζ зависит от t, S, q, θ, θ_t, θ_S, θ_q, $D_S^\alpha\theta$. Продолженный оператор имеет вид

$$\begin{aligned}Y^{\alpha+1} &= Y + \eta^t\partial_{\theta_t} + \eta^\alpha\partial_{D_S^\alpha\theta} + \eta^{\alpha+1}\partial_{D_S^{\alpha+1}\theta} + \eta^q\partial_{\theta_q} + \zeta^t\partial_{F_t} + \zeta^S\partial_{F_S} + \zeta^q\partial_{F_q} + \zeta^\theta\partial_{F_\theta} + \\ &+ \zeta^{\theta_t}\partial_{F_{\theta_t}} + \zeta^{\theta_S}\partial_{F_{\theta_S}} + \zeta^{\theta_q}\partial_{F_{\theta_q}} + \zeta^{D_S^\alpha\theta}\partial_{F_{D_S^\alpha\theta}} + \zeta^{D_S^{\alpha+1}\theta}\partial_{F_{D_S^{\alpha+1}\theta}}.\end{aligned}$$

Его действие на (4), (5) дает уравнения

$$\begin{aligned}&\eta^t - r\eta - \mu\beta + rS\beta + rq\xi + \mu\eta^\alpha + \frac{\sigma^2}{2}\eta^{\alpha+1} - \frac{r}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(D_S^\alpha\theta - q)^2\tau + \\ &+ \gamma\sigma e^{r(T-t)}(D_S^\alpha\theta - q)(\eta^\alpha - \beta) - \zeta|_{\mathcal{M}} = 0,\end{aligned} \tag{6}$$

$$\zeta^S|_{\mathcal{M}} = 0, \quad \zeta^q|_{\mathcal{M}} = 0, \quad \zeta^\theta|_{\mathcal{M}} = 0, \quad \zeta^{\theta_t}|_{\mathcal{M}} = 0, \quad \zeta^{\theta_S}|_{\mathcal{M}} = 0, \quad \zeta^{D_S^\alpha\theta}|_{\mathcal{M}} = 0. \tag{7}$$

Операторы полной производной определяются как

$$\begin{aligned}&D_t = \partial_t + \theta_t\partial_\theta + \ldots, \quad D_S = \partial_S + \theta_S\partial_\theta + \theta_{SS}\partial_{\theta_S} + \ldots, \quad D_q = \partial_q + \theta_q\partial_\theta + \ldots, \\ &\tilde{D}_t = \partial_t + F_t\partial_F + \ldots, \quad \tilde{D}_S = \partial_S + F_S\partial_F + \ldots, \quad \tilde{D}_q = \partial_q + F_q\partial_F + \ldots, \\ &\tilde{D}_\theta = \partial_\theta + F_\theta\partial_F + \ldots, \quad \tilde{D}_{\theta_t} = \partial_{\theta_t} + F_{\theta_t}\partial_F + \ldots, \quad \tilde{D}_{\theta_q} = \partial_{\theta_q} + F_{\theta_q}\partial_F + \ldots, \\ &\tilde{D}_{D_S^\alpha\theta} = \partial_{D_S^\alpha\theta} + F_{D_S^\alpha\theta}\partial_F + \ldots, \quad \tilde{D}_{\theta_S} = \partial_{\theta_S} + F_{\theta_S}\partial_F + \ldots\end{aligned}$$

Формулы продолжения для ζ имеют вид

$$\begin{aligned}
&\zeta^S = \tilde{D}_S\zeta - F_t\tilde{D}_S\tau - F_S\tilde{D}_S\xi - F_q\tilde{D}_S\beta - F_\theta\tilde{D}_S\eta - F_{\theta_t}\tilde{D}_S\eta^t - F_{\theta_S}\tilde{D}_S\eta^S - F_{\theta_q}\tilde{D}_S\eta^q - F_{D_S^\alpha\theta}\tilde{D}_S\eta^\alpha,\\
&\zeta^q = \tilde{D}_q\zeta - F_t\tilde{D}_q\tau - F_S\tilde{D}_q\xi - F_q\tilde{D}_q\beta - F_\theta\tilde{D}_q\eta - F_{\theta_t}\tilde{D}_q\eta^t - F_{\theta_S}\tilde{D}_q\eta^S - F_{\theta_q}\tilde{D}_q\eta^q - F_{D_S^\alpha\theta}\tilde{D}_q\eta^\alpha,\\
&\zeta^\theta = \tilde{D}_\theta\zeta - F_t\tilde{D}_\theta\tau - F_S\tilde{D}_\theta\xi - F_q\tilde{D}_\theta\beta - F_\theta\tilde{D}_\theta\eta - F_{\theta_t}\tilde{D}_\theta\eta^t - F_{\theta_S}\tilde{D}_\theta\eta^S - F_{\theta_q}\tilde{D}_\theta\eta^q - F_{D_S^\alpha\theta}\tilde{D}_\theta\eta^\alpha,\\
&\zeta^{D_S^\alpha\theta} = \tilde{D}_{D_S^\alpha\theta}\zeta - F_t\tilde{D}_{D_S^\alpha\theta}\tau - F_S\tilde{D}_{D_S^\alpha\theta}\xi - F_q\tilde{D}_{D_S^\alpha\theta}\beta - F_\theta\tilde{D}_{D_S^\alpha\theta}\eta - F_{D_S^\alpha\theta}\tilde{D}_{D_S^\alpha\theta}\eta^\alpha - F_{\theta_t}\tilde{D}_{D_S^\alpha\theta}\eta^t -\\
&- F_{\theta_S}\tilde{D}_{D_S^\alpha\theta}\eta^S - F_{\theta_q}\tilde{D}_{D_S^\alpha\theta}\eta^q,\\
&\zeta^{\theta_t} = \tilde{D}_{\theta_t}\zeta - F_t\tilde{D}_{\theta_t}\tau - F_S\tilde{D}_{\theta_t}\xi - F_q\tilde{D}_{\theta_t}\beta - F_\theta\tilde{D}_{\theta_t}\eta - F_{\theta_t}\tilde{D}_{\theta_t}\eta^t - F_{\theta_S}\tilde{D}_{\theta_t}\eta^S - F_{\theta_q}\tilde{D}_{\theta_t}\eta^q -\\
&- F_{D_S^\alpha\theta}\tilde{D}_{\theta_t}\eta^\alpha,\\
&\zeta^{\theta_S} = \tilde{D}_{\theta_S}\zeta - F_t\tilde{D}_{\theta_S}\tau - F_S\tilde{D}_{\theta_S}\xi - F_q\tilde{D}_{\theta_S}\beta - F_\theta\tilde{D}_{\theta_S}\eta - F_{\theta_t}\tilde{D}_{\theta_S}\eta^t - F_{\theta_S}\tilde{D}_{\theta_S}\eta^S - F_{\theta_q}\tilde{D}_{\theta_S}\eta^q -\\
&- F_{D_S^\alpha\theta}\tilde{D}_{\theta_S}\eta^\alpha.
\end{aligned}$$

Оператор Y будем искать в линейно-автономном виде:

$$\eta = p(t,S,q)\theta + g(t,S,q), \quad \tau_\theta = 0, \quad \xi_\theta = 0, \quad \beta_\theta = 0.$$

Формулы продолжения η^t, η^q в таком случае имеют вид

$$\begin{aligned}
\eta^t &= D_t\eta - \theta_t D_t\tau - \theta_S D_t\xi - \theta_q D_t\beta = p_t\theta + g_t + p\theta_t - \theta_t\tau_t - \theta_S\xi_t - \theta_q\beta_t,\\
\eta^q &= D_q\eta - \theta_t D_q\tau - \theta_S D_q\xi - \theta_q D_q\beta = p_q\theta + g_q + p\theta_q - \theta_t\tau_q - \theta_S\xi_q - \theta_q\beta_q.
\end{aligned}$$

Тогда подстановка формул продолжения и (5) в (7) дает

$$\begin{aligned}
&\zeta_S - F_t\tau_S - F_{\theta_q}\eta^q_S|_{\mathcal{M}} = 0, \quad \zeta_q - F_t\tau_q - F_{\theta_q}\eta^q_q|_{\mathcal{M}} = 0, \quad \zeta_\theta - F_{\theta_q}\eta^q_\theta|_{\mathcal{M}} = 0, \quad \zeta_{\theta_t} - F_{\theta_q}\eta^q_{\theta_t}|_{\mathcal{M}} = 0,\\
&\zeta_{\theta_S} - F_{\theta_q}\eta^q_{\theta_S}|_{\mathcal{M}} = 0, \quad \zeta_{D_S^\alpha\theta} - F_{\theta_q}\eta^q_{D_S^\alpha\theta}|_{\mathcal{M}} = 0.
\end{aligned}$$

После подстановки формулы для η^q отсюда получаем

$$\begin{aligned}
&\zeta_S - F_t\tau_S - F_{\theta_q}(p_{Sq}\theta + g_{Sq} + (p_S - \beta_{Sq})\theta_q - \xi_{Sq}\theta_S -\\
&-\tau_{Sq}\left(r\theta + (\mu - rS)q - \mu D_S^\alpha\theta - \frac{\sigma^2}{2}D_S^{\alpha+1}\theta - \frac{1}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(D_S^\alpha\theta - q)^2 + F\right)\Bigg) = 0,\\
&\zeta_q - F_t\tau_q - F_{\theta_q}(p_{qq}\theta + g_{qq} + (p_q - \beta_{qq})\theta_q - \xi_{qq}\theta_S -\\
&-\tau_{qq}\left(r\theta + (\mu - rS)q - \mu D_S^\alpha\theta - \frac{\sigma^2}{2}D_S^{\alpha+1}\theta - \frac{1}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(D_S^\alpha\theta - q)^2 + F\right)\Bigg) = 0,\\
&\zeta_\theta - F_{\theta_q}p_q = 0, \quad \zeta_{\theta_t} + F_{\theta_q}\tau_q = 0, \quad \zeta_{\theta_S} + F_{\theta_q}\xi_q = 0, \quad \zeta_{D_S^\alpha\theta} = 0.
\end{aligned}$$

Разделение переменных в этих равенствах влечет уравнения

$$\begin{aligned}
&\tau_S = 0, \quad \tau_q = 0, \quad p_q = 0, \quad \xi_q = 0, \quad g_{Sq} = 0, \quad p_S - \beta_{Sq} = 0, \quad g_{qq} = 0, \quad \beta_{qq} = 0,\\
&\zeta_S = 0, \quad \zeta_q = 0, \quad \zeta_\theta = 0, \quad \zeta_{\theta_t} = 0, \quad \zeta_{\theta_S} = 0, \quad \zeta_{D_S^\alpha\theta} = 0.
\end{aligned} \tag{8}$$

Теперь подстановка формул продолжения в (6) дает

$$\begin{aligned}
&p_t\theta + g_t + p\theta_t - \theta_t\tau_t - \theta_S\xi_t - \theta_q\beta_t - rp\theta - rg - \mu\beta + rS\beta + rq\xi +\\
&+ \mu D_S^\alpha g + \mu\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}D_S^{\alpha-k}\theta\left(D_S^k p + \frac{k-\alpha}{k+1}D_S^{k+1}\xi\right) - \mu\sum_{k=1}^{\infty}\binom{\alpha}{k}D_S^{\alpha-k}\theta_t D_S^k\tau -\\
&- \mu\sum_{k=1}^{\infty}\binom{\alpha}{k}D_S^{\alpha-k}\theta_q D_S^k\beta + \frac{\sigma^2}{2}D_S^{\alpha+1}g + \frac{\sigma^2}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha+1}{k}D_S^{\alpha+1-k}\theta\left(D_S^k p + \frac{k-\alpha-1}{k+1}D_S^{k+1}\xi\right) -\\
&- \frac{\sigma^2}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\binom{\alpha+1}{k}D_S^{\alpha+1-k}\theta_t D_S^k\tau - \frac{\sigma^2}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\binom{\alpha+1}{k}D_S^{\alpha+1-k}\theta_q D_S^k\beta - \frac{r}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(D_S^\alpha\theta - q)^2\tau +\\
&+ \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(D_S^\alpha\theta - q)\left(D_S^\alpha g + \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}D_S^{\alpha-k}\theta\left(D_S^k p + \frac{k-\alpha}{k+1}D_S^{k+1}\xi\right) - \sum_{k=1}^{\infty}\binom{\alpha}{k}D_S^{\alpha-k}\theta_t D_S^k\tau -\right.\\
&\left.- \sum_{k=1}^{\infty}\binom{\alpha}{k}D_S^{\alpha-k}\theta_q D_S^k\beta - \beta\right) - \zeta|_{\mathcal{M}} =
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (p-\tau_t)\left(r\theta + (\mu - rS)q - \mu D_S^\alpha \theta - \frac{\sigma^2}{2} D_S^{\alpha+1}\theta - \frac{1}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(D_S^\alpha\theta - q)^2 + F\right) + \\
&+ p_t\theta + g_t - \theta_S\xi_t - \theta_q\beta_t - rp\theta - rg - \mu\beta + rS\beta + rq\xi + \\
&+ \mu D_S^\alpha g + \mu \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k} D_S^{\alpha-k}\theta\left(D_S^k p + \frac{k-\alpha}{k+1}D_S^{k+1}\xi\right) - \\
&- \mu \sum_{k=1}^{\infty}\binom{\alpha}{k} D_S^{\alpha-k}\theta_q D_S^k\beta + \frac{\sigma^2}{2}D_S^{\alpha+1}g + \frac{\sigma^2}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha+1}{k} D_S^{\alpha+1-k}\theta\left(D_S^k p + \frac{k-\alpha-1}{k+1}D_S^{k+1}\xi\right) - \\
&- \frac{\sigma^2}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\binom{\alpha+1}{k} D_S^{\alpha+1-k}\theta_q D_S^k\beta - \frac{r\tau}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(D_S^\alpha\theta - q)^2 + \\
&+ \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(D_S^\alpha\theta - q)\left(D_S^\alpha g + \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k} D_S^{\alpha-k}\theta\left(D_S^k p + \frac{k-\alpha}{k+1}D_S^{k+1}\xi\right) - \right. \\
&\left. - \sum_{k=1}^{\infty}\binom{\alpha}{k} D_S^{\alpha-k}\theta_q D_S^k\beta - \beta\right) - \zeta = 0. \qquad (9)
\end{aligned}
$$

Дифференцируем полученное уравнение по переменным $D_S^{\alpha+1}\theta$, $D_S^\alpha\theta_q$, θ_S, θ и получаем $\xi_t = 0$, $\beta_S = 0$, $p_t = r\tau_t$, $\tau_t = (\alpha+1)\xi_S$. Последнее соотношение влечет равенства $\xi_{SS} = 0$, $\tau_{tt} = 0$, так как $\tau_S = 0$ и $\xi_t = 0$. Используя равенство $p_S = \beta_{Sq}$ из (8), получаем $p_S = 0$. Итак,

$$
\tau_{tt} = 0, \quad \tau_t = (\alpha+1)\xi_S, \quad \xi_t = 0, \quad \xi_{SS} = 0, \quad \beta_S = 0, \quad p_t = r\tau_t, \quad p_S = 0. \qquad (10)
$$

Подстановка (10) в уравнение (9) дает

$$
\begin{aligned}
&(p-\tau_t)\left((\mu - rS)q - \mu D_S^\alpha\theta - \frac{1}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(D_S^\alpha\theta - q)^2 + F\right) + \\
&+ g_t - \theta_q\beta_t - rg - \mu\beta + rS\beta + rq\xi + \mu D_S^\alpha g + \mu D_S^\alpha\theta\,(p - \alpha\xi_S) + \frac{\sigma^2}{2}D_S^{\alpha+1}g - \\
&- \frac{r}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(D_S^\alpha\theta - q)^2\tau + \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(D_S^\alpha\theta - q)\left(D_S^\alpha g + D_S^\alpha\theta\,(p - \alpha\xi_S) - \beta\right) - \zeta = 0. \qquad (11)
\end{aligned}
$$

Расщепляем полученное уравнение (11) по переменной $D_S^\alpha\theta$ и получаем

$$
\begin{aligned}
&(D_S^\alpha\theta)^2 : -\frac{1}{2}(p-\tau_t) - \frac{r}{2}\tau + p - \alpha\xi_S = 0, \qquad (12)\\
&D_S^\alpha\theta : (p-\tau_t)(-\mu + q\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}) + \mu\,(p - \alpha\xi_S) + rq\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}\tau + \\
&+ \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(D_S^\alpha g - \beta - q(p - \alpha\xi_S)) = 0, \qquad (13)\\
&1 : (p-\tau_t)\left((\mu - rS)q - \frac{1}{2}q^2\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)} + F\right) + g_t - \theta_q\beta_t - rg - \mu\beta + rS\beta + \\
&+ rq\xi + \mu D_S^\alpha g + \frac{\sigma^2}{2}D_S^{\alpha+1}g - \frac{r}{2}q^2\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}\tau - q\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}\left(D_S^\alpha g - \beta\right) - \zeta = 0. \qquad (14)
\end{aligned}
$$

При помощи равенства $\tau_t = (\alpha+1)\xi_S$ из (10) получаем из (12) выражение $p = r\tau + (\alpha-1)\xi_S$. Интегрирование уравнений $\tau_{tt} = 0$, $\xi_{SS} = 0$, $\tau_t = (\alpha+1)\xi_S$, $\xi_t = 0$ из (10) и $\xi_q = 0$, $\tau_q = 0$, $\tau_S = 0$ из (8) при условии $\xi(c) = 0$ дает $\tau = (\alpha+1)At + B$, $\xi = A(S-c)$. Дифференцирование (14) по θ_q и q дает $\beta_{tq} = 0$. Тогда интегрирование β_{qq} из (8) и $\beta_S = 0$ (10) дает $\beta = Eq + L(t)$. Дифференцирование (13) по S с подстановкой $\xi_{SS} = 0$, $\beta_S = 0$, $p_S = 0$ из (10) и $\tau_S = 0$ из (8) дает равенство $D_S D_S^\alpha g = D_S^{\alpha+1}g = 0$. Следовательно, $D_S^\alpha g = M(t,q)$ и формула (3) решения дифференциального уравнения дает

$$
g = H(t,q)(S-c)^{\alpha-1} + M(t,q)\frac{(S-c)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}.
$$

Ввиду $g_{qq} = 0$, $g_{Sq} = 0$ из (8) получаем $M_q = 0$, $H_q = 0$. Таким образом,

$$
\tau = A(\alpha+1)t + B, \quad \xi = A(S-c), \quad \beta = Eq + L(t), \qquad (15)
$$

$$
p = rB + A(r(\alpha+1)t + (\alpha-1)), \quad g = H(t)(S-c)^{\alpha-1} + M(t)\frac{(S-c)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}. \qquad (16)
$$

Подставляя эти равенства в (13), получаем

$$
\mu A + \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(M(t) - Eq - L(t) - qA + rq((\alpha+1)At + B)) = 0.
$$

Его дифференцирование по q дает $E = -A + rB + r(\alpha+1)At$, поэтому $rA = 0$. Следовательно,

$$M(t) = L(t) - \frac{\mu A e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2}, \quad rA = 0, \quad E = -A + rB. \tag{17}$$

Подстановка (15)–(17) в (14) дает

$$1 : (rB - 2A)\left((\mu - rS)q - \frac{1}{2}q^2\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)} + F\right) + H_t(S-c)^{\alpha-1} + M_t\frac{(S-c)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - \theta_q L_t -$$
$$- rH(S-c)^{\alpha-1} - rM\frac{(S-c)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - \mu(Eq + L) + rS(Eq+L) + \mu M +$$
$$- \frac{rB}{2}q^2\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)} - q\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}\,(M - Eq - L) - \zeta = 0.$$

Расщепляем это уравнение по переменным q, S и получаем с учетом последнего равенства в (17)

$$(S-c)^{\alpha-1} : H_t - rH = 0, \quad \frac{(S-c)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} : M_t - rM = 0, \quad S : rL = 0, \tag{18}$$

$$1 : (rB - 2A)F - \theta_q L_t - \mu L - \zeta + \mu M = 0. \tag{19}$$

Решение уравнения на H в (18) есть $H = H_0 e^{rt}$. Подстановка (17) в уравнение на M (18) дает уравнение $L_t - rL = 0$ и с учетом $rL = 0$ получаем $L_t = 0$. Тогда вместе с подстановкой (17) в (19) получаем

$$H = H_0 e^{rt}, \quad L = L_0, \quad rL_0 = 0, \quad \zeta = (rB - 2A)F - \frac{\mu^2 A e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2}. \tag{20}$$

Теперь подставляем (17), (20) в (15), (16) и получаем равенства

$$\tau = A(\alpha+1)t + B, \quad \xi = A(S-c), \quad \beta = (rB - A)q + L_0,$$
$$p = rB + A(\alpha-1), \quad g = H_0 e^{rt}(S-c)^{\alpha-1} + \frac{(S-c)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\left(L_0 - \frac{\mu A e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2}\right).$$

Если $r \neq 0$, то из (17) и (20) получаем, что $A = 0$, $L_0 = 0$, и тогда получаем утверждение.

Теорема 3.1. *Алгебра Ли генераторов непрерывных групп линейно-автономных преобразований эквивалентности уравнения* (4) *при* $r \neq 0$ *порождается операторами*

$$Y_1 = \partial_t + rq\partial_q + r\theta\partial_\theta + rF\partial_F, \quad Y_2 = e^{rt}(S-c)^{\alpha-1}\partial_\theta.$$

Если $r = 0$, то получаем теорему.

Теорема 3.2. *Алгебра Ли генераторов непрерывных групп линейно-автономных преобразований эквивалентности уравнения* (4) *при* $r = 0$ *порождается операторами*

$$Y_1 = \partial_t, \quad Y_2 = (S-c)^{\alpha-1}\partial_\theta, \quad Y_3 = \partial_q + \frac{(S-c)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\partial_\theta,$$
$$Y_4 = (\alpha+1)\partial_t + (S-c)\partial_S - q\partial_q + \left((\alpha-1)\theta - \frac{\mu(S-c)^\alpha}{\gamma\sigma^2\Gamma(\alpha+1)}\right)\partial_\theta - \left(2F + \frac{\mu^2}{\gamma\sigma^2}\right)\partial_F.$$

4. Групповая классификация. Для уравнения

$$\theta_t = r\theta + (\mu - rS)q - \mu D_S^\alpha\theta - \frac{\sigma^2}{2}D_S^{\alpha+1}\theta - \frac{1}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(D_S^\alpha\theta - q)^2 + F(t, \theta_q), \tag{21}$$

при $\theta = \theta(t, S, q)$, $\gamma\sigma \neq 0$, $0 < \alpha < 1$, будем искать генераторы групп Ли линейно-автономных преобразований в виде $X = \tau\partial_t + \xi\partial_S + \beta\partial_q + \eta\partial_\theta$, где τ, ξ, β, η зависят от t, S, q, θ. Продолженный оператор имеет вид

$$X^{\alpha+1} = X + \eta^t\partial_{\theta_t} + \eta^\alpha\partial_{D_S^\alpha\theta} + \eta^{\alpha+1}\partial_{D_S^{\alpha+1}\theta} + \eta^q\partial_{\theta_q}.$$

Его действие на уравнение (21) дает равенство

$$\eta^t - r\eta - \mu\beta + rS\beta + rq\xi + \mu\eta^\alpha + \frac{\sigma^2}{2}\eta^{\alpha+1} - \frac{r}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(D_S^\alpha\theta - q)^2\tau +$$
$$+ \gamma\sigma e^{r(T-t)}(D_S^\alpha\theta - q)(\eta^\alpha - \beta) - F_t\tau - F_{\theta_q}\eta^q|_N = 0,$$

где $\mathcal{N}$ — алгебраическое многообразие в расширенном пространстве переменных, задаваемое уравнением (21). Отсюда с помощью формул продолжения получаем

$$
\begin{aligned}
&p_t\theta + g_t + p\theta_t - \theta_t\tau_t - \theta_S\xi_t - \theta_q\beta_t - rp\theta - rg - \mu\beta + rS\beta + rq\xi + \\
&+ \mu D_S^\alpha g + \mu\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k} D_S^{\alpha-k}\theta\left(D_S^k p + \frac{k-\alpha}{k+1}D_S^{k+1}\xi\right) - \mu\sum_{k=1}^{\infty}\binom{\alpha}{k} D_S^{\alpha-k}\theta_t D_S^k\tau - \\
&- \mu\sum_{k=1}^{\infty}\binom{\alpha}{k} D_S^{\alpha-k}\theta_q D_S^k\beta + \frac{\sigma^2}{2}D_S^{\alpha+1}g + \frac{\sigma^2}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha+1}{k} D_S^{\alpha+1-k}\theta\left(D_S^k p + \frac{k-\alpha-1}{k+1}D_S^{k+1}\xi\right) - \\
&- \frac{\sigma^2}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\binom{\alpha+1}{k} D_S^{\alpha+1-k}\theta_t D_S^k\tau - \frac{\sigma^2}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\binom{\alpha+1}{k} D_S^{\alpha+1-k}\theta_q D_S^k\beta - \frac{r}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(D_S^\alpha\theta - q)^2\tau + \\
&+ \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(D_S^\alpha\theta - q)\left(D_S^\alpha g + \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k} D_S^{\alpha-k}\theta\left(D_S^k p + \frac{k-\alpha}{k+1}D_S^{k+1}\xi\right) - \sum_{k=1}^{\infty}\binom{\alpha}{k} D_S^{\alpha-k}\theta_t D_S^k\tau - \right.\\
&\left.- \sum_{k=1}^{\infty}\binom{\alpha}{k} D_S^{\alpha-k}\theta_q D_S^k\beta - \beta\right) - F_t\tau - F_{\theta_q}(p_q\theta + g_q + p\theta_q - \theta_t\tau_q - \theta_S\xi_q - \theta_q\beta_q)|_{\mathcal{N}} = 0.
\end{aligned}
$$

Переходим на многообразие $\mathcal{N}$:

$$
\begin{aligned}
&(p - \tau_t + F_{\theta_q}\tau_q)\left(r\theta + (\mu - rS)q - \mu D_S^\alpha\theta - \frac{\sigma^2}{2}D_S^{\alpha+1}\theta - \frac{1}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(D_S^\alpha\theta - q)^2 + F\right) + \\
&+ p_t\theta + g_t - \theta_S\xi_t - \theta_q\beta_t - rp\theta - rg - \mu\beta + rS\beta + rq\xi + \\
&+ \mu D_S^\alpha g + \mu\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k} D_S^{\alpha-k}\theta\left(D_S^k p + \frac{k-\alpha}{k+1}D_S^{k+1}\xi\right) - \mu\sum_{k=1}^{\infty}\binom{\alpha}{k} D_S^{\alpha-k}\theta_t D_S^k\tau - \\
&- \mu\sum_{k=1}^{\infty}\binom{\alpha}{k} D_S^{\alpha-k}\theta_q D_S^k\beta + \frac{\sigma^2}{2}D_S^{\alpha+1}g + \frac{\sigma^2}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha+1}{k} D_S^{\alpha+1-k}\theta\left(D_S^k p + \frac{k-\alpha-1}{k+1}D_S^{k+1}\xi\right) - \\
&- \frac{\sigma^2}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\binom{\alpha+1}{k} D_S^{\alpha+1-k}\theta_t D_S^k\tau - \frac{\sigma^2}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\binom{\alpha+1}{k} D_S^{\alpha+1-k}\theta_q D_S^k\beta - \frac{r}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(D_S^\alpha\theta - q)^2\tau + \\
&+ \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(D_S^\alpha\theta - q)\left(D_S^\alpha g + \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k} D_S^{\alpha-k}\theta\left(D_S^k p + \frac{k-\alpha}{k+1}D_S^{k+1}\xi\right) - \sum_{k=1}^{\infty}\binom{\alpha}{k} D_S^{\alpha-k}\theta_t D_S^k\tau - \right.\\
&\left.- \sum_{k=1}^{\infty}\binom{\alpha}{k} D_S^{\alpha-k}\theta_q D_S^k\beta - \beta\right) - F_t\tau - F_{\theta_q}(p_q\theta + g_q + p\theta_q - \theta_S\xi_q - \theta_q\beta_q) = 0. \qquad (22)
\end{aligned}
$$

Дифференцируем полученное уравнение (22) по $D_S^\alpha\theta_t$, $D_S^\alpha\theta_q$, $D_S^{\alpha+1}\theta$, θ, θ_S и получаем $\tau_S = 0$, $\beta_S = 0$, $\tau_t - F_{\theta_q}\tau_q = (\alpha+1)\xi_S$, $r(F_{\theta_q}\tau_q - \tau_t) + p_t - F_{\theta_q}p_q = 0$, $\xi_t - F_{\theta_q}\xi_q = 0$. Из $\tau_S = 0$ и $\tau_t - \tau_q F\theta_q = (\alpha+1)\xi_S$ получаем $\xi_{SS} = 0$. Далее, дифференцируя (22) последовательно по $D_S^\alpha\theta$ и $D_S^{\alpha-1}\theta$, получаем равенство $p_S + \frac{1-\alpha}{2}\xi_{SS} = p_S = 0$. Следовательно,

$$
\begin{aligned}
&\tau_S = 0, \quad \xi_{SS} = 0, \quad \beta_S = 0, \quad p_S = 0, \quad \tau_t - \tau_q F_{\theta_q} = (\alpha+1)\xi_S, \quad \xi_t - F_{\theta_q}\xi_q = 0, \qquad (23)\\
&r(F_{\theta_q}\tau_q - \tau_t) + p_t - F_{\theta_q}p_q = 0.
\end{aligned}
$$

Подстановка равенств (23) в (22) дает

$$
\begin{aligned}
&(p - (\alpha+1)\xi_S)\left((\mu - rS)q - \mu D_S^\alpha\theta - \frac{1}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(D_S^\alpha\theta - q)^2 + F\right) + g_t - \theta_q\beta_t - rg - \mu\beta + \\
&+ rS\beta + rq\xi + \mu D_S^\alpha g + \mu D_S^\alpha\theta\,(p - \alpha\xi_S) + \frac{\sigma^2}{2}D_S^{\alpha+1}g - \frac{r}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(D_S^\alpha\theta - q)^2\tau + \\
&+ \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(D_S^\alpha\theta - q)\left(D_S^\alpha g + D_S^\alpha\theta\,(p - \alpha\xi_S) - \beta\right) - F_t\tau - F_{\theta_q}(g_q + p\theta_q - \theta_q\beta_q) = 0. \qquad (24)
\end{aligned}
$$

Расщепляя уравнение (24), получим

$$(D_S^\alpha\theta)^2 : -r\tau + p + (1-\alpha)\xi_S = 0, \tag{25}$$

$$D_S^\alpha\theta : (p-(\alpha+1)\xi_S)(-\mu + q\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}) + \mu\,(p-\alpha\xi_S) + rq\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}\tau + \tag{26}$$
$$+\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}\left(D_S^\alpha g - \beta - q\,(p-\alpha\xi_S)\right) = 0,$$

$$1 : (p-(\alpha+1)\xi_S)\left((\mu - rS)q - \frac{1}{2}q^2\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)} + F\right) + g_t - \theta_q\beta_t - rg - \mu\beta + \tag{27}$$
$$+ rS\beta + rq\xi + \mu D_S^\alpha g + \frac{\sigma^2}{2}D_S^{\alpha+1}g - \frac{r}{2}q^2\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}\tau - q\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(D_S^\alpha g - \beta) -$$
$$- F_t\tau - F_{\theta_q}(g_q + p\theta_q - \theta_q\beta_q) = 0.$$

Из (25) получаем $p = r\tau + (\alpha-1)\xi_S$.

Интегрирование уравнения $\xi_{SS} = 0$ из (23) при условии $\xi(c) = 0$ дает $\xi = A(t,q)(S-c)$. Следовательно, из (23) получаем

$$\xi = A(t,q)(S-c), \quad p = r\tau + (\alpha-1)A(t,q), \quad \tau_t - F_{\theta_q}\tau_q = (\alpha+1)A(t,q), \quad A_t - F_{\theta_q}A_q = 0. \tag{28}$$

Подстановка ξ и p из (28) в (26) дает равенство $\mu A + \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}\left(D_S^\alpha g - \beta + r\tau q - qA\right) = 0$. Отсюда

$$D_S^\alpha g = \beta + q(A - r\tau) - \frac{\mu A e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2}.$$

Его общее решение по формуле (3) имеет вид

$$g = \frac{(S-c)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\left(\beta + q(A-r\tau) - \frac{\mu A e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2}\right) + M(t,q)(S-c)^{\alpha-1}. \tag{29}$$

Подстановка полученных g из (29), p и ξ из (28) в (27) приводит к уравнению

$$(r\tau - 2A)\left((\mu - rS)q - \frac{1}{2}q^2\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)} + F\right) - \theta_q\beta_t - \mu\beta +$$
$$+\frac{(S-c)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\left(\beta_t + q(A_t - r\tau_t) - \frac{\mu(A_t + rA)e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2}\right) + M_t(S-c)^{\alpha-1} +$$
$$+\frac{(S-c)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\left(-r\beta - rq(A-r\tau) + r\frac{\mu A e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2}\right) - rM(S-c)^{\alpha-1} + rS\beta + rqA(S-c) + \mu\beta +$$
$$+\mu q(A - r\tau) - \frac{\mu^2 A e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2} - \frac{r}{2}q^2\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}\tau - q\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}\left(q(A-r\tau) - \frac{\mu A e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2}\right) -$$
$$- F_t\tau - F_{\theta_q}\left(\frac{(S-c)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\left(\beta_q + A - r\tau + q(A_q - r\tau_q) - \frac{\mu A_q e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2}\right) -\right.$$
$$\left. + M_q(S-c)^{\alpha-1} + \theta_q(r\tau + (\alpha-1)A - \beta_q)\right) = 0. \tag{30}$$

Расщепляем (30) по S и получаем

$$\frac{(S-c)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} : \beta_t + q(A_t - r\tau_t) - \frac{\mu A_t e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2} - r\beta - rq(A - r\tau) -$$
$$- F_{\theta_q}\left(\beta_q + A - r\tau + q(A_q - r\tau_q) - \frac{\mu A_q e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2}\right) = 0,$$
$$(S-c)^{\alpha-1} : M_t - rM - F_{\theta_q}M_q = 0,$$
$$S : -rq(r\tau - 2A) + r\beta + rqA = 0,$$
$$1 : (r\tau - 2A)\left(\mu q - \frac{1}{2}q^2\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)} + F\right) - \theta_q\beta_t - \mu\beta - rqAc + \mu\beta + \mu q(A - r\tau) - \frac{\mu^2 A e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2} -$$
$$- \frac{r}{2}q^2\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}\tau - q^2\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(A - r\tau) + \mu q A - F_t\tau - F_{\theta_q}\left(r\tau + (\alpha-1)A - \beta_q\right)\theta_q = 0.$$

Сокращение с использованием равенств $A_t - F_{\theta_q} A_q = 0$ и $\tau_t - F_{\theta_q}\tau_q = (\alpha+1)A$ из (28) дает

$$\frac{(S-c)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} : \beta_t - rq(\alpha+2)A - r\beta + r^2 q\tau - F_{\theta_q}\left(\beta_q + A - r\tau\right) = 0, \tag{31}$$

$$(S-c)^{\alpha-1} : M_t - rM - F_{\theta_q} M_q = 0, \tag{32}$$

$$S : -rq(r\tau - 3A) + r\beta = 0, \tag{33}$$

$$1 : (r\tau - 2A)F - \theta_q\beta_t - rqAc - \frac{\mu^2 A e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2} - F_t\tau - F_{\theta_q}\left(r\tau + (\alpha-1)A - \beta_q\right)\theta_q = 0. \tag{34}$$

5. Предположение $\mathbf{F_{\theta_q\theta_q} \neq 0}$. В предположении $F_{\theta_q\theta_q} \neq 0$ из уравнений (28), (31), (32) получим, что

$$A_t = 0, \quad A_q = 0, \quad \tau_q = 0, \quad \tau_t = (\alpha+1)A, \quad \beta_q = r\tau - A, \quad M_q = 0, \quad M_t - rM = 0. \tag{35}$$

Теперь дифференцируем (34) по θ_q и q и получаем ввиду $\tau_q = 0$, $A_q = 0$, $\beta_{qq} = 0$ из (35) выражение $0 = \beta_{tq} = r\tau_t - A_t = r(\alpha+1)A$, отсюда $rA = 0$. Интегрирование $\tau_S = 0$ из (34), $\tau_q = 0$, $\tau_t = (\alpha+1)A$ из (35) дает $\tau = (\alpha+1)At + B$. Интегрирование уравнений также дает $\beta = (rB - A)q + L(t)$, $M = M_0 e^{rt}$. Тогда с учетом (28) получаем

$$\tau = (\alpha+1)At + B, \quad \xi = A(S-c), \quad \beta = (rB - A)q + L(t), \quad M = M_0 e^{rt}, \quad rA = 0. \tag{36}$$

Подстановка этих равенств в выражения для p (28) и g (29) дает

$$p = rB + (\alpha-1)A, \quad g = \frac{(S-c)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\left(L(t) - \frac{\mu A e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2}\right) + M_0 e^{rt}(S-c)^{\alpha-1}. \tag{37}$$

Подстановка (36) в равенства (31), (33) и (34) дает

$$L_t = 0, \quad rL = 0, \quad (rB - 2A)F - \frac{\mu^2 A e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2} - F_t((\alpha+1)At + B) - \alpha A F_{\theta_q}\theta_q = 0. \tag{38}$$

Если $r \neq 0$, то из (36), (38) получаем $L = 0$, $A = 0$. Их подстановка в (36)–(38) дает

$$\tau = B, \quad \xi = 0, \quad \beta = rBq, \quad p = rB, \quad g = M_0 e^{rt}(S-c)^{\alpha-1}, \quad rBF - BF_t = 0.$$

Решение уравнения $rBF - BF_t = 0$ при $B \neq 0$ имеет вид $F = e^{rt}G(\theta_q)$, $G'' \neq 0$. Если $B = 0$, то получаем случай произвольной функции.

Теорема 5.1. *Алгебра Ли уравнения* (21) *при* $r \neq 0$, $F = e^{rt}G(\theta_q)$, $G'' \neq 0$, *порождается операторами*

$$X_1 = e^{rt}(S-c)^{\alpha-1}\partial_\theta, \quad X_2 = \partial_t + rq\partial_q + r\theta\partial_\theta.$$

Алгебра Ли уравнения (21) *при* $r \neq 0$ *и функции* $F = F(t, \theta_q)$, $F_{\theta_q\theta_q} \neq 0$, *не эквивалентной функции вида* $e^{rt}G(\theta_q)$, *порождается оператором*

$$X_1 = e^{rt}(S-c)^{\alpha-1}\partial_\theta.$$

Если $r = 0$ то уравнения (36)–(38) принимают вид

$$\tau = (\alpha+1)At + B, \quad \xi = A(S-c), \quad \beta = -Aq + L, \quad p = (\alpha-1)A, \tag{39}$$

$$g = \frac{(S-c)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\left(L - \frac{\mu A}{\gamma\sigma^2}\right) + M_0(S-c)^{\alpha-1}, \tag{40}$$

$$2AF + \frac{\mu^2 A}{\gamma\sigma^2} + F_t((\alpha+1)At + B) + \alpha A F_{\theta_q}\theta_q = 0. \tag{41}$$

Уравнение (41) является классифицирующим, рассмотрим его подробнее.

1. Если $A \neq 0$, то общее решение уравнения (41) имеет вид

$$F = \frac{1}{2A}((\alpha+1)At + B)^{-\frac{2}{\alpha+1}}\Phi(((\alpha+1)At + B)^{-\frac{\alpha}{\alpha+1}}\theta_q) - \frac{\mu^2}{2\gamma\sigma^2},$$

где Φ — произвольная функция. При помощи преобразования эквивалентности, порождаемых оператором $X_2 = \partial_t$, получаем

$$F = t^{-\frac{2}{\alpha+1}}\Phi(t^{-\frac{\alpha}{\alpha+1}}\theta_q) - \frac{\mu^2}{2\gamma\sigma^2}. \tag{42}$$

Подстановка этой функции в классифицирующее уравнение дает

$$2At^{-\frac{2}{\alpha+1}}\Phi(t^{-\frac{\alpha}{\alpha+1}}\theta_q) - ((\alpha+1)At + B)\left[\frac{2}{\alpha+1}t^{-\frac{2}{\alpha+1}-1}\Phi(t^{-\frac{\alpha}{\alpha+1}}\theta_q) + \frac{\alpha}{\alpha+1}t^{-\frac{1}{\alpha+1}-2}\Phi'(t^{-\frac{\alpha}{\alpha+1}}\theta_q)\theta_q\right] +$$
$$+\alpha At^{-\frac{1}{\alpha+1}-1}\Phi'(t^{-\frac{\alpha}{\alpha+1}}\theta_q)\theta_q = 0.$$

После сокращения и обозначения $z = t^{-\frac{\alpha}{\alpha+1}}\theta_q$ получаем $B(2\Phi(z) + \alpha z\Phi'(z)) = 0$.

1.1. Если $B \neq 0$, решение этого уравнения имеет вид $\Phi(z) = Cz^{-\frac{2}{\alpha}}$, т. е.

$$F = C\theta_q^{-\frac{2}{\alpha}} - \frac{\mu^2}{2\gamma\sigma^2}.$$

1.2. Если $B = 0$, то остается функция вида (42) при произвольном Φ, $\Phi'' \neq 0$.

2. Если $A = 0$, то получаем подстановкой в (39)–(41) равенства

$$\tau = B, \quad \xi = 0, \quad \beta = L, \quad p = 0, \quad g = L\frac{(S-c)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + M_0(S-c)^{\alpha-1}, \quad BF_t = 0.$$

2.1. Если $B \neq 0$, то получаем $F = F(\theta_q)$, $F'' \neq 0$.

2.2. Если $B = 0$, то $F = F(t, \theta_q)$ — произвольная функция, для которой $F_{\theta_q\theta_q} \neq 0$.

Полученные результаты позволяют сформулировать следующую теорему о групповой классификации.

Теорема 5.2. *1. Алгебра Ли уравнения*

$$\theta_t = \mu q - \mu D_S^\alpha\theta - \frac{\sigma^2}{2}D_S^{\alpha+1}\theta - \frac{1}{2}\gamma\sigma^2(D_S^\alpha\theta - q)^2 + F(t, \theta_q) \tag{43}$$

при $F = C\theta_q^{-\frac{2}{\alpha}} - \frac{\mu^2}{2\gamma\sigma^2}$ *порождается операторами*

$$X_1 = \partial_t, \quad X_2 = (S-c)^{\alpha-1}\partial_\theta, \quad X_3 = \partial_q + \frac{(S-c)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\partial_\theta,$$
$$X_4 = (\alpha+1)\partial_t + (S-c)\partial_S - q\partial_q + \left((\alpha-1)\theta - \frac{\mu(S-c)^\alpha}{\gamma\sigma^2\Gamma(\alpha+1)}\right)\partial_\theta.$$

2. Алгебра Ли уравнения (43) *при функции* $F = t^{-\frac{2}{\alpha+1}}\Phi(t^{-\frac{\alpha}{\alpha+1}}\theta_q) - \frac{\mu^2}{2\gamma\sigma^2}$, $\Phi'' \neq 0$, *не эквивалентной функции вида* $C\theta_q^{-\frac{2}{\alpha}} - \frac{\mu^2}{2\gamma\sigma^2}$, *порождается операторами*

$$X_1 = (S-c)^{\alpha-1}\partial_\theta, \quad X_2 = \partial_q + \frac{(S-c)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\partial_\theta,$$
$$X_3 = (\alpha+1)\partial_t + (S-c)\partial_S - q\partial_q + \left((\alpha-1)\theta - \frac{\mu(S-c)^\alpha}{\gamma\sigma^2\Gamma(\alpha+1)}\right)\partial_\theta.$$

3. Алгебра Ли уравнения (43) *при функции* $F = F(\theta_q)$, $F'' \neq 0$, *не эквивалентной функциям вида* $C\theta_q^{-\frac{2}{\alpha}} - \frac{\mu^2}{2\gamma\sigma^2}$, $t^{-\frac{2}{\alpha+1}}\Phi(t^{-\frac{\alpha}{\alpha+1}}\theta_q) - \frac{\mu^2}{2\gamma\sigma^2}$, *порождается операторами*

$$X_1 = \partial_t, \quad X_2 = (S-c)^{\alpha-1}\partial_\theta, \quad X_3 = \partial_q + \frac{(S-c)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\partial_\theta.$$

4. Алгебра Ли уравнения (43) *при функции* $F = F(t, \theta_q)$, $F_t \neq 0$, $F_{\theta_q\theta_q} \neq 0$, *не эквивалентной функциям вида* $C\theta_q^{-\frac{2}{\alpha}} - \frac{\mu^2}{2\gamma\sigma^2}$, $t^{-\frac{2}{\alpha+1}}\Phi(t^{-\frac{\alpha}{\alpha+1}}\theta_q) - \frac{\mu^2}{2\gamma\sigma^2}$, *порождается операторами*

$$X_1 = (S-c)^{\alpha-1}\partial_\theta, \quad X_2 = \partial_q + \frac{(S-c)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\partial_\theta.$$

Список литературы

1. Газизов Р. К., Касаткин А. А., Лукащук С. Ю. 2007. Непрерывные группы преобразований дифференциальных уравнений дробного порядка. Вестник УГАТУ, 9(3): 125–135.
2. Ядрихинский Х. В., Федоров В. Е. 2021. Инвариантные решения модели Геана – Пу ценообразования опционов и хеджирования. Челябинский физико-математический журнал, 6(1): 43–52. doi:10.47475/2500-0101-2021-16104.

3. Fall A. N., Ndiaye S. N., Sene N. 2019. Black — Scholes option pricing equations described by the Caputo generalized fractional derivative. Chaos, Solitons and Fractals, 125: 108–118. doi:10.1016/j.chaos.2019.05.024.
4. Gazizov R. K., Kasatkin A. A., Lukashchuk S. Y. 2019. Symmetries, conservation laws and group invariant solutions of fractional PDEs. In: Fractional Differential Equations, vol. 2, Walter de Gruyter GmbH, Berlin, Munich, Boston, 2019, 353–382. doi:10.1515/9783110571660-016.
5. Gueant O. 2016. The Financial Mathematics of Market Liquidity: From Optimal Execution to Market Making. Chapman and Hall/CRC, London, 302. doi:10.1201/b21350.
6. Gueant O., Pu J. 2013. Option pricing and hedging with execution costs and market impact. arXiv: 1311.4342. doi:10.48550/arXiv.1311.4342.
7. Kumar S., Yildirin A., Khan Y., Jafari H., Sayevand K., Wei L. 2012. Analytical solution of fractional Black – Scholes European option pricing equations using Laplace transform. Journal of Fractional Calculus and Applications, 2: 1–9.
8. Sawangtong P., Trachoo K., Sawangtong W., Wiwattanapataphee B. 2018. The analytical solution for the Black – Scholes equation with two assets in the Liouville – Caputo fractional derivative sense. Mathematics, 8: 129. doi:10.3390/math6080129.
9. Sitnik S. M., Yadrikhinskiy Kh. V., Fedorov V. E. 2022. Symmetry analysis of a model of option pricing and hedging. Symmetry, 14: 1841. doi:10.3390/sym14091841.
10. Yadrikhinskiy Kh. V., Fedorov V. E. 2023. Recursion operators for the Gueant–Pu model. Lobachevskii Journal of Mathematics, 44(3): 1236–1240. doi:10.1134/S1995080223030344.
11. Yadrikhinskiy Kh. V., Fedorov V. E. 2022. Symmetry analysis of the Gueant – Pu model. AIP Conference Proceedings, 2528: 020035. doi:10.1063/5.0106164.
12. Yadrikhinskiy Kh. V., Fedorov V. E., Dyshaev M. M. 2021. Group analysis of the Gueant and Pu model of option pricing and hedging, In: Symmetries and Applications of Differential Equations, ed. by A. C. J. Luo and R. K. Gazizov, Springer, Singapore, 173–203. doi:10.1007/978-981-16-4683-6_6.

References

1. Gazizov R. K., Kasatkin A. A., Lukashchuk S. Y. 2007. Nepreryvnye gruppy preobrazovaniy differentsial'nykh uravneniy drobnogo poryadka [Continuous transformation groups of fractional differential equations]. Vestnik UGATU, 9(3): 125–135.
2. Yadrikhinskiy Kh. V., Fedorov V. E. 2021. Invariant solutions of the Gueant — Pu model of options pricing and hedging. Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal, 6(1): 43–52. (in Russian) doi:10.47475/2500-0101-2021-16104.
3. Fall A. N., Ndiaye S. N., Sene N. 2019. Black – Scholes option pricing equations described by the Caputo generalized fractional derivative. Chaos, Solitons and Fractals, 125: 108–118. doi:10.1016/j.chaos.2019.05.024.
4. Gazizov R. K., Kasatkin A. A., Lukashchuk S. Y. 2019. Symmetries, conservation laws and group invariant solutions of fractional PDEs. In: Fractional Differential Equations, vol. 2, Walter de Gruyter GmbH, Berlin, Munich, Boston, 2019, 353–382. doi:10.1515/9783110571660-016.
5. Gueant O. 2016. The Financial Mathematics of Market Liquidity: From Optimal Execution to Market Making. Chapman and Hall/CRC, London, 302. doi:10.1201/b21350.
6. Gueant O., Pu J. 2013. Option pricing and hedging with execution costs and market impact. arXiv: 1311.4342. doi:10.48550/arXiv.1311.4342.
7. Kumar S., Yildirin A., Khan Y., Jafari H., Sayevand K., Wei L. 2012. Analytical solution of fractional Black – Scholes European option pricing equations using Laplace transform. Journal of Fractional Calculus and Applications, 2: 1–9.
8. Sawangtong P., Trachoo K., Sawangtong W., Wiwattanapataphee B. 2018. The analytical solution for the Black – Scholes equation with two assets in the Liouville – Caputo fractional derivative sense. Mathematics, 8: 129. doi:10.3390/math6080129.
9. Sitnik S. M., Yadrikhinskiy Kh. V., Fedorov V. E. 2022. Symmetry analysis of a model of option pricing and hedging. Symmetry, 14: 1841. doi:10.3390/sym14091841.
10. Yadrikhinskiy Kh. V., Fedorov V. E. 2023. Recursion operators for the Gueant–Pu model. Lobachevskii Journal of Mathematics, 44(3): 1236–1240. doi:10.1134/S1995080223030344.
11. Yadrikhinskiy Kh. V., Fedorov V. E. 2022. Symmetry analysis of the Gueant–Pu model. AIP Conference Proceedings, 2528: 020035. doi:10.1063/5.0106164.
12. Yadrikhinskiy Kh. V., Fedorov V. E., Dyshaev M. M. 2021. Group analysis of the Gueant and Pu model of option pricing and hedging, In: Symmetries and Applications of Differential Equations, ed. by A. C. J. Luo and R. K. Gazizov, Springer, Singapore, 173–203. doi:10.1007/978-981-16-4683-6_6.

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.
Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 22.05.2023
Поступила после рецензирования 04.07.2023
Принята к публикации 08.07.2023

Received May 22, 2023
Revised July 4, 2023
Accepted July 8, 2023

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Ядрихинский Христофор Васильевич – младший научный сотрудник Якутского отделения Дальневосточного центра математических исследований, Северо-Восточный федеральный университет им. М. К. Аммосова, г. Якутск, Россия

Федоров Владимир Евгеньевич – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры математического анализа, Челябинский государственный университет; главный научный сотрудник Якутского отделения Дальневосточного центра математических исследований, Северо-Восточный федеральный университет им. М. К. Аммосова, г. Челябинск, Россия; Якутск, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Khristofor V. Yadrikhinskiy – Junior Research Assistant of Yakut Branch of the Far Eastern Center for Mathematical Research, North East Federal University named after M. K. Ammosov, Yakutsk, Russia

Vladimir E. Fedorov – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Professor of Mathematical Analysis Department, Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russia; Chief Scientific Officer of Yakut Branch of the Far Eastern Center for Mathematical Research, North East Federal University named after M. K. Ammosov, Chelyabinsk, Russia; Yakutsk, Russia

Прикладная математика & Физика, 2023, том 55, № 3. С. 248–257.
Applied Mathematics & Physics, 2023, Volume 55, No 3. P. 248–257.

УДК 517.955
MSC 35E15
DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-3-248-257
Оригинальное исследование

Многочлены Лагерра в описании профилей прямой и обратной волн для волнового уравнения на отрезке при условии Робена или при условии присоединённой массы

[1] **Найдюк Ф. О.**, [1] **Прядиев В. Л.**, [2] **Ситник С. М.**
[1] Воронежский государственный университет,
Россия, 394006, Воронеж, Университетская пл., 1
xakepph@yandex.ru, pryad@mail.ru
[2] Белгородский государственный национальный исследовательский университет,
Россия, 308015, Белгород, ул. Победы, 85
mathsms@yandex.ru

Аннотация. В работе выводится формула, описывающая через начальные данные и прочие параметры профили прямой и обратной волн у решения начально-краевой задачи для волнового уравнения на отрезке при следующих краевых условиях: на левом конце – условие первого или второго рода, а на правом – условие третьего рода (Робена) или так называемое условие присоединённой массы. Эта формула содержит конечное число арифметических операций, элементарных функций, квадратур и таких преобразований независимого аргумента у начальных данных, как умножение на число и взятие целой части числа.

Ключевые слова: одномерное волновое уравнение, начально-краевая задача, краевые условия первого, второго и третьего родов, условие нагруженной массы, профили прямой и обратной волн, многочлены Лагерра

Для цитирования: Найдюк Ф. О., Прядиев В. Л., Ситник С. М. 2023. Многочлены Лагерра в описании профилей прямой и обратной волн для волнового уравнения на отрезке при условии Робена или при условии присоединённой массы. *Прикладная математика & Физика*, 55(3): 248–257. DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-3-248-257

Original Research

Laguerre Polynomials in Describing the Profiles of Forward and Backward Waves for the Wave Equation on a Segment Under the Robin Condition or Under the Joined Mass Condition

[1] **Filipp O. Naydyuk**, [1] **Vladimir L. Pryadiev**, [2] **Sergey M. Sitnik**
[1] Voronezh State University,
1 Universitetskaya sq., Voronezh, 394006, Russia
xakepph@yandex.ru, pryad@mail.ru
[2] Belgorod National Research University,
85, Pobeda st., Belgorod, 308015, Russia mathsms@yandex.ru

Abstract. A formula that describes the profiles of forward and backward waves for the solution of the initial-boundary value problem for the wave equation on a segment is obtained. The following combinations of boundary conditions are considered: 1) the first kind condition in the left end point and the third kind condition in the right end point, 2) the second kind condition in the left end point and the third kind condition in the right end point, 3) the first kind condition in the left end point and so-called joined mass condition in the right end point, 4) the second kind condition in the left end point and joined mass condition in the right end point. This formula contains a finite number of arithmetic operations, elementary functions, quadratures, and such transformations of the independent argument of the initial data as multiplication by a number and taking the integer part of the number.

Keywords: One-Dimensional Wave Equation, Initial-Boundary Value Problem, Boundary Conditions of the First, Second and Third Kinds, Joined Mass Condition, Forward and Backward Wave Profiles, Laguerre Polynomials

For citation: Naydyuk F. O., Pryadiev V. L., Sitnik S. M. 2023. Laguerre Polynomials in Describing the Profiles of Forward and Backward Waves for the Wave Equation on a Segment Under the Robin Condition or Under the Joined Mass Condition. *Applied Mathematics & Physics*, 55(3): 248–257. (in Russian) DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-3-248-257

---

1. Введение. Рассмотрим следующую начально-краевую задачу для однородного одномерного волнового уравнения (одно краевое условие – первого рода, а другое – третьего):

$$\begin{cases} u_{xx}(x,t) = u_{tt}(x,t) \ \ (0 < x < l,\ t > 0) \\ u(0,t) = 0,\ u_x(l,t) + k\,u(l,t) = 0 \ \ (t > 0) \\ u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = 0 \ \ (0 \le x \le l) \end{cases}, \tag{1}$$

в которой l и k – фиксированные положительные числа, $\varphi \in C^2[0;l]$, причём $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(l) + k\,\varphi(l) = 0$; решение $u(x,t)$ ищется в классе вещественнозначных дважды непрерывно дифференцируемых на $(0;l) \times (0;+\infty)$ функций, у которых все производные второго порядка доопределяемы по непрерывности на $[0;l] \times [0;+\infty)$. Кроме того, будем предполагать, что $\varphi''(0) = 0$ – иначе решение задачи (1) из указанного класса функций не существует (см., например, в [9] Лекцию IV, § 2, стр. 54, или [14]).

Выписывая решение (1) в форме Даламбера, придём к представлению:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(\tilde{\varphi}(x+t) + \tilde{\varphi}(x-t)\right), \tag{2}$$

в котором $\tilde{\varphi}$ есть дважды непрерывно дифференцируемое продолжение φ с $[0;l]$ на множество всех вещественных чисел $\mathbf{R}$, подчинённое условиям: $\tilde{\varphi}(-x) = -\tilde{\varphi}(x)$ и $(\tilde{\varphi}' + k\,\tilde{\varphi})(l+x) = -(\tilde{\varphi}' + k\,\tilde{\varphi})(l-x)$ $(x \in \mathbf{R})$ – конечно, если такое продолжение $\tilde{\varphi}$ существует; последнее соотношение можно заменить (с учётом первого) на $(\tilde{\varphi}' + k\,\tilde{\varphi})(x) = -(\tilde{\varphi}' - k\,\tilde{\varphi})(x-2l)$ $(x \in \mathbf{R})$. Другими словами, $\tilde{\varphi}$ в (2) – это нечётная дважды непрерывно дифференцируемая функция, сужение которой на $[-l;+\infty)$ является решением начальной задачи

$$\tilde{\varphi}'(x) + \tilde{\varphi}'(x-2l) + k\,\tilde{\varphi}(x) - k\,\tilde{\varphi}(x-2l) = 0 \quad (x \geq l), \tag{3}$$

$$\tilde{\varphi}(x) = \begin{cases} -\varphi(-x), \text{ если } -l \leq x \leq 0 \\ \varphi(x), \text{ если } 0 \leq x \leq l \end{cases}. \tag{4}$$

Наша ближайшая цель – получить формулу, выражающую $\tilde{\varphi}$ через φ с использованием лишь конечного числа арифметических операций, элементарных функций, квадратур и таких операций над независимым аргументом у φ, как умножение на число и взятие целой части. Такого рода формула полезна при численном решении задачи (1), при исследовании соответствующей задачи управляемости (см., например, [12]–[13]) и при анализе зависимости решения задачи от входящих в неё параметров.

Для достижения этой цели можно пытаться использовать различные методы решения задачи (3)–(4). Использование преобразования Лапласа даёт представление $\tilde{\varphi}$ в виде контурного интеграла, а вычисление последнего посредством суммирования вычетов приводит к представлению $\tilde{\varphi}$ в виде ряда (см., например, в [1] теорему 5.5). Теорема смещения была бы эффективна, если бы начальное условие в (4) имело специальный вид (по этому поводу см. там же, комментарий в конце § 4.7), но в нашем случае это не так. Наконец, представление $\tilde{\varphi}$ в виде действительного определённого интеграла (см., например, [1], теорему 5.4) содержит фундаментальное решение, которое если и можно предъявить конструктивно, то только через метод последовательного интегрирования (метод шагов). Именно по этим причинам для достижения указанной цели мы останавливаемся на методе шагов, несмотря на его некоторую трудоёмкость.

Чтобы дальнейшие выкладки были менее громоздкими, далее в (3)–(4) рассмотрим случай $l = 1$, к которому приводит замена $\hat{\varphi}(y) = \tilde{\varphi}(ly)$ с последующим переобозначением lk снова через k.

2. Решение задачи (3)–(4) последовательным интегрированием. Итак, пусть $l = 1$. Прежде всего отметим, что решение задачи (3)–(4) существует, единственно и принадлежит $C^2[-1;+\infty)$ – для установления этого достаточно применить теорему 5.1 из [1] и учесть, что $\varphi \in C^2[0;1]$ и $\varphi(0) = 0$, $\varphi''(0) = 0$ и $\varphi'(1) + k\,\varphi(1) = 0$.

Пусть $n \in \mathbf{N}$, где $\mathbf{N}$ – множество всех натуральных чисел. Если мы умножим уравнение (3) на e^{kx} и проинтегрируем от $2n-1$ до $x \in [2n-1; 2n+1)$, то для функции $\psi(x) = e^{kx}\tilde{\varphi}(x)$ получим соотношение:

$$\psi(x) = \psi(2n-1) + \int\limits_{2n-1}^{x} \left[k\tilde{\varphi}(s-2)e^{ks} - \tilde{\varphi}'(s-2)e^{ks}\right] ds.$$

Интегрируя здесь последнее слагаемое по частям, получаем (через A обозначено e^{2k}):

$$\psi(x) = \psi(2n-1) - A\,\psi(x-2) + A\,\psi(2n-3) + 2kA \int\limits_{2n-1}^{x} \psi(s-2)\,ds \tag{5}$$

– для $x \in [2n-1; 2n+1)$, $n \in \mathbf{N}$.

Включение $x \in [2n-1; 2n+1)$ равносильно равенству $n = [(x+1)/2]$ (здесь квадратные скобки означают взятие целой части числа), поэтому далее мы будем считать, что в равенстве (5) $x \geq 1$, а $n = n(x) \overset{\text{def}}{=} [(x+1)/2]$.

Лемма 1. *Существуют последовательность конечных наборов многочленов* $\left\{\{R_i^n(x)\}_{i=0}^{n-1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ $(\deg R_i^n = i)$ *и последовательность многочленов* $\{Q^n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ $(\deg Q^n = n-1)$*, такие, что*

$$\psi(x) = (-A)^n\,\psi(x-2n) + (2kA)^n \sum_{i=0}^{n-1} R_i^n(x) \int\limits_{2n-1}^{x} t^{n-i-1}\psi(t-2n)\,dt + Q^n(x), \tag{6}$$

где $n = n(x)$ *есть целая часть числа* $(x+1)/2$.

Доказательство проведём индукцией по n.

Справедливость (6) при $n(x) = 1$ следует из справедливости (5) при $n(x) = 1$, если положить $R_0^1(x) \equiv 1$, $Q^1(x) \equiv 0$.

Допустим теперь, что представление (6) справедливо при $n(x) = m$ (т. е. при $x \in [2m-1; 2m+1)$), где $m \in \mathbf{N}$. Тогда соотношение (5) при $x \in [2m+1; 2m+3)$ примет вид (подставляем вместо $\psi(s-2)$ её представление в виде (6), интегрируем по частям, выполняем подходящую замену переменной интегрирования и перегруппировываем слагаемые):

$$\psi(x) = (2kA)^{m+1}\Bigg[-\frac{1}{2k}\sum_{i=0}^{m-1} R_i^m(x-2)\int\limits_{2m+1}^{x}(t-2)^{m-i-1}\psi(t-2(m+1))dt+$$

$$+\sum_{i=0}^{m-1}\int R_i^m(x-2)\,dx\int\limits_{2m+1}^{x}(t-2)^{m-i-1}\psi(t-2(m+1))\,dt-$$

$$-\sum_{i=0}^{m-1}\int\limits_{2m+1}^{x}\int R_i^m(t-2)\,dt(t-2)^{m-i-1}\psi(t-2(m+1))\,dt+\left(-\frac{1}{2k}\right)^m\int\limits_{2m+1}^{x}\psi(t-2(m+1))\,dt\Bigg]+$$

$$+(2kA)^m\sum_{i=0}^{m-1}R_i^m(2m+1)\int\limits_{2m-1}^{2m+1}t^{m-i-1}\psi(t-2m)\,dt+Q^m(2m+1)-$$

$$-A\,Q^m(x-2)+A\,Q^m(2m-1)+2kA\int\limits_{2m+1}^{x}Q^m(s-2)\,ds,$$

где $\int R_i^m(\tau-2)\,d\tau$ – некоторая первообразная многочлена $R_i^m(\tau-2)$, которую далее мы будем считать обнуляющейся в точке $\tau = 2$. Отсюда следует справедливость (6) при $x \in [2m+1; 2m+3)$ – достаточно многочлены $R_i^{m+1}(x)$ определить соотношением

$$\sum_{i=0}^{m}R_i^{m+1}(x)\int\limits_{2m+1}^{x}t^{m-i}\psi(t-2(m+1))\,dt = \left(-\frac{1}{2k}\right)\sum_{i=0}^{m}R_i^m(x-2)\int\limits_{2m+1}^{x}(t-2)^{m-i-1}\psi(t-2(m+1))\,dt+$$

$$+\sum_{i=0}^{m-1}\int R_i^m(x-2)\,dx\int\limits_{2m+1}^{x}(t-2)^{m-i-1}\psi(t-2(m+1))\,dt-$$

$$-\sum_{i=0}^{m-1}\int\limits_{2m+1}^{x}\left(\int R_i^m(t-2)\,dt\cdot(t-2)^{m-i-1}\psi(t-2(m+1))\right)dt+$$

$$+\left(-\frac{1}{2k}\right)^m\int\limits_{2m+1}^{x}\psi(t-2(m+1))\,dt \tag{7}$$

и положить

$$Q^{m+1}(x) = (2kA)^m\sum_{i=0}^{m-1}R_i^m(2m+1)\int\limits_{2m-1}^{2m+1}t^{m-i-1}\psi(t-2m)\,dt+$$

$$+Q^m(2m+1)-A\,Q^m(x-2)+A\,Q^m(2m-1)+(2kA)\int\limits_{2m+1}^{x}Q^m(s-2)\,ds. \tag{8}$$

То, что (7) позволяет определить многочлены $R_i^{m+1}(x)$ через многочлены $R_i^m(x)$ (однозначность такого определения мы не обсуждаем), можно усмотреть, преобразовав правую часть (7): раскрыв по формуле бинома Ньютона степени $(t-2)$ и сгруппировав затем получившиеся слагаемые по множителям

$$\int\limits_{2m+1}^{x}t^{m-i}\psi(t-2(m+1))\,dt.$$

Лемма доказана.

Замечание. В дальнейшем мы будем, для определённости, полагать, что многочлен $R_i^{m+1}(x)$ определяется из (7) через многочлены $R_i^m(x)$ именно способом, указанным в конце доказательства леммы 1.

Лемма 2. *Коэффициенты $b_r^{m,\,i}$ многочленов*

$$R_i^m(x) = b_i^{m,\,i} x^i + b_{i-1}^{m,\,i} x^{i-1} + \ldots + b_1^{m,\,i} x + b_0^{m,\,i}$$

вычисляются по формулам:

$$b_{i-q}^{m,\,i} = \frac{(-1)^{m-i-1} C_m^q}{(m-i-1)!(i-q)!} \left(-\frac{1}{2k}\right)^q \quad \left(q = \overline{0, m-1},\ i = \overline{q, m-1}\right), \tag{9}$$

где C_m^q – биномиальный коэффициент.

Доказательство. Выведем рекуррентные соотношения, связывающие коэффициенты $b_p^{m+1,\,j}$ с коэффициентами $b_r^{m,\,i}$. Выражение в правой части (7) после раскрытия степеней бинома $t-2$ (в том числе, и в многочлене $\int R_i^m(t-2)\,dt$) и приведения подобных по $\int\limits_{2m+1}^{x} t^p \psi(t-2(m+1))\,dt$ примет вид:

$$\left(-\frac{1}{2k}\right) \sum_{p=0}^{m-1} \sum_{i=0}^{m-1-p} (-2)^{m-p-i-1}\, C_{m-i-1}^p R_i^m(x-2) \int\limits_{2m+1}^{x} t^p \psi(t-2(m+1))\,dt +$$

$$+ \sum_{p=0}^{m-1} \sum_{i=0}^{m-1-p} (-2)^{m-p-i-1}\, C_{m-i-1}^p \int R_i^m(x-2)\,dx \int\limits_{2m+1}^{x} t^p \psi(t-2(m+1))\,dt -$$

$$- \sum_{p=0}^{m-1} \sum_{i=0}^{m-p-1} \sum_{j=0}^{i} (-2)^{m-i+j-p}\, C_{m-i+j}^p \frac{b_j^{m,\,i}}{j+1} \int\limits_{2m+1}^{x} t^p \psi(t-2(m+1))\,dt -$$

$$- \sum_{p=1}^{m} \sum_{i=m-p}^{m-1} \sum_{j=p-(m-i)}^{i} (-2)^{m-i+j-p}\, C_{m-i+j}^p \frac{b_j^{m,\,i}}{j+1} \int\limits_{2m+1}^{x} t^p \psi(t-2(m+1))\,dt +$$

$$+ \left(-\frac{1}{2k}\right)^m \int\limits_{2m+1}^{x} \psi(t-2(m+1))\,dt\,.$$

Теперь уже видно, что (7) будет выполнено, если, во-первых,

$$R_0^{m+1}(x) = -\sum_{i=0}^{m-1} \frac{b_i^{m,\,i}}{i+1},$$

а во-вторых, при $p = \overline{1, m-1}$

$$R_{m-p}^{m+1}(x) = \left(-\frac{1}{2k}\right) \sum_{i=0}^{(m-1)-p} (-2)^{m-i-1-p}\, C_{m-i-1}^p R_i^m(x-2) +$$

$$+ \sum_{i=0}^{(m-1)-p} \left((-2)^{m-i-1-p}\, C_{m-i-1}^p \int R_i^m(x-2)\,dx\right) - \sum_{i=0}^{(m-1)-p} \sum_{j=0}^{i} (-2)^{m-i+j-p}\, C_{m-i+j}^p \frac{b_j^{m,\,i}}{j+1} -$$

$$- \sum_{i=m-p}^{m-1} \sum_{j=p-(m-i)}^{i} (-2)^{m-i+j-p}\, C_{m-i+j}^p \frac{b_j^{m,\,i}}{j+1}, \tag{10}$$

и, в-третьих,

$$R_m^{m+1}(x) = \left(-\frac{1}{2k}\right) \sum_{i=0}^{m-1} (-2)^{m-i-1} R_i^m(x-2) + \sum_{i=0}^{m-1} (-2)^{m-i-1} \int R_i^m(x-2)\,dx -$$

$$- \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{i} (-2)^{m-i+j} \frac{b_j^{m,\,i}}{j+1} + \left(-\frac{1}{2k}\right)^m. \tag{11}$$

Раскрывая в этих соотношениях степени бинома $x-2$ в $R_i^m(x-2)$ и группируя по степеням x, получим следующие рекуррентные соотношения, связывающие коэффициенты многочленов $R_j^{m+1}(x)$ и $R_i^m(x)$:

$$b_0^{m+1,\,0} = -\sum_{i=0}^{m-1} \frac{b_i^{m,\,i}}{i+1},$$

$$b_0^{m+1,\,m-p} = \left(-\frac{1}{2k}\right)\sum_{i=0}^{m-p-1}\sum_{j=0}^{i}(-2)^{m-i+j-p-1}C_{m-i-1}^{p}b_j^{m,\,i} + \sum_{i=0}^{m-p-1}\sum_{j=0}^{i}(-2)^{m-p-i+j}C_{m-i-1}^{p}\frac{b_j^{m,\,i}}{j+1} -$$

$$-\sum_{i=0}^{m-p-1}\sum_{j=0}^{i}(-2)^{m-i+j-p}C_{m-i+j}^{p}\frac{b_j^{m,\,i}}{j+1} - \sum_{i=m-p}^{m-1}\sum_{j=p-(m-i)}^{i}(-2)^{m-i+j-p}C_{m-i+j}^{p}\frac{b_j^{m,\,i}}{j+1} \quad (p=\overline{1,m-1}),$$

$$b_q^{m+1,\,m-p} = \left(-\frac{1}{2k}\right)\sum_{i=q}^{m-p-1}\sum_{j=q}^{i}(-2)^{m-i+j-p-1}\,C_j^q\,C_{m-i-1}^{p}\,b_j^{m,\,i} +$$

$$+\sum_{i=q-1}^{m-p-1}\sum_{j=q-1}^{i}(-2)^{m-p-i+j-q}\,C_{j+1}^{q}\,C_{m-i-1}^{p}\,\frac{b_j^{m,\,i}}{j+1}, \quad (p=\overline{1,m-1},\ q=\overline{1,m-p-1}),$$

$$b_{m-p}^{m+1,\,m-p} = \frac{b_{m-p-1}^{m,\,m-p-1}}{m-p} \quad (p=\overline{1,m-1}),$$

$$b_0^{m+1,\,m} = \left(-\frac{1}{2k}\right)^m + \left(-\frac{1}{2k}\right)\sum_{p=1}^{m-1}(-2)^p\sum_{j=0}^{p}b_j^{m,\,m-1-p+j} + \left(-\frac{1}{2k}\right)b_0^{m,\,m-1},$$

$$b_q^{m+1,\,m} = \left(-\frac{1}{2k}\right)\sum_{i=q}^{m-1}\sum_{j=q}^{i}(-2)^{m-1-q-i+j}\,C_j^q\,b_j^{m,\,i} + \sum_{i=q-1}^{m-1}\sum_{j=q-1}^{i}(-2)^{m-q-i+j}\,C_{j+1}^{q}\,\frac{b_j^{m,\,i}}{j+1} \quad (q=\overline{1,m-1}),$$

$$b_m^{m+1,\,m} = \frac{b_{m-1}^{m,\,m-1}}{m}.$$

Непосредственно проверяется, что подстановка (9) в полученные рекуррентные соотношения обращает их в верные равенства.

Лемма доказана.

Лемма 3. *Многочлен $Q^n(x)$ представим в виде:*

$$Q^n(x) = \sum_{j=1}^{n-1}(2kA)^j\sum_{i=0}^{j-1}R_i^j(x)\int_{2j-1}^{2j+1}t^{j-i-1}\,\psi(t-2j)\,dt. \tag{12}$$

Доказательство проведём индукцией по n. Справедливость (12) при $n=1$ очевидна, при $n=2$ – следует из (8) (при $m=1$), если учесть, что $Q^1(x)\equiv 0$ и $R_0^1(x)\equiv 1$.

Пусть теперь представление (12) верно при $n=m$. Подставим представление многочлена $Q^m(x)$ в виде (12) в правую часть (8) и сгруппируем подобные слагаемые правой части в получившемся представлении $Q^{m+1}(x)$: сначала по степеням j множителей $(2kA)^j$, $j=\overline{1,m}$, а затем в каждой из m сумм при множителях $(2kA)^j$ – по множителям вида

$$\int_{2j-1}^{2j+1}t^{j-i-1}\,\psi(t-2j)\,dt,\ i=\overline{0,j-1}.$$

В итоге получим:

$$Q^{m+1}(x) = \sum_{j=1}^{m}(2kA)^j\sum_{i=0}^{j-1}\Bigg[R_i^j(2m+1) + \sum_{p=0}^{i-1}(-2)^{i-p-1}\,C_{j-p-2}^{i-p-1}\times$$

$$\times\left\{\int_{2m+1}^{x}R_p^{j-1}(s-2)\,ds - \frac{1}{2k}R_p^{j-1}(x-2) + \frac{1}{2k}R_p^{j-1}(2m-1)\right\}\Bigg]\int_{2j-1}^{2j+1}t^{j-i-1}\psi(t-2j)\,dt.$$

И остаётся показать, что

$$R_i^j(x) = R_i^j(2m+1) +$$

$$+\sum_{p=0}^{i-1}(-2)^{i-p-1}\,C_{j-p-2}^{i-p-1}\left\{\int\limits_{2m+1}^{x} R_p^{j-1}(s-2)\,ds-\frac{1}{2k}R_p^{j-1}(x-2)+\frac{1}{2k}R_p^{j-1}(2m-1)\right\}. \tag{13}$$

Справедливость (13) при $i=0$ следует из того, что $R_0^j(x)\equiv R_0^j(2m+1)$ – так как $\deg R_0^j=0$. Если же $i=\overline{1,j-2}$, то в силу (10) (если положить там $m=j-1$ и $m-p=i$) выполнено равенство

$$R_i^j(x)-R_i^j(2m+1)=$$

$$=\sum_{q=0}^{i-1}\left[(-2)^{i-q-1}\,C_{j-q-2}^{j-1-i}\left\{\left(-\frac{1}{2k}\right)\cdot\left(R_q^{j-1}(x-2)-R_q^{j-1}(2m-1)\right)+\int\limits_{2m+1}^{x} R_q^{j-1}(s-2)\,ds\right\}\right],$$

что совпадает с (13), поскольку $C_{j-q-2}^{j-1-i}=C_{j-q-2}^{i-q-1}$. Наконец, в силу (11)

$$R_{j-1}^j(x)-R_{j-1}^j(2m+1)=$$

$$=\sum_{q=0}^{j-2}(-2)^{j-q-2}\left[\left(-\frac{1}{2k}\right)\cdot\left(R_q^{j-1}(x-2)-R_q^{j-1}(2m-1)\right)+\int\limits_{2m+1}^{x} R_q^{j-1}(s-2)\,ds\right],$$

что совпадает с (13) при $i=j-1$.

Лемма доказана.

Замечание. Из леммы 2 получаем, что

$$R_i^j(x)=\frac{(-1)^{j-1}}{(j-i-1)!(2k)^i}L_i^{j-i}(2kx),$$

где

$$L_n^{\alpha}(y)=\sum_{q=0}^{n}\frac{\Gamma(\alpha+n+1)(-y)^q}{\Gamma(\alpha+q+1)q!(n-q)!}$$

есть обобщённый многочлен Лагерра, или Лагерра – Сонина, см. [2], [4], [7], [11].

Следует отметить, что эти многочлены L_n^{α} были первоначально введены Э. Лагерром при $\alpha=0$, а в общем случае они были введены Н. Я. Сониным, см. [11], [10].

Собирая теперь воедино результаты лемм 1–3 и возвращаясь к случаю произвольного l (см. последний абзац пункта 1), приходим к следующему заключению.

Теорема 1. *Функция $\tilde{\varphi}$ из представления* (2) *решения задачи (1) есть дважды непрерывно дифференцируемая нечётная функция, которая на отрезке $[0;l]$ совпадает с φ, а на любом отрезке вида $[(2n-1)l;(2n+1)l]$ ($n\in\mathbf{N}$) представима в виде конечной суммы:*

$$\tilde{\varphi}(x)=(-1)^n\,\varphi_1(x-2nl)+(-1)^{n-1}\sum_{i=1}^{n}\frac{(2k)^i}{(i-1)!}L_i^{n-i}(2kx)\int\limits_{(2n-1)l}^{x} t^{i-1}\,e^{k(t-x)}\varphi_1(t-2nl)\,dt+$$

$$+\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^{j-1}\sum_{i=1}^{j}\frac{(2k)^i}{(i-1)!}L_i^{j-i}(2kx)\int\limits_{(2j-1)l}^{(2j+1)l} t^{i-1}\,e^{k(t-x)}\varphi_1(t-2jl)\,dt, \tag{14}$$

где φ_1 есть нечётное продолжение φ на $[-l;l]$.

3. Суммирование по синусам с частотами, равными собственным частотам колебаний в задаче (1). Интересное следствие получается из результатов предыдущего пункта, если, вернувшись к задаче (3)–(4), решить её с помощью преобразования Лапласа. А именно, применяя теорему 5.5 из [1], получим, что решение задачи (3)–(4) представимо в виде ряда:

$$\tilde{\varphi}(x)=\sum_{m=1}^{\infty}\mathrm{Res}\left[\frac{e^{xz}p(z)}{h(z)};i\,y_m\right]\quad(x>-l), \tag{15}$$

где

$$p(z)=-2\varphi(l)\mathrm{ch}(lz)+\int\limits_{-l}^{l}(\tilde{\varphi}'(x)+k\,\tilde{\varphi}(x))\,e^{-zx}\,dx,\qquad h(z)=z+ze^{-2lz}+k-ke^{-2lz}$$

(здесь i – мнимая единица), а y_m – корни уравнения $y=-k\cdot\mathrm{tg}(l\,y)$, занумерованные в произвольном порядке; при этом ряд (15) сходится равномерно на любом отрезке $[a;b]\subset(-l;+\infty)$. Выражая p только через φ (т. е. посредством интегрирования по частям избавляясь от присутствия φ' в выражении для p) и вычисляя вычеты в (15), придём (беря во внимание также нечётность $\tilde{\varphi}$) к представлению функции $\tilde{\varphi}$ в виде ряда, сужение которого на $[0;l]$ есть ряд Фурье функции φ по собственным функциям спектральной задачи, порождаемой задачей (1):

$$\tilde{\varphi}(x) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin(\omega_m x) \quad (x \in \mathbf{R}),$$

где

$$b_m = \frac{2(k^2+\omega_m^2)}{k + l(k^2+\omega_m^2)} \cdot \int_0^l \varphi(s)\sin(\omega_m s)\,ds \quad (m = \overline{1,\infty}),$$

а $\{\omega_m\}_{m=1}^{\infty}$ – возрастающая последовательность, составленная из всех положительных корней уравнения $\omega = -k \cdot \mathrm{tg}(l\omega)$.

Таким образом, с учётом теоремы 1, получаем следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть $f(x) \in C^2[0,l]$ и $f(0) = 0$ и $f''(0) = 0$. Пусть k – положительное число, удовлетворяющее равенству $f'(l) + kf(l) = 0$, а $\{b_m\}_{m=1}^{\infty}$ – последовательность чисел, определяемая равенством*

$$b_m = \frac{2(k^2+\omega_m^2)}{k + l(k^2+\omega_m^2)} \cdot \int_0^l f(s)\sin(\omega_m s)\,ds \quad (m = \overline{1,\infty}),$$

в котором $\{\omega_m\}_{m=1}^{\infty}$ – возрастающая последовательность всех положительных корней уравнения $\omega = -k \cdot \mathrm{tg}(l\omega)$. Тогда ряд $\sum\limits_{m=1}^{\infty} b_m \sin(\omega_m x)$ сходится равномерно на любом отрезке вещественной прямой, причём его сумма $s(x)$ есть дважды непрерывно дифференцируемая нечётная функция, совпадающая на $[0;l]$ с $f(x)$, а при $x > l$ определяемая равенством:

$$s(x) = (-1)^n f_1(x-2nl) + (-1)^{n-1}\sum_{i=1}^{n} \frac{(2k)^i}{(i-1)!} L_i^{n-i}(2kx) \int_{(2n-1)l}^{x} t^{i-1} e^{k(t-x)} f_1(t-2nl)\,dt +$$

$$+\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^{j-1}\sum_{i=1}^{j} \frac{(2k)^i}{(i-1)!} L_i^{j-i}(2kx) \int_{(2j-1)l}^{(2j+1)l} t^{i-1} e^{k(t-x)} f_1(t-2jl)\,dt,$$

где $n = n(x)$ есть целая часть числа $(x+l)/(2l)$, а f_1 – нечётное продолжение f на $[-l;l]$.

4. Случай краевого условия 3-го рода на правом конце отрезка и краевого условия 2-го рода – на левом конце.

Теорема $1'$. *Пусть $u(x,t)$ – решение задачи (1'), получающейся из задачи (1) заменой условия $u(0,t) = 0$ на условие $u_x(0,t) = 0$ и соответствующей заменой требований $\varphi(0) = 0$ и $\varphi''(0) = 0$ (на функцию φ) на одно требование: $\varphi'(0) = 0$. Тогда $u(x,t) = \dfrac{1}{2}(\hat{\varphi}(x+t) + \hat{\varphi}(x-t))$, где $\hat{\varphi}(x)$ – дважды непрерывно дифференцируемая чётная функция, совпадающая на $[0;l]$ с $\varphi(x)$ и на любом отрезке вида $[(2n-1)l;(2n+1)l]$ $(n \in \mathbf{N})$ представимая в виде конечной суммы:*

$$\hat{\varphi}(x) = (-1)^n \varphi_2(x-2nl) - \sum_{i=1}^{n} \frac{(2k)^i}{(i-1)!} L_i^{n-i}(2kx) \int_{(2n-1)l}^{x} t^{i-1} e^{k(t-x)} \varphi_2(t-2nl)\,dt -$$

$$-\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{j} \frac{(2k)^i}{(i-1)!} L_i^{j-i}(2kx) \int_{(2j-1)l}^{(2j+1)l} t^{i-1} e^{k(t-x)} \varphi_2(t-2jl)\,dt, \tag{14'}$$

где φ_2 есть чётное продолжение φ на $[-l;l]$.

Доказательство этой теоремы практически не отличается от доказательства теоремы 1, по причине чего и не приводится здесь. Отметим лишь, что $\hat{\varphi}(x)$ является решением уравнения

$$\hat{\varphi}'(x) - \hat{\varphi}'(x-2l) + k\hat{\varphi}(x) + k\hat{\varphi}(x-2l) = 0. \tag{3'}$$

Заодно отметим, что представление (14') влечёт утверждение, аналогичное теореме 2.

5. Случай условия присоединённой массы на правом конце отрезка и краевого условия 1-го или 2-го рода – на левом конце. Рассмотрим задачи:

$$\begin{cases} u_{xx}(x,t) = u_{tt}(x,t) \ \ (0 < x < l,\ t > 0) \\ u(0,t) = 0,\ u_x(l,t) + m\,u_{tt}(l,t) = 0 \ \ (t > 0) \\ u(x,0) = \alpha(x),\ u_t(x,0) = 0 \ \ (0 \le x \le l) \end{cases} \tag{16}$$

и

$$\begin{cases} u_{xx}(x,t) = u_{tt}(x,t) \ \ (0 < x < l,\ t > 0) \\ u_x(0,t) = 0,\ u_x(l,t) + m\,u_{tt}(l,t) = 0 \ \ (t > 0) \\ u(x,0) = \beta(x),\ u_t(x,0) = 0 \ \ (0 \le x \le l) \end{cases}, \tag{16'}$$

в которых l и m – фиксированные положительные числа, $\alpha, \beta \in C^2[0;l]$; решение каждой из этих задач ищется в том же классе функций, что и решение задачи (1). Относительно $\alpha(x)$ дополнительно предполагается, что $\alpha(0) = 0$ и $\alpha''(0) = 0$, а также, что $\alpha'(l) + m\,\alpha''(l) = 0$, а относительно $\beta(x)$ – что $\beta'(0) = 0$ и $\beta'(l) + m\,\beta''(l) = 0$; эти условия необходимы и достаточны для существования решений задач (16) и (16') из указанного класса.

Выписывая решения задач (16) и (16') в форме Даламбера:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(\gamma(x+t) + \gamma(x-t)\right), \tag{17}$$

придём к тому, что в случае задачи (16) γ есть дважды непрерывно дифференцируемое нечётное продолжение α с $[0;l]$ на $\mathbf{R}$, подчинённое уравнению

$$\gamma''(x) - \gamma''(x-2l) + \frac{1}{m}\gamma'(x) + \frac{1}{m}\gamma'(x-2l) = 0 \quad (x \ge l), \tag{18}$$

а в случае задачи $(16')$ γ есть дважды непрерывно дифференцируемое чётное продолжение β с $[0;l]$ на $\mathbf{R}$, подчинённое уравнению

$$\gamma''(x) + \gamma''(x-2l) + \frac{1}{m}\gamma'(x) - \frac{1}{m}\gamma'(x-2l) = 0 \quad (x \ge l). \tag{18'}$$

Сравнив уравнения (18) и (18') с уравнениями, соответственно, (3') и (3), придём к следующим двум теоремам.

Теорема 3. *Пусть $\hat{A}_k$ есть оператор, который всякой функции $\varphi \in C^2[0;l]$ ставит в соответствие определённую на $\mathbf{R}$ чётную функцию $\hat{\varphi}$, совпадающую на $[0;l]$ с φ и определяемую при $x \ge l$ равенством (14'). Тогда решение задачи* (16) *представимо в виде (17), где* $\gamma(x) = \int\limits_0^x (\hat{A}_{1/m}\alpha')(s)\,ds$.

Теорема $3'$**.** *Пусть $\tilde{A}_k$ есть оператор, который всякой функции $\varphi \in C^2[0;l]$ ставит в соответствие определённую на $\mathbf{R}$ нечётную функцию $\tilde{\varphi}$, совпадающую на $[0;l]$ с φ и определяемую при $x \ge l$ равенством* (14)*. Тогда решение задачи* $(16')$ *представимо в виде* (17)*, где*

$$\gamma(x) = \beta(0) + \int\limits_0^x (\tilde{A}_{1/m}\beta')(s)\,ds.$$

6. Некоторые замечания и комментарии. 1) Выше мы ограничились рассмотрением положительных параметров k и m (исходя из механической интерпретации задач (1), (1'), (16) и (16')). Однако нетрудно убедиться, что все приведённые нами доказательства теорем 1, $1'$, 3 и $3'$ справедливы и для произвольных вещественных k и m, отличных от 0. Более того, эти доказательства не теряют силу и в случае комплекснозначных решений задач (1), (1'), (16) и (16') и, соответственно, произвольных ненулевых комплексных параметров k и m.

2) Мы ограничивались пока рассмотрением только нулевой начальной скорости. Если же, например, в задаче (1) условие $u_t(x,0) = 0$ заменить на $u_t(x,0) = \Phi(x)$, где $\Phi \in C^1[0;l]$, причём $\Phi(0) = 0$ и $\Phi'(l) + k\Phi(l) = 0$ (последние два условия необходимы и достаточны для существования решения из рассматриваемого нами класса), то решение представимо в виде

$$u(x,t) = \big(C(t)\varphi\big)(x) + \int\limits_0^t \big(C(\tau)\Phi\big)(x)\,d\tau,$$

где операторная функция $C(t)$ определяется равенством

$$\big(C(t)\psi\big)(x) = \frac{1}{2}\left[\big(\tilde{A}_k\psi\big)(x+t) + \big(\tilde{A}_k\psi\big)(x-t)\right].$$

Для остальных задач ((1′), (16) и (16′)) ситуация аналогична.

3) Мы ограничивались пока рассмотрением только однородного волнового уравнения. Но, как известно, принцип Дюамеля (см., например, [14], [15]) позволяет выразить решение неоднородного уравнения с нулевыми начальными данными через параметрическое семейство решений однородного уравнения в виде интеграла по параметру.

4) Апостериори ясно, что доказательства теорем 1, 1', 3 и 3' можно строить, основываясь на известных функциональных соотношениях для многочленов Лагерра (впрочем, необходимое соотношение здесь одно: $\left(L_n^\alpha(x)\right)' = -L_{n-1}^{\alpha+1}(x)$), и такое доказательство менее громоздко. Однако такие доказательства–проверки проигрывают с методической точки зрения приведённым нами доказательствам–выводам.

5) Представляет интерес обобщение полученных в данной работе результатов на случай B-гиперболических уравнений, в которых вторые производные по времени (или даже одновременно по временной и пространственным переменным) заменяются на дифференциальный оператор Бесселя

$$B_\nu f(x) = \frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{2\nu+1}{x}\frac{df}{dx}.$$

Об уравнениях с операторами Бесселя см., например, [3], [8].

6) Насколько известно авторам, итоговые формулы (14) и (14') в терминах многочленов Лагерра впервые были получены в работах авторов [5]–[6]. При этом в работе [5] формулы были получены через многочлены Лагерра, выраженные в виде сумм в неявном виде, без явного указания на эти многочлены, а в работе [6] выражения через многочлены Лагерра приведены в явном виде. Впоследствии, аналогичные формулы через многочлены Лагерра в подобных задачах использовались и другими авторами, но в более поздних работах.

Список литературы

1. Беллман Р., Кук К. Л. 1967. Дифференциально-разностные уравнения. М., Мир, 548.
2. Бейтмен Г., Эрдейи А. 1966. Высшие трансцендентные функции. М., Наука, 300.
3. Кприянов И. А. 1997. Сингулярные эллиптические краевые задачи. М., Наука, 198.
4. Лебедев Н. Н. 1963. Специальные функции и их приложения. М.-Л., Физматгиз, 359.
5. Найдюк Ф. О., Прядиев В. Л. 2004. Формула продолжения начальных данных в решении Даламбера для волнового уравнения на отрезке с краевым условием третьего рода. Вестник Воронежского государственного университета. Серия «Физика. Математика», 1: 115–122.
6. Найдюк Ф. О., Прядиев В. Л., Ситник С. М. 2005. Описание профилей прямой и обратной волн для волнового уравнения на отрезке с краевыми условиями первого или второго рода – на одном конце и третьего рода или присоединённой массы – на другом. Чернозёмный альманах научных исследований. Серия «Фундаментальная математика», 1(1): 53–68.
7. Сегё Г. 1962. Ортогональные многочлены. М., Физматлит, 480.
8. Ситник С. М., Шишкина Э. Л. 2019. Метод операторов преобразования для дифференциальных уравнений с операторами Бесселя. М., Физматлит, 224.
9. Соболев С. Л. 1950. Уравнения математической физики. М.-Л., ГИТТЛ, 444.
10. Сонин Н. Я. 1954. Исследования о цилиндрических функциях и специальных полиномах. М., Гостехиздат, 244.
11. Суетин П. К. 1979. Классические ортогональные многочлены. – 2-е изд., доп. М., Наука, 416.
12. Тихомиров В. В. 2002. Волновое уравнение с граничным управлением при упругом закреплении. I. Дифференциальные уравнения, 38(3): 393–403.
13. Тихомиров В. В. 2002. Волновое уравнение с граничным управлением при упругом закреплении. II. Дифференциальные уравнения, 38(4): 529–537.
14. Тихонов А. Н., Самарский А. А. 1977. Уравнения математической физики. М., Наука, 742.
15. Эванс Л. К. 2003. Уравнения с частными производными. Новосибирск, 576.

References

1. Bellman R. 1967. Differential-difference equations. M., Mir, 548. (in Russian)
2. Bateman H., Erdélyi A. 1966. Higher transcendental functions. M., Nauka, 300. (in Russian)
3. Kipriyanov I. A. 1997. Singular Elliptic Boundary Value Problems. M., Nauka, 198. (in Russian)
4. Lebedev N. N. 1963. Special functions and applications. M.-L., Fizmatgis, 359. (in Russian)
5. Naidyuk F. O., Pryadiev V. L. 2004. Continuation formula of initial data in the Delamber solution to wave equation on the segment with boundary conditions of the third kind. Vestnik of the Voronezh State University. Series "Physics. Mathematics 1: 115–122. (in Russian)

6. Naidyuk F. O. 2005. Description of the profiles of forward and reverse waves for a wave equation on a segment with boundary conditions of the first or second kind - at one end and the third kind or attached mass - at the other. Chernozem Almanac of scientific research. Series "Fundamental Mathematics". 1(1): 53–68. (in Russian)
7. Szego G. 1962. Orthogonal polynomials. M., Fizmatlit, 480. (in Russian)
8. Sitnik S. M., Shishkina E.L. 2019. Transmutation operators method for differential equations with Bessel operator. Moscow. Fizmathlit, M., Fizmatlit, 224. (in Russian)
9. Sobolev S. L. 1950. Equations of mathematical physics. M.-L., GITTL, 444. (in Russian)
10. Sonin N. Ya. 1954. Research on cylindrical functions and special polynomials. M., Gostekhizdat, 244. (in Russian)
11. Suetin P. K. 1979. Classical orogonal polynomials. 2nd ed., add. M., Nauka, 416. (in Russian)
12. Tikhomirov V. V. 2002. Wave equation with boundary control at elastic fixation. I. Differential equations. 38(3)3: 393–403. (in Russian)
13. Tikhomirov V. V. 2002. Wave equation with boundary control at elastic fixation. II. Differential equations. 38(4): 529–537. (in Russian)
14. Tikhonov A. N., Samarsky A. A. 1977. Equations of mathematical physics. M., Nauka, 742. (in Russian)
15. Evans L. K. 2003. Partial differential equations. Translated from English. Novosibirsk, 576. (in Russian)

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.
Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 22.05.2023
Поступила после рецензирования 07.07.2023
Принята к публикации 11.07.2023

Received May 22, 2023
Revised July 7, 2023
Accepted July 11, 2023

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Найдюк Филипп Олегович – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры математического анализа, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия

Прядиев Владимир Леонидович – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры теории функций и геометрии, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия

Ситник Сергей Михайлович – доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры прикладной математики и компьютерного моделирования, Белгородский государственный национальный исследовательский университет, г. Белгород, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Filipp O. Naydyuk – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of Department of Mathematical Analysis, Voronezh State University, Voronezh, Russia

Vladimir L. Pryadiev – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Associate of Professor Department of Functions Theory and Geometry, Voronezh State University, Voronezh, Russia

Sergey M. Sitnik – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Professor Department of Applied Mathematics and Computer Modeling, Belgorod National Research University, Belgorod, Russia

Прикладная математика & Физика, 2023, том 55, № 3. С. 258–264.
Applied Mathematics & Physics, 2023, Volume 55, No 3. P. 258–264.

УДК 517.95 DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-3-258-264
MSC 35S15
Оригинальное исследование

О задаче Дирихле в плоской области с разрезом

Агаркова Н. Н., Васильев В. Б., Гебресласи Х. Ф.
Белгородский государственный национальный исследовательский университет,
Россия, 308015, Белгород, ул. Победы, 85
vbv57@inbox.ru

Аннотация. В работе исследуется разрешимость модельного эллиптического уравнения в плоской области с разрезом по лучу. Решение разыскивается в пространстве Соболева – Слободецкого. Используя специальную факторизацию для символа эллиптического оператора выписывается общее решение уравнения в области с вырезанным сектором, которое содержит произвольную функцию. С учетом условий Дирихле нахождение этой функции сводится к решению системы двух одномерных линейных интегральных уравнений. Затем изучается поведение этих уравнений, когда раствор сектора стремится к нулю, и сектор трансформируется в луч. В результате получается одно интегральное уравнение, однозначная разрешимость которого эквивалентна однозначной разрешимости задачи Дирихле в плоской области с вырезанным лучом.

Ключевые слова: псевдодифференциальное уравнение, область с разрезом, задача Дирихле, разрешимость

Для цитирования: Агаркова Н. Н., Васильев В. Б., Гебресласи Х. Ф. 2023. О задаче Дирихле в плоской области с разрезом. *Прикладная математика & Физика*, 55(3): 258–264. DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-3-258-264

Original Research

On the Dirichlet Problem in a Plane Domain with a Cut

Nataliya N. Agarkova, Vladimir B. Vasilyev, Hadish F. Gebreslasie
Belgorod National Research University,
85, Pobeda st., Belgorod, 308015, Russia
vbv57@inbox.ru

Abstract. In the paper, a solvability of a model elliptic pseudo-differential equation in a plane domain with a cut along a ray is studied. Solution is sought in the Sobolev–Slobodetskii space. Using a special factorization for elliptic symbol one writes out a general solution for the equation in a domain with cut sector; this solution includes an arbitrary function. Using the Diriclet condition one reduces finding this function to solution of a system of one-dimensional linear integral equations. Further, one studies a behavior of these equations when the size if sector tends to zero, and the sectors transforms into a ray. As a result one obtains a certain integral equation, and a unique solvability of the equation is equivalent to a solvability of the Dirichlet problem in a plane domain with cut ray.

Keywords: Pseudo-Differential Equation, Domain with a Cut, Dirichlet Problem, Solvability

For citation: Agarkova N. N., Vasilyev V. B., Gebreslasie H. F. 2023. On the Dirichlet Problem in a Plane Domain with a Cut. *Applied Mathematics & Physics*, 55(3): 258–264. (in Russian) DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-3-258-264

1. Введение. В работе [2, 15] были рассмотрены эллиптические псевдодифференциальные уравнения в модельных областях с негладкой границей (конические точки, ребра различной размерности). Исследование было основано на специальной волновой факторизации эллиптического символа с индексом æ, наличие которой позволяло описать картину разрешимости модельного псевдодифференциального уравнения. Эти исследования были продолжены и развиты в многомерных ситуациях, и, в частности, рассмотрены случаи, когда параметры конуса стремятся к предельным значения 0 и ∞ [13, 14, 12, 10, 1, 3, 4].

Модельный псевдодифференциальный оператор A с символом $A(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}^m$, определяется стандартно [9, 8]

$$(Au)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^{2m}} e^{i(x-y)\xi} A(\xi) u(y) dy d\xi.$$

Мы рассматриваем такой оператор в пространстве Соболева – Слободецкого $H^s(\mathbb{R}^m)$ с нормой

$$||u||_s^2 = \int\limits_{\mathbb{R}^m} |\tilde{u}(\xi)|^2 (1 + |\xi|)^{2s} d\xi,$$

и вводим следующий класс символов, не зависящих от пространственной переменной x: $\exists c_1, c_2 > 0$, такие, что

$$c_1 \leq |A(\xi)(1+|\xi|)^{-\alpha}| \leq c_2,\ \xi \in \mathbb{R}^m.$$

Число $\alpha \in \mathbb{R}$ называют порядком псевдодифференциального оператора A.

Хорошо известно [9], что такой псевдодифференциальный оператор является линейным ограниченным оператором, действующим из пространства $H^s(\mathbb{R}^m)$ в пространство $H^{s-\alpha}(\mathbb{R}^m)$.

Если $D \subset \mathbb{R}^m$ – область, то, по определению, пространство $H^s(D)$ состоит из (обобщенных) функций из пространства $H^s(\mathbb{R}^m)$, носители которых содержатся в $\overline{D}$. Норма в пространстве $H^s(D)$ индуцируется нормой пространства $H^s(\mathbb{R}^m)$.

На плоскости рассматривается уравнение

$$(Au)(x) = 0 \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{C^a_+}, \tag{1}$$

где

$$C^a_+ = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 > a|x_1|, a > 0\},$$

решение ищется в пространстве $H^s(\mathbb{R}^2 \setminus \overline{C^a_+})$. Предполагается, что волновая факторизация (см. ниже) для символа $A(\xi)$ относительно угла C^a_+ существует и выполняется условие $1/2 < æ - s < 3/2$.

Далее мы добавляем интегральное условие

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(x_1, x_2)dx_2 \equiv g(x_1). \tag{2}$$

Показано, что задача (1),(2) однозначно разрешима при $a \to \infty$, только если функция g удовлетворяет определенному интегральному уравнению.

В трехмерном случае рассмотрено уравнение

$$(Au)(x) = 0 \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{C^{ab}_+}, \tag{3}$$

в пространстве Соболева – Слободецкого $H^s(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{(C^{ab}_+})$, где

$$C^{ab}_+ = \{x \in \mathbb{R}^3 : x = (x_1, x_2, x_3),\ x_3 > a|x_1| + b|x_2|, a, b > 0\},$$

с интегральным условием

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(x_1, x_2, x_3)dx_3 \equiv g(x_1, x_2), \tag{4}$$

в случае $æ - s = 1 + \delta, |\delta| < 1/2$. Показано, что задача (3),(4) (при наличии волновой факторизации символа относительно C^{ab}_+) однозначно разрешима при $a \to \infty$ или $b \to \infty$, только если функция g удовлетворяет определенному интегральному уравнению [13, 14, 12, 10].

2. Структура решения и условие Дирихле. Здесь мы рассмотрим задачу Дирихле для уравнения (1), которая имеет существенное отличие от задачи с интегральным условием (1),(2). Начнем с описания структуры решения уравнения (1), которая требует специального представления символа эллиптического оператора.

Символом $\overset{*}{C^a_+}$ обозначим сопряженный конус для C^a_+:

$$\overset{*}{C^a_+} = \{x \in \mathbb{R}^m : x = (x', x_m), ax_m > |x'|\},$$

$C^a_- \equiv -C^a_+$, $T(C^a_+)$ обозначает радиальную трубчатую область [5] над конусом C^a_+, т.е. область многомерного комплексного пространства $\mathbb{C}^m$ вида $\mathbb{R}^m + iC^a_+$, знак «$\sim$» используется для преобразования Фурье как над знаком функции ($\tilde{u}_+$ – это преобразование Фурье функции u_+), так и над знаком пространства ($\tilde{H}$ – это Фурье-образ пространства H).

Определение 2.1. *Волновой факторизацией эллиптического символа $A(\xi)$ относительно конуса C^a_+ называется его представление в виде*

$$A(\xi) = A_{\neq}(\xi)A_{=}(\xi),$$

где сомножители $A_{\neq}(\xi), A_{=}(\xi)$ удовлетворяют двум условиям:

1) $A_{\neq}(\xi), A_{=}(\xi)$ определены при всех $\xi \in \mathbb{R}^2$ кроме, возможно, точек вида $\{\xi \in \mathbb{R}^2 : |\xi_1|^2 = a^2\xi_2^2\}$;

2) $A_{\neq}(\xi), A_{=}(\xi)$ допускают аналитическое продолжение в радиальные трубчатые области $T(\overset{*}{C^a_+}), T(\overset{*}{C^a_-})$ соответственно и допускают оценки

$$|A^{\pm 1}_{\neq}(\xi + i\tau)| \leq c_1(1 + |\xi| + |\tau|)^{\pm æ},$$

$$|A_{=}^{\pm1}(\xi - i\tau)| \le c_2(1+|\xi|+|\tau|)^{\pm(\alpha-\text{æ})},\ \forall\tau \in \overset{*}{C}{}_{+}^{a}.$$

Число æ $\in \mathbb{R}$ называется индексом волновой факторизации.

Если символ $A(\xi)$ допускает волновую факторизацию относительно конуса C_{-}^{a} с индексом æ, таким, что $1/2 < \text{æ} - s < 3/2$, то можно убедиться, что общее решение уравнения (1) в пространстве $H^s(C_{+}^{a})$ имеет следующий вид (подробности можно найти в работах [12, 10])

$$\begin{gathered}\tilde u(\xi) = \frac{\tilde c_0(\xi_1 + a\xi_2) + \tilde c_0(\xi_1 - a\xi_2)}{2A_{\neq}(\xi_1,\xi_2)} + \\ + A_{\neq}^{-1}(\xi_1,\xi_2)\left(v.p.\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\tilde c_0(\eta)d\eta}{\xi_1 + a\xi_2 - \eta} - v.p.\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\tilde c_0(\eta)d\eta}{\xi_1 - a\xi_2 - \eta}\right),\end{gathered} \tag{5}$$

где c_0 – произвольная функция из пространства $H^{s-\text{æ}-1/2}(\mathbb{R})$, $v.p.$ обозначает главное значение интеграла по Коши [6, 7, 11]. Для однозначного определения этой функции зададим условие Дирихле на сторонах угла

$$u_{|_{ax_1-x_2=0}} = f(ax_1 + x_2), \quad u_{|_{ax_1+x_2=0}} = g(ax_1 - x_2), \tag{6}$$

где f, g – функции одной переменной, определенные для положительных значений аргумента.

Делая в формуле (5) замену переменных

$$t_1 = \xi_1 + a\xi_2, \quad t_2 = \xi_1 - a\xi_2,$$

и вводя одномерный сингулярный интегральный оператор

$$(Sv)(t) = v.p.\frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{v(\eta)d\eta}{t-\eta},$$

мы перепишем формулу (5) в следующем виде

$$\tilde U(t_1,t_2) = \frac{\tilde c_0(t_1) + \tilde c_0(t_2)}{2a_{\neq}(t_1,t_2)} +$$

$$+ a_{\neq}^{-1}(t_1,t_2)\left(v.p.\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\tilde c_0(\eta)d\eta}{t_1-\eta} - v.p.\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\tilde c_0(\eta)d\eta}{t_2-\eta}\right),$$

Определим еще два оператора (I – единичный оператор)

$$P = \frac{1}{2}(I+S), \quad O = \frac{1}{2}(I-S)$$

и запишем формулу для решения в следующей форме

$$\tilde U(t_1,t_2) = a_{\neq}^{-1}(t_1,t_2)(P\tilde c_0)(t_1) + a_{\neq}^{-1}(t_1,t_2)(Q\tilde c_0)(t_21),$$

где $a_{\neq}(t_1,t_2) = A_{\neq}\left(\frac{t_1+t_2}{2}, \frac{t_1-t_2}{2a}\right)$.

Переобозначив

$$P\tilde c_0 = \tilde C_0, \quad Q\tilde c_0 = \tilde D_0,$$

получим вид

$$\tilde U(t_1,t_2) = \frac{\tilde C_0(t_1) + \tilde D_0(t_2)}{a_{\neq}(t_1,t_2)}.$$

С учетом условий (6) и их вида в образах Фурье, проинтегрируем последнее равенство сначала по t_1, затем по t_2, получая следующую систему линейных интегральных уравнений

$$\begin{gathered}\int_{-\infty}^{\infty} K_1(t_1,t_2)\tilde C_0(t_1)dt_1 + \tilde D_0(t_2) = \tilde F(t_2), \\ \tilde C_0(t_1) + \int_{-\infty}^{\infty} K_2(t_1,t_2)\tilde D_0(t_2)dt_2 = \tilde G(t_1),\end{gathered} \tag{7}$$

Здесь использованы следующие обозначения

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} a_{\neq}^{-1}(t_1,t_2)dt_1 \equiv \tilde{a}_0(t_2), \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} a_{\neq}^{-1}(t_1,t_2)dt_2 \equiv \tilde{b}_0(t_1),$$

$$\tilde{F}(t_2) = \tilde{f}(t_2)\tilde{a}_0^{-1}(t_2), \quad \tilde{G}(t_1) = \tilde{g}(t_1)\tilde{b}_0^{-1}(t_1),$$

$$K_1(t_1,t_2) = a_{\neq}^{-1}(t_1,t_2)\tilde{a}_0^{-1}(t_2), \quad K_2(t_1,t_2) = a_{\neq}^{-1}(t_1,t_2)\tilde{b}_0^{-1}(t_1),$$

и предполагается, что выполнено условие $\inf|\tilde{a}_0(t)| \neq 0, \inf|\tilde{b}_0(t)| \neq 0$.

В монографии [15] доказана следующая

Теорема 2.1. *Пусть $s > 1/2$ и символ $A(\xi)$ допускает волновую факторизацию относительно C_-^a с индексом æ, таким, что æ $- s = 1 + \delta, |\delta| < 1/2$. Если выполнено условие*

$$\inf|\tilde{a}_0(t)| \neq 0, \inf|\tilde{b}_0(t1)| \neq 0,$$

то задача Дирихле (1),(6) *с данными $f, g \in H^{s-1/2}(\mathbb{R}_+)$ эквивалентна системе интегральных уравнений* (7) *с неизвестными функциями $\tilde{C}_0, \tilde{D}_0 \in \widetilde{H}^{s-æ-1/2}(\mathbb{R})$ и правыми частями $\tilde{F}, \tilde{G} \in \widetilde{H}^{s-æ-1/2}(\mathbb{R})$.*

3. Предельный переход и интегральное уравнение. В этом разделе мы рассмотрим систему интегральных уравнений (7) и опишем ее структуру при $a \to \infty$; это соответствует случаю, когда угол C_+^a вырождается в луч.

Начнем с функций $\tilde{a}_0, \tilde{b}_0$.Чтобы обеспечить возможность предельного перехода под знаком интеграла мы дополнительно предположим, что сомножители волновой факторизации дифференцируемы. Тогда

$$\tilde{a}_0(t_2) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} a_{\neq}^{-1}(t_1,t_2)dt_1 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} A_{\neq}^{-1}\left(\frac{t_1+t_2}{2}, \frac{t_1-t_2}{2a}\right)dt_1 \to$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} A_{\neq}^{-1}\left(\frac{t_1+t_2}{2}, 0\right)dt_1 \equiv \tilde{A}_0(t_2), \quad a \to \infty.$$

Аналогичным свойством обладает и $b_0(t_1)$

$$\tilde{b}_0(t_1) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} a_{\neq}^{-1}(t_1,t_2)dt_2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} A_{\neq}^{-1}\left(\frac{t_1+t_2}{2}, \frac{t_1-t_2}{2a}\right)dt_2 \to$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} A_{\neq}^{-1}\left(\frac{t_1+t_2}{2}, 0\right)dt_2 \equiv \tilde{B}_0(t_1), \quad a \to \infty.$$

Нетрудно заметить, что $\tilde{A}_0(t) = \tilde{B}_0(t)$. Теперь рассмотрим поведение ядер K_1, K_2 при $a \to \infty$.

$$K_1(t_1,t_2) = a_{\neq}^{-1}(t_1,t_2)\tilde{a}_0^{-1}(t_2) \to A_{\neq}^{-1}\left(\frac{t_1+t_2}{2}, 0\right)A_0^{-1}(t_2), \quad a \to \infty,$$

$$K_2(t_1,t_2) = a_{\neq}^{-1}(t_1,t_2)\tilde{b}_0^{-1}(t_1) \to A_{\neq}^{-1}\left(\frac{t_1+t_2}{2}, 0\right)B_0^{-1}(t_1), \quad a \to \infty.$$

Отсюда следует, что при $a \to \infty$ ядра K_1, K_2 стремятся к одному и тому же симметрическому ядру, которое мы обозначим $K(t_1,t_2)$. Наконец, последний предел связан с граничными функциями, именно

$$\tilde{F}(t_2) = \tilde{f}(t_2)\tilde{a}_0^{-1}(t_2) \to \tilde{f}(t_2)\tilde{A}_0^{-1}(t_2) \equiv \tilde{\Phi}(t_2), \quad a \to \infty$$

$$\tilde{G}(t_1) = \tilde{g}(t_1)\tilde{b}_0^{-1}(t_1) \to \tilde{g}(t_1)\tilde{B}_0^{-1}(t_1) \equiv \tilde{\Psi}(t_1), \quad a \to \infty.$$

С учетом проведенных выкладок заключаем, что при $a \to \infty$ система (7) примет следующий вид

$$\begin{gathered}\int\limits_{-\infty}^{\infty} K(t_1,t_2)\tilde{C}_0(t_1)dt_1 + \tilde{D}_0(t_2) = \tilde{\Phi}(t_2),\\ \tilde{C}_0(t_1) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} K(t_1,t_2)\tilde{D}_0(t_2)dt_2 = \tilde{\Psi}(t_1).\end{gathered} \tag{8}$$

Меняя местами переменные во втором уравнении и учитывая симметричность ядра, мы запишем второе уравнение в виде

$$\tilde{C}_0(t_2) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} K(t_1, t_2)\tilde{D}_0(t_1)dt_1 = \tilde{\Psi}(t_2)$$

и затем сложим его с первым. Получим одно уравнение

$$\tilde{C}_0(t_2) + \tilde{D}_0(t_2) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} K(t_1, t_2)(\tilde{C}_0(t_1) + \tilde{D}_0(t_1))dt_1 = \tilde{\Phi}(t_2) + \tilde{\Psi}(t_2)$$

относительно суммы функций $\tilde{C}_0(t_2) + \tilde{D}_0(t_2)$. Но

$$\tilde{C}_0 + \tilde{D}_0 = \tilde{c}_0,$$

поскольку

$$P + Q = I,$$

и тогда последнее уравнение можно переписать в виде

$$\tilde{c}_0(t) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} K(t, \tau)\tilde{c}_0(\tau)d\tau = \tilde{\Phi}(t) + \tilde{\Psi}(t). \tag{9}$$

4. Задача Дирихле в области с разрезом. Здесь мы рассмотрим следующую задачу Дирихле на плоскости с разрезом по лучу $\Gamma \equiv \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^{\nvDash} : x_1 = 0, x_2 > 0\}$ (Рис. 1)

$$\begin{aligned} &(Au)(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma \\ &u_{|_{x_1=0}} = \theta(x_2), \quad x_2 \in \Gamma, \end{aligned} \tag{10}$$

где функция $\theta \in H^{s-1/2}(\mathbb{R}_+)$ является следом некоторой функции $\Theta \in H^s(C_+^a)$, определенной в конусе C_+^a при достаточно больших a.

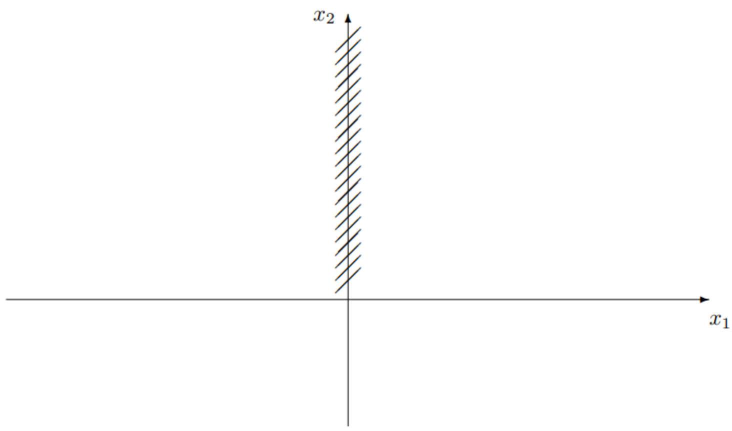

Рис. 1. Плоскость с разрезом
Fig. 1. Plane with cut

Исследуя теперь разрешимость уравнения (1) с граничным условием

$$u_{|_{ax_1-x_2=0}} = \Theta(ax_1 + x_2), \quad u_{|_{ax_1+x_2=0}} = \Theta(ax_1 - x_2), \tag{11}$$

мы приходим к выводу, что вместо уравнения (9) мы получим следующее уравнение

$$\tilde{c}_0(t) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} K(t, \tau)\tilde{c}_0(\tau))d\tau = \frac{2\tilde{\theta}(t)}{\tilde{A}(t)}, \tag{12}$$

где

$$K(t, \tau) = \frac{A_{\neq}^{-1}\left(\frac{t+\tau}{2}, 0\right)}{\tilde{A}(t)}, \quad \tilde{A}(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} A_{\neq}^{-1}\left(\frac{t+\tau}{2}, 0\right) d\tau. \tag{13}$$

Теорема 4.1. *Пусть символ $A(\xi)$ допускает волновую факторизацию относительно C_+^a с индексом æ, таким, что æ$-s = 1+\delta$, $|\delta| < 1/2$, для всех достаточно больших значений параметра a с дифференцируемыми сомножителями, $\theta(x) \in H^{s-1/2}(\Gamma)$. Тогда однозначная разрешимость задачи* (10) *эквивалентна однозначной разрешимости интегрального уравнения* (11) *в пространстве $H^{s-æ-1/2}(\mathbb{R})$ с данными* (12), $\tilde{A}(t) \neq 0$.

Если решение интегрального уравнения $\tilde{c}_0$ найдено, то фурье-образ решения задачи Дирихле (10) находится по формуле

$$\tilde{U}(t_1, t_2) = \frac{\tilde{C}_0(t_1) + \tilde{D}_0(t_2)}{A_{\neq}\left(\frac{t_1+t_2}{2}, 0\right)}$$

с использованием соотношений

$$\tilde{C}_0 = P\tilde{c}_0, \quad \tilde{D}_0 = Q\tilde{c}_0.$$

Доказательство. Действительно, сначала мы исследуем задачу Дирихле во внешности сектора (1),(11) с граничными функциями $\Theta(ax_1 + x_2)$, $\Theta(ax_1 - ax_2)$ на сторонах угла и сводим ее к системе интегральных уравнений (7) с соответствующими ядрами и правыми частями. Все детали этой редукции описаны выше.

Далее осуществляется предельный переход при $a \to \infty$ при условии дифференцируемости элементов волновой факторизации, в результате которого появляется одно уравнение (9). В правой части этого уравнения присутствует два слагаемых, что связано с различными предельными значениями решений ввиду разных граничных функций. В нашем случае граничные значения одинаковые, поскольку это след одной и той же H^s-функции, поэтому в правой части уравнения (11) появляется удвоение. ■

5. Заключение. В этой работе рассмотрен лишь двумерный случай, в котором задача Дирихле на плоскости с разрезом для эллиптического псевдодифференциального уравнения сведена к интегральному уравнению, однако вычисления, приведенные в работах [14, 12, 10], позволяют надеяться, что соответствующие интегральные уравнения с данными Дирихле или Неймана могут быть получены и в некоторых многомерных ситуациях.

Список литературы

1. Васильев В. Б. 2020. Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений в многомерном конусе. Дифференциальные уравнения, 56(10): 1356–1365.
2. Васильев В. Б. 2010. Мультипликаторы интегралов Фурье, псевдодифференциальные уравнения, волновая факторизация, краевые задачи. М., УРСС, 136.
3. Васильев В. Б. 2020. Обобщенные функции, сосредоточенные на поверхности конуса, и порожденные ими свертки. Проблемы математического анализа, 103: 63–70.
4. Васильев В. Б. Потенциалы для эллиптических краевых задач в конусах. Сибирские электронные математические известия, 13: 1129–1149.
5. Владимиров В. С. 1964. Методы теории функций многих комплексных переменных. М., Наука, 414.
6. Гахов Ф. Д. 1977. Краевые задачи. М., Наука, 640.
7. Мусхелишвили Н. И. 1968. Сингулярные интегральные уравнения. М., Наука, 512.
8. Тейлор М. 1982. Псевдодифференциальные операторы. М., Мир, 472.
9. Эскин Г. И. 1973. Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений. М., Наука, 407.
10. Kutaiba Sh., Vasilyev V. 2021. On limit behavior of a solution to boundary value problem in a plane sector. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 44(15): 11904–11912.
11. Mikhlin S. G., Prößdorf S. 1986. Singular Integral Operators. Berlin, Akademie-Verlag, 125.
12. Vasilyev V. B. 2020. On certain 3-dimensional limit boundary value problems. Lobachevskii Journal Mathematics, 41(5): 917–925.
13. Vasilyev V. B. 2018. Pseudodifferential equations, wave factorization, and related problems. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 41(18): 9252–9263.
14. Vasilyev V. B. 2019. Pseudo-differential equations and conical potentials: 2-dimensional case. Opuscula Mathematica, 39(1): 109–124.
15. Vasilyev V. B. 2000. Wave Factorization of Elliptic Symbols: Theory and Applications. Introduction to the Theory of Boundary Value Problems in Non-Smooth Domains. Dordrecht–Boston–London: Kluwer Academic Publishers, 267.

References

1. Vasiliev V. B. 2020. Boundary value problems for elliptic pseudodifferential equations in a multidimensional cone. Differential Equations, 56(10): 1356–1365. (in Russian)
2. Vasiliev V. B. 2010. Multipliers of Fourier integrals, pseudodifferential equations, wave factorization, boundary value problems. M., URSS, 136. (in Russian)

3. Vasiliev V. B. 2020. Generalized functions concentrated on the surface of a cone and convolutions generated by them. Problems of Mathematical Analysis, 103: 63–70. (in Russian)
4. Vasiliev VB Potentials for elliptic boundary value problems in cones. Siberian Electronic Mathematical News, 13: 1129–1149. (in Russian)
5. Vladimirov V. S. 1964. Methods of the theory of functions of several complex variables. M., Nauka, 414. (in Russian)
6. Gakhov F. D. 1977. Boundary value problems. M., Nauka, 640. (in Russian)
7. Muskhelishvili N. I. 1968. Singular integral equations. M., Nauka, 512. (in Russian)
8. Taylor M. 1982. Pseudodifferential operators. M., Mir, 472. (in Russian)
9. Eskin G. I. 1973. Boundary value problems for elliptic pseudodifferential equations. M., Nauka, 407. (in Russian)
10. Kutaiba Sh., Vasilyev V. 2021. On limit behavior of a solution to boundary value problem in a plane sector. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 44(15): 11904–11912.
11. Mikhlin S. G., Prößdorf S. 1986. Singular Integral Operators. Berlin, Akademie-Verlag, 125.
12. Vasilyev V. B. 2020. On certain 3-dimensional limit boundary value problems. Lobachevskii Journal Mathematics, 41(5): 917–925.
13. Vasilyev V. B. 2018. Pseudodifferential equations, wave factorization, and related problems. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 41(18): 9252–9263.
14. Vasilyev V. B. 2019. Pseudo-differential equations and conical potentials: 2-dimensional case. Opuscula Mathematica, 39(1): 109–124.
15. Vasilyev V. B. 2000. Wave Factorization of Elliptic Symbols: Theory and Applications. Introduction to the Theory of Boundary Value Problems in Non-Smooth Domains. Dordrecht–Boston–London: Kluwer Academic Publishers, 267.

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.
Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 29.06.2023
Поступила после рецензирования 10.08.2023
Принята к публикации 14.08.2023

Received June 29, 2023
Revised August 10, 2023
Accepted August 14, 2023

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Агаркова Наталия Николаевна – аспирантка кафедры прикладной математики и компьютерного моделирования, Белгородский государственный национальный исследовательский университет, г. Белгород, Россия

Васильев Владимир Борисович – доктор физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой прикладной математики и компьютерного моделирования, Белгородский государственный национальный исследовательский университет, г. Белгород, Россия

Гебресласи Хадиш – аспирант кафедры прикладной математики и компьютерного моделирования, Белгородский государственный национальный исследовательский университет, г. Белгород, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Nataliya N. Agarkova – Post Graduate Student, Department of Applied Mathematics and Computer Modeling, Belgorod National Research University, Belgorod, Russia

Vladimir B. Vasilyev – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Chair, Department of Applied Mathematics and Computer Modeling, Belgorod National Research University, Belgorod, Russia

Hadish F. Gebreslasie – Post Graduate Student, Department of Applied Mathematics and Computer Modeling, Belgorod National Research University, Belgorod, Russia

Прикладная математика & Физика, 2023, том 55, № 3. С. 265–272.
Applied Mathematics & Physics, 2023, Volume 55, No 3. P. 265–272.

УДК 517.956.35
MSC 35L77
Оригинальное исследование

DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-3-265-272

Периодические решения квазилинейного уравнения Эйлера – Бернулли колебаний балки с упруго закрепленным концом

Рудаков И. А.
(*Статья представлена членом редакционной коллегии В. Б. Васильевым*)
Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана; Московский авиационный институт,
Россия, 105005, Москва, ул. 2-я Бауманская, 5, стр. 1; Россия, 125993, Москва, Волоколамское шоссе, 4
rudakov_ia@mail.ru

Аннотация. Рассмотрена задача о периодических по времени решениях квазилинейного уравнения Эйлера – Бернулли колебаний балки, испытывающей растяжение вдоль горизонтальной оси. Граничные условия соответствуют случаям упруго закрепленного, жестко заделанного и шарнирно закрепленных концов. Нелинейное слагаемое удовлетворяет условию нерезонансности на бесконечности. С использованием принцип Шаудера доказывается теорема о существовании и единственности периодического решения.

Ключевые слова: квазилинейное уравнение Эйлера – Бернулли, колебание балки, нерезонансность, принцип Шаудера

Для цитирования: Рудаков И. А. 2023. Периодические решения квазилинейного уравнения Эйлера – Бернулли колебаний балки с упруго закрепленным концом. *Прикладная математика & Физика*, 55(3): 265–272.
DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-3-265-272

Original Research

Periodic Solutions of the Euler – Bernoulli Quasilinear Equation Vibrations of a Beam with an Elastically Fixed End

Igor A. Rudakov

(*Article submitted by a member of the editorial board V. B. Vasiliev)*

Moscow State Technical University. H. E. Bauman; Moscow Aviation Institute,
5, building 1, 2-ya Baumanskaya st., Moscow, 105005, Russia; 4 Volokolamsk highway, Moscow, 125993, Russia
rudakov_ia@mail.ru

Abstract. The problem of time-periodic solutions of the quasilinear Euler-Bernoulli equation of vibrations of a beam under tension along the horizontal axis is considered. The boundary conditions correspond to the cases of elastically fixed, rigidly fixed and hinged ends. The nonlinear term satisfies the nonresonance condition at infinity. Using the Schauder principle, we prove a theorem on the existence and uniqueness of a periodic solution.

Keywords: Quasilinear Euler-Bernoulli Equation, Beam Oscillation, Non-Resonance, Schauder Principle

For citation: Rudakov I. A. 2023. Periodic Solutions of the Euler – Bernoulli Quasilinear Equation Vibrations of a Beam with an Elastically Fixed End. *Applied Mathematics & Physics*, 55(3): 265–272. (in Russian)
DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-3-265-272

---

1. Введение. В работе рассмотрена задача о периодических решениях следующего квазилинейного уравнения

$$u_{tt} + u_{xxxx} - au_{xx} = g(x,t,u) + f(x,t), \quad 0 < x < \pi, \quad t \in \mathbf{R}; \tag{1}$$

$$u(x,t+T) = u(x,t); \quad 0 < x < \pi, \quad t \in \mathbf{R}. \tag{2}$$

Предполагается выполнение одного из следующих граничных условий:

$$u(0,t) = u_x(0,t) = u(\pi,t) = u_{xx}(\pi,t) + hu_x(\pi,t) = 0, \quad t \in \mathbf{R}. \tag{3}$$

$$u(0,t) = u_{xx}(0,t) = u(\pi,t) = u_{xx}(\pi,t) + hu_x(\pi,t) = 0, \quad t \in \mathbf{R}. \tag{4}$$

Константы a, h и период времени T удовлетворяют следующим условиям

$$a > 0, h > 0, \ T = 2\pi\frac{b}{c}, b, c \in \mathbf{N}, (b,c) = 1; \tag{5}$$

Уравнение Эйлера – Бернулли (1) является математической моделью, описывающей колебания двутавровых балок [1, с. 440], балок, на которые действует сила растяжения вдоль горизонтальной оси, а также проводов. В случае $a = 0$, то есть при отсутствии растяжения или сжатия вдоль горизонтальной оси, задача о периодических решениях для уравнения Эйлера – Бернулли рассмотрена в достаточно большом количестве работ (например, [9]-[3]). В [13]-[5] исследовалась задача о периодических решениях уравнения (1) при $a > 0$, (при наличии растяжения вдоль горизонтальной оси) для различных граничных условий. Случай шарнирно опертых концов изучался в работах [13, 4]. В статье [12] рассмотрен случай жестко заделанных концов. В случае граничных условий (4) (соответствующие шарнирно опертому левому концу и упруго закрепленному правому) в работе [5] доказано существование счетного числа периодических решений, если нелинейное слагаемое имеет степенной рост и $f \equiv 0$.

Целью данной работы является доказательство теоремы о существовании и единственности периодического решения при выполнении одного из граничных условий (3), (4), соответствующих жестко заделанному, шарнирно закрепленному и упруго закрепленному концам.

Будем говорить, что выполнено условие (A), если при рассмотрении граничных условий (3) выполнено неравенство

$$b\left(a + \frac{1}{8} + \frac{2h}{\pi}\right) \notin \mathbf{N}, \tag{6}$$

а при выполнении граничных условий (4) выполнено неравенство

$$b\left(\frac{1}{2}a + \frac{h}{\pi}\right) \notin \mathbf{N}. \tag{7}$$

2. Асимптотика собственных значений задачи Штурма – Лиувилля. С краевыми задачами (1),(2),(3); (1),(2),(4) связаны следующие задачи на собственные функции и собственные значения:

$$X'''' - aX'' = \lambda X, \quad 0 < x < \pi; \tag{8}$$

$$X(0) = X'(0) = 0, \ X(\pi) = X''(\pi) + hX'(\pi) = 0; \tag{9}$$

$$X(0) = X''(0) = 0, \ X(\pi) = X''(\pi) + hX'(\pi) = 0. \tag{10}$$

Исследуем задачу (8),(9). Стандартно [12] доказывается, что собственные значения λ задачи (8),(9) являются положительными. В случае, когда $\lambda > 0$, корнями характеристического многочлена уравнения (8) являются числа $\pm pi, \pm q$, где

$$p = \sqrt{\sqrt{a^2/4 + \lambda} - a/2}, \ q = \sqrt{\sqrt{a^2/4 + \lambda} + a/2}. \tag{11}$$

Общее решение уравнения (8) можно представить в следующем виде

$$X = C_1 \cos(px) + C_2 \sin(px) + C_3 \operatorname{ch}(qx) + C_4 \operatorname{sh}(qx). \tag{12}$$

Подставив (12) в граничные условия (9), получим однородную систему линейных уравнений относительно C_1, C_2, C_3, C_4. Стандартно, приравняв определитель этой системы к нулю, получим уравнение для собственных значений задачи (8),(9):

$$(p^2 + q^2)\operatorname{ch}(q\pi)\cdot\sin(p\pi) + h\cdot\frac{p}{q}\operatorname{sh}(q\pi)\cdot\sin(p\pi) + 2ph-$$

$$-2ph\operatorname{ch}(q\pi)\cdot\cos(p\pi) - \frac{p}{q}(p^2 + q^2)\operatorname{sh}(q\pi)\cdot\cos(p\pi) = 0. \tag{13}$$

При исследовании данного уравнения применим теорему о нулях функции, имеющей данное асимптотическое представление [2, с. 217]. Для этого перепишем уравнение (13) следующим образом:

$$F(p) \equiv \sin\left(p\pi - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{p}\frac{h}{\sqrt{2}}\cos(p\pi) + \frac{ph}{\sqrt{2}\,q(p^2 + q^2)}\operatorname{th}(p\pi)\cdot\sin(p\pi) +$$

$$+\sqrt{2}\cos(p\pi)\frac{p}{2q}\left(\frac{q}{p} - \operatorname{th}(q\pi)\right) + \frac{\sqrt{2}ah\cos(p\pi)}{2p(p^2 + q^2)} = 0.$$

Если обозначить $F_0(p) = \sin\left(p\pi - \frac{\pi}{4}\right), \ F_1(p) = -\frac{h}{\sqrt{2}}\cos(p\pi)$, то данное уравнение примет следующий вид:

$$F_0(p) + \frac{1}{p}F_1(p) + O\left(\frac{1}{p^2}\right) = 0. \tag{14}$$

Легко видеть, что функции $F_1(p), F_1'(p), F_0''(p), F''(p)$ являются ограниченными, а также что имеет место неравенство $|F_0(p)| + |F_0'(p)| \geq \pi$.

Таким образом, условия теоремы о нулях функции [2, с. 217] выполнены. Из этой теоремы вытекает существование натурального числа n_1, такого, что при $n \geq n_1$ все корни p_n уравнения (14) находятся по одному на промежутках $(n+1/4, n+1)$. Кроме того, из формулы (78) [2, с. 218] выведем следующее асимптотическое представление

$$p_n = n + \frac{1}{4} - \frac{-h\cos(\pi(n+1/4))}{\sqrt{2}(n+1/4)\cos(\pi n)} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = n + \frac{1}{4} + \frac{h}{2\pi}\cdot\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Из (11) следует, что этим значениям p_n соответствуют следующие собственные значения задачи (8),(9):

$$\lambda_n' = \left(n + \frac{1}{4} + \frac{h}{2\pi}\cdot\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^4 + a\left(n + \frac{1}{4} + \frac{h}{2\pi}\cdot\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^2.$$

Пусть на промежутке $(0, n_1]$ задача (8), (9) имеет $n_2 \in \mathbf{Z}_+ \equiv \mathbf{N} \cup \{0\}$ собственных значений (на каждом конечном промежутке задача (8), (9) имеет конечное число собственных значений [11, с. 78]). Обозначим $\{\lambda_{1,n}\}_{n\in\mathbf{N}}$ множество собственных значений задачи (8)-(9), перенумерованное в порядке возрастания. Тогда при $n \geq n_2 + 1$ имеет место формула

$$\lambda_{1,n} = \left(n + \frac{1}{4} + m_0 + \frac{h}{2\pi}\cdot\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^4 + a\left(n + \frac{1}{4} + m_0 + \frac{h}{2\pi}\cdot\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^2.$$

Здесь $m_0 = n_1 - n_2 - 1$. Вычислим предел:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[4]{\lambda_{1,n}} - n - m_0 - \frac{1}{4}\right)n = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{\lambda_{1,n}} - \left(n + m_0 + \frac{1}{4}\right)^2\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{\lambda_{1,n} - (n+m_0+1/4)^4}{n^2}\cdot\frac{n^2}{\sqrt{\lambda_{1,n}} + (n+m_0+1/4)^2} =$$

$$= \frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\frac{\lambda_{1,n} - (n+m_0+1/4)^4}{n^2} = \frac{1}{4}a + \lim_{n\to\infty}\frac{(n+m_0+1/4)^3\left(\frac{h}{2\pi}\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)}{n^2}$$

$$= \frac{1}{4}a + \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{h}{2\pi n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \frac{1}{4}a + \frac{h}{2\pi}.$$

Данное соотношение позволяет получить более удобное для дальнейших вычислений выражение собственных значений:

$$\lambda_{1,n} = \left(n + m_0 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}a + \frac{h}{2\pi}\right)\cdot\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^4. \tag{15}$$

Заметим, что из общей формулы (7.2) (для дифференциального оператора четного порядка с переменными коэффициентами) работы [11] вытекает следующее представление для собственных значений задачи (8),(9):

$$\lambda_{1,n} = \left(n + m_0 + \frac{1}{4} + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)^4.$$

Таким образом, в (15) получен первый член асимптотики для слагаемого $O\left(\frac{1}{n}\right)$.

Каждому собственному значению λ_n соответствует единственная с точностью до постоянного множителя собственная функция

$$X_{1,n}(x) = A_n\left(\frac{p_{\overline{n}}}{q_{\overline{n}}}(\mathrm{sh}(q_{\overline{n}}(x-\pi))) + \mathrm{sh}(q_{\overline{n}}\pi)\cos(p_{\overline{n}}x) - \mathrm{sh}(q_{\overline{n}}x)\cos(p_{\overline{n}}\pi) + \sin(p_{\overline{n}}(x-\pi))\right) +$$

$$+ \mathrm{ch}(q_{\overline{n}}x)\sin(p_{\overline{n}}\pi) - \mathrm{ch}(q_{\overline{n}}\pi)\sin(p_{\overline{n}}x). \tag{16}$$

Здесь $\overline{n} = n + m_0$. Множители A_n удовлетворяют условию нормировки:

$$\int_0^\pi X_{1,n}^2 dx = 1.$$

Семейство функций $\{X_{1,n}\}$ образует полную и ортонормированную в гильбертовом пространстве $L_2[0,\pi]$ систему функций.

Для множества $\{\lambda_{2,n}\}_{n\in\mathbf{N}}$ собственных значений задачи (8),(10) в [5] получена следующая асимптотическая формула

$$\lambda_{2,n} = \left(n + m_1 + \left(\frac{1}{4}a + \frac{h}{2\pi}\right)\cdot\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^4. \tag{17}$$

Здесь $m_1 \in \mathbf{Z}$. Собственные функции, соответствующие этим собственным значениям, имеют вид

$$X_{2,n} = B_n\left(\sin(\overline{p}_n x) - \sin(\overline{p}_n\pi)\frac{sh(\overline{q}_n x)}{sh(\overline{q}_n\pi)}\right). \tag{18}$$

Здесь $\overline{p}_n = \overline{n} + \tau_{\overline{n}}$, $\overline{q}_n = \sqrt{\overline{p}_n^2 + a}$, $\overline{n} = n + m_1$, $\tau_n = \frac{h}{2\pi}\cdot\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$. Если множители B_n выбрать, исходя из условия нормировки $||X_{2,n}||_{L_2(\Omega)} = 1$, то будет иметь представление

$$B_n = \left(\sqrt{\frac{\pi}{2} + O\left(\frac{1}{n}\right)}\right)^{-1}. \tag{19}$$

Из формул (16), (18), (19) вытекает существование констант D_1, D_2, таких, что

$$|X_{i,n}(x)| \le D_i,\ \ |X_{i,n}'(x)| \le D_i n,\ \ |X_{i,n}''(x)| \le D_i n^2\ \ \forall x\in[0,\pi], \forall n\in\mathbf{N}. \tag{19}$$

Здесь $i = 1, 2$.

3. Периодическое решение квазилинейного уравнения. Обозначим $\Omega = [0,\pi]\times\mathbf{R}/(T\mathbf{Z})$, $(u,v) = \int_\Omega u(x,t)v(x,t)dxdt$, если $u,v\in L_2(\Omega)$, $||u|| = ||u||_{L_2(\Omega)}$, $H_1(\Omega) = W_2^1(\Omega), H_2(\Omega) = W_2^2(\Omega)$ пространства Соболева,

$$W_1 = \{v\in C^\infty(\Omega)|\ v(0,t) = v_x(0,t) = v(\pi,t) = v_{xx}(\pi,t) + hv_x(\pi,t) = 0\ \forall t\},$$

$$W_2 = \{v\in C^\infty(\Omega)|\ v(0,t) = v_{xx}(0,t) = v(\pi,t) = v_{xx}(\pi,t) + hv_x(\pi,t) = 0\ \forall t\}.$$

Определим линейные операторы $L_i : L_2(\Omega)\longrightarrow L_2(\Omega), i = 1,2$ такие, что

$$L_i u = u_{tt} + u_{xxxx} - au_{xx}\ \ \forall u\in W_i$$

и область определения $D(L_i)$ состоит из таких функций $v\in L_2(\Omega)$, для которых существует $h\in L_2(\Omega)$, такая, что

$$\int_\Omega v(u_{tt} + u_{xxxx} - au_{xx})dxdt = \int_\Omega hudxdt$$

для любой функции $u\in W_i$ и при этом $L_i v = h$.

Операторы L_i – самосопряженные, спектр которых является дискретным и совпадает с множеством собственных значений

$$\sigma(L_i) = \{\eta_{i,nk} \equiv \lambda_{i,n} - \frac{c^2}{b^2}k^2\ \ |n\in\mathbf{N}, k\in\mathbf{Z}_+\}.$$

Множества функций

$$\left\{\sqrt{\frac{2}{T}}X_{i,n}\cos(\frac{c}{b}kt),\ \ \sqrt{\frac{2}{T}}X_{i,n}\sin(\frac{c}{b}t),\ \ \frac{1}{\sqrt{T}}X_{i,n}:\ \ n,k\in\mathbf{N}\right\} \tag{20}$$

составляют полные, ортонормированные в $L_2(\Omega)$ системы собственных функций операторов L_i, $i = 1, 2$.

Будем предполагать, что нелинейное слагаемое $g(x,t,u)$ непрерывно по всем переменным и удовлетворяет следующему условию.

Для каждых из задач (1),(2),(3); (1),(2),(4) соответственно существуют константы $\alpha_i, \beta_i (i = 1, 2), u_0 > 0$, такие, что $\alpha_i < \beta_i$ и

$$\frac{g(x,t,u)}{u}\in[\alpha_i,\beta_i]\ \ \text{при } |u|\ge u_0, \forall(x,t)\in\Omega. \tag{21}$$

Определение. Обобщенным решением задач (1), (2), (3); (1), (2), (4) соответственно называется функция $u\in H_1(\Omega)$, такая, что

$$\int_\Omega u(v_{tt} + v_{xxxx} - av_{xx})dxdt = \int_\Omega (g(x,t,u) + f(x,t))vdxdt\ \ \forall v\in W_i, i = 1,2.$$

Теорема. *Предположим $g\in C^1(\Omega\times\mathbf{R})$, выполнены условия (5), (A), (21) и*

$$[\alpha_i,\beta_i]\cap\sigma(L_i) = \emptyset,\ \ i = 1,2. \tag{22}$$

Тогда для любой функции $f \in H_1(\Omega)$ *задачи (1), (2), (3); (1), (2), (4) имеют обобщенное решение*

$$u_i \in H_2(\Omega) \cap C^1(\Omega) \tag{23),}$$

такое, что $(u_i)_{xx} \in C(\Omega)$. *Если дополнительно выполнено условие*

$$g'_u(x,t,u) \in [\alpha_i, \beta_i] \ \forall u, \ \forall (x,t) \in \Omega, \tag{24}$$

то это решение единственное.
Доказательство теоремы разобьем на следующие шаги:
1) Исследование операторов L_i и их резольвенты;
2) Доказательство существования обобщенного решения;
3) Обоснование гладкости решения;
4) Доказательство утверждения о единственности.

Шаг 1). Покажем, что оператор L_1 имеет конечномерное ядро (Конечномерность ядра оператора L_2 при выполнении условия (7) доказана в работе [5]). Для этого достаточно доказать, что равенство

$$\eta_{1,nk} = 0 \tag{25}$$

может выполняться не более, чем для конечного числа пар $(n,k) \in \mathbf{N} \times \mathbf{Z}_+$.

Из равенства (15) следует, что

$$\eta_{1,nk} = \frac{1}{b^2} F_{nk} \left(b \left(n + m_0 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}a + \frac{h}{2\pi} \right) \cdot \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right)^2 + ck \right),$$

где $F_{nk} = b\left(n + m_0 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}a + \frac{h}{2\pi}\right) \cdot \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^2 - ck$. Поскольку

$$F_{nk} = \frac{1}{2} \left(b(n+m_0)(2n+2m_0+1) - 2ck + b\left(\frac{1}{8} + a + \frac{2h}{\pi}\right) + o(1) \right),$$

то из условия (6) вытекает существование натурального числа n_3, такого, что при $n \geq n_3$ выполняется неравенство

$$|F_{nk}| \geq \gamma_0 > 0. \tag{26}$$

Здесь $\gamma_0 = \frac{1}{4}\min_{m\in \mathrm{Z}} |b\left(\frac{1}{8} + a + \frac{2h}{\pi}\right) - m|$. Следовательно, при $n \geq n_3$ равенство (25) не выполняется. Поэтому $\dim\ker L_1 < \infty$.

Из (26) вытекает существование положительной константы γ_1, такой, что

$$\eta_{1,nk} \geq \gamma_1(n^2+k) \ \text{при} \ \eta_{1,nk} \neq 0. \tag{27}$$

Из неравенства (30) работы (9) также вытекает существование константы $\gamma_2 > 0$, такой, что

$$\eta_{2,nk} \geq \gamma_2(n^2+k) \ \text{при} \ \eta_{2,nk} \neq 0. \tag{28}$$

Докажем, что при $\mu \notin \sigma(L_i)$ операторы $(L_i - \mu I)^{-1} : L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$ являются вполне непрерывными. Для этого достаточно проверить сходимость следующего ряда

$$I_i = \sum_{n=n_i}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(\eta_{i,nk} - \mu)^2}.$$

Из неравенств (27), (28) вытекает существование положительной константы C_1, такой, что $\left(1 - \frac{\mu}{\eta_{1,nk}}\right)^2 \geq C_1 > 0$ при $n \geq n_1$. Отсюда следует неравенство

$$I_i \leq \frac{1}{C_1} \sum_{n=n_i}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\eta_{i,nk}^2}.$$

Сходимость ряда $\sum_{n=n_i}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\eta_{i,nk}^2}$ при $i = 2$ доказана в [5]. При $i = 1$ доказательство аналогично. Таким образом ряд I_i сходится и операторы $(L_i - \mu I)^{-1} : L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$ вполне непрерывны.

Шаг 2) Рассмотрим операторные уравнения

$$L_i u = g(x,t,u) + f, \quad u \in D(L_i), i = 1, 2. \tag{29}$$

Решения уравнения (29), принадлежащие $H_1(\Omega)$, являются обобщенными решениями задач (1),(2),(3); (1), (2), (4) соответственно. Если обозначить $F_i(u) = (L_i - \alpha_i I)^{-1}(g(x,t,u) - \alpha_i u + f(x,t))$, то (29) будет эквивалентно следующим уравнениям

$$u = F_i(u). \tag{30}$$

Таким образом, доказательство существования решений уравнений (29) сведено к доказательству существования неподвижной точки у операторов F_i. Из доказанного выше в шаге 1) следует, что операторы $F_i : L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$ являются вполне непрерывными. Чтобы показать существование неподвижных точек у операторов F_i, воспользуемся следствием из теоремы Шаудера о неподвижной точке [6, с. 416]. Для этого докажем, что найдутся $R_i > 0, i = 1,2$ такие, что

$$F_i(u) \neq \lambda u \ \forall \lambda > 1 \ \forall u \in S_{R_i} \equiv \{u \in L_2(\Omega) |\ ||u|| = R_i\}. \tag{31}$$

Предположим противное, то есть для произвольного числа $R > 0$ найдутся числа $\lambda_i > 1, i = 1,2$ и $u_i \in S_R$, такие, что

$$F_i(u_i) = \lambda_i u_i. \tag{32}$$

Обозначим $v_i = (L_i - \alpha_i I)^{-1} f$. Из условия (22) вытекает существование чисел $\mu_{i,1}, \mu_{i,2} \in \sigma(L_i)(i = 1,2)$, таких, что

$$[\alpha_i, \beta_i] \subset [\mu_{i,1}, \mu_{i,2}];\ (\mu_{i,1}, \mu_{i,2}) \cap \sigma(L_i) = \emptyset. \tag{33}$$

Из равенства (32) вытекает следующее соотношение:

$$g(x,t,u_i) - \alpha_i u_i = \lambda_i (L_i - \alpha_i I)(u_i - \frac{1}{\lambda_i} v). \tag{34}$$

Умножив равенство (34) на $(u_i - \frac{1}{\lambda_i} v_i)$ скалярно в $L_2(\Omega)$, из (21),(22), (33) выведем

$$(g(x,t,u_i) - \alpha_i u_i)(u_i - \frac{1}{\lambda_i} v_i) = -\lambda_i (L_i - \alpha_i I)(u_i - \frac{1}{\lambda_i} v_i) \leq$$

$$\leq \frac{\lambda_i}{\mu_{i,2} - \alpha_i} ||(\alpha_i I - L_i)(u_i - \frac{1}{\lambda_i} v_i)||^2 = \frac{1}{\lambda_i} \cdot \frac{1}{\mu_{i,2} - \alpha_i} ||g(x,t,u_i) - \alpha_i u_i||^2. \tag{35}$$

Из условия (21) вытекает существование положительных констант $C_{i,1}, C_{i,2}, i = 1,2$, таких, что

$$|g(x,t,u) - \alpha_i u| \leq (\beta_i - \alpha_i)|u| + C_{i,1},\ (g(x,t,u) - \alpha_i u)u \geq -C_{i,2}\ \ \forall (x,t,u) \in \Omega \times \mathbf{R}.$$

Отсюда и (35) следует

$$\frac{1}{\lambda_i} \cdot \frac{1}{\mu_{i,2} - \alpha_i} ||g(x,t,u_i) - \alpha_i u_i||^2 \geq (g(x,t,u_i) - \alpha_i u_i, u_i) - \frac{1}{\lambda_i}(g(x,t,u_i) - \alpha_i u_i, v_i) \geq$$

$$\geq \int_\Omega |g(x,t,u_i) - \alpha_i u_i| \cdot |u_i| dxdt - ||g(x,t,u_i) - \alpha_i u_i|| \cdot ||v_i|| - 2|\Omega| C_{i,2} \geq$$

$$\geq \frac{1}{\beta_i - \alpha_i} \int_\Omega (g(x,t,u_i) - \alpha_i u_i)^2 dxdt - \frac{1}{\beta_i - \alpha_i} C_{i,1} \int_\Omega |g(x,t,u_i) - \alpha_i u_i| dxdt -$$

$$-||g(x,t,u_i) - \alpha_i u_i|| \cdot ||v_i|| - 2|\Omega| C_2 \geq \frac{1}{\beta_i - \alpha_i} ||g(x,t,u_i) - \alpha_i u_i||^2 - C_3 ||g(x,t,u_i) - \alpha_i u_i|| - C_4.$$

Здесь и далее $C_3, C_4, C_5, \ldots$ есть положительные константы. Из данного неравенства выведем

$$\left(\frac{1}{\beta_i - \alpha_i} - \frac{1}{\mu_{i,2} - \alpha_i}\right) ||g(x,t,u_i) - \alpha_i u_i||^2 - C_3 ||g(x,t,u_i) - \alpha_i u_i|| - C_4 \leq 0.$$

Отсюда и из (33) вытекает существование константы C_5, такой, что $||g(x,t,u_i) - \alpha_i u_i|| \leq C_5$. Тогда из равенства (34) получим оценки $||(L_i - \alpha_i I)(u_i - \frac{1}{\lambda_i} v_i)|| \leq C_5,\ \ ||u_i|| \leq C_6$. Следовательно, если $R > C_6$, уравнение (32) решений не имеет, что противоречит предположению. Условия теоремы Шаудера выполнены. Из нее вытекает существование решений $u_i, i = 1,2$ операторных уравнений (29).

Шаг 3) Представим решения u_i в виде суммы $u_i = u_{i,1} + u_{i,2}$, где $u_{i,1} \in R(L_i), u_{i,2} \in \ker L_i$. Обозначим $w_i = g(x,t,u_i) + f \in R(L_i)$. Из уравнений (29) выразим

$$u_{i,1} = L_i^{-1} w_i. \tag{36}$$

Если разложить функции $w_i,\ i = 1,2$ в ряд Фурье по системе (20)

$$w_i = \sum_{\eta_{i,nk} \neq 0} X_{i,n}(x)(a_{i,nk} \cos(\frac{c}{b} kt) + b_{i,nk} \sin(\frac{c}{b} kt)),$$

то для $u_{i,1}$ будем иметь следующее представление в виде ряда Фурье:

$$u_{i,1} = \sum_{\eta_{i,nk}\neq 0} \frac{1}{\eta_{i,nk}} X_{i,n}(x)(a_{i,nk}\cos(\frac{c}{b}kt) + b_{i,nk}\sin(\frac{c}{b}kt)). \tag{37}$$

Из ограниченности последовательности $\{\frac{k}{\eta_{i,nk}}\}$ следует включение $(u_{i,1})_t \in L_2(\Omega)$. Используя неравенства (19), (27) методом из леммы 1.2 работы [4] доказывается сходимость ряда

$$\sum_{\eta_{i,nk}\neq 0} \frac{n}{|\eta_{i,nk}|}(|a_{i,nk}| + |b_{i,nk}|.$$

Отсюда будем иметь $(u_{i,1})_x \in C(\Omega)$. $u_{i,1} \in H_1(\Omega)$. Поскольку $\dim\ker L_i < \infty$, то $u_i \in H_1(\Omega)$. Тогда из условия теоремы получим включение $w_i \in H^1(\Omega)$, из которого вытекает сходимость ряда

$$\sum_{\eta_{i,nk}\neq 0} k^2(a_{i,nk}^2 + b_{i,nk}^2). \tag{38}$$

Из сходимости ряда (38) и ограниченности последовательности $\{\frac{k}{\eta_{i,nk}}\}$ следуют включения $(u_{i,1})_{tt} \in L_2(\Omega)$, $(u_{i,1})_{tx} = (L_i^{-1}(w_i)_t)_x \in C(\Omega)$.

Из оценок (27) и из сходимости ряда I_1 в работе [4, с. 695] вытекает сходимость ряда

$$\sum_{\eta_{i,nk}\neq 0} \frac{n^2}{|\eta_{i,nk}|}(a_{i,nk}^2 + b_{i,nk}^2).$$

Отсюда, (19) и из конечномерности ядра операторов L_i, получим включения $(u_{i,1})_{xx} \in C(\Omega)$, $u_{xx} \in C(\Omega)$, $u \in H^2(\Omega)$.

Шаг 4) Пусть функция g удовлетворяет условию (24). Предположим, задачи (1),(2),(3); (1),(2),(4) имеют решения u_i, h_i. Если вычесть соответствующие равенства, то получим соотношение

$$(\alpha_i I - L_i)(u_i - h_i) + p(x,t,u_i) - p(x,t,h_i) = 0.$$

Здесь $p_i(x,t,u) = g(x,t,u) - \alpha_i u$. Из условия (24) следует неравенство

$$(p(x,t,u) - p(x,t,v))(u - v) \geq \frac{1}{\beta_i - \alpha_i}(p(x,t,u) - p(x,t,v))^2. \tag{39}$$

Умножив (39) скалярно в $L_2(\Omega)$ на $u_i - h_i$, получим следующие оценки:

$$0 = ((\alpha_i I - L_i)(u_i - h_i), u_i - h_i) + (p(x,t,u_i) - p(x,t,h_i), u_i - h_i) \geq$$

$$\geq -\frac{1}{\mu_{i,2} - \alpha_i}||(\alpha_i I - L_i)(u_i - h_i)||^2 + \frac{1}{\beta_i - \alpha_i}||p(x,t,u_i) - p(x,t,h_i)||^2 =$$

$$= \left(\frac{1}{\beta_i - \alpha_i} - \frac{1}{\mu_{i,2} - \alpha_i}\right)||(\alpha_i I - L_i)(u_i - h_i)||^2.$$

Поэтому $(\alpha_i I - L_i)(u_i - h_i) = 0$. Поскольку $\alpha_i \notin \sigma(L_i)$, то отсюда следует $u_i - h_i = 0$. Теорема доказана.

4. Заключение. Рассмотрено квазилинейное уравнение Эйлера-Бернулли колебаний балки и проводов, подверженных растяжению вдоль горизонтальной оси. Граничные условия соответствуют случаям упруго закрепленного, жестко заделанного и шарнирно опертого концов. Выведена асимптотическая формула для собственных значений соответствующей задачи Штурма – Лиувилля для случая жестко заделанного и упруго закрепленного концов. Доказана теорема о существовании и единственности периодического решения при произвольной периодической правой части, если нелинейное слагаемое удовлетворяет условию отсутствия резонанса на бесконечности.

Список литературы

1. Коллатц Л. 1968. Задачи на собственные значения. М., Наука, 504.
2. Наймарк М. А. 2010. Линейные дифференциальные операторы. М., Наука, 527.
3. Рудаков И. А. 2015. Периодические решения квазилинейного уравнения вынужденных колебаний балки. Известия РАН. Серия математическая, 79(5): 215-238. Doi: 10.4213/im8250.
4. Рудаков И. А. 2018. О периодических решениях одного уравнения колебаний балки. Дифференциальные уравнения, 54: 691–700. DOI: 10.1134/S0374064118050126.

5. Рудаков И. А. 2022. О существовании счётного числа периодических решений краевой задачи для уравнения колебаний балки с однородными граничными условиями. Дифференциальные уравнения, 58: 1062–1072. DOI: 10.31857/S0374064122080064, EDN: CFUKPN.
6. Треногин В. А. 1980. Функциональный анализ. М., Наука, 495.
7. Трикоми Ф. 1962. Дифференциальные уравнения. М., Издательство иностранной литературы, 350.
8. Chen B., Gao Y., Li Y. 2018. Periodic solutions to nonlinear Euler – Bernoulli beam equations. Dynamical systems, 1: 23–49.
9. Elishakoff I., Pentaras D. 2006. Apparently the first closed-form solution of inhomogeneous elastically restrained vibrating beams. J. Sound Vibration, 298: 439–445.
10. Eliasson L. H., Grebert B., Kuksin S. B. 2016. KAM for the nonlinear beam equation. Geometric and Functional Analysis, 26(6): 1588–1715.
11. Nazarov A. I., Nikitin Y. Y. 2004. Exact L2-small ball behavior of integrated Gaussian processes and spectral asymptotics of boundary value problems. Probability Theory and Related Fields, 129(4): 469–494.
12. Rudakov I. A., Ji S. 2023. Infinitely many periodic solutions for the quasi-linear Euler -– Bernoulli beam equation with fixed ends. Calculus of Variations and Partial Differential Equations, 62:66. DOI: 10.1007/s00526-022-02404-3.
13. Yamaguchi M. 1995. Existence of periodic solutions of second order nonlinear evolution equations and applications. Funkcialaj Ekvacioj, 38: 519–538.

References

1. Collatz L. 1968. Eigenvalue problems. M., Nauka, 504. (in Russian)
2. Naimark M. A. 2010. Linear differential operators. M., Nauka, 527. (in Russian)
3. Rudakov I. A. 2015. Periodic solutions of the quasilinear equation of forced vibrations of a beam. Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Mathematical Series, 79(5): 215-238. Doi: 10.4213/im8250. (in Russian)
4. Rudakov I. A. 2018. On periodic solutions of one equation of beam vibrations. Differential Equations, 54: 691–700. DOI: 10.1134/S0374064118050126. (in Russian)
5. Rudakov I. A. 2022. On the existence of a countable number of periodic solutions to a boundary value problem for the beam vibration equation with homogeneous boundary conditions. Differential Equations, 58: 1062–1072. DOI: 10.31857/S0374064122080064, EDN: CFUKPN. (in Russian)
6. Trenogin V. A. 1980. Functional analysis. M., Nauka, 495. (in Russian)
7. Tricomi F. 1962. Differential Equations. M., Publishing house of foreign literature, 350. (in Russian)
8. Chen B., Gao Y., Li Y. 2018. Periodic solutions to nonlinear Euler – Bernoulli beam equations. Dynamical systems, 1: 23–49.
9. Elishakoff I., Pentaras D. 2006. Apparently the first closed-form solution of inhomogeneous elastically restrained vibrating beams. J. Sound Vibration, 298: 439–445.
10. Eliasson L. H., Grebert B., Kuksin S. B. 2016. KAM for the nonlinear beam equation. Geometric and Functional Analysis, 26(6): 1588–1715.
11. Nazarov A. I., Nikitin Y. Y. 2004. Exact L2-small ball behavior of integrated Gaussian processes and spectral asymptotics of boundary value problems. Probability Theory and Related Fields, 129(4): 469–494.
12. Rudakov I. A., Ji S. 2023. Infinitely many periodic solutions for the quasi-linear Euler -– Bernoulli beam equation with fixed ends. Calculus of Variations and Partial Differential Equations, 62:66. DOI: 10.1007/s00526-022-02404-3.
13. Yamaguchi M. 1995. Existence of periodic solutions of second order nonlinear evolution equations and applications. Funkcialaj Ekvacioj, 38: 519–538.

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.
Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 29.06.2023
Поступила после рецензирования 11.08.2023
Принята к публикации 17.08.2023

Received June 29, 2023
Revised August 10, 2023
Accepted August 14, 2023

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Рудаков Игорь Алексеевич – доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана; Московский авиационный институт, г. Москва, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Igor A. Rudakov – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Moscow State Technical University. H. E. Bauman; Moscow Aviation Institute, Moscow, Russia

Прикладная математика & Физика, 2023, том 55, № 3. С. 273–284.
Applied Mathematics & Physics, 2023, Volume 55, No 3. P. 273–284.

УДК 517.946
MSC 35K59
оригинальное исследование

DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-3-273-284

Двусторонние оценки решений с обострением режима нелинейного уравнения теплопроводности с квадратичным источником

[1] **Вирченко Ю. П.**, [2] **Ченцова В. В.**
[1] Белгородский государственный технологический университет им. В. Г. Шухова,
Россия, 308012, Белгород, ул. Костюкова, 46
virch@bsu.edu.ru
[2] Белгородский государственный национальный исследовательский университет,
Россия, 308015, Белгород, ул. Победы, 85
chentsova@bsu.edu.ru

Аннотация. Изучаются решения $u(x,t) \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$ с компактным носителем одномерного нелинейного уравнения теплопроводности с вырождающимися при $u(x,t) = 0$: линейным по u транспортным коэффициентом и самосогласованным источником $\alpha u + \beta u^2$ общего вида. Устанавливаются двусторонние оценки времени обострения для решений с компактным носителем, функционально зависящие от начальных условий $u(x,0)$.

Ключевые слова: аппроксимация решений, компактный носитель, нелинейное уравнение теплопроводности, обострение режима, эталонное решение

Для цитирования: Вирченко Ю. П., Ченцова В. В. 2023. Двусторонние оценки решений с обострением режима нелинейного уравнения теплопроводности с квадратичным источником. *Прикладная математика & Физика*, 55(3): 273–284. DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-3-273-284

Original Research

Bilateral Estimates of Solutions with Blow up Regime of the Nonlinear Heat Equation with a Quadratic Source

[1] **Yuri P. Virchenko**, [2] **Victoria V. Chentsova**
[1] Belgorod State Technological University named after V. G. Shukhov,
46 Kostyukova st., Belgorod, 308012, Russia
virch@bsu.edu.ru
[2] Belgorod National Research University,
85, Pobeda st., Belgorod, 308015, Russia
chentsova@bsu.edu.ru

Abstract. Solutions $u(x,t) \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$ with compact support of one-dimensional quasilinear heat transfer equation degenerated at $u(x,t) = 0$ is studied. The equation has the linear on u transport coefficient and self-consistent source $\alpha u + \beta u^2$ of general type. Bulateral estimates of the blow-up time for solutions with a compact support are established, functionally depended on the initial conditions $u(x,0)$.

Keywords: Approximation of Solutions, Compact Support, Nonlinear Equation of Heat Transfer, Blow-up Regime, Etalon Solution

For citation: Virchenko Yu. P., Chentsova V. V. 2023. Bilateral Estimates of Solutions with Blow up Regime of the Nonlinear Heat Equation with a Quadratic Source. *Applied Mathematics & Physics*, 55(3): 273–284. (in Russian)
DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-3-273-284

1. Введение. Квазилинейное параболическое уравнение общего вида

$$\dot{u} = \left(k(u)u_x\right)_x + f(u_x, u)\,, \tag{1}$$

относительно функций $u(x,t)$, $x \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$, в котором $u_x \equiv \partial u/\partial x$, $\dot{u} \equiv \partial u/\partial t$ с *транспортным коэффициентом* $k(u) \geq 0$ и измеримой функцией $f(u_x, u)$ от текущих значений $u(x,t)$, $u_x(x,t)$ является основой для различных моделей, исследуемых в математичкой физике (см., например, [1]). При этом, как правило, интересуются неотрицательными решениями $u(x,t) \geq 0$ этого уравнения, удовлетворяющими нулевым краевым условиям. Особым случаем такого уравнения является такой, у которого $k(0) = 0$. В этом случае возможно возникновение решений со слабым разрывом, у которого с одной стороны от разрыва решение $u(x,t) = 0$ [1]. Это явление было предсказано в [2] и, в дальнейшем, исследовалось в различных работах (см., например, [3]), в частности, изучались условия остановки фронта [4]. Если функция $f(u_x, u)$ в уравнении представима в виде $f(u_x, u) = (F(u))_x + g(u)$, где $F(u)$ дифференцируема по u, а функция $g(u)$ измерима. Если $F(u)$ отлична от линейной и стремится к бесконечности при $u \to \infty$, то, как известно, такое уравнение уже не имеет глобальных решений по причине образования за конечное время разрывов у решения $u(x,t)$. Слабые же решения задачи Коши при этом уже не определяются единственным образом. Слагаемое $(F(u))_x$ в этом случае описывает явление переноса. Для обеспечения единственности вводится понятие об энтропийном решении [5]. Изучению таких решений посвящено уже значительное число работ (см., например, [6] – [9]). В зависимости от свойств функции $g(u)$, решения уравнения (1) могут иметь различное качественное поведение [1]. Особый интерес представляет исследование решений $u(x,t)$ уравнения (1) при $f(u_x, u) = (F(u))_x + g(u)$ с $g(u) > 0$. В этом случае его решения могут переходить в т. н. *режим с обострением.* Такие решения $u(x,t)$ существуют только лишь на конечном интервале времени $t \in [0, t_*)$ так, что $u(x,t) \to \infty$ в какой-то точке $x \in \mathbb{R}$ при $t \to t_*$, где t_* называется *временем обострения.* Такой режим реализуется при определенном асимптотическом поведении этой функции $g(u) \sim u^\gamma$, $\gamma > 1$. Основное направление таких работ связано с изучением условий, при которых режим с обострением возникает, и определением глобальных характеристик соответствующих решений. Мы будем, далее, интересоваться частным случаем уравнения (1), у которого $F \equiv 0$. Функцию $g(u)$ в этом случае мы будем называть *самосогласованным источником.* Изучение режимов с обострением для такого уравнения имеет давнюю историю [10] – [16]. Их исследование суммировано в монографии [17]. Из более поздних достижений в исследовании режимов с обострением отметим работы [18], [19], где изучались: определение критического показателя нелинейности, вызывающей обострение, оценки времени обострения и размера компактной области, в которой такое обострение происходит.

В настоящей работе рассматривается вырождающееся уравнение (1) с $F \equiv 0$, в котором учитываются слагаемые не более чем квадратичные по функции u, а именно

$$\dot{u} = (uu_x)_x + \alpha u + \beta u^2 , \tag{2}$$

в котором α, $\beta \in \mathbb{R}$. Мы будем изучать решения на компактном носителе $[c_-, c_+] \subset \mathbb{R}$. Они обладают обострением режима при $\beta > 0$, а также «исчезают» за конечное время при $\beta < 0$. Мы предлагаем, по нашему мнению, альтернативный метод двустороннего оценивания времени обострения, впервые использованный одним из авторов в работах [20], [21] без его достаточного математического обоснования. Здесь мы ликвидируем этот пробел и надеемся, что этот метод получит в дальнейшем развитие.

2. Принцип максимума. В этом разделе мы докажем принцип максимума для квазилинейных параболических уравнений в той форме, которая представлена в монографии [17], в которой, однако, не дано его доказательство, а затем представим обобщение этого принципа для слабых решений с компактным носителем для вырождающихся уравнений такого типа.

Пусть $T > 0, K > 0$ – произвольные постоянные. Рассмотрим банахово пространство $\mathrm{C}_{2,1}([-K,K],[0,T])$ функций $u(x,t)$ двух переменных $\langle x, t\rangle$, дважды непрерывно дифференцируемых по $x \in [-K,K]$ и непрерывно дифференцируемых по $t \in [0,T]$ с нормой $\|u\| = \max_{j\in\{0,1\},k\in\{0,1,2\}} \ \max_{x\in[-K,K],t\in[0,T]} \left|\dfrac{\partial^{j+k}u(x,t)}{\partial t^j \partial x^k}\right|$.

Лемма 2.1. *Пусть функция $k'(u)$ удовлетворяет условию Липшица по $u \in \mathbb{R}$, а функция $f(u_x, u)$ удовлетворяет такому же условию по каждой из переменных $\langle u_x, u\rangle \in \mathbb{R}^2$. Тогда множества функций S_1 и S_2:*

$$\{u \in \mathrm{C}_{2,1}([-K,K],[0,T]) : \dot{u}(x,t) < \mathsf{L}[u](x,t)\}, \tag{3}$$

$$\{u \in \mathrm{C}_{2,1}([-K,K],[0,T]) : \dot{u}(x,t) > \mathsf{L}[u](x,t)\}, \tag{4}$$

где

$$\mathsf{L}[u](x,t) \equiv \Big[(k(u)u_x)_x + f(u_x,u)\Big](x,t) \tag{5}$$

открыты в пространстве $\mathrm{C}_{2,1}([-K,K],[0,T])$, а их замыканиями являются, соответственно, множества $\{u \in \mathrm{C}_{2,1}([-K,K],[0,T]) : \dot{u}(x,t) \le \mathsf{L}[u](x,t)\}$ и $\{u \in \mathrm{C}_{2,1}([-K,K],[0,T]) : \dot{u}(x,t) \ge \mathsf{L}[u](x,t)$.

Доказательство. Достаточно доказать первую часть утверждения. Положим, что функция $u(x,t)$ удовлетворяет неравенству $\dot{u}(x,t) < \underline{f}L[u](x,t)$. Ввиду непрерывности функции $\dot{u}(x,t) - \mathsf{L}[u](x,t)$ по паре переменных на прямоугольнике $[-K,K]\times[0,T]$, должно выполняться

$$-\varepsilon = \max_{x\in[-K,K],t\in[0,T]} \Big\{(\dot{u} - \mathsf{L}[u])(x,t)\Big\} < 0\,.$$

Добавив к функции $u(x,t)$ произвольную функцию $\delta(x,t)$ с достаточно малой нормой такой, чтобы выполнялось неравенство

$$\dot{\delta}(x,t) + \Big(\mathsf{L}[u] - \mathsf{L}[u+\delta]\Big)(x,t) < \varepsilon, \tag{6}$$

получим, что все функции $(u+\delta)(x,t)$ из $\mathrm{C}_{2,1}([-K,K],[0,T])$ составляют окрестность функции $u(x,t)$, содержащуюся в множестве типа (3). Возможность же выбора такой функции $\delta(x,t)$ вытекает из следующих оценок

$$|\dot{\delta}(x,t)+\Big(\mathsf{L}[u]-\mathsf{L}[u+\delta]\Big)(x,t)|\le\|\delta\|+\|\mathsf{L}[u]-\mathsf{L}[u+\delta]\|_0\le$$

$$\le\|\delta\|+\|u_{xx}\|\cdot\|k(u)-k(u+\delta)\|_0+\|\delta\|\cdot\|k(u+\delta)\|_0+\|u_x\|^2\cdot\|k'(u)-k'(u+\delta)\|_0+$$

$$+\|\delta\|\big(2\|u\|+\|\delta\|\big)\|k'(u+\delta)\|_0+\|f(u_x+\delta_x,u+\delta)-f(u_x,u)\|_0,$$

где посредством $\|\cdot\|_0$ обозначена норма в пространстве $\mathrm{C}([-K,K]\times[0,T])$ непрерывных функций $u(x,t)$

$$\|u\|_0=\max_{x\in[-K,K],t\in[0,T]}|u(x,t)|\,.$$

Норма $\|\delta\|$, также как и нормы разностей $\|k(u)-k(u+\delta)\|_0\le\|k'(u)\|_0\|\delta\|_0$, $\|k'(u)-k'(u+\delta)\|_0\le K(u)\|\delta\|_0$, $\|f(u_x+\delta_x,u+\delta)-f(u_x,u)\|_0\le L(u_x,u)\|\delta\|_0$ при $\|\delta\|_0<\varepsilon$, могут быть сделаны сколь угодно малыми, вследствие выполнимости условий Липшица для функций $k'(u)$ и $f(u_x,u)$ с зависящими от u_x и u коэффициентами $K(u)$, $L(u_x,u)$.

Точно так же доказывается утверждение об открытости множества (4). При этом нужно выбрать

$$\min_{x\in[-K,K],t\in[0,T]}\Big\{(\dot{u}-\mathsf{L}[u])(x,t)\Big\}=\varepsilon>0$$

и точно так же выбрать функцию $\delta(x,t)$, чтобы выполнялось неравенство (6). ∎

Теорема 2.1. *Пусть $u^{(1)}(x,t)$ и $u^{(2)}(x,t)$ — дважды непрерывно дифференцируемые по $x\in\mathbb{R}$ функции такие, что при $t\ge t_0\in\mathbb{R}_+$ они удовлетворяют неравенствам*

$$\dot{u}^{(1)}(x,t)\le\Big[\big(k(u^{(1)})u_x^{(1)}\big)_x+f(u_x^{(1)},u^{(1)})\Big](x,t)\,,\tag{7}$$

$$\dot{u}^{(2)}(x,t)\ge\Big[\big(k(u^{(2)})u_x^{(2)}\big)_x+f(u_x^{(2)},u^{(2)})\Big](x,t)\,,\tag{8}$$

соответственно. Если имеет место неравенство $u^{(1)}(x,t_0)\le u^{(2)}(x,t_0)$, $x\in\mathbb{R}$, то для любого $t>t_0$ также имеет место неравенство $u^{(1)}(x,t)\le u^{(2)}(x,t)$ при всех $x\in\mathbb{R}$.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда функция $u^{(1)}(x,t)$ такова, что в (7) реализуется точное неравенство. Допустим противное, что для некоторого $t'>t_0$ существует точка x', в которой реализуется касание графиков $u^{(1)}(x,t')$ и $u^{(2)}(x,t')$, то есть выполняются равенства $u^{(1)}(x',t')=u^{(2)}(x',t')$ и $u_x^{(1)}(x',t')=u_x^{(2)}(x',t')$. Кроме того, в этом случае должно выполняться неравенство $u_{xx}^{(1)}(x',t')\le u_{xx}^{(2)}(x',t')$. Не ограничивая общности, будем считать, что точка t' является первой из всех возможных точек такого типа. Следовательно, на основании (7) и (8) имеет место неравенство $\dot{u}^{(2)}(x',t')>\dot{u}^{(1)}(x',t')$, и поэтому, при достаточно малых $\varepsilon>0$, $u^{(2)}(x',t'+\varepsilon)>u^{(1)}(x',t'+\varepsilon)$, то есть в точке x' не происходит пересечение графиков $u^{(1)}(x,t')$ и $u^{(2)}(x,t')$ при $t'+\varepsilon$.

Точно также, доказывается, что не происходит пересечение графиков $u^{(1)}(x,t')$ и $u^{(2)}(x,t')$ ни в одной точке $t'>t_0$, если функция $u^{(2)}(x,t)$ такова, что точное неравенство реализуется в (8).

Распространим теперь доказательство на общий случай. Рассмотрим пары функций $\langle u^{(1)}(x,t),u^{(2)}(x,t)\rangle$ из пространства $\mathrm{C}_{2,1}([-K,K],[0,T])\times\mathrm{C}_{2,1}([-K,K],[0,T])$, принадлежащие конусу S, в котором выполняется неравенство $u^{(1)}(x,t)\le u^{(2)}(x,t)$. В этом пространстве множества $S_1\times\mathrm{C}_{2,1}([-K,K],[0,T])$ и $\mathrm{C}_{2,1}([-K,K],[0,T])\times S_2$ открыты, согласно Лемме 2.1. Из первой части доказательства следует, что множество $S\cap\big(S_1\times\mathrm{C}_{2,1}([-K,K],[0,T])\big)\cap\big(\mathrm{C}_{2,1}([-K,K],[0,T])\times S_2\big)$ не пусто и открыто. Тогда на замыкании этого множества справедливо утверждение теоремы для точек $\langle x,t\rangle\in[-K,K]\times[0,T]$. Переходом к пределу, сначала $K\to\infty$, а затем $T\to\infty$ получаем, что утверждение теоремы справедливо для всех пар $\langle u^{(1)}(x,t),u^{(2)}(x,t)\rangle$ функций с указанными в условии теоремы свойствами. ∎

Замечание. Представленное доказательство принципа максимума не предполагает единственность решения задачи Коши уравнения (1), что важно в рассматриваемом нами случае вырождающегося уравнения при $u=0$, когда единственность решения такой задачи может не иметь места.

Далее, будем изучать решения вырождающихся гиперболических уравнений (1), у которых функции $g(u)=f(u_x,u)$, $k'(u)$ удовлетворят условию Липшица и при этом $k(0)=0$, $k'(0)>0$. Класс таких уравнений обзначим посредстом $\mathfrak{B}$. Рассмотрим слабые решения $u(x,t)$ специального типа для таких уравнений, обладающие компактным носителем. Они конструируются следующим образом. Пусть $w(x,t)$ – «точное» решение уравнения (классическое решение), то есть имеет место $\dot{w}(x,t)=(k(w)w_x)_x+g(w)$. Допустим, что $w(x_-(t),t)=w(x_+(t),t)=0$. Определим

$$u(x,t)=\begin{cases}w(x,t), & x\in[x_-(t),x_+(t)];\\ 0, & \mathbb{R}\setminus(x_-(t),x_+(t)).\end{cases}$$

Если $u(x,t)$ не является точным решением, то, по крайней мере, в одной из точек $x' = x_{\pm}(t)$ производная $(du/dx)_{\langle x_{\pm}(t),t\rangle}$ не равна нулю.

Очевидно, что функции $u(x,t)$ являются слабыми решениями в случае, если $\lim_{x\to x_{\pm}(t)} |w_x(x,t)| < \infty$, так как имеет место

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \Big(\dot{w} - (k(w)w_x)_x - g(w)\Big)(x,t)dx = 0\,.$$

Класс всех таких слабых решений обозначим посредством $\mathfrak{K}$. Тогда справедлива

Теорема 2.2. *Пусть $u^{(1)}(x,t)$ и $u^{(2)}(x,t)$ — принадлежащие классу $\mathfrak{K}$ слабые решения уравнения класса $\mathfrak{B}$, которые при $t \ge t_0 \in \mathbb{R}_+$ удовлетворяют неравенствам*

$$\dot{u}^{(1)}(x,t) \le \Big[\big(k(u^{(1)})u_x^{(1)}\big)_x + g(u^{(1)})\Big](x,t)\,, \tag{9}$$

$$\dot{u}^{(2)}(x,t) \ge \Big[\big(k(u^{(2)})u_x^{(2)}\big)_x + g(u^{(2)})\Big](x,t)\,, \tag{10}$$

соответственно. Если имеет место неравенство $u^{(1)}(x,t_0) \le u^{(2)}(x,t_0)$, $x \in \mathbb{R}$, то для любого $t > t_0$ также имеет место неравенство $u^{(1)}(x,t) \le u^{(2)}(x,t)$ при всех $x \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Пусть функции $u^{(1)}(x,t)$ и $u^{(2)}(x,t)$ класса $\mathfrak{K}$ с носителями $[x_-^{(j)}(t), x_+^{(j)}(t)]$, $j \in \{1,2\}$ удовлетворяют неравенству $u^{(1)}(x,t_0) \le u^{(2)}(x,t_0)$ так, что $[x_-^{(1)}(t_0), x_+^{(1)}(t_0)] \subset [x_-^{(2)}(t_0), x_+^{(2)}(t_0)]$. Допустим, что в какой-то момент $t' > t_0$ найдется точка x', в которой выполняется $u^{(1)}(x',t') = u^{(2)}(x',t')$ и при достаточно малом $\varepsilon > 0$ имеет место $u^{(1)}(x',t'+\varepsilon) > u^{(2)}(x',t'+\varepsilon)$. Причем t' — первая точка среди всех возможных точек такого типа, и поэтому в точке t' имеет место включение $[x_-^{(1)}(t'), x_+^{(1)}(t')] \subset [x_-^{(2)}(t'), x_+^{(2)}(t')]$.

Если x' содержится внутри отрезка $[x_-^{(1)}(t'), x_+^{(1)}(t')]$, то неравенство $u^{(1)}(x',t'+\varepsilon) > u^{(2)}(x',t'+\varepsilon)$ невозможно при любом достаточно малом $\varepsilon > 0$, согласно доказательству Теоремы 2.1. Рассмотрим случай, когда $x' \in \{x_-^{(1)}(t'), x_+^{(1)}(t')\}$. Положим, для определенности, $x' = x_+^{(1)}(t)$. Если значения обеих функции $u^{(1)}(x,t)$ и $u^{(2)}(x,t)$ в окрестности точки $x_+^{(1)}(t)$ представляются точными решениями уравнения, то есть эта точка является крайней точкой носителя точных решений, то для нее опять справедливы рассуждения, приведенные в доказательстве утверждения Теоремы 2.1. Поэтому положим, что, по крайней мере, для одной из функций, точка $x_+^{(1)}(t)$ не является крайней точкой носителя точного решения. По этой причине, $(du^{(j)}/dx)_{\langle x_+^{(1)}(t'),t'\rangle} \ne 0$, $j \in \{1,2\}$. Тогда имеют место $u^{(1)}(x_+^{(1)}(t'),t') = u^{(2)}(x_+^{(1)}(t'),t') = 0$ и $0 \le \big(du^{(1)}/dx\big)^2(x_+^{(1)}(t'),t') < \big(du^{(2)}/dx\big)^2(x_+^{(1)}(t'),t')$. Следовательно, ввиду свойств функции $k(u)$, в этой точке выполняется неравенство

$$\big[\dot{u}^{(1)}(x,t')\big]_{x=x_+^{(1)}} = k'(0)\bigg[\Big(\frac{du^{(1)}}{dx}\Big)^2_{\langle x_+(t'),t'\rangle} - \Big(\frac{du^{(2)}}{dx}\Big)^2_{\langle x_+(t'),t'\rangle}\bigg] < 0\,.$$

Поэтому неравенство $u^{(1)}(x_+^{(1)}(t'),t) > u^{(2)}(x_+^{(1)}(t'),t)$, $0 < t - t' < \varepsilon$ также невозможно в этой точке, так как изменение со временем t каждой из функций $u^{(1)}(x,t)$, $u^{(2)}(x,t)$ в точке $x = x_+^{(1)}(t')$ определяется на основе точного решения уравнения (1). ■

Теоремы 1 и 2 допускают очевидные обобщения. Условия Липшивости функций $k'(u)$, $f(u_x,u)$, $g(u)$ могут быть, без изменения стратегии доказательств теорем, ослаблены заменой на условия Гельдеровости этих функций по своим аргументам с произвольным сколь угодно малым показателем Гельдера и, более того, допустимо дальнейшее ослабление требований, предъявляемым к этим функциям.

3. Асимптотика решений с обострением. В этом разделе мы определим возможный тип асимптотического поведения при $t \to t_*$ решения $u(x,t)$ уравнения (2), если оно сосредоточено на компактном носителе, расположенном в некотором отрезке $[c_-,c_+]$ и в какой-то точке $x \in [c_-,c_+]$ это решение стремится к бесконечности. При этом значение t_* может быть как конечным, так и бесконечным.

Прежде всего, докажем утверждение, связанное с теоремой о дифференцировании функциональных последовательностей.

Лемма 3.1. *Пусть $\langle y_n(x); n \in \mathbb{N}\rangle$ — последовательность непрерывно дифференцируемых функций на $[c_-,c_+] \subset \mathbb{R}$ такая, что последовательность соответствующих производных $\langle y_n'(x); n \in \mathbb{N}\rangle$ равномерно ограничена $\max_{x\in[c_-,c_+]} |y_n'(x)| < M$ и сходится в каждой точке $x \in [c_-,c_+]$ к ограниченной измеримой функции $v(x)$, $x \in [c_-,c_+]$. Пусть, кроме того, существует точка $c \in [c_-,c_+]$, в которой существует предел*

$$\lim_{n\to\infty} y_n(c) \equiv y(c). \tag{11}$$

Тогда последовательность $\langle y_n(x); n \in \mathbb{N}\rangle$ равномерно сходится в каждой точке $x \in [c_-,c_+]$ к дифференцируемой функции

$$\lim_{n\to\infty} y_n(x) \equiv y(x) \tag{12}$$

такой, что $y'(x) = v(x)$.

Доказательство. Запишем выражение для функций $y_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$ в виде

$$y_n(x) = y_n(c) + \int_c^x v(\xi)d\xi + \int_c^x \left[y_n'(\xi) - v(\xi)\right]d\xi\,.$$

Для любого $\varepsilon > 0$, согласно теореме Егорова (см., например, [23]), найдется такое множество E_ε, для которого выполняется $\mathrm{mes}([c_-, c_+] \setminus E_\varepsilon) < \varepsilon$ и последовательность функций $\langle y_n'(x); n \in \mathbb{N}\rangle$ сходится к функции $v(x)$ равномерно при $x \in E_\varepsilon$. Можно считать, что множество E_ε замкнуто. Из оценки интеграла

$$\left|\int_c^x \left[y_n'(\xi) - v(\xi)\right]d\xi\right| \le \big(\max_{x\in[c_-,c_+]} |v(x)| + M\big)\mathrm{mes}([c_-, c_+] \setminus E_\varepsilon) + \mathrm{mes}(E_\varepsilon)\max_{x\in E_\varepsilon}|y_n'(x) - v(x)|,$$

ввиду (12), после перехода к пределу по $n \to \infty$, находим, что в каждой точке $x \in [c_-, c_+]$ имеет место неравенство

$$\limsup_{n\to\infty}\left|y_n(x) - y(c) - \int_x^x v(\xi)d\xi\right| \le \varepsilon\Big(\max_{x\in[c_-,c_+]} |v(x)| + M\Big).$$

Ввиду произвольности числа $\varepsilon > 0$, отсюда следует, что последовательность $\langle y_n(x); n \in \mathbb{N}\rangle$ равномерно сходится в каждой точке $x \in [a, b]$ к функции

$$y(x) = y(c) + \int_0^x v(\xi)d\xi. \tag{13}$$

Так как при этом последовательность $\langle y_n'(x); n \in \mathbb{N}\rangle$ сходится равномерно на E_ε, то, применяя теорему о дифференцировании функциональных последовательностей, находим, что $y'(x) = v(x)$ при $x \in E_\varepsilon$. Ввиду произвольности $\varepsilon > 0$, получаем, что это равенство выполняется везде в $[c_-, c_+]$. ■

Пусть решение $u(x, t)$ уравнения (2) с носителем, расположенным внутри $[c_-, c_+]$, таково, что в некоторых точках этого отрезка оно стремится к бесконечности при $t \to t_*$ так, что при $t > t_*$ решение $u(x, t)$ уже не имеет смысла. Допустим также, что при $t \to t_*$ решение $u(x, t)$ имеет асимптотическое поведение равномерное по $x \in [c_-, c_+]$. Это означает, что найдется такая функция $\varphi(t) \to \infty$ при $t \to t_*$, для которой существует конечный предел $\lim_{t\to t_*} u(x, t)/\varphi(t)$, представляющий ограниченную измеримую по $x \in [c_-, c_+]$ функцию

$$u(x) = \limsup_{t\to t_*} \frac{u(x,t)}{\varphi(t)} \ge 0\,,$$

тождественно не равную нулю. Из определяющих формул (12), (13) следует, что, в случае равномерности асимптотики, имеет место $u(x, t) = u(x)\varphi(t)(1 + o(1))$, где функция $o(t)$ равномерно по $x \in [c_-, c_+]$ стремится к нулю при $t \to t_*$. Справедлива

Теорема 3.1. *Если решение $u(x, t)$ уравнения (2) расположено на компактном носителе в отрезке $[c_-, c_+]$ и обладает равномерным по $x \in [c_-, c_+]$ асимптотическим поведением $u(x, t) = u(x)\varphi(t)(1 + o(1)) \to \infty$ при $t \to t_*$, то неотрицательная функция $u(x)$ дважды дифференцируема и удовлетворяет дифференциальному уравнению*

$$(uu_x)_x + \beta u^2 = A^2 u\,, \quad A = \mathrm{const} \tag{14}$$

так, что $\varphi(t) = \varphi(0)(1 - A^2\varphi(0)t)^{-1}$ и $t_* = [A^2\varphi(0)]^{-1}$.

Доказательство. Из уравнения (2), ввиду допустимости дифференцирования по t асимптотической формулы, следует, что

$$\left[\left(\frac{u(x,t)}{\varphi(t)}\left[\frac{u(x,t)}{\varphi(t)}\right]_x\right)_x - \varphi^{-2}(t)\dot\varphi(t)u(x) + \alpha\frac{u(x)}{\varphi(t)}\right](1 + o(1)) = -\beta u^2(x)\,.$$

Откуда, переходя к пределу $t \to t_*$, учитывая $u(x) \not\equiv 0$ и независимость правой части равенства от t, а также стремление $\varphi(t)$ к бесконечности, находим, что должны существовать предельные значения

$$\lim_{t\to t_*}\left(\frac{u(x,t)}{\varphi(t)}\left[\frac{u(x,t)}{\varphi(t)}\right]_x\right)_x \equiv v(x), \quad \lim_{t\to t_*}\varphi^{-2}(t)\dot\varphi(t) \equiv C = \mathrm{const},$$

для которых должно выполняться равенство $v(x) = Cu(x) - \beta u^2(x)$, а функция $\varphi(t)$ должна удовлетворять уравнению $\dot\varphi(t) = C\varphi^2(t)$. Из последнего уравнения следует, что $\varphi(t) = \varphi(0)(1 - C\varphi(0)t)^{-1}$. Так как, по построению, $\varphi(t) > 0$, то $\varphi(0) > 0$ и для того, чтобы $\varphi(t)$ стремилась к бесконечности необходимо, чтобы $C = A^2 > 0$. При этом $t_* = \left[A^2\varphi(0)\right]^{-1}$.

Ввиду того, что функция $u(x)$, по предположению, ограничена и измерима на $[a, b]$, то таким же свойством должна обладать функция $v(x)$. По этой же причине, применение для любой стремящейся монотонно к t_* последовательности $\langle t_n; n \in \mathbb{N}\rangle$ при $n \to \infty$ и соответствующей ей последовательности функций $\langle y_n(x) = [u(x, t_n)/\varphi(t_n)][u_x(x, t_n)/\varphi(t_n)]; n \in \mathbb{N}\rangle$ утверждение Леммы 2.1, заключаем, что к предельной функции $y(x) = u(x)\lim_{n\to\infty}[u_x(x, t_n)/\varphi(t_n)]$ эта последовательность сходится равномерно и $y'(x) = v(x)$. При этом в качестве точки c в формулировке Леммы 2.1 для функций $y_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$ полагаем $c = c_-$, так как, по предположению, $u(c_-, t_n) = 0$.

Так как функция $y(x)$ ограничена и измерима, то таким же свойством обладает функция $y(x)/u(x)$ в точках, где $u(x) \neq 0$. Рассмотрим последовательность функций $\langle [u_x(x, t_n)/\varphi(t_n)]_x; n \in \mathbb{N}\rangle$, стремящуюся к $y(x)/u(x)$ при $n \to \infty$, и при этом $u(c_-, t_n) = 0$. Так как $\lim_{n\to\infty} u_x(x, t_n)/\varphi(t_n) = u'(x)$, то, снова применив утверждение Леммы 2.1 для этой последовательности, находим, что $u'(x) = y(x)/u(x)$.

Из рассуждений последних двух абзацев следует, что $[u(x)u'(x)]' = v(x)$. Воспользовавшись равенством $v(x) = Cu(x) - \beta u^2(x)$, получаем формулу (14). ■

Применяя стандартный прием сведения к квадратурам автономного уравнения (14) второго порядка получаем

Следствие. *Класс всех допустимых функций равномерно асимптотически точно приближающих неотрицательные решения $u(x, t) \to \infty$ при $t \to t_*$ уравнения (2), сосредоточенные на компактном носителе $\operatorname{supp} u(x, t) \subset [c_-, c_+]$ не пуст, только если $\beta > 0$ и $c_+ - c_- \geq \pi\sqrt{2\beta}$, и он описывается формулой*

$$u(x, t) = \frac{2A^2}{3\beta}\left(1 - A^2\varphi(0)t\right)^{-1}\left(1 + \cos(L + (\beta/2)^{1/2}x)\right), \tag{15}$$

где $t_* = [A^2\varphi(0)]^{-1}$ и крайние точки $x_\pm$ носителя решения должны удовлетворять условиям $x_- > c_-$, $x_+ < c_+$, где

$$c_-(\beta/2)^{1/2} + L < \pi(2n_- + 1), \quad c_+(\beta/2)^{1/2} + L > \pi(2n_+ + 1), \tag{16}$$

$n_+ > n_-$. При этом необходимо, чтобы $c_+ - c_- \geq \pi(2\beta)^{1/2}$.

□ Формула (15) получается непосредственным вычислением общего решения уравнения. Крайние точки $x_\pm$ должны удовлетворять условиям $L + x_\pm(\beta/2)^{1/2} = (2n_\pm + 1)\pi$. Откуда следуют ограничения (16). При $n_- = 0$, $n_+ = 1$ получаем $c_+ - c_- > \pi\sqrt{2\beta}$. ■

4. Слабые эталонные решения. Целью этого раздела является построение *эталонных* слабых решений $u_\pm(x, t)$ уравнения (2), на основе которых будут найдены двусторонние оценки времени обострения t_* решений, сосредоточенных на компактном носителе, удовлетворяющем условию $c_+ - c_- > \pi\sqrt{2\beta}$, с $\beta > 0$. При этом функции $u_+(x, t)$ и $u_-(x, t)$ дают, соответственно верхнюю и нижнюю оценки локализованных решений $u(x, t)$.

Определим решения $w(x, t)$ уравнения (2), имеющих вид

$$w(x, t) \;=\; a(t) \;+\; b(t)\cos \pi L_*^{-1}(x + x_0)\,, \tag{17}$$

с неопределенными функциями $a(t)$ и $b(t)$ и параметром L_*. Подстановка этого выражения в уравнение (2) даёт нам следующее тождество

$$\dot{a}(t) + \dot{b}(t)\cos \pi L_*^{-1}(x + x_0) = \alpha a(t) + \beta a^2(t) + \pi^2 L_*^{-2} b^2(t) +$$

$$+(\alpha b(t) + 2\beta a(t)b(t) - \kappa\pi^2 L_*^{-2} a(t)b(t))\cos \pi L_*^{-1}(x + x_0) + (\beta - 2\pi^2 L_*^{-2})b^2(t)\cos^2 \pi L_*^{-1}(x + x_0)\,.$$

Гармонический баланс относительно переменной x, с необходимостью, приводит к равенству $L_* = \pi\,(2/\beta)^{1/2}$ и консервативной системе обыкновенных дифференциальных уравнений для функций $a(t)$, $b(t)$,

$$\dot{a} = \alpha a + \beta\left(a^2 + \frac{b^2}{2}\right), \quad \dot{b} = \alpha b + \frac{3}{2}\,\beta\, ab\,. \tag{18}$$

Таким образом, семейство эталонных решений $w(x, t)$ полностью описывается: $a(0), b(0)$ — начальными данными решений системы (18) и координатой x_0. Общий вид фазовой плоскости системы в зависимости от знака α представлен на рис. 1.

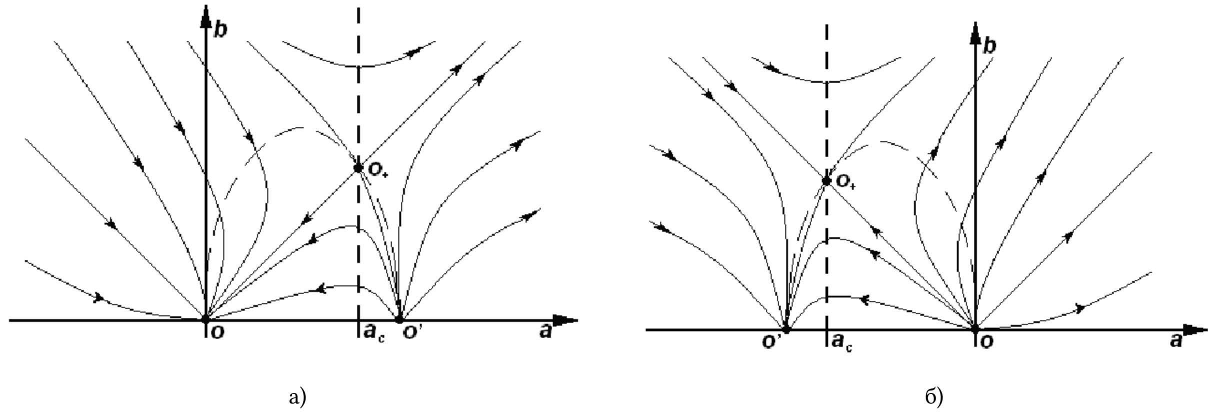

Рис. 1. Фазовая плоскость динамической системы $\langle a(t), b(t)\rangle$
Fig. 1. Phase plane of the dynamical system $\langle a(t), b(t)\rangle$

Эталонные решения для оценки точных неотрицательных решений $u(x,t)$ с компактным носителем уравнения (2) строятся на основе Теоремы 2.2. Прежде всего, заметим, что производная $w_x(x,t)$ ограничена, что позволяет использовать функцию $w(x,t)$ для построения слабых решений класса $\mathfrak{K}$. Введем эталонные решения $u^{(j)}(x,t) = a_j(t) + b_j(t)\cos \pi L_*^{-1}(x + x_0^{(j)})$, $j \in \{1,2\}$ с компактным носителем, согласно формуле (9), которые являются непрерывными неотрицательными функциями с носителями $[x_-^{(j)}(t), x_+^{(j)}(t)]$. На пары коэффициентов накладываются дополнительные условия $|a_j(t)| \le b_j(t)$, $b_j(t) > 0$, $j \in \{1,2\}$ для того чтобы существовала область значений координаты x, где, согласно построению, эталонные решения положительны и можно обеспечить их непрерывность. При выполнении указанных неравенств, $u^{(j)}(x,t) > 0$ в точке $-x_0^{(j)}$, $u^{(1,2)}(-x_0^{(j)}) = a_j(t) + b_j(t) > 0$, и для графиков функций $w(x,t)$, с парами коэффициентов $\langle a_j(t), b_j(t)\rangle$, имеются точки пересечения с уровнем $u = 0$, т. е. имеются решения уравнения $a_j(t) + b_j(t)\cos \pi L_*^{-1}(x + x_0^{(j)}) = 0$, в частности, при $t = 0$. В этом случае границы носителей определяются как решения уравнения $a_j(t) + b_j(t)\cos \pi L_*^{-1}(x_\pm^{(j)} + x_0^{(j)}) = 0$, $j \in \{1,2\}$ на части фазовой плоскости $\langle a, b\rangle$, ограниченной неравенством $b \ge |a|$.

Будем считать, что решение $u(x,t)$ обладает компактным носителем, начальный размер которого r меньше L_*. Тогда найдутся такие: точка $x_0^{(1)}$ и значения параметров $a_1(0)$, $b_1 > 0$, $|a_1| \le b_1$, для которых имеет место неравенство $u^{(1)}(x,0) \le u(x,0)$. Выбором параметров $x_0^{(1)}$, $a_1(0)$, $b_1(0)$ среди совокупности всех допустимых для них значений можно добиться, чтобы функция $u^{(1)}(x,0)$ аппроксимировала функцию $u(x,0)$ снизу наиболее оптимальным образом.

Точно также построим эталонное решение $u^{(2)}(x,t)$ с набором параметров $a_2(0)$, $b_2(0)$, $x_0^{(2)}$ таким образом, чтобы выполнялось неравенство $u^{(2)}(x,0) \ge u(x,0)$, но его носитель не превосходил L_*. Выбрав параметры $a_j(0), b_j(0), x_0^{(j)}$, мы, тем самым, зафиксировали решения $\langle a_j(t), b_j(t)\rangle$, $j \in \{1,2\}$ динамической системы $\langle a(t), b(t)\rangle$, для которых выбранные значения являются начальными данными. В результате, аппроксимируемое точное решение уравнения (2) подчинено, в силу Теоремы 2.2, неравенствам $u^{(1)}(x,t) \le u(x,t) \le u^{(2)}(x,t)$.

Пусть это решение обладает обострением режима с временем обострения $t_* < \infty$. Заметим, что при $\alpha \ge 0$ любое эталонное решение обладает обострением режима. Если же $\alpha < 0$, и, в этом случае, параметры $\langle a_-(0), b_-(0)\rangle$ могут быть выбраны так, что эталонное решение $u^{(1)}(x,t)$ также обладает обострением режима с некоторым временем обострения $t_*^{(1)}$, то, в силу указанного неравенства, $t_*^{(1)} \ge t_*$. Кроме того, обострением режима обладает эталонное решение $u_2(x,t)$ с временем обострения $t_*^{(2)}$, которое удовлетворяет неравенству $t_*^{(2)} \le t_*$.

В силу неравенства $u^{(1)}(x,t) \le u(x,t) \le u^{(2)}(x,t)$, зависящий от времени размер носителя $r(t)$ решения $u(x,t)$ также подчинен неравенствам $r_1(t) \le r(t) \le r_+(t) \le L_*$, где $r_j(t)$ — размеры носителей эталонных решений $j \in \{1,2\}$. Поэтому имеет место $r(t_*) \le L_*$. Принимая во внимание Теорему 3.1, можно утверждать, что предельные значения всех носителей совпадают и равны L_*.

Таким образом, мы получаем возможность оценивать время обострения и размер области локализации произвольного решения уравнения (2) с компактным носителем, не превосходящим L_*.

5. Оценки времени обострения режима. Проанализируем поведение траекторий системы на фазовой плоскости $\langle a, b\rangle$. Система имеет особые точки, координаты $\langle a, b\rangle$ которых являются решениями системы уравнений $\alpha a + \beta\Big(a^2 + b^2/2\Big) = 0$, $\big(\alpha + 3\beta a/2\big)b = 0$.

Точка пересечения $\langle a_c, 0\rangle$, $a_c = -2\alpha/3\beta$ прямых $b = 0$, $a = a_c$ лежит внутри эллипса, определяемого первым уравнением, так как эллипс пересекает ось a в точках 0 и $-\alpha/\beta$, и поэтому система имеет четыре особые точки $O = \langle 0, 0\rangle$, $O' = \langle -\alpha/\beta, 0\rangle$, $O_\pm = \langle a_c, \pm a_c\rangle$. Матрица системы, линеаризованной в произвольной точке $\langle a, b\rangle$, имеет вид

$$\begin{pmatrix} \alpha + 2\beta a & \beta b \\ 3\beta b/2 & \alpha + 3\beta a/2 \end{pmatrix}.$$

Она диагональна в точках O, O', где $b = 0$, и, следовательно, имеет пары собственных значений $\langle \alpha + 2\beta a, \alpha + 3\beta a/2\rangle$. В точке O они равны $\langle \alpha, \alpha\rangle$, а в точке O' — $\langle -\alpha, -\alpha/2\rangle$. Таким образом, точки O, O' являются узлами, устойчивость которых регулируется знаком α. В точках же $O_\pm$ матрица недиагональна –

$$\begin{pmatrix} -\alpha/3 & 2\alpha/3 \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}.$$

Собственные значения матрицы в этих точках равны $\langle \alpha, -2\alpha/3\rangle$. Так как они имеют разные знаки, то точки $O_\pm$ являются седловыми, в которых ориентация седла (набор направлений на дугах сепаратрисы, выходящих из этих точек) также определяется знаком α. Она изображена на рис. 1а, 1б. Точки поворота траектории системы на фазовой плоскости в направлении оси b могут лежать только на прямой $a = a_c$, а прямая $b = 0$ может быть только асимптотой траекторий. Точки поворота в направлении оси a лежат на эллипсе. Система обладает решениями с траекториями $b = \pm a$, так как при подстановках $b = \pm a$ оба уравнения системы (18) совпадают. Тогда траектории, проходящие через какую-либо точку $\langle a, b\rangle$ с $b > |a|$, полностью содержатся в квадранте, ограниченном этим неравенством. Лучи $a = b, a \geq 0$ и $a = -b, a \leq 0$, являющиеся траекториями системы. Они содержат особую точку O с $a = 0$, которая является неустойчивым узлом при $\alpha > 0$. Наоборот, при $\alpha < 0$, эта особая точка является устойчивым узлом с $a = 0$. Кроме того, при $\alpha < 0$, луч $a = b$ содержит седловую точку O_+ с $a = 2|\alpha|/3\beta = -a_c$, а, при $\alpha > 0$, седловую точку O_+ содержит луч $a = -b$. Этот анализ показывает, что векторное поле системы на плоскости $\langle a, b\rangle$ имеет вид, изображенный на рис. 1а при $\alpha < 0$ и на рис. 1б при $\alpha > 0$.

В общем случае система (18) интегрируется подстановкой $a(t) = e^{\alpha t}A(t)$, $b(t) = e^{\alpha t}B(t)$, посредством которой она сводится к системе

$$\dot{A} = \beta\, e^{\alpha t}\left(A^2 + \frac{1}{2}B^2\right), \quad \dot{B} = \frac{3}{2}\beta\, e^{\alpha t}\, AB, \tag{19}$$

имеющей масштабно инвариантные траектории. Последнее свойство позволяет определить траектории системы (18) сведением к однородному уравнению

$$\frac{dA}{dB} = \frac{2A^2 + B^2}{3AB}. \tag{20}$$

Для построения эталонных решений $u_j(x, t)$, $j \in \{1, 2\}$ необходимо определить решения $\langle a(t), b(t)\rangle$ системы (18), которые подчинены условию $b(t) > |a(t)|$. Тогда соответствующие им пары функций $\langle A(t), B(t)\rangle$ также должны быть подчинены условию $B(t) > |A(t)|$. Траектории, определяемые уравнением (20), не зависят от постоянных α, β. При $A > 0$ из (20) следует, что A возрастает с увеличением B, т. е. траектория, начинаясь в правой полуплоскости, остается в ней. Если же $A < 0$, то из (20) следует, что функция B от A является убывающей. Если траектория находится в квадранте $\{\langle A, B\rangle : B > |A|\}$, то она не может пересечь прямую $B = 0$. Она может только попасть в точку $\langle 0, 0\rangle$, либо пересечь прямую $A = 0$ под прямым углом (т. к. $dB/dA = 0$) и перейти в правую полуплоскость. Покажем, что реализуется второй случай.

Уравнение (20) интегрируется стандартной подстановкой $w(B) = A/B$ так, что для функции $w(B)$ получается следующее уравнение, $B(dw/dB) = (1 - w^2)/3w$. Посредством разделения переменных, получаем семейство его решений

$$|1 - w^2| = (b_0/B)^{2/3} \tag{21}$$

с произвольной постоянной $b_0 > 0$.

Точка $\langle 0, b_0\rangle$, в которой выполняется $w(B) = 0$, является точкой пересечения траекторией прямой $A = 0$. Значение $b_0 = 0$ соответствует вырожденному случаю – траектории, состоящей из полупрямых $B = -A$ при $A < 0$ и $B = A$ при $A > 0$. При $w(B) < 1$ имеем следующую формулу для траекторий на плоскости $\langle A, B\rangle$, лежащих в квадранте $\{\langle A, B\rangle : B > |A|\}$,

$$A = \pm B\left(1 - (b_0/B)^{2/3}\right)^{1/2}, \tag{22}$$

где знаки (+) и (−) соответствуют частям траектории, лежащим, соответственно, в правой и левой полуплоскостях. Из (22) следует, что имеет место асимптотическая эквивалентность $B \sim \pm A$ при $B \to \infty$.

Наряду с траекториями (22), существуют траектории, которые описываются формулой (21) при $w^2 > 1$,

$$A = \pm B\left(1 + (b_0/B)^{2/3}\right)^{1/2}.$$

Однако для таких траекторий $|A| > B$, $B > 0$ и, следовательно, они расположены вне области $\{\langle A, B\rangle : B > |A|\}$, которая представляет интерес при конструировании эталонных функций $u^{(j)}(x,t)$.

Зависимость от времени для интересующих нас решений системы находится подстановкой формулы (22) во второе из уравнений системы (19)

$$\dot{B} \;=\; \pm\frac{3}{2}\beta e^{\alpha t}\cdot B^2\left(1 - (b_0/B)^{2/3}\right)^{1/2}.$$

В результате получаем уравнение для определения неявным образом функции $B(t)$

$$\pm b_0^{-1}\int\limits_{b_0/B}^{b_0/b(0)}\frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^{2/3}}} = \frac{3\beta}{2\alpha}(e^{\alpha t} - 1).$$

$$\begin{gathered}\left(\arcsin\,(b_0/b(0))^{1/3} - \arcsin\,(b_0/B)^{1/3}\right) + \\ +\left((b_0/b(0))^{1/3}\sqrt{1-(b_0/b(0))^{2/3}} - (b_0/B)^{1/3}\sqrt{1-(b_0/B)^{2/3}}\right) = \pm(\beta b_0/\alpha)\left(e^{\alpha t} - 1\right).\end{gathered} \tag{23}$$

Выражая в этом уравнении параметр b_0 через начальные данные $a(0)$, $b(0)$, $\left(b_0/b(0)\right)^{1/3} = \left[1 - \left(a(0)/b(0)\right)^2\right]^{1/2}$, находим уравнение для неявной функции $B(t)$

$$\begin{gathered}\left[\arcsin\left[1-\left(\frac{a(0)}{b(0)}\right)^2\right]^{1/2} - \arcsin\left(\frac{b(0)}{B}\right)^{1/3}\left[1-\left(\frac{a(0)}{b(0)}\right)^2\right]^{1/2}\right] + \\ +\frac{|a(0)|}{b(0)}\left[1-\left(\frac{a(0)}{b(0)}\right)^2\right]^{1/2} - \left(\frac{b(0)}{B}\right)^{1/3}\left[\left(1-\left(\frac{a(0)}{b(0)}\right)^2\right)\left(1-\left(\frac{b(0)}{B}\right)^{2/3}\left(1-\left(\frac{a(0)}{b(0)}\right)^2\right)\right)\right]^{1/2} = \\ = \pm(\beta b(0)/\alpha)\left(e^{\alpha t} - 1\right)\left(1-\left(\frac{a(0)}{b(0)}\right)^2\right)^{3/2}.\end{gathered} \tag{24}$$

Пусть $a(0) > 0$. Тогда $A(0) > 0$ и из первого уравнения (19) следует, что $\dot{A}(t) > 0$, т. е. $A(t) > 0$ в последующие моменты времени – движение происходит по части траектории на плоскости $\langle A, B\rangle$, расположенной в правой полуплоскости. Тогда в (24) нужно выбрать знак (+). Устремляя в этом случае $B \longrightarrow \infty$ в левой части формулы и полагая $t = t_*$ – в правой, находим формулу для времени обострения

$$t_* = \alpha^{-1}\ln\left(1 + \frac{\alpha}{\beta b(0)}\left(1-\left(\frac{a(0)}{b(0)}\right)^2\right)^{-3/2}\left[\arcsin\left[1-\left(\frac{a(0)}{b(0)}\right)^2\right]^{1/2} + \frac{a(0)}{b(0)}\left[1-\left(\frac{a(0)}{b(0)}\right)^2\right]^{1/2}\right]\right), \tag{25}$$

выражающее его через начальные данные. Выражения для $t_*^{(j)}$, $j \in \{1,2\}$ в этой и последующих формулах получаются посредством подстановок $a(0) \Rightarrow a_j(0)$ и $b(0) \Rightarrow b_j(0)$.

При $\alpha > 0$ выражение под знаком логарифма, заведомо, положительно, и время обострения определено для всех начальных данных. При $\alpha < 0$, для существования времени обострения, из требования положительности выражения под знаком логарифма, возникает ограничение, которое выражается следующим неравенством

$$\arcsin\left[1-\left(\frac{a(0)}{b(0)}\right)^2\right]^{1/2} + \frac{a(0)}{b(0)}\left[1-\left(\frac{a(0)}{b(0)}\right)^2\right]^{1/2} < \frac{\beta b(0)}{|\alpha|}\left(1-\left(\frac{a(0)}{b(0)}\right)^2\right)^{3/2}.$$

Равенство нулю указанного выражения дает нам уравнение сепаратрисы на рис. 1б, разделяющей на плоскости $\langle a, b\rangle$, области с начальными данными, которые приводят к обострению режима с областью, в которой движение системы (18) ограничено. Это уравнение при $a(0) > 0$ имеет вид

$$\arcsin\left[1-\left(\frac{a(0)}{b(0)}\right)^2\right] + \frac{a(0)}{b(0)}\left[1-\left(\frac{a(0)}{b(0)}\right)^2\right] = \frac{\beta b(0)}{|\alpha|}\left(1-\left(\frac{a(0)}{b(0)}\right)^2\right)^{3/2}.$$

Введем функцию C_+ от начальных данных,

$$C_+ = \left(1-\left(\frac{a(0)}{b(0)}\right)^2\right)^{-3/2}\left[\arcsin\sqrt{1-\left(\frac{a(0)}{b(0)}\right)^2} + \frac{a(0)}{b(0)}\sqrt{1-\left(\frac{a(0)}{b(0)}\right)^2}\,\right]$$

Тогда формула (25) принимает вид

$$t_* = \alpha^{-1}\ln\left(1 + \frac{\alpha}{\beta b(0)}C_+\right).$$

В частности, при $\alpha \to 0$, $t_* = C_+/\beta b(0)$.

Пусть, теперь, $a(0) < 0$, когда каждая траектория системы (18) состоит из двух частей, лежащих в левой и правой полуплоскостях на фазовой плоскости $\langle a, b\rangle$. Рассмотрим фиксированную траекторию при значениях t настолько больших, когда можно считать, что пересечение прямой $a = 0$ уже произошло. Если положить $B = b_0$ в формуле (23) со знаком (–), то для левой части траектории найдем

$$\arcsin\,(b_0/b(0))^{1/3} - \pi/2 + (b_0/b(0))^{1/3}\sqrt{1-(b_0/b(0))^{2/3}} = -(\beta b_0/\alpha)\left(e^{\alpha t_0} - 1\right), \tag{26}$$

где t_0 – момент времени пересечения прямой $a = 0$. Наоборот, заменив в (23) со знаком (+) начальное условие $b(0)$ на b_0,

$$\left(\pi/2 - \arcsin\,(b_0/B)^{1/3}\right) - (b_0/B)^{1/3}\sqrt{1-(b_0/B)^{2/3}} = (\beta b_0/\alpha)\left(e^{\alpha t} - e^{\alpha t_0}\right). \tag{27}$$

После перехода к пределу в этой формуле $B \to \infty$ и $t \to t_*$, получим уравнение для определения времени обострения режима, $\pi/2 = (\beta b_0/\alpha)\left(e^{\alpha t_*} - e^{\alpha t_0}\right)$. Из формул (26), (27) находим, выразив параметр b_0 в терминах начальных данных с учетом $a(0) < 0$,

$$\frac{\beta b(0)}{\alpha}\left(e^{\alpha t_*} - 1\right)\left(1 - \left(\frac{a(0)}{b(0)}\right)^2\right)^{3/2} = \pi - \arcsin\sqrt{1 - \left(\frac{a(0)}{b(0)}\right)^2} + \frac{a(0)}{b(0)}\sqrt{1 - \left(\frac{a(0)}{b(0)}\right)^2}. \tag{28}$$

Введя функцию

$$C_- = \left(1 - \left(\frac{a(0)}{b(0)}\right)^2\right)^{-3/2}\left[\pi - \arcsin\left[1 - \left(\frac{a(0)}{b(0)}\right)^2\right]^{1/2} + \frac{a(0)}{b(0)}\left[1 - \left(\frac{a(0)}{b(0)}\right)^2\right]^{1/2}\right],$$

представим формулу для времени обострения в следующем виде

$$t_* = \alpha^{-1}\ln\left(1 + \frac{\alpha}{\beta b(0)}C_\infty\right). \tag{27}$$

Эта функция положительна, так как последнее слагаемое в квадратных скобках не превосходит по модулю единицу. Поэтому при $\alpha > 0$ конечное время обострения всегда существует. Если же $\alpha < 0$, то для существования времени t_* необходимо, чтобы выражение под знаком логарифма было положительно, т. е. выполнялось условие $C_- < \beta b_0/|\alpha|$. При переходе к пределу $\alpha \to 0$ получается аналогичная формула $t_* = C_-/\beta b(0)$. Уравнение для сепаратрисы в области $a(0) < 0$ имеет вид

$$\frac{\beta b(0)}{|\alpha|}\left(1 - \left(\frac{a(0)}{b(0)}\right)^2\right)^{3/2} = \pi - \arcsin\left[1 - \left(\frac{a(0)}{b(0)}\right)^2\right]^{1/2} + \frac{a(0)}{b(0)}\left[1 - \left(\frac{a(0)}{b(0)}\right)^2\right]^{1/2}.$$

6. Заключение. Как уже было сказано во Введении, основная направленность работ по изучению дифференциальных уравнений, решения которых могут испытывать обострение режима, связана с определением условий его возникновения. Тем не менее желательным является получение более детальной информации о решениях начально-краевых задач для таких уравнений. При этом следует заметить, что в приложениях в тех областях, где эти уравнения применяются для описания эволюционных неустойчивостей с обострением режима, а именно, в физике плазмы [4], а также в физике полупроводниковых материалов [20], [21], подробная информация о начальных состояниях, как правило, отсутствует. Используются данные о значениях по порядку величины для грубых характеристик начальных условий $u(x, 0)$. В такой ситуации важно уметь решать начально-краевые задачи, хотя бы в виде асимптотических разложений, со случайными начальными условиями, принимающими значения в достаточно обширном множестве возможных случайных реализаций. При этом, конечно же, нельзя ограничиваться решениями с компактным носителем ограниченного размера. Необходимо проведение исследований решений среди множества функций, достаточно быстро стремящихся к некоторым положительным постоянным на границах разрешенной области. Наконец, естественно обобщать результаты анализа решений эволюционных уравнений, аналогичных (2), в многомерном случае, в особенности для размерностей 2 и 3, что связано с постановками задач математической физики, связанных с конкретными приложениями.

В настоящей работе найдены двусторонние оценки, функционально зависящие от начальных данных, времени обострения режима для решений с компактным носителем, имеющим размер так называемой фундаментальной длины [17]. Предположение о компактности носителя решения позволило исключить из рассмотрения влияние граничных условий и сосредоточиться на установлении зависимости времени обострения от начальных данных. Полученные результаты можно рассматривать как важный шаг при решении сформулированных общих проблем теории уравнений с обострением режима.

В заключение заметим, что в работе анализировался случай $\beta > 0$. Однако противоположный случай также может представлять интерес. В этом случае проявляется не обострение режима, а такая эволюция, при которой за конечное время решения превращаются в нулевое решение. Предлагаемый нами метод оценивая времени исчезновения решений остается без изменений.

References

1. Andreucci D., Tedeev A. F. 2005. Universal bounds at the blow-up time for nonlinear parabolic equations. Advances in Differential Equations. 10(1): 89–120.
2. Barenblatt G. I. 1956. Automodel solutions of Cauchy problem of nonlinear parabolic equation of the gas nonstationary filtration in porous medium. Applied mathematics and Mechanics. 20(6): 761–763.
3. Carrillo J. 1999. Entropy solutions for nonlinear degenerate problems. Archive for Rational Mechanics and Analysis 147: 269—361.
4. Danilov V. G., Maslov V. P., Volosov K. A. 1995. Mathematical Modelling of Heat and Mass Transfer Processes. Mathematics and Its Applications (MAIA, volume 348), 324.
5. Galaktionov V. A., Samarskii A. A. 1983. Methods of constructing approximate self-similar solutions of nonlinear heat equations. I. Mathematics of the USSR-Sbornik, 46(3): 291–321.
6. Galaktionov V.A., Samarskii A.A. 1983. Methods of constructing approximate self-similar solutions of nonlinear heat equations. II. Mathematics of the USSR-Sbornik, 46(4): 439–458.
7. Kalashnikov A. S. 1986. On the dependence of properties of solutions of parabolic equations in unbounded domains on the behavior of the coefficients at infinity. Mathematics of the USSR-Sbornik, 53(2): 399–410.
8. Kolmogorov A. N., Fomin S. V. 1961. Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis II. New York, Graylock Press, 486.
9. Kruzkov S. N. 1969. Generalized solutions of the Cauchy problem in the large for first order nonlinear equations. Doklady Akademii nauk SSSR, 187: 29–32.
10. Leibenzon L. S. 1930. The Motion of a Gas in a Porous Medium. M., Russian Academy of Sciences, 348.
11. Mikhailov A. P. 2002. Classification of unbounded solutions to a quasilinear transport equation. Computational Mathematics and Mathematical Physics, 42(6): 802–813.
12. Panov E. Yu. 2019. To the theory of entropy sub-solutions of degenerate nonlinear parabolic equations. arXiv:1910.08739v1 [math.AP] 19 Oct 2019.
13. Panov E. Yu. 2020. To the theory of entropy sub-solutions of degenerate nonlinear parabolic equations. Journal of Mathematical Sciences, 66(2): 292–313.
14. Panov E. Yu. 2020. To the theory of entropy sub-solutions of degenerate nonlinear parabolic equations. Mathematical Methods in the Applied Sciences. DOI: 10.1002/mma.6262.
15. Potemkina E.V. 1996. Peaking modes in the Cauchy problem for the inhomogeneous heat equation. Russian Mathematical Surveys, 51(6): 1223–1224.
16. Samarskii A. A., Galaktionov V. A., Kurdyumov S. P., Mikhailov A. P. 1979. Localization of the diffusion processes in media with constant properties. Proceedings of the Academy of Sciences, 247(2): 349–353.
17. Samarskii A. A., Zmitrenko N. V., Kurdyumov S. P., Mikhailov A. P. 1975. Effect of the met as table localization of heat in a medium with nonlinear heat conduction. Doklady Akademii nauk SSSR, 223(6): 1344–1347.
18. Samarskii A. A., Sobol' I. M. 1963. Examples of the numerical calculation of temperature waves. USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics, 3(4): 945-970.
19. Samarskii A. A., Galaktionov V. A., Kurdyumov S. P., Mikhailov A. P. 2011. Blow-Up in Quasilinear Parabolic Equations. Berlin, Walter de Gruyter, 554.
20. Tedeev A. F. 2004. Conditions for the time-global existence and nonexistence of a compact support of solutions of the Cauchy problem for quasilinear degenerate parabolic equations. Siberian Mathematical Journal, 45(1): 155–164.
21. Virchenko Yu. P., Vodyanitskii A. A. 1996. Semiconductors materials heat breakdown under action of the penetrating electromagnetic radiation. II. One-dimensional model analysis. Functional Materials, 3(3): 312–319.
22. Virchenko Yu. P., Vodyanitskii A. A. 2002. Heat localization and formation of secondary breakdown structure in semiconductor materials. II. Mathematical analysis of the model. Functional Materials, 9(4): 601–607.
23. Volosov K. A., Danilov V. G., Maslov V. P. 1988. Structure of a weak discontinuity of solutions of quasilinear degenerate parabolic equations. Mathematical Notes, 43(6): 479–485.

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.
Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 30.06.2023
Поступила после рецензирования 11.08.2023
Принята к публикации 17.08.2023

Received June 30, 2023
Revised August 11, 2023
Accepted August 17, 2023

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Вирченко Юрий Петрович – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры программного обеспечения, Белгородский государственный технологический университет им. В. Г. Шухова, г. Белгород, Россия

Ченцова Виктория Викторовна – аспирант, Белгородский государственный национальный исследовательский университет, г. Белгород, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Yuri P. Virchenko – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Professor of the Software Department, Belgorod State Technological University named after V. G. Shukhov, Belgorod, Russia

Victoria V. Chentsova – Graduate student, Belgorod National Research University, Belgorod, Russia